



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DE BOUIRA



FACULTE DES SCIENCES ET SCIENCES APPLIQUEES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

MEMOIRE PRESENTÉ POUR L'OBTENTION DU DIPLÔME
DE MASTER EN PHYSIQUE
OPTION

Physique Théorique

Confinement des quarks et structure del'espace-temps

Présenté par : **Touati Abdellah**

Soutenu le 20/10/2020

Devant le jury:

Président:	Mr.Khelfane Hocine	M.C.B. Univ.Bouira
Rapporteur:	Mr.Boukhalfa Soufiane	M.A.A. Univ. Bouira
Examineurs:	Mr.Zamoume Redouane	M.C.B. Univ. Bouira
	Mr.Sadoun Mohamed Améziane	M.C.B. Univ. Bouira

Remerciements

Je remercie tout d'abord le bon Dieu, tout puissant, de m'avoir éclairé sur le bon chemin à suivre et de m'avoir donné la force et l'audace pour dépasser toutes les difficultés.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Monsieur Boukhalfa Soufiane. Je lui adresse mes sincères remerciements pour avoir accepté de m'encadrer et de m'avoir orienté et conseillé tout au long de ce modeste travail.

J'exprime toute ma reconnaissance à Monsieur Khelfane Hocine pour avoir bien voulu accepter de présider le jury de ce mémoire. Je remercie également Messieurs Sadoun Mohamed Améziane et Zamoume Redouane d'avoir accepté d'examiner mon travail.

Je tiens à remercier tous les enseignants du département de physique, en particulier Monsieur Benaïche Salim, Madame Bouchemla Nadjma, Madame Boukroune Nassima et Monsieur Boudref Mohamed, enseignant du département de Mathématique, pour leur dévouement et leurs soutiens tout au long de mes années d'études à l'université de Bouira.

Je remercie mes très chers parents, qui ont toujours été là pour moi. Je remercie également ma sœur, mon frère et mon cher ami M. Medjrase. Enfin, je remercie tout mes amis en particulier A. Haddad, M. Adjrade, M.A. Gadjja, S. Djemaoune et Z. Zghiche.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à mes très chers parents, ma sœur et mon frère.

À tous mes amis.

À tous ceux qui ont contribué au succès de ce travail de près ou de loin.

Table des matières

Remerciements	i
Dédicaces	ii
Table des matières	iii
Liste des figures	v
Liste des tables	vi
Introduction	1
1 — Relativité, gravitation et géométrie de l'espace-temps	5
1.1 Principe de relativité : de Galilée à Einstein	5
1.2 Principe d'équivalence et géométrie de l'espace-temps	7
1.3 Principe de covariance et formalisme tensoriel	8
1.4 Équations d'Einstein pour le champ gravitationnel	11
1.5 Métrique de Schwarzschild et les trous noirs	12
2 — Interprétation géométrique des interactions non gravitationnelles	14
2.1 Potentiels non gravitationnels et métrique de type Schwarzschild	14
2.1.1 Principe de correspondance dans la métrique de Schwarzschild	16
2.2 Dynamique de Schwarzschild	19
2.2.1 Temps propre, quadri-vecteurs vitesse et énergie-impulsion	19
2.2.2 Action, lagrangien et hamiltonien du système	21
2.2.3 Relation de dispersion généralisée	22
2.2.4 Détermination de la fonction $\xi(r)$	23
2.3 Équations d'ondes quantiques dans un espace-temps courbe	24
2.3.1 Équation de Klein-Gordon généralisée	25

2.3.2	Équation de Dirac généralisée	26
2.4	Application à l'atome d'hydrogène	29
2.4.1	Détermination du spectre d'énergie	31
2.4.2	Résultats numériques et discussion	33
2.5	Équations d'Einstein pour l'interaction électromagnétique	34
3	— Interaction forte et géométrie de l'espace-temps	38
3.1	Structure des hadrons et différents types d'interaction forte	38
3.1.1	Structure interne des hadrons	38
3.1.2	Interaction forte de base ou force de couleur	39
3.1.3	Interaction forte résiduelle ou force résiduelle	40
3.2	Interaction forte résiduelle et l'approche de C.C. Barros	40
3.2.1	Potentiel de Yukawa et portée de l'interaction forte résiduelle	41
3.2.2	Métrique induite par le champ fort de Yukawa	42
3.2.3	Spectre d'énergie de l'interaction forte résiduelle	44
3.2.4	Résultats numériques et discussion	48
3.3	Interaction forte de base et l'approche de C.C. Barros	53
3.3.1	Confinement des quarks et rayon de Schwarzschild	53
3.3.2	Spectre d'énergie de l'interaction forte de base	57
3.3.3	Résultats numériques et discussion	58
	Conclusion	60
A	— Système de coordonnées orthogonales et opérateurs différentiels	64
B	— États liés d'un électron relativiste dans un potentiel coulombien	66
	Bibliographie	71

Liste des figures

3.1	Exemple d'interaction forte résiduelle proton-neutron véhiculée par un pion neutre.	41
3.2	Variation de l'énergie fondamentale d'interaction d'un nucléon au sein du noyau en terme de la constante de couplage forte, $\alpha_s = g^2/4\pi$, pour différents types de porteur d'interaction.	47
3.3	Variation de l'énergie fondamentale d'échange inter-nucléons, donnée par la relation (3.25), en terme de la constante de couplage forte, $\alpha_s = g^2/4\pi$, pour différents types de porteur d'interaction.	48
3.4	Interaction proton-proton avec le méson π^0 comme porteur de l'interaction forte résiduelle.	49
3.5	Interaction proton-neutron avec le méson π^+ comme porteur de l'interaction forte résiduelle.	50
3.6	Exemple de profil radial pour un potentiel central associé à l'interaction nucléaire.	52

Liste des tables

2.1	Valeurs expérimentales des niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène et de l'atome de deutérium [20], en comparaison avec les valeurs théoriques obtenus avec les relations (B.24) et (2.89) (les énergies sont exprimées en eV).	34
3.1	Masses de quelques noyaux atomiques obtenue par la relation (3.23) en comparaison avec les résultats expérimentaux [32] (les masses sont exprimées en MeV).	46
3.2	Distance de séparation maximale d'interaction inter-nucléons obtenue par la relation (3.18) pour différents types de mésons échangés, avec $g^2 = 13.4$, $r_p = 0.831$, $r_n = 0.820$, $m_p = 938.272$ et $m_n = 939.565$ (les distances sont exprimées en fm et les masses en MeV).	51
3.3	Portée de la force nucléaire forte et distance de séparation maximale inter-nucléons selon les relations (3.1), (3.18) et (3.20), avec $g^2 = 13.4$, $r_p = 0.831$, $r_n = 0.820$, $m_p = 938.272$, $m_n = 939.565$, $m_{\pi^0} = 134.977$ et $m_{\pi^\pm} = 139.571$ (les distances sont exprimées en fm et les masses en MeV).	53
3.4	Masses de quelques hadrons (baryons et mésons), obtenus à l'aide de la relation (3.38), en comparaison avec leurs valeurs expérimentales.	59

Introduction

Historiquement, le modèle des quarks a été proposé pour la première fois en 1964 par Murray Gell-Mann [1] et George Zweig [2], en émettant l'hypothèse que les hadrons (baryons et mésons), par des considérations de symétrie, ne sont pas véritablement des particules élémentaires, mais plutôt des particules composites, composées elles-mêmes de particules subatomiques plus fondamentales : les *quarks*. Cependant, si d'une part cette théorie était remarquablement efficace en ce qui concerne la compréhension des multiplets hadroniques, d'autre part, elle souffre toujours d'un problème majeur lié à l'impossibilité de se rendre compte du phénomène de confinement des quarks. En effet, les quarks ont cette caractéristique qu'on ne les observe jamais seuls, mais qu'ils y restent confinés à l'intérieur des hadrons et demeurent inobservables à l'extérieur¹. Dès lors, de nombreux auteurs ont proposé des modèles alternatifs dans le but de décrire la structure des hadrons en termes de quarks confinés. Parmi ces modèles, citons les modèles à potentiels non relativistes comme le modèle de l'oscillateur [3, 4], qui stipule que les baryons sont des systèmes composés de trois quarks confinés dans un potentiel harmonique, les modèles de l'oscillateur déformé [5]-[8], le modèle de Cornell [9]-[11], etc. Malgré le succès de ces modèles non relativistes dans la description des propriétés des hadrons, il est néanmoins plus raisonnable de traiter les quarks comme de particules relativistes. En 1968, Bogolioubov [12] considérait que les baryons comme des cavités sphériques, caractérisées par un rayon R , à l'intérieur desquelles sont confinés les trois quarks qui les composaient. Ces particules, supposées relativistes, sont soumises à un champ moyen auto-cohérent décrit par un potentiel scalaire $V(r)$ tel que :

$$V(r) = 0 \quad \text{pour} \quad r \leq R$$

1. Si deux quarks s'écartent, leur énergie de liaison augmente puis se matérialise en une paire de quark-antiquark : c'est le phénomène de confinement des quarks.

$$V(r) = V_0 \quad \text{pour } r > R$$

où le confinement des quarks apparaît lorsqu'on fait tendre V_0 vers l'infini. La poursuite dans le développement de ces idées conduit, plus tard, au modèle du sac du MIT¹ (MIT bag model) [13, 14], où on tient compte de la pression du vide à l'intérieur des hadrons. L'un des principaux avantages de ce modèle est sa capacité à prédire, avec une bonne précision, les masses de différents hadrons. Autres modèles basés sur l'équation de Dirac avec des potentiels de confinement en r^n , et qui montrent également un bon accord avec les données expérimentales, peuvent être trouvés dans la littérature [15]-[17].

Cependant, ces modèles simplistes et phénoménologiques des quarks en arrivent à des contradictions : certains de ses constituants doivent obéir à la fois à la statistique de Fermi-Dirac et de Bose-Einstein. Il faut alors introduire un nouveau nombre quantique dénommé la couleur² [18, 19]. Ainsi, en introduisant ce nouveau nombre, qui peut prendre 3 valeurs, on peut réinterpréter les fonctions d'onde de certaines particules comme étant asymétriques de manière à laisser le champ libre à la statistique de Fermi-Dirac. De plus, en se fiant aux résultats expérimentaux, un impératif nommé l'hypothèse du confinement devient nécessaire. En effet, jamais la couleur n'a été observée. On doit donc requérir que tous les états liés observables de quarks soient sans couleur (ou de « couleur » blanche). Ceci implique évidemment que l'observation d'un quark isolé est impossible puisque ce dernier est le porteur d'une charge de couleur.

Récemment, C.C. Barros [20]-[23] a proposé une toute nouvelle approche en postulant que, d'une façon analogue à l'interaction gravitationnelle, les autres interactions fondamentales peuvent également se manifester à travers la structure de l'espace-temps. Suivant cette approche, les particules décrivent des géodésiques dans un espace-temps courbe où le potentiel d'interaction non gravitationnel sera incorporé dans la métrique d'une manière purement géométrique. En établissant ainsi une équation d'onde quantique pour un électron évoluant dans un espace-temps courbe, muni d'une métrique statique et à symétrie sphérique similaire à celle de Schwarzschild, dû à la présence du potentiel d'interaction coulombienne, il a pu décrire l'atome d'hydrogène d'une manière tout à fait

1. Massachusetts Institute of Technology (Institut de Technologie de Massachusetts). 2. Ce nouveau nombre quantique a donné naissance à une nouvelle théorie quantique des champs basée sur la force de couleur appelée la théorie de la chromodynamique quantique.

inédite et obtenir des résultats en parfait accord avec les données expérimentales. Dans ce présent travail, nous chercherons une description géométrique des interactions fortes en partant de l'hypothèse que la charge de couleur peut agir directement sur la structure de l'espace-temps, de la même manière que la masse grave peut affecter les propriétés de l'espace-temps dans le cas de la gravitation. Nous allons, en particulier, montrer que le confinement des quarks au sein des hadrons résulte directement de la manière dont l'espace-temps est affecté par la présence d'un potentiel fort et attractif, sans nul besoin d'introduire de potentiels de confinement.

Le présent mémoire est organisé de la sorte : le premier chapitre sera consacré au rappel des différents principes et arguments physiques qui ont conduit à l'élaboration d'une théorie relativiste de la gravitation, en mettant l'accent sur le rôle joué par la géométrie de l'espace-temps dans son édification.

Le deuxième chapitre sera dédié à la description d'une particule relativiste évoluant dans un espace-temps courbe. Pour cela, on supposera que l'espace-temps, courbé par la présence d'un potentiel d'interaction isotrope et statique $V(r)$, est doté d'une métrique statique et à symétrie sphérique de type Schwarzschild, caractérisée par la fonction de courbure $\xi(r)$. Comme première étape, on généralisera le principe de correspondance en tenant compte de cet aspect non-euclidien de l'espace-temps ; celui-ci sera indispensable à l'établissement des équations d'ondes quantiques. Puis, on s'intéressera à la dynamique d'une particule relativiste évoluant dans un espace-temps courbe en exprimant les différentes grandeurs dynamiques la caractérisant (énergie, temps propre, etc.). En particulier, on établira un lien entre le potentiel non gravitationnel $V(r)$ et la métrique de l'espace-temps. Tout cela nous permettra par la suite d'établir les équations d'ondes quantiques pour des particules de spin 0 et 1/2 évoluant dans espace-temps courbe. Par la suite, on discutera de la validité de cette nouvelle approche en calculant le spectre d'énergie de l'atome d'hydrogène pour, ensuite, le comparer avec celui prédit par la théorie de Dirac et aux différents résultats obtenus de manière expérimentale. Enfin, on établira l'analogie des équations d'Einstein pour une particule chargée évoluant dans un espace-temps courbe par la présence d'un champ électromagnétique.

Le troisième chapitre sera consacré à l'étude de l'interaction forte entre hadrons dans le cadre de l'approche de C.C. Barros. Comme préambule, on commencera par faire

un rappel succinct des différentes propriétés des particules hadroniques, ainsi que des différents types d'interaction forte qui les régissent. Comme première étape, on s'intéressera à l'interaction forte résiduelle, responsable de la cohésion des nucléons à l'intérieur du noyau atomique. On établira la forme de la fonction de courbure qui lui est associée en résolvant les équations d'Einstein de la relativité générale en présence d'un potentiel fort de type Yukawa. Ensuite, par le biais de celle-ci, on déterminera le spectre d'énergie de l'interaction forte résiduelle et le rayon de Schwarzschild qui leur est associée. Enfin, ces derniers seront utilisés pour calculer les masses de quelques noyaux atomiques et la portée de l'interaction forte résiduelle en les comparant à des données expérimentales. Comme deuxième étape, on s'intéressera à l'interaction forte de base, responsable du confinement des quarks et des gluons à l'intérieur des hadrons. La fonction de courbure associée à l'interaction forte de base sera déduite directement de celle de l'interaction forte résiduelle, et sera utilisée, par la suite, pour déterminer le rayon de Schwarzschild et le spectre d'énergie qui lui sont associés. Ces derniers seront utilisés, à leur tour, pour donner une description de certains hadrons en évaluant leurs tailles et leurs masses respectivement. Enfin, on discutera des résultats ainsi obtenus en les comparant à des résultats expérimentaux.

Le mémoire se terminera par une conclusion, où on présentera un récapitulatif des différents résultats obtenus et une discussion des implications de cette nouvelle approche, et de quelques compléments servant d'annexes pour le présent manuscrit.

1

Relativité, gravitation et géométrie de l'espace-temps

L'objet de ce premier chapitre est de présenter de manière élémentaire et succincte les idées de base qui ont conduit à la formulation de la théorie de la relativité générale, une théorie selon laquelle l'interaction gravitationnelle apparaît, non sous la forme d'une force, mais comme une propriété géométrique de l'espace-temps se manifestant à travers les facteurs $g_{\mu\nu}$ de la métrique, qui ne sont plus uniformes mais dépendent localement du champ de gravitation.

1.1 Principe de relativité : de Galilée à Einstein

En mécanique newtonienne, les lois de la cinématique et de la dynamique sont valables uniquement dans les référentiels galiléens. Ces derniers sont animés d'un mouvement uniforme et rectiligne les uns par rapport aux autres. Dans ces référentiels, les forces d'inertie (force d'entraînement et force de Coriolis) ne sont pas introduites et il n'apparaît que des forces dues à des interactions entre corps. Cette définition permet d'énoncer le principe de relativité galiléenne qui stipule que :

« Les lois de la mécanique sont invariantes par changement de référentiel galiléen. »

Ce principe implique essentiellement que les mêmes expériences de mécanique menées dans deux référentiels en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre donnent exactement les mêmes résultats. Autrement dit, la description d'un phénomène mécanique est complètement indépendante du choix du référentiel galiléen auquel il est rapporté.

Contrairement aux lois de la mécanique newtonienne, les équations de Maxwell qui régissent l'électromagnétisme ne semblent pas obéir au principe énoncé précédemment. En effet, l'étude de leur transformation par changement de référentiel galiléen montre qu'elles ne sont pas toutes invariantes de forme. De plus, ces équations prédisent l'existence d'une vitesse limite c de propagation des ondes électromagnétiques dans le vide et que celle-ci est isotrope et complètement indépendante de leur source. Ces faits conduisent à l'introduction d'un référentiel privilégié unique, le seul dans lequel la vitesse de propagation serait égale à c . Les physiciens du 19^{ième} siècle appelèrent ce référentiel l'« éther ». Dans le but de le mettre en évidence, Michelson et Morley ont voulu mesurer la vitesse d'entraînement de la terre par rapport à ce référentiel particulier. Leur expérience précise, fondée sur des phénomènes d'interférence optique, n'a pu déceler aucune différence de vitesse du faisceau lumineux suivant sa direction de propagation. Ce résultat négatif a conduit Einstein à remettre en cause l'existence d'un référentiel absolu et à la généralisation du principe de relativité galiléenne à l'électromagnétisme. Le principe de relativité d'Einstein s'énonce ainsi :

« Toutes les lois de la physique sont invariantes par changement de référentiel galiléen. »

Ce principe, malgré un énoncé simple, a bouleversé drastiquement notre manière de concevoir le monde physique et a conduit à la découverte de nouvelles lois et à la prédiction de nouveaux phénomènes. En particulier, il remet en question les concepts newtoniens d'espace et de temps en les détronant de leur statut absolu. Comme conséquence directe, les durées entre deux événements varient selon le référentiel choisi. Le seul invariant se construit à partir d'un intervalle mixte, combinant aspects spatial et temporel, sous la forme d'une métrique spatio-temporelle :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt^2 - d\vec{r}^2 \quad (1.1)$$

qui peut se réécrire sous la forme contractée suivante :

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (1.2)$$

où les facteurs $g_{\mu\nu}$ introduits sont nuls pour $\mu \neq \nu$, valent 1 pour la coordonnée temporelle x^0 et -1 pour les coordonnées spatiales x^1 , x^2 et x^3 , soit $g_{\mu\nu} = D(1, -1, -1, -1)$. Cette pseudo-norme du quadrivecteur élémentaire espace-temps est invariante par la transformation de Lorentz-Poincaré entre deux référentiels galiléens. La métrique ainsi définie caractérise un espace-temps plat pseudo-euclidien dit de Minkowski.

1.2 Principe d'équivalence et géométrie de l'espace-temps

Le principe de relativité imposait une vérité : l'existence d'une classe de « référentiels privilégiés » dans lesquels les lois de la physique s'expriment de manière identique. Cependant, il n'est pas moins frustrant pour autant de limiter la validité des lois de la physique à une seule classe de référentiels. En 1907, Einstein s'engage sur la voie de généraliser la relativité afin de formuler les lois de la physique de manière manifestement indépendante du choix de référentiel, galiléen et non galiléen. Toutefois, sa démarche de généralisation de la relativité à tous les référentiels se révéla mathématiquement difficile car il faut tenir compte des forces d'inertie (d'entraînement et de Coriolis) dans les référentiels accélérés, tout en essayant de conserver une forme identique aux phénomènes physiques. Par ailleurs, il y a la loi universelle de la gravitation qui pose encore problème, vu que sa version newtonienne est en contradiction avec les principes de la relativité restreinte qui ne permet pas d'action instantanée entre deux points différents. Il se trouve que les deux problèmes auxquels Einstein s'est confronté, à savoir la généralisation de la relativité aux référentiels accélérés et la découverte des lois relativistes de la gravitation, sont étroitement liés. En effet, l'expérience montre que, dans le cas de systèmes qui ne sont soumis qu'à des forces gravitationnelles, le mouvement d'un corps ne dépend pas de sa masse, mais seulement du champ de pesanteur dans lequel il est plongé. En conséquence, dans le référentiel lié à un corps en chute libre, la force d'inertie d'entraînement, dont l'action ne dépend pas non plus de la masse, compense exactement la force gravitationnelle et tous les corps présents dans ce référentiel apparaîtront comme non accélérés par rapport à lui. Dit autrement, en observant le mouvement d'un corps, il est impossible de déterminer, du moins localement, s'il est dû à un champ de gravitation ou à des forces d'inertie. Cette impossibilité de distinguer localement un référentiel galiléen en présence de gravitation d'un référentiel accéléré en l'absence de gravitation est élevée par Einstein au rang de principe : c'est le

principe d'équivalence¹. Ce dernier est à la base de la gravitation relativiste et il s'énonce :

« Dans un champ de gravitation il est toujours possible, en tout point de l'espace, de choisir un référentiel inertiel dans lequel les lois de la physique sont localement identiques à celles en l'absence de champ de gravitation. »

Ce principe permet de déterminer l'effet de la gravitation. Ainsi, pour étudier localement la chute libre d'un corps, dans un champ de gravitation, il faut se placer dans le *référentiel inertiel*, c'est-à-dire celui qui tombe avec le corps. Toutefois, choisir un référentiel inertiel plutôt qu'un référentiel galiléen revient à compenser la gravitation par des forces d'inertie. Par conséquent, on prend en compte la gravitation, non sous la forme d'une force d'interaction, mais sous celle d'une modification de la structure de l'espace. La géométrie de l'espace s'adapte donc pour que les lois physiques soient invariantes dans les référentiels inertiels ; les équations sont *covariantes* par changement de coordonnées. Cette formulation locale s'exprime à l'aide du calcul tensoriel.

