

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

Université AMO de Bouira
Faculté des Sciences et des Sciences Appliquées
Département du Mathématiques



Mémoire de Master

Filière : Mathématiques

Spécialité : Recherche Opérationnelle

Thème

Résolution d'un problème de contrôle optimal
avec des contraintes sur l'état par la
technique de paramétrisation en utilisant la
méthode de décomposition d'Adomian

Présenté par :

M^{me} Ouali Dehia

M^{elle} Younsi Hanane

Devant le jury composé de :

| | | | |
|--------------|--|-------|------------------|
| Président | <i>M^r</i> Karim Hamid | M.A.A | U. A/M/O Bouira. |
| Encadreur | <i>M^r</i> Akkouche Abderrahmane | M.C.B | U. A/M/O Bouira. |
| Examinatrice | <i>M^{me}</i> Ouidja Daya | M.A.A | U. A/M/O Bouira. |

2017/2018

Table des matières

| | |
|--|----------|
| Remerciements | 4 |
| Introduction | 7 |
| 1 Optimisation statique | 9 |
| 1.1 Rappels | 9 |
| 1.2 Analyse convexe | 11 |
| 1.2.1 Introduction | 11 |
| 1.2.2 Définition et premières propriétés | 11 |
| 1.3 Fonctions convexes | 13 |
| 1.3.1 Interprétation géométrique | 13 |
| 1.4 Fonctions convexes différentiables | 14 |
| 1.5 Fonctions convexes deux fois différentiables | 15 |
| 1.6 Qu'est-ce qu'un problème d'optimisation ? | 15 |
| 1.7 Optimisation sans contraintes | 15 |
| 1.7.1 Résultat d'existence et d'unicité | 16 |
| 1.8 Conditions d'optimalité | 16 |
| 1.8.1 Condition nécessaires du première ordre | 16 |
| 1.8.2 Conditions suffisantes | 17 |
| 1.9 Condition d'optimalité globale | 17 |
| 1.10 Problèmes d'optimisation avec contraintes égalités | 17 |
| 1.10.1 Formulation du problème | 17 |
| 1.11 Espace tangent et espace normal | 18 |
| 1.12 Le Lagrangien (fonction de Lagrange) | 20 |
| 1.13 Condition nécessaire d'optimalité | 21 |
| 1.13.1 Condition nécessaire du première ordre | 21 |
| 1.13.2 Condition nécessaire du 2ème ordre | 21 |
| 1.13.3 Condition suffisante de deuxième ordre | 21 |
| 1.14 Problème d'optimisation avec contraintes inégalités | 22 |
| 1.14.1 Condition nécessaire du premier ordre | 22 |
| 1.15 Problème d'optimisation avec contraintes égalités et inégalités | 23 |
| 1.15.1 Condition nécessaire d'optimalité du première ordre | 23 |

| | |
|--|-----------|
| 2 Optimisation Dynamique | 25 |
| 2.1 Introduction | 25 |
| 2.2 Formulation d'un problème de contrôle optimal : | 25 |
| 2.3 Contrôlabilité | 27 |
| 2.3.1 Ensemble accessible | 27 |
| 2.3.2 Contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes | 29 |
| 2.3.3 Contrôlabilité des systèmes linéaires non-autonomes | 30 |
| 2.4 Condition d'optimalité | 30 |
| 2.4.1 La programmation dynamique | 30 |
| 2.4.2 Principe du maximum de Pontriaguine | 32 |
| 2.4.3 Conditions de transversalité | 35 |
| 2.5 Méthodes numériques en contrôle optimale : | 36 |
| 2.5.1 Méthodes indirectes : | 37 |
| 2.5.2 Méthode directes | 40 |
| 2.6 Conclusion | 42 |
| 3 Méthode de décomposition d'Adomian | 43 |
| 3.1 Introduction | 43 |
| 3.2 La méthode de décomposition d'Adomian (MDA) | 43 |
| 3.3 Les polynômes d'Adomian : | 45 |
| 3.4 Convergence de la méthode décompositionnelle d'Adomian | 45 |
| 3.4.1 Convergence de la technique | 45 |
| 3.5 Résolution d'équation différentielles par la méthode d'Adomian : | 46 |
| 3.6 Résolution des systèmes d'équations différentielles par MDA : | 47 |
| 3.7 Exemples | 48 |
| 4 Paramétrisation du vecteur de contrôle | 57 |
| 4.1 Introduction | 57 |
| 4.1.1 Procédure de résolution d'un problème de contrôle avec des contraintes sur l'état | 61 |
| 4.2 Application | 62 |
| Conclusion | 70 |
| bibliographie | 71 |
| Résumé | 73 |

Table des figures

| | | |
|-----|---|----|
| 1.1 | Ensemble Convexe et non convexe. | 11 |
| 1.2 | Enveloppe convexe. | 12 |
| 1.3 | Fonction convexe et fonction concave, fonction non convexe et non concave . . | 13 |
| 1.4 | Épigraphe. | 14 |
| 1.5 | Courbe sur une surface. | 18 |
| 1.6 | Le plan tangent à la surface S au point x^* | 19 |
| 1.7 | Espace normale dans \mathfrak{R}^3 | 20 |
| 2.1 | Contrôlabilité. | 27 |
| 2.2 | $\text{Acc}(x_0, t_f)$: Ensemble accessible. | 28 |
| 3.1 | solution exacte et solution approchée de $y(t)$ | 50 |
| 3.2 | solution exacte et solution approchée de $y(t)$ | 52 |
| 3.3 | solution exacte et solution approchée de $y(t)$ | 54 |
| 3.4 | solution exacte et solution approchée de $y_1(t)$ et $y_2(t)$ | 56 |
| 4.1 | La variable d'état $x(t)$ | 64 |
| 4.2 | La variable de contrôle $u(t)$ | 65 |
| 4.3 | Solution exacte et solution approchée de $x(t)$ | 66 |
| 4.4 | Solution exacte et solution approchée de $u(t)$ | 67 |
| 4.5 | Solution de $x_1(t)$ | 68 |
| 4.6 | Solution de $x_2(t)$ | 69 |
| 4.7 | Solution de $u(t)$ | 69 |

Liste des tableaux

| | | |
|-----|---|----|
| 2.1 | les caractérisation des methodes directes et indirectes | 42 |
| 3.1 | Tab1 | 50 |
| 3.2 | Tab2 | 52 |
| 3.3 | Tab3 | 54 |
| 4.1 | résultats obtenus pour l'exemple 1 | 64 |
| 4.2 | résultats obtenus pour l'exemple 2 | 66 |

Remerciements

Un grand merci revient à Allah le tout puissant qui lui seul nous a donné la volonté de réaliser ce modeste travail.

Un grand merci à notre promoteur, Dr Abderrahmane AKKOUICHE, pour ses conseils et son aide et qui a mis à notre disposition tout le nécessaire pour réaliser ce travail.

Nous remercions messieurs les membres de jury :

M.Hamid Karim qui me fait l'honneur de présider ce jury ;

Mme.Ouidja Daya pour avoir accepté d'être examinatrice de ce mémoire.

qui ont accepté de participer au jury de soutenance..

Nous tenons à remercier nos parents pour leurs encouragements et leurs soutiens.

Sans oublier les bons collègues, nous les remercions pour toutes les belles journées qu'on a passées ensemble. Et tous les autres sans exception.

Ainsi, à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail nous leur disons :

Merci pour tout.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

A celle qui m'a donné la vie, le symbole de tendresse, qui c'est sacrifiée pour mon bonheur
et ma réussite, à ma mère.

A mon père, école de mon enfance, qui a été mon ombre durant toutes les années des études,
et qui a veillé tout au long de ma vie a m'encourager, a me donner "aide et a me protéger.

A mes adorables frères Ali et sa femme Tinhinane, Massi, et Nassim

A mon mari juggurtha

A toute la grande familles OUALI

A mes amies

A tous ceux qui me sont chères

A tous ceux qui m'aiment

A tous ceux que j'aime

Je dédie ce travail

Une dédicace spécial à ma très chère binôme "Hanane" qui m'a vraiment poussé, encouragé
et surtout supporté durant l'élaboration du projet et à toute sa famille....

OUALI DEHIA

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

A mon très cher père, qui a mis en moi tant d'espoir et de confiance.

A ma très adorée mère, qui a attendu ce jour avec impatience.

A mes très chers frères Nabil, Hamza, Sofiane et Sliman

A mes très chères soeur Sabah, Fatma.

A toute la familles YOUNSI et TALI.

Aux enfants de mon frère Hamza et Tasnime et sa femme Hafida.

Aux enfants de ma soeur Akram et Ichrak et son mari Djamal.

A tous mes amis notamment : Latifa, Lamia, Widad, Houda, Khadija, Daouya.....

A tous ceux qui m'ont aidée et qui me sont chers

Une dédicace spécial à ma très chère binôme "Dehia" qui m'a vraiment poussé, encouragé et surtout supporté durant l'élaboration du projet et à toute sa famille....

YOUNSI HANANE

Introduction Générale

La théorie du contrôle analyse les propriétés des systèmes commandés. c'est-à-dire des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (ou contrôle). Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final.

Du point de vue mathématique, un système de contrôle est un système dynamique dépendant d'un paramètre dynamique appelé le contrôle. Pour le modéliser, on peut avoir recours à des équations différentielles intégrales, fonctionnelles, aux différences finies aux dérivées partielles, stochastiques, etc. Pour cette raison les théories du contrôle sont des fonctions ou des paramètres, habituellement soumis à des contraintes.

Le contrôle optimal occupe une place importante dans la théorie du contrôle et constitue un domaine difficile. Il consiste à trouver une politique de contrôle qui dirige le système d'un état initial à un état final et qui minimise les performances données.

Notre mémoire est divisée en deux sections importantes l'optimisation statique et l'optimisation dynamique : le mot "dynamique" est le plus souvent utilisé lorsque le temps intervient, i.e. qu'un système évolue, qu'il faut prendre des décisions à diverses étapes de cette évolution, et que ces décisions auront une influence sur tout le futur. On parle alors de commande optimale qui peut être à nouveau déterministe ou stochastique. Pour être plus précis, dans une formulation déterministe, le mot "dynamique" implique que l'on manipule des "trajectoires" : les "commandes", comme les variables de décisions, les états du système,....., sont des objets indexés par le temps. à l'inverse, si on se place dans des situations dynamiques et en présence d'incertain, on entre le plus souvent dans le monde de la commande en boucle fermée ou en feedback, où l'on a intérêt à prendre les décisions à chaque instant au vu des observations disponibles jusqu'à cet instant.

Contrôlabilité : Un système de contrôle est dit contrôlable si on peut l'amener (en temps fini) d'un état initial arbitraire vers un état final prescrit. Pour les systèmes de contrôle linéaires en dimension finie, il existe une caractérisation très simple de la contrôlabilité. due à Kalman. Pour les systèmes non linéaires le problème mathématique de contrôlabilité est beaucoup plus difficile.

Dans les années 80, George Adomian (21 mars 1922 - 1996) un mathématicien américain a proposé une nouvelle méthode pour résoudre les équations différentielles et aux dérivées partielles linéaires et non linéaires, la technique utilisée est une décomposition de l'opérateur non linéaire en une série de fonction, chaque terme de cette série est un polynôme généralisé appelé polynôme d'Adomian La méthode de décomposition consiste à calculer les solutions

des équations sous la forme d'une série infinie convergente vers la solution du problème donné (Abbaoui, cherrault) [25,1]

Ainsi notre mémoire se compose de quatre chapitres :

Le premier chapitre contient l'outil mathématique dont on aura besoin dans la suite. On présente des rappels sur l'analyse convexe et fonction convexe ainsi que les concepts de la programmation mathématique et les conditions d'optimalité.

Le deuxième chapitre, nous donnons une étude de la commande optimale des systèmes dynamiques, et nous présentons la notion de contrôlabilité pour les système linéaire autonome et non autonome et on a aussi parle sur l'ensemble d'accessibilité, à savoir le principe de Pontryagin et la programmation dynamique. et on a présenté deux types de méthode numérique pour résoudre le problème de contrôle optimal : les méthodes directs et les méthodes indirectes. Ces méthodes peuvent traiter un problème de contrôle optimal plus général qui cherche par exemple à minimiser une fonction .

Le troisième chapitre on donne l'explication de la méthode décompositionnelle d'Adomian défini avec calcule les polynômes d'Adomian, et la définition des solutions sous la forme d'une série

$$\sum_{n \geq 0} u_n t^n$$

la résolution d'équation différentielles par la méthode d'Adomian résolution des systèmes d'équations différentielles par méthode de décomposition d'Adomian, est appliqué pour résoudre quelques problèmes et combinaisons par des solutions directes. En donnant les théorèmes de convergence de la série d'Adomian.

L'utilisation de la méthode d'Adomian pour la résolution des équations d'état d'un système contrôlé permet de transformer le critère à optimiser en un critère explicitement dépendant des contrôles.

La méthode d'Adomian est basée sur la décomposition de la fonction inconnue sous forme d'une série dont les termes sont définis de manière récurrente en utilisant les polynômes d'un type particulier : les polynômes d'Adomian. La solution est obtenue sous la forme d'une série tronquée. L'idée originale consiste à ramener une fonction de \mathfrak{R}^n à une fonction définie sur \mathfrak{R} . Et le dernier chapitre est consacré à la résolution d'un problème de contrôle optimale avec la méthode de paramétrisation du vecteur de contrôle qui transforme le problème d'optimisation dynamique en un problème d'optimisation statique.

L'objectif de ce mémoire est de présenter des techniques d'analyse de problème de contrôle optimal linéaire et non linéaire. On présente notamment le principe du maximum de pontryaguin et la théorie d'Hamilton-Jacobi. Un chapitre est consacré aux méthodes numériques en contrôle optimal (les methodes directes, indirectes). et aussi on a présente la methodes de décomposition d'Adomian.

Enfin, un conclusion générale résume tous les résultats importante obtient dans le cadre de ce travail.

Chapitre 1

Optimisation statique

1.1 Rappels

Définition 1.1. (Minimum et maximum)

Soit une fonction $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$. Alors

1. On dit que $x^* \in S$ est minimum local si :

$$f(x^*) \leq f(x), \forall x \in v(x^*).$$

2. On dit que $x^* \in S$ est minimum global si :

$$f(x^*) \leq f(x), \forall x \in S.$$

3. On dit que $x^* \in S$ est maximum local si :

$$f(x^*) \geq f(x), \forall x \in v(x^*).$$

4. On dit que $x^* \in S$ est maximum global si :

$$f(x^*) \geq f(x), \forall x \in S.$$

Définition 1.2. (Matrice Hessienne)

En mathématique, la matrice Hessienne (ou simplement la Hessienne) d'une fonction numérique f est la matrice carrée, notée H_f , de ces dérivées partielles secondes.

Plus précisément, étant donné une fonction f à valeurs réelles.

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n).$$

et en supposant que toutes les dérivées partielles secondes de f existent.

Le coefficient d'indice i, j de la matrice Hessienne de f est vaut :

$$(H_f)(x)_{i,j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_{i,j})$$

En d'autres termes,

$$\mathbf{H}_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Classification des matrices :

Définition 1.3. :

Soit A une matrice carrée symétrique d'ordre n et x^T transposée de x.

On dit que :

1. A est semi-définie positive si :
 $x^T Ax \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$
2. A est définie positive si :
 $x^T Ax > 0, \quad \forall x \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n.$
3. A est semi-définie négative si :
 $x^T Ax \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$
4. A est définie négative si :
 $x^T Ax < 0, \quad \forall x \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n.$
5. A est indéfinie si il existe x et y $\in \mathbb{R}^n$ tel que :
 $x^T Ax > 0$ et $y^T Ay < 0.$

En évidence critère des valeurs propres.

Théorème 1.1. :

Soit A une matrice carrée symétrique

1. A est définie positive si toutes ses valeurs propres sont strictement positives .
2. A est semi-définie positive si toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles, dont l'une au moins nulle.
3. A est définie négative si toutes ses valeurs propres sont strictement négatives.
4. A est semi-définie négative si toutes ses valeurs propres sont négatives ou nulles, dont l'une au moins nulle.

Application à l'étude des points critiques

La matrice Hessienne permet de déterminer la nature des points critiques de fonction f , c-à-d un point critique peut être :

- Un minimum si la matrice Hessienne H associée à f est définie positive.
- Un maximum si la matrice Hessienne H associée à f est définie négative.
- Un point selle si la matrice Hessienne H associée à f est indéfinie.

1.2 Analyse convexe

1.2.1 Introduction

L'objectif de cette section est de présenter les résultats fondamentaux et des notions de base de l'analyse convexe qui nous seront utiles pour étudier les problèmes d'optimisation et les algorithmes qui les résolvent.

1.2.2 Définition et premières propriétés

Définition 1.4. (Segment)

Soient $x_1, x_2 \in \mathfrak{R}^n$, on appelle segment l'ensemble noté est défini comme suit :

$$[x_1, x_2] = \{\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda \in]0, 1[\} \text{ (fermé).}$$

$$]x_1, x_2[= \{\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda \in]0, 1[\} \text{ (ouvert).}$$

Définition 1.5. (Ensemble convexe)

Un ensemble S dans \mathfrak{R}^n est dit convexe si :

$$\forall x_1, x_2 \in S, \forall \lambda \in]0, 1[, \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in S.$$

Autrement dit, un ensemble convexe contient le segment tout entier $[x_1, x_2]$ joignant deux de ses points x_1, x_2 .

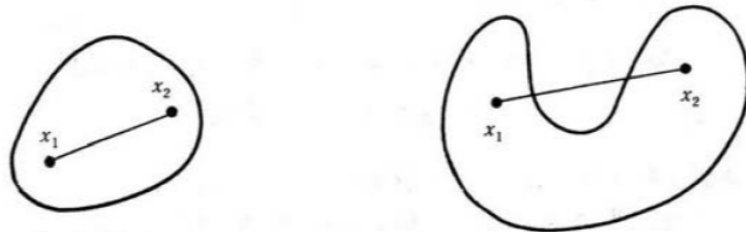


FIGURE 1.1 – Ensemble Convexe et non convexe.

