République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université AMO de Bouira
Faculté des Sciences et des Sciences Appliquées
Département du Mathématiques

Mémoire de Master

Filière : Mathématiques

Spécialité : Recherche Opérationnelle

Thème

Ajustement des cinétiques de séchage des feuilles de Laurier sur micro-onde par des modéles empiriques via la simulation Monté Carlo

---

Présenté par :
- Harrache Rokia
- Boukhelf Imane

Devant le jury composé de :

Président	M^r Birouche Madjid	MAA	U. A/M/O Bouira.
Encadreur	M^r L'hadi BOUGHANI	MAA	U. A/M/O Bouira.
Examinatrice	M^{me} Khadidja BOUDANE	MAA	U. A/M/O Bouira.
Examinateur	M^r Hamdouni Omar	MAA	U. A/M/O Bouira.

2018/2019

Remerciements

*Nos remerciements vont tout premiérement à **Allah** le tout puissant pour la volonté, la santé et la patience quíl nous a donné pour terminer ce travail.*

Nous remercions notre promoteur M.L'HADI BOUGHANI *pour avoir accepté de diriger ce travail ainsi que pour ses conseils avec beaucoup de patience et d ' encouragements.*

Nous exprimons nos remerciements aux membres du jury qui ont accepté de juger notre travail, en l'occurence Madame BIROUCHE MADJID *de présider le jury de soutenance et Madame* BOUDANE KHADIDJA *d'examiner ce travail.*

Nos remerciéments vont aussi à HAMDOUNI OMAR, *pour avoir accepter à participer à l'examen de ce travail.*

Nos sincères remerciements s'adressent enfin à tous ceux qui nous ont soutenu de prés ou de loin.

Mecri à Tous

Dédicaces

De Rokia

A mes très chers parents qui ont toujours été là pour moi, et qui m'ont donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance. À leurs amours, confiance, soutiens et sacrifices.

À mes chères soeurs et chers frères, pour leurs complicités et présence depuis tous le temps.

À toute ma famille ainsi qu'a mes amies, pour les instants inoubliables vécus ensemble.

À tous ceux qui me sont chères.

Á TA mon binôme ***IMANE BOUKHELF*** *et sa famille..*

Á Toutes et à Tous.

Je vous dédie ce modeste travail

Dédicaces

De Imane

À mes très chers parents qui ont toujours été là pour moi, et qui m'ont donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance.

*À Mes frères **HAMZA**, **YOUCEF** et sa femme **CHAHINEZ***

*À Ma petite soeur **IKRAME**.*

*À Mon mari **HOCINE** et sa famille*

À toute ma familles ainsi qu'à mes amis et collègues prés ou lointains.

*À A mon binôme **HARRACHE ROKIA** et sa famille.*

Á Toutes et à Tous.

Je vous dédie ce modeste travail

Résumé

Ce travail consiste à déterminer une modélisation empirique des cinétiques de séchage des feuilles de laurier assistée par micro−onde. La modélisation consiste à ajuster les données expérimentales de 5 séries relatives à 5 puissances $(180W, 300W, 450W, 600W, 900W)$, par deux modèles semi-empiriques existant dans la littérature (Lewis et Page) en utilisant une méthode parmi les méthodes Monté−Carlo pour générer une variable aléatoire qui suit une loi donnée $(uniforme, expinentielle, normale)$. Les résultats de simulation sont discutés dans le dernier chapitre

Mots clés Séchage de feuilles de laurier, Méthode Monté−Carlo, Méthode d'inversion, Loi uniforme, Loi expenentielle, Loi normale, Modéle de page, Modèle de lewis, Le logiciel R.

Abstract

This work consists on an emperical modelisation of lauris microwave drying kenitics. This latter is about an adjustemnt of experimental data for five series corresponding to an experimentation of five power of the microwave, with two semi emperical models (Lewis ad Page), found in the litterature, uing a Monte Carlo simulation method to generate a rondom variable following some density of probability. The results of simulation are discussed within the last chapter of the manuscript.

Key words Microwave drying kenitics, Monte−Carlo method, Inversion Method, Uniforme density, expenential density, Normal density, Page's model, lewis Model, Rsoftware.

Notations

Ω :	L'espace des obsarvations.
$\mathbf{A}$:	Tribu sur Ω.
$\mathbf{P}$:	Mesure sur la tribu.
$\mathbf{Z}$:	Ensemble des entiers.
$\mathbf{N}$:	Eensemble des naturele.
$\mathbf{i}, \mathbf{j}$:	Indice généraux.
$\mathbf{R}$:	Ensemble des réele.
$\mathbf{U}$:	Variable aléatoire distribuié selon $U([0,1])$.
$\mathbf{U}([0,1])$:	Distribution uniforme défini sur l'interval unité.
$\mathbf{F}^{-1}$:	L'inverse de la fonction de répartition d'une loi donée.
$\mathbf{T}$:	nombre total d'étération.
$\mathbf{t}$:	Indice temporel.
SCR :	Abréviation somme des carrés des résidus.

Liste des tableaux

Table des matières

Introduction Générale

Le monde est envahi de systèmes de plus en plus complexes, que la description nécessite des outils sophistiqués et des techniques simplifiée afin de maîtriser ces derniers. Il existe des systèmes dont la compréhension nécessite des équations mathématiques très délicate et dans la plus part des cas difficile à résoudre explicitement ou même numériquement.

Le séchage d'aliments est l'un de ces systèmes compliqués, qui mérite d'être traité de manière détaillée et de construire des modèles mathématiques permettant de contrôler ce dernier en évaluant ces performances et caractéristiques via ces modèles. Néanmoins, la réalité montre l'absence de modèles générales pour gérer les différentes techniques de séchage. Les praticiens font recours aux modèles empiriques pour caractériser quelques aliments et leurs comportement dans le processus de séchage [4].

Les cinétiques de séchage est l'un des facteurs les plus abordé dans la modélisation du processus de séchage d'aliments car la compréhension toutes les autres caractéristiques (diffusion, énergie, ...) en dépendent.

Ces dernières dépendent de la seconde loi de Fick relative à la diffusion de la chaleur et de l'eau vers et de l'aliment durant le processus de séchage. Ces équations sont difficiles à résoudre pour des aliments volumiques ; il n'existe de solutions que pour des aliments dit en couches minces où leurs volumes est supposés négligeables [4, 11, 10, 2]. Ces solutions sont très complexes et leurs usage dans la pratique est très restreint, les praticiens font recours à des modèles dit empiriques et semi-empiriques [10], dont le principe est d'ajuster des données expérimentales à un modèle théorique.

Dans ce travail, On présentera une modélisation empirique des cinétiques de séchage des feuilles de laurier en utilisant la simulation Monté Carlo.

La simulation de Monte-Carlo est une méthode d'estimation d'une quantité numérique qui utilise des nombres aléatoires. Stanisław Ulam et John von Neumann [12] l'appelèrent ainsi, en référence aux jeux de hasard dans les casinos, au cours du projet Manhattan qui produisit la première bombe atomique pendant la Seconde Guerre mondiale. La simulation d'un prêt bancaire par exemple n'est pas une simulation de Monte-Carlo car il s'agit de calculs exacts à partir du nombre de mensualités et du taux d'intérêt ; aucun phénomène aléatoire n'intervient dans les calculs.

La simulation de Monte-Carlo présente le double avantage d'être simple d'utilisation et de pouvoir être appliquée à un très large éventail de problèmes. Elle est utilisée en finance, pour déterminer quand lever une option sur un bien financier ; en assurance, pour évaluer le montant d'une prime ; en biologie, pour étudier les dynamiques intra et intercellulaires ; en physique nucléaire, pour connaître la probabilité qu'une particule traverse un écran ; en télécommunications, pour déterminer la qualité de service ; ou de façon générale pour déterminer la fiabilité d'un système, sa disponibilité ou son temps moyen d'atteinte de la défaillance, ...

Dans ce mémoire on considère que le modèle d'justement théorique des cinétique de séchage est caractérisé par un paramètre qui sera considéré comme étant une variable aléatoire. Cette hypothèse est justifiée par le fait que la valeur de ce dernier change d'un aliment à un autre, d'une manière aléatoire, et donc la simulation Monté Carlo concernera la simulation de la loi de ce dernier.

Le mémoire est organisé comme suit :

Le premier chpitre sera consacré aux généralités sur le séchage d'aliments et la présentation des modèles empiriques existant dans la littérature.

le deuxième chapitre présente la simulation Monté Carlo de quelques loi de probabilités usuelles.

Dan le troisième chapitre, on trouvera les développement algorithmiques dans la simulation des cinétiques de séchage des feuilles de laurier suivant deux modèles théoriques : Lewis et Page.

Le travail est clôturé par une conclusion générale et quelques perspectives de travail.