1.3 Principe de covariance et formalisme tensoriel

Le principe d'équivalence ne nous impose pas d'écrire les lois de la physique à l'aide de quantités tensorielles, mais nous indique plutôt comment des lois valables en l'absence de gravité sont modifiées en présence d'un champ de gravitation. Si nous nous arrangeons pour écrire ces lois, telles qu'elles sont perçues dans un référentiel en chute libre au sein d'un champ de gravitation, à l'aide de quantités tensorielles, alors leur expression dans un système de coordonnées quelconque s'obtient immédiatement sous la même forme : c'est le principe de covariance. Noter que ce dernier n'est plus qu'un cadre mathématique dépourvu, au fond, de contenu physique.

D'après le principe de covariance, il nous suffit alors d'écrire les lois de la physique dans un référentiel inertiel (un référentiel en chute libre) à l'aide d'objets qui se transforment comme des tenseurs vis-à-vis des changements quelconques de coordonnées. Pour cela, on définit tout d'abord un espace vectoriel E construit sur le corps des réels \mathbb{R} , de dimension 4 avec comme vecteurs de base $(\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. En Relativité Restreinte, il s'agit d'une base de l'espace-temps de Minkowski. En Relativité Générale, on se place dans un espace

1. Cette équivalence n'est valable que localement car le champ gravitationnel et le champ d'accélération varient différemment dans l'espace.

de Riemann. La position \vec{X} d'un point dans cet espace peut donc s'écrire $\vec{X} = x^\mu \vec{e}_\mu$ où on a également posé $(x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, x, y, z)$. Ainsi, si Λ est la matrice de changement de base entre \vec{e}_μ et une autre base $\vec{e}_{\mu'}$, on a alors :

$$\vec{e}_{\mu'} = \Lambda^\nu_{\mu'} \vec{e}_\nu \quad (1.3)$$

En Relativité Restreinte, Λ représente la matrice de Lorentz-Poincaré. Considérons un vecteur quelconque $\vec{V} = V^\mu \vec{e}_\mu$ de E . Dans un changement de coordonnées, ses composantes se transforment selon :

$$V^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_\nu V^\nu \quad (1.4)$$

Les V^μ se transforment donc contrairement aux vecteurs de base, ce sont les composantes contravariantes de \vec{V} .

Soit maintenant E^* l'espace vectoriel formé par l'ensemble des formes linéaires sur E valeurs dans \mathbb{R} . La base duale $(e^{*\mu})$ de (\vec{e}_μ) est formée des quatre formes linéaires telles que :

$$e^{*\mu}[\vec{e}_\nu] = \delta^\mu_\nu \quad (1.5)$$

où on a utilisé le symbole de Kronecker δ^μ_ν ($\delta^\mu_\nu = 1$ si $\mu = \nu$, 0 sinon).

Un vecteur V^* de E^* peut donc se décomposer dans la base duale sous la forme $V^* = V_\mu e^{*\mu}$. Dans un changement de base, les composantes de ce vecteur se transforment selon

$$V_{\mu'} = \Lambda^\nu_{\mu'} V_\nu. \quad (1.6)$$

Les V_μ se transforment donc comme les vecteurs de la base (\vec{e}_μ) de E (voir Eq. (1.3)), ce sont les composantes covariantes de \vec{V} .

Pour résumer, les vecteurs de E sont contravariants et ceux de E^* covariants. Ainsi, une loi physique qui s'exprime formellement sous la forme $V_\mu = U_\mu$ est covariante. Elle prend la même forme dans tous les repères d'inertie ; elle s'écrit en effet dans un autre repère : $V_{\mu'} = U_{\mu'}$.

En fait, les composantes covariantes d'un vecteur \vec{V} se définissent formellement par un (pseudo-)produit scalaire :

$$V_\mu = \langle \vec{V}, \vec{e}_\mu \rangle = V^\nu \langle \vec{e}_\nu, \vec{e}_\mu \rangle \quad (1.7)$$

Et par définition, les composantes du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ sont les produits scalaires des vecteurs de base (\vec{e}_μ) de l'espace-temps :

$$g_{\mu\nu} = \langle \vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu \rangle \quad (1.8)$$

Le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ permet de passer des composantes contravariantes aux composantes covariantes d'un vecteur \vec{V} , et vice-versa pour son inverse $g^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} V_\mu &= g_{\mu\nu} V^\nu \\ V^\mu &= g^{\mu\nu} V_\nu \end{aligned} \quad (1.9)$$

De manière générale, si E et F sont 2 espaces vectoriels, un tenseur est un élément de $E \otimes F$. L'opérateur \otimes est un produit tensoriel de vecteurs possédant certaines propriétés [25]-[30]. Par exemple, un tenseur \mathbf{T} de $E \otimes E^*$ s'écrit :

$$\mathbf{T} = T^\mu_\nu (\vec{e}_\mu \otimes e^{*\nu}) = T^\mu_\nu \mathbf{h}_\mu^\nu \quad (1.10)$$

où (\mathbf{h}_μ^ν) est une base de $E \otimes E^*$.

Reste à trouver deux tenseurs covariants, l'un traduisant la géométrie de l'espace-temps et l'autre le contenu physique du système, dont la mise en relation traduira le principe d'équivalence. Pour le premier, on commence par introduire les quantités $\Gamma^\nu_{\mu\eta}$, qui sont les coefficients de connexion linéaire ou symboles de Christoffel de 2ième espèce définis par :

$$\frac{\partial \vec{e}_\mu}{\partial x^\eta} = \Gamma^\nu_{\mu\eta} \vec{e}_\nu \quad (1.11)$$

On montre que les coefficients de connexion linéaire ne dépendent que des éléments $g_{\mu\nu}$ du tenseur métrique et de leurs dérivées premières :

$$\Gamma^\nu_{\mu\eta} = \frac{1}{2} g^{\nu\xi} (\partial_\eta g_{\mu\xi} + \partial_\mu g_{\eta\xi} - \partial_\xi g_{\mu\eta}) \quad (1.12)$$

Ces coefficients permettent d'exprimer la courbure intrinsèque d'une variété qui ne peut que prendre la forme du tenseur de Riemann [25]-[30] :

$$R^\mu{}_{\nu\eta\xi} = \partial_\eta \Gamma^\mu_{\mu\xi} - \partial_\xi \Gamma^\mu_{\mu\eta} + \Gamma^\lambda_{\nu\xi} \Gamma^\mu_{\lambda\eta} - \Gamma^\lambda_{\nu\eta} \Gamma^\mu_{\lambda\xi} \quad (1.13)$$

Ce tenseur de courbure $R^\mu{}_{\nu\eta\xi}$ est le tenseur d'ordre 4 le plus général. Le second tenseur doit décrire la distribution de la matière et de l'énergie dans l'espace-temps.

1.4 Équations d'Einstein pour le champ gravitationnel

D'après le Principe d'équivalence, il existe en effet un lien formel entre la courbure de l'espace-temps, qui se manifeste à travers le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$, et le contenu matériel d'un système. Ce lien Einstein l'a traduit par un ensemble d'équations covariantes, qui sont une écriture locale des lois décrivant le mouvement de la matière dans l'espace-temps et dont la géométrie est modifiée par cette matière même. Celles-ci ont la forme symbolique suivante [24]-[30] :

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (1.14)$$

avec, d'un côté, un tenseur de second ordre $G_{\mu\nu}$ traduisant les propriétés géométriques de l'espace-temps, obtenu en contractant le tenseur de courbure de Riemann de quatrième ordre $R_{\mu\nu\eta\xi}$, et, de l'autre côté, le tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$ qui reflète le contenu physique en matière et en énergie d'un système. Par exemple, dans le cas d'un fluide parfait (i.e. en l'absence de phénomènes de transport dissipatifs comme la chaleur, la diffusion ou la viscosité), le tenseur énergie-impulsion $T^{\mu\nu}$ s'écrit [29] :

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu} \quad (1.15)$$

où p est la pression du fluide, ρ la densité de matière et u^μ est le quadrivitesse.

Pour la cohérence de l'équation (1.14), le tenseur $G_{\mu\nu}$ doit être symétrique et conservatif tout comme $T_{\mu\nu}$ (la divergence de $T_{\mu\nu}$ est en effet nulle pour satisfaire la conservation de l'énergie-impulsion). Le seul tenseur $G_{\mu\nu}$ construit uniquement à partir du tenseur de

courbure et de la métrique, et en dépendant linéairement, est le tenseur d'Einstein [29] :

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (1.16)$$

où $R_{\mu\nu} = R^\eta_{\mu\eta\nu}$ représente le tenseur de Ricci et $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ représente la courbure scalaire. La constante de proportionnalité entre le tenseur d'Einstein $G_{\mu\nu}$ et le tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$, qui figure dans l'équation (1.14), s'obtient en prenant la limite newtonienne où l'on doit retomber sur l'équation de Poisson reliant le champ gravitationnel Φ et la densité de matière ρ selon $\Delta\Phi = 4\pi G \rho$. On utilise donc une correspondance entre la gravitation newtonienne non-relativiste et les équations d'Einstein en champ gravitationnel faible et stationnaire. Le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ est alors à l'ordre 0 celui d'un espace de Minkowski ; et l'identification des composantes $\mu = \nu = 0$ (temps-temps) de $G_{\mu\nu}$ et $T_{\mu\nu}$ donne :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1.17)$$

où G désigne la constante gravitationnelle de Newton. Cette égalité tensorielle correspond en fait à 10 équations différentielles qui permettent de déduire la métrique du système à partir du tenseur énergie-impulsion. Mais très souvent, seuls les termes diagonaux sont non nuls et le système se réduit alors à 4 équations.

1.5 Métrique de Schwarzschild et les trous noirs

Il existe très peu de solutions exactes des équations d'Einstein. La métrique de Schwarzschild (1916) fut la première solution générale des équations de champ du vide entourant un corps à symétrie sphérique de masse M . Elle a pour expression symbolique l'élément linéaire d'espace-temps (définissant le temps propre) qui s'écrit sous une forme classique [26]-[28] :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (1.18)$$

où

$$r_s = \frac{2GM}{c^2} \quad \text{et} \quad d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$$

Cette métrique décrit donc la géométrie de l'espace-temps entourant une distribution de matière-énergie à symétrie sphérique, source du champ gravitationnel. On remarque que sa signature change lorsque la surface $r = r_s$ est franchie. Source de nombreuses confusions pendant de longues années, ce lieu mystère où temps et espace s'interchangent sera finalement interprété comme un horizon des événements, c.-à-d. une hypersurface de genre lumière où tout signal est infiniment décalé vers le rouge pour un observateur à l'infini. Il lui est donc impossible de voir quoi que ce soit franchir cet horizon, pas même la lumière, d'où le qualificatif de « trou noir » de Schwarzschild. En théorie, un trou noir de Schwarzschild se forme donc lorsque une étoile massive de masse M et de rayon r , sous l'effet de son propre champ gravitationnel, se contracte suffisamment pour que son rayon tend vers le rayon de Schwarzschild qui lui est associée : c'est l'effondrement gravitationnel de l'étoile.

2

Interprétation géométrique des interactions non gravitationnelles

Dans ce présent chapitre, nous allons présenter une nouvelle approche, due à C.C. Barros [20]-[23], qui stipule que les autres interactions fondamentales, d'une façon analogue à l'interaction gravitationnelle, peuvent se manifester à travers la structure de l'espace-temps. À cet effet, nous allons considérer une particule libre évoluant dans un espace-temps courbé par la présence d'une énergie potentielle d'interaction. L'interaction sera ainsi comprise dans la métrique de l'espace-temps d'une manière purement géométrique. Comme nous nous intéresserons, dans cette étude, uniquement à des systèmes à symétrie sphérique, une métrique statique similaire à celle de Schwarzschild sera considérée et des équations d'ondes quantiques pour les particules de spin 0 et de spin 1/2 seront établies. Nous verrons, en particulier, comment, à partir de cette hypothèse, apparemment non justifiée, on arrivera à reproduire exactement le spectre d'énergie relativiste de l'atome d'hydrogène.

2.1 Potentiels non gravitationnels et métrique de type Schwarzschild

Dans cette section, nous allons appliquer les principes de la relativité générale pour calculer les opérateurs (E, \vec{p}, p^2) nécessaires pour formuler des équations d'ondes quantiques pour les particules de spin 0 et de spin 1/2. Pour cela, considérons une particule ponctuelle soumise à l'action d'un champ non gravitationnel à symétrie sphérique, caractérisé par un potentiel isotrope et statique $V(r)$. La source du champ (une masse pour un champ gravitationnel, une charge électrique pour un champ électromagnétique, etc.) aura une certaine distribution dans une certaine région de l'espace où elle sera décrite par un tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$. Selon C. C. Barros, la géométrie de l'espace-temps, au voisinage

immédiat de la de la source du champ (i.e. à l'extérieur de la région de l'espace qui renferme la source où $T_{\mu\nu} = 0$), peut être décrite par une métrique de type Schwarzschild, i.e. :

$$ds^2 = \xi(r)c^2 dt^2 - [\xi(r)]^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (2.1)$$

où $d\Omega$ désigne l'angle solide élémentaire en coordonnées sphériques et $\xi(r)$ est une fonction radiale qui décrit la façon dont le potentiel d'interaction non gravitationnel $V(r)$ affecte la géométrie de l'espace-temps. Par analogie à la théorie de la relativité générale, on s'attend à ce que cette métrique se réduit à celle d'un espace-temps pseudo-euclidien plat (i.e. de Minkowski) lorsqu'on fait tendre la charge non gravitationnelle vers zéro ou lorsqu'on s'éloigne suffisamment de la source du champ, i.e. lorsque $V(r) \rightarrow 0$ ou, d'une manière équivalente, lorsque $\xi \rightarrow 1$.

L'expression du carré de l'intervalle infinitésimal d'espace-temps (2.1) peut être mise sous la forme quadratique suivante :

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.2)$$

où les coefficients $g_{\mu\nu}$ sont les composantes covariantes du tenseur métrique, qui varient d'un point à l'autre de l'espace-temps en fonction de la courbure de l'espace, et x^μ est le quadrivecteur position $x^\mu = (ct, \vec{r}) = (ct, r, \theta, \phi)$. En comparant maintenant (2.2) avec (2.1), il est évident que le tenseur métrique, en représentation matricielle, aura cette forme diagonale :

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\xi^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Les composantes contravariantes $g^{\mu\nu}$ du tenseur métrique seront obtenues par la relation suivante :

$$\sum_{\alpha=0}^3 g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = \delta_\mu^\nu \quad (2.4)$$

δ_μ^ν étant le symbole de Kronecker. Ce qui implique que

$$[g^{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} \xi^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^{-2} \sin^{-2} \theta \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Ces mêmes composantes peuvent être réécrites sous une forme plus compacte comme suit :

$$g^{\mu\nu} = h_\mu^{-2} \eta^{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \quad (2.6)$$

où les coefficients h_μ sont donnés par :

$$h_0 = \xi^{1/2} \quad (2.7a)$$

$$h_1 = \xi^{-1/2}, \quad h_2 = r, \quad h_3 = r \sin \theta \quad (2.7b)$$

et $\eta^{\mu\nu}$ étant la métrique de Minkowski.

2.1.1 Principe de correspondance dans la métrique de Schwarzschild

Le principe de correspondance stipule que le passage de la mécanique classique à la mécanique quantique se fait en remplaçant les variables dynamiques par des opérateurs auto-adjoints agissant sur la fonction d'état du système. Suivant ce principe, les opérateurs différentiels associés à l'impulsion et à l'énergie du système sont donnés, dans un espace-temps pseudo-euclidien, respectivement par :

$$\vec{p} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla} \quad (2.8a)$$

$$E \rightarrow i\hbar \partial_t \quad (2.8b)$$

Dans un espace-temps courbe, muni d'une métrique de type Schwarzschild, ce même principe s'applique toujours. Toutefois, il existe des subtilités auxquelles il faut faire attention. D'abord, il faut redéfinir les opérateurs différentiels habituels (le gradient, la dérivée temporelle, le Laplacien) en tenant compte de la nouvelle métrique, puis s'assurer que les opérateurs quantiques formés à partir de ces derniers soient hermitiques, i.e. des

opérateurs auto-adjoints, et, enfin, vérifier que les composantes de l'opérateur impulsion, ainsi définies, satisfassent les relations de commutations suivantes :

$$[p_i, x^j] = -i\hbar\delta_i^j, \quad [p_i, p_j] = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.9)$$

Les composantes de l'opérateur gradient dans la métrique de Schwarzschild sont données par :

$$\nabla_i^{Sch} = h_i^{-1} \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (2.10)$$

En substituant ces dernières dans la relation (2.8a), et en utilisant les expressions (2.7b), on obtient l'opérateur impulsion dans le système de coordonnées de Schwarzschild :

$$\begin{aligned} \vec{p}_{Sch} &= -i\hbar \sum_{i=1}^3 \frac{\vec{e}_i}{h_i} \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &= -i\hbar \left\{ \vec{e}_r \sqrt{\xi} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\vec{e}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\vec{e}_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right\} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Par ailleurs, l'opérateur carré de l'impulsion est donné par :

$$\vec{p}_{Sch}^2 = -\hbar^2 \vec{\nabla}_{Sch}^2 \quad (2.12)$$

où $\vec{\nabla}_{Sch}^2$ est le Laplacien dont l'expression, en coordonnées curvilignes de Schwarzschild, s'écrit [voir appendice A] :

$$\vec{\nabla}_{Sch}^2 = (h_1 h_2 h_3)^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \right] \quad (2.13)$$

En portant maintenant (2.13) dans (2.12), en substituant les coefficients h_i ($i = 1, 2, 3$) par leurs expressions respectives données par (2.7b), et après quelques simplifications et réarrangements des différents termes, on obtient l'expression finale de l'opérateur carré de l'impulsion dans un espace courbe muni d'une métrique de type Schwarzschild :

$$\vec{p}_{Sch}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{\sqrt{\xi}}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sqrt{\xi} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] \quad (2.14)$$

qui peut être mis sous la forme suivante :

$$\vec{p}_{Sch}^2 = -\hbar^2 \left[\frac{\sqrt{\xi}}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sqrt{\xi} \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\vec{L}^2}{r^2} \right] \quad (2.15)$$

où \vec{L}^2 est le module au carré de l'opérateur moment cinétique orbital. L'opérateur énergie, quant à lui, est défini, de la même manière que l'opérateur impulsion, d'après la relation (2.8b) et en utilisant l'expression (2.7a), comme suit :

$$E = i\hbar \partial_t^{Sch} = \frac{i\hbar}{h_0} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{i\hbar}{\sqrt{\xi}} \frac{\partial}{\partial t} \quad (2.16)$$

Noter que lorsqu'on s'éloigne suffisamment de la source du champ, i.e. $V \rightarrow 0$ ($\xi \rightarrow 1$), on retombe bien sur les expressions des opérateurs énergie, impulsion et carré de l'impulsion habituels en coordonnées sphérique dans un espace plat. Finalement, les règles de correspondance (2.8a) et (2.8b), se réécrivent, dans le système de coordonnées de Schwarzschild, de la sorte :

$$\vec{p} \rightarrow -i\hbar \sum_{i=1}^3 h_i^{-1} \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \vec{x} \equiv (r, \theta, \phi) \quad (2.17a)$$

$$E \rightarrow i\hbar h_0^{-1} \frac{\partial}{\partial t} \quad (2.17b)$$

où les coefficients $h_\mu (\mu = 0, i)$ sont donnés par leurs expressions respectives (2.7a) et (2.7b). Il est facile de vérifier que les composantes de l'opérateur impulsion $p_i (i = 1, 2, 3)$, telles qu'elles sont définies, ne sont pas de bons opérateurs, car elles ne satisfont pas les relations de commutations (2.9) et ne sont même pas hermitiens. Pour remédier à ce problème, il faut plutôt substituer la dérivée normale par la dérivée covariante en adoptant les définitions suivantes :

$$p_i = -i\hbar \frac{1}{\sqrt{D}} \frac{\partial}{\partial x^i} \sqrt{D}, \quad \vec{x} \equiv (r, \theta, \phi) \quad (2.18)$$

où $D = \sqrt{-g}$ et $g \equiv \det(g_{\mu\nu})$.

2.2 Dynamique de Schwarzschild

Dans cette section, on s'intéressera à la dynamique relativiste d'une particule évoluant dans un espace-temps courbe, doté d'une métrique de type Schwarzschild, pour voir, en premier lieu, comment s'expriment les différentes grandeurs dynamiques relatives à celle-ci, à savoir : le temps propre, les quadrivecteurs vitesse et énergie-impulsion, etc. ; et, en second lieu, déterminer l'énergie totale de ladite particule, ainsi que la fonction de courbure $\xi(r)$, qui sont nécessaires pour l'établissement, par la suite, des équations d'ondes quantiques dans un espace temps courbe.

