



République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche  
Scientifique  
Université Akli Mohand Oulhadj-Bouira

**Faculté des Sciences et des Sciences Appliquées  
Département de Génie Mécanique**

## **PROJET DE FIN D'ETUDE**

Présenté pour l'obtention du Diplôme de Master  
En génie mécanique  
Option énergétique

### **THEME**

**Étude numérique de la convection  
naturelle dans une cavité contenant  
une couche poreuse**

Par : **haddadi mohamed** et **chenaf youcef**

Soutenu le 26 / 09 / 2019

**Président jurés :** Mr. m.dahmen

**les jurés :** Mr. S.aberkan

Mr. m.marzouk

**Encadreur :** Mr. saber hamimid

2018/2019

## Sommaire :

Introduction générale.....	7
II.1. Introduction.....	23
II.2. Loi de Darcy généralisée.....	23
II.3. Modèle de Brinkman .....	24
II.4. Formulation de Forchheimer .....	25
II.5. Extension de Brinkman-Forchheimer de la loi de Darcy .....	25
II.6. Modèle physique .....	26
II.7. Equation de conservation (continuité, quantité de mouvement, énergie) .....	26
II.8. Adimensionnement des équations de conservation .....	29
II.9. conditions initiales et limites.....	30
III.1. INTRODUCTION .....	33
III.2. FORME GENERALE DES EQUATIONS DE CONSERVATION .....	33
III.2.1. Equation de masse: .....	33
III.2.2. Equation de la quantité de mouvement : .....	33
III.2.3. Equation de l'énergie :.....	34
III.3. LA METHODE DES VOLUMES FINIS.....	35
III.3.1. Principe.....	35
III.3.2. Maillage décalé.....	36
III.4. DISCRETISATION DES EQUATIONS DE CONSERVATION .....	39
III.5. Equation de continuité .....	43
III.6. Schémas numériques .....	44
III.7. COUPLAGE VITESSE-PRESSION .....	46
III.7.1. Introduction : .....	46
III.7.2. Algorithme SIMPLE .....	47
III.7.3. Algorithme SIMPLER .....	50
III.7.4. Algorithme SIMPLER transitoire .....	56
III.8. Relaxation .....	56
III.9. RESOLUTION DU SYSTEME LINEAIRE DES EQUATIONS DISCRETISEES .....	58
III.9.1. Algorithme de THOMAS (TDMA) .....	58
III.9.2. Application de l'algorithme de THOMAS à des problèmes à 2D (TDMA) .....	59
IV .1. Introduction.....	62
IV.2. Effet de et sur le transfert de chaleur et le débit de fluide:.....	62
Conclusion générale .....	70

## Résumé

On considère une enceinte rectangulaire bidimensionnelle contenant une couche d'épaisseur finie, poreuse et saturée de fluide, placée au centre de la cavité. Le changement de phase est négligé. Les limites solides verticales et horizontales sont supposées être isothermes et adiabatiques, respectivement. Un gradient de température horizontal est imposé, entraînant une convection de nature flottante. L'équation de Darcy, incluant les termes de Brinkman et de Forchheimer, est utilisée pour rendre compte des effets visqueux et d'inertie dans l'équation de quantité de mouvement, respectivement. Le problème est alors résolu numériquement dans le cadre d'une formulation Vitesse-Pression utilisant une méthode de volume fini basée sur l'algorithme SIMPLER standard. Les effets des paramètres déterminants (géométrique, hydrodynamique et thermique) sur l'écoulement des fluides et le transfert de chaleur sont étudiés.

## Abstract

A two-dimensional rectangular enclosure containing a fluid-saturated porous layer of finite thickness placed in the centre of the cavity is considered. Phase change is neglected. Vertical and horizontal solid boundaries are assumed to be isothermal and adiabatic, respectively. A horizontal temperature gradient is imposed, driving convection of buoyancy nature. The Darcy equation, including Brinkman and Forchheimer terms is used to account for viscous and inertia effects in the momentum equation, respectively. The problem is then solved numerically in the framework of a Velocity-Pressure formulation resorting to a finite volume method based on the standard SIMPLER algorithm. The effects of the governing parameters (geometric, hydrodynamic and thermal) on fluid flow and heat transfer are investigated.

يعتبر العنبة المستطيلة ثنائية الأبعاد التي تحتوي على طبقة محدودة من السوائل المشبعة والموجودة في وسط التجويف.

تم إهمال تغيير المرحلة من المفترض أن تكون الحدود الصلبة الرأسية والأفقية متساوية الحرارة والثابتة ، على التوالي. يتم فرض تدرج درجة الحرارة الأفقي ، مما أدى إلى الحمل الحراري من الطبيعة العائمة.

تستخدم معادلة دارسي ، بما في ذلك المصطلحان برينكمان وفورشيمر ، لحساب التأثيرات

والقصور الذاتي في معادلة الزخم ، على التوالي. ثم يتم حل المشكلة عددياً كجزء من تركيبة السر -

القياسية. تمت دراسة آثار المعلمات المحددة SIMPLER باستخدام طريقة حجم محدد بناءً على خوارزمية  
(هندسية وهيدروديناميكية وحرارية) على تدفق السد

## Nomenclature

$\mu_l$	La vitesse de filtration, la masse volumique
$\Delta p$	Le gradient de pression appliqué
$\mu_e$	La viscosité effective
$\rho$	La masse spécifique du fluide
F	la résultante des forces extérieures
$\mu_e$	La viscosité effective
A	Ratio d'aspect, $H.L^{-1}$
Cp	chaleur spécifique à pression constante, $J.kg^{-1}.K^{-1}$
Da	Numéro Darcy, $Da = K.H^{-2}$
$Ra^*$	Numéro de Rayleigh modifié par Darcy, $Ra^* = Ra.Da$
g	accélération gravitationnelle, $m.s^{-2}$
H	hauteur de l'enceinte, m
k	conductivité thermique, $W.m^{-1}.K^{-1}$
K	Perméabilité, $m^2$
L	largeur de l'enceinte, m
Nu	Numéro de Nusselt
$Nu_{avg}$	nombre moyen de Nusselt
p	pression de fluide, Pa
P	pression sans dimension
Pr	Numéro de Prandtl, $Pr = \epsilon / \gamma$ .
Ra	Numéro Rayleigh , $R a = \frac{g \ S \ \Delta \ T \ L^3}{\epsilon \ r}$ .
t	temps, s
T	température dimensionnelle, K
$T_c(T_H)$	température sur la paroi verticale gauche (droite) de la cavité $T_h > T_c, K$
$T_0$	température de référence $T_0 = \frac{T_c - T_H}{2}, K$
u	vitesse dans la direction x, $m.s^{-1}$
v	vitesse dans la direction y, $m.s^{-1}$
$\vec{V}$	vitesse du champ ( $u\vec{e}_x + v\vec{e}_y$ ), $m.s^{-1}$
x,y	coordonnées cartésiennes, m
X, Y	Coordonnées sans dimension
XP	largeur dimensionnelle de la couche poreuse, m
$Xp$	largeur sans dimension de la couche poreuse, $XP.L^{-1}$

## Symboles grecs

$\Gamma$	Diffusivité thermique, $m^2.s^{-1}$
$S$	coefficient de dilatation thermique: $: k^{-1}, -1/..._0(\partial... / \partial T)$
$\rho$	densité de fluide, $Kg.m^{-3}$
$\mu$	viscosité dynamique du fluide, $Kg.m^{-1}.s^{-1}$
$\nu$	viscosité cinématique, $m^2.s^{-1}$
$\Delta T$	la différence de température, $\Delta T = T_C - T_F$ , $K$
$\nu$	porosité de la couche poreuse
$\Psi$	fonction de flux:; $u = -\partial \Psi / \partial y$ ; $v = \partial \Psi / \partial x$ , $m^2.s^{-1}$
$\theta$	température sans dimension $\theta = \frac{T - T_0}{\Delta T}$ .
$\tau$	temps sans dimension

## Indices

$eff$	efficace propriété de la couche poreuse
0	état de référence

## **Introduction générale**

Le transfert de chaleur par convection naturelle dans les cavités, a longtemps présenté un intérêt dans le développement des systèmes d'ingénierie tel que : l'isolation thermique, les échangeurs de chaleur, le refroidissement des systèmes électroniques, les machines électriques, de la géophysique, les réacteurs nucléaires, l'énergie solaire et ainsi de suite. C'est dans ce contexte que ce travail repose. Au cours de ces dernières décennies, de nombreux scientifiques travaillent sur la deuxième loi de la thermodynamique. L'entropie est devenue un terme utilisé par les biologistes, mathématiciens, sociologues, économistes, architectes, et surtout par les physiciens.

L'utilité de l'analyse de la génération d'entropie dans le problème de la convection naturelle permet d'obtenir une indication sur les modifications possibles visant à améliorer la performance thermique du système.

Le mémoire est divisé en quatre chapitres :

- **Le premier chapitre** est consacré à la présentation une recherche bibliographique.
- **Le second chapitre** détaille la géométrie, le modèle mathématique, , le choix des variables adimensionnelles, et les conditions limites.
- **Le troisième chapitre** expose la méthode numérique utilisée.
- **Le quatrième et dernier chapitre** est porte sur la discussion et l'interprétation des différents résultats obtenus dans cet mémoire. Le travail sera terminé par une conclusion générale consacrée à la mise en évidence des principaux résultats obtenus.

# **Chapitre I**

## **Revue bibliographique**



Krishna et al. [1] ont analysé numériquement la convection naturelle dans une cavité carrée contenant un milieu poreux anisotrope, avec génération de la chaleur hydrodynamique et thermique. Ils ont constaté que les propriétés anisotropes ont une influence significative sur le comportement de l'écoulement et le transfert de chaleur.

Nabavizadeh et al [2] ont fait la simulation numérique de la convection naturelle dans une cavité carrée contenant un cylindre sinusoïdale à différentes amplitudes. Les résultats montrent que, en augmentant l'amplitude (le nombre d'ondulations) ou en changeant l'angle, peut changer le coefficient de transfert de chaleur, qui a une influence considérable sur la température et le champ de fluide.

Bahloul [3] a fait une étude analytique et numérique de la convection naturelle d'un fluide dans une cavité poreuse verticale. Une différence de température uniforme est appliquée à travers les parois verticales tandis que les parois horizontales sont adiabatiques. Les paramètres dont dépend la structure de l'écoulement sont le nombre de Rayleigh  $Ra$ , qui varie entre 10 et 10000 et le facteur de forme de la cavité  $A$  qui varie entre 1 et 20. Pour un grand nombre de Rayleigh, et sur la base des résultats numériques il a obtenu un modèle approximatif du régime de couche limite. Pour un chauffage élevé, il a donné un modèle simplifié pour le paramètre de stratification  $\beta = 1.22A - 0.47Ra^{0.46}$ . Il a montré aussi que le coefficient de stratification thermique  $\beta$  dépend essentiellement du rapport de forme de l'enceinte  $A$ , et devient presque indépendant du nombre de Rayleigh,  $Ra$ , dans le régime de la couche limite,  $\beta = (3/2) A$ . Il a utilisé la théorie de la stabilité linéaire du flux parallèle pour obtenir le nombre de Rayleigh critique pour une cavité longue ( $A \gg 1$ ). Il a constaté que l'écoulement est stable, indépendant du coefficient de stratification .

Baytas [4] a fait une analyse sur la production d'entropie dans une cavité poreuse saturée et inclinée pour un transfert de chaleur par convection naturelle laminaire en résolvant numériquement les équations de masse, de mouvement et d'énergie , il a utilisé la loi de Darcy et l'approximation de Boussinesq incompressible. Comme conditions aux limites de la cavité, deux parois opposées sont maintenues à températures constantes mais différentes, et les deux autres sont isolés thermiquement. Les paramètres considérés sont l'angle d'inclinaison et le nombre de Darcy-Rayleigh. Il a comparé ses solutions avec les résultats des recherches précédentes connues. Il a obtenu un excellent accord entre les résultats qui valident le code de calcul utilisé. Il a montré que la distribution d'entropie locale est faisable et peut fournir des informations utiles pour le choix d'un angle approprié d'inclinaison.

Kalla et al [5] ont fait une étude numérique sur la convection naturelle dans une couche poreuse allongée dans la direction horizontale. Toutes les faces de la cavité rectangulaire sont exposées à des flux de chaleur uniformes, le chauffage et le refroidissement étant appliqués sur les parois opposées. Le problème est formulé en termes du modèle de Darcy. Ils ont montré qu'il est possible d'utiliser l'hypothèse d'un écoulement parallèle pour obtenir une solution analytique décrivant les champs de fonction de courant et de température dans la région centrale de la cavité. Il a démontré aussi que des solutions multiples sont possibles, certaines d'entre elles étant instables. Il a employé une méthode aux différences finies pour obtenir des solutions numériques à partir des équations gouvernantes complètes. Ils ont analysé les effets des différents paramètres, notamment celui du nombre de Rayleigh  $Ra$ , et d'une constante  $a$  donnant la proportion entre les flux de chaleur horizontaux et verticaux.

Nawaf et al [6] ont étudié numériquement la convection naturelle dans une cavité carrée remplie d'un milieu poreux en régime transitoire. Ils ont utilisé le modèle de Darcy et le fluide est supposé un fluide standard de Boussinesq. La température de la paroi chaude (la paroi gauche) oscille dans le temps autour d'une valeur constante, tandis que la paroi froide (la paroi droite) est maintenue à une température constante, les parois horizontales sont adiabatiques. Ils ont présenté des résultats pour démontrer la variation temporelle des lignes de courant, des isothermes et du nombre de Nusselt. Lorsque la température de la paroi chaude oscille avec une forte amplitude et une forte fréquence, ils ont trouvé que le nombre de Nusselt devient négatif sur une partie de la période du nombre de Rayleigh  $10^3$ . Les valeurs négatives du nombre de Nusselt ont été trouvées parce qu'il n'y aura pas assez de temps pour transférer la chaleur de la paroi chaude vers la paroi froide. La valeur maximum du nombre moyen de Nusselt est observée pour une fréquence adimensionnelle de 450 dans la gamme considérée (1-2000) pour un nombre de Rayleigh  $10^3$

Varol et al [7] ont fait une étude numérique de la convection naturelle en milieu poreux saturé de fluide dans une enceinte rectangulaire avec une variation sinusoïdale du profil de température sur la paroi inférieure. Toutes les parois de l'enceinte sont isolées, sauf la paroi inférieure qui est partiellement chauffée et refroidie. Le milieu poreux est modélisé à partir des équations classiques de Darcy. Ensuite ils ont résolu numériquement ces équations en utilisant la méthode des différences finies. Ils ont analysé le problème pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh  $Ra$  dans la gamme  $10 \leq Ra \leq 1000$ , et pour différentes valeurs du facteur de

forme AR, avec  $0,25 \leq AR \leq 1,0$  et aussi pour différentes valeurs de l'amplitude de la fonction sinusoïdale de la température dans la gamme  $0,25 \leq A \leq 1,0$ . Ils ont trouvé que le transfert de chaleur augmente avec l'augmentation de la valeur de l'amplitude et diminue quand la valeur du facteur de forme AR augmente. Ils ont observé plusieurs cellules dans la cavité pour toutes les valeurs des paramètres considérés.

Barletta et al [8] ont étudié numériquement la convection naturelle dans une cavité carrée verticale remplie d'un milieu poreux saturé par un fluide. Ils ont utilisé le logiciel Femlab 3.1i (c COMSOL, Inc.). La cavité est chauffée par une paroi interne concentrique circulaire soumise à un flux de chaleur uniforme. Les parois de la cavité sont isothermes et l'écoulement est supposé être à deux dimensions, stationnaire et laminaire. Ils ont négligé l'effet de la dissipation visqueuse et aucune production d'énergie interne n'est considérée. Le milieu poreux satisfait à la loi de Darcy et la validité de l'approximation de Boussinesq est réalisée. Ils ont trouvé que la fonction de courant et la température dépendent du nombre de Rayleigh modifié  $Ra^*$  ; qui est le produit du nombre de Rayleigh  $Ra$  et du nombre de Darcy  $Da$ . Ils ont évalué les valeurs moyennes du nombre de Nusselt et de l'énergie cinétique. Ils ont fait des essais pour vérifier que la solution est indépendante du maillage et que Femlab produit généralement des résultats précis à quatre chiffres pour toutes les quantités testées.

Bouhadeh [9] a fait une étude numérique de la convection naturelle laminaire dans une enceinte bidimensionnelle à fond non uniforme (sinusoïdal) chauffée par une température constante et uniforme  $T_p$ , les parois verticales sont adiabatiques et la paroi supérieure est maintenue à une température constante  $T_a$ . Les paramètres dont dépend la structure de la convection naturelle sont : le nombre de Rayleigh qui varie entre  $10^3$  et  $5 \cdot 10^5$ , le rapport d'aspect de la cavité  $As=8$ , le facteur de forme A (entre 0.10 et 0.20) et le nombre de Prandtl (celui de l'eau). Il a discrétisé les équations gouvernant l'écoulement et le transfert thermique dans la cavité en utilisant une méthode implicite aux différences finies et la méthode des volumes de contrôle. Il a réalisé l'adéquation entre les champs des vitesses et de pression à l'aide de l'algorithme SIMPLE. L'influence des paramètres caractéristiques de la topographie de la surface d'échange (fond sinusoïdal), notamment de l'amplitude d'ondulation  $b$  et le facteur de forme de la cavité A, sur le transfert de chaleur et sur la structure de l'écoulement, sont mises en évidence la variation du nombre de Rayleigh a permis l'obtention de plusieurs types d'écoulements et plusieurs bifurcations entre ces

écoulements. Il a trouvé que les nombres de Nusselt locaux passent par des maximums aux sommets et aux creux et par des minimums entre eux.

Varol et al [10] Ont utilisé une technique de programmation *Support Vector Machines* (SVM), pour estimer la distribution de la température et le débit des champs dans une enceinte carrée poreuse dont la paroi verticale gauche est chauffée par trois appareils de chauffage isotherme, la paroi verticale droite est isotherme mais elle a une température plus froide que les appareils de chauffage alors que les deux autres parois sont restées adiabatiques. Ils ont établi une base de données par la résolution des équations régissant l'écoulement qui ont été écrites en utilisant le modèle de Darcy. Avec l'utilisation de la méthode des différences finies, ils ont écrit un code : *Dynamique des Fluides Computationnelle* (CFD). Ils ont établi une corrélation entre le nombre de Nusselt et le nombre de Rayleigh. Par l'utilisation de la base de données obtenue, d'autres valeurs de température et de vitesses ont été estimées par la technique SVM pour différents nombres de Rayleigh et différentes positions de chauffage. Ils ont montré que SVM est une technique utile sur l'estimation des lignes de courant et les isothermes. Ainsi, SVM réduit le temps de calcul et aide à résoudre certains cas, lorsque CFD ne parvient pas à résoudre en raison de l'instabilité numérique.