Chapitre 1

État de l'art sur les modèles mathématiques de séchage d'aliments par simulation Monté Carlo

Introduction

Les cinétiques de séchage d'un aliment correspondent au transfert de l'humidité due à un transfert simultané de chaleur et de masse. À dessein, il est fait pour réduire l'eau jusqu'au niveau auquel les réactions d'altération microbiennes sont grandement minimisées. Le produit séché permettra de minimiser les coûts de transport, de stockage, d'emballage et de temps. Le séchage peut être réalisé de nombreuses manières, mais le choix de Cette méthode dépend du matériau et du niveau sanitaire requis .

Par conséquent, l'étude de la cinétique de séchage aidera à identifier les techniques de séchage appropriées et de contrôler les processus de séchage. C'est également important pour l'ingénierie et l'optimisation des processus car il est parfois coûteux de mener une enquête complète et expérimentale à pour déterminer les conditions propices au séchage.

1.1 Définition et objectifs du séchage :

Le séchage est une technique très anciennement utilisée pour, la conservation des produits agricoles et alimentaires (céréales, graines, viandes, poissons, figues, noix, tabac, plantes médicinales ... etc), l'élaboration des matériaux (briques, céramiques, poterie avant cuisson, bois...), ou pour les textiles et les peaux. Pour ces applications traditionnelles, on fait beaucoup appel au séchage par l'air ambiant dit " naturel ".
Le séchage dit artificiel avec apport d'énergie, n'étant qu'une technique complémentaire apportant une plus grande régularité face aux aléas climatiques, ou bien apportant de nouveaux services (lait sec ou café dits "instantané ", pates alimentaires séchés à longue conservation, ... etc.).

Nous appelons séchage, l'opération ayant pour but d'éliminer partiellement ou totalement l'eau d'un corps humide par évaporation de cette eau. Le corps humide en jeu peut être solide ou liquide, mais le produit final est solide (sauf dans le cas particulier de la déshydratation d'un liquide non volatile : séchage des huiles), ce qui distingue le séchage de la concentration d'un liquide par évaporation, cas dans lequel le produit final est un concentré liquide. Cette définition appelle deux remarques :

1. Le séchage peut se produire à titre accessoire lorsqu'on effectue d'autres opérations telles que la cuisson, la torréfaction, le stockage à température ordinaire, la congélation, la surgélation,

le broyage.
2. Il est à noter que la plupart des lois du séchage sont aussi valables pour l'élimination par évaporation de toute substance volatile d'un mélange (élimination du solvant dans l'extraction de l'huile des graines oléagineuses).

Au cours du séchage, l'eau contenue dans le matériau disparaît peu à peu dans l'air ambiant sous l'action de deux phénomènes : l'évaporation de l'eau et sa diffusion à l'intérieur du matériau

L'utilisation du séchage dans les industries agro-alimentaires à de multiples buts dont le principal est de prolonger la durée de conservation des produits (viandes, poissons, fruits, graines,pates, épices, thé, champignons).

- inhibition de l'activité des microorganismes, des enzymes ou des ferments de la matière ; stabiliser les produits agricoles (mais, riz, lait, tomate) et amortir le caractère saisonnier de certaines activités.
- diminuer l'activité de l'eau de divers matériaux périssables qui consiste de convertir ce dernier en produits stabilisés.
- Le séchage permet aussi de diminuer la masse et le volume des aliments pour réduire leur encombrements et faciliter leurs emballages et transports.

1.1.1 Terminologie de séchage

Humidité

Ce terme désigne le liquide contenu dans le corps solide,liquide ou pâteaux ,et devant être élimine au cours du séchage.

Taux d'humidité

C'est la masse de liquide contenue par unité de masse de matière á sécher.Bien qu'il soit fait très souvent référence á la matière humide ,il est préférable d'exprimer le taux d'humidité par rapport á la matière anhydre.

Taux d'humidité á l'équilibre

Un corps humide ,placé dans une enceinte de volume important ou l'humidité relative et la température sont constantes voit son taux d'humidité se stabiliser a une valeur dite d'équilibre qui dépend de la nature de l'humidité et de celle du produit qui en est imprégné mais aussi de la pression partielle et de température.

1.2 Les avantages et les inconvénients de séchage[4]

1.2.1 Les avantages de séchage :

Les principaux avantages du procédé de séchage sont :

- La simplicité de la méthode avec généralement un bon rendement.
- L'universalité du procédé, accessible à tous, Y compris pour les particuliers.
- Une durée de conservation des aliments déshydratés qui peut être de plusieurs mois.
- La désactivation de la croissance des micro-organismes grâce à la réduction de l'activité d'eau.
- Sa capacité à être utilisée à des fins commerciales permettant de limiter les pertes de récoltes.
- La diminution des coûts financiers et environnementaux liés au transports des marchandises en raison de la réduction massique.

1.2.2 Les inconvénients du séchage

Comme tous les traitements thermique, le séchage peut entraîner, en particulier, des pertes d'arômes, de vitamines et de pigments, des réactions de brunissement, des durcissements superficiels, des modification irréversibles de texture et donc de capacité à la réhydratation, des pertes de constituants volatils et la modification de la répartition de l'humidité dans le produit. En général, le séchage a globalement moins d'inconvénients que d'autres procédés de conservation (appertisation, congélation, ou traitement aseptique).
Le séchage des fruits, des légumes et des épices reste encore une méthode très répandue de conservation de ces aliments

1.3 Les types de séchages :

1.3.1 Le séchage naturel :

Effectué en plein air représente le moyen le plus ancien et le plus simple. Il est encore utilisé pour des matériaux dont le séchage est aisé comme les briques, mais présente des insuffisances et des inconvénients :

— L'exposition des produits à des conditions climatiques défavorables et irrégulières.
— Une longue durée de séchage.
— L'impossibilité d'obtenir un degré d'humidité précis.
— L'attaque par les champignons et les insectes (cas du bois).

Toutes ces raisons ont conduit les professionnels à s'orienter vers le séchage artificiel.

1.3.2 Le séchage artificiel :

Le séchage artificiel permet, dans une certaine mesure de pallier les inconvénients du séchage naturel : il permet de réduire considérablement la durée du séchage et d'atteindre l'humidité souhaitée des matériaux. Les méthodes de séchage les plus utilisées dans l'industrie sont les suivantes :

— Le séchage à la vapeur surchauffée.
— Le séchage par pompe à chaleur.
— Le séchage par chambre chaude.
— Le séchage sous vide.

Les deux derniers procédés de séchage sont utilisés en particulier pour le séchage du bois.

1.4 Séchage par micro onde :

1.4.1 Définition de séchage par micro-onde :

Le séchage par micro-ondes appartient au type de séchage par ébullition et obéit à un transfert de chaleur par rayonnement. Ce rayonnement, issu des ondes électromagnétiques, a une fréquence qui se situe entre celle de la lumière infrarouge et celle des ondes de télévision. Sa longueur d'onde est comprise entre 1 mm et 1 m, et sa fréquence varie de 300 Mhz à 300 Ghz, en utilisant comme énergie primaire, l'électricité. Dans le spectre, elles se situent dans les hyperfréquences, entre les ondes radios (108 Hz) et l'infrarouge (1012 Hz).
Le fonctionnement d'un four à micro-onde est simple. L'énergie électrique apportée l'alimente le magnétron qui convertie l'énergie électrique en champ électromagnétique et par un guide d'ondes (tube rectangulaire en métal), les micro-ondes produites sont dirigées vers l'agitateur d'onde et pénètrent dans l'enceinte métallique où se trouve l'aliment à chauffer sur une plaque tournante,

qui permet au produit alimentaire d'être exposé aux micro-ondes qui pénétrent l'aliment pour atteindre les molécules d'eau.

1.4.2 Les avantages spécifiques des micro-onde :

Le séchage par micro-onde présente bel et bien d'avantages, entre autre l'opération de séchage très rapide dans le temps, permettant des économies d'énergie, et une qualité du produit plus élevée. Ce séchage est très élargi dans divers applications comme l'inactivation, la stérilisation enzymatique et la pasteurisation des produits alimentaires (jus de fruit ;laits, purée alimentaire,viande).

1.4.3 Mécanisme de séchage par micro onde :

Au vu des caractéristique des matériaux communément employés dans la production pharmaceutique, l'énergie des micro-onde est parfaitement adaptée au séchage des formules pharmaceutiques (par exemple le séchage de feuille laurus nobilis). Le transfert de chaleur sous chauffage micro ondes est complètement inversé par rapport au chauffage conventionnel, La chaleur du chauffage conventionnel se transmet de l'extérieur vers l'intérieur, Sous chauffage micro onde, le volume traité devient lui même source de chaleur. On parle de dégagement de la chaleur de l'intérieur vers extérieur.
Sur cette base le phénomène fondamental est la dégradation par dissipation d'une partie de l'énergie transportée par l'onde électromagnétique. Un matériau diélectrique est un isolant donc un mauvais conducteur d'électricité, il s'échauffe du fait de la polarisation et de la rotation de ses dipôles puis de leur relaxation lorsqu'ils sont soumis à des champs électriques alternatifs. Le dégagement de chaleur résultant diffère fondamentalement du chauffage par effet Joule qui est provoqué par des frictions internes entre les électrons et les molécules. De plus, contrairement au chauffage classique, il a lieu dans le volume, d'où son appellation de chauffage volumique.