2.2.1 Temps propre, quadrivecteurs vitesse et énergie-impulsion

Par définition, le temps propre est relié à l'intervalle d'espace-temps entre deux événements par la relation suivante :

$$d\tau = c^{-1}ds \quad (2.19)$$

qui s'écrit, compte tenu de (2.1),

$$d\tau = dt \sqrt{\xi - \frac{1}{\xi} \left(\frac{dr}{cdt} \right)^2 - r^2 \left[\left(\frac{d\theta}{cdt} \right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{cdt} \right)^2 \right]} \quad (2.20)$$

ou encore,

$$d\tau = \gamma_s^{-1} dt \quad (2.21)$$

où γ_s est le facteur de Schwarzschild dont l'expression est la suivante :

$$\gamma_s = \left[\xi - \frac{1}{\xi} \frac{\beta_r^2}{c^2} - r^2 \frac{\beta_t^2}{c^2} \right]^{-1/2} \quad (2.22)$$

β_r et β_t étant les parties radiales et transversales de la vitesse $\vec{\beta}$, respectivement. Elles sont définies comme suit :

$$\beta_r = \frac{dr}{dt} \quad (2.23a)$$

$$\beta_t = \left[\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (2.23b)$$

$$\vec{\beta} = \frac{d\vec{x}}{dt} \quad (2.23c)$$

Le quadrivecteur vitesse, par définition, est donné par :

$$V^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \left(c \frac{dt}{d\tau}, \frac{dr}{d\tau}, \frac{d\theta}{d\tau}, \frac{d\phi}{d\tau} \right) \quad (2.24)$$

En tenant compte de (2.21), ce dernier s'écrit :

$$\begin{aligned} V^\mu &= \gamma_s \left(c, \frac{dr}{dt}, \frac{d\theta}{dt}, \frac{d\phi}{dt} \right) = \gamma_s (c, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi}) \\ &= \gamma_s (c, \vec{\beta}) \end{aligned} \quad (2.25)$$

En multipliant le quadrivecteur vitesse par la masse au repos de la particule m , qui est évidemment un scalaire, on obtient encore un quadrivecteur, le quadrivecteur énergie-impulsion de la particule dont les composantes contravariantes sont :

$$P^\mu = mV^\mu = \gamma_s m (c, \vec{\beta}) = \gamma_s m (c, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi}) \quad (2.26)$$

Par ailleurs, les composantes covariantes du quadrivecteur énergie-impulsion, P_μ , sont obtenues à l'aide du tenseur métrique de la sorte :

$$P_\mu = \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} P^\nu \quad (2.27)$$

En substituant (2.3) et (2.26) dans (2.27), on aura :

$$P_\mu = \gamma_s m \begin{pmatrix} c\xi \\ -\xi^{-1}\dot{r} \\ -r^2\dot{\theta} \\ -r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

2.2.2 Action, lagrangien et hamiltonien du système

En dynamique relativiste, l'action A d'une particule libre, de masse au repos m , est définie comme :

$$A = -mc^2 \int ds \quad (2.29)$$

D'autre part, il est connu que cette même action est reliée au lagrangien de la particule L par :

$$A = \int L dt \quad (2.30)$$

En comparant ces deux dernières expressions, et en tenant compte de (2.19) et (2.21), on déduit l'expression du lagrangien dans la métrique de Schwarzschild qui est donnée par :

$$L = -mc^2 \sqrt{\xi - \frac{1}{\xi} \frac{\beta_r^2}{c^2} - r^2 \frac{\beta_t^2}{c^2}} \quad (2.31)$$

L'hamiltonien d'un système s'obtient à partir du lagrangien simplement en opérant une transformation de Legendre par rapport aux variables $\dot{x}^i (i = 1, 2, 3)$ comme suit :

$$H = \sum_{i=1}^3 p_i \dot{x}^i - L = p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} + p_\phi \dot{\phi} - L \quad (2.32)$$

où p_r , p_θ et p_ϕ sont les moments conjugués associés aux coordonnées r , θ et ϕ respectivement. Leurs expressions sont données par :

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \gamma_s m \xi^{-1} \dot{r} = -P_1 \quad (2.33a)$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \gamma_s m r^2 \dot{\theta} = -P_2 \quad (2.33b)$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \gamma_s m r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} = -P_3 \quad (2.33c)$$

En substituant maintenant ces dernières dans (2.32), et en utilisant (2.31), on obtient l'expression de l'hamiltonien dans la métrique de Schwarzschild, qui correspond dans notre cas à l'énergie totale du système, qui suit :

$$H \equiv E = \gamma_s m \xi^{-1} \dot{r}^2 + \gamma_s m r^2 \dot{\theta}^2 + \gamma_s m r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 + \gamma_s^{-1} m c^2$$

$$\begin{aligned}
 &= \gamma_s m c^2 \left[\xi^{-1} \left(\frac{dr}{cdt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{cdt} \right)^2 + r^2 \sin^2 \left(\frac{d\phi}{cdt} \right)^2 + \gamma_s^{-2} \right] \\
 &= \gamma_s m c^2 \xi(r) = c P_0
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Noter que pour $V(r) = 0$ (donc pour $\xi(r) = 1$ et $\gamma_s = \gamma$), on retrouve l'expression de l'énergie totale d'une particule libre dans la métrique de Minkowski, i.e. $E = \gamma m c^2$.

2.2.3 Relation de dispersion généralisée

Dans le référentiel propre de la particule, le produit scalaire du quadrivecteur énergie-impulsion avec lui-même est donné, en tenant compte de (2.5) et (2.28), par :

$$\sum_{\mu=0}^3 P_\mu P^\mu = P_0 P^0 = \gamma_s^2 m^2 c^2 \xi = m^2 c^4 \tag{2.35}$$

Dans un autre référentiel inertiel, ce dernier s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \sum_{\mu=0}^3 P_\mu P^\mu &= \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 g^{\mu\nu} P_\mu P_\nu \\
 &= g^{00} P_0 P_0 + g^{11} P_1 P_1 + g^{22} P_2 P_2 + g^{33} P_3 P_3 \\
 &= \frac{E^2}{c^2 \xi} - \xi p_r^2 - \frac{p_\theta^2}{r^2} - \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2 \theta}
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

En introduisant les composantes ordinaires de l'impulsion [voir appendice A] :

$$\bar{p}_r \equiv \sqrt{\xi} p_r, \tag{2.37a}$$

$$\bar{p}_\theta \equiv \frac{p_\theta}{r}, \tag{2.37b}$$

$$\bar{p}_\phi \equiv \frac{p_\phi}{r \sin \theta}, \tag{2.37c}$$

l'expression (2.36) se réécrit :

$$\begin{aligned}
 \sum_{\mu=0}^3 P_\mu P^\mu &= \frac{E^2}{c^2 \xi} - [\bar{p}_r^2 + \bar{p}_\theta^2 + \bar{p}_\phi^2] \\
 &= \frac{E^2}{c^2 \xi} - \vec{p}_{Sch}^2
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Comme le produit scalaire d'un quadrivecteur avec lui-même est une grandeur invariante, i.e. elle a la même valeur dans tous les référentiels inertiels, alors il vient, en combinant (2.35) et (2.38), que

$$\frac{E^2}{\xi} = \vec{p}_{Sch}^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (2.39)$$

Selon l'interprétation ondulatoire de la mécanique quantique, cette dernière relation algébrique n'est autre, au facteur \hbar près, que l'équation de dispersion (reliant la fréquence ω au vecteur d'ondes spatial \vec{k}) de l'équation d'ondes quantique dans un espace-temps courbe, qu'on cherchera à établir, pour les particules de spin 0 et 1/2, dans la prochaine section.

2.2.4 Détermination de la fonction $\xi(r)$

Pour déterminer la forme explicite de la fonction $\xi(r)$, on se place dans le référentiel inertiel lié à la particule où $\vec{p} = \vec{0}$. Dans ce cas, son énergie totale, d'après (2.39), se réduit à

$$E = mc^2 \sqrt{\xi(r)} \quad (2.40)$$

Or l'énergie totale d'une particule relativiste évoluant dans un potentiel non gravitationnel $V(r)$, calculée dans son référentiel propre, est donnée par :

$$E = mc^2 + V(r) \quad (2.41)$$

En comparant ces deux dernières expressions, on en déduit que

$$\sqrt{\xi(r)} = 1 + \frac{V(r)}{mc^2} \quad (2.42)$$

soit encore,

$$\xi = \left(1 + \frac{V}{mc^2}\right)^2 = 1 + \frac{2V}{mc^2} + \frac{V^2}{m^2 c^4} \quad (2.43)$$

Pour des faibles potentiels, i.e. $V \ll mc^2$, on aura :

$$\xi \simeq 1 + \frac{2V}{mc^2} \quad (2.44)$$

En comparant (2.43) avec le résultat de Schwarzschild, obtenu dans le cadre de la relativité générale, il est possible d'identifier la masse de Schwarzschild par :

$$m_s = -\frac{r}{2} \left(\frac{2V}{mc^2} + \frac{V^2}{m^2c^4} \right) \quad (2.45)$$

qui se réduit, pour des potentiels faibles, à

$$m_s \simeq -\frac{rV}{mc^2} \quad (2.46)$$

On peut aussi retrouver la métrique de Schwarzschild habituelle associée à un champ gravitationnel faible en substituant dans (2.44) le potentiel $V(r)$ par le potentiel gravitationnel $V(r) = -GMm/r$. Ce qui conduit à

$$m_s \simeq \frac{GM}{c^2} \quad (2.47a)$$

$$\xi(r) \simeq 1 - \frac{2m_s}{r} = 1 - \frac{r_s}{r} \quad (2.47b)$$

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (2.47c)$$

où $r_s = 2m_s$ est le rayon de Schwarzschild.

2.3 Équations d'ondes quantiques dans un espace-temps courbe

Dans cette section, on cherchera à établir les équations d'ondes quantiques relativistes pour une particule évoluant dans un espace-temps courbe muni d'une métrique de type Schwarzschild. On généralisera d'abord l'équation de Klein-Gordon, en partant de la relation de dispersion généralisée (2.39) à laquelle on appliquera les règles de correspondance (2.17b)-(2.17a). L'équation ainsi obtenue, dite de Klein-Gordon généralisée, décrira une particule massive, sans spin, évoluant sous l'influence d'un potentiel non gravitationnel affectant la métrique de l'espace-temps. Puis, de la même manière, on généralisera l'équation de Dirac en partant, cette fois-ci, de l'hamiltonien de Dirac associé à une particule libre de spin 1/2

évoluant dans un espace-temps plat, auquel on appliquera les règles de correspondance citées plus haut. L'équation ainsi obtenue, dite de Dirac généralisée, décrira une particule de spin $1/2$ soumise à un potentiel non gravitationnel $V(r)$ et évoluant dans un espace courbe.

2.3.1 Équation de Klein-Gordon généralisée

Dans un espace-temps courbe, muni d'une métrique de type Schwarzschild, on peut établir une équation d'onde quantique, pour une particule massive de spin 0, en appliquant les règles de correspondance (2.17b) et (2.17a) à l'équation de dispersion (2.39), puis en faisant agir la relation obtenue sur une fonction d'onde $\Psi(\vec{r}, t)$. On obtient alors l'équation, dite de Klein-Gordon généralisée, suivante :

$$-\frac{\hbar^2}{\xi^2} \frac{\partial^2 \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = -\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}_{Sch}^2 \Psi(\vec{r}, t) + m^2 c^4 \Psi(\vec{r}, t) \quad (2.48)$$

soit encore, en tenant compte de (2.13),

$$-\frac{\hbar^2}{\xi^2} \frac{\partial^2 \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = \left\{ -\hbar^2 c^2 \left[\frac{\sqrt{\xi}}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sqrt{\xi} \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\vec{L}^2}{r^2} \right] + m^2 c^4 \right\} \Psi(\vec{r}, t) \quad (2.49)$$

Dans le cas stationnaire et compte tenu de la symétrie sphérique du problème, on peut chercher une solution de la forme :

$$\Psi(\vec{r}, t) \equiv \Psi(r, \theta, \phi, t) = U(r) Y_l^m(\theta, \phi) \exp\left(-i \frac{Et}{\hbar}\right) \quad (2.50)$$

où $U(r)$ est une fonction radiale et $Y_l^m(\theta, \phi)$ sont les harmoniques sphériques, fonctions propres de l'opérateur carré du moment cinétique orbital vérifiant l'équation aux valeurs propres suivante :

$$\vec{L}^2 Y_l^m(\theta, \phi) = \hbar^2 l(l+1) Y_l^m(\theta, \phi) \quad (2.51)$$

l et m étant les nombres quantiques orbital et magnétique respectivement. En rapportant maintenant la solution (2.50) dans (2.49), et en tenant compte de (2.51), on obtient, après simplification et réarrangement des différents termes, l'équation différentielle, que doit

satisfaire la partie radiale de la fonction d'onde, qui suit :

$$\frac{\sqrt{\xi}}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \sqrt{\xi} \frac{d}{dr} \right) U(r) + \left(\frac{E^2}{\hbar^2 c^2 \xi^2} - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) U(r) = 0 \quad (2.52)$$

Noter que pour résoudre complètement cette équation, il faut connaître la forme explicite de la fonction $\xi(r)$ qui dépend du potentiel d'interaction $V(r)$ relatif au système étudié.

2.3.2 Équation de Dirac généralisée

On peut établir une équation d'onde quantique, décrivant une particule de spin 1/2 évoluant dans un espace-temps courbe, en appliquant directement les règles de correspondance (2.17b) et (2.17a) à l'hamiltonien de Dirac associé à une particule libre de spin 1/2 évoluant dans un espace-temps plat. Ce dernier est donné par :

$$E = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} c + \beta m c^2 \quad (2.53)$$

avec $\vec{\alpha} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \vec{e}_i$ où α_i ($i = 1, 2, 3$) et β sont des matrices hermitiennes (4×4) qui s'écrivent en représentation standard sous la forme :

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

$\mathbb{1}$ étant la matrice identité (2×2) et $\vec{\sigma} = \sum_{i=1}^3 \sigma_i \vec{e}_i$, où les σ_i ($i = 1, 2, 3$) sont les trois matrices de Pauli définies par :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

Maintenant en substituant, dans (2.53), E et \vec{p} respectivement par (2.17b) et (2.17a) et en faisant agir la relation ainsi obtenue sur une fonction d'onde $\Psi(\vec{r}, t)$ (cette fonction d'onde a maintenant 4 composantes, supposées indépendantes), on obtient alors l'équation, dite de Dirac généralisée, suivante :

$$\frac{i\hbar}{\sqrt{\xi}} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left\{ -i\hbar c \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}_{Sch} + \beta m c^2 \right\} \Psi \quad (2.56)$$

qui décrit l'évolution d'une particule de spin 1/2 dans un potentiel non gravitationnel $V(r)$ qui affecte la courbure de l'espace-temps.

Intéressons nous, à présent, au cas stationnaire en cherchant une solution de l'équation de Dirac généralisée de la forme :

$$\Psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) \exp\left(-i\frac{Et}{\hbar}\right) \quad (2.57)$$

En substituant cette dernière dans (2.56), on obtient, après quelques simplifications, l'équation suivante :

$$\left\{ -i\hbar c \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}_{Sch} + \beta mc^2 - \frac{E}{\sqrt{\xi}} \right\} \psi(\vec{r}) = 0 \quad (2.58)$$

Il est facile de montrer que le terme cinétique $\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}_{Sch}$ peut être mis sous cette forme [voir appendice B pour la démonstration dans le cas d'un espace-temps plat] :

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}_{Sch} = \alpha_r \left(\sqrt{\xi} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{L}}{\hbar r} \right) \quad (2.59)$$

où \vec{L} est l'opérateur moment cinétique orbital. Dans ce cas, l'équation (2.58) devient :

$$\left\{ -i\hbar c \alpha_r \left(\sqrt{\xi} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{L}}{\hbar r} \right) + \beta mc^2 - \frac{E}{\sqrt{\xi}} \right\} \psi(\vec{r}) = 0 \quad (2.60)$$

Il convient d'écrire la solution $\psi(\vec{r})$ sous la forme :

$$\psi(\vec{r}) = \begin{pmatrix} F(r) \chi_k^\mu \\ iG(r) \chi_{-k}^\mu \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

où $F(r)$ et $G(r)$ sont des fonctions arbitraires de r et χ_k^μ sont des spineurs sphériques, qui sont des fonctions de moment cinétique total formées par composition d'un spin 1/2 avec des harmoniques sphériques d'ordre l , à savoir :

$$\chi_{\pm k}^\mu = \sum_{m=-1/2}^{+1/2} C_{l,1/2,j}^{\mu-m,m} Y_l^{\mu-m}(\theta, \phi) \chi^m, \quad \text{avec } k = j + 1/2 \quad (2.62)$$

où $C_{l,1/2,j}^{\mu-m,m}$ et χ^m représentent respectivement les coefficients de Clebsh-Gordan et les

spineurs de Pauli. En introduisant maintenant l'opérateur K défini par :

$$K = \hbar + \vec{\sigma} \cdot \vec{L} \quad (2.63)$$

et qui vérifie les équations aux valeurs propres suivantes :

$$K\chi_k^\mu = -\hbar k\chi_k^\mu \quad (2.64)$$

l'équation (2.60) se réécrit alors, en tenant compte de (2.61) et des définitions des matrices $\alpha_r \equiv \alpha_1$ et β , sous la forme matricielle qui suit :

$$\begin{pmatrix} mc^2 - \frac{E}{\sqrt{\xi}} & -ic\sigma_1 \left(\hbar\sqrt{\xi} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{K-\hbar}{r} \right) \\ -ic\sigma_1 \left(\hbar\sqrt{\xi} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{K-\hbar}{r} \right) & -mc^2 - \frac{E}{\sqrt{\xi}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F(r)\chi_k^\mu \\ iG(r)\chi_{-k}^\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.65)$$

d'où on déduit le système de deux équations différentielles suivant :

$$\left(mc^2 - \frac{E}{\sqrt{\xi}} \right) F(r)\chi_k^\mu + c\sigma_1 \left(\hbar\sqrt{\xi} \frac{dG(r)}{dr} \chi_{-k}^\mu - G(r) \frac{K-\hbar}{r} \chi_{-k}^\mu \right) = 0 \quad (2.66a)$$

$$c\sigma_1 \left(\hbar\sqrt{\xi} \frac{dF(r)}{dr} \chi_k^\mu - F(r) \frac{K-\hbar}{r} \chi_k^\mu \right) + \left(mc^2 + \frac{E}{\sqrt{\xi}} \right) G(r)\chi_{-k}^\mu = 0 \quad (2.66b)$$

En faisant agir maintenant l'opérateur K sur ses fonctions propres χ_k^μ et en utilisant l'identité $\sigma_1\chi_k^\mu = -\chi_{-k}^\mu$, et après avoir réarrangé les différents termes et opéré quelques simplifications, on obtient ces deux équations différentielles couplées pour les fonctions radiales $F(r)$ et $G(r)$:

$$\sqrt{\xi} \frac{dG(r)}{dr} + (1-k) \frac{G(r)}{r} = -\frac{1}{\hbar c} \left(\frac{E}{\sqrt{\xi}} - mc^2 \right) F(r) \quad (2.67a)$$

$$\sqrt{\xi} \frac{dF(r)}{dr} + (1+k) \frac{F(r)}{r} = \frac{1}{\hbar c} \left(\frac{E}{\sqrt{\xi}} + mc^2 \right) G(r) \quad (2.67b)$$

La résolution complète de ce système d'équations radiales peut se faire seulement en spécifiant le potentiel d'interaction non gravitationnel relatif au problème étudié, et donc de la fonction $\xi(r)$ qu'il lui est associée. En particulier, pour $V(r) = 0$, donc pour $\xi = 1$, la résolution du système d'équations différentielles couplées correspondant donne les solutions stationnaires de l'équation de Dirac d'une particule libre de spin 1/2 évoluant dans un espace-temps plat : ce sont les ondes sphériques libres de Dirac. Une autre situation

intéressante qu'on peut examiner est la limite des potentiels faibles. Une telle situation est rencontrée lorsqu'on s'éloigne suffisamment de la source du champ. Dans ce cas, on peut considérer, compte tenu de (2.44), les approximations suivantes :

$$\xi^a \simeq 1 + \frac{2aV}{mc^2}, \quad \text{avec } a = -1, \pm \frac{1}{2} \quad (2.68)$$

qui, une fois rapporté dans les équations (2.67a) et (2.67b), et en négligeant tous les termes proportionnels à V/mc^2 , conduit au système d'équations suivant :

$$\frac{dG(r)}{dr} + (1 - k) \frac{G(r)}{r} \simeq -\frac{1}{\hbar c} \left(E - \frac{EV}{mc^2} - mc^2 \right) F(r) \quad (2.69a)$$

$$\frac{dF(r)}{dr} + (1 + k) \frac{F(r)}{r} \simeq \frac{1}{\hbar c} \left(E - \frac{EV}{mc^2} + mc^2 \right) G(r) \quad (2.69b)$$

Si, en plus, on s'intéresse à des systèmes dont les énergies E mises en jeu sont de même ordre de grandeur que l'énergie au repos, i.e. $E \simeq mc^2$, alors le dernier système d'équations se réduit à

$$\frac{dG(r)}{dr} + (1 - k) \frac{G(r)}{r} = -\frac{1}{\hbar c} (E - V - mc^2) F(r) \quad (2.70a)$$

$$\frac{dF(r)}{dr} + (1 + k) \frac{F(r)}{r} = \frac{1}{\hbar c} (E - V + mc^2) G(r) \quad (2.70b)$$

qui correspond bien au système d'équations différentielles radiales couplées (B.13a)-(B.13b) décrivant l'évolution d'une particule relativiste de spin 1/2 dans un espace-temps plat en présence d'un potentiel d'interaction $V(r)$, obtenu, par couplage minimal, dans le cadre de la théorie de Dirac .