Baez et al [11] Ont étudié numériquement la convection naturelle dans une cavité carrée inclinée remplie d'un milieu poreux saturé par un fluide. Ils ont supposé que la température de la surface supérieure est constante et égale à  $T_c$ , la température de la surface inférieure est constante aussi et égale à  $T_h$ , avec  $T_h > T_c$ . les surfaces verticales étant adiabatiques. L'écoulement du fluide est considéré bidimensionnel, non stationnaire, et dans le cadre de l'approximation de Boussinesq. L'étude dépend du nombre de Rayleigh  $Ra$ , de l'angle d'inclinaison  $\theta$ , et du facteur de forme de la cavité  $A$ . Ils ont supposé que les résultats présentés sont de nouveaux résultats, soit pour des angles d'inclinaison pas signalés avant ou pour des nombres de Rayleigh élevés avec des facteurs de forme très importants. Ils ont trouvé plusieurs cellules dans les cavités rectangulaires poreuses avec un nombre de Rayleigh  $Ra > 10^2$  et pour certains angles. Pour un fluide homogène, un nombre de Rayleigh de l'ordre de  $10^5 - 10^6$ , et un facteur de forme  $A \gg 1$ , des cellules secondaires apparaissent pour certains angles et l'écoulement devient plus complexe.

Basak et al [12] Ont fait une étude numérique sur la convection naturelle dans une cavité carrée remplie d'une matrice poreuse. Ils ont utilisé la méthode des

éléments finis pour un chauffage uniforme et non uniforme de la paroi inférieure, la paroi supérieure est adiabatique et les parois verticales sont maintenues à une température froide constante. Le milieu poreux est modélisé en utilisant les équations de Darcy Forchheimer. Ils ont adopté la procédure numérique pour obtenir une performance constante sur une large gamme de paramètres (nombre de Rayleigh  $Ra$ ,  $10^3$   $Ra$   $10^6$ , nombre de Darcy  $Da$ ,  $10^{-5}$   $Da$   $10^{-3}$ , et le nombre de Prandtl  $Pr$ ,  $0,71$   $Pr$   $10$ ) à l'égard de la continuation et la discontinuation des conditions thermiques aux limites. Ils ont présenté les résultats numériques en termes des fonctions de courant, des isothermes et des nombres de Nusselt. Ils ont trouvé que le chauffage non uniforme de la paroi inférieure produit un plus grand taux de transfert de chaleur au centre de la paroi inférieure que le cas de chauffage uniforme pour tous les nombres de Rayleigh, mais le nombre moyen de Nusselt montre globalement un plus faible taux de transfert de chaleur pour le cas de chauffage non-uniforme. Ils ont trouvé que le transfert de chaleur est principalement dû à la conduction quand  $Da > 10^5$  indépendamment de  $Ra$  et  $Pr$ . Ils ont trouvé aussi que le transfert de chaleur par conduction est une fonction de  $Ra$  pour  $Da < 10^4$ . Ils ont donné les nombres de Rayleigh critiques pour que la conduction domine le transfert de chaleur et ils ont présenté les corrélations du Power Law entre le nombre moyen de Nusselt et les nombres de Rayleigh quand la convection domine le transfert.

Saeid et al [13] Ont étudié numériquement la convection naturelle dans une cavité poreuse. La paroi inférieure est chauffée et la paroi supérieure est refroidie tandis que les parois verticales sont adiabatiques. La paroi chaude est supposée avoir une température à variation spatiale et sinusoïdale sur une valeur moyenne constante, qui est supérieure à la température de la paroi supérieure froide. Les équations gouvernantes non-dimensionnelles sont dérivées sur la base du modèle de Darcy. Ils ont étudié les effets de l'amplitude de la variation de la température de la paroi inférieure et la longueur de la source de la chaleur sur la convection naturelle dans la cavité pour la gamme 20-500 du nombre de Rayleigh. Ils ont constaté que les valeurs du nombre de Nusselt moyen augmentent lorsque la longueur de la source de chaleur ou de l'amplitude de la variation de la température augmente. Ils ont constaté aussi que le transfert de chaleur par unité de la surface de la source de la chaleur diminue quand la longueur du segment chauffée augmente.

Moya et al [14] Ont analysé un écoulement bidimensionnel de la convection naturelle dans une cavité poreuse, rectangulaire, inclinée et saturée d'un fluide

newtonien par une résolution numérique des équations de masse, de mouvement et d'énergie. Ils ont utilisé la loi de Darcy et l'approximation de Boussinesq. Les conditions aux limites isothermes sont considérées, pour les deux parois verticales opposées, ils sont conservés à des températures constantes, mais différentes (la température de la paroi inférieure est supérieure à la température de la paroi supérieure) et les deux autres parois sont isolées thermiquement. Les paramètres externes considérés sont : l'angle d'inclinaison, le facteur de forme de la cavité et le nombre de Darcy- Rayleigh. Ils ont trouvé trois modes de convection principaux: la conduction, la convection unicellulaire et multicellulaire. Ils ont présenté les nombres de Nusselt locaux et globaux en fonction des paramètres externes. Ils ont exploré la multiplicité des solutions pour un rapport de forme égal à l'unité. L'existence de plus d'une solution est trouvée lorsque la paroi inférieure est à une température plus élevée et à une position horizontale ou proche de l'horizontale.

Dhifaoui et al [15] ont étudié expérimentalement et numériquement les échanges thermiques en convection naturelle dans un canal vertical poreux (porosité moyenne 40%). L'une des parois verticales qui forment le canal est soumise à un flux de chaleur constante tandis que l'autre est considérée adiabatique. L'écoulement dans le canal est supposé laminaire. L'étude expérimentale concerne un dispositif réalisé et complété par un système de mesures permettant la détermination du flux de chaleur appliqué à l'une des parois du canal, la température de la paroi active ainsi que celle au sein du milieu poreux (par acquisition des données). Une sonde multifonctions permet la mesure simultanée de la température et de la vitesse du fluide à la sortie du canal. La formulation mathématique du problème à résoudre étant faite, les équations sont discrétisées et résolues à l'aide de la méthode des volumes finis. Pour la résolution des équations discrétisées, on adopte la méthode LBL (line by line) ou encore la méthode de double balayage (double sweep). Le test de convergence choisi est basé sur les résidus et la conservation du débit de l'air entre l'entrée et la sortie du canal [15] Cette étude expérimentale et numérique montre que la température dans le milieu augmente en présence de la matrice solide. Une augmentation du nombre de Rayleigh (flux de chauffage) entraîne : une augmentation de la température du milieu, une augmentation de la vitesse d'infiltration, et une diminution de la pression dans le milieu.

Prasad et Tuntomo [16] ont utilisé l'équation de Darcy-Forchheimer pour étudier la convection naturelle dans une cavité poreuse rectangulaire pour une gamme

étendue des principaux paramètres. Ils ont analysé l'influence du paramètre inertiel sur l'écoulement et le transfert de chaleur. Les auteurs ont montré que le nombre de Nusselt diminue avec l'augmentation du paramètre inertiel. Un critère de transition de l'équation de Darcy vers celle étendue au régime de Forchheimer est également discuté. Dans le même contexte, Bejan et Poulikakos [17] et Lauriat et Prasad [18] ont mis en évidence la différence des résultats obtenus à l'aide d'un modèle de Darcy et d'un modèle de Darcy-Forcheheimer ou Darcy-Brinkman-Forcheheimer.

Vasseur et Robillard [19] ont également analysé le comportement des écoulements et des transferts par convection naturelle en utilisant des équations de couches limites déduites de la formulation de Darcy- Brinkman. Ils mettent en évidence la forte incidence des effets de parois sur l'écoulement et le transfert thermique. Ces effets qui se traduisent par la réduction de l'intensité de l'écoulement, sont d'autant plus prononcés que le milieu poreux est très perméable.

Mehta et Nandakumar [20] ont étudié l'effet de l'hétérogénéité du milieu dans le cas de la convection naturelle dans une couche poreuse verticale. Les écoulements sont engendrés par des flux de chaleur et de masse uniformes imposés le long des deux parois verticales de la couche poreuse. Ils ont trouvé que l'effet de l'hétérogénéité est sensible pour des variations importantes de perméabilité et de grandes valeurs du nombre de Rayleigh, du nombre de Lewis et du rapport de forces de volume. Les estimations des nombres de Nusselt et de Sherwood dans de telles conditions sont très différentes de celles obtenues pour un milieu homogène. Le transfert de masse par convection thermique à grands nombres de Rayleigh (50-2000) dans un milieu poreux chauffé par le bas a été traité théoriquement et numériquement par Trevisan et Bejan [21]. Les prédictions d'une analyse d'échelles proposée par ces auteurs se sont avérées en bon accord avec leurs résultats numériques.

Le Breton et al. [22] ont étudié numériquement la convection naturelle dans une cavité dont les parois verticales sont chauffées par un gradient de température et bordées par deux fines couches poreuses. La formulation à un seul domaine a été utilisée. L'effet des différents paramètres du problème tel que l'épaisseur de la couche poreuse, la perméabilité ainsi que le nombre de Rayleigh a été considéré. Les auteurs ont montré que le transfert de chaleur décroît considérablement en introduisant deux couches poreuses symétriques. Cette décroissance devient de plus en plus importante au fur et à mesure que le nombre de Rayleigh augmente, notamment pour les faibles valeurs de la perméabilité.

Baytas et al. [23] ont mené une étude numérique de la convection naturelle double diffusive dans une cavité carrée munie d'une couche poreuse horizontale. Les parois verticales sont maintenues à un gradient de température et de concentration tandis que les parois horizontales sont adiabatiques et imperméables. L'interface fluide-couche poreuse prend la forme d'une marche au milieu de la cavité comme représentée sur la **Figure I.5**. Ils ont constaté que la hauteur de la marche a un effet significatif sur la structure de l'écoulement et le transfert de chaleur et de masse

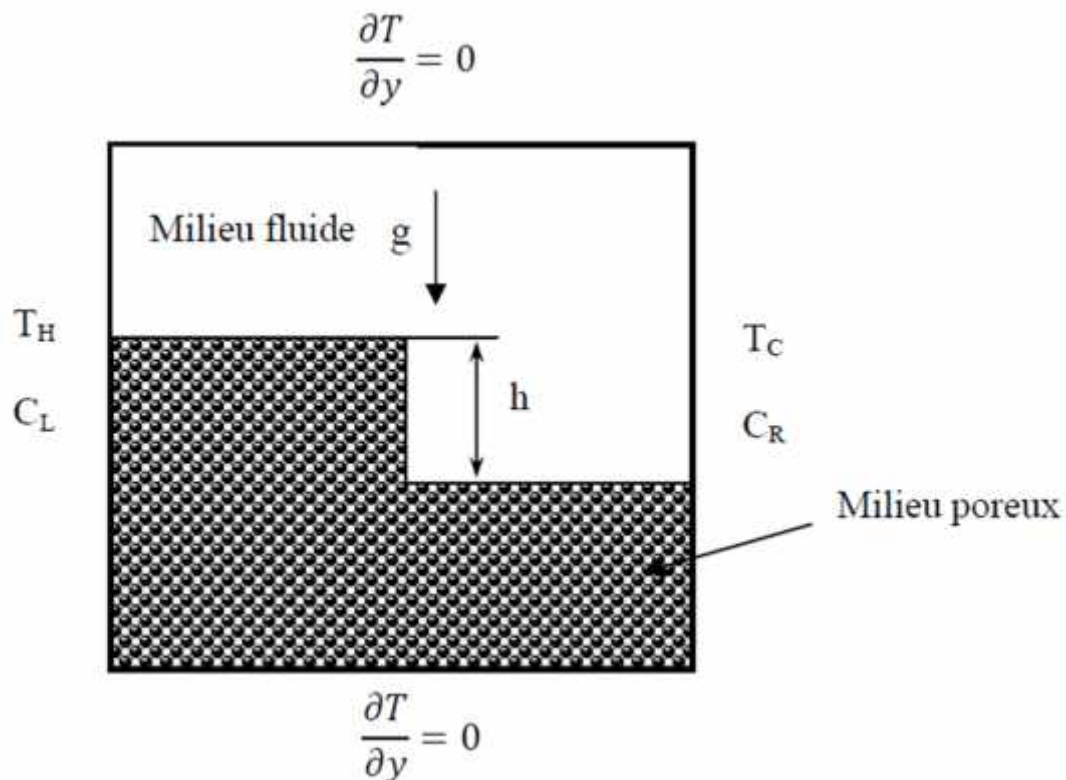


Figure I.1: Schéma considérée par Baytas et al. [23].

La convection naturelle double diffusive dans une cavité rectangulaire occupée par une couche poreuse verticale ou horizontale à été traitée numériquement par Gobin et Goyeau [24]. Dans cette étude, le modèle de Darcy-Brinkman est utilisé. Ils ont analysé l'effet de plusieurs paramètres. Les principaux résultats obtenus montrent que le transfert de chaleur et de masse sont favorisés par l'augmentation de l'épaisseur de la couche fluide et du nombre de Darcy. Par contre, l'augmentation des paramètres doubles diffusifs ( $Le$  et  $N$ ) diminuent le transfert de chaleur et de masse.

Mbaye et al. [25] ont étudié numériquement et analytiquement la convection naturelle dans une cavité rectangulaire poreuse inclinée avec la paroi droite épaisse. Les parois horizontales sont thermiquement adiabatiques et les parois verticales sont soumises à un flux de chaleur constant (**Figure I.2**). Plusieurs modèles d'écoulement



dans le milieu poreux sont utilisés. Ils ont constaté que la solution analytique actuelle est limitée au modèle de Darcy. L'effet d'inertie du modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer mène à une réduction du taux de transfert de chaleur. Ce dernier augmente avec l'augmentation du rapport de la conductivité thermique ainsi que l'angle optimal où le transfert de chaleur est maximum varie d'un modèle à l'autre.

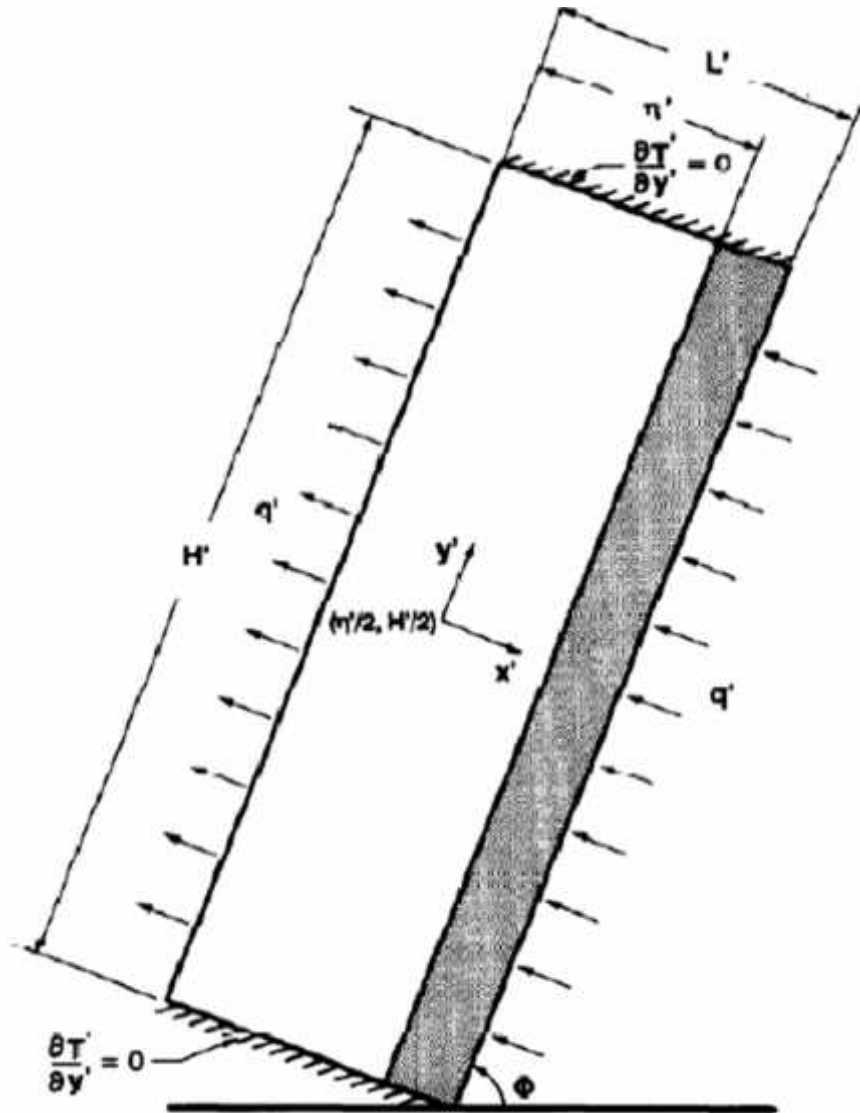


Figure 1.2: Schématisation du problème considéré par Mbaye et al. [25].

Khashan et al. [26] ont mené une étude de la convection naturelle de Rayleigh Bénard dans une cavité rectangulaire poreuse. Dans cette étude les auteurs ont adopté le modèle hors équilibre thermique local entre les particules de fluide et celles de solide. Plusieurs modèles d'écoulement dans le milieu poreux sont employés. Ils ont constaté que l'intensité d'écoulement est faible en utilisant le modèle de Darcy-

Brinkman-Forchheimer comparativement avec celle des autres modèles. En plus, l'état d'équilibre thermique locale peut être applicable pour :

- Faibles valeurs du nombre de Darcy et de Rayleigh.
- Valeurs élevées de coefficient d'échange interphase et de rapport de la conductivité thermique modifiée.

Une étude numérique de l'effet de l'état HETL sur la convection naturelle dans une cavité poreuse est menée par Pippal et Bera [27] avec un flux de chaleur imposé sur les parois verticales. Les parois horizontales sont thermiquement adiabatiques. La résolution des équations est effectuée numériquement par la méthode A.D.I pour une cavité rectangulaire et analytiquement par la théorie de flux parallèle pour une cavité mince. Les auteurs ont conclu que pour les très faibles valeurs du rapport de la conductivité thermique, le Nusselt moyen de fluide est une fonction décroissante avec le coefficient d'échange interphase pour une cavité mince. Cependant, pour une cavité rectangulaire le Nusselt moyen du fluide est invariant par rapport au coefficient d'échange interphase. Ils ont constaté aussi que l'écart de température entre les deux phases est négligeable pour des valeurs élevées du coefficient d'échange interphase et du rapport de la conductivité thermique modifiée. De plus, le transfert de chaleur est maximum (dans les deux phases) pour un rapport d'aspect  $A_0$  appartenant à l'intervalle  $[1,1.5]$  dans le cas ETL et  $A_0 = 6$  dans le cas HETL.

Bourouis et al. [28,29] ont présenté deux études numériques du transfert de chaleur par convection naturelle à l'intérieur d'une cavité poreuse hors équilibre thermique local. L'écoulement est déclenché en maintenant partiellement les deux parois verticales à des températures constantes et les deux parois horizontales isolées. Cet écoulement est régi par le modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer. La première étude s'intéresse à l'effet des paramètres de HETL ( $H$  et  $\lambda$ ), du nombre de Rayleigh et de Darcy. Par contre, la deuxième étude est consacrée pour examiner l'effet de l'inclinaison de la cavité. Ils ont conclu que :

- La position de la zone de chauffage/refroidissement et l'angle d'inclinaison de la cavité ont une influence considérable sur le taux de transfert et sur l'écart entre les deux nombres de Nusselt moyens du fluide et du solide.
- Les nombres de Nusselt moyens du fluide et du solide augmentent avec l'augmentation du nombre de Rayleigh et de Darcy.

- Aux faibles valeurs de ces deux nombres l'équilibre thermique entre les deux phases est valide, par contre en augmentant Ra et Da, le modèle hors équilibre thermique domine.