1.4.4 Technologie de séchage combinées aux micro ondes[3]

Pour comparer les différentes techniques de séchage, quatre aspects principaux du processus peuvent être pris en considération. Il s'agit de la vitesse de déshydratation, de la qualité et les caractéristiques du produit final, des courts énergétiques et économiques du processus.
Le séchage micro onde peut être combiné au :

- ✓ Le séchage micro ondes combiné à la lyophilisation ;
- ✓ Le séchage en lit fluidisé combiné aux micro ondes ;
- ✓ Le séchage micro ondes combiné à l'air chaud ;
- ✓ Le séchage sous vide combiné aux micro ondes ;

1.4.5 Extraction de séchage

L'extraction assistée par micro-ondes **(ESAM)** consiste à traiter par micro-ondes un solide sec ou humide, en contact avec un solvant partiellement ou totalement transparent. Les micro-ondes permettent d'accélérer la cinétique d'extraction et de réduire le ratio solvant/charge**(Michel S et al., 2003)**[4].
L'extraction par micro-ondes est une technique qui a été développée pour réduire le volume des solvants nécessaires, améliorer le rendement de la récupération des polyphénols, et réduire le temps d'extraction et de diminuer le coût.

1.5 Cinétiques de séchage

le séchage est le processus qui sépare le liquide d'un milieu solide par évaporation. Un des important changement physique subit par l'aliment durant le processus de séchage est la réduction de son volume : la perte en eau cause un stress au niveau de la structure interne de la cellule menant à un changement de forme et decroissance en dimension. Ceci dépend essentiellement de :
- Le transfert de chaleur,
- séchage en continu ou en discontinu,
- la direction des fluides chauffés respectivement à l'aliment (pression atmosphérique, surface profonde ou légère).

De plus le séchage implique deux types de transferts :

1. **La diffusion de chaleur :** l'équation de diffusion est définie par :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} = \alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{1.1}$$

2. **Le transfert de masse :** d'équation :

$$\frac{\partial M}{\partial t} + u\frac{\partial M}{\partial x} = \alpha\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} \tag{1.2}$$

où T représente la température diffusée vers l'aliment, M la masse de l'aliment et x et le volume de ce dernier, u étant une fonction dépendant du coefficient de diffusion initial.

La vitesse de séchage est liée à ces deux équations, ainsi la modélisation du processus de séchage s'articulera sur la variation du taux d'humidité de l'aliment tout au long du processus de séchage. Cette opération est décrite par les cinétiques de séchage c'est à dire les courbe déduite par la diffusion de l'eau de l'aliment vers l'extérieur.

1.6 Procédé de séchage en couche mince

Le terme couche mince se réfère à une couche du produit d'épaisseur suffisamment petite pour qu'on puisse considérer que les caractéristiques de l'air partout dans la couche sont identiques, uniforme et sans écart. Le procédé de séchage sur couche mince fait également référence au séchage de particules individuelles ou grains de matériau totalement exposés au séchage à l'air chaud. Le processus est souvent divisé en deux périodes de séchage qui sont la période de vitesse de séchage constante et la période de vitesse de séchage en baisse.

Le séchage en couche mince est également décrit comme le processus d'élimination de l'humidité un milieu poreux par évaporation dans lequel l'air de séchage en excès est passé à travers un couche mince d'un matériau jusqu'à atteindre le taux d'humidité d'équilibre.Les équations de séchage sur couche mince appartiennent à trois catégories, à savoir théorique, modèles semi-théoriques et empiriques.

1.6.1 Méthode théorique

Les modèles théoriques ne prennent en compte que la résistance interne au transfert d'humidité tandis que les deux autres catégories sont considérées pour étudier la résistance externe à un transfert d'humidité entre l'air et le produit. Les modèles théoriques sont dérivés de la deuxième loi de diffusion de Fick (1.1, 1.2). Alors que les modèles semi-théoriques dérivent généralement de la seconde loi de Fick et de ses modifications, mais aussi, de la loi de Newton sur le refroidissement.

Les modèles théoriques sont inadéquats et tendent à générer des résultats erronés et sont complexes pour des applications pratiques. Ils enveloppent trop d'hypothèses conduisant à un nombre considérable d'erreurs, limitant ainsi leur utilisation dans la conception des séchoirs.
Une équation théorique permet de mieux comprendre les processus de transport mais une équation empirique donne un meilleur ajustement aux données expérimentales sans aucune compréhension des processus de transport impliqués.

1.6.2 Méthode empirique

Une méthode empirique est une méthode basée sur des données expérimentales et une analyse sans dimension. Les modèles empiriques de séchage montrent une relation directe entre la teneur moyenne en humidité et le temps de séchage. Cependant, cette méthode omet les principes fondamentaux du processus de séchage et ses paramètres n'ont pas de signification physique, par conséquent, ils ne donnent pas une vue précise des processus importants qui se produisent pendant le phénomène en décrivant les courbes de séchage pour certaines conditions expérimentales.

1.6.3 Méthode semi−emririque

Des modèles semi-théoriques ont été développés pour faciliter l'utilisation et adapter les données de séchage du produit alimentaire. L'accent a été mis sur l'élaboration de modèles semi-théoriques pour parvenir à une harmonie entre théorie et facilité d'utilisation. De tels modèles sont généralement basés sur la loi de Newton sur le refroidissement appliquée au transfert de masse [4]. Parmi les modèles semi-théoriques, on trouve le modèle de deux termes, le Henderson et Pabis, Lewis, Page et page modifiée [3],[4], [6], [5].

1.6.4 Constante de séchage

Dans le concept de séchage en couche mince, la constante de séchage est la combinaison des propriétés de transport du séchage telles que la diffusivité de l'humidité, la conductivité thermique, la densité, la chaleur spécifique, la chaleur à l'interface et les coefficients de masse. Ainsi, la connaissance des propriétés de transport et de matériau sont nécessaires pour appliquer toute équation de transport.

1.6.5 Dérivation des modèles de couche mince

Des recherches sur l'étude de la cinétique de séchage en couche mince sont effectuées avec divers produits agricoles tels que les graines, les céréales, les fruits et certaines espèces de plantes. Le modèle Henderson et Pabis, utilisé d'abord pour le modèle de séchage du maïs est le premier terme de la solution en série générale à la loi de Fick[10].

Le concept des modèles de séchage en couche mince pour caractériser le comportement au séchage a été suggéré, initialement, par Lewis qui a dérivé le modèle semi-théorique pour les matériaux hygroscopiques poreux, qui est analogue à la loi de Newton sur le refroidissement. Le modèle est le suivant

$$MR = \frac{X - X_e}{X_0 - X_e} = exp(-k \times t) \tag{1.3}$$

où MR est le rapport d'humidité, k est la constante de séchage $(m-1)$, t est le temps de séchage, X , X_e, X_0 représentent la teneur en eau à tout moment, à l'équilibre et initiale, respectivement.

Page a modifié le modèle de Lewis en ajoutant une constante empirique sans dimension (n) et l'a utilisé pour étudier le comportement au séchage des corps décortiqués.

$$MR = \frac{X - X_e}{X_0 - X_e} = exp(-k \times t^n) \tag{1.4}$$

Pour étudier la cinétique de séchage du soja, des chercheurs ont modifié le Modèle de Page et ont obtenu l'équation suivante (ce modèle est appelé Modifié de Page) :

$$MR = \frac{X - X_e}{X_0 - X_e} = exp(-k \times t)^n \tag{1.5}$$

Plus tard, White et al. (1978) [13] font un petit changement dans (1.5) pour décrire les cinétique de séchage du soja (ce modèle est appelé Modifié de Page 2)

$$MR = \frac{X - X_e}{X_0 - X_e} = exp((-k \times t)^n) \tag{1.6}$$

De plus, pour le séchage de la patate douce, Diamante et Munro [14] ont modifié le modèle de page et onta proposé l'équation suivante (ce modèle est appelé modèle d'équation Modifié de Page 2)

$$MR = \frac{X - X_e}{X_0 - X_e} = exp(-k(\frac{t}{l^2})^n), \tag{1.7}$$

où l est une constante empirique (sans dimension).
Le modèle de Lewis pour la cinétique de séchage de la pomme et de la pomme de terre est [4]

$$MR = \frac{X - X_e}{X_0 - X_e} = exp(-k \times t) - a \times k \times t, \tag{1.8}$$

où k est la constante de séchage et a est la constante du modèle d'ajustement (sans dimension) introduit pour obtenir le meilleur ajustement du modèle avec les données. La constante de séchage k dépend des conditions de séchage, de la température, de la vitesse de l'air, humidité et les méthodes de séchage.

