

# Etude de la fiabilité d'une plaque composite sous charge biaxiale

Moussa Karama<sup>1</sup>, Hocine Dahmous<sup>2</sup>, Kamel Aït Tahar<sup>3</sup>, Kamran Afaq<sup>1</sup>, Tahar Masri<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire Génie de Production, Equipe CMAO, ENI de Tarbes, BP 1629, 65016 Tarbes Cedex, France

<sup>2</sup>Université UMMTO, Tizi Ouzou, Laboratoire Lamoms, Algérie

<sup>3</sup>Laboratoire LMMC, Université de Boumerdes, Algérie

## Résumé :

*Dans le cadre de cette étude, nous nous sommes intéressés à la détermination de la probabilité de rupture et à l'indice de fiabilité dans le cas de composites stratifiés constitués par des couches unidirectionnelles. Les calculs ont été effectués en considérant une plaque sous charge biaxiale. La probabilité de défaillance est calculée à l'aide du code de calcul par éléments finis PERMAS.*

## Abstract :

*Within the framework of this study, we were interested in the determination of the probability of rupture and the index of reliability in the case of unidirectional laminated composites. Calculations were carried out by considering a plate under biaxial load. The probability of failure is calculated using the computer code by finite elements PERMAS.*

## Mots clefs :

**Fiabilité, Rupture, défaillance, probabilité, indicateur de fiabilité.**

## 1 Introduction

La fiabilité peut être considérée comme un élément d'un ensemble plus vaste constituant la Sûreté de Fonctionnement qui se décline elle-même en fiabilité (objet de ce travail), en maintenabilité (aptitude d'un dispositif ou d'un bien à être maintenu ou rétabli en vue d'accomplir une mission requise), en disponibilité (aptitude d'un dispositif ou d'un bien à accomplir une mission requise à un instant donné) et, enfin, en sécurité (relative aux risques de dommages corporels et matériels liés au dispositif ou au bien considéré) [1][2].

Si les approches probabilistes se sont développées depuis maintenant de nombreuses années pour ce qui concerne la sûreté de fonctionnement des systèmes, en particulier électroniques, et pour la gestion des pannes, ce n'est que plus récemment qu'elles ont pénétré le génie civil et le génie mécanique pour la maîtrise des risques liés aux choix dimensionnels. Elles constituent également un lien entre la modélisation en mécanique et les codes et règles de dimensionnement et représentent un élément essentiel du transfert de connaissance entre recherche et réglementation. La combinaison d'une modélisation mécanique pour simuler (au sens physique) un comportement mécanique et d'une modélisation fiabiliste constitue un couplage mécano fiabiliste indispensable à une approche du dimensionnement incluant la maîtrise d'un risque dans un contexte économique.

Dans le cadre de cette étude, nous nous sommes intéressés à la détermination de la probabilité de rupture et à l'indice de fiabilité dans le cas des composites stratifiés constitués par des couches unidirectionnelles en

carbone /époxy. Les calculs ont été effectués en considérant différentes plaques. La probabilité de défaillance est calculée à l'aide du code de calcul par éléments finis PERMAS [3].

## 2 Probabilité de défaillance

La fiabilité est la probabilité qu'un composant ou un système remplisse une mission déterminée, dans un environnement déterminé, pendant un temps déterminé.

D'un point de vue mécanique la fiabilité est définie comme étant l'aptitude d'un matériau ou d'une structure à assurer un bon fonctionnement pendant un temps donné, appelé durée de vie.