Amari et al. [30] ont utilisé le modèle de Darcy modifié et la loi d'un fluide en puissance pour étudier la convection naturelle au sein d'une cavité poreuse horizontale, saturée par un fluide non newtonien et soumis à des flux de chaleur horizontaux et verticaux. Ils ont montré que l'augmentation de l'indice de comportement ( $n > 1$ , c'est-à-dire pour un fluide dilatant) cause une forte réduction du transfert de chaleur. En effet, l'augmentation de la viscosité apparente freine, dans ce cas, d'une manière importante l'écoulement du fluide. L'inverse se produit pour un indice de comportement  $n < 1$  (c'est à dire fluide pour un pseudo élastique). Dans leur étude sur le comportement de l'écoulement ainsi que les transferts dans la gamme des grands nombres de Rayleigh thermique Younsi et al. [31] ont observé, pour une valeur donnée du nombre de Lewis, une structure multicellulaire correspondant à la compétition entre la convection thermique et la convection solutale. À partir d'une certaine valeur du rapport des poussées N, la structure de l'écoulement devient monocellulaire indiquant que le régime de transfert est solutal pur. Le caractère transitoire des coefficients des transferts thermique est massique a été mis en évidence. Dans cette étude, le modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer a été pris en compte. Le nombre de Lewis varie de 10 à 100, le nombre de Rayleigh de  $10^6$  à  $10^7$  et le rapport des forces de volume de 1 à 20.

Alloui et al. [32] ont étudié la convection naturelle dans un milieu poreux saturé par un fluide binaire dans une cavité carrée en utilisant le modèle de Darcy avec l'approximation de Boussinesq. La partie supérieure de la paroi est refroidie à une température constante et la partie basse est iso thermiquement chauffée, tandis que les parois verticales sont adiabatiques. Les particularités des deux écoulements de convection, monocellulaire et bicellulaire, sont décrites. L'existence d'un écoulement tri cellulaire est possible.

Mahidjiba [33] a étudié le problème de la convection naturelle pénétrante dans une couche inclinée rectangulaire, anisotrope et saturée par de l'eau froide. Les parois actives de la cavité (parois horizontales) sont soumises à des températures constantes. Les parois verticales sont supposées imperméables et adiabatiques. La loi de Darcy a été utilisée pour établir les équations du système. Il a été montré que les différents

nombres de Rayleigh critiques marquant le seuil de convection ont été obtenus pour le cas où la densité du fluide est liée linéairement avec la température ainsi que pour le cas où elle prend la forme quadratique avec la température. L'effet de l'anisotropie sur le transfert de chaleur par convection naturelle thermique dans une cavité horizontale saturée par un fluide soumise à des gradients de température non uniforme a été étudié par Degan et Vasseur [34]. Les couches sont chauffées par le bas par un flux de chaleur constant. L'anisotropie hydrodynamique du milieu poreux est prise en considération. Les directions principales de la perméabilité sont orientées dans une direction oblique à la gravité. Les auteurs ont trouvé que le nombre de Rayleigh critique est proportionnel à la perméabilité verticale.

La convection naturelle dans un milieu poreux vertical anisotrope a fait l'objet de peu de travaux et concernant surtout la convection naturelle thermique pure. Ni et Beckermann. [35] ont effectué une étude sur le transfert de chaleur d'une couche poreuse verticale. Le milieu poreux était anisotrope en perméabilité et en conductivité thermique. Il a été démontré que le transfert de chaleur au sein de la cavité est proportionnel au rapport des perméabilités et inversement proportionnel au rapport des conductivités thermiques. Ces résultats ont été comparés à ceux obtenus par Walker et Homsy [36] et Shiralkar et al. [37].

Ce même problème a été repris par Kimura et al. [38] pour des nombres de Rayleigh poreux thermique faibles. Dans les deux travaux, l'effet des rapports d'anisotropie en perméabilité et en conductivité thermique sur les transferts de chaleur a été mis en évidence.

Bian et al. [39] ont considéré le problème de la convection naturelle au sein d'une cavité poreuse verticale chauffée et refroidie iso thermiquement par le coté et saturée par un fluide non newtonien. Le modèle de Darcy modifié a été utilisé pour caractériser le comportement non newtonien du fluide. Les équations de la couche limite ont été résolues analytiquement en introduisant une transformation similaire. La structure de l'écoulement, au centre de la cavité, a été déterminée en utilisant la forme intégrale de l'équation d'énergie. Les résultats ont montré que le nombre de Nusselt moyen dépend du nombre de Rayleigh et de l'indice de comportement. L'influence de l'indice de comportement sur les champs de fonction de courant et de température a aussi été mise en évidence. En utilisant le même modèle, Bian et al. [40] ont également étudié l'effet de l'inclinaison de la cavité poreuse. Les résultats ont montré que le taux de transfert de chaleur atteint son maximum pour un angle d'inclinaison

compris entre  $90^\circ$  et  $180^\circ$ . L'influence de l'inclinaison est d'autant plus importante que l'indice de comportement est faible.

# **Chapitre 2 : Formulation mathématique :**

## II.1. Introduction

Dans ce chapitre nous décrivons et nous formulons le modèle physique, les hypothèses simplificatrices ainsi que les conditions aux limites appropriées.

## II.2. Loi de Darcy généralisée

La dynamique des fluides homogènes dans, les milieux poreux, est décrite par la loi de Darcy établie en 1856 [45]. Cette loi, établie à partir d'écoulements unidirectionnels sur une colonne de sable, a mis en évidence la proportionnalité du gradient de pression appliquée et le débit d'eau traversant cette colonne. Depuis, les sciences hydrogéologiques sont basées sur la loi de Darcy même pour les écoulements multidirectionnels. Elle s'écrit :

$$\Delta p = -\frac{\mu l}{K} \vec{u} \quad (\text{II.1})$$

Où

$\mu l$  Est la vitesse de filtration,  $\rho$  et  $\mu$  sont respectivement la masse volumique et la viscosité dynamique du fluide,  $\Delta p$  le gradient de pression appliqué  $K$  la perméabilité du milieu poreux, De façon générale, cette grandeur est un tenseur qui se réduit à un scalaire dans l'hypothèse d'un milieu poreux isotrope. Le tableau II.1 fournit les valeurs de la perméabilité pour quelques matériaux poreux classiques. La détermination de  $K$  peut s'effectuer, soit de manière directe à partir de l'expérience en utilisant la loi de Darcy (II.1), soit de manière empirique en supposant valable la formule de Carman-Kozeny. Celle-ci donne une idée raisonnable de la perméabilité et s'écrit:

$$K = \frac{D_{p\text{max}}^2 \theta^3}{15 (1-\theta)^2} \quad (\text{II.2})$$

Matériaux	perméabilité
Brique	$4.8 \times 10^{-15} - 2.9 \times 10^{-13}$
Cigarette	$1.1 \times 10^{-9}$
Sable	$2 \times 10^{-11} - 1.8 \times 10^{-10}$
Terre	$2.9 \times 10^{-13} - 1.4 \times 10^{-11}$

Tableau II.1: Perméabilité de quelques matériaux poreux classiques.

Avec

$$D_{p2} = \frac{\int_0^{\infty} D_p^2 h(D_p) d_p}{\int_0^{\infty} D_p h(D_p) d_p} \quad (\text{II.3})$$

Où  $h(D_p)$  est la fonction de distribution des diamètres  $D_p$  des particules constitutives du milieu poreux. La loi de Carman-Kozeny donne de bons résultats lorsque les particules constitutives sont quasi sphériques; quant à la valeur 180, elle a été choisie en recherchant la meilleure corrélation avec les valeurs expérimentales.

La loi de Darcy a été vérifiée par de nombreuses expériences et retrouvée théoriquement par des modèles statistiques et thermodynamiques. Cependant son domaine d'application est limité aux écoulements laminaires caractérisés par un faible nombre de Reynolds

### II.3. Modèle de Brinkman

Ce modèle fournit une alternative intéressante à la loi de Darcy sous la forme

$$\nabla_p = -\frac{\mu l}{K} \vec{u} + \mu_e \nabla^2 u \quad (\text{II.4})$$

Où  $\mu_e$  est appelée la viscosité effective, souvent prise égale à la viscosité du fluide saturant  $\mu l$ . Ce modèle est donc composé de deux termes visqueux, le terme classique de Darcy ainsi qu'un terme diffusif analogue à celui qui apparaît dans l'équation de Navier-Stokes. Cette approche peut paraître spé cieuse mais elle a le grand avantage de conserver la structure des équations de la mécanique des fluides Newtoniens et donc de permettre une adaptation rapide des modèles numériques issus de la mécanique des fluides aux milieux poreux. L'idée de base est ici que la présence des particules dans le fluide génère une force volumique de traînée dans l'équation de quantité de mouvement, proportionnelle à la vitesse du fluide et à l'inverse d'un facteur identifié à la perméabilité du milieu. Dans ses travaux originaux, Brinkman [46] avait supposé que la viscosité effective était égale à celle du fluide ce qui n'est pas vrai en général. Lundgren [47] a montré que ce modèle n'était valable que pour des milieux poreux de forte porosité.

Dans la suite de ce travail, nous utiliserons l'équation de Brinkman généralisée [48] en ajoutant à (II.4) les termes inertiels pour obtenir

$$\rho = [\partial^{-1} \partial t u + \partial^{-2} (u \cdot \nabla) u] = -\nabla p - (\mu l / K) u + \mu_e \nabla^2 u + F \quad (\text{II.5})$$



Où  $\rho$  est la masse spécifique du fluide et  $F$  la résultante des forces extérieures. Les termes inertiels doivent bien évidemment s'exprimer en termes de la vitesse intrinsèque du fluide mais nous les avons écrits en fonction de la vitesse de filtration. Nous avons montré que l'équation de Brinkman pouvait se déduire des principes de l'Extended Irreversible Thermodynamics (EIT) sous réserve de certaines hypothèses

## II.4. Formulation de Forchheimer

Dans le cas d'un écoulement de faible intensité, l'équation de Darcy suffit pour décrire l'écoulement. En revanche, avec l'augmentation de la vitesse, l'effet inertielle, non linéaire devient important et l'équation de Darcy devient insuffisante pour décrire l'écoulement. Ward propose dans ce cas de remplacer l'équation de Darcy par l'équation :

$$\nabla_p = -\frac{\mu}{K}\vec{u} + bK^{-\frac{3}{2}}\rho_f|\vec{u}|u \quad (\text{II.6})$$

Le premier terme du second membre est le terme de Darcy et le second terme est connu sous le nom de terme de Forchheimer,  $b$  étant une constante adimensionnelle.

## II.5. Extension de Brinkman-Forchheimer de la loi de Darcy

Brinkman a ajouté un terme à l'équation de Darcy pour prendre en compte les effets des contraintes visqueuse, Forchheimer, de sa part, a ajouté un terme pour tenir compte des effets d'inertie pour des écoulements à grande vitesse (grand nombre de Reynolds). Pour tenir compte des effets des parois et d'inertie simultanés, on a ajouté les deux termes à la loi de Darcy pour élargir le domaine de validité de cette loi, et par analogie avec l'équation de Navier-Stokes l'extension de Brinkman-Forchheimer de la loi de Darcy dans le régime non stationnaire s'écrit sous la forme :

$$P \left[ \underset{1}{\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}} + \underset{2}{\left[ \frac{\vec{u}}{\varepsilon} \cdot \vec{\nabla} \right] \frac{\vec{u}}{\varepsilon}} \right] = \underset{3}{-\frac{\mu}{K} \vec{u}} + \underset{4}{\vec{\rho}_g} - \underset{5}{\vec{\nabla} P} + \underset{6}{\mu \Delta \vec{u}} - \frac{c_f}{\sqrt{K}} \rho |\vec{u}| u \quad (\text{II.7})$$

- 1) Forces inertielle macroscopiques.
- 2) Terme de Darcy.
- 3) Force de volume.
- 4) Gradient de pression.

- 5) Terme visqueux de Brinkman.
- 6) Terme Forchheimer (force inertielle microscopiques).

## II.6. Modèle physique

Le domaine considéré est une enceinte rectangulaire bidimensionnelle (largeur  $L$ , hauteur  $H$ , rapport de longueur  $A = H / L$ ) contenant une couche d'épaisseur finie, poreuse et saturée de fluide, placée au centre de la cavité et délimitée par deux couches de fluide verticales. De largeur égale. Les surfaces verticales sont maintenues à température constante (à  $x = 0$ ) et (à  $x = L$ ) telles que > donnant ainsi lieu au phénomène de convection libre dans la cavité. Les murs horizontaux sont considérés comme adiabatiques (des gradients de température normaux nuls sont imposés aux surfaces horizontales).

Le système composite fluide / poreux, les conditions aux limites et le système de coordonnées du problème considéré sont décrits à la Fig.1.

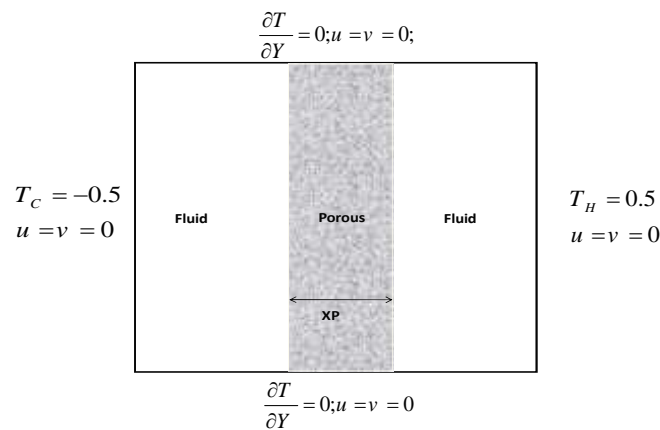


Figure II.1: Représentation schématique de la cavité.

## II.7. Equation de conservation (continuité, quantité de mouvement, énergie)

Le milieu poreux est complètement disposé avec le fluide et est supposé être macroscopiquement isotrope, homogène et en équilibre thermique local.

Le fluide est supposé satisfaire les hypothèses classiques d'un fluide newtonien incompressible. L'approximation de Boussinesq est satisfaite en supposant que la

densité du fluide est une constante, sauf dans le terme déterminant de l'équation de quantité de mouvement où elle varie linéairement avec les deux températures

$$\dots(T) = \dots_0 [1 - S_T (T - T_0)] \quad (\text{II.8})$$

$$\text{Où: } S_T = -\frac{1}{\dots_0} \left( \frac{\partial \dots}{\partial T} \right)_P$$

En outre, le modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer est utilisé dans l'équation du moment.

### Région fluide

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.9})$$

$$\dots \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \sim \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.10})$$

$$\dots \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \sim \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \dots_{ref} g \quad (\text{II.11})$$

$$\dots C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \dots C_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.12})$$

Avec l'hypothèse de Boussinesq:  $\dots_{ref} = \dots - \dots_0 = -S_t (T - T_0)$

### Région poreuse

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.13})$$

$$\frac{1}{v} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{v^2} u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{v^2} v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\dots} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\sim_{eff}}{\dots v} \nabla^2 u - D_x \quad (\text{II.14})$$

$$\frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{v^2} u \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{v^2} v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\dots} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\sim_{eff}}{\dots v} \nabla^2 v + S_t (T - T_0) g - D_y \quad (\text{II.15})$$

$$\left( \dots C_p \right)_{eff} \frac{\partial T}{\partial t} + \left( \dots C_p \right)_f \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k_{eff} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.16})$$

$$\left( \dots C_p \right)_{eff} = v \cdot \left( \dots C_p \right)_f + (1-v) \left( \dots C_p \right)_s \quad (\text{II.17})$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{u^2 + v^2} \quad (\text{II.18})$$

Où  $D_x$  ( $D_y$ ) est la résistance de la matrice par unité de volume du support poreux dans la direction x- (y-).

Portant notre attention sur la traînée de la matrice solide par unité de volume, elle peut être prise sous la forme:

$$D = AV + BV^2 \quad (\text{II.19})$$

Pour un écoulement unidimensionnel de vitesse  $V$ , la forme d'expression de traînée ci-dessus est supportée par une variété de corrélations à lit tassé et à lit fluidisé, y compris la corrélation largement utilisée d'Ergun.

Pour un écoulement bidimensionnel, on peut montrer que la contribution de traînée de la matrice solide dans la direction x (y) est de la forme:

$$D_x = Au + B(u^2 + v^2)^{1/2}u \quad (\text{II.20})$$

$$D_y = Av + B(u^2 + v^2)^{1/2}v \quad (\text{II.21})$$

En résolvant, l'expression de traînée vectorielle dans la direction y.

Dans le présent travail, nous considérons la corrélation d'Ergun avec les constantes A et B donnée par:

$$A = 150 \frac{(1-v^2)}{v^3} \frac{\tau_f}{D_p^2} \quad (\text{II.22})$$

$$B = 1.75 \frac{(1-v^2)}{v^3} \frac{\tau_f}{D_p}$$

Il convient toutefois de noter que des corrélations appropriées peuvent être utilisées dans différentes plages de la porosité du lit pour obtenir le comportement d'écoulement non-Darcien à l'intérieur du milieu poreux pour une simulation générale.