Le taux d'humidité (MR) peut être calculé par (1.9) au lieu de $\frac{X-X_e}{X_0-X_e}$ en raison de la faible valeur de X_e, par rapport à X, et X_0.

$$MR = \frac{X}{X_0} \tag{1.9}$$

Le tableau suivant résume les modèles semi empiriques récoltés dans les différents articles ([3], [4],[5], [6], [9], [10], [13], [14])

N	Nom de modèle	Equation de modèle
1	Newton/Lewis	$MR = exp(-k \times t)$
2	Page	$MR = exp(-k \times t^n)$
3	Modifié de Page	$MR = exp[(-k \times t)^n]$
4	Modifié de Page 2	$MR = exp(-k \times (\frac{t}{l}^2)^n)$
5	Modifié de Page 3	$MR = k \times exp(-\frac{t}{d^2})^n$
6	Henderson et Pabis	$MR = a \times exp(-k \times t)$
7	Logarithme	$MR = a \times exp(-k \times t) + c$
8	Deux Terme	$MR = a \times exp(-k_0 \times t) + b \times exp(-k_1 \times t)$
9	Deux Terme exponential	$MR = a \times exp(-k \times t) + (1 - a) \times exp(k \times a \times$
10	Wang et Singh	$MR = m_0 + a \times t + b \times t^2$ $MR = 1 + a \times t + b$
11	Singh et al	$MR = exp(-k \times t) - a \times k \times t$
12	Approximation de Diffusion (ou Diffusion Approach)	$MR = a \times exp(-k \times t) + (1 - a) \times exp(-k \times b$
13	Verma et al	$MR = a \times exp(-k \times t) + (1 - a) \times exp(-g \times b$
14	Modifié de Henderson et Pabis	$MR = a \times exp(-k \times t) + b \times exp(-g \times t) + c \times$
15	Le modèle de Aghabachlo	$MR = exp - (\frac{k_1 \times t}{1 + k_0 \times t})$
16	Ademiluyi Modifié	$MR = a \times exp - (k \times t)^n$
17	Weibull	$MR = exp(-(\frac{t}{a})^b)$
18	Midilli et al	$MR = a \times exp(-k \times t^n) + b \times t$
19	Le modèle de Paleg	$m - m_0 = -\frac{1}{k_1 + t \times k_2}, \frac{dm}{dt} = R = -\frac{k_1}{k_1 + t \times k_2}$
20	Silva et al	$MR = exp(-k \times t - b \times t^1/2)$
21	Thomson	$t = a \times ln(MR) + b \times [ln(MR)]^2$
22	Géométrique	$MR = a \times t^- n$
23	Addition Deux Terme et Page	$MR = a \times exp(-k \times t^n) + b \times exp(-h \times t^n)$
24	Balbay et Sahin	$MR = (1 - a)exp(-k \times t^n) + b$
25	Hasibuan et Daud	$MR = 1 - a \times t^n \times exp(-k \times t^n)$
26	Vega-Lemus	$MR = (a + k \times t)^2$
27	Simplifié de Fick's Diffusion	$MR = a \times exp(-k \times t) + c$
28	Hii et al	$MR = a \times exp(-k_1 \times t^n) + b \times exp(-k_2 \times t^n)$
29	Diamante et al	$ln(-lnMR) = a + b \times (lnt) + c \times (lnt)^2$
30	Demir et al	$MR = a \times exp(-k \times t)^n + b$
31	Le modèle parabolique	$MR = a + b \times t + c \times t^2$
32	Logistique	$MR = \frac{b}{1 + a \times exp(k \times t)}$
33	Binomial	$MR = a \times exp(-k_0 \times t) + b \times exp(k_1 \times t)$

Table 1.1 – Modèles mathématiques appliqués aux courbes de séchage en couches minces de différents produits

Chapitre 2

Simulation Monté Carlo de variables aléatoires

Introduction

Lorsque la résolution mathématique d'un problème donné n'est pas possible, on fait appel à des méthodes d'approximation. Cela permet de modéliser des situations très complexes dont la solution analytique s'avère difficile voir impossible. Parmi ces méthodes d'approximation figure la simulation, qui représente un outil très utile, elle permet de valider où d'invalider des hypothèses, d'obtenir des informations quantitatives, où tout simplement d'explorer le comportement d'un modèle lorsque celui$-$ci est mal connu où mal compris.
Dans ce chapitre, nous allons présenter quelques notions concernant la simulation de variables aléatoires, plus particulièrement, la simulation de monté$-$Carlo. Les variables aléatoires étudiées dans ce manuscrit sont supposées suivre des lois de probabilité de fonctions de répartition connues.

on souligne qu'on cite dans ce chapitre qu'une brève description des notions nécessaires à la compréhension de la suite de notre travail ; pour une description détaillé le lecteur est renvoyé aux références [12], [7], [8], comme on cite aussi une bonne référence pour la simulation monte carlo sur R [1]

2.1 Notions générales

2.1.1 Variables aléatoires

Soit $(\Omega,\ A,\ P)$ un espace probabilisé ; on appelle variable aléatoire sur $(\Omega,\ A,\ P)$, à valeurs dans l'ensemble E (fini ou infini dénombrable) toute application X de Ω dans E telle que :
$(\forall x \in E),\ \omega \in \Omega,\ X(\omega) = x \in A$
Si $E = \mathbb{Z}^*$ on dit que X est entière.
Si $E = \mathbb{N}$ on dit que X est entière positive.
Nous distinguons deux types de variables aléatoires : discrètes et continues.

Variables aléatoires discrètes

Une variable aléatoire est dite discrète quand $\Omega = N$,
$X : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$i \to X(i) = x_i \in \mathbb{R}$.

Variables aléatoires continues

C'est une variable aléatoire réelle i.e : $(E,\ A) = (\mathbb{R},\ B(\mathbb{R}))$ et telle que $\Omega = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^d$ ou un intervalle de ces espaces.

2.1.2 Loi de probabilité et fonction de densité

On appelle loi de probabilité de la variable aléatoire discrète X, la suite de probabilités $(p_k)_{k\in I},\ I \subset \mathbb{N}$ tels que :

$$\begin{cases} p_k \in [0 \ \ 1], \\ p_k = P(X = x_k), \\ \sum_{k\in I} p_k \ = 1. \end{cases} \tag{2.1}$$

On appelle fonction de densité de la variable aléatoire continue X, toute fonction f définie, continue et positive sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que l'aire formée par la courbe de f le long de son domaine de définition est égale à l'unité :

$$\begin{cases} f > 0,\ \text{définie et continue sur } I \\ \int_{t\in I} f(t)\ dt \ = \ 1. \end{cases} \tag{2.2}$$

Si X est une variable aléatoire continue sur $[a, b]$, la probabilité de l'événement $X \in [a, b]$, où $[a, b] \subset I$ est égale à l'aire sous la courbe de f le long de $[a, b]$, soit : $P(X \in [a, b]) = \int_a^b f(t)\ dt$.

2.1.3 Fonction de répartition

définition 2.1. On appelle fonction de répartition de la variable aléatoire X, la fonction F_X définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F_X = P_X(]-\infty, x]) = P(X \in (]-\infty, x]) = P(X \leq x) \tag{2.3}$$

Proposition. *La fonction de répartition F_x d'une variable aléatoire X satisfait les propriétés suivantes :*
i) $0 \leq F_X(x) \leq 1$ *pour tout x dans $\mathbb{R}$.*
ii) La fonction F_X est croissante.
iii) La fonction F_X est continue à droite.
iv) On a $\lim_{x\longrightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ *et* $\lim_{x\longrightarrow +\infty} F_X(x) = 1$.

2.1.4 L'espérance mathématique

l'espérance mathématique, ou la moyenne, d'une variable aléatoire X est dénotée par $E[X]$ est définie par :

$$\begin{cases} E[X] = \mu_x = \sum_{k=1}^{\infty}(x_k \times p_x(x_k)) & \text{si X est discrète.} \\ E[X] = \mu_x = \int_{-\infty}^{+\infty}(x\ f_X(x))\ dx & \text{si X est continue.} \end{cases} \tag{2.4}$$

2.1.5 La moyenne empirique

La moyenne empirique de l'échantillon $(X_j)_{j=1,\ldots,n}$:

$$\bar{x}_n = n^{-1} \times \sum_{j=1}^{n}(X_j)$$

Lorsque l'on suppose un échantillon aléatoire, la moyenne empirique elle même est considérée comme étant une variable aléatoire, donc possédant les mêmes caractéristiques, en particulier une loi de probabilité, une espérance et une variance.