2.4 Application à l'atome d'hydrogène

Dans cette section, on cherchera à déterminer, dans le cadre de l'approche de C.C. Barros, le spectre d'énergie de l'atome d'hydrogène en résolvant les équations différentielles radiales couplées de Dirac (2.67a)-(2.67b) pour un potentiel coulombien contenu dans la fonction de courbure $\xi(r)$. Pour cela, déterminons d'abord la forme de la fonction de courbure pour l'énergie d'interaction électron-proton. Au sein de l'atome d'hydrogène, l'interaction électron-proton est une interaction coulombienne et l'énergie potentielle de

l'électron est donnée par :

$$V_{ep}(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \quad (2.71)$$

Suivant le raisonnement de C.C. Barros, le potentiel coulombien agit indirectement sur l'électron en affectant la courbure de l'espace-temps via la fonction $\xi_{ep}(r)$ qui sera, en substituant (2.71) dans (2.43), donnée par :

$$\xi_{ep}(r) = \left(1 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2 r}\right)^2 \quad (2.72)$$

où m_e est la masse au repos de l'électron. Cette fonction, à travers la métrique (2.1), décrit alors la géométrie de l'espace-temps et la façon dont elle est modifiée par la présence d'un potentiel d'interaction coulombien. Une conséquence intéressante de la théorie que nous devrions mentionner est le rayon de Schwarzschild. Celui-ci, nommé aussi l'horizon des événements, correspond au rayon pour lequel la métrique (2.1) présente une singularité¹, i.e. le rayon pour lequel $\xi_{ep}(r) = 0$. L'étude de la gravitation dans le cadre de la théorie de la relativité générale révèle que le rayon de Schwarzschild des astres est toujours négligeable devant leurs rayons (par exemple, dans le cas du soleil $r_s \simeq 2.95 \text{ km} \ll R_\odot$). Cependant, dans le cas d'un atome d'hydrogène, le rayon de Schwarzschild est donné par :

$$\xi_{ep}(r) = 0 \implies r_s = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} \quad (2.73)$$

et dont la valeur numérique, calculée en utilisant les paramètres de [32], vaut² :

$$r_s \simeq 0.014280 \text{ MeV}^{-1} \simeq 2.81703 \text{ fm} \quad (2.74)$$

Ce qui suggère qu'il est du même ordre que le rayon classique de l'électron, ce qui n'est pas négligeable, contrairement au cas de la gravitation, devant les dimensions de notre système. En effet, les dernières estimations du rayon du proton [33, 34] montraient qu'il est d'environ 0.8-0.89 fm, ce qui le situe à l'intérieur de l'horizon des événements. Ainsi, la charge électrique (du noyau) sera confinée à l'intérieur de cette région par une surface de piégeage, et à l'extérieur, seuls les effets de la charge totale peuvent être ressentis par

1. Cette singularité de la métrique quand $r = r_s$ n'est qu'apparente car celle-ci peut être éliminée en utilisant un autre jeu de coordonnées. 2. Dans le système d'unités géométriques : $1 \text{ m} \rightarrow 5.1 \times 10^{12} \text{ MeV}^{-1}$

l'électron, et aucune information sur la structure interne ne peut être obtenue.

2.4.1 Détermination du spectre d'énergie

Pour déterminer le spectre d'énergie de l'atome d'hydrogène, il faut résoudre le système d'équations différentielles couplées radiales (2.67a)-(2.67b) en remplaçant la fonction ξ par $\xi_{ep}(r)$. Celui-ci se réécrit, en introduisant la nouvelle variable, $\rho = \beta r / \hbar c$, et en opérant quelques simplifications, de la sorte :

$$\xi_{ep} \frac{dG(\rho)}{d\rho} + \sqrt{\xi_{ep}}(1-k) \frac{G(\rho)}{\rho} = -\frac{1}{\beta} (E - m_e c^2 \sqrt{\xi_{ep}}) F(\rho) \quad (2.75a)$$

$$\xi_{ep} \frac{dF(\rho)}{d\rho} + \sqrt{\xi_{ep}}(1+k) \frac{F(\rho)}{\rho} = \frac{1}{\beta} (E + m_e c^2 \sqrt{\xi_{ep}}) G(\rho) \quad (2.75b)$$

où ξ_{ep} est la fonction de courbure associée au potentiel coulombien qui peut être réécrite, en posant $\sigma = \alpha / m_e c^2$, comme suit :

$$\xi_{ep} = \left(1 - \frac{\sigma\beta}{\rho}\right)^2 \implies \sqrt{\xi_{ep}} = 1 - \frac{\sigma\beta}{\rho} \quad (2.76)$$

α étant la constante de structure fine. En rapportant tout cela dans le système (2.75a)-(2.75b), on aura :

$$\left(1 - \frac{\sigma\beta}{\rho}\right)^2 \frac{dG}{d\rho} + \left(1 - \frac{\sigma\beta}{\rho}\right) (1-k) \frac{G}{\rho} = -\left(\frac{E - m_e c^2}{\beta} + \frac{\sigma m_e c^2}{\rho}\right) F \quad (2.77a)$$

$$\left(1 - \frac{\sigma\beta}{\rho}\right)^2 \frac{dF}{d\rho} + \left(1 - \frac{\sigma\beta}{\rho}\right) (1+k) \frac{F}{\rho} = \left(\frac{E + m_e c^2}{\beta} - \frac{\sigma m_e c^2}{\rho}\right) G \quad (2.77b)$$

Pour résoudre ce type d'équations, on fait appel à la méthode de Frobenius qui consiste à rechercher des solutions sous forme de série de puissances en ρ comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} F(\rho) = \rho^s \sum_{n=0}^N a_n \rho^n e^{-\rho} \quad (a_0 \neq 0) \end{array} \right. \quad (2.78a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} G(\rho) = \rho^s \sum_{n=0}^N b_n \rho^n e^{-\rho} \quad (b_0 \neq 0) \end{array} \right. \quad (2.78b)$$

Les dérivées de F et G peuvent être aisément calculées, à partir de (2.78a) et (2.78b) respectivement, et mises sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dF}{d\rho} = \sum_{n=0}^N a_n \left[(n+s)\rho^{n+s-1} - \rho^{n+s} \right] e^{-\rho} \\ \frac{dG}{d\rho} = \sum_{n=0}^N b_n \left[(n+s)\rho^{n+s-1} - \rho^{n+s} \right] e^{-\rho} \end{array} \right. \quad (2.79a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dF}{d\rho} = \sum_{n=0}^N a_n \left[(n+s)\rho^{n+s-1} - \rho^{n+s} \right] e^{-\rho} \\ \frac{dG}{d\rho} = \sum_{n=0}^N b_n \left[(n+s)\rho^{n+s-1} - \rho^{n+s} \right] e^{-\rho} \end{array} \right. \quad (2.79b)$$

Il vient, après substitution des expressions de F et G , ainsi que leurs dérivées respectives, dans le système (2.77a)-(2.77b) et réarrangement des différents termes,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^N \left[(E - m_e c^2) \beta^{-1} a_n - b_n \right] \rho^n + \sum_{n=0}^N \left[(n+s+2\sigma\beta+1-k)b_n + m_e c^2 \sigma a_n \right] \rho^{n-1} \\ & - \sum_{n=0}^N \left[2\sigma\beta(n+s) + (1-k)\sigma\beta + \sigma^2\beta^2 \right] b_n \rho^{n-2} + \sum_{n=0}^N \sigma^2\beta^2 (n+s) b_n \rho^{n-3} = 0 \end{aligned} \quad (2.80a)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^N \left[a_n + (E + m_e c^2) \beta^{-1} b_n \right] \rho^n - \sum_{n=0}^N \left[(n+s+2\sigma\beta+1+k)a_n + m_e c^2 \sigma b_n \right] \rho^{n-1} \\ & + \sum_{n=0}^N \left[2\sigma\beta(n+s) + (1+k)\sigma\beta + \sigma^2\beta^2 \right] a_n \rho^{n-2} - \sum_{n=0}^N \sigma^2\beta^2 (n+s) a_n \rho^{n-3} = 0 \end{aligned} \quad (2.80b)$$

En regroupant les termes de même puissance de ρ , égalant chaque coefficient de chaque puissance à zéro et effectuant quelques transformations, on peut déduire, entre autres, les relations de récurrence correspondant à l'équation (2.80a) qui suivent :

$$(E - m_e c^2) a_N = \beta b_N \quad (2.81a)$$

$$(2\sigma\beta + N + k + 1) a_N = -m_e c^2 \sigma b_N \quad (2.81b)$$

et celles correspondant à l'équation (2.80b) qui suivent :

$$(E + m_e c^2) b_N = -\beta a_N \quad (2.82a)$$

$$(2\sigma\beta + N - k + 1) b_N = -m_e c^2 \sigma a_N \quad (2.82b)$$

avec $\beta = \sqrt{m_e^2 c^4 - E^2}$. En éliminant les coefficients a_N et b_N dans le système d'équations (2.81a)-(2.81b), ainsi que dans (2.82a)-(2.82b), on obtient respectivement :

$$(2\sigma\beta + N + 1 + k)\beta = -m_e c^2 \sigma E + m_e^2 c^4 \sigma \quad (2.83a)$$

$$(2\sigma\beta + N + 1 - k)\beta = m_e c^2 \sigma E + m_e^2 c^4 \sigma \quad (2.83b)$$

Enfin, en additionnant les deux dernières relations terme à terme, on aura :

$$(2\sigma\beta + N + 1)\beta = m_e^2 c^4 \sigma, \quad \text{avec } N = 0, 1, 2, \dots \quad (2.84)$$

qui peut s'écrire encore, en substituant $N + 1$ par n , sous forme d'une équation de second ordre par rapport à β ,

$$2\sigma\beta^2 + n\beta - m_e^2 c^4 \sigma = 0, \quad \text{avec } n = 1, 2, \dots \quad (2.85)$$

Celle-ci admet deux solutions réelles distinctes données par :

$$\beta_1 = \frac{-n + \sqrt{n^2 + 8\sigma^2 m_e^2 c^4}}{4\sigma} > 0 \quad (2.86a)$$

$$\beta_2 = \frac{-n - \sqrt{n^2 + 8\sigma^2 m_e^2 c^4}}{4\sigma} < 0 \quad (2.86b)$$

D'autre part, on a

$$\beta = \sqrt{m_e^2 c^4 - E^2} \quad (2.87)$$

En comparant cette dernière expression avec les expressions (2.86a) et (2.86b) et comme $\beta > 0$, on en déduit que

$$\beta = \beta_1 \implies E^2 = m_e^2 c^4 \left[\frac{1}{2} - \frac{n^2}{8\sigma^2 m_e^2 c^4} + \frac{n}{4\sigma m_e c^2} \sqrt{\frac{n^2}{4\sigma^2 m_e^2 c^4} + 2} \right] \quad (2.88)$$

En se limitant aux solutions positives, les valeurs que peut prendre l'énergie sont alors, en remplaçant $\sigma m_e c^2$ par α , données par :

$$E_n = m_e c^2 \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{n^2}{8\alpha^2} + \frac{n}{4\alpha} \sqrt{\frac{n^2}{4\alpha^2} + 2}}, \quad \text{avec } n = 1, 2, \dots \quad (2.89)$$

2.4.2 Résultats numériques et discussion

Dans cette partie, nous allons comparer les résultats théoriques obtenus dans le cadre de cette nouvelle approche avec ceux obtenus dans le cadre de la théorie de Dirac [voir

	Hydrogène	Deutérium	P. Dirac (B.24)	C.C. Barros (2.89)
E_1	-13.59844	-13.60214	-13.60587	-13.60298
$E(2, 0, 1/2) - E_1$	10.19881	10.20159	10.20439	10.20172
$E(3, 0, 1/2) - E_1$	12.08750	12.09079	12.09411	12.09127
$E(4, 0, 1/2) - E_1$	12.74854	12.75201	12.75551	12.75263
$E(5, 0, 1/2) - E_1$	13.05450	13.05806	13.06164	13.05875

Table 2.1 – Valeurs expérimentales des niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène et de l'atome de deutérium [20], en comparaison avec les valeurs théoriques obtenus avec les relations (B.24) et (2.89) (les énergies sont exprimées en eV).

appendice B] et ceux de l'expérience. Pour cela, à l'aide des relations (B.24) et (2.89), nous allons calculer l'énergie de l'état fondamental E_1 et la différence entre les énergies des niveaux $E(n, l, j)$ (avec $n > 1$, l et j étant les nombres quantiques de moment angulaire orbital et total respectivement) et l'énergie du niveau fondamental afin de les comparer ensuite aux données expérimentales dans le cas de l'atome d'hydrogène et de l'atome de deutérium. Ces résultats sont rapportés dans la table (2.1). Sur celle-ci, on peut voir que les spectres d'énergie obtenus par les deux théories, dans le cas l'atome d'hydrogène, sont en bonne concordance avec les données expérimentales, et les écarts par rapport à ces dernières sont de l'ordre de 0.033%. Toutefois, les résultats obtenus par (2.89) sont plus proches des résultats expérimentaux que ceux obtenus par (B.24). En revanche, si on compare nos résultats théoriques avec le spectre du deutérium, on peut remarquer que dans ce cas l'accord des deux théories avec les données expérimentales est très bon. En effet, les écarts par rapport aux données sont de l'ordre 0.027% dans le cas de la théorie de Dirac, alors que, dans le cas de l'approche de C.C. Barros, ils sont de l'ordre 0.006%, soit cinq fois plus petits que ceux obtenus par la théorie de Dirac. Il faut noter que la symétrie sphérique n'est pas vraiment exacte dans le cas de l'atome d'hydrogène, vu que le proton possède une masse finie. En revanche, dans le cas d'un noyau lourd comme le deutérium, celle-ci représente bien une meilleure approximation.

2.5 Équations d'Einstein pour l'interaction électromagnétique

Dans cette partie, nous allons chercher l'analogie des équations d'Einstein pour une particule chargée évoluant dans un espace-temps courbe, courbure induite par la présence

d'un champ électromagnétique. Ces équations auront la forme habituelle suivante [21] :

$$G^\mu{}_\nu = R^\mu{}_\nu - \frac{1}{2}g^\mu{}_\nu R = AT^\mu{}_\nu \quad (2.90)$$

où A est une constante de proportionnalité propre à l'interaction électromagnétique à déterminer et $T^\mu{}_\nu$ est le tenseur énergie-impulsion associé au champ électromagnétique dont l'expression générale s'écrit :

$$T^\mu{}_\nu = \epsilon_0 \left(F^\mu{}_\alpha F^\alpha{}_\nu - \frac{1}{4} \delta^\alpha{}_\nu F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) \quad (2.91)$$

Dans le cas d'un atome à seul électron soumis à l'action d'un champ électrostatique \vec{E} , $T^\mu{}_\nu$ possède seulement deux composantes non nulles :

$$T^0{}_0 = -T^r{}_r = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{Z^2 \alpha}{8\pi r^2} \quad (2.92)$$

où α est la constante de la structure fine. Pour déterminer la constante A , il faut résoudre les équations d'Einstein (2.90) pour une métrique de type Schwarzschild :

$$ds^2 = e^\lambda c^2 dt^2 - e^{-\lambda} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (2.93)$$

L'équation à résoudre est alors [28] :

$$\frac{d}{dr} (r e^{-\lambda} - r) = -Ar^2 T^0{}_0 \quad (2.94)$$

L'intégration de cette dernière par rapport à r nous donne :

$$\xi(r) \equiv e^\lambda = 1 - \frac{Ac^2 M(r)}{4\pi r} \quad (2.95)$$

avec

$$M(r) = \frac{4\pi}{c^2} \int_0^r r'^2 T^0{}_0 dr' \quad (2.96)$$

Comme on s'intéresse au cas d'une particule se situant à l'extérieur de l'horizon des événements, alors la dernière intégrale peut s'évaluer de la sorte :

$$\begin{aligned}
 M(r) &= \frac{1}{c^2} \int_0^{r_0} 4\pi r'^2 T_0^0 dr' + \frac{Z^2 \alpha}{2c^2} \int_{r_0}^r \frac{1}{r'^2} dr' \\
 &= m_0 + \frac{Z^2 \alpha}{2c^2 r_0} - \frac{Z^2 \alpha}{2c^2 r} \\
 &= m_0 + \frac{mZ}{2} - \frac{Z^2 \alpha}{2c^2 r}
 \end{aligned} \tag{2.97}$$

où m_0 est un paramètre ayant les dimensions d'une masse qui peut, en conséquence, nous renseigner sur l'équivalence en masse associée à l'énergie électrostatique contenue à l'intérieur de l'horizon des événements ($0 \leq r' \leq r_0$). En rapportant cette dernière dans l'équation (2.95), on obtient :

$$\xi(r) = 1 - \frac{c^2 AZ}{4\pi r} \left[m_0 + \frac{mZ}{2} \right] + \frac{AZ^2 \alpha}{8\pi r^2} \tag{2.98}$$

En comparant maintenant cette expression de la fonction de courbure avec celle obtenue précédemment dans le cadre de l'approche de C.C. Barros pour un potentiel non gravitationnel $V(r)$ [voir la section §2.2], on en déduit que

$$A = \frac{8\pi\alpha}{m^2 c^4}, \quad \text{et} \quad m_0 = \frac{mZ}{2} \tag{2.99}$$

et les équations d'Einstein décrivant la courbure de l'espace-temps induite par l'interaction électromagnétique s'écrivent :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi\alpha}{m^2 c^4} T_{\mu\nu} \tag{2.100}$$

Noter la présence de la masse dans le constante de proportionnalité, $A \propto 1/m^2$, chose qu'on n'observe pas dans le cas de l'interaction gravitationnelle à cause du principe d'équivalence. Ainsi, en présence d'une interaction électromagnétique, l'espace-temps peut se courber et cette courbure est décrite par des équations non linéaires analogues à celles de la relativité générale (1.17).

Il est naturel maintenant de considérer les conditions et approximations dans lesquelles ces équations apparaîtraient comme linéaires. Ce sont les conditions dites de champ faible, où la courbure est peu différente de celle d'un espace plat de Minkowski. Dans ces

conditions, on peut écrire la métrique comme :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad h_{\mu\nu} \ll 1 \quad (2.101)$$

En suivant la procédure habituelle, i.e. en linéarisant les connexions affines et le tenseur de Riemann en remplaçant $g_{\mu\nu}$ par $\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ et en tenant compte que des termes du premier ordre en $h_{\mu\nu}$, on obtient alors l'équation linéarisée suivante :

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \partial_\sigma \bar{h}^{\rho\sigma} - \partial_\nu \partial_\sigma \bar{h}_\mu^\sigma - \partial_\mu \partial_\sigma \bar{h}_\nu^\sigma = -\frac{16\pi\alpha}{m^2 c^4} T_{\mu\nu} \quad (2.102)$$

avec

$$h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} \quad \text{et} \quad \bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h \eta_{\mu\nu}$$

L'expression de cette équation peut se simplifier en choisissant un système de coordonnées particulier tel que $\partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} = 0$. Dans ce cas, les équations de champ deviennent beaucoup plus simples et s'écrivent :

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi\alpha}{m^2 c^4} T_{\mu\nu} \quad (2.103)$$

Si on se place loin de toute matière-énergie, dans le vide ($T_{\mu\nu} = 0$), les équations d'Einstein pour l'interaction électromagnétique se réduisent simplement à :

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (2.104)$$

Cette équation décrit bien la propagation d'une perturbation microscopique de l'espace-temps dans le vide induite par la présence d'une interaction électromagnétique.

3

Interaction forte et géométrie de l'espace-temps

Dans le chapitre précédent, nous avons introduit une nouvelle approche, proposée par C.C.Barros [20]-[23], selon laquelle, de manière analogue à l'interaction gravitationnelle, les autres interactions non gravitationnelles peuvent agir directement sur la structure de l'espace-temps. En particulier, l'application de cette nouvelle approche à l'interaction coulombienne, exerçant entre l'électron et le proton de l'atome d'hydrogène, semblait donner des bons résultats. L'objectif principal de ce présent chapitre est d'étendre l'étude faite dans le chapitre précédent aux particules hadroniques régies par l'interaction forte et, par là même, donner une interprétation géométrique du confinement des quarks au sein des hadrons. Comme nous le verrons dans les prochaines sections, des résultats très intéressants peuvent être obtenus de cette façon, qui seront qualitativement, sous de nombreux aspects, différents de ceux obtenus par les modèles cités dans l'introduction.

3.1 Structure des hadrons et différents types d'interaction forte

Avant d'élaborer un modèle théorique du confinement des quarks en s'appuyant sur l'approche de C.C. Barros, commençons d'abord par rappeler succinctement la structure interne des particules hadroniques et les propriétés fondamentales de la force régissant leur interaction.