La relation de traînée matricielle solide ci-dessus peut également être exprimée en termes de perméabilité moyenne en définissant:

$$K = \frac{v^3 D_p^2}{150(1-v)^2} \quad (\text{II.23})$$

Maintenant, le composant de glissement de matrice solide, peut s'écrire comme suit:

$$D_x = \frac{\tilde{v}_f u}{K} + \frac{1.75}{\sqrt{150}} \frac{\dots_f}{\sqrt{K}} \frac{|\bar{V}|}{v^{3/2}} u \quad (\text{II.24})$$

$$D_y = \frac{\tilde{v}_f v}{K} + \frac{1.75}{\sqrt{150}} \frac{\dots_f}{\sqrt{K}} \frac{|\bar{V}|}{v^{3/2}} v \quad (\text{II.25})$$

## II.8. Adimensionnement des équations de conservation

Les propriétés effectives du milieu poreux (indice *eff*) sont généralement une fonction complexe de la porosité et de la tortuosité de la matrice solide ainsi que de la vitesse du fluide local. Dans les simulations suivantes, l'intérêt n'est pas centré sur l'impact de ces paramètres et, dans un souci de simplicité, les propriétés du fluide correspondantes sont utilisées tout au long de l'étude.

$$\frac{1}{v} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{v^2} u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{v^2} v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\dots} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\tilde{eff}}{\dots v} \nabla^2 u - \frac{\tilde{eff}}{\dots k} u - \frac{1.75}{\sqrt{150}} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{|\bar{V}|}{v^{3/2}} u \quad (\text{II.26})$$

$$\frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{v^2} u \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{v^2} v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\dots} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\tilde{eff}}{\dots v} \nabla^2 v + S_t (T - T_0) g - \frac{\tilde{eff}}{\dots k} v - \frac{1.75}{\sqrt{150}} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{|\bar{V}|}{v^{3/2}} v$$

(II.27)

$$\left( \dots C_p \right)_{eff} \frac{\partial T}{\partial t} + \left( \dots C_p \right)_f \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k_{eff} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.28})$$

$$\left( \dots C_p \right)_{eff} = v \cdot \left( \dots C_p \right)_f + (1-v) \left( \dots C_p \right)_s \quad (\text{II.29})$$

À la lumière de la description qui précède et en utilisant le changement de variables suivant:

$$\dagger = \frac{t}{\frac{H^2}{r_{eff}}} \quad , \quad X = \frac{x}{H} \quad , \quad Y = \frac{y}{H} \quad , \quad U = \frac{uH}{r_{eff}} \quad , \quad V = \frac{vH}{r_{eff}}$$

$$P = \frac{v^2 p H^2}{\dots r_{eff}^2} \quad , \quad " = \frac{T - T_0}{\Delta T}$$

Les équations qui régissent l'écoulement de convection naturelle bidimensionnelle instable dans la cavité poreuse en utilisant la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie peuvent s'écrire comme suit:

### Région fluide

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (\text{II.30})$$

$$\frac{\partial U}{\partial \dagger} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \text{Pr} \nabla^2 U \quad (\text{II.31})$$

$$\frac{\partial V}{\partial \dagger} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \text{Pr} \nabla^2 V + Ra \text{Pr}_n \quad (\text{II.32})$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \dagger} + \left( U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) = \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (\text{II.33})$$

### Région poreuse

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (\text{II.34})$$

$$v \frac{\partial U}{\partial \dagger} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \text{Pr} v \nabla^2 U - \frac{\text{Pr}}{Da} v^2 U - \frac{1.75}{\sqrt{150}} \frac{v^{1/2}}{\sqrt{Da}} \left| \sqrt{U^2 + V^2} \right| U$$

(II.35)

$$v \frac{\partial V}{\partial \dagger} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \text{Pr} v \nabla^2 V + Ra \text{Pr}_n v^2 - \frac{\text{Pr}}{Da} v^3 - \frac{1.75}{\sqrt{150}} \frac{v^{1/2}}{\sqrt{Da}} \left| \sqrt{U^2 + V^2} \right| V$$

(II.36)

$$\dagger \frac{\partial \theta}{\partial \dagger} + \left( U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) = \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (\text{II.37})$$

## II.9. conditions initiales et limites

$$\begin{array}{ll}
 U = V = 0, \theta = \theta_i & \text{POUR } \dagger = 0 \\
 U = V = 0, \theta = \theta_c = -0.5 & \text{POUR } 0 \leq Y \leq 1 \text{ at } X = 0 \\
 U = V = 0, \theta = \theta_H = 0.5 & \text{POUR } 0 \leq Y \leq 1 \text{ at } X = 1 \\
 U = V = 0, \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 & \text{POUR } 0 \leq X \leq 1 \text{ at } Y = 0
 \end{array}$$

$$U = V = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial Y} = 0$$

POUR  $0 \leq X \leq 1$  at  $Y = 1$

# **Chapitre III:**

## **Résolution numérique:**



### III.1. INTRODUCTION

Les équations d'un problème de mécanique des fluides sont des équations différentielles aux dérivées partielles non linéaires, elliptiques et couplées. En raison de leur complexité, elles ne peuvent être résolues analytiquement. Ces équations sont résolues à l'aide de méthodes numériques. Plusieurs techniques numériques sont disponibles dans la littérature. On peut distinguer les méthodes des différences finies, méthodes des éléments finis, méthodes des volumes finis et méthodes spectrales. La méthode des volumes finis, sans doute la plus employée actuellement, et celle que nous allons décrire, pour les différents avantages qu'elle offre, en particulier :

- les équations aux différences traduisent la conservation de bilan de quantité de mouvement et d'énergie. Cela signifie que l'extension du principe de conservation écrit sous une forme discrétisée pour un volume de contrôle typique fini est vérifiée pour l'ensemble du domaine numérique ;
- sa robustesse numérique, sa maniabilité et son formalisme très proche de la réalité physique (conservation des bilans d'énergie et de quantité de mouvement).

### III.2. FORME GENERALE DES EQUATIONS DE CONSERVATION

Le comportement du fluide est régi par les lois de conservation de la quantité de mouvement, de l'énergie et de la masse, les équations sont données ci-dessous dans le cas de l'écoulement bidimensionnel d'un fluide newtonien incompressible (en absence de toutes formes de génération interne de chaleur), en fonction des variables primitives, c'est-à-dire des deux composantes du vecteur vitesse  $u$  et  $v$  (suivant la direction  $x$  et  $y$ , respectivement) et de la pression  $p$ . Elles s'expriment comme suit :

#### III.2.1. Equation de masse:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (\text{III.1})$$

#### III.2.2. Equation de la quantité de mouvement :

Suivant la direction  $x$  :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (\text{III.2})$$

**Suivant la direction y :**

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \epsilon \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \dots g \quad (\text{III.3})$$

**III.2.3. Equation de l'énergie :**

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \Gamma \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{III.4})$$

Où :  $u, v$  sont respectivement les composantes horizontale et verticale de la vecteur vitesse,  $p$  le champ de pression,  $\epsilon = \frac{\tilde{\nu}}{\rho}$  la viscosité cinématique,  $g$  le champ

de gravité terrestre,  $\Gamma = \frac{\kappa}{\rho c_p}$  la diffusivité thermique.

Pour simplifier la présentation, les équations de conservation sont traduites mathématiquement par des équations de transport de fonctions scalaires qui prennent la forme générale d'une équation de convection-diffusion de  $w$  :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\dots w) + \nabla \cdot (\dots \vec{V} w) = \nabla \cdot (\Gamma \nabla w) + S_w \quad (\text{III.5})$$

Le premier terme de cette équation : terme transitoire,  $\frac{\partial}{\partial t} (\dots w)$ , représente l'accumulation de  $w$  dans le temps. Le second,  $\nabla \cdot (\dots \vec{V} w)$ , représente le transport de  $w$  par convection. Dans le second membre, le premier terme,  $\nabla \cdot (\Gamma \nabla w)$ , correspond au transport de  $w$  par diffusion, et le dernier,  $S_w$ , terme source, la production locale de  $w$ . Les termes :  $w, \Gamma$  et  $S_w$  sont expliqués en détail dans le tableau III.1.

Equation	W	$\Gamma$	$S_w$
Continuité	1	0	0
Quantité de mouvement suivant X	u	~	$-\frac{\partial P}{\partial x}$
Quantité de mouvement suivant Y	v	~	$-\frac{\partial P}{\partial y} - \dots g$
Energie	T	$\frac{\gamma}{c_p}$	0

Tableau III. 1 : Expressions de  $w$  et  $s$  pour les équations de conservation.

### III.3. LA METHODE DES VOLUMES FINIS

#### III.3.1. Principe

Les formulations conservatrices des équations aux dérivées partielles offrent l'avantage de pouvoir être reformulées de façon intégrale à l'aide du théorème de la divergence. Le principe de conservation est la loi fondamentale de la méthode des volumes finis. Il stipule que la variation d'une propriété dépend du flux net traversant la frontière  $S$  qui enveloppe le volume  $V$ . La méthode des volumes de contrôle est, donc, une technique de discrétisation pour la résolution des équations s'écrivant sous la forme conservatrice. Son principe est très simple, initialement développé dans le cas des écoulements compressibles par Godunov et Glimm, puis répandu dans la communauté scientifique des mécaniciens par Patankar & Spalding dans les années 70 et est discuté en détail par Patankar en 1980. Le principe de la méthode des volumes finis consiste à intégrer l'équation à résoudre sur chacun des volumes de contrôle.

Comme il est montré dans la figure III.1, le domaine est discrétisé à l'aide d'une grille dimensionnelle (uniforme ou non) dans les deux directions et orienté positivement vers la droite (Est) et vers le haut (Nord) respectivement. Pour écrire le schéma de discrétisation en un point  $P$ , on choisit une nomenclature adaptée au principe de la méthode de volumes finis pour le stockage des variables dans notre maillage et tout cela dans le but de rendre les choses plus faciles dans la suite de la discrétisation. On considère, donc, l'élément  $P$  comme indiqué sur la figure III.1, et on note que les indices majuscules ( $E, W, N, S$ ) caractérisent les variables ayant trait aux centres voisins de  $P$ , et les minuscules ( $e, w, n, s$ ) sont ceux qui nous ramènent aux faces de l'élément.

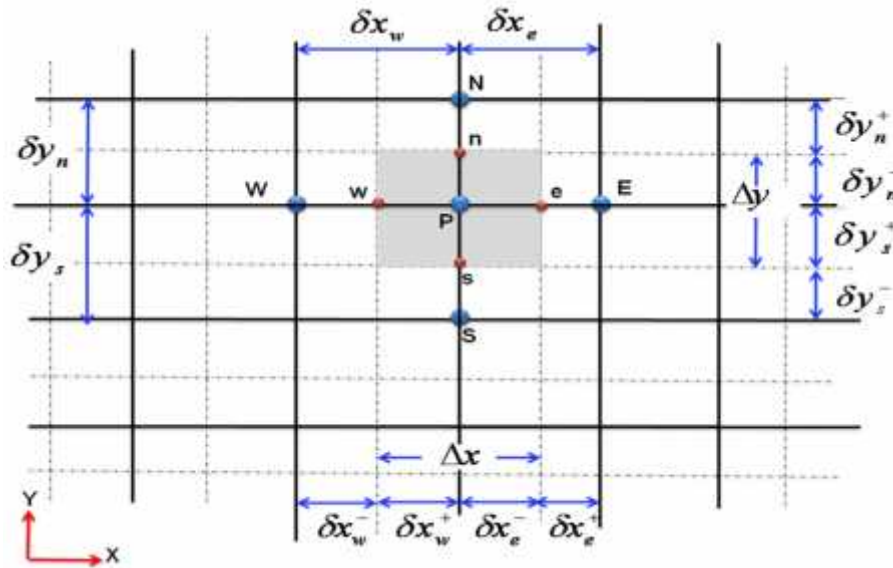


Figure III.1: Volume de contrôle dans le cas de 2D.

### III.3.2. Maillage décalé

La discrétisation d'une équation de transport diffusion sur un volume de contrôle par la méthode des volumes finis fait intervenir les valeurs des vitesses aux interfaces des volumes ( $u_e, u_w, v_n, v_s$ ). Il est donc intéressant de calculer ces vitesses directement sur les interfaces (sans avoir à effectuer d'interpolations). D'autre part, la discrétisation de l'équation de continuité et du gradient de pression avec l'utilisation d'une interpolation linéaire peut induire des erreurs importantes à cause de la répartition de pression ou de vitesse en "damier" (un champ de pression oscillatoire dans un maillage collocatif, est vu comme un champ uniforme). Pour contourner ces difficultés on préfère utiliser des grilles décalées "staggered grid" Cependant, des méthodes récentes ont été proposées sur des maillages collocatifs par Rhie et Chow qui éliminent les problèmes d'oscillations néfastes au moyen d'interpolation appropriée

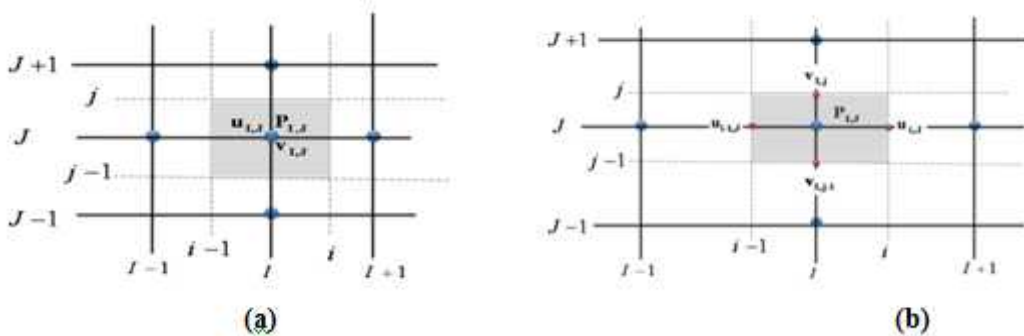


Figure III.2: Maillage de la formulation vitesse-pression : (a) maillage collocatif ; (b) maillage décalé

On décompose le maillage principal (figure III.2) en trois maillage secondaires. Un maillage principal est construit pour calculer la pression, la température, la densité ( $P, w, \dots$ ) et pour l'équation de conservation de masse (au centre de chaque volume de contrôle). Deux maillages décalés vers la droite et vers le haut respectivement sont utilisés pour le calcul des vitesses ( $u, v$ ) dans les deux directions (sur les faces du volume de contrôle), c'est-à-dire que les inconnues du problème ne sont pas toutes calculées sur le même maillage de calcul. On peut employer pour des variables différentes des maillages différents, des volumes de contrôle différents, des points de stockage différents. L'arrangement relatif aux différentes variables est schématisé sur la figure 3.

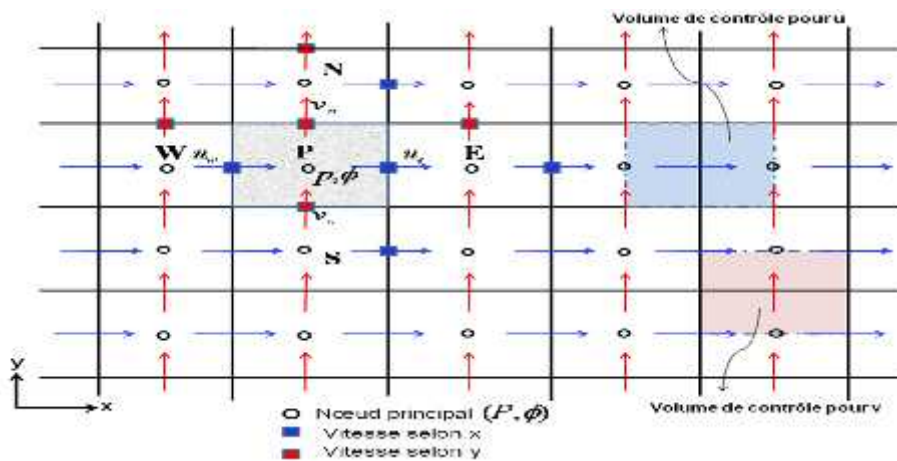


Figure III.3: Volumes de contrôle pour les scalaires et les vitesses.

Finalement, on décompose le maillage principale (fig. III.3) en quatre maillage secondaires, un pour les quantités scalaires ( $P, w$ ) et pour l'équation de conservation de masse et trois autres pour les trois omposantes de la vitesse ( $u, v, w$ ).

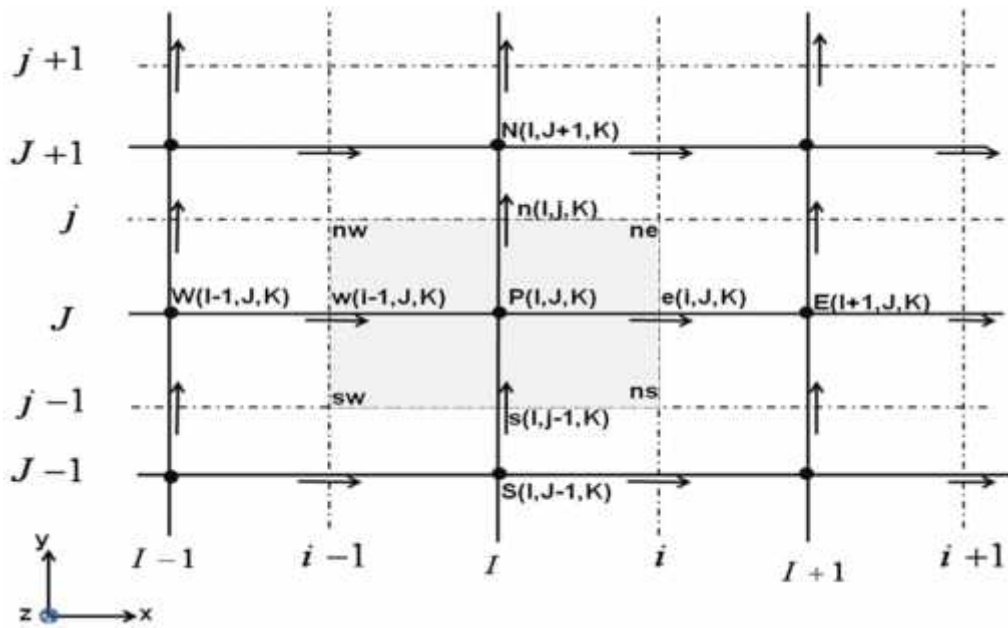


Figure III.4: volume de contrôle pour les quantités scalaires ( $P, \phi$ ) et l'équation de continuité.

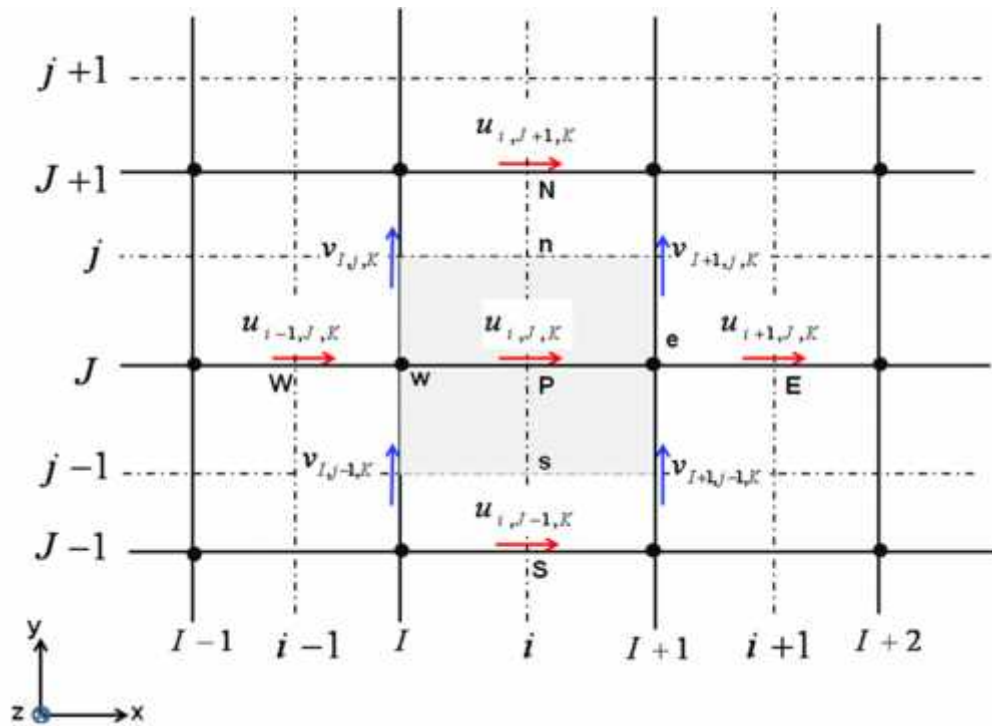


Figure III.5: volume de contrôle pour la composante  $u$  et ces voisines.