2.2 Simulation Monté Carlo

2.2.1 Définition de la Simulation

La simulation est une technique de modélisation du monde réel, en essayant représenter le fonctionnement d'un système composé de différents centres d'activités, de mettre en évidence les caractéristiques de ceux−ci et les interactions entre eux, de décrire la circulation des différents objets traités par ces processus, et enfin d'observer le comportement du système dans son ensemble et son évolution dans le temps.
La formalisation du phénomène peut s'effectuer aux moyens de modèles mathématiques qui présentent l'avantage de fournir des résultats reflétant une évolution stable du système dans le temps.

définition 2.2.
Les méthodes de Monte-Carlo sont définies comme étant des techniques statistiques ayant pour but d'estimer la valeur des différents moments d'une distribution à l'aide d'un échantillon aléatoires $(Y)_{1:n} = Y_1, Y_2, ..., Y_i, ..., Y_n$ identiquement distribuées suit une loi de fonction de répartition F.

2.3 Principe de la simulation Monté−Carlo

Le principe de la méthode consiste à générer des valeurs d'une variable aléatoire X, dont la fonction de distribution F_x est connue. Il existe plusieurs méthodes pour obtenir des valeurs d'une variable aléatoire uniforme dans l'intevalle $[0, 1]$. Nous pouvons par exemple utiliser des logiciels de génération de nombres pseudo−aléatoires[1].

La simulation Monté−Carlo consiste alors à transformer ces valeurs, en utilisant la fonction réciproque de F_X. Ainsi, pour chaque valeur de u générée on calcule son quantile $Q_X(u)$.
Il faut noter que la variable $Q_X(U)$ est distribuée suivant la loi de X. En effet :
$P_r[Q_X(U) \leq a] = P_r[F_X(Q_X(U)) \leq F_X(a)]$
$= P_r[U \leq F_X(a)]$
$= F_X(a)$

2.4 Simulation d'une variable aléatoire

Il existe plusieurs méthodes Monté−Carlo pour simuler une variable aléatoire X de loi $f(x, \theta)$ ou θ est le vecteur des paramètres de f, parmi ces méthode on cite la méthode d'inversion.

2.4.1 Méthode d'inversion

principe

La méthode d'inversion est la plus simple des méthodes générales de simulation. Elle consiste à composer l'inverse de la fonction de répartition F de la distribution à simuler avec un générateur de la loi uniforme sur $[a, b]$.

F n'étant pas toujours inversible au sens classique, on défini son inverse de la façon suivante :

$$\forall u \in [a, b], F^{-1}(u) = inf(x; F(x) \geq u)$$

.

Théorème 2.1.
Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F, continue et strictement croissante, on a :

si $U \rightsquigarrow U([0,1])$ alors $F^{-1}(U)$ a la même loi que X.

Autrement dit, il suffit de simuler U suivant $U([0,1])$ puis appliquer la transformation $X = F^{-1}(U)$ pour simuler suivant la loi de X.

Preuve.
Supposons que X est continue, F est croissante et F^{-1} existe.
On pose $X = F^{-1}(U)$. Alors pour $U \in [0,1]$, on a $U \rightsquigarrow U([0,1])$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$P(X \leq x) = P(F^{-1}(u) \leq x) = P(u \leq F(X)) = F(X)$

Proposition 2.1.
Soient F une fonction de répartition sur $\mathbb{R}$ et U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$. Alors la variable aléatoire $X = f^{-1}(U)$, a pour fonction de répartition F.

Pour la preuve nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 2.1.
Pour tout $u \in [0,1], x \in R$
$F^{-1}(u) \leq x \Longleftrightarrow u \leq F(x)$.

Démonstration du lemme :

Pour l'implication directe, la croissance de F donne
$F(F^{-1}(u)) \leq F(x)$,
puisque la fonction de répartition est continue à droite
$F(F^{-1}(u)) \geq u$,
nous avons donc $F(x) \geq u$, quand à l'implication réciproque elle est triviale.

Démonstration de la proposition :

Il suffit d'écrire :
$\forall x \in R, P(X \leq x) = P(F^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F(x)) = F(x)$.
Cette proposition permet d'obtenir les formules analytiques utiles pour simuler un grand nombre de lois.

Algorithme d'inversion

Pour générer T, nombre aléatoires d'une variable X de fonction de répartition F, la méthode d'inversion propose l'algorithme suivant :

Entrées :T (Le nombre d'itération) .
  Poser $t = 1$.
  pour $t \leq T$ faire
    Générer un nombre pseudo$-$aléatoire u distribué selon $U[0,1]$.
    Poser $X_t = F^{-1}(u)$.
    $t = t + 1$.
fin

2.5 simulation de la loi uniforme $U([a,b])$

2.5.1 Génération d'un nombre aléatoire $U([0,1])$

La distribution de base qu'il faut savoir simuler numériquement est la loi uniforme sur $[0,1]$. Tout langages de programmation disposent d'un générateur de nombres au hasard dans $[0,1]$. Par exemple, en R le générateur est $runif$.

2.5.2 Fonction de répartition de la loi uniforme

La fonction de densité de cette loi et :
$f(X) = \{ \begin{array}{c} \frac{1}{b-a} six \in [a,b] \\ 0 sinon \end{array}$ La fonction de répartition d'une loi uniforme $U([a,b])$ est :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x < b \\ 1 & \text{si } x \geq b \end{cases}$$

Son inverse est comme suit :

$$F_X^{-1}(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u < 0 \\ (b-a)u + a & \text{si } 0 \leq u < 1 \\ 1 & \text{si } u \geq 1 \end{cases}$$

2.5.3 Algorithme de génération d'un nombre aléatoire $U([a,\ b])$

L'algorithme de génération de N réalisations d'une variable aléatoire $U([a,b])$ suivant la méthode d'inversion est comme suit :

Entrées :T (Le nombre d'itération) .
  Poser $i = 1$.
  pour $t \leq T$ faire
    $u = runif(1,0,1)$.
    Poser $X_i = (b-a) * u + a$.
    $i = i + 1$.
fin

2.6 Simulation de la loi exponentielle

Soit λ un réel strictement positif.
La loi exponentielle de paramètre λ est la loi ayant pour densité de probabilité la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \lambda \times e^{-\lambda \times x}$.
Si X suit la loi exponentielle de paramètre λ, alors on écrit $X \sim \varepsilon(\lambda)$

2.6.1 Fonction de répartition de la loi exponentielle

La fonction de répartition d'une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ est donnée par la proposition suivante :

Propriété 2.1.
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.
Alors, pour tout x de $[0;+\infty[$, on a : $P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda \times x}$.

Démonstration :

$P(X \leq x) = \int_0^x (\lambda \times e^{-\lambda \times t})dt = [-e^{-\lambda \times t}]^x = -e^{-\lambda \times x} + e^{-\lambda \times 0} = 1 - e^{-\lambda \times x}$.
$X \sim \varepsilon(\lambda) \Longleftrightarrow F(x) = 1 - e^{-\lambda \times x} \Longleftrightarrow F^{-1}(u) = -\frac{1}{\lambda} \times ln(1-u)$.
On pourrait donc poser $X = \frac{-ln(1-u)}{\lambda}$ mais on peut remarquer que si U suit une loi $U_{0,1}, 1-U$ également, on pose donc $X = -\frac{ln(u)}{\lambda}$

2.6.2 Algorithme de génération d'un nombre aléatoire $\varepsilon(\lambda)$

L'algorithme de génération de N réalisations d'une variable aléatoire $\varepsilon(\lambda)$ suivant la méthode d'inversion est comme suit :

Entrées :T (Le nombre d'itération) .
  Poser $i = 1$.
  pour $t \leq T$ faire
    $u = runif(1,0,1)$.
    Poser $X_i = -\frac{ln(u)}{\lambda}$.
    $i = i + 1$.
fin

2.7 Simulation de la loi normale

On dit qu'une variable aléatoire X suivre la loi normale de paramètres μ réel, et $\sigma > 0$, et on écrit $X \sim N(\mu, \sigma)$, si sa densité de probabilité s'écrit de la forme :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{(} - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})$$

$\mu = E(X)$ et σ est n écart-type.

2.7.1 Algorithme de génération d'une variable aléatoire $N(\mu, \sigma)$

La fonction de répartition F de la loi Normale est donnée par :
$F(x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$
où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, $N(0,1)$, avec
$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\times\pi}} \int_{-\infty}^{x} (e^{-\frac{t^2}{2}})dt$.
Le problème de la simulation de $N(\mu, \sigma^2)$ peut donc être vu comme le problème de l'invertion de la fonction de répartition de $N(0,1)$. En effet, si $Y \sim N(0,1)$, alors $X = \mu + \sigma \times Y$ suit $N(\mu, \sigma)$.

Dans le cas de la loi normale, on utilise la transformation de Box-Muller[1] au lieu de la méthode d'inversion, vu que la fonction de répartition n'a pa de forme explicite, et donc sa réciproque.

Soient u_1 et u_2, deux nombres aléatoires indépendants provenant d'une distribution uniforme sur $[0,\ 1]$. On calcule :

$$\begin{cases} z_1 = \sqrt{-2 \cdot \ln(u_1)} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot u_2) \\ z_2 = \sqrt{-2 \cdot \ln(u_1)} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot u_2) \end{cases}.$$

Les variables z_1 et z_2 suivent une loi normale centrée réduite.