3.1.1 Structure interne des hadrons

Un hadron est une particule subatomique composite constituée de deux quarks ou plus. Ils sont maintenus ensemble par la force forte de la même manière que les molécules

sont maintenues ensemble par la force électromagnétique. Ils se subdivisent, selon leurs constituants, en deux catégories :

- **Baryons** qui sont formés de trois quarks. Comme les baryons ont un nombre impair de quarks, ils sont également tous des fermions, c'est-à-dire qu'ils ont un spin demi-entier. C'est la raison pour laquelle on les appelle aussi hadrons fermioniques. On peut citer, entre autres, le proton $p(uud)$, qui est constitué deux quarks up et un down, le neutron $n(ddu)$, les baryons Lambda $\Lambda_b^0(udb)$, $\Lambda_c^+(udc)$ et $\Lambda^0(uds)$, etc. À chaque type de baryon correspond une anti-particule (un anti-baryon) dans laquelle les quarks sont remplacés par leurs correspondants anti-quarks. Ainsi, par exemple, l'anti-proton $\bar{p}(\bar{u}\bar{u}\bar{d})$ est composé de deux anti-quarks up et d'un anti-quark down.
- **Mésons** qui sont formés d'un quark et d'un anti-quark. Comme les mésons ont un nombre pair de quarks, ils sont également tous des bosons, avec un spin entier, c'est-à-dire 0, 1 ou -1 . Ces derniers sont aussi appelés hadrons bosoniques. On peut citer, entre autres, les pions $\pi^+(u\bar{d})$, $\pi^0(u\bar{u} \text{ ou } d\bar{d})$ et $\pi^-(d\bar{u})$, qui jouent également un rôle dans la cohésion des noyaux atomiques via la force forte résiduelle, les kaons $K^+(u\bar{s})$, $K^0(d\bar{s} \text{ ou } s\bar{d})$ et $K^-(s\bar{u})$, le psion $J/\Psi(s\bar{s})$, etc.

Les hadrons peuvent aussi exister sous des états excités appelés résonances hadroniques.

3.1.2 Interaction forte de base ou force de couleur

L'interaction forte de base est l'une des trois interactions fondamentales décrites par le modèle standard, en plus des interactions électromagnétique et faible. C'est l'interaction qui, portée par les gluons, maintient les quarks ensemble pour former des particules hadroniques (baryons et mésons). Celle-ci agit à petite échelle, moins de 0.8 fm, et seulement sur les particules qui possèdent une charge de couleur, i.e. les quarks et les gluons. C'est la raison pour laquelle cette interaction est parfois appelée force de couleur. En effet, de même que les particules doivent être chargées électriquement pour interagir par l'interaction électromagnétique, les quarks portent une charge de couleur. La force de couleur est utilisée pour expliquer le confinement des quarks au sein des hadrons. Ainsi, de la même façon que les trois couleurs fondamentales se combinent pour donner la couleur blanche (i.e. l'absence de couleur), une combinaison des trois couleurs, des trois anti-couleurs, ou toute combinaison d'une couleur et de son anti-couleur complémentaire est donc dite « blanche »

ou « sans couleur », et correspond à une charge de couleur nette nulle. Par conséquent, toutes les particules hadroniques libres sont blanches : les baryons sont composés de trois quarks rouge, vert et bleu (ou d'anti-quarks des trois anti-couleurs respectives) ; les mésons sont formés d'une paire quark-anti-quark où l'anti-quark possède l'anti-couleur associée à la couleur du quark, de bilan neutre.

3.1.3 Interaction forte résiduelle ou force résiduelle

L'interaction forte résiduelle est l'interaction responsable, au sein des noyaux atomiques, de la cohésion des nucléons (protons et neutrons), ce qui conduit à la construction des atomes. On l'appelle aussi par force résiduelle car elle peut être vue comme le résidu (ou le reste) de la force de couleur après que celle-ci ait été utilisée pour le confinement des quarks. Elle est de nature compliquée car elle en résulte de l'interaction forte entre les quarks et les gluons à l'intérieur des hadrons et elle se manifeste à plus grande échelle (1 fm à 3 fm), c.-à-d. à l'échelle des nucléons, par l'échange de mésons. Donc c'est une force qui agit indirectement par la transmission de gluons entre les nucléons. Une des caractéristique de cette force est qu'elle est de très courte portée et diminue exponentiellement avec la distance, contrairement à la force de couleur qui augmente avec la distance. Cette caractéristique permet de se rendre compte, entre autres, de l'instabilité certains noyaux atomiques, en particulier ceux à fort nombre atomique.

3.2 Interaction forte résiduelle et l'approche de C.C. Barros

Cette section sera consacrée à la construction de la métrique de l'espace-temps induite par la présence d'un champ fort dû à l'interaction forte résiduelle inter-nucléons. On commencera d'abord par rappeler la forme du potentiel d'interaction fort qui agit entre deux nucléons suivant l'approche de Yukawa, puis on cherchera à résoudre, pour ce même potentiel, les équations d'Einstein pour une interaction non gravitationnelle, suivant l'approche de C.C. Barros, où on utilisera une constante de couplage propre à l'interaction forte. Par la suite, on établira la forme explicite de la fonction de courbure $\xi(r)$, en terme de la distance, pour la métrique en question. Enfin, dans le but de confronter nos résultats obtenus par cette nouvelle approche à l'expérience, on étudiera la portée de l'interaction

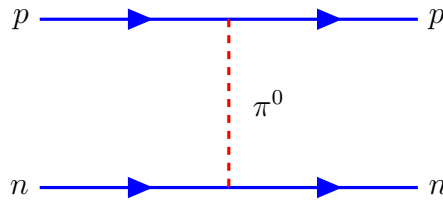


Figure 3.1 – Exemple d'interaction forte résiduelle proton-neutron véhiculée par un pion neutre.

nucléaire forte, la distance de séparation maximale entre différents nucléons et le spectre d'énergie de l'interaction forte entre nucléons à l'intérieur du noyau.

3.2.1 Potentiel de Yukawa et portée de l'interaction forte résiduelle

En 1935, pour décrire les forces nucléaires résiduelles, H. Yukawa proposa que les nucléons interagissent entre eux en échangeant une particule légère, de masse environ 140 MeV, et que celles-ci décroissent exponentiellement pour une portée R finie, de quelques femtomètres (~ 1.5 fm), inversement proportionnelle à la masse au repos μ de la particule échangée, c.-à-d.,

$$R \approx \frac{1}{\mu} \quad (3.1)$$

Pour déterminer la forme du potentiel d'interaction résiduelle entre les nucléons en se basant sur l'hypothèse de Yukawa, considérons l'exemple de l'interaction forte, au sein du noyau, entre un proton et un neutron en échangeant un pion neutre [la figure (3.1) illustre un diagramme de Feynman pour une interaction forte entre le neutron et le proton via l'échange de mésons π^0]. Le médiateur de l'interaction résiduelle est une particule scalaire, de spin 0 et de masse au repos μ , auquel on associe un champ scalaire $\phi(r)$, solution de l'équation Klein-Gordon stationnaire radiale, de la forme :

$$\phi(r) = \frac{g}{4\pi} \frac{e^{-\mu r}}{r} \quad (3.2)$$

et le potentiel de Yukawa s'écrit comme :

$$V(r) = -g\phi(r) = -\frac{g^2}{4\pi} \frac{e^{-\mu r}}{r} \quad (3.3)$$

où g est la constante¹ de couplage de l'interaction forte et r est la distance radiale entre les deux nucléons. Le signe moins indique que la force est attractive. Si la masse du pion est nulle, le potentiel est équivalent à un potentiel coulombien. Par conséquent, le pion détermine seulement la partie de longue portée du potentiel nucléaire.

3.2.2 Métrique induite par le champ fort de Yukawa

Dans ce qui suit, on cherchera à écrire et à résoudre les équations d'Einstein de la gravitation pour une particule évoluant dans un espace-temps dont la métrique est déformée par la présence d'un champ fort de type Yukawa :

$$\phi(r) = \frac{g}{4\pi} \frac{e^{-\mu r}}{r} \quad (3.4)$$

décrit par un tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$. Celles-ci, en s'inspirant notamment du travail de C.C. Barros sur les équations d'Einstein pour l'interaction électromagnétique [voir la section §2.5], s'écrivent :

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = \frac{8\pi\alpha_s}{m^2c^4}T^{\mu\nu} \quad (3.5)$$

où on a remplacé la constante de structure fine α par la constante de couplage propre à l'interaction forte $\alpha_s \equiv g^2/4\pi$; m représente ici la masse du nucléon (ou du quark). Compte tenu de la symétrie sphérique du problème, on cherchera une métrique statique de type Schwarzschild de la forme :

$$ds^2 = e^\lambda c^2 dt^2 - e^{-\lambda} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (3.6)$$

où λ est une fonction arbitraire de r . Dans ce cas, l'équation d'Einstein à résoudre est la suivante :

$$\frac{e^\lambda}{r^2} (r\lambda' + 1) - \frac{1}{r^2} = -\frac{8\pi\alpha_s}{m^2c^4}T_0^0 \quad (3.7)$$

1. C'est une grandeur constante d'échelle, qui dépend de l'amplitude du potentiel, déterminée de façon empirique.

et qui peut se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{d}{dr} (re^\lambda - r) = -\frac{8\pi\alpha_s}{m^2c^4} r^2 T_0^0 \quad (3.8)$$

où T_0^0 est la composante temporelle mixte du tenseur énergie-impulsion. Dans le cas d'une seule particule dans un état stationnaire, ce dernier prend la forme suivante :

$$T^{\mu\nu} = \frac{\rho}{c^2} \beta^\mu \beta^\nu = \gamma_s \rho \delta^{\mu 0} \delta^{\nu 0} = \rho e^{-\lambda} \delta^{\mu 0} \delta^{\nu 0} \quad (3.9)$$

d'où on peut déduire la composante temporelle mixte T_0^0 du tenseur énergie-impulsion qui sera donnée par :

$$T_0^0 = g_{00} T^{00} = \rho \quad (3.10)$$

où ρ est la densité d'énergie du boson médiateur de l'interaction forte et dont l'expression est donnée par la densité hamiltonienne du champ scalaire de Yukawa qui lui est associé, c.-à-d.,

$$\rho = \frac{1}{2} \left[(\vec{\nabla} \phi)^2 + \mu^2 \phi^2 \right] \quad (3.11)$$

et qui, en remplaçant ϕ par son expression donnée par (3.4), s'écrit explicitement :

$$\rho = \frac{\alpha_s e^{-2\mu r}}{8\pi} \left[\frac{2\mu^2}{r^2} + \frac{2\mu}{r^3} + \frac{1}{r^4} \right] \quad (3.12)$$

En substituant maintenant (3.10) dans (3.8), en tenant compte de (3.12) et en intégrant par rapport à r les deux membres de l'équation ainsi obtenue, il vient

$$e^\lambda = 1 - \frac{2\alpha_s M(r)}{m^2 c^4 r} \quad (3.13)$$

avec

$$\begin{aligned} M(r) &= \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr' \\ &= \int_0^{r_0} 4\pi r'^2 \rho(r') dr' + \int_{r_0}^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr' \\ &= M_0 + \frac{\alpha_s}{2} \int_{r_0}^r e^{-2\mu r'} \left[\frac{1}{r'^2} + 2\mu^2 + \frac{2\mu}{r'} \right] dr' \end{aligned} \quad (3.14)$$

où on a séparé la région d'intégration en deux régions distinctes : l'intérieur ($0 \leq r' \leq r_0$) et l'extérieur ($r_0 \leq r' \leq r$) de l'horizon des événements. En évaluant la deuxième intégrale par partie et en rapportant tout cela dans l'équation (3.13), celle-ci devient, après simplification,

$$e^\lambda = 1 - \frac{2l}{r} + \frac{\alpha_s^2}{m^2 c^4} \frac{e^{-2\mu r}}{r^2} (\mu r + 1) \quad (3.15)$$

où l est un paramètre ayant les dimensions d'une longueur. On cherche à réécrire cette dernière sous la forme suivante :

$$e^\lambda = \left[1 - \frac{a}{r}\right]^2 = 1 - \frac{2a}{r} + \frac{a^2}{r^2} \quad (3.16)$$

En comparant à présent ces deux dernière équations terme à terme, il vient que

$$a = l = \frac{\alpha_s}{mc^2} e^{-\mu r} \sqrt{\mu r + 1} \quad (3.17)$$

et, par conséquent, la fonction de courbure, dite de Yukawa, s'écrit :

$$\xi_Y(r) \equiv e^\lambda = \left[1 - \frac{\alpha_s}{mc^2} \frac{e^{-\mu r}}{r} \sqrt{\mu r + 1}\right]^2 \quad (3.18)$$

Ainsi, la géométrie de l'espace-temps en présence d'un champ fort de type Yukawa sera donc décrite par la métrique, dite de Yukawa, suivante :

$$ds^2 = \xi_Y c^2 dt^2 - \xi_Y^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (3.19)$$

Maintenant dans la limite des petites distances (i.e. $r \ll 1$), on a $\mu r \ll 1$ et la fonction de courbure (3.18) tend vers celle trouvait par C.C. Barros en substituant directement dans (2.43) le potentiel $V(r)$ par le potentiel de Yukawa (3.3), c.-à-d.,

$$\xi_B(r) = \left(1 - \frac{\alpha_s}{mc^2} \frac{e^{-\mu r}}{r}\right)^2 \quad (3.20)$$

3.2.3 Spectre d'énergie de l'interaction forte résiduelle

Pour obtenir le spectre d'énergie de l'interaction forte entre nucléons à l'intérieur du noyau, il faut résoudre les équations différentielles couplées radiales de Dirac (2.67a)-(2.67b) en remplaçant la fonction $\xi(r)$ par la fonction de courbure de Yukawa $\xi_Y(r)$. Compte tenu

de la difficulté à résoudre directement ces équations, à cause de la forme complexe de cette dernière, on se contentera de chercher une solution approchée en considérant uniquement les termes d'ordre zéro dans le développement limité de la fonction de courbure. Dans ce cas, la fonction de courbure de Yukawa, à l'ordre le plus petit, se ramène à

$$\sqrt{\xi_Y(r)} \simeq 1 + \frac{\mu\alpha_s}{2mc^2} - \frac{\alpha_s}{mc^2r} \quad (3.21)$$

Maintenant, en procédant de la manière que dans le cas de l'atome d'hydrogène [voir la section §2.4], il est facile de montrer que le spectre d'énergie dans ce cas prend, au premier ordre, la forme suivante :

$$E_n^{(1)} = mc^2 \left[C^2 - \frac{C^4}{2} - \frac{n^2 C^6}{8\alpha_s^2} + \frac{nC^3}{4\alpha_s} \sqrt{\frac{n^2 C^2}{4\alpha_s^2} + 2} \right]^{1/2}, \quad \text{avec } n = 1, 2, \dots \quad (3.22)$$

où $C = 1 + \mu\alpha_s/mc^2$. Utilisons, à présent, cette dernière expression de l'énergie d'interaction forte inter-nucléons pour déterminer la masse de quelques noyaux. La masse d'un noyau (exprimée en MeV), de manière générale, peut être évaluée de la sorte :

$$M_{\text{noyau}} = \sum_{i=1}^l E_{1,i}^{(1)}(m_p^{\text{eff}}) + \sum_{j=1}^k E_{1,j}^{(1)}(m_n^{\text{eff}}) \quad (3.23)$$

où l, k représentent, respectivement, le nombre de protons et de neutrons contenus dans le noyau en question ; m_p^{eff} et m_n^{eff} étant les masses effectives du proton et du neutron au sein du noyau données respectivement par :

$$m_p^{\text{eff}} = m_p + \mu \simeq 1073.249 \text{ MeV}$$

$$m_n^{\text{eff}} = m_n + \mu \simeq 1074.542 \text{ MeV}$$

En effet, si on calcule la masse d'un proton dans un état lié à l'intérieur du noyau, on trouvera la valeur $m_p^{\text{int}} = E_1^{(1)}(m_p) \simeq 811.785 \text{ MeV}$ (avec $\alpha_s = 0.97$), qui est nettement inférieure à la masse d'un proton libre. On voit bien que le proton en interaction avec un autre nucléon perd une quantité de sa masse, environ 126.487 MeV, qui se transforme en énergie de liaison. Ce défaut de masse n'est (approximativement) autre que la masse du méson π^0 porteur de l'interaction forte. Prenons, à titre d'exemple, le noyau de deutérium, composé d'un proton de masse $m_p = 938.272 \text{ MeV}$ et d'un neutron de masse

Noyau	α_s	M_{theo}	M_{exp}	$ \Delta M $	$ \Delta M /M_{\text{exp}}(\%)$
Deutérium	0.97	1867.754	1875.613	6.056	0.323%
Tritium	0.97	2804.918	2809.432	4.514	0.161%
Hélium 4	1	3726.932	3728.4013	0.7547	0.041%
Lithium	0.8	5711.532	6465.501	749.811	11.661%
Béryllium	0.99	8395.323	8394.794	0.529	0.006%
Bore	0.8	9519.22	10069.451	550.231	5.464%
Carbone	1	11180.796	11177.929	2.867	0.026%

Table 3.1 – Masses de quelques noyaux atomiques obtenue par la relation (3.23) en comparaison avec les résultats expérimentaux [32] (les masses sont exprimées en MeV).

$m_n = 939.565$ MeV. Ces deux derniers interagissent via l'échange d'un méson π^0 , de masse d'environ $\mu \simeq 134.977$ MeV. En utilisant la formule (3.23) pour le calcul de la masse d'un noyau, on obtient, dans le cas du noyau de deutérium, la valeur suivante :

$$\begin{aligned}
 M_D &= E_1^{(1)}(m_p^{\text{eff}}) + E_1^{(1)}(m_n^{\text{eff}}) \\
 &= 932.393 + 935.361 \simeq 1867.754 \text{ MeV}
 \end{aligned}
 \tag{3.24}$$

qui, comme on peut le voir, est très proche de sa valeur expérimentale $M_D^{\text{exp}} \simeq 1875.613$ MeV [32]. Cette petite différence observée entre les deux valeurs théorique et expérimentale provient du fait qu'on a considéré uniquement les premiers termes, d'ordre zéro, dans le développement limité de la fonction de courbure de Yukawa. La résolution des équations différentielles radiales couplées de Dirac en incluant d'autres termes, d'ordre supérieur, permettra certainement d'améliorer ces résultats. Les masses de quelques noyaux atomiques calculés en utilisant la relation (3.23) sont récapitulées dans la table (3.1). D'après celle-ci, le spectre d'énergie d'interaction inter-nucléons donne des bons résultats, en comparaison avec les données expérimentales. Par exemple, dans le cas de l'atome de Béryllium, on relève seulement un écart de 0.006% par rapport au résultat expérimental. De manière générale, cet écart est compris entre 0.006% et 0.323%, à l'exception des noyaux de Lithium 6 et de Bore 10 dont les écarts sont estimés à 11.661% et 5.464% respectivement. Cela peut être attribué au fait qu'on a considéré un potentiel à symétrie sphérique dans la modélisation de la force nucléaire forte, alors que, en réalité, celle-ci possède d'autres composantes non centrales ou tensorielles, qui dépendent de l'orientation des spins des nucléons et de leur mouvement relatif l'un par rapport à l'autre. La figure (3.2) nous montre comment varie

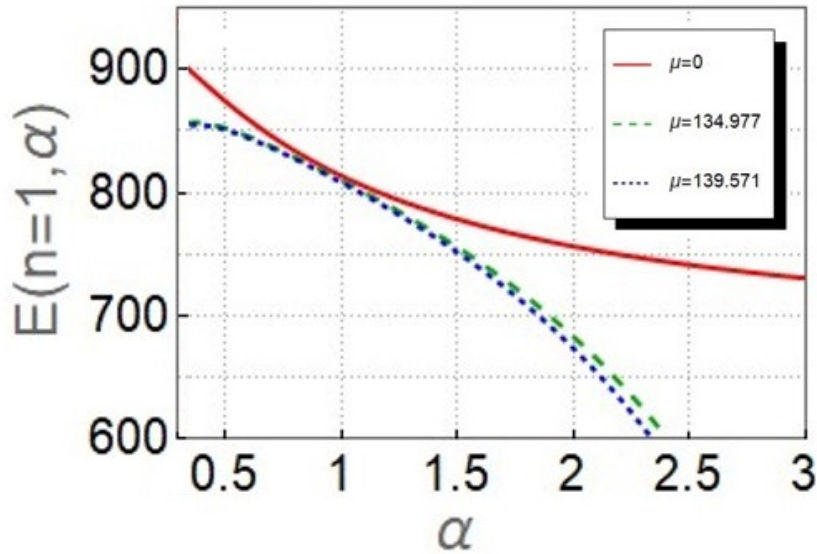


Figure 3.2 – Variation de l'énergie fondamentale d'interaction d'un nucléon au sein du noyau en terme de la constante de couplage forte, $\alpha_s = g^2/4\pi$, pour différents types de porteur d'interaction.

l'énergie fondamentale d'interaction d'un nucléon à l'intérieur du noyau en fonction de la constante de couplage forte pour différentes types de particule d'échange. On peut voir que cette énergie présente le même comportement indépendamment de la nature de la particule d'échange, à savoir qu'elle décroît rapidement à mesure que la constante de couplage α_s augmente. Néanmoins, cette décroissance est d'autant plus prononcée lorsque la particule échangée est plus massive. Cela peut être expliqué par le fait que l'intensité du potentiel d'interaction inter-nucléons, caractérisé par la constante de couplage, est proportionnelle à l'énergie de la particule échangée. Autrement dit, plus le couplage entre les nucléons est important, plus la particule d'échange emporte de l'énergie (ou son équivalent en masse), et, par conséquent, moins sera importante l'énergie fondamentale d'interaction d'un nucléon au sein du noyau. Ainsi, lorsqu'un nucléon entre en interaction avec un autre à l'intérieur du noyau, il perd de sa masse, ou de son équivalent en énergie, selon l'intensité de l'interaction, qui sera emportée par la particule d'échange sous forme d'énergie au repos (donc sa masse) et d'énergie cinétique. La figure (3.3) illustre comment varie l'énergie fondamentale d'échange E_{int} inter-nucléons au sein du noyau en fonction de la constante de couplage α_s . Son expression est donnée par :

$$E_{\text{int}}(\alpha_s) = m_N - E_1^{(1)}(\alpha_s) \quad (3.25)$$

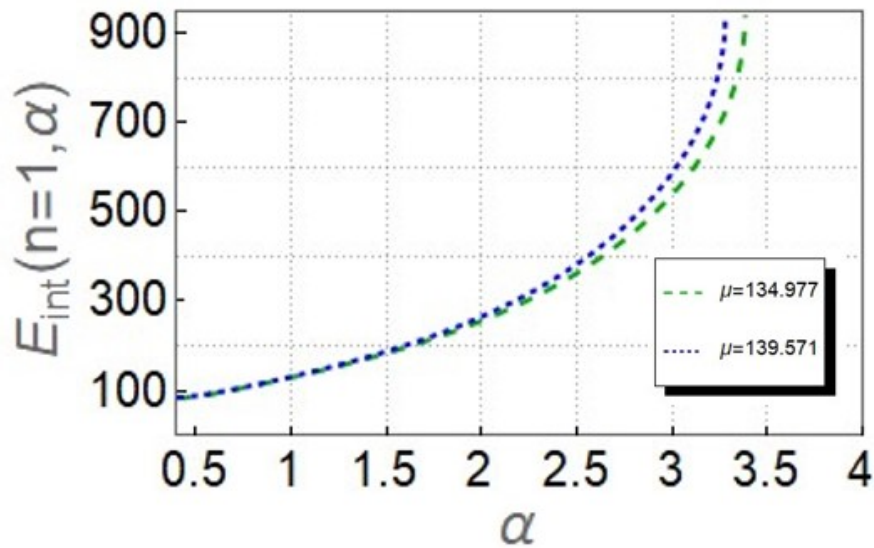


Figure 3.3 – Variation de l'énergie fondamentale d'échange inter-nucléons, donnée par la relation (3.25), en terme de la constante de couplage forte, $\alpha_s = g^2/4\pi$, pour différents types de porteur d'interaction.

où m_N est la masse du nucléon (proton ou neutron). Cette énergie correspond donc à l'énergie totale ($E_{\text{int}} = \mu c^2 + E_c$) de la particule d'échange. Dans ce cas, on voit bien que, conformément à ce qui a été déjà constaté, l'intensité de l'interaction inter-nucléons varie proportionnellement avec la constante de couplage, et que celle-ci est pratiquement indépendante de type de méson π échangé. En pratique, l'interaction forte résiduelle est bien décrite par l'échange de mésons pseudo-scalaires (chargés ou neutres) pour des valeurs de α_s comprise entre 0.8 et 1.2, où son intensité varie de la même façon indépendamment du type de porteur d'interaction.