D'un point de vue mathématique, la probabilité de défaillance  $P_f$  est donnée par la relation suivante [1] :

$$P_f = \frac{\text{nombre des événements de défaillance}}{\text{nombre total des événements simulés}} \quad (1)$$

La fiabilité est définie par :

$$1 - P_f \quad (2)$$

Dans le cas d'un vecteur aléatoire  $\{X\}$ ,  $f_{\{X\}}(\{x\})$  est la densité de probabilité du vecteur  $\{X\}$  et  $G(\{X\})$  est la fonction d'état limite. La probabilité de défaillance est égale à :

$$P_f = \int_{G(\{X\}) \leq 0} f_{\{X\}}(\{x\}) dx_1 \dots dx_n \quad (3)$$

L'expression obtenue est la forme générale de la probabilité de défaillance, l'intégrale est étendue à tout le domaine de défaillance. Si cette formulation reste simple, elle est théorique et son utilisation suppose que la densité conjointe de probabilité du vecteur  $\{X\}$  est connue et que l'intégration est possible, deux exigences qui sont rarement satisfaites. Il existe différentes méthodes de calcul de  $P_f$  (itération directe, intégration numérique ou par simulation, approximation...).

Des procédures mathématiques permettent de simuler une réalisation d'une variable aléatoire de loi donnée. La méthode de Monté Carlo consiste à simuler des réalisations de l'état limite (figure 1) et à compter le nombre des événements de défaillance obtenus. Si  $n$  est le nombre de simulations, on admet que la fréquence des événements de défaillance tend vers la probabilité de défaillance lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Si on définit  $G$  comme étant la fonction de performance ;  $G > 0$  correspond au domaine de bon fonctionnement,  $G \leq 0$  correspond au domaine de défaillance. La probabilité de défaillance est donnée par :

$$P_f = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{nombre des événements avec } G \leq 0}{\text{nombre total des événements simulés}} \quad (4)$$

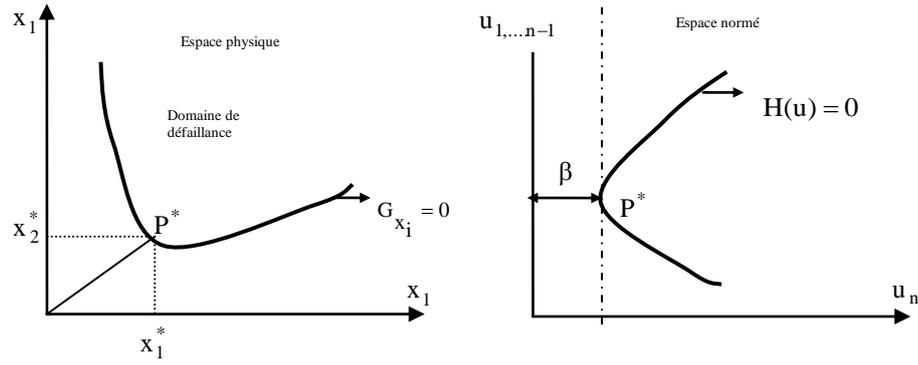


FIG. 1 - Domaine de défaillance et indicateur de fiabilité.

### 3 Critère de défaillance

Les calculs ont été effectués en considérant différentes plaques composites stratifiées. La probabilité de défaillance est calculée à l'aide du logiciel de calcul PERMAS [3].

Le critère de rupture adopté dans l'analyse de la fiabilité est le critère de Tsai-Wu [4]. Ce critère est appliqué par couche. Dans cette étude on détermine la probabilité de rupture de chaque couche dans un système quelconque. La forme quadratique de ce critère est donnée par :

$$F_{ij}\sigma_i\sigma_j + F_i\sigma_i - 1 \leq 0; (i, j = 1, 2, 6) \quad (5)$$

$$\text{Avec : } F_{11} = \frac{1}{X_1 X_2}, F_{22} = \frac{1}{X_3 X_4}, F_{66} = \frac{1}{X_5^2}, F_1 = \frac{1}{X_1} - \frac{1}{X_2}, F_{12} = -\frac{1}{2} \sqrt{F_{11} F_{22}}$$

$F_{ij}$  : Coefficients qui dépendent des contraintes limites.