Ensuite pour obtenir un échantillon généré par une variable aléatoire suivant par la loi$N(\mu, \sigma)$ on calcule :

$x_i = \mu + \sigma \cdot z_i$

L'algorithme de génération est alors :

Entrées :T (Le nombre d'itération) .

Poser $i = 1$.

pour $i \leq T$ faire

$u_1 = runif(1, 0, 1)$.

$u_2 = runif(1, 0, 1)$.

$z_1 = \sqrt{-2 \cdot \ln(u_1)} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot u_2)$

$z_2 = \sqrt{-2 \cdot \ln(u_1)} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot u_2)$

$x_1 = \mu + \sigma \cdot z_1$.

$x_2 = \mu + \sigma \cdot z_2$.

Poser $X_i = \frac{x_1+x_2}{2}$.

$i = i + 1$.

fin

2.8 Les commandes dans R pour la simulation d'un variable aléatoire

Loi	commande	Paramètres	Valeurs par défaut
Uniforme	runif	$n,\ min,\ max$	$0, 1$
Expenentielle	rexp	$n,\ \frac{1}{mean}$	1
Normale	rnorm	$n,\ mean,\ sd$	$0, 1$

TABLE 2.1 – tableau réprésenter Les commendes dans R pour la simulation d'un variable aléatoire

Dans le tableau (2.1) *mean* représente la moyenne de la variable, *sd* on écart-type et *n* la taille de l'échatillon à générer.

2.9 Aventages et inconvénients des méthodes de Monté Carlo

Parmi le avavtages des méthodes Monté Carlo, on les trouve

- Faciles à comprendre et à implémenter.
- Leurs domaine d'applicabilité est général.

Pour les es inconvénients, on cite :

- Leur facilité cause leur faiblesse lors des utilisations inappropriées.
- Vitesse de convergence lente comparées aux méthodes d'approximation déterministes.
- Difficulté de génération des échantillons représentatifs des cibles.
- Difficulté de contrôle de leur convergence.

Chapitre 3

Application aux cinétiques de séchage du laurier : Simulation des Paramètres des modèles de Lewis et Page

Introduction

Dans ce chapitre, on on présentera les résultats de la simulation des cinétiques de séchage des feuilles de laurier suivant le modèle de Lewis et celui de Page présenté dans le chapitre 1.

La simulation est faite en supposant que les paramètres de chaque modèle suit une loi de probabilité particulière. Le choix de cette loi est arbitraire néanmoins il existe des tests d'ajustements d'une loi empirique par une loi théorique, mais qu'on pourra pas appliquer ici pour des raisons qu'on expliquera plus loin dans le chapitre.

3.1 Présentation des données :

les données sont présentées dans les Tableaux (4, 5, 6, 7) Annexe A.

Les tableaux (4, 5) représentent les données brutes relevée lors de l'expérimentation consistant à observer la masse de la feuille de laurier séchée à des températures (puissances) différentes à des laps de temps égaux à 10 secondes (chaque 10 secondes on relève la feuille et on la pèse). On utilise trois feuilles de laurier similaires puis on relève les trois masses au même temps t ; la masse retenue pour t dans le tableau est la moyenne de ces trois masses.

Les tableaux (6, 7) représentent le taux d'humidité (MR) diffusé lors de séchage (vitesse de séchage) calculé à partir des données des tableaux Les tableaux (4, 5), suivant la relation (3.1).

3.2 Modélisation statistique

Toute la modélisation qui suit portera sur MR. On utilisera Deux modèles celui de Lewis et celui de Page décrit dans le chapitre 1, et on supposera que les paramètres de chaque modèle est une variable aléatoire de loi de probabilité.

Ainsi le problème est de trouver parmi les lois de probabilité théoriques connues celle qui est la meilleure adaptée au lois empiriques de paramètres des deux modèles sus-cités. On a recours alors à la simulation vu l'absence de données relatives aux paramètres eux mêmes.

Dans ce travail, on comparera les résultats de simulations de trois lois théoriques :

— La loi Normale

— La loi exponentielle

— La loi Uniforme

Ce choix est arbitraire, car un bon choix se doit d'être fait après ajustement à des données expérimentales des paramètre, chose qu'on a pas pu avoir car il faut sécher différentes matrices. Cette opération est très couteuse dans le processus de séchage par micro-onde, c'est pour cela qu'on fait recours à la simulation.

Le choix de trois lois seulement est justifié par le fait que dans ce travail l'objectif est de proposer une démarche par simulation Monté Carlo afin d'estimer les meilleurs paramètres de chaque modèle. Cette démarche serait donc le début à une étude générale des cinétiques de séchage de produits alimentaire ; on pourrait intégrer encore d'avantage de lois et en comparer plusieurs jusqu'à en trouver celle qui satisfait la modélisation.

La comparaison entre les réultats de simulation de chaque lois se basera essentiellement sur la minimisation de la somme des carrés des résidus entre la variable cinétique générée et expérimentale.

3.2.1 Le logiciel R

Le Logiciel utilisé dans lasuite de ce travail est le logiciel R. c'est un logiciel de statistique crée par Ross Ihaka et Robert gentleman. Il est à la fois un langage informatique et un environnement de travail : les commandes sont exécutées grâce à des instructions codées dans un langage relativement simple, les résultats sont affichés sous forme de texte et les graphiques sont visualisés directement dans une fenêtre qui leur est propre. C'est un clone du logiciel $S+$ qui est fondé sur le langage de programmation orienté objet S, développé par ATetT Bell laboratoires en 1988.

Ce logiciel sert à manipuler des données, à tracer des graphiques et à faire des analyses statistiques sur ces données. Il offre un environnement très complets de commandes statistiques simple d'utilisation et des environnements simples pour en créer ces propres outils d'analyse.

3.3 Modélisation des séries 180W, 300W, 450W, 600W, 900W

3.3.1 Position du problème

Soient le deux modèles de Lewis et de Page suivants :

$$MR_t = \exp(-kt) \tag{3.1}$$

$$MR_t = \exp(-kt^n) \tag{3.2}$$

Étant donné un vecteur $y_t = (y_{t_0}, \ldots, y_{t_k})$ de données expérimentales ($y_t = MR(180W)$, ou$MR(300W)$, ou$M$
de l'annexe A.), on cherche à trouver les meilleures valeurs de a et n tel que, lorsque on génère le vecteur des estimations relatives à ces paramètres $\hat{y}_t = (MR_{t_0}, \ldots, MR_{t_k})$, calculé à partir de l'une des équations (3.1, 3.2), la somme des carrés des résidus, définie par :

$$scr = \sum_{i=0}^{k} (y_{t_i} - \hat{y}_{t_i})^2 \tag{3.3}$$

soit la plus petite possible

3.3.2 Procédure de simulation générale

Pour y remédier à la problématique précédente, on suivra le schéma de simulation suivant :

1. Entrées : les vecteurs y relatif au données expérimentales et T relatif aux instants d'expérimentation, N nombre de fois à simuler, $i = 1$

2. Générer une valeur k du paramètre de la fonction de Lewis (respectivement de Page) par l'une des lois de probabilité sus-citées,
3. Générer Le vecteur $\hat{y}$ des estimations suivant l'une des équations (3.1, 3.2),
4. Calculer scr_i suivant l'équation (3.3)
5. répéter les étapes 2, 3 et 4 jusqu'à ce que $i = N$.
6. construire le vecteur $SCR = (scr_i)_{i=1,\ldots,N}$
7. Chercher l'indice l de la valeur scr_i minimale du vecteur SCR.
8. La meilleure estimation de k est donc k_l.

3.3.3 Utilisation de la loi uniforme

L'algorithme que nous utilisons pour cette loi est :

Début algorithme

- **Entrées : le nombre d'itération A, y et le vecteur temps t**
  - **poser** $i = 0$
  - **répéter**

$$+ \textbf{ Générer } k \textbf{ selon la loi uniforme}(1, k_m, k_M)$$
$$+ \; lewis = \exp(-k * t) \; \textbf{(}page = \exp(-k * t^m)\textbf{)}$$
$$+ \; scr = \sum(y - lewis)^2 \; \textbf{(}scr = \sum(y - page)^2\textbf{)}$$
$$+ \; z = min.scr$$

jusqu'à $i = A$ **s'arrêter**

- **retourner : k, scr, z**

Fin algorithme

La génération de k suivant la loi uniforme se fait comme on l'a cité dans le chapitre 2. Néanmoins il existe une commande R qui nous facilitera la programmation. Cette commande est une fonction prédéfinie dans R dont l'orthographe est :

$$runif(r, k_m, k_M),)$$

pour une variable qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[k_m \;\; k_M]$.