3.2.4 Résultats numériques et discussion

Cette partie sera consacrée à la discussion des résultats numériques obtenus dans le cadre de cette nouvelle approche en les comparant à des données expérimentales. Pour cela, on va évaluer deux grandeurs : l'horizon des événements, qui nous renseigne sur la portée de l'interaction, et la distance de séparation maximale entre deux nucléons pour différents types de porteurs de l'interaction forte résiduelle, afin de déterminer lequel parmi ces derniers, en comparant cette distance au rayon du porteur, est susceptible d'être échangé. Prenons l'exemple de l'interaction forte proton-proton qui s'effectue via l'échange

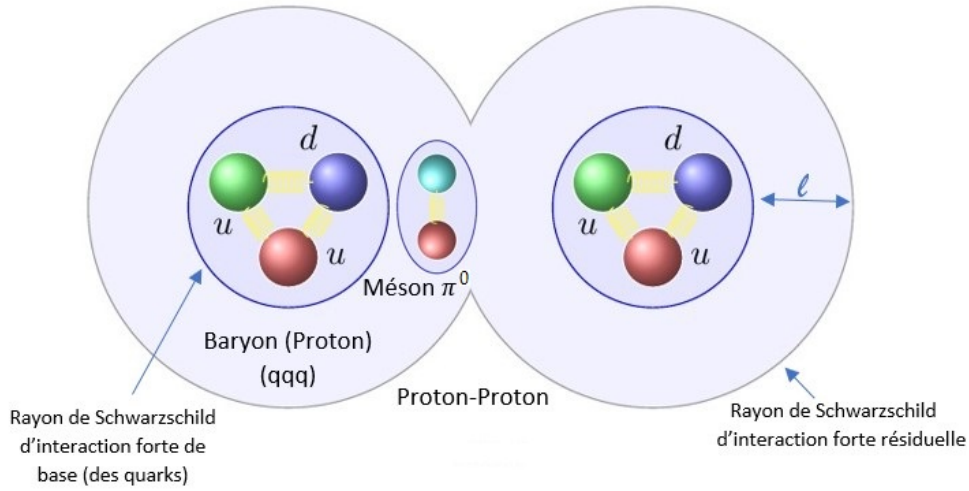


Figure 3.4 – Interaction proton-proton avec le méson π^0 comme porteur de l'interaction forte résiduelle.

d'un pion neutre. On doit calculer la distance l , puis $2l$, qui correspond à la distance de séparation entre les deux protons [voir la figure (3.4)], et la comparer par la suite au rayon du méson en question pour voir s'il est possible que celui-ci puisse être échangé. Commençons d'abord par déterminer le rayon de Schwarzschild de l'interaction forte résiduelle associé à la métrique de Yukawa. Celui-ci est obtenu en cherchant la solution de l'équation :

$$\xi_Y(r_s) = 0 \quad (3.26)$$

où ξ_Y est la fonction de courbure de Yukawa donnée par la relation (3.18). La résolution numérique de cette dernière équation, dans le cas de l'interaction proton-proton échangeant un pion neutre, nous donne la valeur $(r_s)_{P-P} = 1.46478$ fm (pour les masses du proton et du pion neutre, vous référez par exemple à [32]). Le rayon du proton étant $r_p = 0.831$ fm [33], et par conséquent la distance l sera donnée par $l = (r_s)_{P-P} - r_p \simeq 0.63387$ fm et la distance maximale qui sépare les deux protons sera égale à $d = 2l = 1.26756$ fm [voir la figure (3.4)]. On va comparer à présent cette distance avec le rayon de la particule d'échange, à savoir le méson π^0 . Le rayon de ce dernier vaut environ 0.686134 fm [38], donc plus petit que la distance de séparation maximale d entre les deux protons ; ce qui permet de conclure que ce dernier peut être échangé pour véhiculer l'interaction forte résiduelle entre les deux nucléons. Par contre, si on considère le méson ρ^0 , de masse $\mu = 775.26$ MeV [32], on

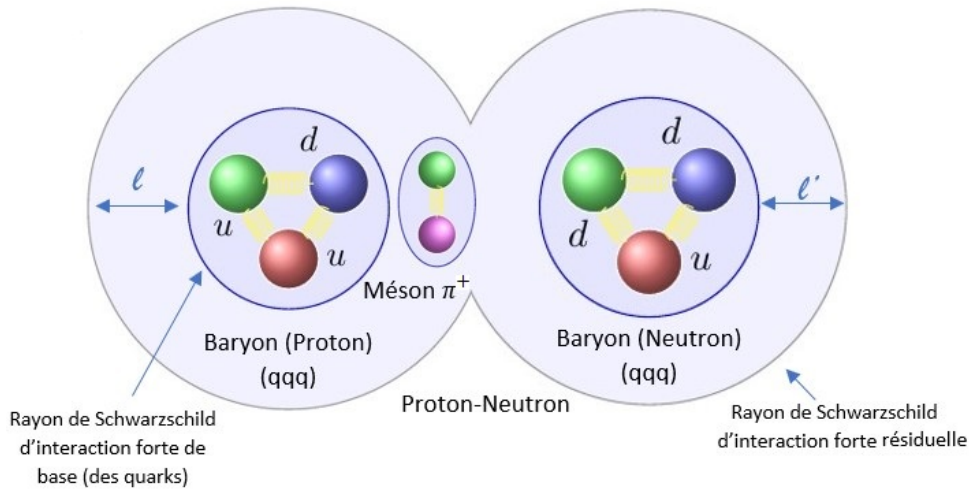


Figure 3.5 – Interaction proton-neutron avec le méson π^+ comme porteur de l'interaction forte résiduelle.

trouvera la valeur $(r_s)_{P-P} \simeq 0.56076$ fm pour le rayon de Schwarzschild, qui est inférieure à la valeur du rayon du proton et par conséquent, il ne peut être échangé car il reste confiné à l'intérieur du proton. Un autre exemple d'interaction entre baryons est l'interaction forte proton-neutron véhiculée par un pion positif (ou négatif). Dans ce cas, on doit calculer l et l' , puis la distance séparant ces deux nucléons qui sera donnée par $d = l' + l$ [voir la figure (3.5)]. On cherchera comme précédemment la solution numérique de l'équation (3.26) dans le cas d'un proton interagissant avec un neutron en échangeant un méson π^+ (ou π^-). On obtient ainsi les valeurs $(r_s)_{P-N} \simeq 1.443879$ fm et $(r_s)_{N-P} \simeq 1.441860$ fm pour les rayons de Schwarzschild associés à l'interaction forte résiduelle proton-neutron et neutron-proton véhiculés par un méson π^+ (ou π^-) respectivement (pour les masses du neutron et du pion chargé, vous référez toujours à [32])). Le rayon du neutron, quant à lui, correspond au rayon de Schwarzschild associé à l'interaction forte de base entre les quarks, i.e. $r_n = \alpha_s/m_q c^2 = 0.82020$ fm avec $m_q \simeq 380$ MeV et $\alpha_s = 1.58$. Par conséquent, $l = (r_s)_{P-N} - r_p \simeq 0.612879$ fm et $l' = (r_s)_{N-P} - r_n \simeq 0.621660$ fm, et la distance maximale qui sépare les deux nucléons sera égale à $d = l' + l = 1.234549$ fm. Si on compare maintenant entre cette distance et le rayon du pion chargé, qui est d'environ 0.67082 fm, on voit bien que ce dernier est plus petit que cette distance et, par conséquent, il peut être utilisé comme médiateur de l'interaction forte entre les deux nucléons. La table (3.2) est un récapitulatif des valeurs que peut prendre la distance de séparation maximale entre les différents nucléons interagissant mutuellement en échangeant différents types de mésons.

Type d'interaction	μ	r_π	l, l'	d
N- π^0 -N	134.977	0.686	$l = l' = 0.643$	1.286
P- π^0 -N	134.977	0.686	$l=0.634, l'=0.643$	1.277
P- π^0 -P	134.977	0.686	$l = l' = 0.634$	1.268
P- π^\pm -N	139.571	0.671	$l=0.613, l'=0.622$	1.235

Table 3.2 – Distance de séparation maximale d'interaction inter-nucléons obtenue par la relation (3.18) pour différents types de mésons échangés, avec $g^2 = 13.4$, $r_p = 0.831$, $r_n = 0.820$, $m_p = 938.272$ et $m_n = 939.565$ (les distances sont exprimées en fm et les masses en MeV).

On remarque que la distance de séparation maximale est inversement proportionnelle à la masse du porteur de l'interaction. En effet, plus la particule échangée entre les deux nucléons est massive, plus courte sera la portée de l'interaction et par conséquent, plus petite sera la distance qui les sépare. On remarque aussi que la distance de séparation entre deux protons est légèrement plus petite que celle entre deux neutrons échangeant le même type de méson, en l'occurrence le pion neutre. Cela peut être expliqué par la légère différence observée, d'une part, dans leurs rayons qui interviennent directement dans le calcul de la distance de séparation, et, d'autre part, dans leurs masses qui interviennent dans le calcul de la portée de l'interaction. En effet, si on considère uniquement la différence entre les rayons des deux nucléons, qui vaut $|\Delta r| \simeq 0.011$ fm, et en la comparant à la différence entre les deux distances de séparation respectives, on trouve que $|\Delta d| = 0.018$ fm $\approx 2|\Delta r|$. Par conséquent, on peut conclure que la force nucléaire est pratiquement indépendante de la nature des nucléons (neutron ou proton) et sa portée dépend essentiellement de la masse du porteur de l'interaction. La figure (3.6) est une esquisse du profil radial du potentiel nucléaire, en comparaison avec le cas coulombien, en terme de la distance de séparation entre nucléons. Sur celle-ci, on observe que la force nucléaire dans sa composante centrale (radiale) est de courte portée; elle est répulsive à très faibles distances, mais attractive sur les longues distances. Elle devient intensément attractive autour de la distance radiale inter-nucléons $d \approx 1.3$ fm. Au voisinage de cette distance typique, la force nucléaire est plus intense que la force coulombienne, ce qui permet de vaincre la répulsion entre protons. Au-delà de cette distance, elle décroît exponentiellement vers zéro, pour s'estomper complètement quand les nucléons sont séparés de plus de 2.5 fm. Dans cette région, elle peut être simplement décrite par l'échange d'un pion. À l'inverse, à

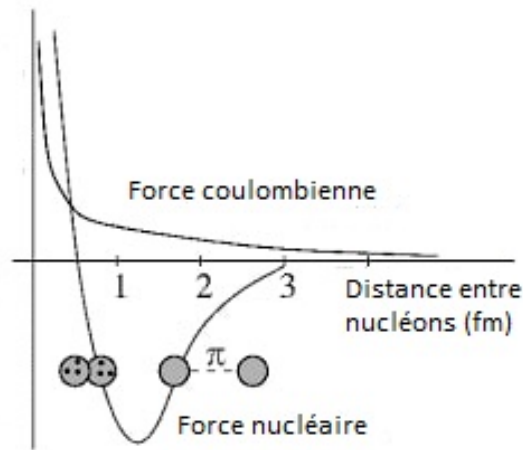


Figure 3.6 – Exemple de profil radial pour un potentiel central associé à l'interaction nucléaire.

des distances inférieures à environ 0.7 fm, l'interaction devient fortement répulsive. Cette composante répulsive est responsable de la taille physique des noyaux et permet d'expliquer les propriétés de saturation de la densité nucléaire par la notion de coeur dur, puisque les nucléons ne peuvent pas se rapprocher plus que la force le permet. Entre ces deux régions (i.e. $0.7 \lesssim d \lesssim 1.5$ fm), la description de l'interaction fait appel, en terme de théorie quantique des champs, à l'échange de plusieurs mésons pseudo-scalaires (π) ou vectoriels (ρ , ω , σ). Comparons à présent nos résultats obtenus précédemment avec ceux représentés sur la figure (3.6). On peut constater que, dans notre cas, le pion peut être échangé pour véhiculer l'interaction forte inter-nucléons dans un intervalle situé entre la distance radiale minimale de séparation entre deux nucléons, qui correspond à l'horizon des événements associé à un nucléon, i.e. $r_s(n) \simeq r_s(p) \simeq 1.46$ fm, et la distance radiale maximale qui les sépare, i.e. $d_{max} = 2r_s \approx 2.9$ fm. On voit bien que nos résultats sont en parfait accord avec les données expérimentales selon lesquelles l'interaction forte résiduelle à des longues distances radiales inter-nucléons (i.e. $1.46 \lesssim d \lesssim 2.9$ fm) peut être décrite par l'échange d'un seul méson pseudo-scalaire (π). La table (3.3), ci-après, est un tableau comparatif montrant la portée de l'interaction forte, ainsi que la distance de séparation maximale inter-nucléons, pour différentes types d'interaction mutuelle nucléon-nucléon calculées en utilisant les relations (3.1), (3.18) et (3.20). On peut voir que nos résultats, obtenus par la relation (3.18), sont les plus proches de l'expérience (noter que la longueur d'onde de Compton réduite du pion est $\lambda_\pi = \hbar/\mu c \simeq 1.463$ fm) et confirment bien l'hypothèse de

Type d'interaction	R (3.1)	r_s (3.18)	r_s (3.20)	d (3.1)	d (3.18)	d (3.20)
N- π^0 -N	1.461	1.463	1.221	1.282	1.286	0.801
P- π^0 -N	1.461	1.464	1.221	1.271	1.277	0.791
P- π^0 -P	1.461	1.465	1.221	1.260	1.268	0.781
P- π^\pm -N	1.413	1.453	1.203	1.175	1.235	0.754

Table 3.3 – Portée de la force nucléaire forte et distance de séparation maximale inter-nucléons selon les relations (3.1), (3.18) et (3.20), avec $g^2 = 13.4$, $r_p = 0.831$, $r_n = 0.820$, $m_p = 938.272$, $m_n = 939.565$, $m_{\pi^0} = 134.977$ et $m_{\pi^\pm} = 139.571$ (les distances sont exprimées en fm et les masses en MeV).

Yukawa énoncée au début de cette section, à savoir que la portée de l'interaction forte résiduelle est inversement proportionnelle à la masse du porteur de l'interaction.

3.3 Interaction forte de base et l'approche de C.C. Barros

Dans cette section, on cherchera à déterminer le rayon de confinement des quarks à l'intérieur des hadrons, ainsi que le spectre de l'énergie associée à l'interaction forte de base. Pour cela, on établira d'abord la forme de la fonction de courbure, à partir de celle de Yukawa, pour déduire ensuite le rayon de Schwarzschild associé à l'interaction forte de base. Ce dernier nous permettra d'appréhender le phénomène de confinement des quarks et des gluons, à l'intérieur des hadrons, d'une manière simple et tout à fait nouvelle. Par la suite, on déterminera le spectre d'énergie de l'interaction forte de base en résolvant les équations radiales de Dirac pour la fonction de courbure en question. Enfin, on utilisera ce même spectre pour donner une description de quelques hadrons en évaluant leurs masses et leurs rayons, tout en les comparant avec les résultats expérimentaux.

3.3.1 Confinement des quarks et rayon de Schwarzschild

Pour déterminer, à partir de la métrique de Yukawa associée à l'interaction forte résiduelle, la forme de la métrique dans le cas de l'interaction forte de base entre les quarks, il suffit de tendre la masse de la particule d'échange vers zéro (i.e. $\mu \rightarrow 0$). Ce qui donne :

$$ds^2 = \xi_q c^2 dt^2 - \xi_q^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (3.27)$$

avec

$$\xi_q(r) = \left(1 - \frac{\alpha_s}{m_q c^2 r}\right)^2 \quad (3.28)$$

où m_q est la masse du quark. On remarque ici que, à l'échelle des quarks, le potentiel de confinement varie, comme dans le cas coulombien, en $1/r$. Pour donner une interprétation géométrique au phénomène de confinement des quarks à l'intérieur des hadrons, intéressons nous au rayon de Schwarzschild r_s associé à l'interaction forte de base. Ce dernier est obtenu en annulant la fonction de courbure (3.28), i.e. $\xi_q(r_s) = 0$. Ce qui nous donne :

$$r_s = \frac{\alpha_s}{m_q c^2} \quad (3.29)$$

Dans le cas d'un quark, à l'intérieur d'un nucléon (proton ou neutron), le rayon de Schwarzschild qui lui associé est d'environ 0.830583 fm, qui est du même ordre que le rayon du nucléon [33, 34]; ce qui n'est pas négligeable devant les dimensions de notre système (noter que la taille d'un quark est inférieure à 10^{-18} m). Comme, classiquement, l'horizon des événements décrit une frontière dans une région de l'espace-temps en deçà de laquelle rien ne peut s'échapper, alors, de la même manière, le rayon de Schwarzschild associé à l'interaction forte entre quarks délimite une surface, au sein des hadrons, à l'intérieur de laquelle les quarks restent piégés, et dont le rayon correspond approximativement au rayon du nucléon. Ainsi, dans cette approche, le phénomène de confinement apparaît comme une propriété intrinsèque de l'espace-temps lorsque des interactions, avec de grandes constantes de couplage, sont considérées. Il faut noter que dans le cas où tout le contenu en quarks d'un hadron est situé à l'intérieur de l'horizon des événements, alors la description classique d'un tel système prévoit l'effondrement de toute la matière dans la singularité située à l'origine ($r = 0$). Cependant, comme nous avons affaire à un système quantique, le principe d'incertitude empêchera tout effondrement. Une conséquence intéressante de cette approche est qu'il est formellement impossible à un quark confinée à l'intérieur d'un hadron d'atteindre la surface $r = r_s$, vu que la fonction d'onde qui lui est associée s'estompe complètement en ce point. En effet, si on résout les équations différentielles radiales (2.67a)-(2.67b), pour la fonction de courbure en question, au point $r = r_s$, on

trouvera :

$$0 = EG(r_s) \quad (3.30a)$$

$$0 = EF(r_s) \quad (3.30b)$$

et, comme $E \neq 0$, on aura :

$$\Psi(r_s) = \begin{pmatrix} F(r_s)\chi_k^\mu \\ iG(r_s)\chi_{-k}^\mu \end{pmatrix} = 0 \quad (3.31)$$

On observe alors une discontinuité de la fonction d'onde à la surface de Schwarzschild $r = r_s$, divisant, par conséquent, l'espace en deux régions complètement déconnectées. Cela implique que les quarks restent toujours piégés à l'intérieur des hadrons et ne peuvent en aucun cas traverser l'horizon des événements.