Le critère de survie est défini par :

$$\frac{\sigma_1^2}{X_1 X_2} + \frac{\sigma_2^2}{X_3 X_4} + \frac{\sigma_6^2}{X_5^2} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{X_1 X_2 X_3 X_4}} + \left( \frac{1}{X_1} - \frac{1}{X_2} \right) \sigma_1 + \left( \frac{1}{X_3} - \frac{1}{X_4} \right) \sigma_2 < 1 \quad (6)$$

La fonction de défaillance est définie par :

$$G(X, \sigma) = \frac{\sigma_1^2}{X_1 X_2} + \frac{\sigma_2^2}{X_3 X_4} + \frac{\sigma_6^2}{X_5^2} - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{X_1 X_2 X_3 X_4}} + \left( \frac{1}{X_1} - \frac{1}{X_2} \right) \sigma_1 + \left( \frac{1}{X_3} - \frac{1}{X_4} \right) \sigma_2 - 1 = 0 \quad (7)$$

Avec :  $\sigma_1$  : Contrainte dans le sens des fibres,  $\sigma_2$  : Contrainte dans le sens transverse,  $\sigma_6$  : Contrainte de cisaillement,  $X_1$  : Contrainte limite de traction suivant la direction 1,  $X_2$  : Contrainte limite de compression suivant la direction 1,  $X_3$  : Contrainte limite de traction suivant la direction 2,  $X_4$  : Contrainte limite de compression suivant la direction 2,  $X_6$  : Contrainte limite de cisaillement.

## 4 Résultats

Dans le but de déterminer la variation de la probabilité de rupture de chaque couche, ainsi que la rupture de la première couche, on a étudié trois plaques à une couche ( $0^\circ$ ,  $90^\circ$  ou  $45^\circ$ ) et une plaque à trois couches [ $90^\circ/45^\circ/0^\circ$ ]. Les caractéristiques géométriques de la plaque sont les suivantes : longueur = largeur = 100 mm, l'épaisseur de chaque couche est égale à 3 mm. La plaque est soumise à une charge biaxiale avec  $N_x = N_y$  (figure 2), qui suit une distribution normale avec un écart type de 20%.

Pour effectuer le calcul mécano fiabiliste, on a défini la fonction de défaillance dans PERMAS à l'aide d'une subroutine. A cause de la symétrie, on a traité seulement le quart de la plaque. L'élément utilisé est un élément solide à 8 nœuds (HEXE8). Le nombre d'éléments ayant permis d'atteindre la convergence est 2888. Le matériau est un composite verre/époxy à 70% de fibre dont les caractéristiques à  $\theta = 0^\circ$  sont :  $E_1 = 55 \text{ GPa}$ ,  $E_2 = 18 \text{ GPa}$ ,  $G_{12} = 8 \text{ GPa}$ ,  $\nu_{12} = 0,08$

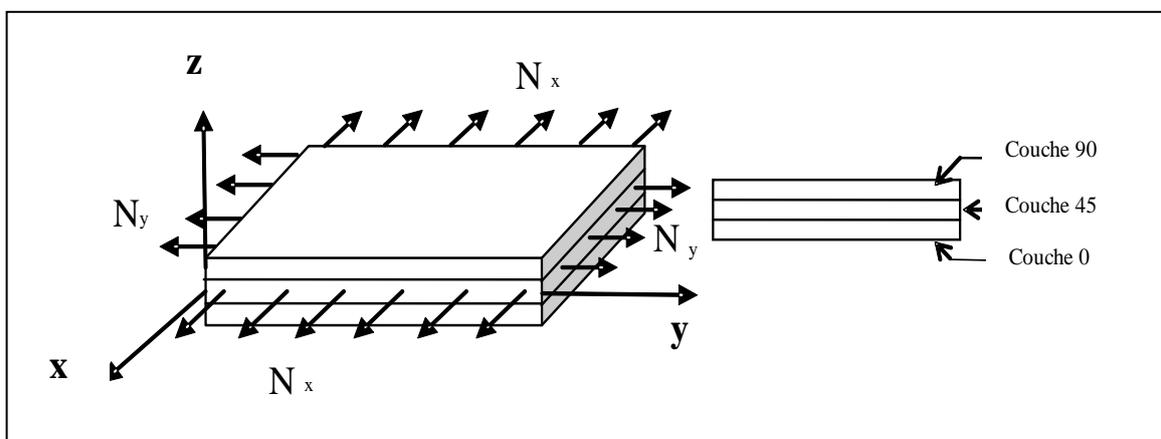


FIG. 2 - Plaque à 3 couches [ $90^\circ/45^\circ/0^\circ$ ] sous chargement biaxiale ( $N_x = N_y$ ).