Définition 1.6. (Combinaison convexe)

Un vecteur $X \in \mathfrak{R}^n$ est dit une combinaison convexe des vecteurs $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathfrak{R}^n$ si il

existent des nombres réels $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ tel que :

$$X = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i, \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, m, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1.$$

Remarque 1.1. Si $m=2$, on retrouve la définition précédente (définition (1.5)).

Théorème 1.2. :

Un ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$ est convexe si et seulement si toute combinaison convexe de m points de S appartient à S .

Théorème 1.3. :

L'intersection d'un nombre fini ou infini d'ensembles convexes est convexe.

Théorème 1.4. :

Soit S un ensemble convexe. Alors le produit αS , où α est un nombre réel, est un ensemble convexe.

Théorème 1.5. :

La somme $S = S_1 + S_2$ de deux ensembles convexes, est $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^n$ est convexe.

Définition 1.7. (Enveloppe convexe)

L'enveloppe convexe d'un ensemble arbitraire S de \mathbb{R}^n est le plus petit convexe (au sens de l'inclusion) qui contient S . Elle est notée $\text{conv}(S)$.

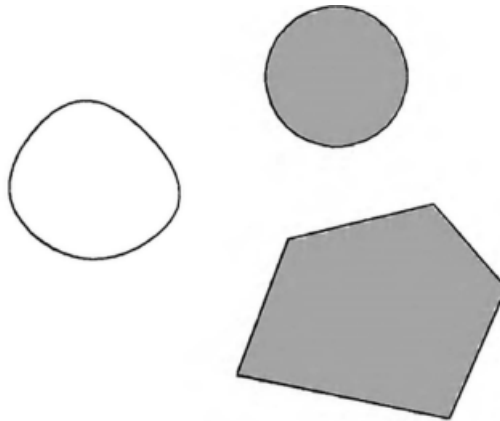


FIGURE 1.2 – Enveloppe convexe.

Théorème 1.6. :

L'enveloppe convexe $\text{conv}(S)$ d'un ensemble S dans \mathbb{R}^n est l'ensemble de toutes les combinaisons convexes des points de S .

1.3 Fonctions convexes

Définition 1.8. (Fonction convexe)

Soit f une fonction définie sur un ensemble convexe $S \subset \mathbb{R}^n$, f est dite convexe si :

$$\forall x_1, x_2 \in S, \forall \lambda \in]0, 1[$$

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \quad (1.1)$$

La fonction f est dite strictement convexe sur l'ensemble S si l'inégalité est stricte pour $x_1 \neq x_2$ et $\lambda \in]0, 1[$.

Définition 1.9. (Fonction concave)

Une fonction f est dite concave si f est convexe, c-à-d :

$$\forall x_1, x_2, \forall \lambda \in [0, 1],$$

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \quad (1.2)$$

1.3.1 Interprétation géométrique

L'inéquation (1.1) à l'interprétation géométrique suivant la valeur de la fonction f en tout point x du segment $[x_1, x_2]$ est situé sous la valeur de la "corde" (interprétation linéaire de f entre x_1 et x_2) au même x .

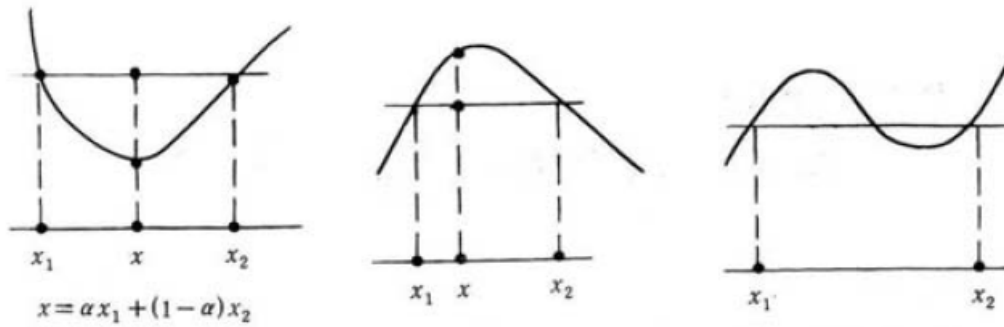


FIGURE 1.3 – Fonction convexe et fonction concave, fonction non convexe et non concave .

Proposition. Soit S un ensemble convexe de \mathbb{R}^n , et soient f_1 et f_2 deux fonctions convexes sur S , alors :

- $f_1 + f_2$ est convexe .
- $\max\{f_1, f_2\}$ est convexe.

Preuve.

Définition 1.10. (Épigraphe)

Soit S un sous ensemble de \mathfrak{R}^n . et soit $f : S \rightarrow \mathfrak{R}$. On appelle épigraphe de f , noté $\text{epi}(f)$, le sous ensemble de \mathfrak{R}^{n+1} donnée par :

$$\text{epi}(f) = \{(x, \alpha) / x \in S, \alpha \in \mathfrak{R} : f(x) \leq \alpha\}$$

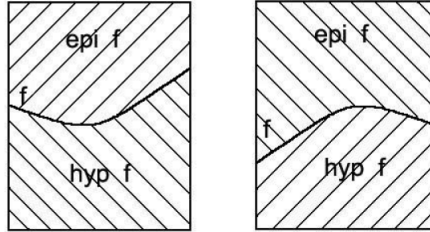


FIGURE 1.4 – Épigraphe.

Théorème 1.7. :[12]

Soit S un ensemble convexe non vide de \mathfrak{R}^n , et soit $f : S \rightarrow \mathfrak{R}$. Alors f est convexe si seulement si $\text{epi}(f)$ est convexe .

Preuve.

Définition 1.11. (Ensemble de niveau)

Soit S un ensemble convexe de \mathfrak{R}^n , et soit f une fonction convexe sur S . On appelle ensemble de niveau α pour f , l'ensemble :

$$S_\alpha = \{x \in S | f(x) \leq \alpha\}.$$

Lemme 1.1. :[3]

Soit $S \subset \mathfrak{R}^n$ convexe, et soit $f : S \rightarrow \mathfrak{R}$ une fonction convexe. Alors l'ensemble de niveau $S_\alpha = \{x \in S | f(x) \leq \alpha\}$., avec $\alpha \in \mathfrak{R}$, est un ensemble convexe .

1.4 Fonctions convexes différentiables

Théorème 1.8. :[3]

Si f une fonction différentiable sur un ensemble convexe ouvert $S \subset \mathfrak{R}^n$, alors f est convexe sur S si seulement si pour chaque $x_1, x_2 \in S$,

$$f(x_2) - f(x_1) \geq \nabla f(x_1)^t (x_2 - x_1).$$

Preuve.

Définition 1.12. :

Soit S un ensemble non vide de \mathfrak{R}^n , et soit $f : S \rightarrow \mathfrak{R}$. Alors f est dite différentiable au point $\bar{x} \in \text{int}S$ si il existe un vecteur $\nabla f(\bar{x})$, appelé vecteur gradient, et une fonction $\alpha : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ tel que :

$$f(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^t (x - \bar{x}) + \|x - \bar{x}\| \alpha(\bar{x}; x - \bar{x}), \forall x \in S.$$

1.5 Fonctions convexes deux fois différentiables

Théorème 1.9. :[3]

Soit S un ensemble convexe non vide de \mathbb{R}^n , et $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable sur S . Alors f est convexe si et seulement si la matrice Hessienne $H(x)$ est semi définie positive en chaque point de S .

Preuve.

Définition 1.13. :

Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble non vide, et $f : S \rightarrow \mathbb{R}$. Alors f est dite deux fois différentiable au point $\bar{x} \in \text{int}S$ s'il existe un vecteur $\nabla f(\bar{x})$, et une $n \times n$ - matrice symétrique $H(\bar{x})$, appelé la matrice Hessienne, est une fonction $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tel que :

$$f(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^t(x - \bar{x}) + \frac{1}{2}(x - \bar{x})^t H(\bar{x})(x - \bar{x}) + \|x - \bar{x}\|^2 \alpha(\bar{x}; x - \bar{x})$$

pour chaque $x \in S$, où $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \alpha(\bar{x}; x - \bar{x}) = 0$.

1.6 Qu'est-ce qu'un problème d'optimisation ?

Soit X est un sous-ensemble non vide de \mathbb{R}^n . Considérons un problème d'optimisation de la forme :

$$\begin{cases} \min f(x), \\ \text{s.c.} & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (1.3)$$

- La fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée fonction coût, objectif ou critère.
- L'ensemble X est appelé ensemble ou domaine des contraintes.
- Tout point $x \in \mathbb{R}^n$ vérifiant : $x \in X$, est appelé point admissible du problème (1.3).

1.7 Optimisation sans contraintes

Définition 1.14. :

On définit un problème d'optimisation sans contraintes par :

$$(p) \begin{cases} \min f(x), \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (1.4)$$

où f est une fonction de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

1.7.1 Résultat d'existence et d'unicité

Avant d'étudier les propriétés de la solution (ou des solutions) de (p) il faut s'assurer de leur existence. Nous donnerons ensuite le résultat d'unicité .

Définition 1.15. :

On dit que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est coercive si :

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty.$$

où $\|\cdot\|$ désigne une norme quelconque de \mathbb{R}^n .

Théorème 1.10. (*Existence*)

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ propre, continue et coercive. Alors (p) admet au moins une solution .

Théorème 1.11. (*Unicité*)

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ strictement convexe. Alors le problème (p) admet au plus une solution.

1.8 Conditions d'optimalité

1.8.1 Condition nécessaires du première ordre

Dans cette sous section, on dérive les conditions pour que un point x^* soit un minimum local.

Étant donné un point $x^* \in \mathbb{R}$, on souhaite si c'est possible de déterminer si c'est un minimum local ou global pour la fonction f .

Pour cela on a besoin de caractériser la solution minimisante.

Théorème 1.12. (*Direction de descente*)

Supposons que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en x^* . Si il existe un vecteur d tel que $\nabla f(x^*)^T d < 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que $f(x^* + \lambda d) < f(x^*)$ pour tout $\lambda \in (0, \delta)$, alors d est une direction de descente de la fonction f au point x^* .

Corollaire 1.1. (*Condition nécessaires du première ordre*)

Supposons que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable au point x^* . Si x^* est un minimum local, alors

$$\nabla f(x^*) = 0$$

Théorème 1.13. (*Conditions nécessaires d'optimalité du 2ème ordre*)

Supposons que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est deux fois continûment différentiable. Si x^* est un minimum local, alors :

- $\nabla f(x^*) = 0$.
- $H_f(x^*)$ est semi définie positive.

1.8.2 Conditions suffisantes

Le théorème suivant nous donne une condition suffisante pour l'optimalité local de point $x^* \in \mathfrak{R}$.

Théorème 1.14. :

Supposons que $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ est deux fois continument différentiable au point x^ . Si*

$$- \nabla f(x^*) = 0.$$

et

$$- H_f(x^*) \text{ est définie positive.}$$

alors x^ est un minimum local strict.*

1.9 Condition d'optimalité globale

Les conditions décrites ci-dessus peuvent seulement garantir seulement une optimalité locale des points stationnaires puisque elles exploitent des informations locales : les valeurs du gradient et la matrice Hessienne au un point donné. Par contre, les conditions qui assurent l'optimalité globale doivent utiliser des informations globales. Par exemple, quand la matrice Hessienne d'une fonction est toujours semi définie positive, alors les points stationnaires sont aussi des minima globaux.

Théorème 1.15. :[3]

Si f est deux fois continument différentiable définie sur \mathfrak{R}^n .

Supposons que $H_f(x^) \geq 0$ pour tout $x \in \mathfrak{R}^n$, Soit $x^* \in \mathfrak{R}^n$ un point stationnaire de f . Alors x^* un minimum globale de f .*

Preuve.

1.10 Problèmes d'optimisation avec contraintes égalités

1.10.1 Formulation du problème

On définit un problème d'optimisation avec contraintes égalités par

$$\left\{ \begin{array}{l} \min f(x), \\ \text{s.c. } h(x) = 0, \\ x \in \mathfrak{R}^n \end{array} \right. \quad (1.5)$$

Où $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$, $h : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$, $h=(h_1, h_2, \dots, h)^T$ avec $m \leq n$. On suppose que la fonction h est continument différentiable, i.e ; $h \in C^1$.

Définition 1.16. (Point régulier)

Un point x^* satisfaisant les contraintes $h_1(x^*) = 0, h_2(x^*) = 0, \dots, h_m(x^*) = 0$ est dit un point

régulier des contraintes si les vecteurs gradients $\nabla h_1(x^*) = 0, \nabla h_2(x^*) = 0, \dots, \nabla h_m(x^*) = 0$ sont linéairement indépendants .

Soit $Jh(x^*)$ la matrice Jacobienne de $h=[h_1, h_2, \dots, h]^T$ au point x^* , donnée par :

$$\mathbf{Jh}(x^*) = \begin{pmatrix} Jh_1(x^*) \\ Jh_2(x^*) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Jh_m(x^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla h_1(x^*)^T \\ \nabla h_2(x^*)^T \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \nabla h_m(x^*)^T \end{pmatrix}$$

Alors x^* est régulier si seulement si $\text{rang } Jh(x^*) = m$, c-à-d, la matrice Jacobienne est le rang plein .

L'ensemble des contraintes égalités $h_1(x^*) = 0, h_2(x^*) = 0, \dots, h_m(x^*) = 0, h_i : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$, décrit une surface

$$S = \{x \in \mathfrak{R}^n : h_1(x^*) = 0, h_2(x^*) = 0, \dots, h_m(x^*) = 0\}.$$

Supposons que les points dans S sont réguliers, alors la dimension de S est n-m .

1.11 Espace tangent et espace normal

Définition 1.17. :[12]

Une courbe C sur une surface S est l'ensemble de points $\{x(t) \in S : t \in (a, b)\}$, continûment paramétrisée par $t \in (a, b)$; i.e :

$x : (a, b) \rightarrow S$ est une fonction continue.

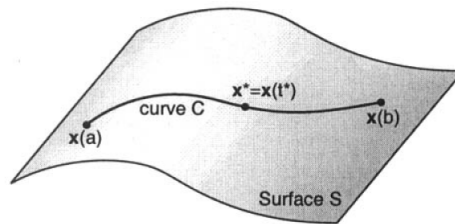


FIGURE 1.5 – Courbe sur une surface.

Intuitivement, une courbe $C=\{x(t) : t \in (a, b)\}$ est un chemin traversé par un point x se déplaçant sur une surface S. La position d'un point au temps t est donné par $x(t)$.

Définition 1.18. :[12]

L'espace tangent au point x^* sur la surface $S=\{x \in \mathfrak{R}^n : h(x) = 0\}$ est l'ensemble

$$T(x^*) = \{y : Jh(x^*)y = 0\}$$

Notons que l'espace tangent $T(x^*)$ est le noyau de la matrice $Jh(x^*)$, i.e;

$$T(x^*) = N(Jh(x^*)).$$

Supposons que x^* est régulier, la dimension de l'espace tangent est $n-m$, où c'est le nombre de contraintes égalité $h_i(x) = 0$. Notons que l'espace tangent passe par l'origine. Cependant, est souvent convenable de représenter l'espace tangent comme un plan qui passe par le point x^* .

Pour cela, on définit le plan tangent au point x^* comme l'ensemble.

$$TP(x^*) = T(x^*) + x^* = \{x + x^*, x \in T(x^*)\}$$

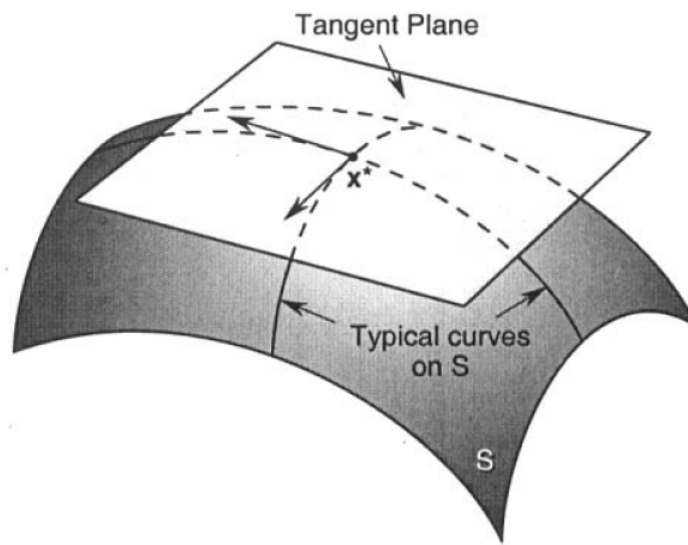


FIGURE 1.6 – Le plan tangent à la surface S au point x^* .

Définition 1.19. :[12]

L'espace normal $N(x^*)$ au point x^* sur la surface $S = \{x \in \mathfrak{R}^n : h(x) = 0\}$ est l'ensemble .

$$N(x^*) = \{x \in \mathfrak{R}^n : x \in Dh(x^*)^T z, z \in \mathfrak{R}^m\}$$

On peut exprimer (formuler) l'espace normal $N(x^*)$ comme :

$$N(x^*) = R(Dh(x^*)^T),$$

c-à-d, le rang de la matrice $Dh(x^*)^T$. Notons que l'espace normal $N(x^*)$ est le sous espace de \mathfrak{R}^n engendré par les vecteurs $\nabla h_1(x^*), \nabla h_2(x^*), \dots, \nabla h_m(x^*)$, i.e;

$$N(x^*) = span[\nabla h_1(x), \nabla h_2(x), \dots, \nabla h_m(x)]$$

$$= \{x \in \mathfrak{R}^n : x = z_1 \nabla h_1(x^*) + \dots + z_m \nabla h_m(x^*), z_1, \dots, z_m \in \mathfrak{R}\}$$

Notons que l'espace normal contient le vecteur zéro. Supposons que x^* est régulier, la dimension de l'espace normal $N(x^*)$ est n , comme dans le cas de l'espace tangent, il est souvent convenable de représenter l'espace normal $N(x^*)$ passant par le point x^* . Pour cela, on définit le plan normal au point x^* comme l'ensemble

$$NP(x^*) = N(x^*) + x^* = \{x + x^* \in \mathbb{R}^n : x \in N(x^*)\}$$

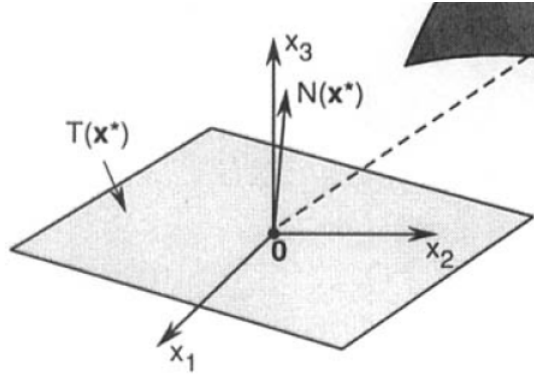


FIGURE 1.7 – Espace normale dans \mathbb{R}^3 .

