



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE AKLI MOHAND OULHADJ-BOUIRA
Faculté des Sciences et des sciences appliquées
Département de Génie Mécanique

Projet de fin d'étude

Présenté pour l'obtention du diplôme de Master

Filière : Génie Mécanique

Option : Energétique

Thème :

Analyse par éléments finis d'un transfert de chaleur unidirectionnel et bidirectionnel en régimes stationnaire et transitoire

Réalisé par : DENDANI Mohammed

Évalué par le jury composé de :

M. LATTARI Kamel	MCB	Université de Bouira	Examineur
		Université de Bouira	Examineur
		Université de Bouira	Encadreur

Promotion 2019/2020

Remerciements

Je remercie Dieu le tout-puissant de m'avoir donné la force et la volonté nécessaires pour accomplir ce travail.

J'adresse mes plus vifs remerciements à mon encadreur **M. LATTARI Kamel** de m'avoir aidé à bien comprendre le sujet dans les moindres détails et de m'avoir exhorté à faire des efforts pour aboutir au terme de ce mémoire. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Je tiens également à exprimer ma gratitude envers tous les enseignants du Département de Génie Mécanique, de l'université Akli Mohand Oulhadj, en particulier à **M. MAZRAK DAHMAN**.

Dédicaces

J'ai le grand honneur de dédier ce travail à **mon cher père** pour ses conseils et l'effort qu'il a déployé pour m'amener à ce stade de l'éducation, Et **ma chère mère** pour les soins exceptionnels qu'elle m'a prodigués tout au long de période d'étude. et l'affection qui me énormément aidée pour ma réussite et j'espère que Dieu les gardera et j'ai leur souhaite la longévité

A ma grande mère qui j'ai leur souhaite la longévité.

A mes deux frères Mohkttar et Housseem.

Sommaire

Remerciements	i
Dédicaces.....	ii
Sommaire	iii
Liste des figures.....	vii
Liste des tableaux.....	ix
Nomenclature.....	x
Liste des abréviations.....	xii
INTRODUCTION GENERALE	1
CHAPITRE I : Aspect général sur le transfert de chaleur	
I.1 Introduction.....	2
I.2 Définition du transfert de chaleur.....	2
I.3 Relation entre la thermodynamique et le transfert de chaleur.....	3
I.4 Mécanismes de transfert de chaleur	5
I.5 Bilan d'énergies	6
I.6 Expressions des flux d'énergie	6
I.6.1 Conduction	6
A) Définition	6
B) Domaines d'applications	7
I.6.2 Rayonnement	8
A) Définition	8
B) Domaines d'applications	8
I.6.3 Convection.....	9
A) Définition	9
B) Domaines d'applications	10
I.6.4 Flux de chaleur lié à un débit massique	10
I.6.5. Stockage d'énergie	11
I.6.6 Génération d'énergie.....	11
I.7 Equation de la chaleur	12
a) Si le milieu est isotrope $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = \lambda$	12
b) Si l'écart de température n'est pas important, λ peut être considérée constante.....	13
c) En régime stationnaire.....	13
d) S'il n'y a pas de génération d'énergie à l'intérieur du système ($q = 0$)	13

I.8 Conclusion	14
----------------------	----

CHAPITRE II : Discrétisation par la méthode des éléments finis

II.1 Introduction.....	15
II.2 Principe de la méthode des éléments finis	15
II.3 Différentes formes d'éléments finis.....	16
II.3.1 Eléments à une dimension	16
A) Elément linéaire à deux nœuds	16
B) Elément linéaire à trois nœuds	16
II.3.2 Eléments à deux dimensions	16
A) Elément quadrilatéral à quatre nœuds	16
B) Elément quadrilatéral à huit nœuds.....	17
C) Elément triangulaire à trois nœuds.....	17
II.3.3 Eléments à trois dimensions.....	17
A) Eléments tétraédriques à 4 nœuds	17
B) Eléments hexaédriques à 8 nœuds	17
II.4 Forme intégrale de l'équation de chaleur	18
II.5 Mise en œuvre pratique de la méthode des éléments finis	19
<i>Etape I</i> : Identification du problème.....	20
<i>Etape II</i> : Choisir des fonctions de température convenables	20
<i>Etape III</i> : Relier les températures générales de l'élément aux températures nodales.....	21
<i>Etape IV</i> : Discrétisation de la forme intégrale.....	22
<i>Etape V</i> : Assemblage	23
II.6 Résolution en régime stationnaire	24
II.7 Résolution en régime transitoire	24
II-8 Conclusion	26