La méthode adoptée pour les analyses de fiabilité est la méthode de surface de réponse [5][6]. Cette méthode est moins coûteuse en temps de calcul par rapport à la méthode de Monte Carlo. Le but recherché est l'étude de l'influence mutuelle des différentes couches, ainsi que la variation de la probabilité de rupture par rapport à la probabilité de différentes configurations de plaques (cas d'une seule couche ou de plusieurs couches).

La variation de la fiabilité de la couche à  $90^\circ$  pour différents vecteurs de variables aléatoires est représentée figure 3. Ceci nous permet de constater que plus la variable aléatoire (charge P) est importante plus la fiabilité diminue. L'influence donc de ce paramètre est ainsi mise en évidence.

A partir de la figure 5, on remarque que la probabilité de rupture des couches à  $0^\circ$  et à  $90^\circ$  dans la plaque [ $90/45/0$ ] augmente par rapport à la plaque avec une seule couche. On peut donc conclure que l'addition d'une couche joue un rôle important sur la fiabilité de la structure.

Par contre on constate que la probabilité de la couche à  $45^\circ$  dans la plaque [ $90/45/0$ ] (figure 5) est faible par rapport au cas de la plaque constituée par la seule couche à  $45^\circ$  (Figure 3). L'addition de la couche à  $0^\circ$  et à  $90^\circ$  à la couche à  $45^\circ$  augmente la fiabilité de cette dernière dans le cas d'un chargement biaxial.

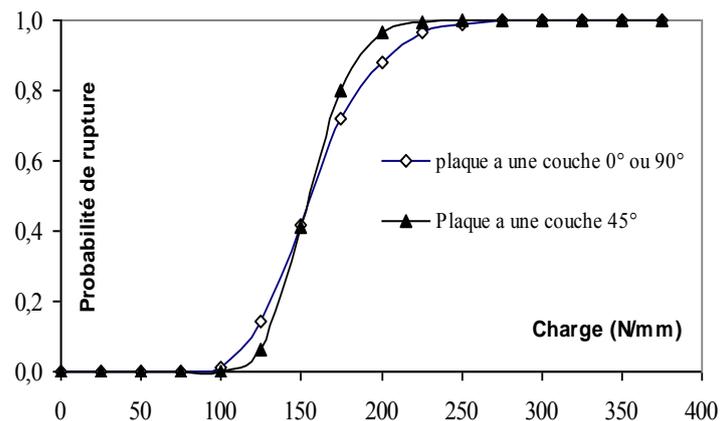


FIG. 3 - Probabilité de rupture de la plaque à une couche (0°, 90° ou 45°) soumise à une charge biaxiale ( $N_x=N_y$ ).

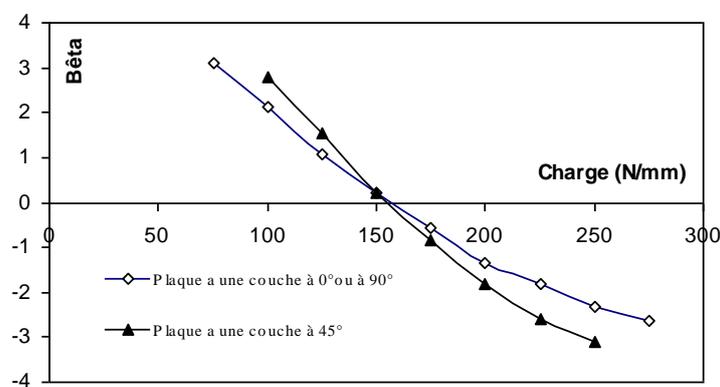


FIG. 4 - Variation de  $\beta$  en fonction de la charge ( $N_x=N_y$ ) pour la plaque à une couche (0°, 90° ou 45°)