Lemme 1.2. :

on a $T(x^*) = N(x^*)^\perp$ et $T(x^*)^\perp = N(x^*)$

Preuve.

1.12 Le Lagrangien (fonction de Lagrange)

Définition 1.20. :

On appelle la fonction de Lagrange (ou le Lagrangien) du problème (p) la fonction L définie par :

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(x)$$

- Les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ sont appelés les multiplicateurs de Lagrange.
- Les multiplicateurs de Lagrange indiquent une forme de l'influence de la contrainte dans le coût de la solution.

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla h_i(x^*) = 0$$

il y a deux façons d'interpréter cette équation :

- le gradient de coût $\nabla f(x^*)$ étant le sous-espace recouvert par les contraintes gradients à x^* .
- le gradient de coût $\nabla f(x^*)$ est orthogonal au sous-espace de variations réalisables de premier ordre.

$$v(x^*) = \{\Delta x : \nabla h(x)^T \Delta x = 0, i = 1, \dots, m\}.$$

1.13 Condition nécessaire d'optimalité

1.13.1 Condition nécessaire du première ordre

Théorème 1.16. *:(Théorème de Lagrange)*[12]

Soit x^* un minimum local (ou maximum local) de $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$, sujet à $h(x) = 0$, $h : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$, $m \leq n$. Suppose que x^* est un point régulier. Alors, il existe $\lambda^* \in \mathfrak{R}^m$ tel que :

$$\nabla f(x^*) + \lambda^{*T} \nabla h(x^*) = 0$$

Preuve.

1.13.2 Condition nécessaire du 2ème ordre

Supposons que $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ et $h_i : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$, $i = 1, \dots, m$, sont deux fois continument différentiable. Soit

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla h_i(x),$$

La fonction de Lagrange, et soit

$$\nabla_{xx}^2 L(x, \lambda) = \nabla_{xx}^2 f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla_{xx}^2 h_i(x),$$

est la matrice Hessienne de $L(x, \lambda)$.

Théorème 1.17. *(Condition nécessaire du 2ème ordre)*[12]

Soit x^* un minimum local de $f : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ dans les contraintes $h_i(x) = 0$ $i=1, \dots, m$, $m \leq n$ et $f, h_i \in C^2$. Supposons que x^* est régulier. Alors, il existe $\lambda^* \in \mathfrak{R}^m$ tel que :

- $\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla h_i(x^*) = 0$,
- pour tout $y \in T(x^*)$, on a $y^T \nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda^*) y \geq 0$.

Preuve.

1.13.3 Condition suffisante de deuxième ordre

La condition nécessaire du première ordre peut être satisfaite pour un minimum local et pour un maximum local, (et possible d'autre points critiques). Pour garantir qu'un point stationnaire donnée est un minimum local, on a besoin d'une condition suffisante d'optimalité, qui est donné par le théorème suivant.

Théorème 1.18. :[12]

Supposons que f et h sont deux fois continument différentiables, et soit $x^* \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}^m$ satisfait :

$$\nabla_x L(x^*, \lambda^*) = 0, \nabla_\lambda L(x^*, \lambda^*) = 0.$$

$$y^T \nabla_{xx}^2 L(x^*, \lambda^*) y > 0, \text{ pour tout } y \neq 0 \text{ avec } \nabla h(x^*)^T y = 0$$

Alors x^* est un minimum local strict de $f(x)$ sujet à $h(x) = 0$.

1.14 Problème d'optimisation avec contraintes inégalités

Définition 1.21. :

On définit un problème d'optimisation avec contraintes inégalités par :

$$(p) \left\{ \begin{array}{l} \min f(x), \\ \text{s.c} \quad g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ x \in \mathbb{R}^n \end{array} \right.$$

où f, g_i sont des fonctions continument différentiables sur \mathbb{R}^n .

Définition 1.22. (Contrainte active)

La contrainte $g_i(x) \leq 0$ est dite active ou saturée en \hat{x} si

$$g_i(\hat{x}) = 0$$

On note l'ensemble des contraintes actives en \hat{x} par :

$$E = \{i : g_i(\hat{x}) = 0\}.$$

Définition 1.23. (Point régulier)

Un point \hat{x} admissible c-à-d $g_i(\hat{x}) \leq 0, \forall i = 1, \dots, m$, est dit régulier si $\text{rg } JG_E(\hat{x}) = |E|$, (JG_E : Jacobienne associée à l'ensemble E)

Autrement dit si les vecteurs gradients des contraintes active , $\{\nabla g_i(x)\}_{i \in E}$ sont linéairement indépendants .

1.14.1 Condition nécessaire du premier ordre

Le théorème de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) suivant nous donne une condition nécessaire du première ordre pour qu'un point x^* soit un minimum local pour le problème (p).

Théorème 1.19. :[12]

Soit x^* un minimum local pour le problème

$$(p) \left\{ \begin{array}{l} \min f(x), \\ \text{s.c} \quad g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ x \in \mathbb{R}^n \end{array} \right. \quad (1.6)$$

Où f, g_i sont des fonctions continument différentiables sur \mathfrak{R}^n . Soit $E = \{i : g_i(x^*) = 0\}$ L'ensemble des contraintes actives. Supposons que les gradient des contraintes actives $\{g_i(x^*)_{i \in E}\}$ sont linéairement indépendants. Alors ils existent des multiplicateurs de Lagrange $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \geq 0$ tel que :

$$\begin{aligned} \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x^*) &= 0 \\ \lambda_i \nabla g_i(x^*) &= 0, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

1.15 Problème d'optimisation avec contraintes égalités et inégalités

Définition 1.24. :

On définit un problème d'optimisation avec contraintes égalités et inégalités par :

$$(PIE) \left\{ \begin{array}{l} \min f(x), \\ s.c \\ g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, p \quad x \in \mathfrak{R}^n \end{array} \right.$$

Où $f, g_i, i=1, \dots, m, h_j, j=1, \dots, p$ sont des fonctions continument différentiables sur \mathfrak{R}^n .

Définition 1.25. :

Un point x^* admissible pour le problème pour le problème (PIE) est dit régulier si les gradients $\nabla g_i(x^*), i \in E$ et $\nabla h_j(x^*) j=1, \dots, p$ sont linéairement indépendants

Autrement dit, si

$$\mathbf{rg} \left(\begin{array}{c} \nabla_E g_i(x^*) \\ \nabla h_j(x^*) \end{array} \right) = |E| + p \Leftrightarrow \mathbf{rg} \left(\begin{array}{c} JG_E(x^*) \\ Jh(x^*) \end{array} \right) = |E| + p$$

1.15.1 Condition nécessaire d'optimalité du première ordre

Théorème 1.20. : (Théorème de Karush-Kuhn-Tucker)

Soit $f, g_i, i=1, \dots, m,$ et $h_j, j=1, \dots, p$ sont des fonctions continument différentiables. Soit x^* un minimum local régulier pour le problème (PIE) .

Alors il existe $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_m^* \geq 0$ et $\mu_1^*, \mu_2^*, \dots, \mu_p^* \in \mathfrak{R}$ tel que :

$$\begin{aligned} \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^p \mu_j^* \nabla h_j(x^*) &= 0 \\ \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) &= 0 \end{aligned}$$

dans le théorème ci-dessus, les multiplicateurs $\lambda_i^*, i=1, \dots, m,$ sont appelés multiplicateurs de KKT et $\mu_j^*, j=1, \dots, p,$ sont appelés multiplicateurs de Lagrange.

Définition 1.26. (Point de Karush-Kuhn-Tucker (KKT))

Considérons le problème de minimisation (PIE), où $f, g_1, \dots, g_m, h_1, \dots, h_p$ sont des fonctions continûment différentiables sur \mathfrak{R}^n .

Un point admissible x^* est appelé point de KKT si il existent $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \geq 0$, et $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p \in \mathfrak{R}$ tel que :

$$\begin{aligned} \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^p \mu_j^* \nabla h_j(x^*) &= 0 \\ \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) &= 0, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Théorème 1.21. (Condition nécessaire de KKT pour les problèmes convexes)

Soit x^* un point admissible du problème

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \min f(x), \\ \text{s.c} \\ g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \\ h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, p \end{array} \right.$$

Où $f, g_i, i=1, \dots, m$ sont des fonctions convexes continûment différentiables sur \mathfrak{R}^n . et h_1, h_2, \dots, h_p sont des fonctions affines. Supposons qu'il existent des multiplicateurs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \geq 0$ et $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p \in \mathfrak{R}$ tel que :

$$\begin{aligned} \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^p \mu_j \nabla h_j(x^*) &= 0 \\ \lambda_i \nabla g_i(x^*) &= 0, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Alors x^* est une solution optimale du problème (P).

Théorème 1.22. (Conditions suffisantes de deuxième ordre)

Suppose $f, g, h \in C^2$ et il existe un point réalisable $x^* \in \mathfrak{R}^n$ et les vecteurs $\lambda \in \mathfrak{R}^m$ et $\mu \in \mathfrak{R}^p$, tel que :

1. $\mu^* \geq 0, Df(x^*) + \lambda^{*T} Dh(x^*) + \mu^{*T} Dg(x^*) = 0^T, \mu^{*T} g(x^*) = 0$, et
2. pour tous $y \in T(x^*, \mu^*), y \neq 0$, on a $y^T L(x^*, \lambda^*, \mu^*) y > 0$.
alors x^* est un minimum local strict de f soumis à $h(x)=0, g(x) \leq 0$

Un résultat similaire au théorème (1.20) est valable pour un maximum local strict. la seule différence est que nous avons besoin de $\mu^* \leq 0$ et que $L(x^*, \lambda^*)$ doit être défini négatif.

Chapitre 2

Optimisation Dynamique

2.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter quelques notions générales sur le contrôle optimal.

Dans ce chapitre nous rappelons la formulation d'un problème général de commande optimale, et nous présentons la notion de contrôlabilité pour les systèmes linéaires et les systèmes non linéaires. Et aussi l'énoncé général du principe du maximum de Pontryagin.

La dernière section du chapitre est consacrée à les méthodes numériques en contrôle optimal (les méthodes directes et indirectes) .

2.2 Formulation d'un problème de contrôle optimal :

La formulation d'un problème de contrôle optimal exige une description mathématique du système à contrôler, la spécification du critère à optimiser et les contraintes physiques à satisfaire.

soit :

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n,$$

le vecteur caractérisant l'état du système,

et soit :

$$u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \in \mathbb{R}^m,$$

le vecteur du contrôle.

Un problème de contrôle optimal se formule comme suite :

$$J(x, u) = g(t_f, x(t_f)) + \int_0^{t_f} f_0(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \min_u \quad (2.1)$$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad (2.2)$$

$$x(0) = x_0 \in M_0, \quad (2.3)$$

$$x(t_f) = x_1 \in M_1, \quad (2.4)$$

$$u \in U, t \in I = [0, t_f]. \quad (2.5)$$

Où M_0 et M_1 sont deux variétés de \mathfrak{R}^n , I un intervalle de \mathfrak{R} , $x_0=x(0)$ est la position initiale de l'équation (2.2), $x(t_f)$ est sa position terminale. En pratique, la position du système peut représenter la vitesse initiale, la position, la température et d'autres paramètres mesurables. U est l'ensemble des application mesurables, localement bornées sur I à valeurs dans $U \subset \mathfrak{R}^m$. Le but de la commande consiste à ramener l'objet de la position initiale $x_0 \in M_0$ à une autre position $x_1 \in M_1$, où M_0 est l'ensemble de départ et M_1 l'ensemble d'arrivée. Le but est d'optimiser la fonction décrite par la formule suivante :

$$J(x, u) = g(t_f, x(t_f)) + \int_0^{t_f} f_0(t, x(t), u(t)) dt$$

On appelle $J(x, u)$ le coût du contrôle ou fonction objectif. Cette fonctionnelle comporte deux parties : $g(t_f, x(t_f))$ est le coût terminal, c'est une sorte de pénalité liée à la fin de l'évolution du système au temps finale t_f , il a son importance lorsque t_f est libre, sinon il est constant.

Le second terme intervenant dans la fonction objectif $\int_0^{t_f} f_0(t, x(t), u(t)) dt$ dépend de l'état du système tout au long de la trajectoire de la solution, définie par les variables d'état. Cette trajectoire dépend aussi du temps t mais surtout des variables de contrôle u .

C'est une fonction d'efficacité de chaque commande sur l'intervalle t_f .

On distingue trois problèmes importants :

Problème de Lagrange :

C'est le problème dont le critère à minimiser est égale à :

$$J(x, u) = \int_0^{t_f} f_0(t, x(t), u(t)) dt,$$

C'est à dire $g=0$.

Problème de Mayer :

Dans ce cas le coût s'écrit :

$$J(x, u) = g(t_f, x(t_f)),$$

C'est à dire $f_0=0$, $J(x, u)$ est le coût terminal.

Problème de Mayer-Lagrange :

Le problème de Mayer-Lagrange est donné sous la forme suivante :

$$J(x, u) = g(t_f, x(t_f)) + \int_0^{t_f} f_0(t, x(t), u(t)) dt$$

2.3 Contrôlabilité

L'objectif d'un problème de contrôle est d'amener le système d'un état initial donné à un état final tout en respectant certaines contraintes. Plus précisément on pose la définition suivante :

Définition 2.1. :

Le système $\dot{x}=f(t, x(t), u(t)), x(0)=x_0$ est dit contrôlable si pour tous points $x_0 \in M_0$ et $x_1 \in M_1$, il existe un contrôle $u(\cdot)$ tel que la trajectoire associée à u relie x_0 à x_1 en un temps fini.



FIGURE 2.1 – Contrôlabilité.

La notion de contrôlabilité a été introduite en 1960 par Kalman pour des systèmes linéaires de la forme $\dot{x} = Ax + Bu$. Pour les systèmes non linéaires, le problème mathématique de contrôlabilité est beaucoup plus compliqué. Il constitue un domaine de recherche actif.

2.3.1 Ensemble accessible

soient A et B deux applications L^∞ sur l'intervalle I de \mathfrak{R} à valeurs respectivement dans $M_{n,n}(\mathfrak{R})$ et $M_{n,m}(\mathfrak{R})$, où $M_{r,p}(\mathfrak{R})$ est l'ensemble des matrices à r lignes et p colonnes, à coefficients dans \mathfrak{R}

Considérons le système contrôlé (2.2) sous la formule matricielle suivante :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \in [0, t_f], \quad (2.6)$$

La solution du système différentiel (2.2) est donnée par la formule de Cauchy :

$$x(t) = M(t)x_0 + \int_0^t M(t)M(s)^{-1}B(s)u(s)ds, \quad (2.7)$$

où $M(t)$ est la résolvante du système : $\dot{M}(t) = A(t)M(t), M(0) = I_n, I_n$: matrice identité.

Définition 2.2. :

L'ensemble des points accessibles à partir de x_0 en un temps $t_f > 0$ est défini par :

$$Acc(x_0, t_f) = \{x_u(t_f), u \in L^\infty([0, t_f], \Omega)\}$$

où $L^\infty([0, t_f], \Omega)$ est l'ensemble des applications mesurables u de $[0, t_f]$ essentiellement bornées et $x_u(\cdot)$ est la solution du système (2.2) associée à u .

Ainsi, $Acc(x_0, t_f)$ est l'ensemble des extrémités des solutions du système (2.2), en temps t_f pour différentes valeurs de u .

Théorème 2.1. :

Considérons le système de contrôle linéaire dans \mathbb{R}^n :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

où $\Omega \in \mathbb{R}^m$ est compact. Soient $t_f > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Alors pour tout $t \in [0, t_f]$, $Acc(x_0, t)$ est compact, convexe, et varie continûment avec t sur $[0, t_f]$

.

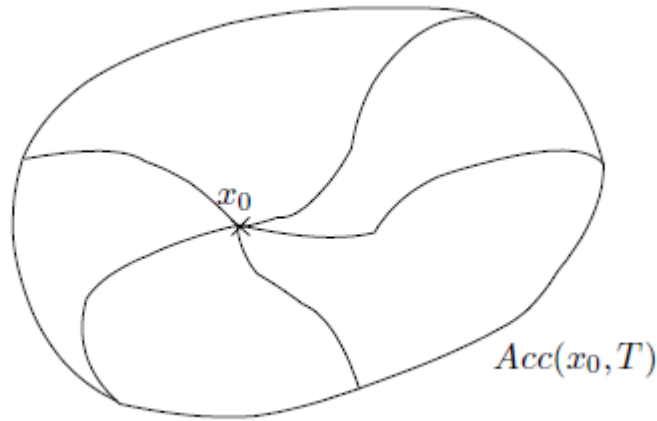


FIGURE 2.2 – $Acc(x_0, t_f)$: Ensemble accessible.

Définition 2.3. :

Un système de contrôle est dit contrôlable si on peut l'amener, en temps fini, d'un état initial vers un état final désiré au moyen d'un contrôle.

Autrement dit, le système contrôlé (2.2) est dit contrôlable en temps t_f si

$$Acc(x_0, t_f) = \mathbb{R}^n, \quad \text{pour tout } x_0 \in M_0,$$

c'est-à-dire pour tout $x_0, t_f \in \mathbb{R}^n$, il existe

$$u(\cdot): [0, t_f] \longrightarrow U, \text{ telque } : x_f = x(t_f, x_0, u(\cdot)).$$

Le système contrôlé (2.2) est dit contrôlable en temps quelconque t depuis x_0 si

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{t_f \geq 0} Acc(x_0, t_f).$$

2.3.2 Contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes

Théorème 2.2. :[20]

un système linéaire autonome de \mathbb{R}^n :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

Avec A : $n \times n$ -matrice

et B : $n \times m$ -matrice.

est contrôlable en temps t_f si et seulement si le rang de la $n \times n$ matrice

$$C = (B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B)$$

est égal à n .