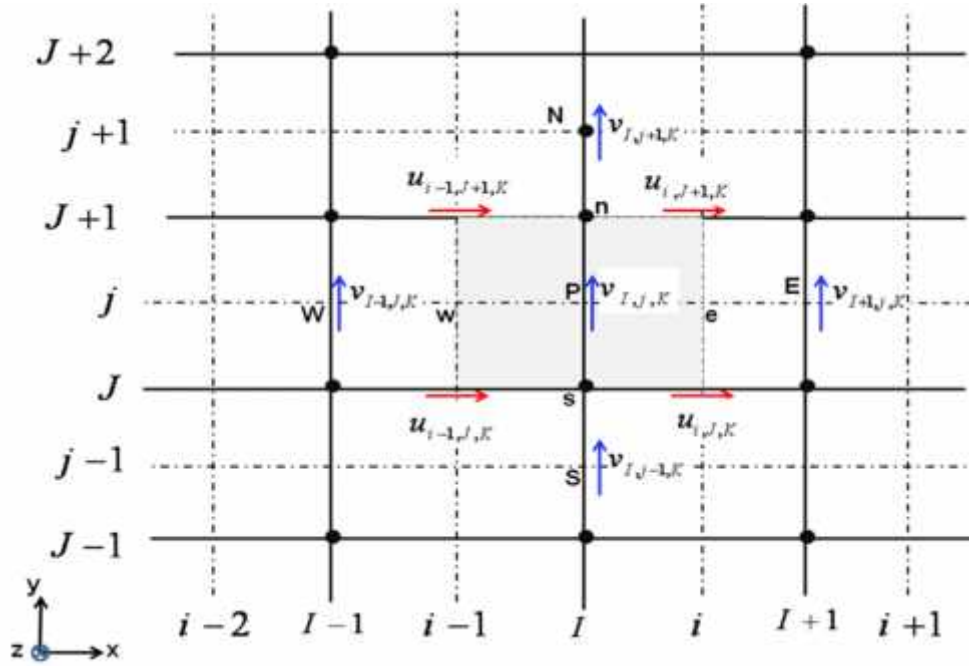


Figure III.6: volume de contrôle pour la composante v et ces voisines

Le maillage décalé a été proposé par Harlow et Welch pour la méthode MAC (Marker And Cell) qui était destinée à la simulation numérique de l'écoulement à surface libre. Ce maillage est très ramassé au sens où les vitesses discrètes sont disposées de manière rapprochée autour des nœuds de pression. Il donne lieu à des approximations compactes qui font intervenir des points très voisins. Le maillage décalé jouit de propriétés de convergence spatiale qui en font un maître choix.

### III.4. DISCRETISATION DES EQUATIONS DE CONSERVATION

L'équation différentielle instationnaire sous la forme générale (III.5) est intégrée dans le temps  $t_0$  sur le volume de contrôle  $\Omega_{CV}$  entourant le nœud courant  $P$ , on obtient :

$$\int_t \int_{\Omega_{CV}} \frac{\partial}{\partial t} (...W) dt d\Omega + \int_t \int_{\Omega_{CV}} \text{div} (...W\vec{u}) dt d\Omega - \int_t \int_{\Omega_{CV}} \text{div} (\Gamma \text{grad} W) dt d\Omega = \int_t \int_{\Omega_{CV}} S_w dt d\Omega \quad (\text{III.6})$$

Grace au théorème de la divergence de Gauss, on obtient :

$$\int_t \int_{\Omega_{CV}} \frac{\partial}{\partial t} (...W) dt d\Omega + \int_t \int_{A_{CV}} (...W\vec{u}) d\vec{A} dt - \int_t \int_{A_{CV}} (\Gamma \text{grad} W) d\vec{A} dt = \int_t \int_{\Omega_{CV}} S_w dt d\Omega \quad (\text{III.7})$$

Où  $A$  est la surface qui limite le volume de contrôle  $\Omega_{CV}$ .

• **Terme transitoire**

Pour l'intégration de ce terme particulier, on considère uniquement la variation en temps, en assimilant la variable  $w$  à sa valeur au centre du volume de contrôle :

$$I_1 = \int_t \int_{\Omega_{CV}} \frac{\partial}{\partial t} \dots w d\Omega dt = \left\{ (\dots w)_P - (\dots w)_P^0 \right\} \Delta\Omega \quad (\text{III.8})$$

Où  $\Omega$  désigne le volume de contrôle de  $w$  et  $\Delta\Omega$  sa mesure ( $\Delta\Omega = \Delta x \Delta y$ ) dans le cas 2D et l'exposant 0 indique que la quantité est considérée au pas de temps précédent.

• **Terme convectif**

$$I_2 = \int_t \int_{A_{CV}} (\dots w \vec{u}) d\vec{A}_n dt = \int_t \int_{A_{CV}} (\dots w \vec{u})(d\vec{A}_e - d\vec{A}_w + d\vec{A}_s - d\vec{A}_n) dt$$

$$= \left\{ (\dots w u A)_e - (\dots w u A)_w + (\dots w v A)_n - (\dots w v A)_s \right\} \Delta t \quad (\text{III.9})$$

On définit la variable  $F_i = (\dots v A)_i$ , qui représente le flux de masse convectif traversé par la surface ( $i$ ),  $i = (e, w, n, s)$

Face	e	W	n	s
Flux de masse convectif	$F_e = \dots_e u_e A_e$	$F_w = \dots_w u_w A_w$	$F_n = \dots_n v_n A_n$	$F_s = \dots_s v_s A_s$

Tableau III.1: Expression des coefficients convectifs

Il vient que :

$$I_2 = \left\{ F_e w_e - F_w w_w + F_n w_n - F_s w_s \right\} \Delta t \quad (\text{III.10})$$



•Terme diffusif

Le gradient de  $w$  aux interfaces est finalement calculé en supposant que  $w$  varie linéairement entre chaque point du maillage. On obtient ainsi:

$$I_3 = \int_t \int_{A_{cv}} (\Gamma grad w) d\vec{A} dt = \left\{ \left( \Gamma \frac{\partial w}{\partial x} A \right)_e - \left( \Gamma \frac{\partial w}{\partial x} A \right)_w + \left( \Gamma \frac{\partial w}{\partial y} A \right)_n - \left( \Gamma \frac{\partial w}{\partial x} A \right)_s \right\} \Delta t$$

(III.11)

$$I_3 = \left( \Gamma \frac{w_E - w_P}{(u x)_e} A \right)_e - \left( \Gamma \frac{w_P - w_W}{(u x)_w} A \right)_w + \left( \Gamma \frac{w_N - w_P}{(u y)_n} A \right)_n - \left( \Gamma \frac{w_P - w_S}{(u y)_s} A \right)_s \Delta t \tag{III.12}$$

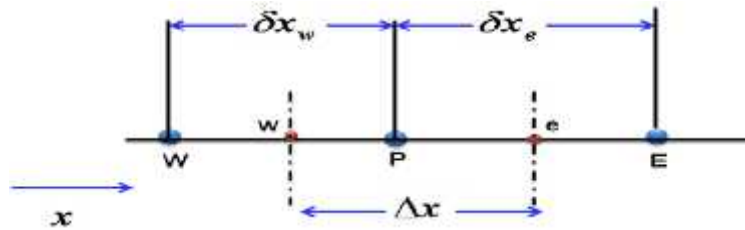


Tableau III.7:interpolation pour le gradient de  $\phi$

On pose  $D_i = \frac{\Gamma_i A_i}{u x_i}$  qui représente le coefficient diffusif, où  $i = (e, w, n, s)$

Face	E	w	n	s
Conductance de diffusion	$D_e = \frac{\Gamma_e A_e}{u x_e}$	$D_w = \frac{\Gamma_w A_w}{u x_w}$	$D_n = \frac{\Gamma_n A_n}{u y_n}$	$D_s = \frac{\Gamma_s A_s}{u y_s}$

Tableau III.3:Expressions des coefficients diffusifs

On obtient finalement :

$$I_3 = (D_e (w_E - w_P) - D_w (w_P - w_W) + D_n (w_N - w_P) - D_s (w_P - w_S)) \Delta t \tag{III.13}$$

**Calcul de la conductance  $\Gamma$  :**

En général  $\Gamma_e \neq \Gamma_w$ , la conductivité thermique étant fonction de la température  $\Gamma = \Gamma(T)$ , ou même fonction de l'espace  $\Gamma = \Gamma(x)$  pour les matériaux composites.

Si l'on considère le flux à l'interface "e" (figure III. 8), il peut être écrit ainsi :

$$q_e = \frac{T_P - T_E}{\frac{u x_e^-}{\Gamma_P} + \frac{u x_e^+}{\Gamma_E}} = \frac{T_P - T_E}{\Gamma_e} \quad (\text{III.14})$$

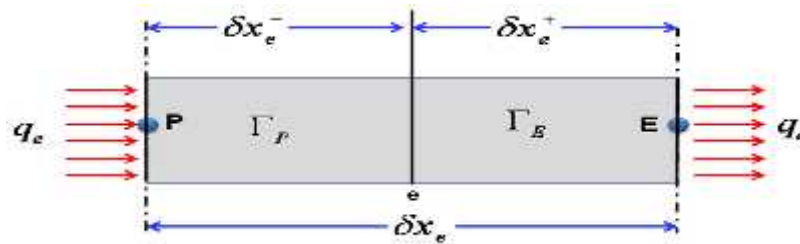


Figure III.8:diffusivité pour un matériau composite

De la relation (III.14) on sort l'expression de la conductivité thermique à l'interface du volume de contrôle :

$$\Gamma_e = \frac{u x_e}{\frac{u x_e^-}{\Gamma_P} + \frac{u x_e^+}{\Gamma_E}} = u x_e \frac{\Gamma_P \Gamma_E}{\Gamma_P u x_e^+ + \Gamma_E u x_e^-} \quad (\text{III.15})$$

Si on définit les paramètres :  $f_e = \frac{u x_e^+}{u x_e}$  et  $1 - f_e = \frac{u x_e^-}{u x_e}$ , la relation (III.15) devient :

$$\Gamma_e = \frac{1}{\frac{1 - f_e}{\Gamma_P} + \frac{f_e}{\Gamma_E}} = \frac{\Gamma_P \Gamma_E}{f_e \Gamma_P + (1 - f_e) \Gamma_E} \quad (\text{III.16})$$

#### • Terme source

L'intégration de ce terme est donné par :

$$I_4 = \int_t \int_{\Omega_{cv}} S_w d\Omega = \bar{S} \Delta t \Delta \Omega \quad (\text{III.17})$$

Où  $\bar{S}$  est la valeur moyenne de S sur le volume considéré.

Souvent le terme source  $S_w$  dépend de la variable  $W$ . Il est exprimé comme une fonction linéaire de  $W_p$ . La méthode de Pantakar est recommandée dans la linéarisation du terme source; elle consiste à écrire :

$$\bar{S} = S_C + S_P W_P \quad (\text{III.18})$$

Où  $S_C$  représente la partie constante de  $\bar{S}$  (qui ne dépend pas de  $W_P$ ), alors que  $S_P$  est le coefficient de  $W_P$  ( $S_P$  ne représente pas  $\bar{S}$  évalué au point P).

L'utilisation des expressions de  $I_1, I_2, I_3$  et  $I_4$  permet d'écrire l'équation (III.7) sous forme discrétisée:

$$\begin{aligned} & \left\{ (\dots)_P - (\dots)_P^0 \right\} \Delta\Omega + \{ F_e W_e - F_w W_w + F_n W_n - F_s W_s \} \Delta t - \\ & (D_e (W_E - W_P) - D_w (W_P - W_W) + D_n (W_N - W_P) - D_s (W_P - W_S)) \Delta t = (S_C + S_P W_P) \Delta t \Delta\Omega \end{aligned} \quad (\text{III.19})$$

### III.5. Equation de continuité

Dans le cas des équations de Navier-Stokes, on doit aussi résoudre l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \dots}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\dots u) + \frac{\partial}{\partial y} (\dots v) = 0 \quad (\text{III.20})$$

L'intégration de cette équation sur le volume de contrôle  $\Omega_{CV}$  conduit à :

$$\int_t \left( \int_{\Omega_{CV}} \dots d\Omega \right) dt + \int_{dt} \left( \int_{\Omega_{CV}} \frac{\partial}{\partial x} (\dots u) d\Omega \right) dt + \int_t \left( \int_{\Omega_{CV}} \frac{\partial}{\partial y} (\dots v) d\Omega \right) dt = 0 \quad (\text{III.21})$$

$$(\dots)_P - (\dots)_P^0 \frac{\Delta\Omega}{\Delta t} + (\dots u A)_e - (\dots u A)_w + (\dots v A)_n - (\dots v A)_s = 0 \quad (\text{III.22})$$

Ce qui donne:

$$(\dots)_P - (\dots)_P^0 \frac{\Delta\Omega}{\Delta t} = F_w - F_e + F_s - F_n \quad (\text{III.23})$$

Effectuons l'opération  $[(\text{III.19}) - (\emptyset_P \cdot (\text{III.23}))]$ , on obtient :

$$\left\{ (\dots)_P^0 \frac{\Delta\Omega}{\Delta t} + F_w - F_e + F_s - F_n - S_P \Delta\Omega \right\} W_P + \{ F_e W_e - F_w W_w + F_n W_n - F_s W_s \} -$$

$$(D_e W_E - D_e W_P - D_w W_P + D_w W_W + D_n W_N - D_n W_P - D_s W_P + D_s W_S) = S_C \Delta \Omega + \dots_P^0 W_P^0 \frac{\Delta \Omega}{\Delta t}$$

(III.24)

### III.6. Schémas numériques

Soit l'équation de transport

$$\frac{\partial}{\partial t} (\dots W) + \nabla \cdot (\dots \vec{V} W) = \nabla \cdot (\Gamma \nabla W) + S_w \quad (III.25)$$

Cette équation, une fois discrétisée implicitement en temps, en tenant compte de la discrétisation l'équation de continuité :

$$(\dots_P - \dots_P^0) \frac{\Delta \Omega}{\Delta t} = F_w - F_e + F_s - F_n \quad (III.26)$$

Prend la forme:

$$\left\{ \dots_P^0 \frac{\Delta \Omega}{\Delta t} + F_w - F_e + F_s - F_n - S_P \Delta \Omega \right\} W_P + \{ F_e W_e - F_w W_w + F_n W_n - F_s W_s \} -$$

$$(D_e W_E - D_e W_P - D_w W_P + D_w W_W + D_n W_N - D_n W_P - D_s W_P + D_s W_S) = S_C \Delta \Omega + \dots_P^0 W_P^0 \frac{\Delta \Omega}{\Delta t}$$

(III.27)

Dans cette équation, l'inconnue  $W_i, i = e, w, n, s$  n'est pas encore exprimée sur son domaine de définition ( $E, W, N, S$ ). L'interpolation assurant cette opération dépendra du choix du schéma de discrétisation spatiale. Il existe plusieurs schémas donnant la valeur de  $W$  sur son domaine tel que : schéma CDS, upwind, exponentiel, hybride, puissance, et qui sont détaillés ci-après.

**Bilan :**

Si on pose  $Pe = \frac{F}{D}$  qui désigne le nombre de Péclet de maille, l'équation de

conservation une fois discrétisée implicitement en temps, est de la forme :

$$a_P^{n+1} W_P^{n+1} = a_E^{n+1} W_E^{n+1} + a_W^{n+1} W_W^{n+1} + a_N^{n+1} W_N^{n+1} + a_S^{n+1} W_S^{n+1} + b \quad (III.28)$$

Où les coefficients de l'équation (III.28) sont exprimés sous la forme générale suivante :

$$a_E = D_e A(|P_e|) + [-F_e, 0] \quad (\text{III.29})$$

$$a_W = D_w A(|P_w|) + [F_w, 0] \quad (\text{III.30})$$

$$a_N = D_n A(|P_n|) + [-F_n, 0] \quad (\text{III.31})$$

$$a_S = D_s A(|P_s|) + [F_s, 0] \quad (\text{III.32})$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_P^0 - S_P \quad (\text{III.33})$$

$$a_P^0 = \dots_P^0 \frac{\Delta\Omega}{\Delta t} \quad (\text{III.34})$$

$$b = S_C \Delta\Omega + a_P^0 W_P^0 \quad (\text{III.35})$$

L'expression entre crochets représente le maximum entre les quantités et  $A(|P|)$  est une fonction caractéristique du schéma choisi (Tableau III.4).

Schéma	$A( P )$
CDS	$1 - 0.5 P $
Upwind	<b>1</b>
Exponentiel	$ P  / (\exp( P ) - 1)$
Hybride	$[0, 1 - 0.5 P ]$
Power Law	$[0, (1 - 0.1 P )^5]$

Tableau III.4: Expressions de la fonction  $A(|P|)$  pour les différents schémas

Le schéma exponentiel discrétise l'ensemble des termes convectifs et diffusifs, contrairement aux schémas habituels tels que les schémas décentré et amont. Cette discrétisation concerne l'expression des coefficients  $J$  aux faces des volumes de contrôle. Ceux-ci sont interpolés entre les deux nœuds que sépare la face de telle sorte que l'équation stationnaire 1D de convection-diffusion soit vérifiée entre ces deux points, et ce, indépendamment du problème que l'on résout.

Le schéma hybride et le schéma puissance utilisé dans cette étude, sont dérivés directement du schéma exponentiel. Ils reposent tous deux sur l'approximation des

coefficients où apparaît l'exponentiel, qui est coûteuse en temps de calcul. En fonction du nombre de Péclet, le schéma hybride effectue une approximation linéaire par morceaux de la fonction  $A(P)$  et le schéma puissance une approximation polynomiale.

## III.7. COUPLAGE VITESSE-PRESSION

### III.7.1. Introduction :

La difficulté principale pour la résolution mathématique des équations de la MDF provient du rôle particulier d'une des variables principales la pression, les équations de quantité de mouvement sont couplées par la pression, qui agit par les composantes de son gradient. Mais il n'y a pas d'équation propre pour cette variable.

A l'opposé les composantes du la vecteur vitesse qui disposent toutes d'équations de transport (les composantes de l'équation de quantité de mouvement doivent satisfaire de plus en plus l'équation de continuité).

La solution du problème de mécanique des fluides est un champ de vitesse et de pression respectant les équations de quantité de mouvement et la continuité. L'équation de continuité se présente donc comme une contrainte à vérifier par le champ de pression.

La résolution des équations de Navier-Stokes ne peut pas s'effectuer séparément par composante car la contrainte représentée par l'équation de continuité porte sur les trois composantes de la vitesse ou de la quantité de mouvement. Si toutefois la résolution est fractionnée par composante, on parle de prédiction de la vitesse et celle-ci doit être suivie d'une étape de correction pour satisfaire par exemple ( $div\vec{V} = 0$ ) en incompressible.

Il existe plusieurs méthodes que l'on peut classer en deux familles : l'une où l'on se débarrasse du problème de la pression en prenant le rotationnel de l'équation de Navier-Stokes et l'autre où l'on compose avec la pression en établissant une équation spécifique. Dans le premier cas on parle de formulation en Vorticité-Potentiel Vecteur en 3D ou Vorticité-Fonction de Courant en 2D ( $\Omega - \Psi$ ) et dans le second cas on a une formulation en variables primitives Vitesse-Pression ( $P, V$ ). L'équation de l'énergie peut être aussi couplée pour certaines applications (convection naturelle par exemple).

Le problème du couplage se manifeste par l'apparition des variables vitesse et pression dans les deux équations de quantité de mouvement. Le gradient de pression qui apparaît comme terme source dans ces équations joue le rôle du moteur de l'écoulement.

Malheureusement, on ne dispose d'aucune équation de transport pour cette troisième variable qu'est la pression (les deux autres étant les deux composantes de la vitesse). En d'autres termes, si le gradient de pression est connu à priori on peut calculer le champ vitesse qui dans ce cas vérifie bien l'équation de continuité. Malheureusement, la pression est toujours une inconnue à déterminer aussi bien que la vitesse. Un champ de vitesse donné peut satisfaire l'équation de continuité sans pour autant vérifier les équations de transport de quantité de mouvement. Cette particularité des équations rend nécessaire l'utilisation d'un algorithme de couplage pression-vitesse.