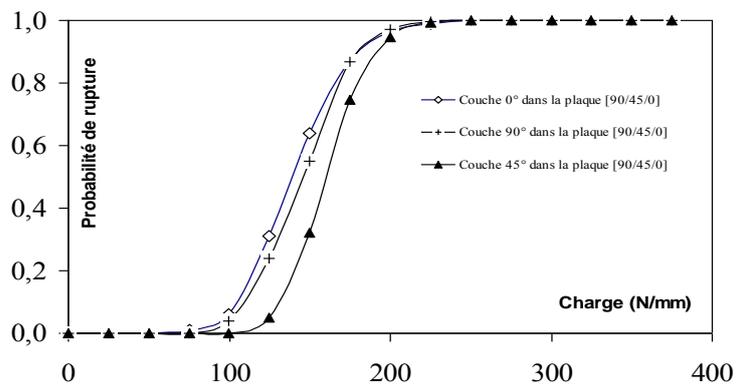


FIG. 5 - Probabilité de rupture des couches de la plaque stratifiée [90/45/0] soumise à une charge biaxiale ( $N_x=N_y$ ).

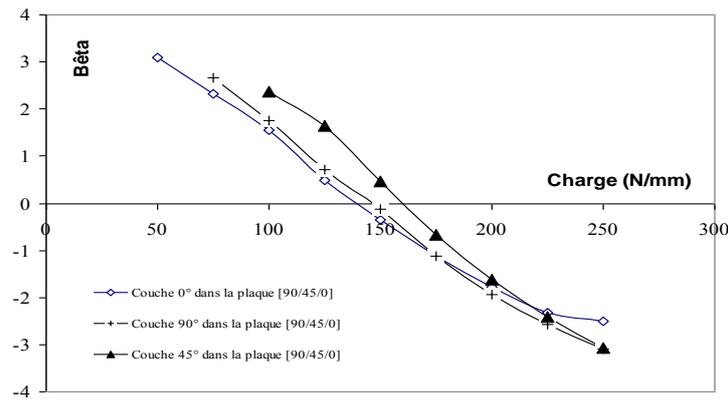


FIG. 6 - Variation de  $\beta$  en fonction de la charge ( $N_x=N_y$ ) pour la plaque stratifiée [90/45/0].

## 5 Conclusion

Ce travail a été réalisé dans le cadre d'une étude numérique concernant une approche probabiliste de la rupture des matériaux composites unidirectionnels (Verre/époxy). Le calcul numérique a été effectué à l'aide du code de calcul PERMAS

Nous avons traité un problème de plaque. Différents cas de conception et de chargement ont été traités dans le cas de plaques sous charge biaxiale. Notons que dans cette partie, seule la charge est prise comme variable aléatoire. La rupture de la première couche a été montrée. Nous avons également mis en évidence l'effet de l'augmentation du nombre de couches sur le comportement global de la structure.

En perspectives à ce travail nous étudierons la variation de la fiabilité lors du couplage de tous les paramètres (propriétés mécaniques, géométriques et charge).

## References

- [1] Lemaire M, Fiabilité des Structures Mécaniques: Couplage Mécano Fiabiliste Statique, Cours de DEA, LARMA, Université de Blaise Pascal-Clermont II, Septembre 2001.
- [2] Ligeron J.C, Delage A. et Nef M., La Fiabilité en exploitation : Organisation et traitement des données, Technique et Documentation, Edition LAVOISIER, Paris, 1984.
- [3] Intes, PERMAS-FELIX User's Manual, Version 9.00.189. INTES Publication No. 460. Stuttgart, 2002.
- [4] Philippidis T.P., Lekou D.J., Probabilistic failure prediction for FRP composites, Composites Science and Technology, V.58, pp. 1973-1982, 1998.
- [5] Vesyseyre R., Statique et probabilités pour l'ingénieur, Editions DUNOD, Paris, 2001.
- [6] Frangopol Dan M., Recek S., Reliability of fiber reinforced composite laminate plates, Probabilistic Engineering Mechanics, V.18, pp. 119-137, 2003.