L'essentiel de la preuve est contenu dans le lemme suivant :

Lemme 2.1. :

La matrice C est de rang n si et seulement si l'application linéaire

$$\begin{aligned} \Phi^\circ : L^\infty([0, t_f], \mathbb{R}^m) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ u &\longmapsto \int_0^{t_f} e^{(t_f-t)A} Bu(t) dt \end{aligned}$$

est surjective

Remarque 2.1. :

La matrice C est appelée matrice de Kalman et la condition $\text{rang}(C) = n$ est appelée condition de Kalman, elle ne dépend pas de la condition initial x_0 , ni de temps final t_f . Ceci signifie que si un système linéaire autonome est contrôlable en temps t_f depuis x_0 , alors il est contrôlable en tout temps depuis tout point.

Ce théorème donne ainsi une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité dans le cas où les matrices A et B ne dépendent pas de la variable de temps t .

Exemple 2.1. Considérons le système dynamique linéaire autonome suivant :

où

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Pour vérifier la contrôlabilité de ce système, il suffit de calculer le déterminant de la matrice de Kalman.

Par conséquent, la matrice de Kalman est donnée par :

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} B, AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de K est égal à : $\det(K) = -1 \neq 0$, donc le rang (K)=2, d'où le système est contrôlable

2.3.3 Contrôlabilité des systèmes linéaires non-autonomes

Théorème 2.3. :

un système linéaire non-autonome de \mathbb{R}^n :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t),$$

est contrôlable en temps t_f si et seulement si la matrice

$$C = \int_0^{t_f} M(t)^{-1}B(t)B(t)^tM(t)^{-1}dt,$$

est inversible.

Remarque 2.2. :

La matrice C est appelée matrice de contrôlabilité. Elle ne dépend pas de la condition initiale x_0 , mais elle dépend du temps final t_f .

2.4 Condition d'optimalité

Pour dériver les conditions d'optimalité d'un problème de contrôle optimal, on utilise deux techniques : la programmation dynamique basée sur le principe de Bellman et la deuxième le principe du maximum de Pontriagine basé sur l'approche variationnelle.

2.4.1 La programmation dynamique

Le principe de programmation dynamique pour les problèmes de contrôle optimal à été introduit par Bellman en 1952 et conduit à une équation au dérivées partielles, connue sous le nom, équation Hamilton-Jacobi-Bellman(HJB) qui est une condition suffisante pour l'optimalité du contrôle optimal. Le principe s'annonce comme suit :

si un contrôle $u(t)$ est optimal entre 0 et t_f pour la condition initial $x(0)$, alors il est aussi optimal entre t et t_f , $t > 0$ avec la condition initiale au temps t .

Énonce du problème

Dans ce mémoire, nous considérons le problème suivant de la forme :

$$\begin{aligned} \min_{u(t)} J(x(t), u(t)) &= \Phi(t_f, x(t_f)) + \int_0^{t_f} f(t, x(t), u(t))dt \\ &\text{sujet à} \\ \dot{x}(t) &= g(t, x(t), u(t)), \\ x(0) &= x_0. \end{aligned}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ sont respectivement l'état et le vecteur de contrôle .

$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est un champ de vecteur non linéaire être continuellement différentiable avec tous ses arguments.

Équation du Hamilton-Jacobi Bellman

Selon le principe de la programmation dynamique, soit $V(x,t)$ fonction de valeur définie comme suit :

$$V(x, t) = \min_{u(\tau), t \leq \tau \leq t_f} \left\{ \int_t^{t_f} g(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + h(t_f, x(t_f)) \right\} \quad (2.8)$$

En subdivisant l'intervalle $[t, t_f]$, on obtient :

$$V(x, t) = \min_{u(\tau), t \leq \tau \leq t_f} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} g(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + \int_{t+\Delta t}^{t_f} g(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + h(t_f, x(t_f)) \right\} \quad (2.9)$$

Selon le principe d'optimalité que nous avons :

$$V(x, t) = \min_{u(\tau), t \leq \tau \leq t_f} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} g(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + V(x(t+\Delta t), t+\Delta t) \right\} \quad (2.10)$$

où $V(x(t+\Delta t), t+\Delta t)$ est le coût minimum du processus pour l'intervalle de temps $t+\Delta t \leq t \leq t_f$ avec l'état initial $x(t+\Delta t)$.

en utilisant la série de Taylor (d'ordre 1) pour $V(x(t+\Delta t), t+\Delta t)$ à propose du point $V(x(t), t)$ on obtient :

$$V(x, t) = \min_u \left\{ \int_t^{t+\Delta t} g d\tau + V(x(t), t) + \left(\frac{\partial V}{\partial t}(x(t), t) \right) \Delta t + \left(\frac{\partial V}{\partial x}(x(t), t) \right)^T (x(t+\Delta t) - x(t)) \right\} + 0(\Delta t) \quad (2.11)$$

Pour Δt petit, équation (2.12) devient :

$$V(x, t) = \min_u \left\{ \int_t^{t+\Delta t} g d\tau + V(x(t), t) + \left(\frac{\partial V}{\partial t}(x(t), t) \right) \Delta t + \left(\frac{\partial V}{\partial x}(x(t), t) \right)^T (a(x(t), u(t), t)) \right\} + 0(\Delta t) \quad (2.12)$$

$$\iff V(x(t), t) - V(x(t), t) - \frac{\partial V}{\partial t} \Delta t + \min_u \left\{ g \Delta t + \frac{\partial V}{\partial x} (a(x(t), u(t), t)) \Delta t + 0(\Delta t) \right\} \quad (2.13)$$

en divisant par Δt et en prenant la limite comme $\Delta t \rightarrow 0$ on obtient l'équation différentielle partielle non linéaire suivante appelée d'équation Hamilton-Jacobi-Bellman.

$$0 = -\frac{\partial V}{\partial t} + \min_u \left\{ g(x(t), u(t), t) + \frac{\partial V}{\partial x} a(x(t), u(t), t) \right\} \quad (2.14)$$

présentation du fonction Hamiltonien :

$$H(x(t), u(t), \frac{\partial V}{\partial x}, t) = g(x(t), u(t), t) + \frac{\partial V}{\partial x}(a(x(t), u(t), t)) \quad (2.15)$$

La minimisation de la fonction Hamiltonien conduit à l'expression de loi de contrôle u , en fonction de $x(t)$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ et t défini par :

$$u(t) = \Psi(x(t), \frac{\partial V}{\partial x}, t). \quad (2.16)$$

En substituant l'expression de la loi de contrôle optimale dans la fonction Hamiltonien (2.16), donnée :

$$H(x(t), u(t), t) = H(x(t), \Psi(x(t), \frac{\partial V}{\partial x}, t), t) \quad (2.17)$$

Et l'équation HJB devient :

$$-\frac{\partial v}{\partial t} = H(x(t), \Psi(x(t), \frac{\partial V}{\partial x}, t), t) \quad (2.18)$$

pour trouver la condition aux limites de cette équation différentielle partielle, définissez $t = t_f$ dans la fonction de valeur (2.8) on obtient :

$$V(x(t_f), t_f) = h(x(t_f), t_f) \quad (2.19)$$

2.4.2 Principe du maximum de Pontriaguine

La version forte suivante, beaucoup plus difficile à montrer, du théorème précédent (voir [5] pour une démonstration, voir aussi [4,10,14]), prend en compte les contraintes sur le contrôle, et affirme que cet extremum est un maximum. On a l'énoncé général suivant.

Énoncé général

Théorème 2.4. :

On considérons le système de contrôle dans \mathbb{R}^n

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad (2.20)$$

où $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^1 et où les contrôle sont des applications mesurables et bornées définies sur un intervalle $[0, t_e(u)[$ de \mathbb{R}^+ et à valeur dans $\Omega \in \mathbb{R}^m$. Soient M_0 et M_1 deux sous-ensembles de \mathbb{R}^n . On note U l'ensemble des contrôles admissibles u dont les trajectoires associées relient un point initial de M_0 à un point final de M_1 en temps $t(u) < t_e(u)$.

Par ailleurs on définit le coût d'un contrôle u sur $[0, t]$:

$$J(t, u) = \int_0^t f^0(s, x(s), u(s)) ds + g(t, x(t))$$

où $f^0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sont de classe C^1 , et $x(\cdot)$ est la trajectoire solution de pb (2.20) associé au contrôle u .

On considère le problème de contrôle optimal suivant : déterminer une trajectoire reliant M_0 à M_1 et minimisant le coût. Le temps final peut être fixé ou non.

Si le contrôle $u \in U$ associé à la trajectoire $x(\cdot)$ est optimal sur $[0, t_f]$, alors il existe une application $p(\cdot) : [0, t_f] \rightarrow \mathfrak{R}^n$ absolument continue appelée vecteur adjoint, et un réel $p^0 \leq 0$, tels que le couple $(p(\cdot), p^0)$ est non tous nul, et tels que, pour presque tout $t \in [0, t_f]$,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) \\ \dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) \end{cases} \quad (2.21)$$

Où $H(t, x, p, p^0, u) = \langle p, f(t, x, u) \rangle + p^0 f^0(t, x, u)$ est l'Hamiltonien du système, et on a la condition de maximisation presque partout sur $[0, t_f]$.

$$H(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) = \max_{v \in \Omega} H(t, x(t), p(t), p^0, v). \quad (2.22)$$

Si de plus le temps final pour joindre la cible M_1 n'est pas fixé, on a la condition au temps final t_f .

$$\max_{v \in \Omega} H(t_f, x(t_f), p(t_f), p^0, v) = -p^0 \frac{\partial g}{\partial t}(t_f, x(t_f)) \quad (2.23)$$

Si de plus M_0 et M_1 (ou juste l'un des deux ensembles) sont des variétés de \mathfrak{R}^n ayant des espaces tangents en $x(0) \in M_0$ et $x(t_f) \in M_1$ alors le vecteur adjoint peut être construit de manière à vérifier les conditions de transversalité aux deux extrémités (ou juste l'une des deux).

$$p(0) \perp T_{x(0)}M_0 \quad (2.24)$$

et

$$p(t_f) - p^0 \frac{\partial g}{\partial t}(t_f, x(t_f)) \perp T_{x(t_f)}M_1 \quad (2.25)$$

Remarque 2.3. :

Si le contrôle u est continu au temps t_f , la condition (2.23) peut s'écrire :

$$H(t_f, x(t_f), p(t_f), p^0, u(t_f)) = -p^0 \frac{\partial g}{\partial t}(t_f, x(t_f)) \quad (2.26)$$

Remarque 2.4. :

Si la variété M_1 s'écrit sous la forme

$$M_1 = \{x \in \mathfrak{R}^n / F_1(x) = \dots = F_p(x) = 0\},$$

où les F_i sont des fonctions de classe C^1 sur \mathfrak{R}^n (indépendantes puisque M_1 est une variété), alors la condition (2.25) se met sous la forme

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathfrak{R} / p(t_f) = \sum_{i=0}^p \lambda_i \nabla F_i(x(t_f)) + p^0 \frac{\partial g}{\partial x}(t_f, x(t_f)). \quad (2.27)$$

Remarque 2.5. :

Dans les conditions du théorème, on a de plus pour presque tout $t \in [0, t_f]$:

$$\frac{d}{dt}H(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) = \frac{\partial H}{\partial t}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) \quad (2.28)$$

En particulier si le système augmenté est autonome, i.e. si f et \dot{f} ne dépendent pas de t , alors H ne dépend pas de t , et on a :

$$\forall t \in [0, t_f] \quad \max_{v \in \Omega} H(x(t), p(t), p^0, v) = cste$$

Notons que cette égalité est alors valable par tout sur $[0, t_f]$ (en effet cette fonction de t est lipschitzienne).

Remarque 2.6. :

La convention $p^0 \leq 0$ conduit au principe du maximum. La convention $p^0 \geq 0$ conduirait au principe du minimum, i.e; la condition (2.22) serait une condition de minimum.

Définition 2.4. :

Une extrémale du problème de contrôle optimal est un quadruple $(x(\cdot), p(\cdot), p^0(\cdot), u(\cdot))$ solution des équations (2.21) et (2.22). Si $p(\cdot)^0 = 0$, On dit que l'extrémale est anormale, et si $p^0(\cdot) \neq 0$ l'extrémale est dite normale.

Remarque 2.7. :

Lorsque $\Omega = \mathfrak{R}^m$, i.e; lorsqu'il n'y a pas de contrainte sur le contrôle, alors la trajectoire $x(\cdot)$, associée au contrôle $u(\cdot)$, est une trajectoire singulière du système (2.20), si et seulement si elle est projection d'une extrémale anormale $(x(\cdot), p(\cdot), p^0(\cdot), u(\cdot))$.

Définition 2.5. :

Les conditions (2.24) et (2.25) sont appelées conditions de transversalité sur les vecteur adjoint. La condition (2.23) est appelée condition de transversalité sur le Hamiltonien. Elles sont ici écrites de manière très générale, et dans les deux paragraphes suivants nous allons les réécrire dans des cas plus simples.

Remarque 2.8. :

Le problème important du temps minimal correspond à $f^0 = 1$ et $g = 0$, ou bien à $f^0 = 0$ et $g(t, x) = t$. Dans les deux cas les conditions de transversalité obtenues sont bien les mêmes.

Remarque 2.9. :

Il existe des versions plus générales du principe du maximum, pour des dynamiques non lisses ou hybrides (voir par exemple [18, 17, 2] et leurs références, voir aussi plus loin pour le principe du maximum avec contraintes sur l'état).

2.4.3 Conditions de transversalité

Conditions de transversalité sur le vecteur adjoint

Dans ce paragraphe le temps final pour atteindre la cible peut être fixé ou non. Réécrivons les conditions (2.24) et (2.25) dans les deux cas importants suivants.

Problème de Lagrange. Dans ce cas le coût s'écrit

$$J(t, u) = \int_0^t f^0(s, x(s), u(s)) ds,$$

i.e; $g=0$. Les conditions de transversalité (2.24) et (2.25) sur le vecteur adjoint s'écrivent alors,

$$p(0) \perp T_{x(0)} M_0, \quad p(t_f) \perp T_{x(t_f)} M_1. \quad (2.29)$$

Remarque 2.10. :

Si par exemple $M_0 = \{x_0\}$, la condition (2.24) devient vide. Si au contraire $M_0 \in \mathbb{R}^n$, i.e; si le point initial n'est pas fixé, on obtient $p(0)=0$.

De même, si $M_1 \in \mathbb{R}^n$, on obtient $p(t_f)=0$. Autrement dit si le point final est libre alors le vecteur adjoint au temps final est nul.

Problème de Mayer. Dans ce cas le coût s'écrit

$$J(t, u) = g(t, x(t)),$$

i.e; $f^0 = 0$. Les conditions de transversalité (2.24) et (2.25) (ou (2.27)) ne se simplifient pas a priori.

Mais dans le cas particulier important où $M_1 \in \mathbb{R}^n$, autrement dit le point final $x(t_f)$ est libre, la condition (2.25) devient :

$$p(t_f) = p^0 \frac{\partial g}{\partial x}(t_f, x(t_f)) \quad (2.30)$$

et alors forcément $p^0 \neq 0$ (on prend alors $p^0 = -1$). Si de plus g ne dépend pas au temps, on a coutume d'écrire $p(t_f) = -\nabla g(x(t_f))$.

Condition de transversalité sur le Hamiltonien

La condition (2.23) n'est valable que si le temps final pour atteindre la cible n'est pas fixé. Dans ce paragraphe nous nous plaçons donc dans ce cas.

La seule simplification notable de cette condition est le cas où la fonction g ne dépend pas du temps t (ce qui est vrai par exemple pour un problème de Lagrange), et la condition de transversalité (2.23) sur le Hamiltonien devient alors

$$\max_{v \in \Omega} H(t_f, x(t_f), p(t_f), p^0, v) = 0 \quad (2.31)$$

on encore, si u est continu au temps t_f ,

$$H(t_f, x(t_f), p(t_f), p^0, u(t_f)) = 0 \quad (2.32)$$

Autrement dit le Hamiltonien s'annule au temps final.

Remarque 2.11. :

Si le système augmenté est de plus autonome, i.e; si f et f^0 ne dépendent pas de t , alors d'après la remarque 2.5 on a le long d'une extrémale

$$\forall t \in [0, t_f] \quad \max_{v \in \Omega} H(t_f, x(t_f), p(t_f), p^0, v) = 0$$

Généralisation des conditions de transversalité

Pour écrire les conditions de transversalité associées à un problème de contrôle plus général, il faut écrire les relations adéquates en termes de multiplicateurs de Lagrange.

Par exemple considérons un problème de Lagrange avec des conditions aux limites mélangées, i.e; on cherche une trajectoire solution de

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$$

minimisant le coût

$$J(t_f, u) = \int_0^{t_f} f^0(t, x(t), u(t)) dt,$$

et vérifiant les conditions aux limites

$$(x(0), x(t_f)) \in M,$$

où M est une sous-variété de $\mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^n$.

On peut alors montrer que dans ce cas les conditions de transversalité (2.24) et (2.25) sur le vecteur adjoint s'écrivent

$$(-p(0), p(t_f)) \perp T_{(x(0), x(t_f))} M.$$

Un cas important de condition mélangées est le cas des trajectoires périodiques, i.e. $x(0) = x(t_f)$ non fixé. Dans ce cas on a

$$M = \{(x, x) / x \in \mathfrak{R}^n\},$$

et la condition de transversalité donne

$$p(0) = p(t_f).$$

Autrement dit, non seulement la trajectoire est périodique, mais aussi son relèvement extrémal.

2.5 Méthodes numériques en contrôle optimale :

On distingue deux types de méthodes numériques en contrôle optimal : les méthodes directes et les méthodes indirectes.

2.5.1 Méthodes indirectes :

Méthode de tir simple :

Le principe est le suivant : Considérons le problème de contrôle optimal (2.1),(2.2), et supposons dans un premier temps que le temps final t_f est fixé .