On vient de voir, dans le précédent paragraphe, que les quarks restent toujours confinés à l'intérieur des hadrons et ne peuvent plus s'échapper. Qu'en est-il des gluons ? Seront-ils toujours piégés, comme les quarks, à l'intérieur des hadrons ? Les gluons sont des particules bosoniques, de spin 1 et de masse nulle, mais portant une charge de couleur. Ils sont décrit par un champ vectoriel A_μ^a ($\mu = 0, \dots, 3$), où a désigne la charge de couleur, obéissant à l'équation de Klein-Gordon généralisée (2.49) pour la fonction de courbure ξ_q :

$$-\frac{\hbar^2}{\xi_q^2} \frac{\partial^2 A_\mu^a}{\partial t^2} = -\hbar^2 c^2 \left[\frac{\sqrt{\xi_q}}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sqrt{\xi_q} \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\vec{L}^2}{r^2} \right] A_\mu^a \quad (3.32)$$

qui peut être mise sous la forme suivante :

$$\frac{1}{r^2} \sqrt{\xi_q} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sqrt{\xi_q} \frac{\partial}{\partial r} \right) A_\mu^a + \left(\frac{E^2}{\hbar^2 c^2} - \frac{\vec{L}^2 \xi_q}{r^2} \right) A_\mu^a = 0 \quad (3.33)$$

Sur la surface de Schwarzschild, on a $\xi_q(r_s) = 0$ et il vient

$$\frac{E^2}{\hbar^2 c^2} A_\mu^a(r_s) = 0 \implies A_\mu^a(r_s) = 0 \quad (3.34)$$

qui montre que la fonction du champ associée aux gluons présente bien une discontinuité à l'horizon des événements. Ce qui permet de conclure que la source de la force forte de couleur qui est située à l'intérieur de l'horizon des événements, qui soit un quark

ou bien un gluon, sera soumise toujours à l'effet de piégeage indépendamment de sa masse ou de sa charge électrique. Cela suggère également que cette courbure de l'espace-temps, induite par la présence d'un champ fort de couleur, ne sera ressentie que par des particules portant une charge de couleur, en l'occurrence les quarks et les gluons. En d'autres termes, un espace-temps fortement courbé par la présence d'un champ fort de couleur, responsable du confinement des quarks et des gluons à l'intérieur des hadrons, apparaîtra plat pour toutes autres particules ne portant pas de charge de couleur. Cette propriété inhérente à l'espace-temps à l'échelle des quarks permet de se rendre compte facilement, par exemple, de l'émission radiative spontanée d'un quark excité au sein d'un nucléon, i.e. $q^* \rightarrow q\gamma$. En effet, le quark désexcité reste toujours confiné à l'intérieur de l'horizon des événements, tant dès que le photon émis s'échappe à l'extérieur car, vu par lui, l'espace-temps est toujours plat. En conclusion, on peut dire que cette nouvelle approche permet d'appréhender le phénomène de confinement des quarks et des gluons, au sein des hadrons, d'une manière simple et élégante. En effet, à l'intérieur des hadrons, ces derniers interagissent entre eux par le biais d'un champ de couleur fort qui agit directement sur la structure de l'espace-temps. En conséquence, l'espace-temps est divisé en deux parties qui ne communiquent pas et qui sont séparées par un horizon des événements à l'intérieur duquel les quarks et les gluons resteront piégés. Noter que les potentiels contenant des termes dépendants du spin, ou de d'autres composantes non centrales, n'ont pas été pris en compte dans cette présente étude. Cependant, en première approximation, ces termes peuvent être considérés comme des corrections au potentiel central. Mais même si l'on considère ces termes, avec une autre métrique, comme par exemple une métrique à symétrie axiale, la surface de piégeage existerait toujours. En effet, cette surface de confinement n'est pas une caractéristique exclusive du potentiel coulombien, elle peut apparaître pour tout potentiel attractif qui satisfait la condition $V(r_s) = -mc^2$. Il faut noter aussi que la solution présentée dans la section §2.4 du chapitre précédent dans le cas coulombien, n'est plus valable à la surface de Schwarzschild $r = r_s$. Cependant, une solution des équations radiales de Dirac (2.75a)-(2.75b) au voisinage de l'horizon des événements, peut être obtenue par un développement en série de puissances similaire aux

équations (2.78a)-(2.78b), mais en remplaçant ρ par $\rho - \alpha_s \beta / m_q$,

$$F(\rho) = \rho^s \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\rho - \frac{\alpha_s \beta}{m_q} \right)^n e^{-\rho} \quad (3.35)$$

$$G(\rho) = \rho^s \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\rho - \frac{\alpha_s \beta}{m_q} \right)^n e^{-\rho} \quad (3.36)$$

Dans ce cas, on trouve qu'au voisinage de l'horizon des événements, la seule valeur d'énergie possible est $E = 0$. Les autres conditions d'existence d'une solution sont $k = 0$ et $s = -1 - \alpha_s$. Celles-ci correspondent à une solution divergente au point $r = r_s$. Si cette dernière est à écarter, la solution triviale, $\Psi(r_s) = 0$, doit être considérée, et qui peut être interprétée comme une condition aux limites à $r = r_s$.

3.3.2 Spectre d'énergie de l'interaction forte de base

À l'intérieur de l'horizon des événements, les quarks peuvent être décrits par des solutions de type (2.78a)-(2.78b) et leur spectre d'énergie, à l'intérieur des hadrons, peut être directement déduit de celui de l'électron (2.89), au sein de l'atome d'hydrogène, obtenu précédemment dans le cadre de l'approche de C.C. Barros appliquée au potentiel de Coulomb, en remplaçant la constante de structure fine α et la masse de l'électron m_e respectivement par la constante de couplage propre à l'interaction forte α_s et la masse du quark m_q . On aura ainsi :

$$E_n = m_q c^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{n^2}{8\alpha_s^2} + \frac{n}{4\alpha_s} \sqrt{\frac{n^2}{4\alpha_s^2} + 2} \right]^{1/2}, \quad \text{avec } n = 1, 2, \dots \quad (3.37)$$

La masse d'un hadron (exprimée en MeV), constitué de plusieurs quarks, peut être évaluée, comme dans le cas d'un noyau constitué de plusieurs nucléons, par la relation suivante :

$$M_{\text{hadron}} = \sum_{i=1}^l E_{1,i}(m_q) \quad (3.38)$$

où l correspond au nombre de quarks contenu dans l'hadron et m_q représente la masse effective du quark. D'après certaines références [35, 36], la masse effective d'un quark à l'intérieur d'un nucléon est d'environ 380 MeV. Cette masse est largement supérieure à la masse « nue » d'un quark u ou d , qui est estimée à quelques électronvolts (2 à 5 eV).

Cette différence est due au fait que la masse effective d'un quark tient compte, selon la relation d'équivalence masse-énergie d'Einstein, de l'énergie d'interaction du champ fort auto-cohérent environnant qui l'entoure. Ainsi, pour un nucléon constitué de trois quarks, la relation (3.38) prédit une masse d'environ 938.32 MeV (avec $\alpha_s = 1.6$) qui, comme on peut le voir, est très proche de la masse expérimentale d'un proton, qui est d'environ 938.27 MeV.

3.3.3 Résultats numériques et discussion

Dans cette partie, on utilisera les résultats obtenus dans le cadre de cette nouvelle approche pour donner une description de certains hadrons (baryons et mésons). Considérons, par exemple, le méson Υ , formé d'un quark b et d'un anti-quark \bar{b} . En utilisant les relations (3.37) et (3.38), avec une masse effective du quark $m_b = 5.5$ GeV et une constante de couplage $\alpha_s = 1.05$, on trouve pour le spectre d'énergie du méson Υ les valeurs suivantes : $E_1 = 9.47479$ GeV ($m_{\Upsilon(1S)} = 9.46030$ GeV), $E_2 = 10.1914$ GeV ($m_{\Upsilon(2S)} = 10.02326$ GeV), $E_3 = 10.5246$ GeV ($m_{\Upsilon(3S)} = 10.5794$ GeV), $E_7 = 10.8857$ GeV ($m_{\Upsilon(10860)} = 10.8899$ GeV), $E_{\max} = 10.9928$ GeV¹ ($m_{\Upsilon(11020)} = 10.9929$ GeV). On voit bien que ces résultats sont très proches des résultats expérimentaux rapportés entre parenthèses [32]. La table (3.4) nous donne une estimation des valeurs du paramètre de couplage (α_s) et des masses effectives des quarks (m_q) utilisées pour obtenir les masses (M) de quelques hadrons, ainsi que les rayons de Schwarzschild (r_s) associés aux quarks qui les forment. Leurs masses M_{exp} [32] et leurs rayons r_{exp} [33, 34, 37]-[40] mesurés expérimentalement sont également rapportés. Sur celle-ci, on observe que les résultats théoriques prédits pour les masses des hadrons (baryons et mésons) sont très proches des résultats expérimentaux avec parfois une précision de l'ordre d'un 1/100000ème de GeV. On constate aussi que le rayon de confinement des quarks à l'intérieur des hadrons correspond approximativement au rayon de ces derniers. En effet, l'écart par rapport à l'expérience est de l'ordre de 0.291% à 1.09% pour les baryons et de 0.53% à 0.6% pour les mésons, qui sont des résultats plus qu'acceptables pour une telle simpliste et heuristique approche. Par ailleurs, on remarque que, dans le cas des baryons, les valeurs de la constante de couplage qui donnent des bons résultats sont comprises entre 1.5 et 2 (qui sont des valeurs raisonnables pour décrire

1. E_{\max} correspond à l'énergie de l'état excité $N = 29$.

Hadrons	Symbole	$m_q(\text{GeV})$	α_s	$M(\text{GeV})$	$M_{exp}(\text{GeV})$	$r_s(\text{fm})$	$r_{exp}(\text{fm})$
Proton	$p (uud)$	0.380	1.6	0.93832	0.93827	0.83058	0.831
Sigma	$\Sigma^- (dds)$	0.495	1.97	1.19736	1.19745	0.78507	0.79372
Xi	$\Xi^- (dss)$	0.550	2	1.32850	1.32171	0.717322	0.72111
Pion	$\pi^- (d\bar{u})$	0.071	0.24	0.13861	0.13957	0.66681	0.67082
Kaon	$K^- (s\bar{u})$	0.280	0.87	0.49252	0.49368	0.61293	0.61644
Rho	$\rho^- (u\bar{d})$	0.475	1.8	0.77597	0.77526	0.74439	0.74833
J/Psi	$J/\Psi (c\bar{c})$	1.79	1.00	3.10037	3.09690	0.11020	-
Upsilon	$\Upsilon (b\bar{b})$	5.50	1.38	9.47479	9.46030	0.04950	-

Table 3.4 – Masses de quelques hadrons (baryons et mésons), obtenus à l'aide de la relation (3.38), en comparaison avec leurs valeurs expérimentales.

l'interaction des quarks à l'intérieur des baryons), tant dès que, dans le cas des mésons, celles-ci sont comprises entre 0.2 et 1.4, à l'exception faite du méson ρ qui possède une constante de couplage un peu plus élevée ($\alpha_s = 1.8$). On remarque aussi que les masses des baryons sont proportionnelles à la valeur de la constante de couplage, alors que leurs rayons sont inversement proportionnels à celle-ci. En effet, la masse d'un baryon dépend directement de la masse effective des quarks qui le composent. Or, cette même masse tient compte déjà de l'énergie d'interaction du champ gluonique environnant qui entoure les quarks à l'intérieur d'un baryon. Par conséquent, plus la masse effective des quarks est importante, plus fort sera le couplage entre eux à l'intérieur d'un baryon et plus celui-ci aura de l'inertie. D'autre part, plus la masse effective des quarks à l'intérieur d'un baryon est importante, plus petit sera le rayon de confinement qui leur est associé, donc plus petit sera le rayon du baryon en question. On observe également, dans le cas des mésons, le même comportement de la constante de couplage en rapport avec leurs masses et leurs rayons, à l'exception du méson ρ qui déroge un petit peu à cette règle. Cela peut être attribué au choix d'une métrique à symétrie sphérique dans la description de l'ensemble des hadrons (baryons et mésons), alors qu'un autre choix de symétrie (par exemple une métrique à symétrie elliptique) peut se révéler plus fructueux et améliorera probablement la description de certains mésons.

Conclusion

L'objet principal de ce présent mémoire a été l'étude de l'interactions forte entre hadrons dans le cadre de l'approche de C.C. Barros, qui consiste à étendre les principes de la relativité générale aux autres types d'interaction non gravitationnelle en postulant que celles-ci peuvent également être considérées comme étant des manifestations de la courbure de l'espace-temps, courbure elle-même produite par la distribution de l'énergie des différents types de potentiel non gravitationnel qui leur sont associés. En particulier, cette approche semblait être remarquablement vérifiée dans le cas l'interaction coulombienne s'exerçant entre l'électron et le proton de l'atome d'hydrogène.

Le premier chapitre est consacré au rappel des idées de base qui ont permis à Einstein d'élaborer sa théorie de la relativité générale, une théorie relativiste de la gravitation fondée sur des concepts géométriques inhérents à la structure de l'espace et du temps radicalement différents de ceux de la gravitation newtonienne.

Le deuxième chapitre est dédié à la présentation sommaire de l'approche de C.C. Barros, selon laquelle les interactions non gravitationnelles peuvent, comme ce fut le cas pour l'interaction gravitationnelle, se manifester à travers la structure de l'espace-temps et, par conséquent, être réinterprétées d'une manière purement géométrique. L'idée fondamentale consiste donc à remplacer l'espace-temps plat muni d'un champ non gravitationnel, supposé statique et isotrope, par un espace-temps courbe exempt de tout champ. En raison de la symétrie sphérique du champ central considéré, une métrique statique de type de Schwarzschild est adoptée et des équations d'ondes quantiques pour des particules de spin 0 et 1/2 sont établies. En guise d'application, le spectre de l'atome d'hydrogène est calculé et une comparaison avec les résultats obtenus dans le cadre de la mécanique quantique relativiste habituelle, ainsi que ceux de l'expérience, est effectuée. Les résultats obtenus par l'approche de C.C. Barros, dans le cas de l'atome d'hydrogène, sont en bon accord avec ceux prédits par la théorie de Dirac et ceux de l'expérience. De plus,

la comparaison de ces résultats avec les données expérimentales relatives au deutérium montre une amélioration significative de l'accord et les écarts sont presque cinq fois plus petits que ceux obtenus avec le Dirac théorie. Enfin, l'analogie des équations d'Einstein pour l'interaction électromagnétique sont établies, où on a montré que la constante de proportionnalité fait intervenir, en plus de la constante de couplage propre à l'interaction électromagnétique, la masse de la particule sujette à l'interaction.

Le troisième et dernier chapitre est consacré à l'étude de l'interaction forte, régissant les particules hadroniques, en termes de cette nouvelle approche. À cet effet, une solution statique et à symétrie sphérique des équations d'Einstein propre à l'interaction forte résiduelle en présence d'une densité d'énergie, associée au potentiel fort de Yukawa, est obtenue. Par le biais de celle-ci, le spectre d'énergie de l'interaction forte résiduelle inter-nucléons est calculé et les masses de quelques noyaux atomiques sont estimées. Les résultats ainsi obtenus sont, en grande partie, très proches des données expérimentales. Toutefois, des écarts significatifs entre les valeurs théoriques et expérimentales sont observés, notamment dans le cas du noyau de Lithium 6. Cela peut être attribué, d'une part, à l'emploi d'approximations dans le calcul du spectre d'énergie de l'interaction forte résiduelle inter-nucléons et, d'autre part, au fait qu'on a considéré un potentiel à symétrie sphérique dans la modélisation de cette interaction alors que, en réalité, celle-ci possède d'autres composantes non centrales ou tensorielles. Par la suite, deux grandeurs caractérisant l'interaction forte résiduelle sont évaluées : la distance de séparation maximale entre deux nucléons à l'intérieur d'un noyau et le rayon de Schwarzschild pour différents types de porteurs de l'interaction. La première sert à déterminer lequel parmi ces mésons médiateurs de l'interaction est susceptible d'être échangé et la deuxième sert à estimer la portée de l'interaction. Nos résultats se sont révélés en parfait accord avec les données expérimentales, qui estiment que l'interaction forte à des longues distances radiales inter-nucléons peut être décrite par l'échange d'un seul méson pseudo-scalaire et que sa portée est inversement proportionnelle à la masse du porteur de l'interaction et correspond exactement à la longueur de Compton réduite qui lui est associée. Comme prochaine étape, on s'est intéressé à l'interaction forte de base responsable du confinement de couleur à l'intérieur des hadrons où une interprétation géométrique de ce phénomène est envisagée. La forme de la métrique induite par la présence d'un potentiel fort de confinement, généré par les charges de couleur, est déduite

directement de celle associée à l'interaction forte résiduelle en considérant seulement la partie de courte portée dans le potentiel nucléaire de Yukawa. En se basant sur cette dernière, les rayons de confinement associés à quelques hadrons (baryons et mésons) sont évalués. Nos résultats montrent que le rayon de confinement d'une charge de couleur à l'intérieur d'un hadron correspond approximativement au rayon de l'hadron en question. Ce qui permet d'interpréter le phénomène de confinement des charges de couleur à l'intérieur des hadrons d'une manière géométrique simple et élégante. En effet, comme dans le cas de la gravitation, le rayon de Schwarzschild délimite une région de l'espace-temps à l'intérieur de laquelle rien ne peut s'échapper, le rayon de confinement associé à l'interaction forte entre quarks délimite une surface, au sein des hadrons, à l'intérieur de laquelle les charges de couleur restent piégés, et dont le rayon correspond approximativement au rayon des hadrons. Ainsi, dans cette approche, le phénomène de confinement apparaît comme une propriété intrinsèque de l'espace-temps lorsque des interactions avec de grandes constantes de couplage sont considérées. De plus, la résolution des équations radiales de Dirac, au voisinage de l'horizon des événements, pour une particule portant une charge de couleur (quark ou gluon), évoluant dans un espace-temps courbé par la présence d'un champ fort de couleur, montre que la fonction d'onde qui lui est associée présente une discontinuité et s'estompe complètement sur cette surface. En conséquence, l'espace-temps est divisé en deux régions complètement disconnectées séparées par une surface à l'intérieur de laquelle les quarks et les gluons resteront piégés. Cela permet de conclure que la source de la force forte de couleur qui est située à l'intérieur de l'horizon des événements, qui soit un quark ou bien un gluon, sera soumise toujours à l'effet de piégeage indépendamment de sa masse ou de sa charge électrique. Cela suggère également que cette courbure de l'espace-temps, induite par la présence d'un champ fort de couleur, ne sera ressentie que par des particules portant une charge de couleur, en l'occurrence les quarks et les gluons. Par la suite, en raison de la ressemblance entre le potentiel fort de confinement et celui de Coulomb (tous deux varient en $1/r$), le spectre d'énergie de l'interaction forte de base est déduit directement de celui de l'atome d'hydrogène et à partir duquel, les masses des quelques particules hadroniques sont calculées. Nos résultats théoriques obtenus pour les masses des hadrons (baryons et mésons) sont en bon accord avec ceux de l'expérience, avec parfois une précision de l'ordre d'un millionième de GeV. Par ailleurs, les tailles de

quelques hadrons sont estimées en calculant le rayon de confinement associés aux quarks les composant. Nos résultats montrent, une fois encore, une bonne concordance avec les données expérimentales et les écarts par rapport à celles-ci sont de l'ordre de 0.291% à 1.09% pour les baryons et de 0.53% à 0.6% pour les mésons. Ainsi, notre hypothèse du départ, à savoir que les potentiels non gravitationnels peuvent agir directement sur la trame spatio-temporelle en modifiant sa structure, permet, d'une part, d'expliquer d'une manière simple et élégante le phénomène de confinement de couleur au sein des hadrons et, d'autre part, de donner, en conséquence, une estimation assez précise de leurs tailles.