### III.7.2. Algorithme SIMPLE

L'intégration de l'équation de quantité de mouvement sur le volume de contrôle (maillage décalé) de centre  $e$  et de limites  $P$  et  $E$  donne :

$$a_e u_e = \sum a_{nb} u_{nb} + (p_P - p_E) A_e + b_u \quad (\text{III.36})$$

$$a_n v_n = \sum a_{nb} v_{nb} + (p_P - p_N) A_n + b_v \quad (\text{III.37})$$

Soit un champ de pression initial  $p^*$ . La solution provisoire de l'équation précédente sera notée  $u^*$  (notons que  $u^*$  ne vérifie pas l'équation de continuité).

$$a_e u_e^* = \sum a_{nb} u_{nb}^* + (p_P^* - p_E^*) A_e + b_u \quad (\text{III.38})$$

$$a_n v_n^* = \sum a_{nb} v_{nb}^* + (p_P^* - p_N^*) A_n + b_v \quad (\text{III.39})$$

A ce stade, aucune des deux variables n'est correcte. Toutes les deux nécessitent une correction :

$$u = u^* + u' \quad (\text{III.40})$$

$$v = v^* + v' \quad (\text{III.41})$$

$$p = p^* + p' \quad (\text{III.42})$$

Où  $u'$  et  $p'$  sont les corrections qu'il faut estimer.

La relation entre  $u', v'$  et  $p'$  est obtenue par la soustraction de (III.38 et III.39) de (III.37 et III.36).

L'introduction des équations (III.40, III.41 et III.42) dans (III.38 et III.39) et en tenant compte de (III.36 et III.37), il s'en suit:

$$u_e = u_e^* + d_e (P'_P - P'_E) \quad (\text{III.43})$$

$$v_n = v_n^* + d_n (P'_P - P'_N) \quad (\text{III.44})$$

Où :

$$d_e = \frac{A_e}{a_e} \quad \text{Et} \quad d_n = \frac{A_n}{a_n} \quad (\text{III.45})$$

Notons ici que pour linéarité l'équation, le terme  $\sum a_{nb} u'_{nb}$  a été tout simplement négligé. Normalement, ce terme doit s'annuler lors de la convergence de la procédure. C'est-à-dire que cette omission n'influe pas sur le résultat final, mais elle fausse un peu le résultat temporaire. C'est d'ailleurs la seule simplification faite dans l'algorithme SIMPLE. Elle a été corrigée dans les variantes plus évoluées (SIMPLER et SIMPLEC).

L'introduction de l'expression corrigée (III.43 et III.44) dans l'équation de continuité (III.37), donne l'équation de correction de la pression, qu'on écrit sous la forme suivante:

$$a_P p'_P = a_E p'_E + a_W p'_W + a_N p'_N + a_S p'_S + b \quad (\text{III.46})$$

Où :

$$a_E = (\dots Ad)_e ; \quad a_W = (\dots Ad)_w \quad (\text{III.47})$$

$$a_N = (\dots Ad)_n ; \quad a_S = (\dots Ad)_s \quad (\text{III.48})$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S \quad (\text{III.49})$$

$$b = (\dots u^* A)_w - (\dots u^* A)_e + (\dots v^* A)_s - (\dots v^* A)_n - (\dots p - \dots^0_p) \frac{\Delta \Omega}{\Delta t} \quad (\text{III.50})$$



Enfin, l'algorithme SIMPLE est résumé comme suit:

1. Choisir un champ de pression initial  $p^*$ .
2. Résoudre les équations de quantité de mouvement (III.38 et III.39) :

$$a_e u_e^* = \sum a_{nb} u_{nb}^* + (p_P^* - p_E^*) A_e + b_u$$

$$a_n v_n^* = \sum a_{nb} v_{nb}^* + (P_P^* - P_N^*) A_n + b_v$$

Pour déduire un champ de vitesse  $u^*$  et  $v^*$ .

3. Calculer le terme source de la masse  $b$  de l'équation (III.50) :

$$b = (\dots u^* A)_w - (\dots u^* A)_e + (\dots v^* A)_s - (\dots v^* A)_n - (\dots p - \dots p^0) \frac{\Delta \Omega}{\Delta t}$$

Et résoudre l'équation (III.46) de correction de la pression :

$$a_P p_P' = a_E p_E' + a_W p_W' + a_N p_N' + a_S p_S' + b$$

4. Corriger les champs de pression et de vitesse via les équations (III.40, III.41 et III.42) et (III.43 et III.44) :

$$p = p^* + p'$$

$$u_e = u_e^* + d_e (P_P' - P_E')$$

$$v_n = v_n^* + d_n (P_P' - P_N')$$

5. Résoudre les autres équations de transports  $w$  et mettre à jour les propriétés, les coefficients,.....
6. Remplacer l'ancien champ de pression  $p$  trouvée à l'étape 4 par le nouveau  $p^*$  et revenir à l'étape 2. Répéter les calculs jusqu'à convergence de toutes les variables.

### III.7.3. Algorithme SIMPLER

L'algorithme SIMPLER (Semi Implicit Method for Pressure Linked Revised) de Patankar a été utilisé dans ce travail pour la résolution des équations régissant l'écoulement. Il présente une extension de l'algorithme SIMPLE (Semi Implicit Method for Pressure Linked). Le choix de développer SIMPLER provient des difficultés que présente SIMPLE. Ce dernier est basé sur l'approximation de l'omission des termes qui présentent l'influence des vitesses des voisins, ce qui risque d'exagérer la pression, et ensuite il y aura tendance vers la divergence sans l'utilisation des relaxations appropriées. À partir de cette difficulté l'algorithme SIMPLER est basé sur le fait que l'équation de correction de pression est employée seule pour corriger la vitesse et une autre procédure est utilisée pour obtenir le champ de pression.

Les équations de conservation de la quantité de mouvement discrétisées sont écrites sous la forme suivante, en considérant une estimation du champ de vitesse :

$$a_e u_e = \sum a_{nb} u_{nb} + (p_P - p_E) A_e + b_u \quad (\text{III.51})$$

$$a_n v_n = \sum a_{nb} v_{nb} + (p_P - p_N) A_n + b_v \quad (\text{III.52})$$

Les équations (III.16, III.17) peuvent s'écrire :

$$u_e = \frac{\sum a_{nb} u_{nb} + b_u}{a_e} + d_e (P_P - P_E) \quad (\text{III.53})$$

$$v_n = \frac{\sum a_{nb} v_{nb} + b_v}{a_n} + d_n (P_P - P_N) \quad (\text{III.54})$$

Avec :

$$d_e = \frac{A_e}{a_e}, d_n = \frac{A_n}{a_n} \quad (\text{III.55})$$

Lorsqu'on initialise le champ de vitesse, le champ de pression est inconnu. On annule donc le terme qui représente la pression et on introduit les pseudo-vitesses définies comme suit :

$$\hat{u}_e = \frac{\sum a_{nb} u_{nb} + b_u}{a_e} \quad (\text{III.56})$$

$$\hat{v}_n = \frac{\sum a_{nb} v_{nb} + b_v}{a_n} \quad (\text{III.57})$$

Ainsi les équations de quantité de mouvement s'écrivent :

$$u_e = \hat{u}_e + d_e (P_P - P_E) \quad (\text{III.58})$$

$$v_n = \hat{v}_n + d_n (P_P - P_N) \quad (\text{III.59})$$

En reportant les expressions précédentes (III.58 et III.59) dans l'équation discrète de conservation de la masse (III.37) on obtient directement une équation en pression :

$$a_P P_P = a_E P_E + a_W P_W + a_N P_N + a_S P_S + b \quad (\text{III.60})$$

Avec :

$$a_E = (\dots Ad)_e ; a_W = (\dots Ad)_w \quad (\text{III.61})$$

$$a_N = (\dots Ad)_n ; a_S = (\dots Ad)_s \quad (\text{III.62})$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S \quad (\text{III.63})$$

$$b = (\dots \hat{u}A)_w - (\dots \hat{u}A)_e + (\dots \hat{v}A)_s - (\dots \hat{v}A)_n - (\dots_P - \dots_P^0) \frac{\Delta\Omega}{\Delta t} \quad (\text{III.64})$$

Considérons maintenant une estimation du champ de pression :  $P^* = P$

À partir du champ de pression obtenu  $P^*$ , on résout les équations de quantité de mouvement pour obtenir  $u^*$  et  $v^*$  :

$$a_e u_e^* = \sum a_{nb} u_{nb}^* + (P_P^* - P_E^*) A_e + b_u \quad (\text{III.65})$$

$$a_n v_n^* = \sum a_{nb} v_{nb}^* + (P_P^* - P_N^*) A_n + b_v \quad (\text{III.66})$$

Où :

$$u_e^* = \hat{u}_e + d_e (P_p^* - P_E^*) \quad (\text{III.67})$$

$$v_n^* = \hat{v}_n + d_n (P_p^* - P_N^*) \quad (\text{III.68})$$

On utilise ce champ de vitesse dans la résolution de l'équation de continuité pour obtenir les équations de correction de pression  $P'$  (comme dans SIMPLE). L'équation de cette dernière s'écrit sous la même forme que l'équation de la pression. En conservant l'équation de correction de vitesse de SIMPLE, on écrit :

$$u_e = u_e^* + d_e (P_p' - P_E') \quad (\text{III.69})$$

$$v_n = v_n^* + d_n (P_p' - P_N') \quad (\text{III.70})$$

Ce qui donne l'équation de correction de pression :

$$a_p P_p' = a_E P_E' + a_W P_W' + a_N P_N' + a_S P_S' + b \quad (\text{III.71})$$

$$a_E = (\dots A d)_e ; a_W = (\dots A d)_w \quad (\text{III.72})$$

$$a_N = (\dots A d)_n ; a_S = (\dots A d)_s \quad (\text{III.73})$$

$$a_p = a_E + a_W + a_N + a_S \quad (\text{III.74})$$

$$b = (\dots u^* A)_w - (\dots u^* A)_e + (\dots v^* A)_s - (\dots v^* A)_n - (\dots_p - \dots_p^0) \frac{\Delta \Omega}{\Delta t} \quad (\text{III.75})$$

On en déduit la vitesse mais on ne corrige pas la pression. Cette démarche représente l'algorithme SIMPLE Révisé (SIMPLER).

Lorsque la convergence est atteinte, les valeurs de  $b$  s'annulent dans tous les volumes de contrôle.

Le fait que le terme source  $b$  soit nul partout est une preuve que nous avons obtenu le champ de pression correct, et que la solution actuelle de  $p'$  n'est pas demandée durant l'itération finale. Ainsi le terme source  $b$  est employé comme un indicateur utile pour la convergence de la solution du problème.

Les étapes à suivre dans l'algorithme de SIMPLER sont résumées comme suit:

- 1- Choisir un champ de vitesse (initialisé par des valeurs :  $u^*, v^*$ )
- 2- Calculer les coefficients des équations de quantité de mouvement et déduire les « pseudo vitesse » (Eq. III.56, III.57)

$$\hat{u}_e = \frac{\sum a_{nb} u_{nb}^* + b_u}{a_e}$$

$$\hat{v}_n = \frac{\sum a_{nb} v_{nb}^* + b_v}{a_n}$$

- 3- Evaluer le terme source de la masse de l'équation (III.64)

$$b = (\dots \hat{u}A)_w - (\dots \hat{u}A)_e + (\dots \hat{v}A)_s - (\dots \hat{v}A)_n - (\dots_p - \dots_p^0) \frac{\Delta\Omega}{\Delta t}$$

Et résoudre l'équation de pression (III.60)

$$a_p P_p = a_E P_E + a_W P_W + a_N P_N + a_S P_S + b$$

- 4- Utiliser le champ de pression ( $P^* = P$ ) pour résoudre les équations de quantité de mouvement  $u^*, v^*$  (III.65, 66), (ne pas corriger la pression).

$$a_e u_e^* = \sum a_{nb} u_{nb}^* + (P_p^* - P_e^*) A_e + b_u$$

$$a_n v_n^* = \sum a_{nb} v_{nb}^* + (P_p^* - P_n^*) A_n + b_v$$

- 5- Calculer le terme source de la masse  $b$ , (III.75)

$$b = (\dots u^* A)_w - (\dots u^* A)_e + (\dots v^* A)_s - (\dots v^* A)_n - (\dots_p - \dots_p^0) \frac{\Delta\Omega}{\Delta t}$$

De l'équation (III.75) et résoudre les équations (III.71) de correction de pression (comme dans SIMPLE).

$$a_p P'_p = a_E P'_E + a_W P'_W + a_N P'_N + a_S P'_S + b$$

- 6- Corriger le champ de vitesse via l'équation (III.69 et 70), mais ne pas corriger la pression.

$$u_e = u_e^* + d_e (P'_P - P'_E)$$

$$v_n = v_n^* + d_n (P'_P - P'_N)$$

- 7- Résoudre les autres équations de transport  $w$  (énergie, masse,...).
- 8- Retourner à l'étape 2, avec les nouveaux champs de (vitesse, température, pression). Répéter les calculs jusqu'à convergence de toutes les variables.

**Figure III.9: Algorithme SIMPLER**

### III.7.4. Algorithme SIMPLER transitoire

Pour décrire les phénomènes transitoires, une discrétisation temporelle est réalisée, en plus de la discrétisation spatiale. Elle est caractérisée par le pas de temps  $\Delta t$ . L'algorithme *SIMPLER*, utilisé pour la solution des problèmes en régime stationnaire, peut être utilisé pour les problèmes en régime instationnaire. Les équations de quantité de mouvement, contiennent maintenant des termes instationnaires.

Dans les régimes instationnaires, avec formulation implicite; la procédure itérative *SIMPLER* est appliquée à chaque niveau du temps jusqu'à ce que la convergence soit accomplie.

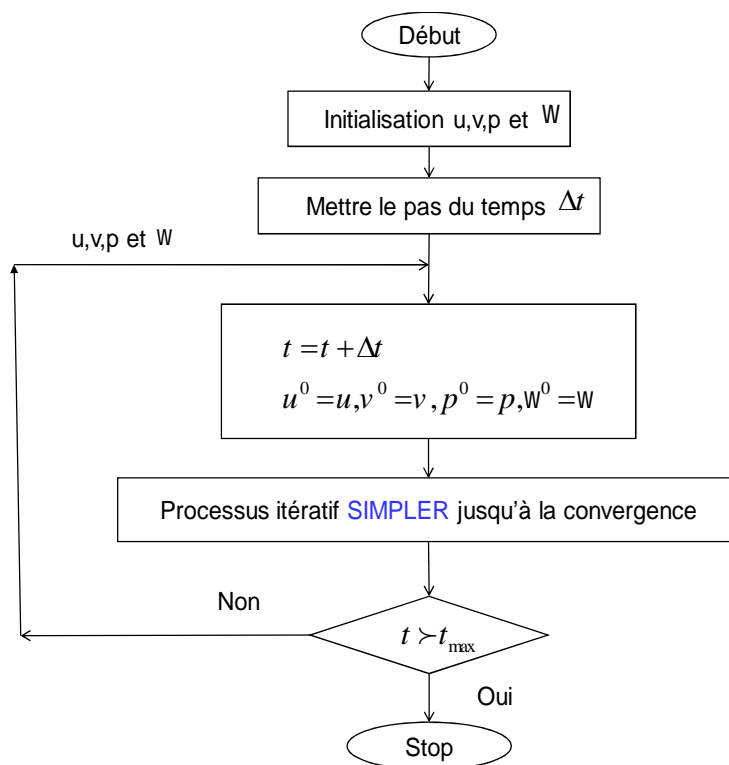


Figure III.10:Algorithme SIMPLER transitoire

### III.8. Relaxation

Le processus itératif utilisé dans *SIMPLER* exige le contrôle du taux de variation des inconnues au cours de chaque itération. Ceci est réalisé par des méthodes dites de sous-relaxation:

Soit  $w_p^*$  la valeur de  $w_p$  à l'itération courante. Si  $w_p$  satisfait à l'équation:

$$a_p w_p = \sum_{nb} a_{nb} w_{nb} + b \quad (III.76)$$



Alors, pour que le système soit résolu pour l'itération courante, on estime une valeur de  $w_p$  donnée par :

$$w_p = \frac{\sum_{nb} a_{nb} w_{nb} + b}{a_p} \quad (\text{III.77})$$

Le changement dans  $w_p$  d'une itération à la suivante est donné par :

$$\Delta w_p = \frac{\sum_{nb} a_{nb} w_{nb} + b}{a_p} - w_p^* \quad (\text{III.78})$$

Le changement de  $w_p$  s'effectue d'une fraction  $r$  définie par:

$$w_p = w_p^* + r \left( \frac{\sum_{nb} a_{nb} w_{nb} + b}{a_p} - w_p^* \right) \quad (\text{III.79})$$

Après réarrangements des termes, on trouve :

$$\frac{a_p}{r} w_p = \sum_{nb} a_{nb} w_{nb} + b + \frac{1-r}{r} a_p w_p^* \quad (\text{III.80})$$

Ainsi la nouvelle valeur de la grandeur  $w_p$  dépend de la valeur précédente  $w_p^*$  et de sa

correction  $\Delta w = \frac{\sum_{nb} a_{nb} w_{nb} + b}{a_p} - w_p^*$  en utilisant le coefficient de sous-relaxation  $r$  dont la

valeur est strictement inférieure à 1.

## III.9. RESOLUTION DU SYSTEME LINEAIRE DES EQUATIONS DISCRETISEES

### III.9.1. Algorithme de THOMAS (TDMA)

C'est un algorithme développé par Thomas, c'est une méthode directe pour la situation unidimensionnelle (1D), mais peut être utilisée d'une manière itérative ligne par ligne (line by line) pour la résolution des problèmes bidimensionnels (2D).

La discrétisation par volumes finis donne un système tridiagonal pour le cas 1D, un système penta-diagonal pour le cas 2D et un système septa-diagonal pour le cas 3D. D'autres schémas de discrétisation donnent plusieurs diagonal, par exemple le schéma QUICK donne sept diagonal dans le cas 2D. Dans ce cas on pose deux diagonal dans le terme source.

Un système tri diagonal peut s'écrire sous la forme générale:

$$a_i w_{i-1} + b_i w_i + c_i w_{i+1} = d_i \quad (\text{III.81})$$

Sous forme d'une matrice, ce système s'écrit

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ d_n \end{bmatrix} \quad (\text{III.82})$$

Le calcul se fait de la manière suivante :

- Pour  $i=2$ , on utilise les équations :

$$P_2 = \frac{b_2}{a_2}, \quad Q_2 = \frac{d_2 + c_2 w_1}{a_2} \quad (\text{III.83})$$

- Pour  $i$  variant de 3 à  $N-1$ , on utilise les équations :

$$P_i = \frac{b_i}{a_i - c_i P_{i-1}}, \quad Q_i = \frac{d_i + c_i Q_{i-1}}{a_i - c_i P_{i-1}} \quad (\text{III.84})$$

Avec  $P_N = 0$  et  $Q_N = w_N$  (où  $w_N$  est une condition aux limites).

- La dernière étape détermine les inconnues, pour  $i$  variant de  $N-1$  à  $1$ , on utilise l'équation :  $W_i = P_i W_{i+1} + Q_i$

$W_1$  Et  $W_N$  sont des valeurs aux limites du domaine.