Le principe du maximum donne une condition nécessaire d'optimalité et affirme que toute trajectoire optimale est la projection d'une extrémale. Si l'on est capable, à partir de la condition de maximum, d'exprimer le contrôle extrémal en fonction de $(x(t),p(t))$, alors le système extrémal est un système différentiel de la forme $\dot{z}(t)=F(t,z(t))$, où $z(t)=(x(t),p(t))$, et les conditions initiales, finales, et les conditions de transversalité, se mettent sous la forme $R(z(0),z(t_f))=0$.

Finalement, on obtient le problème aux valeurs limites

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = F(t, z(t)), \\ R(z(0), z(t_f)) = 0. \end{cases} \quad (2.33)$$

Notons $z(t,z_0)$ la solution du problème de cauchy

$$\dot{z}(t) = F(t, z(t)), \quad z(0) = z_0,$$

et posons $G(t_f, z_0) = R(z_0, z(t_f, z_0))$, le problème (2.33) aux valeurs limites est alors équivalent à

$$G(t_f, z_0) = 0.$$

i.e ; il s'agit de déterminer un zéro de la fonction G .

Remarque : Si le temps final t_f est libre, on peut se ramener à la formulation précédente en considérant t_f comme une inconnue auxiliaire. On augmente alors la dimension de l'état en considérant l'équation supplémentaire $\frac{dt_f}{dt} = 0$. On peut utiliser le même artifice si le contrôle est bang-bang. pour déterminer les temps de commutation .

Il peut cependant s'avérer préférable, lorsque le temps final est libre, d'utiliser la condition de transversalité sur le Hamiltonien.

Méthode de tir multiple

Par rapport à la méthode de tir simple, la méthode de tir multiple découpe l'intervalle $[0, t_f]$ en N intervalles $[t_i, t_{i+1}]$, et se donne comme inconnues les valeurs $z(t_i)$ au début de chaque sous-intervalle. Il faut prendre en compte des conditions de recollement en chaque temps t_i (conditions de continuité). Une référence classique pour l'algorithme de tir multiple est [24].

De manière plus précise, considèrerons un problème de contrôle optimal général. L'application du principe du maximum réduit le problème à un problème aux valeurs limites du type

$$\dot{z}(t) = F(t, z(t)) = \begin{cases} F_0(t, z(t)) & \text{si } t_0 \leq t < t_1 \\ F_1(t, z(t)) & \text{si } t_1 \leq t < t_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_s(t, z(t)) & \text{si } t_s \leq t \leq t_f \end{cases} \quad (2.34)$$

où $z=(x,p) \in \mathfrak{R}^{2n}$ (p est le vecteur adjoint), et $t_1, t_2, \dots, t_s \in [t_0, t_f]$ peuvent être des temps de commutation; dans le cas où le problème inclut des contraintes sur l'état, ce peut être des temps de jonction avec un arc frontière, ou bien des temps de contact avec la frontière. On a de plus des conditions de continuité sur l'état et le vecteur adjoint aux points de commutation. Dans le cas de contraintes sur l'état, on a des conditions de saut sur le vecteur adjoint, et des conditions sur les contraintes c en des points de jonction ou de contact. De plus on a des conditions aux limites sur l'état, le vecteur adjoint (conditions de transversalité), et sur le Hamiltonien si le temps final est libre.

Remarque : A priori le temps final t_f est inconnue. Par ailleurs dans la méthode de tir multiple le nombre s de commutations doit être fixé; on le détermine lorsque c'est possible par une analyse géométrique du problème.

La méthode de tir multiple consiste à subdiviser l'intervalle $[t_0, t_f]$ en N sous-intervalles, la valeur de $z(t)$ au début de chaque sous-intervalle étant inconnue. Plus précisément, soit $t_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_k < t_f$ une subdivision fixée de l'intervalle $[t_0, t_f]$. En tout point σ_j la fonction z est continue. On peut considérer σ_j comme un point de commutation fixé. en lequel on a

$$\begin{cases} z(\sigma_j^+) = z(\sigma_j^-) \\ \sigma_j = \sigma_j^* \text{ fixé.} \end{cases}$$

On définit maintenant les noeuds

$$\{ \tau_1, \dots, \tau_m \} = \{t_0, t_f\} \cup \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\} \cup \{t_1, \dots, t_s\}. \quad (2.35)$$

Finalement on est conduit au problème aux valeurs limites

$$\bullet \dot{z}(t) = F(t, z(t)) = \begin{cases} F_1(t, z(t)) & \text{si } \tau_1 \leq t < \tau_2 \\ F_2(t, z(t)) & \text{si } \tau_2 \leq t < \tau_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_{m-1}(t, z(t)) & \text{si } \tau_{m-1} \leq t \leq \tau_m \end{cases} \quad (2.36)$$

- $\forall j \in \{2, \dots, m-1\} \quad r_j(\tau_j, z(\tau_j^-), z(\tau_j^+)) = 0$
- $r_m(\tau_m, z(\tau_1), z(\tau_m)) = 0$

où $\tau_1 = t_0$ est fixé, $\tau_m = t_f$, et les r_j représentent les conditions intérieures ou limites précédentes.

Remarque :

On améliore la stabilité de la méthode en augmentant le nombre de noeuds. C'est là en effet le principe de la méthode de tir multiple, par opposition à la méthode de tir simple où les erreurs par rapport à la condition initiale évoluent exponentiellement en fonction de $t_f - t_0$ (voir [24]). Bien sûr dans la méthode de tir multiple il y a beaucoup plus d'inconnues que dans la méthode de tir simple, mais éventuellement l'intégration du système (2.34) peut se paralléliser.

Posons $z_j^+ = z(\tau_j^+)$, et soit $z(t, \tau_{j-1}, z_{j-1}^+)$ la solution du problème de Cauchy.

$$\dot{z}(t) = (t, z(t)), z(\tau_{j-1}) = z_{j-1}^+$$

On a

$$z(\tau_j^-) = z(\tau_j^-, \tau_{j-1}, z_{j-1}^+)$$

Les conditions intérieures et frontières s'écrivent

$$\begin{cases} \forall j \in \{2, \dots, m-1\} & r_j(\tau_j, z(\tau_j^-, \tau_{j-1}, z_{j-1}^+), z_j^+) = 0, \\ & r_m(\tau_m, z_1^+, z(\tau_m^-, \tau_{m-1}, z_{m-1}^+)) \end{cases} \quad (2.37)$$

Posons maintenant

$$Z = (z_1^+, \tau_m, z_2^+, \tau_2, \dots, z_{m-1}^+, \tau_{m-1})^T \in \mathfrak{R}^{(2n+1)(m-1)}$$

(où $z \in \mathfrak{R}^{2n}$). Alors les conditions (2.37) sont vérifiées si

$$\mathbf{G}(Z) = \begin{pmatrix} r_m(\tau_m, z_1^+, z(\tau_m^-, \tau_{m-1}, z_{m-1}^+)) \\ r_2(\tau_2, z(\tau_2^-, \tau_1, z_1^+), z_2^+) \\ \cdot \\ \cdot \\ r_{m-1}(\tau_m, z(\tau_{m-1}^-, \tau_{m-2}, z_{m-2}^+), z_{m-1}^+) \end{pmatrix} = 0$$

On s'est donc ramené à déterminer un zéro de la fonction G , qui est définie sur un espace vectoriel dont la dimension est proportionnelle au nombre de points de commutation et de points de la subdivision. L'équation $G=0$ peut alors être résolue itérative-ment par une méthode de type Newton (voir la sous section suivante).

Rappels sur les méthode de Newton

Il s'agit de résoudre numériquement $G(z)=0$, où $G : R^p \longrightarrow R^p$ est une fonction de classe C^1 . L'idée de base est la suivante. Si s_k est proche d'un zéro z de G . alors

$$0 = G(z) = G(z_k) + dG(z_k).(z - z_k) + 0(z - z_k).$$

On est alors amené à considérer la suite définie par récurrence

$$z_{k+1} = z_k - (dG(z_k))^{-1}.G(z_k).$$

un point initial $z_0 \in R^p$ étant choisi, et on espère que z_k converge le zéro z . Ceci suppose donc le calcul de l'inverse de la matrice jacobienne de G , ce qui doit être évité numériquement. Il s'agit alors, à chaque étape, de résoudre l'équation

$$G(z_k) + dG(z_k).d_k = 0,$$

où d_k est appelé direction de descente, et on pose $z_{k+1} = z_k + d_k$.

Sous des hypothèses générales, l'Algorithme de Newton converge, et la convergence est quadratique. Il existe de nombreuses variantes de la méthode Newton ; méthode de descente, de quasi-Newton, de Newton quadratique, de Broyden,... Cette méthode permet, en général, une détermination très précise d'un zéro. Son inconvénient principal est la petitesse du domaine de convergence. Pour faire converger la méthode, il faut que le point initial z_0 soit suffisamment proche de la solution recherchée z . Ceci suppose donc que pour déterminer le zéro z il faut avoir au préalable de la valeur de z .

Du point de vue du contrôle optimal, cela signifie que, pour appliquer une méthode de tir, il faut avoir une idée a priori de la trajectoire optimale cherchée.

Ceci peut sembler paradoxal, mais il existe de se donner une approximation, même grossière, de cette trajectoire optimale, Il s'agit là en tout cas d'une caractéristique majeure des méthodes de tir : elles sont très précises mais requièrent une connaissance a priori (plus ou moins grossière) de la trajectoire optimale cherchée.

2.5.2 Méthode directes

Les méthodes directes consistent à transformer le problème de contrôle optimal en un problème d'optimisation non linéaire en dimension finie.

Discrétisation totale : tir direct

C'est la méthode la plus évidente lorsqu'on aborde un problème de contrôle optimal. En discrétisant l'état et le contrôle on se ramène à un problème d'optimisation non linéaire en dimension finie (ou problème de programmation non linéaire) de la forme

$$\min_{Z \in C} F(Z),$$

où $Z = (x_1, \dots, x_N, u_1, \dots, u_n)$, et

$$C = \{Z/g_i(Z) = 0, i \in 1, \dots, r, g_j(Z) \leq 0, j \in r + 1, \dots, m\}.$$

Plus précisément, la méthode consiste à choisir les contrôles dans un espace de dimension finie, et à utiliser une méthode d'intégration numérique des équations différentielles. Considérons donc une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_f$ de l'intervalle $[0, t_f]$. Réduisons l'espace des contrôles en considérant (par exemple) des contrôles constants par morceaux selon cette subdivision. Par ailleurs, choisissons une discrétisation de l'équation différentielle par exemple choisissons ici (pour simplifier) la méthode d'Euler explicite. On obtient alors, en posant $h_i = t_{i+1} - t_i$,

$$x_{i+1} = x_i + h_i f(t_i, x_i, u_i).$$

Remarque

Il existe une infinité de méthodes d'intégration numérique. D'une part, on peut discrétiser l'ensemble des contrôles admissibles par des contrôles constants par morceaux, ou affines par morceaux, ou par des fonctions splines, etc. D'autre part, il existe de nombreuses méthodes pour discrétiser une équation différentielle ordinaire : méthode d'Euler (explicite ou implicite), méthode du point milieu, méthode de Heun, méthode Runge-Kutta, méthode d'Adams Monlton, etc. De plus l'introduction d'éventuelles contraintes sur l'état ne pose aucun problème.

La discrétisation précédente conduit donc au problème de programmation non linéaire

$$x_{i+1} = x_i + h_i f(t_i, x_i, u_i), i = 0, \dots, N - 1$$

$$\min C(x_0, x_1, \dots, x_N, u_0, u_1, \dots, u_N),$$

$$u_i \in \Omega, i = 0, \dots, N - 1$$

Le tableau suivant résume les caractérisation des méthodes directes et indirectes :

| Méthode directes | Méthodes indirectes |
|--|--|
| mise en oeuvre simple, sans connaissance a priori | connaissance a priori de la structure de la trajectoire optimale |
| peu sensibles au choix de la condition initiale | très sensibles au choix de la condition initiale |
| facilite de la prise en compte de contraintes sur l'état | difficulté théorique de la prise en compte de contraintes sur l'état |
| contrôles (globalement) optimaux en boucle fermée | contrôles (localement) optimaux en boucle ouverte |
| précision numérique basse ou moyenne | très grande précision numérique |
| efficaces en basse dimension | efficace en toute dimension |
| gourmandise en mémoire | calculs parallélisables |
| problème des minima locaux | petit domaine de convergence |

TABLE 2.1 – les caractérisation des methodes directes et indirectes

2.6 Conclusion

Cette étude est consacrée à la résolution d'un problème de contrôle optimal non linéaire lorsque l'état est soumis à certaines contraintes et la valeur de l'état final est fixe. Pour sa résolution, on a utilisé la méthode de tir simple et la méthode de tir multiple.

Chapitre 3

Méthode de décomposition d'Adomian

3.1 Introduction

La méthode de décomposition d'Adomian permet de résoudre des problèmes fonctionnels de différents types : équations algébrique, différentielles, intégrales, intégréo-différentielles, aux dérivées partielles (EDP). La méthode s'adapte aussi bien aux problèmes linéaires et non linéaire. Il suffit qu'on puisse écrire l'équation sous la forme :

$$Fx = f$$

qui est appelée forme canonique d'Adomian.

3.2 La méthode de décomposition d'Adomian (MDA)

Pour illustrer le principe de la méthode de décomposition d'Adomian, considérons l'équation différentielle non linéaire suivante [1] :

$$Lx(t) + Rx(t) + Nx(t) = f(t) \quad (3.1)$$

où L et R sont des opérateurs linéaires avec L est la dérivée d'ordre le plus élevé, supposée inversible. N est l'opérateur non linéaire et $f(t)$ est une fonction lisse.

Ainsi, l'application de l'opérateur inverse L^{-1} à l'équation (3.1) donne [15].

$$L^{-1}(Lx(t)) = L^{-1}(f(t)) - L^{-1}(Rx(t)) - L^{-1}(Nx(t)) \quad (3.2)$$

Par conséquent :

$$x(t) = \Phi(t) - L^{-1}(Rx(t)) - L^{-1}(Nx(t)) \quad (3.3)$$

où la fonction $\Phi(t)$ résulte de l'intégration du terme $f(t)$ et en tenant compte des conditions initiales données.

selon la méthode de décomposition d'Adomian, la solution $x(t)$ est écrite comme la somme d'un nombre infini de termes donnés [15]

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n(t) \quad (3.4)$$

où les termes $x_n(t)$, $n \geq 0$ sont déterminés de manière itérative.

Aussi la partie non linéaire $N x(t) = F(x(t))$ est exprimée en terme de polynômes d'Adomian $A_n(x(t))$ comme suit [15] :

$$F(x(t)) = N x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x(t)), \quad n \geq 0, \quad (3.5)$$

avec

$$A_n(x(t)) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[F \left(\sum_{i=0}^n \lambda^i x_i(t) \right) \right]_{\lambda=0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

maintenant, la substitution de (3.4) et (3.5) en (3.6) donne

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n(t) = \Phi(t) - L^{-1} \left(R \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n(t) \right) \right) - L^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x(t)) \right), \quad (3.7)$$

et les termes $x_n(t)$ peuvent être déduits comme suit :

$$\begin{aligned} x_0(t) &= \Phi(t) && ; \\ x_1(t) &= -L^{-1}R(x_0(t)) - L^{-1}A_0(x(t)); \\ x_2(t) &= -L^{-1}R(x_1(t)) - L^{-1}A_1(x(t)); \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$x_{k+1}(t) = -L^{-1}R(x_k(t)) - L^{-1}A_k(x(t)); \quad (3.8)$$

et on peut définir le schéma récursif suivant

$$\begin{aligned} x_0(t) &= \Phi(t) \\ x_{k+1}(t) &= -L^{-1}R(x_k(t)) - L^{-1}A_k(x(t)), \quad k \geq 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Une fois que les termes $x_k(t)$ sont déterminés, une solution approchée de x peut être obtenue en supposant n termes comme suit

$$x(t) \approx x^n(t) = \sum_{k=0}^n x_k(t), \quad n \geq 0 \quad (3.10)$$

et la solution exacte, s'elle est, est donnée par :

$$x(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)}(t) \quad (3.11)$$

La question qu'on peut poser c'est comment déterminer les $(A_n)_{n \geq 0}$ et à quelles conditions la méthode converge.

3.3 Les polynômes d'Adomian :

Définition 3.1. Les polynômes d'Adomian sont définis par la formule :

$$\begin{cases} A_0(x_0) = N(x_0) = f(x_0) \\ A_n(x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \frac{d^n}{d\lambda^n} [N(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i x_i)]_{\lambda=0} \end{cases} \quad (3.12)$$

La formule proposée par G.Adomian pour le calcul des polynômes d'Adomian $(A_n)_{n \geq 0}$ est la suivante : $A_0(x_0) = N(x_0)$

$$A_1(x_0, x_1) = x_1 \frac{\partial}{\partial x} N(x_0)$$

$$A_2(x_0, x_1, x_2) = x_2 \frac{\partial}{\partial x} N(x_0) + \frac{1}{2!} x_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} N(x_0)$$

$$A_3(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_3 \frac{\partial}{\partial x} N(x_0) + x_1 x_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} N(x_0) + \frac{1}{3!} x_1^3 \frac{\partial^3}{\partial x^3} N(x_0)$$

Cette formule s'écrit sous la forme :

$$A_n = \sum_{v=0}^n c(v, n) N^{(v)}(z_0) , \quad n \geq 0 \quad (3.13)$$

Où $c(v, n)$ représente la somme de tous les produits (divisées par $m!$) des v termes z_i dont la somme des indices i est égales à n ; m étant le nombre de répétitions des mêmes termes dans le produit.

3.4 Convergence de la méthode décompositionnelle d'Adomian

3.4.1 Convergence de la technique

Pour toute série convergente $\sum_{i=0}^{\infty} x_i$ on définit $N(x)$ par :

$$N(x) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i(x_0, \dots, x_i) \quad (3.14)$$

Les A_i de (3.14) étant déterminés à l'aide des relations (3.6). Nous verrons plus loin sous quelles conditions la série A_i est susceptible de converger.