A

Système de coordonnées orthogonales et opérateurs différentiels

Soit un système de coordonnées orthogonales (x^1, x^2, x^3) caractérisé par un tenseur métrique diagonal (g_{ij}) de la forme :

$$g_{ij} = h_i^2 \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (\text{A.1})$$

$$g^{ij} = h_i^{-2} \delta^{ij} \quad (\text{A.2})$$

avec les h_i sont fonction des coordonnées et δ_{ij} est le symbole de Kronecker. Le carré de l'intervalle infinitésimal d'espace-temps ds^2 peut s'exprimer en fonction des h_i de la sorte :

$$\begin{aligned} ds^2 &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 g_{ij} dx^i dx^j \\ &= h_1^2 (dx^1)^2 + h_2^2 (dx^2)^2 + h_3^2 (dx^3)^2 \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

et l'élément de volume invariant est donné par :

$$dV = \sqrt{|g|} dx^1 dx^2 dx^3 = h_1 h_2 h_3 dx^1 dx^2 dx^3 \quad (\text{A.4})$$

Le produit scalaire de deux vecteurs \vec{V} et \vec{U} est donné par :

$$\vec{V} \cdot \vec{U} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 g_{ij} V^i U^j = h_1^2 V^1 U^1 + h_2^2 V^2 U^2 + h_3^2 V^3 U^3$$

Ce dernier peut être réécrit de la manière habituelle, en introduisant « les coordonnées ordinaires » d'un vecteur \bar{V} définies par [29] :

$$\bar{V}_i \equiv h_i V^i = h_i^{-1} V_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.5})$$

On aura ainsi :

$$\vec{V} \cdot \vec{U} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \bar{V}_i \bar{U}_j = \bar{V}_1 \bar{U}_1 + \bar{V}_2 \bar{U}_2 + \bar{V}_3 \bar{U}_3 \quad (\text{A.6})$$

Dans ce système de coordonnées, il est facile de montrer que les opérateurs différentiels s'expriment de la sorte [29] :

— Les composantes du gradient d'un scalaire :

$$(\vec{\nabla} S)_i = h_i^{-1} \frac{\partial S}{\partial x^i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{A.7})$$

— Les composantes du rotationnel d'un vecteur :

$$(\vec{\nabla} \times \vec{V})_i = h_i \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{1}{\sqrt{|g|}} \epsilon^{ijk} \frac{\partial}{\partial x^j} (h_k \bar{V}_j) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{A.8})$$

— La divergence covariante d'un vecteur :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{V} &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{|g|} h_i^{-1} \bar{V}_i) \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} (h_2 h_3 \bar{V}_1) + \frac{\partial}{\partial x^2} (h_1 h_3 \bar{V}_2) + \frac{\partial}{\partial x^3} (h_1 h_2 \bar{V}_3) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

— Le laplacien d'un scalaire :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}^2 S &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} S) \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial S}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial S}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial S}{\partial x^3} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

B

États liés d'un électron relativiste dans un potentiel coulombien

L'équation de Dirac, relative à un électron libre évoluant dans espace-temps plat, s'écrit dans le cas stationnaire [31] :

$$\left[c \sum_{i=1}^3 \alpha_i p_i + \beta mc^2 \right] \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r}) \quad (\text{B.1})$$

avec $p_i \equiv -i\hbar\partial_i$ et (α_i, β) sont des matrices hermitiennes (4×4) vérifiant les relations suivantes :

$$(\alpha_i)^2 = 1, \quad \beta^2 = 1 \quad (\text{B.2a})$$

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 0 \quad (i \neq j) \quad (\text{B.2b})$$

$$\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0 \quad (\text{B.2c})$$

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{A}) (\vec{\alpha} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + i \vec{\sigma} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \quad (\text{B.2d})$$

En présence d'un champ électromagnétique externe (φ, \vec{A}) , l'équation de Dirac est obtenue, à partir (B.1), en effectuant la substitution :

$$E \rightarrow E - e\varphi, \quad \vec{p} \rightarrow \vec{p} - e\vec{A} \quad (\text{B.3})$$

On trouve ainsi :

$$\left[c \sum_{i=1}^3 \alpha_i \left(p_i - \frac{e}{c} A_i \right) + \beta mc^2 \right] \psi(\vec{r}) = (E - e\varphi) \psi(\vec{r}) \quad (\text{B.4})$$

soit encore :

$$\left[c \sum_{i=1}^3 \alpha_i \left(-i\hbar \partial_i - \frac{e}{c} A_i \right) + \beta m c^2 - (E - e\varphi) \right] \psi(\vec{r}) = 0 \quad (\text{B.5})$$

Dans le cas de l'atome d'hydrogène, l'électron est sujet uniquement au potentiel central de Coulomb ($A_i = 0$) et l'équation (B.5) se mis, en posant $V = e\varphi$, sous la forme :

$$\left[-i\hbar c \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m c^2 - (E - V) \right] \psi(\vec{r}) = 0 \quad (\text{B.6})$$

où le terme cinétique $\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}$ peut être, en utilisant les relations (B.2a)-(B.2d), réécrit de la sorte :

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} &= (\vec{\alpha} \cdot \vec{e}_r) \left[(\vec{\alpha} \cdot \vec{e}_r) (\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}) \right] \\ &= \alpha_r \left[\vec{e}_r \cdot \vec{\nabla} + i \vec{\sigma} \cdot (\vec{e}_r \times \vec{\nabla}) \right] \\ &= \alpha_r \left[\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{\hbar} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{l}}{r} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

où $\vec{l} = -i\hbar \vec{r} \times \vec{\nabla}$ représente le moment cinétique orbital et $\alpha_r \equiv \alpha_1$. En substituant cette dernière expression dans (B.6), il vient

$$\left[-i\hbar c \alpha_1 \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{\hbar} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{l}}{r} \right) + \beta m c^2 - (E - V) \right] \psi(\vec{r}) = 0 \quad (\text{B.8})$$

Introduisons maintenant l'opérateur K défini par :

$$K = \hbar + \vec{\sigma} \cdot \vec{l} \quad (\text{B.9})$$

et vérifiant les équations aux valeurs propres suivantes :

$$K \chi_{\pm k}^\mu = \mp \hbar k \chi_{\pm k}^\mu, \quad \text{avec } k = j + 1/2 \quad (\text{B.10})$$

où $\chi_{\pm k}^\mu$ sont des spineurs sphériques, qui sont des fonctions de moment cinétique total formées par composition d'un spin 1/2 avec des harmoniques sphériques d'ordre l . En substituant maintenant (B.9) dans (B.8), celle-ci se réécrit comme suit :

$$\left[-i c \alpha_1 \left(\hbar \frac{\partial}{\partial r} - \frac{K - \hbar}{r} \right) + \beta m c^2 - (E - V) \right] \psi(\vec{r}) = 0 \quad (\text{B.11})$$

Il convient de chercher une solution $\psi(\vec{r})$ sous la forme suivante :

$$\psi(\vec{r}) = \begin{pmatrix} F(r)\chi_k^\mu \\ iG(r)\chi_{-k}^\mu \end{pmatrix} \quad (\text{B.12})$$

où $F(r)$ et $G(r)$ sont des fonctions arbitraires de r . En rapportant cette solution dans l'équation (B.11), en tenant compte des définitions des matrices (α_1, β) et des équations aux valeurs propres de l'opérateur K , et après quelques manipulations et réarrangements de différents termes, on trouve finalement le système de deux équations différentielles couplées suivant :

$$\begin{cases} \frac{dF(r)}{dr} + (1+k)\frac{F(r)}{r} = \frac{1}{\hbar c} (E - V + mc^2) G(r) & (\text{B.13a}) \\ \frac{dG(r)}{dr} + (1-k)\frac{G(r)}{r} = -\frac{1}{\hbar c} (E - V - mc^2) F(r) & (\text{B.13b}) \end{cases}$$

En remplaçant le potentiel de Coulomb $V(r)$ par son expression, ce dernier système se réécrit :

$$\begin{cases} \frac{dF(r)}{dr} + (1+k)\frac{F(r)}{r} = \frac{1}{\hbar c} (E + mc^2) G(r) + \frac{\gamma}{r} G(r) & (\text{B.14a}) \\ \frac{dG(r)}{dr} + (1-k)\frac{G(r)}{r} = -\frac{1}{\hbar c} (E - mc^2) F(r) - \frac{\gamma}{r} F(r) & (\text{B.14b}) \end{cases}$$

avec $\gamma = \alpha Z$, α étant la constante de structure fine. Comme les fonctions radiales $G(r)$ et $F(r)$ doivent s'annuler à l'infini, alors celles-ci auront la forme suivante :

$$\begin{cases} F(r) = \frac{f(r)}{r} & (\text{B.15a}) \\ G(r) = \frac{g(r)}{r} & (\text{B.15b}) \end{cases}$$

En rapportant ces dernières expressions de F et G dans le système (B.14a)-(B.14b), et après quelques simplifications, il vient

$$\begin{cases} \frac{df(r)}{dr} + k\frac{f(r)}{r} = \frac{1}{\hbar c} (E + mc^2) g(r) + \frac{\gamma}{r} g(r) & (\text{B.16a}) \\ \frac{dg(r)}{dr} - k\frac{g(r)}{r} = -\frac{1}{\hbar c} (E - mc^2) f(r) - \frac{\gamma}{r} f(r) & (\text{B.16b}) \end{cases}$$

L'analyse du comportement des solutions $f(r)$ et $g(r)$ à l'infini, prévoit que ces dernières seront $\propto \exp(-\beta r/\hbar c)$ avec $\beta = \sqrt{m^2 c^4 - E^2} > 0$. En effectuant ainsi le changement de variable $\rho = \beta r/\hbar c$, le système d'équations différentielles couplées (B.16a)-(B.16b) devient :

$$\begin{cases} \frac{df(\rho)}{d\rho} + k \frac{f(\rho)}{\rho} - \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{\gamma}{\rho} \right) g(\rho) = 0 & \text{(B.17a)} \\ \frac{dg(\rho)}{d\rho} - k \frac{g(\rho)}{\rho} - \left(\varepsilon - \frac{\gamma}{\rho} \right) f(\rho) = 0 & \text{(B.17b)} \end{cases}$$

avec

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{mc^2 - E}{mc^2 + E}} \quad \text{(B.18)}$$

Cherchons des solutions en série de puissances de la forme :

$$\begin{cases} f(\rho) = \sum_{n=0}^N a_n \rho^{n+s} e^{-\rho}, & a_0 \neq 0 & \text{(B.19a)} \\ g(\rho) = \sum_{n=0}^N b_n \rho^{n+s} e^{-\rho}, & b_0 \neq 0 & \text{(B.19b)} \end{cases}$$

où s est un paramètre réel à fixer ultérieurement. En substituant ces développements dans les équations (B.17a)-(B.17b), on obtient après quelques manipulations :

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^N \rho^{n-1} [(n+s+k)a_n - \gamma b_n] - \sum_{n=0}^N \rho^n (a_n + \frac{1}{\varepsilon} b_n) = 0 & \text{(B.20a)} \\ \sum_{n=0}^N \rho^{n-1} [(n+s-k)b_n + \gamma a_n] - \sum_{n=0}^N \rho^n (b_n + \varepsilon a_n) = 0 & \text{(B.20b)} \end{cases}$$

Afin de pouvoir connecter les deux série $\sum_{n=0}^N \rho^{n-1}(\dots)$ et $\sum_{n=0}^N \rho^n(\dots)$ dans le système (B.20a)-(B.20b), effectuons le changement suivant :

$$n = n' - 1 \implies n' : 1 \rightarrow N + 1$$

et celui-ci se réécrit, en regroupant les termes de même puissance en ρ , de la sorte :

$$\left\{ \begin{array}{l} (s+k)a_0 - \gamma b_0 - \rho^{N+1}(a_N + \frac{1}{\varepsilon}b_N) + \\ \sum_{n'=1}^N \rho^{n'-1} \left[(n'+s+k)a_{n'} - \gamma b_{n'} - (a_{n'-1} + \frac{1}{\varepsilon}b_{n'-1}) \right] = 0 \quad (\text{B.21a}) \\ (s-k)b_0 + \gamma a_0 - \rho^{N+1}(b_N + \varepsilon a_N) + \\ \sum_{n'=1}^N \rho^{n'-1} [(n'+s-k)b_{n'} + \gamma a_{n'} - (b_{n'-1} + \varepsilon a_{n'-1})] = 0 \quad (\text{B.21b}) \end{array} \right.$$

En égalant entre eux les termes d'ordre successifs, on obtient une série d'équations dont la première fixe le paramètre s et les suivantes permettent de déterminer par récurrence les coefficients a_n et b_n ($n = 0, 1, \dots$). On trouve ainsi pour l'équation en s les deux racines opposées suivantes :

$$s = \pm \sqrt{k^2 - \gamma^2} \quad (\text{B.22})$$

Pour que les solutions f et g remplissent les conditions de régularité à l'origine $f(0) = g(0) = 0$, il faut et suffit que l'on ait $s > 0$, donc la racine positive doit seule être retenue. Par ailleurs, à partir des relations de récurrence on peut déduire, tout calculs faits, les valeurs suivantes pour l'énergie E :

$$E_N = mc^2 \left[1 + \frac{\gamma^2}{(N+s)^2} \right]^{-1/2} \quad (\text{B.23})$$

où N , nombre quantique radial, est le degré des polynômes figurant dans les expressions (B.19). En introduisant le nombre quantique principal $n = N + k = N + j + 1/2$, en remplaçant γ et s par leurs expressions respectives, les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène s'écrivent finalement [31] :

$$E_n = mc^2 \left[1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{(n - (j + 1/2) + \sqrt{(j + 1/2)^2 - \alpha^2 Z^2})^2} \right]^{-1/2} \quad (\text{B.24})$$

où n peut prendre toute valeur entière positive et j toute valeur demi-entière de l'intervalle $(0, n)$.

Bibliographie

- [1] M. Gell-Mann, Phys. Lett. **8**, 214 (1964).
- [2] G. Zweig, CERN Rept. **8182/Th401** (1964).
- [3] R. H. Dalitz, reprinted in Selected Lectures of Hawaii Topical Conf., Vol 1 (eds. S. Pakvasa and S. F. Tuan, World Scientific, Singapore 1982) (1967).
- [4] D. Faiman and A. W. Hendry, Phys. Rev. **173**, 1720 (1968).
- [5] A. D. Rújula, H. Georgi, and S. L. Glashow, Phys. Rev. D **12**, 147 (1975).
- [6] N. Isgur and G. Karl, Phys. Rev. D **18**, 4187 (1978).
- [7] N. Isgur and G. Karl, Phys. Rev. D **19**, 2653 (1979).
- [8] M. V. N. Murthy, J. D. M. Dey, and R. K. Bhaduri, Phys. Rev. D **30**, 152 (1984).
- [9] E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita, K. D. Lane, and T. M. Yan, Phys. Rev. **17**, 3090 (1978).
- [10] E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita, K. D. Lane, and T. M. Yan, Phys. Rev. **21**, 203 (1980).
- [11] E. Eichten and F. Feinberg, Phys. Rev. D **23**, 2724 (1981).
- [12] P. N. Bogolioubov, Ann. Inst. Henri Poincaré **8**, 163 (1967).
- [13] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn, and V. Weisskopf, Phys. Rev. D **9**, 3741 (1974).
- [14] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, and C. B. Thorn, Phys. Rev. D **10**, 2599 (1974).
- [15] P. L. Ferreira, J. A. Helayel, and N. Zagury, Nuovo Cim. **55**, 215 (1980).
- [16] R. Tegen, Ann. Phys. **197**, 439 (1990).
- [17] L. A. Trevisan and L. Tomio, Nucl. Phys. A **689**, 485 (2001).

-
- [18] N. Bogolubov, B. Struminsky, and A. Tavkhelidze, On composite models in the theory of elementary particles, JINR Preprint D-1968, Dubna (1965).
- [19] A. Tavkhelidze, Proc. Seminar on High Energy Physics and Elementary Particles, Trieste, 1965, Vienna IAEA, 1965 , p. 763.
- [20] C. C. Barros, The European Physical Journal C **42**, 119 (2005).
- [21] C. C. Barros, arxiv :physics/0509011, 2005.
- [22] C. C. Barros, The European Physical Journal C **45**, 421 (2005).
- [23] C. C. Barros, Brazilian Journal of Physics **37**, 17 (2007).
- [24] E.ourgoulhon, *Relativité restreinte : Des particules à l'astrophysique*, EDP sciences, 2012.
- [25] H. Andrillat, La théorie de la relativité générale, 1994.
- [26] M. Hobson, G. Efstathiou, and A. N. Lasenby, *Relativité générale*, De Boeck Supérieur, 2009.
- [27] E.ourgoulhon, *Relativité générale*, Année universitaire 2013/2014, Observatoire de Paris, 2014, Lecture.
- [28] L. D. Landau, *The classical theory of fields*, volume 2, Butterworth Heinemann, 1980.
- [29] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology : Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, New York : Wiley, 1972.
- [30] D. Langlois, *Relativité générale : des fondements géométriques aux applications astrophysiques*, Vuibert, 2013.
- [31] W. Greiner et al., *Relativistic quantum mechanics*, volume 3, Springer, 2000.
- [32] K. Nakamura et al., *Particle physics booklet*, Physical Review D, 2018.
- [33] N. Bezginov et al., Science **365**, 1007 (2019).
- [34] W. Xiong et al., Nature **575**, 147 (2019).
- [35] A. C. Eduardo, E. H. Thomas, and G. Frederique, *Relativistic Aspects Of Nuclear Physics, Procs Of The 6th Intl Workshop*, World Scientific, 2001.
- [36] J. Arvieux and B. Pire, Progress in Particle and Nuclear Physics **35**, 299 (1995).
- [37] S. Amendolia et al., Physics Letters B **178**, 435 (1986).

-
- [38] B. Ananthanarayan, I. Caprini, and D. Das, Physical review letters **119**, 132002 (2017).
- [39] I. Eschrich et al., Physics Letters B **522**, 233–239 (2001).
- [40] A. F. Krutov, R. G. Polezhaev, and V. E. Troitsky, Phys. Rev. D **93**, 036007 (2016).

Résumé

L'objectif principal de ce présent mémoire de Master est l'étude de l'interaction forte en termes de la nouvelle approche récemment proposé par C.C. Barros. Comme première étape, les équations d'Einstein décrivant la courbure de l'espace-temps en présence d'une densité d'énergie forte associée au potentiel nucléaire de Yukawa sont écrites et une solution statique et à symétrie sphérique est obtenue. Le spectre d'énergie de l'interaction forte résiduelle inter-nucléons est calculé et les masses de quelques noyaux atomiques sont estimées. Une comparaison avec les données expérimentales montre que nos résultats sont en bon accord avec celles-ci. Par la suite, deux distances caractéristiques de l'interaction forte résiduelle sont évaluées pour différents types de porteurs de l'interaction, à savoir la distance de séparation maximale entre deux nucléons et le rayon de Schwarzschild qui lui est associé. La première nous renseigne sur le type de méson médiateur de l'interaction est susceptible d'être échangé et la deuxième sur la portée de l'interaction. Nos résultats montrent que l'interaction forte à des longues distances radiales inter-nucléons peut être décrite par l'échange d'un seul méson pseudo-scalaire et que sa portée est inversement proportionnelle à sa masse. Comme deuxième étape, la métrique induite par la présence d'un potentiel fort de confinement est déduite et les rayons de confinement associés à quelques hadrons sont évalués. Nos résultats montrent que le rayon de confinement d'une charge de couleur à l'intérieur d'un hadron correspond approximativement au rayon de l'hadron la contenant. Ce qui permet d'interpréter le phénomène de confinement des charges de couleur à l'intérieur des hadrons comme une propriété intrinsèque de l'espace-temps. De plus, le spectre d'énergie d'interaction forte de base est déterminé et les masses, ainsi que les tailles, de quelques particules hadroniques sont estimées. Nos résultats montrent, une fois encore, une bonne concordance avec les données expérimentales.

Abstract

The main purpose of this Master's thesis is the study of the strong interaction in terms of the new approach recently proposed by C.C. Barros. As a first step, the Einstein's equations describing the curvature of space-time in the presence of a strong energy-density associated with the nuclear potential of Yukawa and their solution, supposed to be static and spherically symmetric, have been presented. The energy spectrum of the residual strong interaction inter-nucleons is calculated and the masses of a few atomic nuclei are estimated. A comparison between our results and the experimental data show that they are, in most considered cases, in accord. Then, two characteristic distances of the residual strong interaction are evaluated for different types of carriers of the interaction, namely the maximum separation distance between two nucleons and the Schwarzschild radius associated to it. The first tells us about the nature of the meson, mediator of the interaction, is likely to be exchanged and the second on the scope of the interaction. Our results show that the strong interaction at long inter-nucleons radial distances can be described by the exchange of a single pseudo-scalar meson and that its range is inversely proportional to the mass of the carrier. As a second step, the metric induced by the presence of a strong confinement potential is deduced and the confinement radii associated with a few hadrons are evaluated. Our results show that the confinement radius of a charge of color inside of a hadron corresponds approximately to the radius of the hadron containing it. This allows us to interpret the phenomenon of confinement of charges of color inside the hadrons as an intrinsic property of space-time. Then, the energy spectrum associated to the strong interaction between quarks is determined and the masses, as well as the sizes, of some hadronic particles are estimated. Our results show, once again, a good agreement with the experimental data.

ملخص

الهدف الرئيسي من مذكرة الماستر هذه هو دراسة التفاعل القوي من حيث النهج الجديد الذي اقترحه (باروس) كأول خطوة، قمنا بالتعبير عن معادلات اينشتاين التي تصف انحناء الزمكان في وجود كثافة طاقة عالية مرتبطة بكمون (يوكاوا) النووي، والحل المتحصل عليه غير مرتبط بالزمن وفي تماثل كروي.

قمنا بحساب طيف الطاقة للتفاعل القوي المترسب بين النويات، وكذلك كتلة بعض الأنوية الذرية. وتظهر لنا نتائجنا انها في توافق جيد مع النتائج المخبرية. بعد ذلك قمنا بحساب مسافتان مميزتان للتفاعل القوي المترسب من أجل ناقلات التفاعل المختلفة، وهما المسافة القصوى الفاصلة بين نويتان داخل النواة ونصف قطر (شوارزشيلد) المرتبط بها. الأولى تخبرنا عن نوع الميزون الذي يتوسط التفاعل هل هو مرجح لأن يكون ناقل للتفاعل والثاني يتعلق بنطاق التفاعل.

نتائجنا تبين أن التفاعل القوي على مسافات شعاعية طويلة بين النويات يمكن أن يتم وصفه بتبادل ميزون نصف-سلمي ونطاقه يتناسب عكسيا مع كتلته.

كخطوة ثانية، قمنا باستخراج مترية الزمكان الناجمة عن وجود كمون الحصر القوي، وكذلك حساب انصاف اقطار الحصر المرتبطة ببعض الهدرونات.

تظهر نتائجنا أن نصف قطر الحصر لشحنة لونية داخل الهادرون تمثل بالتقريب نصف قطر الهادرون الذي يحتويها. وهذا ما يجعل من الممكن تفسير ظاهرة حصر الشحن اللونية داخل الهادرونات كخاصية جوهريّة للزمكان.

بالإضافة الى ذلك، قمنا بتحديد طيف الطاقة للتفاعل القوي الأساسي وكذلك قمنا بحساب كتل وأحجام بعض الجسيمات الهادرونية. تظهر نتائجنا، مرة أخرى، اتفاق جيد مع البيانات المخبرية.