### III.9.2. Application de l'algorithme de THOMAS à des problèmes à 2D (TDMA)

L'algorithme de Thomas (TDMA) peut être appliqué itérativement pour résoudre un problème d'un système d'équations bidimensionnel. Considérons le maillage et une équation générale de transport discrétisée sous la forme :

$$a_P W_P = a_E W_E + a_W W_W + a_N W_N + a_S W_S + b \quad (\text{III.85})$$

Pour résoudre ce système, l'algorithme de Thomas est appliqué pour une ligne choisie, par exemple la ligne Nord-Sud ( $N-S$ ). L'équation de transport discrétisée est réarrangée sous la forme :

$$-a_S W_S + a_P W_P - a_N W_N = a_E W_E + a_W W_W + b \quad (\text{III.86})$$

Le membre droit de l'équation (III.86) est supposé temporairement connu. L'équation (III.86) est de la même forme que l'équation (III.81) avec :

$$a_i W_{i-1} + b_i W_i + c_i W_{i+1} = d_i$$

$$a_i = -a_S$$

$$b_i = a_P$$

$$c_i = -a_N$$

$$d_i = a_W W_W + a_E W_E + b$$

(49)

On peut maintenant résoudre le système le long de la direction ( $N-S$ ) de la ligne choisie pour des valeurs  $j = 2, 3, 4, \dots, n$  comme indiqué sur la figure (III.11).

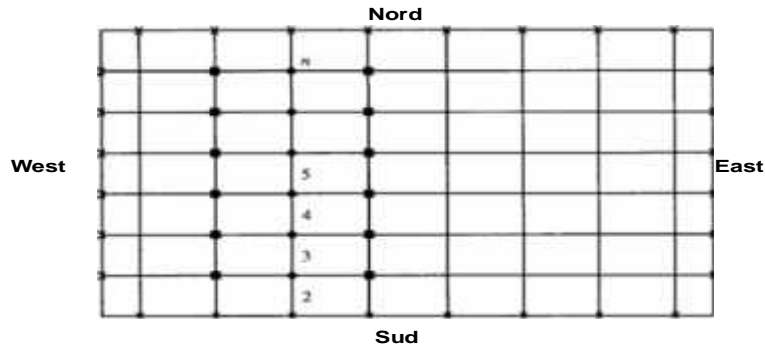


Figure III.11: Application ligne par ligne de la méthode TDMA

- Points auxquels les valeurs sont calculées
- Points auxquels les valeurs sont considérées être temporairement connues
- ✘ Valeurs connues à la frontière

A gauche de l'équation (III.86) il n'y a que le système tri diagonal qui peut être résolu efficacement par l'algorithme de Thomas. La solution est d'abord calculée sur la deuxième ligne des volumes de contrôle, on suppose que les valeurs de la première ligne sont connues (valeurs connues à la frontière) et les valeurs de la troisième ligne sont considérées être temporairement connues. Après que le vecteur  $[w_2]$  ait été calculé avec l'algorithme de Thomas, on passe au vecteur  $[w_3]$  et on suppose que la deuxième ligne est déjà calculée (à l'itération précédente) et les valeurs de la quatrième ligne sont supposées temporairement connues, puis plus généralement au vecteur  $[w_j]$  où l'ensemble de la zone de résolution est ainsi balayé.

La procédure de calcul ligne par ligne est répétée jusqu'à atteindre la convergence de la solution.

# **Chapitre 4:**

## **Résultats et discussions**

## IV.1. Introduction

Dans la suite, nous limiterons cette étude à une cavité carrée ( $A = 1$ ) remplie d'air ( $Pr = 0,71$ ) séparée en deux parties égales ( $X_1 = 0,4$ ) par un milieu poreux formaté d'épaisseur sans dimension  $X_P = 0,2$ . Le nombre de Rayleigh va de  $10^3$  à  $10^7$  et celui de Darcy de  $10^{-6}$  à 1.

## IV.2. Effet de et sur le transfert de chaleur et le débit de fluide:

L'influence de la perméabilité de la couche poreuse sur la structure de l'écoulement est illustrée par les lignes de courant tracées à la fig. (5a, 8a), vitesse verticale à mi-hauteur de l'enceinte, tracée sur la fig. (4a, 7a) et le maximum de la fonction de flux tracée sur la figure (1a), pour différentes valeurs du nombre de Darcy. Les résultats sont affichés pour les deux cas.  $Ra = 10^7$  et  $10^3$  (pour les forces de flottabilité grandes et petites).

Les figures (4a, 4b) illustrent la vitesse verticale et la température à mi-hauteur de l'enceinte pour  $Ra = 10^7$ . Comme illustré sur cette figure, l'augmentation de la valeur de la perméabilité poreuse a pour effet d'augmenter la valeur des composantes de température et de vitesse dans la couche poreuse est due au fait que la traînée est réduite en augmentant la valeur de la perméabilité poreuse sur le flux de fluide, ce qui entraîne une augmentation de la vitesse.

Aux faibles nombres de Darcy ( $Da \leq 10^{-5}$ ), la couche poreuse se comporte comme un mur solide et devient presque isothermique, fig. (5a, 5b) et la fig. (8a, 8b). Ensuite, à mesure que la perméabilité augmente, le flux pénètre dans le domaine poreux et le transfert de chaleur correspondant augmente de manière monotone, fig. (1b) (tableau 1); Enfin, pour les très hautes perméabilités ( $Da > 10^{-4}$ ), lorsque le frottement dans la couche poreuse devient négligeable, la structure des lignes de fusion et des isothermes ne change pas beaucoup mais reste la même pour les valeurs de ( $Da > 10^{-3}$ ); en conséquence, le nombre moyen de Nusselt, fig. (1b) (Tableau 1), atteint une valeur constante, correspondant à la solution pour une cavité entièrement fluide. De toute évidence, ces cas représentent une transition progressive de la conduction à la convection dans la région poreuse.

Pour des valeurs relativement élevées du nombre de Rayleigh ( $Ra = 10^4$ ), on peut également noter que l'augmentation relative de  $Nu_{avg}$  et la valeur maximale de la fonction de flux ( $E_{max}$ , fig. (1a, 1b) (tableau 1), est significatif à des valeurs inférieures de  $Da$  ( $Da = 10^{-4}$ ), alors que pour une force de flottabilité faible, ( $Ra = 10^3$ ), le nombre de Nusselt n'est pas très sensible à  $Da$ , tendant à une valeur constante ( $Nu_{avg}=1$ ) pour  $Ra = 10^3$  (correspondant à la solution obtenue pour une cavité entièrement fluide).

En augmentant simultanément ou séparément,  $Ra$  et  $Da$  favorisent l'écoulement du fluide à travers la couche poreuse d'une région de fluide à l'autre, fig. (5a, 8a), l'intensité du courant de convection naturelle et, conséquemment, le nombre de Nusselt local et moyen augmentent, fig. (1b) (tableau 1), fig. 3. En outre, le débit dans la cavité est réduit lorsque  $Ra$  et  $Da$  sont réduits, Fig. 2, en particulier pour les nombres de Rayleigh modérés ( $Ra < 10^5$ ). En conséquence, l'écoulement de fluide est défini dans les compartiments de fluide et le transfert de chaleur dans la couche poreuse se produit principalement par convection

La modification de la structure d'écoulement du fluide s'accompagne d'une modification des courbes de nombres de Nusselt locales, fig. 3 (le changement devient plus petit à mesure que  $Da$  augmente, en particulier pour  $Da = 10^{-4}$ ).

Les figures 4 et fig. 6 montrent l'effet du nombre Darcy  $Da$  sur le nombre Nusselt local  $Nu(y)$  sur le mur chaud pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh  $Ra$  avec  $\nu = 0.4$  et  $XP = 0.2$ . On peut clairement voir que le nombre de Nusselt local pour une force de flottabilité importante ( $Ra = 10^7$ ) tend à augmenter à mesure que la perméabilité de la couche poreuse augmente, et à partir des valeurs  $Da = 10^{-4}$ , le flux peut être considéré comme dominé par phénomène de convection, sur toute la cavité. Le nombre Nusselt local devient presque indépendant de  $Da$  et reste le même pour les valeurs de  $Da > 10^{-4}$ .

Pour un petit  $Ra$  ( $Ra = 10^3$ ), une augmentation du nombre de Darcy ( $Da = 10^{-5}$ ) tend à augmenter le nombre de Nusselt local dans la partie inférieure du mur ( $y = 0.5$ ) et à réduire le nombre de Nusselt local dans la partie supérieure ( $y = 0.5$ ), mais l'évolution présente un minimum autour de  $y = 0,5$  pour la valeur  $10^{-6}$  du nombre de Darcy.

De plus, il a été noté que la répartition de la température à mi-hauteur de l'enceinte dans la couche poreuse, fig. (4b), ont tendance à devenir plus linéaires pour un petit nombre de Darcy et à  $Ra = 10^7$ , ce qui indique que le comportement du transfert de chaleur dévie de la couche limite et se rapproche de la limite de construction, tandis que des couches limites thermiques apparaissent aux murs verticaux.

Pour un petit  $Ra$  ( $Ra = 10^3$ ), les profils de température, fig. (7b), pour chaque valeur en  $Da$ , les valeurs varient linéairement dans les deux régions, ce qui indique que le transfert de chaleur à travers l'enceinte s'effectue principalement par la conduction; le profil de vitesse, fig. (7a), pour chaque valeur  $Da$ , présente deux maxima dans les régions de fluide pour les perméabilités élevées et intermédiaires ( $Da > 10^{-3}$ ) autour de  $y = 0,2$  et  $y = 0,8$  et varie linéairement dans la région poreuse. Puis, avec une diminution de  $Da$ , ( $Da < 10^{-4}$ ), la composante de vitesse présente quatre maxima dans les régions de fluide autour de  $y = 0,1$  et  $y = 0,3$  dans la région de fluide gauche, et autour de  $y = 0,7$  et  $y = 0,9$  dans la région de fluide droite et la couche poreuse est presque iso thermique, fig. (5b), fig. (8b).



$Da$	1	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$	
$Ra$								
$\mathcal{E}_{max}$	$10^7$	19.0	19.0	18.98	18.93	18.35	15.11	10.08
	$10^6$	10.85	10.834	10.78	10.51	9.19	6.56	5.74
	$10^5$	6.37	6.29	5.95	4.76	2.73	1.47	1.12
	$10^4$	2.08	2.05	1.88	1.15	0.33	0.15	0.12
	$10^3$	0.257	0.254	0.23	0.124	0.032	0.014	0.008
	$10^2$	0.025	0.025	0.023	0.013	0.003	0.001	9e-4
$Nu_{avg}$	$10^7$	10.07	10.06	10.06	10.04	9.9	8.78	4.23
	$10^6$	5.22	5.21	5.20	5.16	4.79	2.95	1.77
	$10^5$	2.63	2.62	2.6	2.45	1.76	1.14	1.06
	$10^4$	1.3	1.29	1.26	1.13	1.02	1.017	1.00
	$10^3$	1.019	1.019	1.02	1.021	1.024	1.025	1.1
	$10^2$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.02	1.03

Tableau IV.1:Extremum de la fonction de flux et nombre moyen de Nusselt pour  $Ra = 102$  à  $10^7$ ,  $Pr = 0,7$ ,  $XP = 0,2$ ,  $Da = 1$  à  $10^{-6}$  et  $\epsilon = 0,4$

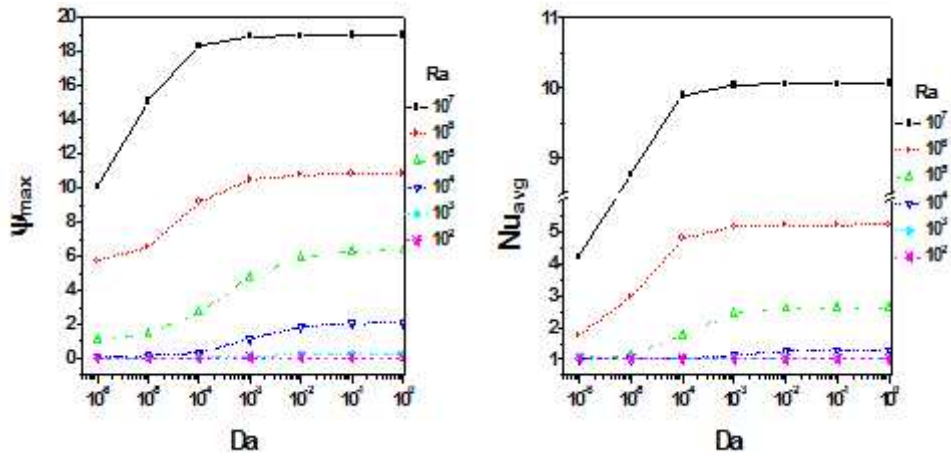


Figure IV.1 :(a) Extremum de la fonction de flux et (b) Variation du nombre de Nusselt moyen avec le nombre de Darcy pour différentes valeurs de nombre de Rayleigh et Pour ,

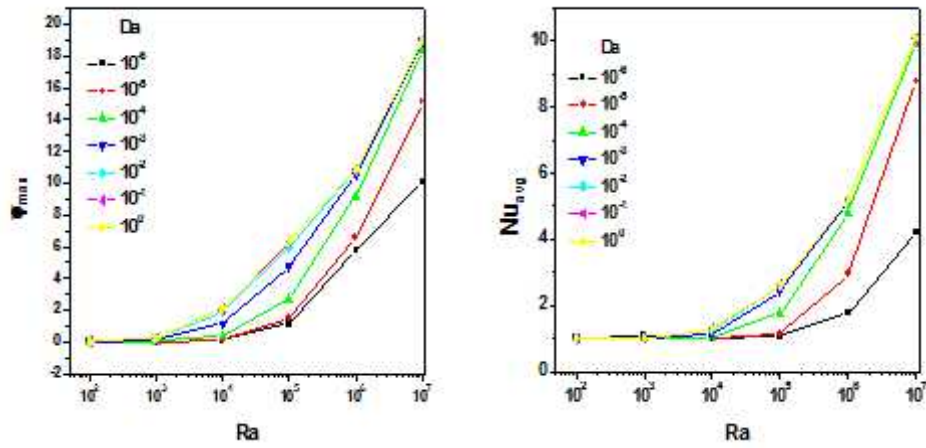


Figure IV.2: Influence de Ra et Da dans  $Nu$  et  $\Psi_{max}$   $K = 0.2, \varepsilon = 0.4$

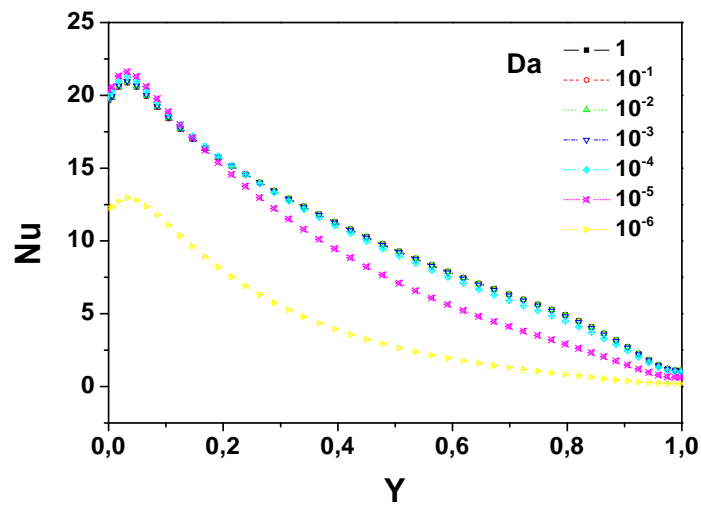


Figure IV.3 : distribution du nombre de Nusselt local sur la paroi chaude pour différentes valeurs de :  $Ra=107$  et  $Xp=0,2 \varepsilon = 0,4$

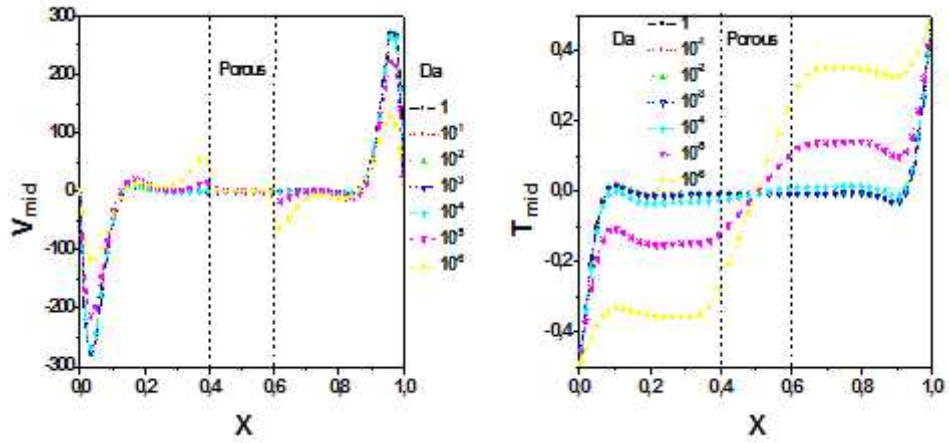


Figure IV.4: (a) vitesse vertical ( $V$ ) et (b) Température à ( $Y=0.5$ ) pour  $Ra = 10^7$ ,  $Xp=0,2$  et  $\epsilon=0,4$  pour différentes valeurs de  $Da$

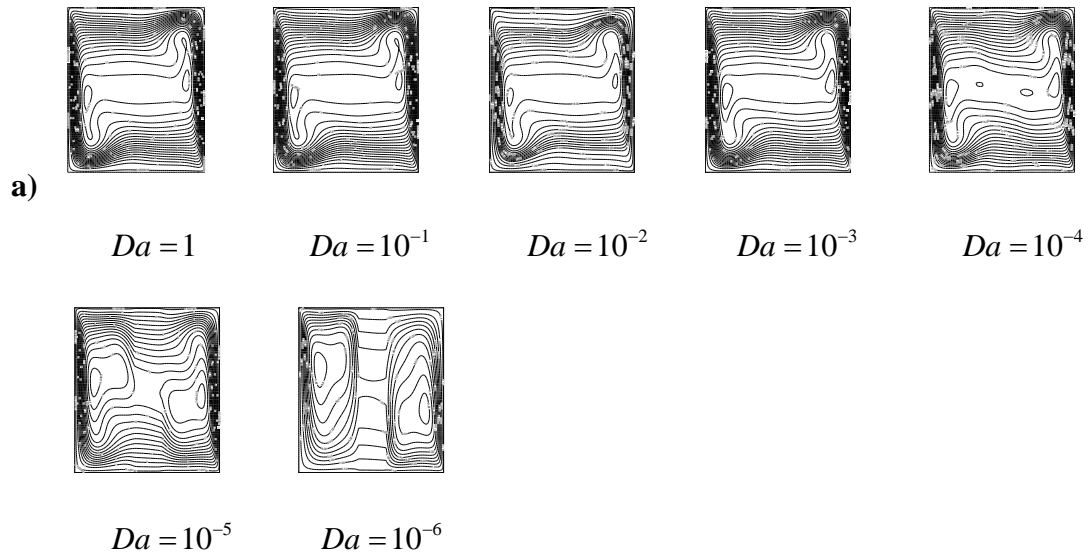


Figure IV.5 : lignes de courant (a) pour différentes valeurs du nombre de Darcy:  $Ra=10^7$ ,  $Xp=0,2$  et  $\epsilon=0,4$