Pour toute suite $x(t) = \sum_{i=0}^n x_i$ on définit $N(x(t))$ par :

$$N(x(t)) = \sum_{i=0}^n A_i(x_0, \dots, x_i). \quad (3.15)$$

La méthode d'Adomian revient alors à déterminer la suite

$$S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n \quad (3.16)$$

à l'aide du schéma itératif suivant :

$$S_{n+1} = N(x_0 + S_n), \quad S_0 = 0. \quad (3.17)$$

En effet

$$x_1 = S_1 = N(x_0) = A_0.$$

Puis, $S_2 = x_1 + x_2 = N(x_0 + x_1) = A_0 + A_1$.

Mais $x_1 = A_0$ d'où il résulte $x_2 = A_1$, etc.

De proche en proche, la relation (3.17) permet de retrouver toutes les relations initiales d'Adomian(3.8). Il y a donc équivalence de la technique d'Adomian et du schéma(3.17).

Or, le schéma (3.17) correspond à la résolution de l'équation

$$N(x_0 + S) = S. \quad (3.18)$$

Remarque : Revenons sur la convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A_n = N(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i x_i)$ lorsque $\sum \lambda^i x_i$ converge. Si $N(x)$ peut être approché par un polynôme en x (hypothèse assez faible en pratique) alors $N(x) = N(\sum \lambda^i x_i)$ peut être développé en série entière $\sum \lambda^n x_n$ dont les A_n sont donnés par la formule (3.6) faisant intervenir les dérivées énième de N . Si le rayon de convergence est supérieur ou égal à 1 on peut utiliser les formules d'Adomian ($\lambda = 1$). L'inconvénient de cette approche est la condition restrictive sur N (contraction). On peut s'en débarrasser en modifiant le schéma.

3.5 Résolution d'équation différentielles par la méthode d'Adomian :

Si $Fx=f$ est une équation différentiel ou F est un opérateur différentiel non linéaire (ou F linéaire) possédant des termes linéaires et non linéaires. Le terme linéaire est décomposé en $L+R$, où par convenance L est un opérateur différentiel d'ordre le plus grand facilement inversible.

soit l'équation différentielle d'ordre $n \in N^*$

$$\frac{d^n x}{dt^n} + Rx + Nx = f, \quad (3.19)$$

où $x(t_0), x'(t_0), x''(t_0), \dots, x^{n-1}(t_0)$ sont des valeurs données.

Si on pose $L = \frac{d^n}{dt^n}(\cdot)$. la formule $LX +RX +NX = f$ transforme l'équation différentielle ci-dessus en $Lx + Rx + Nx = f$.

L'équation (3.3) s'écrit :

$$x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-t_0)^k}{k!} x^{(k)}(t_0) + L^{-1}f(t) - L^{-1}R\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n(t)\right) - L^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} |A_n|\right) \quad (3.20)$$

D'où l'on tire :

$$\begin{aligned} x(t_0) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-t_0)^k}{k!} x^{(k)}(t_0) + L^{-1}f(t) \\ x_1 &= -L^{-1}Rx_0 - L^{-1}A_0 \\ &\dots \\ x_{n+1} &= -L^{-1}Rx_n - L^{-1}A_n \end{aligned}$$

3.6 Résolution des systèmes d'équations différentielles par MDA :

Les systèmes d'équations différentielles ordinaires du premier ordre peuvent-être considérés comme :

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \\ x'_2 = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \\ \dots \\ x'_n = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases} \quad (3.21)$$

tel que chaque équation représente la première dérivation par rapport à t .

Les fonction f_1, f_2, \dots, f_n dépendent en t.

On utilise MDA pour résoudre le système (3.21) :

On peut représenter le système (3.21), par utilisation i^{eme} équation comme :

$$Lx_i = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n), i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.22)$$

tel que L est un opérateur linéaire ($L = \frac{d}{dt}$) avec l'inverse $L^{-1} = \int_0^t (\cdot) dt$.

En appliquant L^{-1} aux deux termes de (3.22), on trouve un système convenable pour lui applique la méthode MDA :

$$x_i = x_i(0) + \int_0^t f_i(y, x_1, x_2, \dots, x_n) dy, i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.23)$$

La solution avec MDA de (3.23) est considérée comme étant une série :

$$x_i = \sum_{j=0}^{\infty} f_{i,j}, \quad (3.24)$$

et l'intégrale de (3.23) est donnée comme la somme de la série suivante :

$$f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=0}^{\infty} A_{i,j}(f_{i,0}, f_{i,1}, \dots, f_{i,j}) \quad (3.25)$$

où les $A_{i,j}(f_{i,0}, f_{i,1}, \dots, f_{i,j})$ sont appelées polynômes Adomian.

on remplaçant (3.24) et (3.25) dans (3.23) on trouve :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} f_{i,j} &= x_i(0) + \int_0^t \sum_{j=0}^{\infty} A_{i,j}(f_{i,0}, f_{i,1}, \dots, f_{i,j}) \\ &= x_i(0) + \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^t A_{i,j}(f_{i,0}, f_{i,1}, \dots, f_{i,j}) \end{aligned} \quad (3.26)$$

qui donne :

$$\begin{cases} f_{i,0} = x_i(0) \\ f_{i,n+1} = \int_0^t A_{i,n}(f_{i,0}, f_{i,1}, \dots, f_{i,n}), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.27)$$

3.7 Exemples

Exemple 3.1. Considérons l'équation différentielle d'ordre 1 suivante :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = y(t), & 0 < t < 1, \\ y(0) = 1, \end{cases} \quad (Eq1)$$

dont la solution exacte est :

$$y(t) = \exp(t).$$

Pour déterminer la solution de l'équation différentielle (Eq1) par la méthode de décomposition d'Adomian, on écrit d'abord l'équation (Eq1) sous forme canonique comme suit :

$$Ly(t) = y(t) \quad (3.28)$$

où équation différentielle "L" est donnée par :

$$L = \frac{d}{dt}(\cdot) \quad (3.29)$$

et son opérateur inverse "L⁻¹" est défini par :

$$L^{-1} = \int_0^t (\cdot) dt. \quad (3.30)$$

En appliquant l'opérateur inverse (3.30) aux deux cotes de l'équation (3.28), et en utilisant la condition initiale, on obtient :

$$L^{-1}(Ly(t)) = L^{-1}(y(t)) \quad (3.31)$$

qui est équivalent à :

$$y(t) - y(0) = L^{-1}(y(t))$$

ou encore :

$$y(t) = 1 + L^{-1}(y(t)); \quad (3.32)$$

et selon la méthode de décomposition d'Adomian, la solution $y(t)$ est donnée sous forme d'une série infinie de la forme .

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t) \quad (3.33)$$

En remplaçant l'expression (3.33) dans (3.32), on aura :

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i(t) = 1 + L^{-1}\left(\sum_{i=0}^{\infty} y_i(t)\right)$$

et par conséquent, on a le schéma itératif suivant :

$$\begin{cases} y_0(t) = 1, \\ y_{i+1}(t) = L^{-1}(y_i(t)), \quad i = 0, 1, 2; \dots \end{cases}$$

Ce schéma permet de déterminer les composantes de la série : $y_1(t), y_2(t), \dots$ qui sont données comme suit :

$$\begin{aligned} y_0(t) &= 1 \\ y_1(t) &= t \\ y_2(t) &= \frac{1}{2!}t^2 \\ y_3(t) &= \frac{1}{3!}t^3 \\ y_4(t) &= \frac{1}{4!}t^4 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \end{aligned}$$

est la solution sous forme d'une série infinie est :

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t) = 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{4!}t^4 + \dots + \frac{1}{n!}t^n + \dots$$

qui donne la solution exacte $y(t) = \exp t$ obtenue en utilisant le développement de Taylor de $\exp t$

Dans la table (Tab1). on fait une comparaison entre la solution exacte et la solution obtenue avec ADM en utilisant 7 itérations, De même, dans la figure (FIGURE 3.1). on trace les graphes dans deux solutions exactes et approchées, et on voit bien, les résultats sont très proches.

| t | solution exacte | solution approchée (ADM) | erreur |
|-----|-----------------|--------------------------|-----------------------|
| 0,0 | 1 | 1 | 0,00000 |
| 0,1 | 1,105171 | 1,105171 | 0,0000 |
| 0,2 | 1,221403 | 1,221403 | 0,0000 |
| 0,3 | 1,349859 | 1,349859 | 0,0000 |
| 0,4 | 1,491825 | 1,491725 | 0,0000 |
| 0,5 | 1,648721 | 1,648721 | 0,0000 |
| 0,6 | 1,822119 | 1,822119 | 0,0000 |
| 0,7 | 2,013751 | 2,013753 | $0,2 \times 10^{-5}$ |
| 0,8 | 2,225537 | 2,225541 | $0,4 \times 10^{-5}$ |
| 0,9 | 2,459592 | 2,459603 | $0,11 \times 10^{-4}$ |
| 1,0 | 2,718254 | 2,718282 | $0,28 \times 10^{-4}$ |

TABLE 3.1 – Tab1

comparaison de la solution avec la solution obtenue avec la méthode Adomian avec 7 itérations

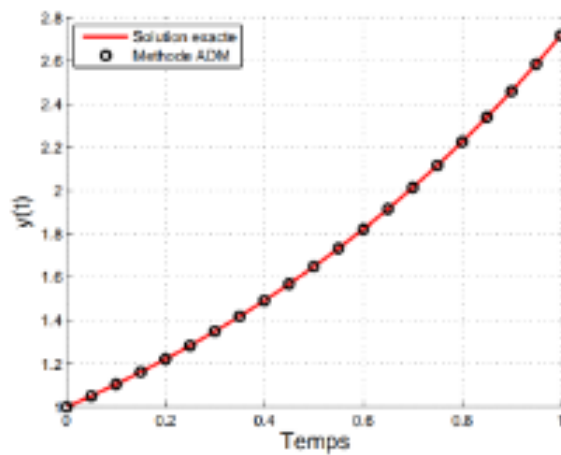


FIGURE 3.1 – solution exacte et solution approchée de $y(t)$

Exemple 3.2. Considérons l'équation différentielle linéaire d'ordre 2

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) = -y(t), & 0 < t \leq 1 \\ y(0) = 0, \dot{y}(0) = 1 \end{cases} \quad (Eq2)$$

ayant pour solution exacte : $y(t) = \sin t$.

L'utilisation de la méthode ADM pour chercher la solution de l'équation différentielle (Eq2), permet d'écrire cette équation sous forme canonique

$$Ly(t) + y(t) = 0 \quad (3.34)$$

où

$$L = \frac{d^2}{dt^2}(\cdot) \quad (3.35)$$

et son inverse est défini comme suit :

$$L^{-1} = \int_0^t \int_0^t (\cdot) dt dt. \quad (3.36)$$

L'application de l'opérateur inverse (3.36) à l'équation (3.34) et l'utilisation des conditions initiales permet d'obtenir

$$y(t) = t - L^{-1}(y(t)) \quad (3.37)$$

D'après la méthode de décomposition d'Adomian, la solution s'écrit sous forme d'une série infinie

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i(t). \quad (3.38)$$

Alors, en remplaçant (3.38) dans (3.37), on obtient :

$$\sum_{i=1}^{\infty} y_i(t) = t - L^{-1}\left(\sum_{i=1}^{\infty} y_i(t)\right)$$

et par conséquent, on obtient le schéma itératif suivant :

$$\begin{cases} y_0(t) = t \\ y_{i+1}(t) = L^{-1}(y_i(t)), \quad i = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Ce schéma donne les approximations successives suivantes :

$$\begin{aligned} y_0(t) &= t \\ y_1(t) &= \frac{-1}{3!}t^3 \\ y_2(t) &= \frac{1}{5!}t^5 \\ y_3(t) &= \frac{-1}{7!}t^7 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

et la solution $y(t)$ est donnée par

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i(t) = t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 - \frac{1}{7!}t^7 + \dots + (1)^n \frac{1}{2n+1!}t^{2n+1} + \dots$$

qui donne la solution exacte $y(t) = \sin t$, obtenue en utilisant le D.L de Taylor de $\sin t$.

| t | solution exacte | solution approchée | erreur |
|-----|-----------------|--------------------|----------------------|
| 0,0 | 0 | 0 | 0,00000 |
| 0,1 | 0,0998334 | 0,0998334 | 0,0000 |
| 0,2 | 0,198670 | 0,198669 | $0,1 \times 10^{-5}$ |
| 0,3 | 0,295520 | 0,295520 | 0,0000 |
| 0,4 | 0,389418 | 0,389418 | 0,0000 |
| 0,5 | 0,479425 | 0,479426 | $0,1 \times 10^{-5}$ |
| 0,6 | 0,564642 | 0,564642 | 0,0000 |
| 0,7 | 0,644218 | 0,644218 | 0,0000 |
| 0,8 | 0,717356 | 0,717356 | 0,0000 |
| 0,9 | 0,783327 | 0,783327 | 0,0000 |
| 1,0 | 0,841471 | 0,841471 | 0,0000 |

TABLE 3.2 – Tab2

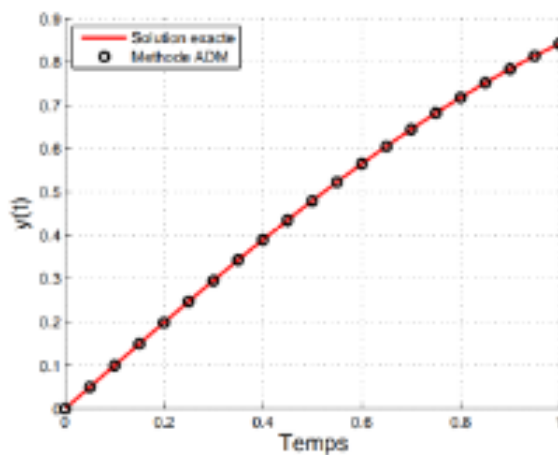


FIGURE 3.2 – solution exacte et solution approchée de $y(t)$

Exemple 3.3. Considérons l'équation différentielle non linéaire suivante.

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = y^2(t) + 1 & , \quad 0 < t \leq 1. \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (Eq3)$$

Ayant pour solution exacte.

$$y(t) = \tan(t).$$

L'équation différentielle (Eq3) sous forme compacte s'écrit :

$$Ly(t) = Ny(t) + 1 \quad (3.39)$$

En appliquant l'inverse de L, L^{-1} , pour l'équation (3.39), on obtient :

$$y(t) = t + L^{-1}(Ny(t))$$

Selon le principe de la Méthode de décomposition d'Adomian, $y(t)$ est représentée par

$$y(t) = \sum_{i=0}^N y_i(t) \quad (3.40)$$

et le terme non linéaire $Ny(t) = y^2(t)$ peut aussi s'exprimer par une série infinie de polynôme d'Adomian de la forme

$$Ny(t) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i \quad (3.41)$$

où les polynômes A_i , $i = 0, 1, 2, \dots$ sont déterminés en utilisant la formule(3.12)

En remplaçant (3.40) et (3.41) dans (3.39), on obtient le système itératif suivant :

$$\begin{cases} y_0(t) = t \\ y_{i+1}(t) = L^{-1}(A_i) , \quad i = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

qui donne les approximations suivantes :

$$\begin{cases} y_0(t) = t \\ y_1(t) = \frac{1}{3}t^3 \\ y_2(t) = \frac{2}{15}t^5 \\ y_3(t) = \frac{17}{315}t^7 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{cases}$$

et solution obtenue $\sum_{i=0}^{\infty} y_i(t)$ converge vers la solution exacte

$$y(t) = \tan(t) = t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 + \frac{17}{315}t^7 + \dots$$

| t | solution exacte | solution approchée | erreur |
|-----|-----------------|--------------------|-----------------------|
| 0,0 | 0 | 0 | 0,00000 |
| 0,1 | 0,100334 | 0,100335 | $0,1 \times 10^{-5}$ |
| 0,2 | 0,202711 | 0,202710 | $0,1 \times 10^{-5}$ |
| 0,3 | 0,309336 | 0,309336 | 0,0000 |
| 0,4 | 0,422792 | 422793 | $0,1 \times 10^{-5}$ |
| 0,5 | 0,546303 | 0546302 | $0,1 \times 10^{-5}$ |
| 0,6 | 0,684137 | 0,684737 | 0,0000 |
| 0,7 | 0,842287 | 0,842288 | $0,1 \times 10^{-5}$ |
| 0,8 | 1,02963 | 1,02964 | $0,1 \times 10^{-4}$ |
| 0,9 | 1,26000 | 1,26016 | $0,16 \times 10^{-4}$ |
| 1,0 | 1,55642 | 1,55741 | $0,99 \times 10^{-4}$ |

TABLE 3.3 – Tab3

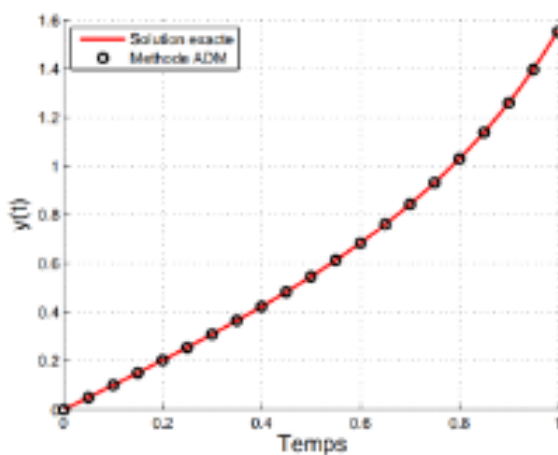


FIGURE 3.3 – solution exacte et solution approchée de $y(t)$

Exemple 3.4. Considérons le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) = y_1(t) + y_2(t) & , & y_1(0) = 0. \\ \dot{y}(t) = -y_1(t) + y_2(t) & , & y_2(0) = 1 \end{cases} \quad (Eq4)$$

Ayant pour solution exacte.

$$y_1(t) = e^t \sin(t),$$

$$y_2(t) = e^t \cos(t),$$

L'application de la méthode de décomposition d'Adomian permet d'obtenir les systèmes itératifs suivants :

$$\begin{cases} y_1^0(t) = 0; \\ y_1^{i+1} = L^{-1}(y_1^i(t) + y_2^i(t)) \quad , \quad i = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2^0(t) = 1; \\ y_2^{i+1}(t) = L^{-1}(-y_1^i(t) + y_2^i(t)) \quad , \quad i = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

et par conséquent, on aura :

$$\begin{cases} y_1^0(t) = 0, \\ y_2^0(t) = 1, \\ y_1^1(t) = t, \\ y_2^1(t) = t, \\ y_1^2(t) = t^2, \\ y_2^2(t) = 0. \\ y_1^3(t) = \frac{1}{3}t^3, \\ y_2^3(t) = -\frac{1}{3}t^3, \end{cases}$$

et la solution du système (Eq4) sous forme de séries infinies :

$$y_1(t) = t + t^2 + \frac{1}{3}t^3 + \dots$$

$$y_2(t) = 1 + t - \frac{1}{3}t^3 + \dots$$

une comparaison de la solution exacte avec la solution approchée obtenue par la méthode ADM avec 15 itérations est faite et illustrée dans la figure (FIGURE 3.4).