Justification des valeurs de k_m et k_M :

Pour choisir le valeurs de k_m et k_M on a procédé de la manière suivante :

$A-$ On d'abord résolu l'équation $\exp(-k * t) = MR_t$, pour chaque valeur de t et MR_t dans les tableaux ((6), (7)) Annexe A ; on obtient plusieurs valeurs de k pour chaque série.

$B-$ On peut alors jour sur les valeurs de k_m et k_M comme étant la val min et max de chaque série, ou des valeurs centrées par la moyenne de chaque série,... etc.

Pour la simulation suivant la loi uniforme, n prendra alors $k_m \in [0.01 \;\; 0.1]$ et $k_M \in [0.2 \;\; 0.3]$.

Le programme R qui permet de réaliser cette simulation et retourne la valeur de k qui ajuste au mieux les données expérimentales avec le modèle de Lewis (resp. Page) est présenté dans l'**Annexe B**.

L'execution de ce programme nous donne les résultats de simulations suivants :

Les séries	Le modèle de Lewis		Le modèle de Page	
	Le k qui done SCR minimale	SCR minimal	Le k qui done SCR minimale	SCR minimale
180W	0.015	706.08	0.011	1213.297
300W	0.166	16955.20	0.015	20442.93
450W	0.028	17139.12	0.010	21342.33
600W	0.154	37712.84	0.011	44177.49
900W	0.067	80411.74	0.023	89704.21

TABLE 3.1 – **RÉSULTAS DE LA SIMULATION PAR LA LOI UNIFORME**

Le tableau (3.1) résume les résultats des différentes simulations pour différentes valeurs de k. Il donne ainsi la valeur de k qui ajuste au mieux les données aux modèles de Lewis et Page, et ce pour les différentes séries.

Les résultats montrent que le modèle le mieux adapté pour modéliser les cinétiques de séchage de la feuille du laurier est le modèle de Lewis car il donne l'erreur minimale pour toute les séries.

3.3.4 Utilisation de la loi Normale

L'algorithme que nous utilisons pour cette loi est :

Début algorithme

- **Entrées : le nombre d'itération** A, y **et le vecteur temps** t
  - **poser** $i = 0$
  - **répéter**

$$+ \textbf{ Générer } a \textbf{ selon la loi normale}(1, \mu, sd)$$
$$+ \ lewis = \exp(-k * t) \ (page = \exp(-k * t^m))$$
$$+ \ scr = \sum(y - lewis)^2 \ (scr = \sum(y - page)^2)$$
$$+ \ z = min.scr$$

jusqu'à $i = A$ **s'arrêter**

- **retourner : k, scr, z**

Fin algorithme

Pour générer k selon la loi normale on utilise l'algorithme du chapitre 2. Néanmoins R possède une commande prédéfinie qui génère un nombre aléatoire de loi normale de moyenne μ et d'écart type sd. Cette fonction est définie par

$$rnorm(r, \mu, sd)$$

pour générer r nombres aléatoires de moyenne μ et d'écart type sd.

Dans notre cas :

— $r = 1$

— $\mu = 0.02$ pour le Modèle de Lewis et $\mu = 0.1$ pour celui de Page

— $sd = 0.01$ pour le Modèle de Lewis et $sd = 0.11$ pour celui de Page

L'execution de ce programme nous donne les résultats de simulations suivants :

Le tableau (3.2) montre que l'ajustement par le modèle de Page donne l'erreur minimale par rapport à celui de Lewis, contrairement à ce qu'on a conclu dans le travail précédent. Néanmoins, on remarque que l'erreur entre le modèle de Page validé dans cette étape et inférieure à celle du modèle de Lewis validé par la simulation avec la loi uniforme.

Les séries	Le modèle de Lewis		Le modèle de Page	
	Le k qui done SCR minimale	SCR minimal	Le k qui done SCR minimale	SCR minimale
180W	0.013	467.76	0.023	404.84
300W	0.024	14786.52	0.344	13941.93
450W	0.417	14729.07	0.146	14632.77
600W	0.010	33854.17	0.056	31200.34
900W	0.024	73136.46	0.178	62648.27

TABLE 3.2 – **Résultas de la simulation par la loi normale**

3.3.5 Utilisation de la loi exponentielle

L'algorithme que nous utilisons pour cette loi est :

Début algorithme

- **Entrées : le nombre d'itération** A**,** y **et le vecteur temps** t
  - **poser** $i = 0$
  - **répéter**

$$+ \textbf{ Générer } a \textbf{ selon la loi exponentielle}(1, \lambda)$$
$$+\ lewis = \exp(-k * t)\ (page = \exp(-k * t^m))$$
$$+\ scr = \sum (y - lewis)^2\ (scr = \sum (y - page)^2)$$
$$+\ z = min.scr$$

jusqu'à $i = A$ **s'arrêter**

- **retourner : k, scr, z**

Fin algorithme

Pour générer k selon la loi exponentielle on utilise l'algorithme du chapitre 2. Néanmoins R possède une commande prédéfinie qui génère un nombre aléatoire de loi exponentielle de moyenne λ. Cette fonction est définie par
$$rnorm(r, \lambda)$$
.

λ est choisi :

— $\lambda = 0.02$ pour le Modèle de Lewis

— $\lambda = 0.1$ pour celui de Page

Les séries	Le modèle de Lewis		Le modèle de Page	
	Le k qui done SCR minimale	SCR minimal	Le k qui done SCR minimale	SCR minimale
180W	0.354	1133.15	1.523	962.62
300W	22.263	20124.78	6.705	18388.37
450W	6.368	20905.18	3.102	19493.14
600W	18.683	41036.31	6.917	39591.67
900W	63.540	85904.74	3.453	81801.77

TABLE 3.3 – **Résultas de la simulation par la loi exeponentielle**

D'aprés le tableau(3.3), on remarque que le modèle le mieux adapté est le modèle de Page car il donne l'erreur minimale pour cette loi .

Conclusion

Parmis les trois lois utilisées dans la simulation des valeurs des paramètres des modèles à ajuster (Lewis, Page) avec les données expérimentales, la loi normale présente des résultats plus satisfaisant que les deux autres lois. De plus, grace à cette dernière, le modèle le mieux adapté pour décrire les vitesses des cinétiques de séchage des feuilles du laurier et celui de Page.

Conclusion Générale

Dans ce travail on a discuté une modélisation des cénitiques de séchage des feuilles de laurier assistée par micro-onde. cette dernière consistait à modéliser les vitesse de séchage représentée par MR par ajustement à des modèles semi empiriques existant dans la littérature. Chaqu'un de ces modèles comporte des paramètres à ajuster par des données expérimentales.

Il existe plusieurs techniques pour ajuster des données expérimentales à un modèle théorique. Dans ce travail on a choisi la simulation Monté Carlo, et ce relativement à deux points essentiels. Le premier réside dans le fait que la valeur du paramètre estimé du modèle varie d'un aliment à un autre et d'une technique de séchage vers une autre, ce qui nous permet de supposer que chaque paramètre est une variable aléatoire, ce qui nous mène au deuxième point, qui s'agit de chercher une technique de modélisation pour obtenir un modèle général pour toutes les matrices végétales.

La simulation permet, en supposant que chaque paramètre est une variable aléatoire de loi particulière de générer une suite de nombre suivant cette loi jusqu'à que le modèle sélectionné ajuste au mieux les données expérimentales.

Notre travail était alors de supposer deux modèles (Lewis et Page) pour les données relatives aux cinétiques de séchage du Laurier, en supposant que les paramètres de chaque modèle suivent une loi parmi les trois lois de probabilité suivantes : Uniforme, Exponentielle et Normale.

Les résultats de la simulation montre que le modèle de Page est le mieux adapté aux séries utilisées, et la loi la mieux adaptée pour ce modèle est la loi Normale.

Ce travail reste loin à être complet ; il consiste en une porte vers d'autres perspectives de travail qu'on résume dans les points suivant :

— Le choix des lois de probabilité peut être élargi vers d'autre lois
— Supposer que le paramètre du modèle est un processus stochastique comportant un processus de diffusion et utiliser la simulation sur ce dernier
— Intégrer l'effet de contrôle de la température dans la variation des valeurs du paramètre du modèle pour en construire un modèle de contrôle optimale.