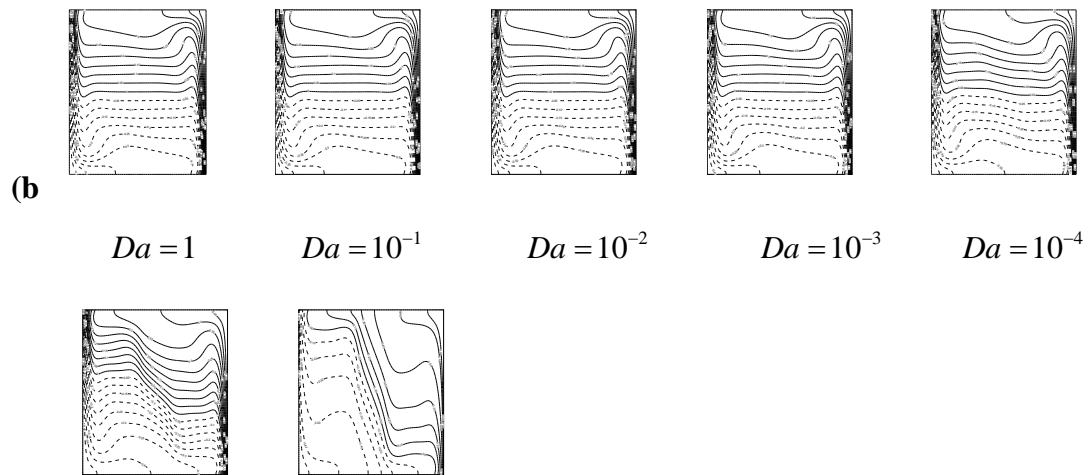


Figure IV.5 : isothermes (b) pour différentes valeurs du nombre de Darcy:  $Ra=107$ ,  $Xp=0,2$  et  $\epsilon=0,4$

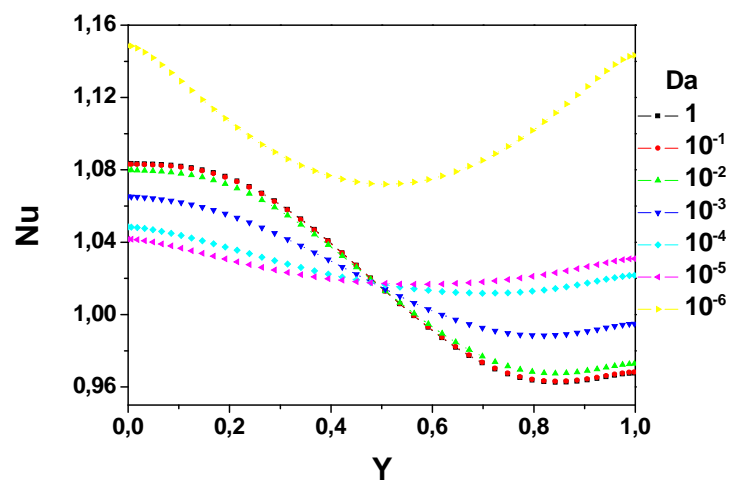


Figure IV.6: distribution du nombre de Nusselt local sur la paroi chaude pour différentes valeurs de  $Da$  :  $Xp=0,2$  et  $\epsilon=0,4$ ,  $Ra=10^3$

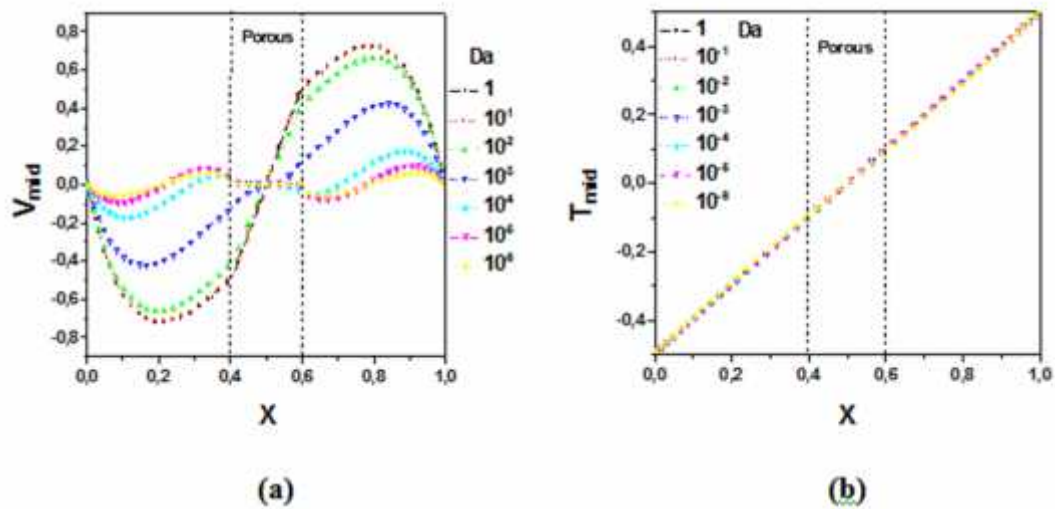


Figure IV.7 : (a) vitesse vertical ( $V$ ) et (b) Température à ( $Y=0.5$ ) pour  $X_p=0,2$  et  $\epsilon=0,4$ ,  $Ra = 10^3$ , et pour différentes valeurs de  $Da$

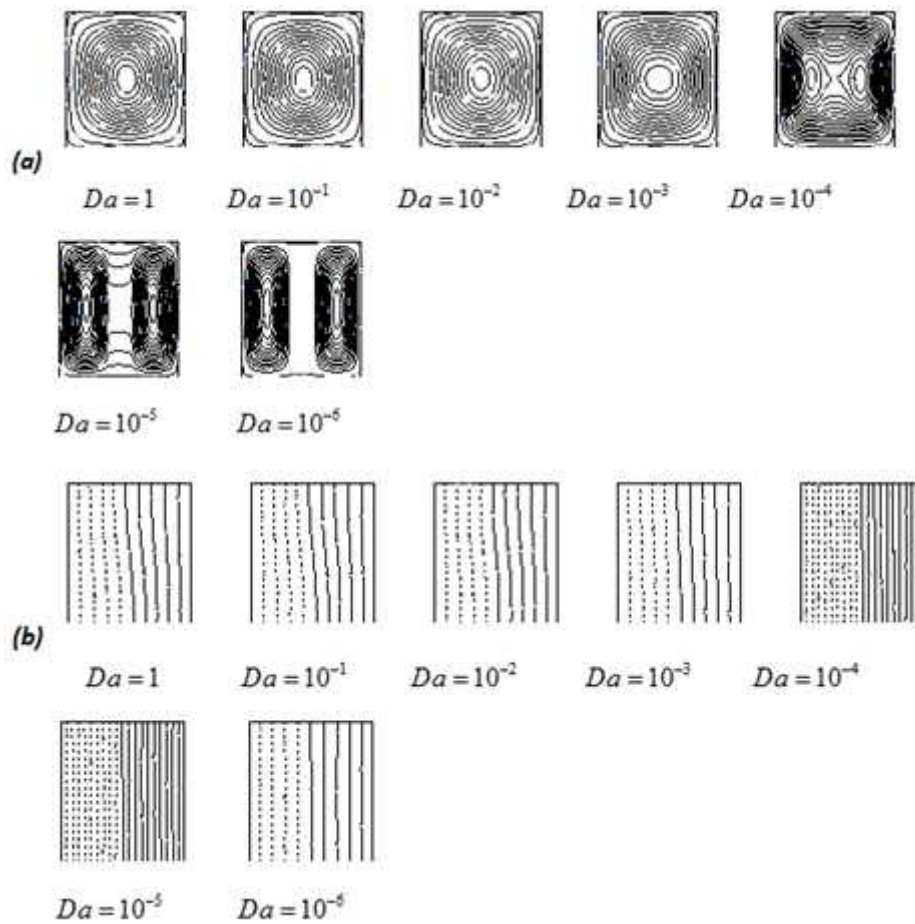


Figure IV.8: lignes de courant (a) et isothermes (b) pour différentes valeurs du nombre de Darcy :  $X_p=0,2$   $\epsilon=0,4$  et  $Ra=10^3$

# **Conclusion générale**

**Conclusion générale**

La convection naturelle dans des compartiments verticaux contenant des couches simultanément fluides et poreux a été étudié le recours au modèle de Darcy, y compris les termes Brinkman et Forchheimer, pour tenir compte des effets de viscosité et d'inertie, respectivement, dans l'équation de mouvement.

L'influence de la perméabilité de la couche poreuse sur les caractéristiques de transfert de chaleur moyen et locales dans l'enceinte a été évaluée. Les résultats numériques associés conduisent à la conclusion principale que le transfert de chaleur global augmente avec la perméabilité augmente, ceci étant dû à une meilleure pénétration de la couche poreuse par l'écoulement convectif.

En outre, d'après les résultats, l'échange thermique est également sensible au nombre de Rayleigh (l'augmentation de  $Ra$  améliorer la convection dans les compartiments de fluide de la cavité, avec la convection dans la couche poreuse étant améliorée par l'augmentation de  $Da$ ).

Dans la région du plus grand nombre de Darcy ( $Da > 10^{-5}$ ), l'effet lié à la meilleure pénétration du milieu poreux en raison de la perméabilité plus grande, et l'augmentation des forces de flottabilité dû à un gradient de température efficace plus grande à travers la couche se combinent pour augmenter l'intensité de l'écoulement et le nombre de Nusselt global résultant. Tous les indicateurs locaux représentés sur la Fig. (4, 5) et fig. (7, 8) (composantes de vitesse et de transfert de chaleur local) croissent avec  $Da$  et d'atteindre une valeur finale pour la perméabilité à l'infini correspondant au cas idéal dans lequel la cavité entière est fluide.

Ces résultats constituent une étape importante vers une compréhension complète l'espace des paramètres pour le transfert de chaleur par convection dans les systèmes composites.

## Références bibliographiques

[1]: Principles of heat transfer in porous media. *Springer*, (1995).

- [2]:S. Ergun, Fluid flow through packed columns, *Chem. Eng. Progr.*, vol. 48, pp. 88-94 (1988).
- [3]: The Physics of flow through porous media. *3rd Edition, University of Toronto Press, (1974).*
- [4] : Etude analytique et numérique des instabilités spatio-temporelles des écoulements de convection mixte en milieuporeux: comparaison avec l'expérience, Thèse de Doctorat de l'Université des Sciences et Technologies de Lille.
- [5] :Krishna et al Natural convection in a heat generating hydrodynamically and thermally anisotropic non-Darcy porous medium, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 51, pp. 4691-4703.
- [6] : Nabavizadeh et al Natural convection in a square cavity containing a sinusoidal cylinder, *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 51, pp. 112-120.
- [7] : A Bahloul, *Boundary layer and stability analysis of natural convection in a porous cavity*, *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 45, no 7, pp. 635-642. (2006).
- [8]: A.C. Baytas, *Entropy generation for natural convection in a inclined porous cavity*, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol 43, pp. 2089-2099. (2000).
- [9] : L. Kalla, M. Mamou, P. Vasseur, L. Robillard, *Multiple steady states for natural convection in a shallow porous cavity subject to uniform heat fluxes*, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, vol 26, Issue 6, pp. 761-770. (1999).
- [10] : H. Nawaf, A. Saeid, A. Mohamad, *Natural convection in a square porous cavity with an oscillating wall temperature*, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, vol 15, Issue 6, pp. 555-566. (2005).
- [11] :Y. Varol, F. Oztop, I. Pop, *Numerical analysis of natural convection for a porous rectangular enclosure with sinusoidally varying temperature profile on the bottom wall*, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, vol 35, pp. 56-64. (2008).
- [12] :A. Barletta, S. Lazzari, *2D free convection in a porous cavity heated by an internal circular boundary*, *International Journal of Thermal Sciences*, vol 45, pp. 917-922. (2006).
- [13] :K. Bouhadeh, *Simulation numérique de la convection naturelle dans une cavité à fond sinusoïdal*, 12èmes Journées Internationales de Thermique. Tanger, Maroc du 15 au 17 Novembre 2005.
- [14] :Y. Varol, F. Oztop, E. Avci, *Estimation of thermal and flow fields due to natural convection using support vector machines (SVM) in a porous cavity with discrete heat sources*, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, vol 35, pp. 928–936. (2008).
- [15]: E. Baez, A. Nicola's, *2D natural convection flows in tilted cavities: Porous media and homogeneous fluids*, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol 49, pp. 4773-4785. (2006).
- [16]:T. Basak, S. Roy, T. Paul, I. Pop, *Natural convection in a square cavity filled with a porous medium: Effects of various thermal boundary conditions*, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol 49, pp. 1430-1441. (2006).
- [17]:A. Saeid, H. Nawaf, *Natural convection in porous cavity with sinusoidal bottom wall temperature variation*, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, vol. 32, pp. 454-463. (2005).
- [18] :S.L. Moya, E. Ramos, S. Mihir, *Numerical study of natural convection in a tilted rectangular porous material*, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 30, Issue 4, pp. 741-756. (1987).



- [19] : "Etude numérique et expérimental des échanges thermiques au sein d'un canal de milieu poreux et soumis à un chauffage pariétal ", (2005)
- [20] :V. Prasad et A. Tuntomo Inertia effects on natural convection in a vertical porous cavity. *Num. Heat Transfer, Vol. 11*, pp. 295-320 (1987).
- [21]: A. Bejan et D. Poulikakos The non-Darcian regime for vertical boundary layer natural convection in porous medium. *Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 27(5)*, pp. 717-722 (1984).
- [22]:G. Lauriat et V. Prasad, Non – Darcian effect on natural convection in a vertical porous enclosure. *Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 32(11)*, pp. 2135-2148 (1989).
- [23]:P. Vasseur et L. Robillard, The Brinkman model for boundary layer regime in a rectangular cavity with uniform heat flux from the side. *Int. J. Heat and Fluid Flow Vol. 30(4)*, pp. 717-727 (1987).
- [24]: Mehta K., N., and Nandakumar K., (1987). Natural Convection with Combined Heat and Mass Transfer Buoyancy Effects in Non-Homogeneous Porous Medium, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 30, 12, 2651-2656.
- [25]: Trevisan O., V. and Bejan A., (1987). Mass and Heat Transfer by High Raleigh Number Convection in a Porous Medium Heated From Below. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 30, 2341–2356.
- [26]:P. Le Breton, J. P. Caltagirone et E. Arquis, Natural convection in a square cavity with thin porous layers on its vertical walls, *Journal. Heat Transfer*, vol. 113, pp. 892- 898, 1991.
- [27] :A. C. Baytas, A.F. Baytas, D.B. Ingham et I. Pop, Double diffusive natural convection in an enclosure filled with a step type porous layer Non-Darcy flow, *Int. Journal of Thermal Sciences*, vol. 48, pp. 665–673, 2009.
- [28]:D. Gobin et B. Goyeau, Thermosolutal Natural Convection in Partially Porous Domains, *Journal of Heat Transfer*, vol.134, pp. 1-10, 2012.
- [29]:M. Mbaye, E. Bilgen et P. Vasseur, Natural-convection heat transfer in an inclined porous layer boarded by a finite-thickness wall, *Int. Journal. Heat and Fluid Flow*, vol. 14, pp. 244-291, 1993.
- [30] : S. A. Khashan, A. M. Al-Amiri, et I. Pop, Numerical simulation of natural convection heat transfer in a porous cavity heated from below using a non-Darcian and thermal non-equilibrium model, *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*, vol.49, pp. 1039–1049, 2006.
- [31] : P. Bera, S. Pippal, et A. K. Sharma, A thermal non-equilibrium approach on double diffusive natural convection in a square porous-medium cavity, *Int. Journal Heat Mass Transfer*, vol. 78, pp. 1080-1094, 2014.
- [32] : A. Bourouis, A. Omara,et S. Abboudi, convection naturelle dans une cavité poreuse hors équilibre thermique local avec des parois partiellement actives, *XIIème Colloque Interuniversitaire Franco-Québécois sur la Thermique des Systèmes*, 8-10 juin 2015, Sherbrooke Québec (Canada),2015.
- [33] : A. Bourouis, A. Omara,et S. Abboudi, Influence de l'angle d'inclinaison sur le transfert de chaleur par convection naturelle dans une cavité poreuse hors équilibre thermique, *17èmes Journées Internationales de Thermique (Actes on CD)*, 28-30 octobre 2015 Marseille (France), 2015.
- [34] : Amari B., Vasseur P., Bilgen E., Natural Convection of Non Newtonian Fluids in a Horizontal Porous Layer., *Wärme-und Stoffübertragung*, vol. 29, pp. 185-193, 1994.
- [35]: Younsi R., Harkati A., Kalache D., Numerical simulation of double diffusive natural convection in porous cavity: Opposing flow, *Arabian J. for Sc. and Eng.*, Vol. 26(2b), pp. 145-155, 2002.

- [36] : Alloui Z., Dufaua L., Beji H., Vasseur P., Multiple steady states in a porous enclosure partially heated and fully salted from below., *Int. J. of Therm. Sci.* vol. 48, pp. 521–534, 2009.
- [37] : Mahidjiba A., Convection naturelle en milieu poreux anisotrope – effet du maximum de densité. Thèse de Doctorat, Université De Montréal. 2001.
- [38] : Degan G., Vasseur P., Influence of anisotropy on convection in porous media with non uniform thermal gradient, *Inter. J. Heat and Mass Transfer* N°46, p.781–789, 2003.
- [39] : NI J., Beckermann C., Natural Convection in a Vertical Enclosure Filled With Anisotropic Porous Media, *Journal of Heat Transfer*, 113, pp. 1033-1037, 1991.
- [40] : Walker K. L., Homsy G. M., Convection in a Porous Cavity., *Journal of Fluid Mechanics*, 87, pp.449-474, 1978.
- [41] : Shiralkar G. S., Haajizadeh M., Tien G. L., Numerical Study of High Rayleigh Number Convection in a Vertical Porous Enclosure., *Numerical Heat Transfer*, 6, pp.223-234, 1983.
- [42] : Kimura S., Masuda Y., Kazuo Hayashi T., Natural convection in an anisotropic porous medium heated from the side (Effects of anisotropic properties of porous matrix), *Heat Transfer Japan* 22, pp.139–153, 1993.
- [43] : Bian W., Vasseur P., Bilgen E., Boundary-Layer Analysis for Natural Convection in a Vertical Porous Layer Filled with a Non Newtonian Fluid., *International Journal of Heat and Fluid Flow*, vol. 15, No. 5, pp. 384-391, 1994,
- [44] : Bian W., Vasseur P., Bilgen E., Natural Convection of Non Newtonian Fluid in an Inclined Porous Layer., *Chemical Engineering Communication*, vol. 129, pp. 79-97, 1994.
- [45] : Darcy, H. P. G. (1856). *Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon*. Victor Dalmont, Paris.
- [46] : Brinkman, H. C. (1947). A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles. *Appl. Sci. Res. A*, 1:27–34.
- [47] : Lundgren, T. S. (1972). Slow flow through stationary random beds and suspensions of spheres. *J. Fluid Mech.*, 51:273–299.
- [48] : Nield, D. A. (1999). *Convection in Porous Media*, Second Edition. Springer-Verlag