CHAPITRE III : Calculs élémentaires

III.1 Introduction.....	27
III.2 Elément fini linéaire à deux nœuds.....	27
<i>Etape I</i> : Identification du problème.....	27
<i>Etape II</i> : choisir des fonctions de température convenables	27
<i>Etape III</i> : Relier les températures générales de l'élément aux températures nodales.....	28
<i>Etape IV</i> : Discrétisation de la forme intégrale.....	29
III.3 Elément fini rectangulaire à quatre nœuds	31

<i>Etape I</i> : Identification du problème.....	31
<i>Etape II</i> : Choisir des fonctions de température convenables	32
<i>Etape III</i> : Relier les températures générales de l'élément aux températures nodales.....	32
<i>Etape IV</i> : Discrétisation de la forme intégrale.....	34
III.4 Conclusion	38

CHAPITRE IV : EXPERIMENTATION NUMERIQUE

IV.1 Introduction	39
IV.2 Transferts de chaleur unidirectionnels en régime stationnaire	39
IV.2-1 Exemple de validation	39
A) Description du problème.....	39
B) Résolution analytique	40
C) Résolution par la MEF.....	41
D) Résolution par le logiciel ANSYS-APDL	45
E) Comparaison des résultats obtenus par les trois méthodes.....	46
IV.2-2 Exemple d'un problème convectif	47
IV.2-3 Exemple d'un problème sans températures imposées	50
IV.3 Transfert de chaleur unidirectionnel en régime transitoire	51
IV.3-1 Description du problème	51
IV.3-2 Résolution par la méthode analytique.....	52
IV.3-3 Résolution par la méthode des éléments finis	57
A) En considérant deux éléments-finis	57
B) En considérant quatre éléments-finis	60
C) En considérant huit éléments-finis.....	61
IV.3-4 Résolution par le logiciel ANSYS.....	62
IV.3-5 Comparaison des résultats.....	63
IV.4 Transfert de chaleur bidirectionnel en régime stationnaire.....	65
IV.5 Transfert de chaleur bidirectionnel en régime transitoire	67
IV.5-1 Exemple de validation	67
IV.5-2 Résolution par la MEF	70
IV.6 Conclusion	70
CONCLUSION GENERALE	71
Références bibliographiques.....	72

Annexes

Annexe 1 : Programme pour le calcul de la matrice inverse de A	73
Annexe 2 : Programme pour le calcul des matrices d'interpolation N	73
Annexe 3 : Programme pour le calcul de matrice de capacité thermique C_e	73
Annexe 4 : Programme pour le calcul de matrice de conductivité thermique K_e	74
Annexe 5 : Programme pour le calcul du vecteur des flux de chaleur F_e	74
Annexe 6 : Programme pour la résolution de l'exemple de validation	75
Annexe 7 : Données pour la résolution de l'exemple de validation à quatre nœuds	76
Annexe 8 : Données pour la résolution de l'exemple de validation à huit nœuds.....	76
Annexe 9 : Méthodologie de simulation sous le code ANSYS en régime stationnaire.....	77
Annexe 10 : Programme pour le calcul de la solution analytique en régime transitoire	82
Annexe 11 : Programme pour le calcul de la solution élément-fini en régime transitoire	82
Annexe 12 : Méthodologie de simulation sous le code ANSYS en régime transitoire	84
Annexe 13 : Programme relatif au calcul stationnaire en utilisant un élément fini rectangulaire	93
Annexe 14 : Programme relatif au calcul transitoire en utilisant un maillage de huit éléments finis rectangulaires	94