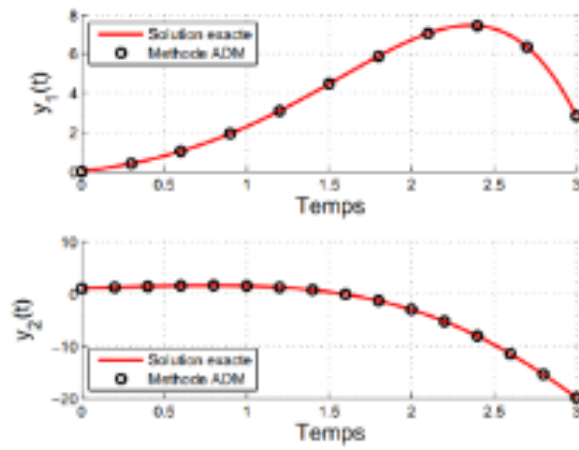


FIGURE 3.4 – solution exacte et solution approchée de $y_1(t)$ et $y_2(t)$

Chapitre 4

Paramétrisation du vecteur de contrôle

4.1 Introduction

La méthode de paramétrisation est une technique directe pour la résolution des problèmes de contrôle optimal qui consiste à transformer le problème de contrôle optimal, problème d'optimisation dynamique, en un problème d'optimisation statique. La technique de Paramétrisation peut être appliquée sous l'une des trois formes suivantes : paramétrisation du vecteur de contrôle [19,26], paramétrisation du vecteur d'état [20,29], ou paramétrisation du vecteur d'état et de contrôle .

Cette approche est basée sur l'approximation du vecteur de contrôle et/ou du vecteur d'état par une combinaison linéaire de fonctions de base, telles que les fonctions polynomiales, les fonctions trigonométriques, les polynômes de Legendre, les polynômes de Hermite [16], ou les polynômes de Chybeshev [19]. Les coefficients de la combinaison linéaire constituent les variables de décision à choisir de manière optimale à l'aide de techniques d'optimisation standard basées sur les gradients, telles que la méthode de gradient conjugué, la méthode du gradient projeté ou l'algorithme de programmation quadratique séquentielle (SQP) [9, 21].

Paramétrisation du vecteur de contrôle

La paramétrisation du vecteur de controle est basée sur l'approximation de la variable de contrôle en choisissant une structure bien appropriée avec un nombre fini de paramètres inconnus comme suit :

$$u(t) = \sum_{i=0}^N a_i \Phi_i(t), \quad (4.1)$$

où les a_i , $i = 0, 1, \dots, N$ sont des paramètres inconnus, et les $\Phi_i(t)$ désignent un ensemble approprié de fonctions de base formant un espace de contrôle de dimension fini.

Paramétrisation du vecteur d'état

L'idée de la paramétrisation de l'état est d'approcher les variables d'état du système par une séquence de fonctions données avec des paramètres inconnus :

$$x(t) = \sum_{i=0}^N a_i \Phi_i(t), \quad (4.2)$$

Paramétrisation du vecteur de contrôle et le vecteur d'état

L'approche de paramétrisation du vecteur d'état et de contrôle [9,13] est basée sur l'approximation des variables d'état et des variables de contrôle par une séquence de fonctions connues avec des paramètres inconnus, comme suit :

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{i=0}^N b_i \Phi_i(t), \\ u(t) &= \sum_{i=0}^N a_i \Phi_i(t), \end{aligned}$$

où les a_i , et les b_i , $i = 0, 1, \dots, N$ sont des paramètres inconnus, et les $\Phi_i(t)$ forment un ensemble de fonctions appropriées.

Dans ce travail, on s'intéresse à la technique de paramétrisation du vecteur de contrôle par des fonctions polynomiales.

Principe de la méthode de paramétrisation du vecteur de contrôle

Considérons le problème de contrôle optimal suivant :

$$J(u(t)) = S(x(t_f), t_f) + \int_0^{t_f} f(x(t), u(t), t) dt, \longrightarrow \min_u \quad (4.3)$$

$$\dot{x}(t) = g(x(t), u(t), t), \quad t \in [0, t_f] \quad (4.4)$$

$$x(0) = x_0, \quad x(t_f) = x_f, \quad (4.5)$$

pour lequel on cherche à déterminer le meilleur contrôle pour transférer le système de l'état initial x_0 vers un état final x_{t_f} en minimisant la fonction coût $J(u(t))$. Pour se faire, on approche le contrôle $u(t)$ par une fonction polynomiale de la forme :

$$u(t) = \sum_{i=0}^N a_i t^i, \quad N = 1, 2, \dots \quad (4.6)$$

et la recherche de $u(t)$ revient à trouver les paramètres a_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Les variables d'état sont obtenues en fonction des paramètres inconnus des variables de contrôle, en intégrant les équations d'état du système. En d'autres termes, on remplace le contrôle $u(t)$ par son expression (4.6) dans l'équation d'état (4.4), pour obtenir l'équation différentielle suivante :

$$\dot{x}(t) = g(x(t), \sum_{i=0}^N a_i t^i, t), \quad (4.7)$$

qui est une équation différentielle avec second membre, qu'on résout par la suite par la méthode de décomposition d'Adomian.

La méthode de décomposition d'Adomian fournit une solution de forme tronquée qui dépend explicitement des paramètres a_i , $i = 0, 1, 2, \dots, N$. De façon précise, $x(t)$ est donnée comme suit :

$$x(t) = \sum_{i=0}^N v(a_i, t). \quad (4.8)$$

Et en substituant les variables de contrôle approchées (4.6) et les variables d'état (4.8) correspondantes dans la fonction cout (4.3), on aura :

$$\begin{aligned} \min_a J &= \int_0^{t_f} f\left(\sum_{i=0}^N v(a_i, t), \sum_{i=0}^N a_i t^i, t\right) dt + S(x(t_f), t_f), \\ &= F(a_0, a_1, \dots, a_N). \end{aligned}$$

le problème de contrôle optimal peut être converti en un problème d'optimisation non statiques, qui peut être résolu plus facilement que le problème d'origine. Ce problème peut être interprété comme un problème de minimisation de J avec a_i , $i = 0, 1, \dots, N$ comme variables de décision inconnues. Pour le problème d'optimisation ainsi obtenu, on peut avoir problème sans contraintes ou problème avec contraintes égalités, selon le problème traité : problème avec état final libre ou problème avec contraintes sur l'état final.

Problèmes avec contraintes sur l'état

Dans cette sous section, on verra comment résoudre un problème de contrôle avec contraintes sur l'état. Considérons le problème de contrôle optimal suivant avec contraintes sur le vecteur d'état :

$$\min J(u(t)) = S(x(t_f), t_f) + \int_0^{t_f} f(x(t), u(t), t) dt, \quad (4.9)$$

$$\dot{x}(t) = g(x(t), u(t), t), \quad t \in [0, t_f] \quad (4.10)$$

$$h(x(t), t) \leq 0, \quad (4.11)$$

$$x(0) = x_0, \quad x(t_f) = x_f. \quad (4.12)$$

Pour résoudre ce type de problème, on le transforme d'abord à un problème sans contraintes en utilisant la technique de Valentine, qui consiste à transformer la contrainte de type inégalité en une équation en introduisant une variable d'écart $\alpha(\cdot)$, comme suit :

$$h(x(t), t) + \frac{1}{2} \alpha^2(t) = 0. \quad (4.13)$$

En dérivant l'équation (4.13) p fois par rapport au temps, on obtient le système d'équation suivant :

$$h_1(x(t), t) + \alpha \alpha_1 = 0, \quad (4.14)$$

$$h_2(x(t), t) + \alpha_1^2 + \alpha \alpha_2 = 0, \quad (4.15)$$

$$h_3(x(t), t) + 3 \alpha_1 \alpha_2 + \alpha \alpha_3 = 0, \quad (4.16)$$

$$h_4(x(t), t) + 3 \alpha_2^2 + 4 \alpha_1 \alpha_3 + \alpha \alpha_4 = 0, \quad (4.17)$$

⋮

$$h_p(x(t), t) + \{\text{termes faisant intervenir } \alpha_{p-1}, \dots, \alpha_1\} + \alpha \alpha_p = 0, \quad (4.18)$$

où les indices de h et α

En utilisant la *peme* équation, on peut déterminer l'expression du contrôle optimal, i.e ;

$$u(t) = G(x, \alpha_{p-1}, \dots, \alpha_1, \alpha \alpha_p, t), \quad (4.19)$$

et en utilisant l'expression (4.19) et en considérant les variables

$$\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}, \quad (4.20)$$

comme des contraintes additionnelles, on obtient le problème de contrôle optimal sans contraintes suivantes :

$$\min J = \int_{t_0}^{t_f} f(x, G(x, \alpha_{p-1}, \dots, \alpha_1, \alpha \alpha_p, t)) dt,$$

avec

$$\dot{x}(t) = g(x, G(x, \alpha_{p-1}, \dots, \alpha_1, \alpha \alpha_p, t), t), \quad x(t_0) = x_0,$$

$$\dot{\alpha} = \alpha_1, \quad \alpha(t_0),$$

$$\dot{\alpha}_1 = \alpha_2, \quad \alpha_1(t_0),$$

$$\dot{\alpha}_2 = \alpha_3, \quad \alpha_2(t_0),$$

⋮

$$\dot{\alpha}_{p-1} = \alpha_p, \quad \alpha_{p-1}(t_0).$$

Les conditions initiales $\alpha(t_0), \dots, \alpha_{p-1}(t_0)$ sont choisit de satisfaire l'équation (4.13) et les premières $p - 1$ équations dans (4.18).

$$\alpha(t_0) = \pm \sqrt{-2 h(x(t_0), t)},$$

$$\alpha_1(t_0) = -h_1(x(t_0), t) / \alpha(t_0),$$

$$\alpha_2(t_0) = - [h_2(x(t_0), t) + \alpha_1^2(t_0)] / \alpha(t_0),$$

⋮

Exemple

Considérons le problème de contrôle optimal suivant :

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = \frac{1}{2} \int_0^3 x(t) dt, \quad (4.21)$$

avec

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad (4.22)$$

$$x(t) \geq 0, \quad (4.23)$$

$$x(0) = x(3) = 1. \quad (4.24)$$

En introduisant une variable d'écart, la contrainte inégalité (4.23) sera transformée en contrainte égalité comme suit :

$$x(t) - \frac{1}{2} \alpha^2(t) = 0, \quad (4.25)$$

qui donne après dérivation

$$\dot{x}(t) - \alpha(t) \dot{\alpha}(t) = 0, \quad (4.26)$$

$$\text{or : } \dot{x}(t) = u(t) = \alpha(t) \dot{\alpha}(t). \quad (4.27)$$

On introduit alors une nouvelle variable de contrôle $v(t) = \dot{\alpha}(t)$, et le problème de contrôle optimal (4.21)–(4.24) est converti en un problème de contrôle optimal sans contraintes comme suit :

$$\min J(u(t)) = \frac{1}{2} \int_0^3 x(t) dt, \quad (4.28)$$

avec

$$\dot{x}(t) = -\alpha(t) v(t), \quad (4.29)$$

$$x(0) = x(3) = 1, \quad (4.30)$$

$$\alpha(0) = \pm\sqrt{2} x(0). \quad (4.31)$$

4.1.1 Procédure de résolution d'un problème de contrôle avec des contraintes sur l'état

L'idée générale de l'approche proposée consiste à utiliser la technique directe, basée sur la technique de paramétrisation du vecteur de contrôle.

On transforme d'abord le problème avec contrainte sur l'état en un problème sans contraintes en utilisant la méthode de Valentine. Ensuite, on utilise la méthode de décomposition d'Adomian pour approcher la solution de l'équation d'état, traitée comme une équation différentielle de premier ordre avec second membre. En somme, on remplace la solution approchée de l'équation différentielle avec l'expression du vecteur de contrôle dans la fonction cout pour obtenir une fonction de plusieurs variables.

les différentes étapes sont résumées comme suit.

Initialisation : choisir $\epsilon > 0$ et poser $n = 1$

Etape 1 : Transformer le problème avec contrainte sur l'état en un problème sans contraintes en utilisant la méthode de Valentine.

Etape 2 : paramétrisation du vecteur de contrôle, on approchant la variable de contrôle par :

$$u(t) = \sum_{i=0}^N a_i t^i, \quad (4.32)$$

Etape 3 : Déterminer la solution approchée de $x^N(t)$ de l'équation d'état. a l'aide de la méthode de décomposition d'Adomian.

Etape 4 : Calculer $J(u^N(t))$ pour obtenir une fonction de plusieurs variables de la forme

$$F(a_1, a_2, \dots, a_N). \quad (4.33)$$

Etape 5 : Déterminer les paramètres a_i , $i = 0, 1, \dots, N$, à l'aide d'un algorithme de l'optimisation statique.

Etape 6 : Déduire $x(t)$ et $u(t)$ ainsi que la valeur numérique de $J(u(t))$.

Etape 7 : Critère d'arrêt : si

$$|J(u^N(t)) - J(u^{N-1}(t))| \leq \epsilon, \quad (4.34)$$

stop, sinon poser $N = N + 1$ et aller à l'étape (3).

Remarque

- Si le problème de contrôle optimal traité a un état final libre, $x(t_f) \in \mathfrak{R}^n$, alors le problème d'optimisation ainsi obtenu sera sans contraintes. Par conséquent, l'algorithme à utiliser pour déterminer les paramètres a_i , $i = 0, 1, \dots, N$ est l'un parmi ceux utilisés pour les problèmes d'optimisation sans contraintes, selon la nature du problème obtenu, convexe ou non convexe.
- Si le problème de contrôle optimale considéré a un état final fixe, alors le problème d'optimisation obtenu est un problème d'optimisation avec contraintes. Par conséquent, l'algorithme à utiliser pour déterminer les paramètres a_i , $i = 0, 1, \dots, N$ est l'un parmi ceux utilisés pour les problèmes d'optimisation avec contraintes, tels que l'algorithme du gradient projeté, algorithme de la méthode SQP (sequential quadratic programming), etc.

4.2 Application

Pour illustrer l'efficacité de l'approche proposée pour la résolution des problèmes de contrôle optimal, on considère trois exemples d'applications. Dans le premier exemple on considère un système avec l'état final libre, pour obtenir après paramétrisation du vecteur de contrôle un problème d'optimisation sans contraintes. Dans le deuxième, exemple, on traitera un problème avec état final fixe pour obtenir un problème d'optimisation avec contraintes égalités. Enfin, dans le troisième exemple, on considère un problème de contrôle optimal avec contraintes sur l'état de type inégalités.

Exemple 1

Considérons le problème de contrôle optimal suivant :

$$\min J(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2(t) + u^2(t) dt,$$

sujet à

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t),$$

$$x(0) = 1.$$

dont la solution exacte obtenue en utilisant le principe du maximum de Pontryagin est donnée par :

$$x(t) = \cosh(\sqrt{2}t) + \beta \sinh(\sqrt{2}t), \quad (4.35)$$

$$u(t) = (1 + \sqrt{2}\beta) \cosh(\sqrt{2}t) + (\sqrt{2} + \beta) \sinh(\sqrt{2}t), \quad (4.36)$$

où

$$\beta = -\frac{\cosh(\sqrt{2}) + \sqrt{2} \sinh(\sqrt{2})}{\sqrt{2} \cosh(\sqrt{2}) + \sinh(\sqrt{2})}. \quad (4.37)$$

Posons :

$$u(t) = \sum_{i=0}^N a_i t^i, \quad (4.38)$$

et l'équation d'état s'écrit :

$$\dot{x}(t) = -x(t) + \sum_{i=0}^N a_i t^i, \quad (4.39)$$

Pour résoudre (4.39) par la méthode de décomposition d'Adomian, on construit le schéma itératif suivant :

$$x_0(t) = 1 + \sum_{i=0}^N \frac{1}{i+1} a_i t^{i+1},$$

$$x_{k+1}(t) = L^{-1}(x_k(t)),$$

où $L^{-1} = \int_0^t (\cdot) dt$. En remplaçant à chaque itération p la solution approchée

$$x(t) = \sum_{k=0}^p x_k(t) \quad (4.40)$$

dans la fonctionnelle $J(u(t))$, on obtient le problème d'optimisation sans contraintes suivant :

$$\min F(a_0, a_1, \dots, a_N),$$

$$(a_0, a_1, \dots, a_N) \in \mathfrak{R}^N.$$

Les résultats obtenus sont reportés dans la Table (4.1).

| N | J^N | $ J^N - J^{N-1} $ |
|-----|-----------|----------------------|
| 1 | 0.1488953 | — |
| 2 | 0.2109974 | 0.0621 |
| 3 | 0.1898107 | 0.0212 |
| 4 | 0.1934507 | 0.0036 |
| 5 | 0.1982346 | $6.16 \cdot 10^{-4}$ |
| 6 | 0.1929208 | $8.62 \cdot 10^{-5}$ |
| 7 | 0.1929107 | $1.01 \cdot 10^{-5}$ |

TABLE 4.1 – résultats obtenus pour l'exemple 1

En considérant $\epsilon = 10^{-5}$, la méthode converge après 6 itérations, et les approximations de la variable de contrôle ainsi que la variable d'état sont données comme suit :

$$\begin{aligned}
 u(t) &= -0.3783 + 0.4261t + .6962t^2 - 1.9366t^3 + 0.9682t^4 + 1.1052t^5 - .8864t^6, \\
 x(t) &= 1. - 1.3783t + 0.90220t^2 - 0.068667t^3 - 0.46698t^4 + 0.28704t^5 \\
 &\quad + 0.13637t^6 - 0.14584t^7 + 0.018219t^8 - 0.0020281t^9 + 0.00020602t^{10} \\
 &\quad - 0.19311e - 4t^{11} + 0.13324e - 5t^{12}.
 \end{aligned}$$

Une comparaison entre la solution obtenue par la méthode proposée avec la solution exacte est faite, et les résultats sont très proches, comme le montrent les figures (4.1) et (4.2).