Annexe A

le temps(sec)	La série 180W	La série 300W	La série 450W	La série 600W	La série 900W
0	100	100	100	100	100
10	97.41	95.09	93.83	94.77	95.34
20	93.56	87.94	86.02	88.10	95.08
30	90.04	81.51	79.33	80.63	82.23
40	86.65	75.88	72.37	79.75	76.24
50	83.2	71.31	67.27	68.60	71.85
60	79.88	67.21	63.1	63.71	67.83
70	77.7	64.03	59.59	60.1	64.26
80	75.44	61.31	57.27	57.5	61.37
90	73.45	59.26	55.62	55.98	59.78
100	71.39	57.87	54.23	54.59	58.27
110	69.67	56.81	53.24	53.07	56.81
120	68.34	55.82	52.44	52.22	55.81
130	67.08	55.16	51.98	51.48	54.95
140	66.02	54.56	51.25	51.02	54.02
150	64.96	53.96	50.59	50.22	52.95
160	64.23	53.7	50.19	50.16	52.22
170	63.57	53.24	49.93	49.9	51.62
180	62.91	52.97	49.53	49.63	51.16
190	62.57	52.57	49.33	49.5	49.83
200	62.04	52.51	49.13	49.3	49.56
210	58.93	52.31	48.93	49.1	49.56
220	58.66	52.24	48.8	49.04	
230	58.66	52.04	48.53	48.84	
240	58.66	52.04	48.53	48.84	
250	58.4	51.65	48.27	48.64	
260	58.27	51.65	48.27	48.64	
270	58.13	51.38	48.2	48.64	
280	58.13	51.38	48.14		
290	58	51.78	48.14		

Table 4 – Données relatives aux cinétiques de séchage des feuilles de laurier sur un micro-onde

le temps(sec)	La série 180W	La série 300W	La série 450W	La série 600W	La série 900W
300	59	51.78			
310	58.93	51.78			
320	58.66	58.92			
330	58.66	58.92			
340	58.53	50.85			
350	58.4	50.84			
360	58.27	50.85			
370	58.13				
380	58.13				
390	55.27				
400	57.93				
410	57.87				
420	57.8				
430	57.67				
440	57.67				
450	57.67				
460	57.67				
470	57.47				
480	57.47				
490	57.54				
500	57.47				

TABLE 5 – Données relatives aux cinétiques de séchage des feuilles de laurier sur un micro-onde (suite)

le temps(sec)	MR(180W)	MR(300W)	MR(450W)	MR(600W)	MR(900W)
10	2.59	4.91	6.17	5.23	4.66
20	3.85	7.15	7.18	6.67	0.26
30	3.52	6.43	6.69	7.47	12.85
40	3.39	5.63	6.96	0.88	5.99
50	3.45	4.57	5.1	11.15	4.39
60	3.82	4.1	4.17	4.89	4.02
70	2.18	3.18	3.51	3.61	3.47
80	2.26	2.72	2.32	2.6	2.89
90	1.99	2.05	1.65	1.52	1.59
100	2.06	1.39	1.39	1.39	1.51
110	1.72	1.06	0.99	1.52	1.46
120	1.33	0.99	0.8	0.85	1
130	1.26	0.66	0.46	0.74	0.86
140	1.08	0.6	0.73	0.46	0.93
150	1.06	0.6	0.66	0.8	1.07
160	0.73	0.26	0.4	0.06	0.73
170	0.06	0.46	0.26	0.26	0.6
180	0.66	0.27	0.4	0.27	0.46
190	0.34	0.4	0.2	0.13	1.33
200	0.53	0.06	0.2	0.2	0.27
210	3.11	0.2	0.2	0.2	0
220	0.27	0.07	0.13	0.06	
230	0	0.2	0.27	0.2	
240	0	0	0	0	
250	0.13	0.94	0.06	0.07	
260	0.13	1.33	0.2	0.13	
270	0.13	0	0	0	
280	0.14	0.27	0.07	0	
290	0	0	0.06		

TABLE 6 – Taux d'humidité lors du séchage des feuilles de laurier sur un micro-onde

le temps(sec)	MR(180W)	MR(300W)	MR(450W)	MR(600W)	MR(900W)
300	0.13	0.4	0		
310	1	0			
320	0.07	0			
330	0.27	7.14			
340	0	0			
350	0.13	8.07			
360	0.13	0			
370	0.13	0			
380	0.14				
390	0				
400	2.86				
410	2.66				
420	0.06				
430	0.07				
440	0.13				
450	0				
460	0				
470	0.2				
480	0				
490	0.07				
500	0.07				

Table 7 – Taux d'humidité lors du séchage des feuilles de laurier sur un micro-onde (suite)

Annexe B

Le programme R pour la simulation des paramètres des fonctions de Lewis et Page

$n = length(t)$
$lewis = function(a, b)\{$
$exp(-a * b)\}$
$scr = function(c, d)\{$
$(c - d)^2\}$
$i = 0$
$z = rep(0, A)$
$erreur = rep(0, A)$
repeat{
$k = runif(1, 0.01, 0.2)$%₀générer le nombre aléatoire k selon la loi uniforme, pour la loi normale et exponentielle on modéfie cette commande.
$f = lewis(k, t)$
$g = scr(y, f)\%_{¸} * \%_{¸}(y, f)$
$h = list(u = k, o = f, p = g)$
$i = i + 1$
print(h)
$z[i] = h\$u$
$erreur[i] = h\$p$
if($i == A$)break
}
z
$erreur$
tab=data.frame(z,erreur)
tab
j=which.min(erreur)
print("le k qui donne erreur minimale pour la loi est :")
j
print("element")
$z[j]$

Pour le modèle de page, le programme est le même seulement au lieu de
$lewis = function(a, b)\{$
$exp(-a * b)\}$
on change
$Page = function(a, b)\{$
$exp(-a * b\hat{\ }m)\}$

Bibliographie

[1] Robert Christian and Casella Georges. *Méthode de Monte Carlo avec R*. Springer verlag edition, 2011.

[2] Remache Rebaia Leila. *Modelisation des phenomenes de transfert de chaleur et de masse dans les milieux poreux hygroscopiques*. PhD thesis, 2011.

[3] Krishna Murthy. Mathematical modeling of thin layer microwave drying kinetics of elephant foot yam (Amorphophallus paeoniifolius). 21(3) :1081–1087, 2014.

[4] Thu Ha Nguyen. *Étude expérimentale et modélisation du procédé de séchage des végétaux Thu Ha Nguyen To cite this version : HAL Id : tel-01297965*. PhD thesis, 2016.

[5] Ricardo Cardoso De Oliveira, Robson Marcelo Rossi, and Marcelino Luiz Gimenes. Evaluation of semi-empirical and non-linear drying models by Bayesian inference. pages 635–641, 2014.

[6] Wilton Pereira, Cleide M D P S Silva, and Fernando J A Gama. Mathematical models to describe thin-layer drying and to determine drying rate of whole bananas. *Journal of the Saudi Society of Agricultural Sciences*, 13(1) :67–74, 2014.

[7] Christoph Reinhart. *Lecture 9 : Daylight Simulations*.

[8] Gilbert Saporta. *Probabilités, analyse des données et Statistique*. Technip edition, 2011.

[9] Raymond C Shreckengost. *DYNAMIC SIMULATION MODELS : HOW VALID ARE THEY ?*

[10] Ahlem Soltani, Soufien Azzouz, and Feriel Rezouga. Modélisation mathématique des cinétiques de séchage en couches minces des feuilles de laurier noble (Laurus nobilis), 2015.

[11] D E Séchage D E S Végétaux. Étude expérimentale et modélisation du procédé de séchage des végétaux. 2015.

[12] Jacob White, Deepak Ramaswamy, and Michal Rewienski. *Introduction to Simulation*. Wiley & son., 2004.

[13] Mahmoud Younis, Diaeldin Abdelkarim, and Assem Zein El-abdein. Kinetics and mathematical modeling of infrared thin-layer drying of garlic slices. *Saudi Journal of Biological Sciences*, 25(2) :332–338, 2018.

[14] Yuenan Zhou and Yiying Jin. Mathematical modeling of thin-layer infrared drying of dewatered municipal sewage sludge (DWMSS). *Procedia Environmental Sciences*, 31(86) :758–766, 2016.

Résumé

Ce travail consiste à déterminer une modélisation empirique des cinétiques de séchage des feuilles de laurier assistée par micro−onde. La modélisation consiste à ajuster les données expérimentales de 5 séries relatives à 5 puissances $(180W, 300W, 450W, 600W, 900W)$, par deux modèles semi-empiriques existant dans la littérature (Lewis et Page) en utilisant une méthode parmi les méthodes Monté−Carlo pour générer une variable aléatoire qui suit une loi donnée $(uniforme, expinentielle, normale)$. Les résultats de simulation sont discutés dans le dernier chapitre

Mots clés Séchage de feuilles de laurier, Méthode Monté−Carlo, Méthode d'inversion, Loi uniforme, Loi expenentielle, Loi normale, Modéle de page, Modèle de lewis, Le logiciel R.

Abstract

This work consists on an emperical modelisation of lauris microwave drying kenitics. This latter is about an adjustemnt of experimental data for five series corresponding to an experimentation of five power of the microwave, with two semi emperical models (Lewis ad Page), found in the litterature, uing a Monte Carlo simulation method to generate a rondom variable following some density of probability. The results of simulation are discussed within the last chapter of the manuscript.

Key words Microwave drying kenitics, Monte−Carlo method, Inversion Method, Uniforme density, expenential density, Normal density, Page's model, lewis Model, Rsoftware.