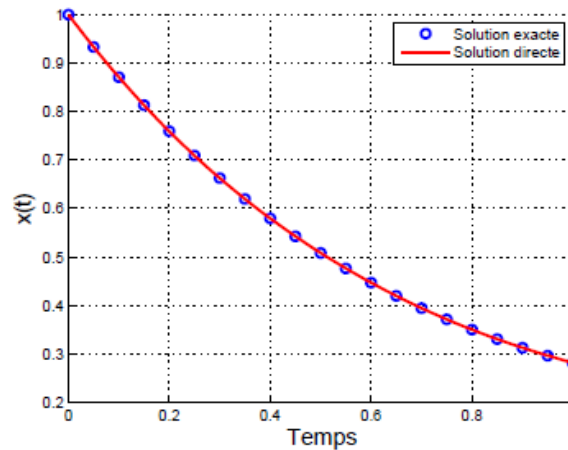


FIGURE 4.1 – La variable d'état $x(t)$

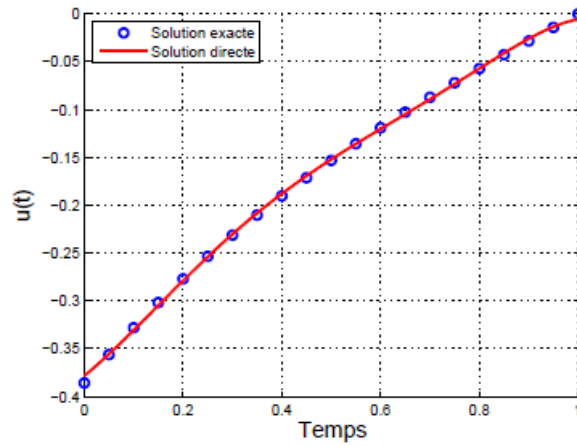


FIGURE 4.2 – La variable de contrôle $u(t)$

Exemple 2 : Problème avec état final fixe

Considérons le problème de contrôle optimal suivant :

$$\min_u J(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 (3x^2(t) + u^2(t)) dt,$$

sujet à

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t),$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 2$$

Comme ce problème a un état final fixe, alors le problème d'optimisation statique ainsi obtenu après paramétrisation du vecteur de contrôle est un problème avec contrainte égalités :

$$\min_u F(a_0, a_1, \dots, a_N),$$

$$x(1) - 2 = 0,$$

$$(a_0, a_1, \dots, a_N) \in \mathfrak{R}^N.$$

Les résultats obtenus sont reportés dans la table (4.2), et en considérons $\epsilon = 10^{-3}$ la méthode converge après 8 itérations.

| n | J^N | $J^{N+1} - J^N$ |
|-----|----------|----------------------|
| 1 | 3.71172 | — |
| 2 | 7.241343 | 3.5296 |
| 3 | 5.862853 | 1.3785 |
| 4 | 6.203423 | 0.3406 |
| 5 | 6.140483 | 0.0629 |
| 6 | 6.150909 | 0.0104 |
| 7 | 6.149531 | 0.0014 |
| 8 | 6.149876 | $3.45 \cdot 10^{-4}$ |

TABLE 4.2 – résultats obtenus pour l'exemple 2

Les résultats numériques de la méthode proposée en comparaison avec la solution exacte sont représentés dans les figures (4.3)–(4.4).

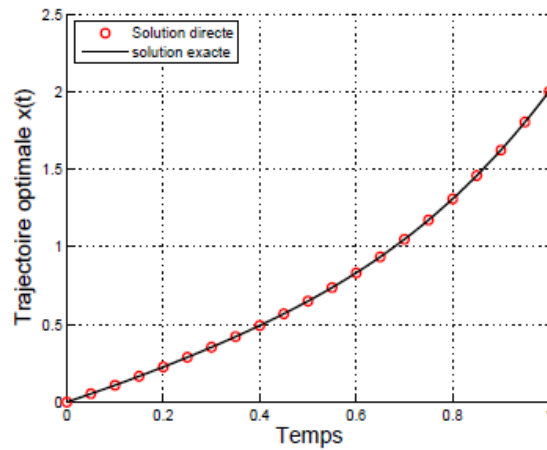


FIGURE 4.3 – Solution exacte et solution approchée de $x(t)$

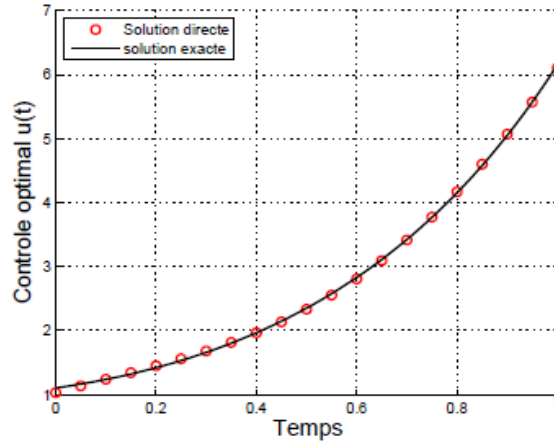


FIGURE 4.4 – Solution exacte et solution approchée de $u(t)$

Exemple 3 : Problème de contrôle optimal avec contraintes sur l'état

Considérons le problème de contrôle optimal suivant :

$$\min J(u(t)) = \int_0^1 (x_1^2 + x_2^2 + 0.005 u^2(t)) dt, \quad (4.41)$$

$$\text{sujet à} \quad (4.42)$$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (4.43)$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_2(t) + u(t), \quad (4.44)$$

$$x_2(t) - 8(t - 0.5)^2 + 0.5 \leq 0, \quad (4.45)$$

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = -1. \quad (4.46)$$

Transformation du problème (4.41)–(4.46) en un problème sans contraintes, en introduisant une variable d'écart $x_3(t)$, alors l'inégalité (4.45) devient :

$$x_2(t) - 8(t - 0.5)^2 + 0.5 + \frac{1}{2}x_3^2(t) = 0, \quad (4.47)$$

en dérivant par rapport à t , on aura :

$$\dot{x}_2(t) - 16(t - 0.5) + x_3(t) \dot{x}_3(t) = 0 \quad (4.48)$$

ce qui donne :

$$\dot{x}_2(t) = 16(t - 0.5) - x_3(t) v(t), \quad (4.49)$$

de l'équation d'état (4.44), on a :

$$u(t) = x_2(t) + 16(t - 0.5) - x_3(t) v(t). \quad (4.50)$$

En remplaçant (4.50) dans les expressions (4.41) et (4.43), on obtient le problème de contrôle optimal sans contraintes suivant :

$$\min J(u(t)) = \int_0^1 \left(x_1^2 + x_2^2 + 0.005 (x_2(t) - x_3(t) v(t) + 16t - 8)^2 \right) dt, \quad (4.51)$$

$$\text{sujet à} \quad (4.52)$$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (4.53)$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_3(t) v(t) + 16t - 8, \quad (4.54)$$

$$\dot{x}_3(t) = v(t), \quad (4.55)$$

$$x(0) = 0, \quad x_2(0) = -1, \quad x_3(0) = \sqrt{5}. \quad (4.56)$$

Les résultats de simulation sont illustrés dans les figures (4.5)–(4.7). Dans les figures (4.6)–(4.7), on fait une comparaison entre les solutions de la variable d'état $x_2(t)$ et de la variable de contrôle $u(t)$ avec celles obtenues en utilisant les splines linéaires . Les résultats des deux méthodes sont très proches, comme sont illustrées dans les figures (4.6) et (4.7), respectivement.

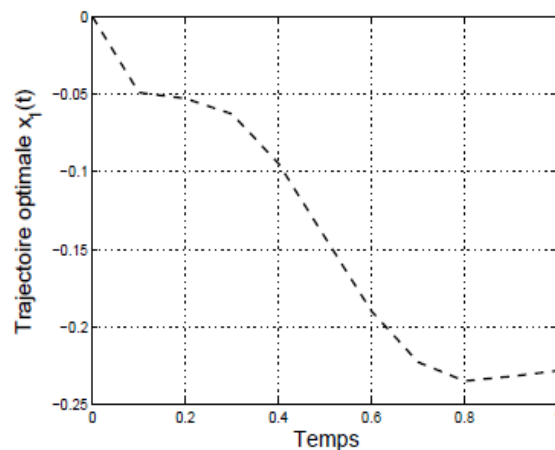


FIGURE 4.5 – Solution de $x_1(t)$

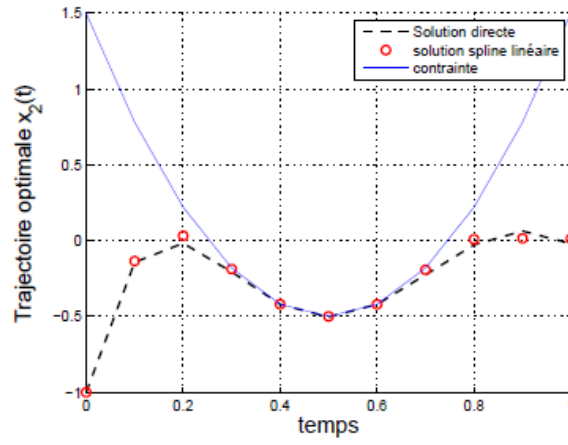


FIGURE 4.6 – Solution de $x_2(t)$

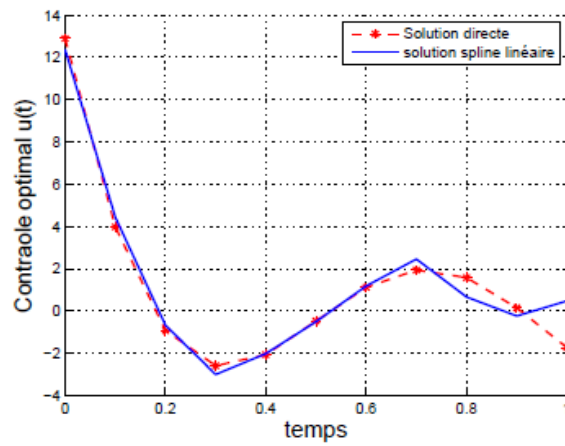


FIGURE 4.7 – Solution de $u(t)$

Conclusion

Dans ce mémoire on a proposée l'optimisation des fonctions mathématiques (optimisation statique). Nous avons débuté le premier chapitre par la formulation générale d'un problème d'optimisation statique. Puis, nous avons rappelé certaines définitions de l'analyse convexe et la fonction convexe et résultats concernant l'existence et les conditions d'optimalité.

Cette étude est consacrée à la résolution d'un problème de contrôle optimal linéaire et non linéaire, lorsque l'état est soumis à certaines contraintes et la valeur de l'état final est fixe. Pour sa résolution, on a utilisée les méthodes directes et les méthodes indirectes .

L'étude réalisé dans le cadre de ce mémoire ouvre la voie à utiliser les méthodes d'approximation (méthode de décomposition d'Adomian, le paramétrisation du vecteur de contrôle) pour la résolution des problèmes de commande optimale. Nous pouvons notamment proposer d'appliquer ces méthodes :

- à résoudre des problèmes de commande optimale des systèmes décrits par des équations différentielles

La méthode Adomian a déjà fait ses preuves dans le cadre de la résolution d'équations fortement non linéaires. Cependant l'utilisation de cette méthode se faisait assez difficilement du fait de la difficulté de l'obtention des polynômes dans le cas où le terme non linéaire dépend de plusieurs variables. D'autre, le manque de logiciels informatiques calculant les polynômes d'Adomian (même pour le cas d'une variable) handicapait fortement la méthode. Ces deux lacunes ont été comblées et ces travaux (notre l'objet de publications de la méthode d'Adomian) ils seront décrits dans le troisième chapitre.

La méthode du paramétrisation est une technique qu' on peut appliquer sous l'une des trois formes suivantes : paramétrisation du vecteur de contrôle, paramétrisation du vecteur d'état, ou paramétrisation du vecteur d'état et de contrôle.

Dans cette étude on a fait une comparaison entre les solutions de la variable d'état et de la variable de contrôle $u(t)$.

Bibliographie

- [1] A. AKKOUCHE, A. MAIDI and M. AIDENE ,Solving Optimal Control Problems by Variational Approach Based on the Adomian's Decomposition Method, Proceedings of the 3rd International Conference on Systems and Control, Algiers, Algeria, October 29-31, 2013.
- [2] A. Avez, Calcul différentiel, Masson, Paris, 1983.
- [3] Amir .B ,Introduction TO Nonlinear Optimization Theory, Algorithms, and Applications with MATLAB ,Technion-Israel Institute of Technology ,Kfar Saba, Israel,Mathematical Optimization Society.
- [4] A. D. Ioffe, V. M. Tihomirov, Theory of extremal problems, Studies in Mathematics and its Applications, 6, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1979.
- [5] B. Bonnard, M. Chyba, The role of singular trajectories in control theory, Math. Monograph, Springer-Verlag, 2003.
- [6] B. Kafash, A. Delavarkhalafi and S.M. Karbassi : Application of variational iteration method for Hamilton-Jacobi-Bellman equations, Applied Mathematical Modelling 37 (2013) 3917–3928.
- [7] C. P. Neuman and A. Sen, A suboptimal control algorithm for constrained problems using cubic splines. Automatica, vol. 9, pp : 601–613, Pergamon Press, 1973.
- [8] D. H. Jacobson and M. M. Lele, transformation technique for optimal control problems with a state variable inequality constraint. IEEE Transactions on Automatic Control 5, 457–464 (1969).
- [9] D. G. Luenberger and Y. Ye, Linear and Nonlinear Programming, 3rd Edition, Springer, New York, 2008.
- [10] E. B. Lee, L. Markus, Foundations of optimal control theory, John Wiley, New York, 1967.
- [11] E. Trélat, Contrôle Optimal : théorie et applications, Paris-Sud, Laboratoire AN-EDP, Mathématiques, UMR 8628, Bat. 425, 91405 Orsay cedex.
- [12] Edwin K.P .c and Stanislaw.H.Zak,An Introduction To Optimization,2nd Edition ,A Wiley-Interscience Publication,JOHN WILEY and SONS, INC. New York / Chichester / Weinheim /Brisbane / Singapore / Toronto.
- [13] F. A. Valentine, The problem of Lagrange with differential inequalities as added side conditions, in Contributions to the Culculus of Variations. Chicago, Ill : Chicago University Press, 1937, pp. 407–448.
- [14] F. Clarke, Optimization and nonsmooth analysis, Canadian Mathematical Society Series

of Monographs and Advanced Texts, John Wiley Sons, Inc., New York, 1983.

- [15] G. Adomian, Solving frontier problems of physics : the Decomposition Method. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1994.
- [16] G.J. Lastman Sub-optimal Open Loop Control of Nonlinear Systems Using Approximations for the Controls, International Journal of Control, Vol.20 (1974) pp.289–303.
- [17] H. J. Sussmann, A nonsmooth hybrid maximum principle, Stability and stabilization of nonlinear systems (Ghent, 1999), 325-354, Lecture Notes in Control and Inform. Sci., 246, Springer, London, 1999.
- [18] H. J. Sussmann, New theories of set-valued differentials and new versions of the maximum principle of optimal control theory, Nonlinear Control in the Year 2000, A.Isidori, F. Lammabhi-Lagarigue and W. Respondek Eds., Springer-Verlag, 2000, 487-526.
- [19] H. R. Sirisena : Computation of Optimal Controls Using a Piecewise Polynomial Parameterization, IEEE Trans. Automatic Control. AC-18 (1973) pp.409–411.
- [20] H. R. Sirisena and F. S. Chou, State parameterization approach to the solution of optimal control problems, Optimal Control Applications and Methods, Vol. 2, pp : 289–298, 1981.
- [21] J. Nocedal and S. J. Wright, Numerical Optimization, 2nd Edition, Springer, New York, 2006.
- [22] J. Rappaz, M. Picasso, Introduction à l'analyse numérique, Persses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, 1998.
- [23] J. Stoer, R. Bulirsch, Introduction to numerical analyse, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [24] K.Abbaoui,Y.Cherruault , New Ideas for Proving Conuergence of Decomposition Methods. Computers Math . Appiic. Vol. 29,No.7 , pp. 103-108,1995.
- [25] K. Abbaoui,Y.Cherruauit , The Decompositon Method Applied to the Cauchy Problem. Kybernetes. Vol. 28,No.1 , pp. 68-74,7999.
- [26] K. L. Teo, C. J. Goh and K. H. Wong, A Unified Computational Approach to Optimal Control Problems, Longman Scientific and Technical, England, 1991.
- [27] L. Pontryagin, V. Boltyanski, R. Gamkrelidze, E. Michtchenko, Théorie mathématique des processus optimaux, Editions Mir, Moscou, 1974.
- [28] O.von Struk ,R.Bulirsch,Direct and indirect methods for trajectoiry optimization,Annals of Operations Research 37,1992,357-373.
- [29] V. Yen and M. Nagurka, Optimal control of linearly constrained linear systems via state parameterization, Optimal Control Applications and Methods, Vol. 13, pp : 155–167, 1992.

Résumé

Dans ce travail, on traite la résolution d'un problème de contrôle optimale par la méthode de décomposition d'Adomian qui appliquée à la résolution des équations différentielles.

La méthode de paramétrisation elle est appliquée sous l'une de trois formes. On s'intéresse seulement à la méthode de paramétrisation du vecteur de contrôle.

On a utilisé la méthode de paramétrisation pour transformer un problème de contrôle optimale à un état final libre en un problème d'optimisation sans contraintes, ou bien un problème de contrôle optimale à un état final libre fixé en un problème d'optimisation avec contraintes.