Résumés

Liste des figures

Fig. I-1: Exemple illustrant les différents types de transferts de chaleur dans une prote bi-vitrée.....	3
Fig. I-2 : Un modèle thermodynamique classique et un modèle de transfert de chaleur d'une automobile typique moteur à combustion interne (à allumage par étincelle).....	5
Fig. I-3 : système et bilan énergétique	6
Fig. I-4 : schéma de transfert de chaleur conductif.....	7
Fig. I-5 : schéma du transfert de chaleur radiatif.....	8
Fig. I-6 : schéma du transfert de chaleur convectif	10
Fig. I-7 : Bilan thermique appliqué à un système élémentaire.....	12
Fig. II-1 : Élément linéaire à deux nœuds.....	16
Fig. II-2 : Élément linéaire à trois nœuds	16
Fig. II-3 : Élément quadrilatéral à quatre nœuds.....	16
Fig. II-4 : Élément quadrilatéral à huit nœuds	17
Fig. II-5 : Élément triangulaire à nœuds	17
Fig. II-6 : Élément tétraédriques à 4 nœuds	17
Fig. II-7 : Élément hexaédriques à 8 nœuds.....	17
Fig. II-8 : Domaine plan discrétisé en 12 éléments reliés entre eux par 15 nœuds	20
Fig. II-9 : Evolution linéaire de la température sur l'intervalle Δt	25
Fig. III-1 : Barre discrétisée en 6 éléments reliés par 7 nœuds	27
Fig. III-2 : élément à deux nœuds	27
Fig. III-3 : Exemple de discrétisation d'une plaque en 8 éléments reliés par 15 nœuds	31
Fig. III-4 : Élément fini rectangulaire à quatre nœuds.....	32
Fig. IV-1 : Description de l'exemple de validation.....	39
Fig. IV-2 : Exemple de validation discrétisé en deux éléments-finis où $L_1 = \frac{L}{2} = 0,05m$	41
Fig. IV-3 : Exemple de validation discrétisé en quatre éléments-finis où $L_1 = \frac{L}{4} = 0,025m$...	43
Fig. IV-4 : Exemple de validation discrétisé en huit éléments-finis où $L_1 = \frac{L}{8} = 0,0125m$	44
Fig. IV-5 : Températures nodales obtenues par le logiciel ANSYS	46
Fig. IV-6 : Comparaison des résultats pour différents maillages avec la solution analytique .	47

Fig. IV- 7: Exemple d'un problème convectif	47
Fig. IV-8 : Exemple d'un problème sans températures imposées.....	50
Fig. IV-9 : Exemple d'un transfert de chaleur unidirectionnel en régime transitoire.....	52
Fig. IV-10 : Variation de la température en fonction du temps, pour différentes positions, obtenue par la méthode analytique.....	56
Fig. IV-11 : Barre discrétisée en deux éléments finis où $L_1 = 0,05m$	57
Fig. IV-12 : Variation de la température en fonction du temps, à mi-longueur de la barre, obtenue par la méthode des éléments-finis en considérant deux éléments.....	60
Fig. IV-13 : Barre discrétisée en quatre éléments finis où $L_1 = 0,025m$	60
Fig. IV-14 : Variation de la température en fonction du temps obtenue par la méthode des éléments-finis en considérant quatre éléments-finis.....	61
Fig. IV-15 : Barre discrétisée en huit éléments finis où $L_1 = 0,0125m$	61
Fig. IV-16 : Variation de la température en fonction du temps, pour différentes positions, obtenue par la méthode des éléments-finis en considérant huit élément.....	62
Fig. IV-17 : Variation de la température en fonction du temps, pour différentes positions, obtenue par le logiciel A NSYS.....	62
Fig. IV-18 : Comparaison des résultats obtenus par les trois méthodes à mi-longueur de la barre.....	63
Fig. IV-19 : Variation en fonction du temps de l'erreur relative obtenue entre la solution analytique et la solution élément-fini.....	64
Fig. IV-20 : Variation en fonction du temps de l'erreur relative obtenue entre la solution analytique et la solution élément-fini.....	64
Fig. IV-21 : Discrétisation du mur en deux éléments rectangulaires.....	65
Fig. IV-22 : Discrétisation du mur en huit éléments rectangulaires.....	67
Fig. IV-23 : Variation de la température en fonction du temps, pour différentes positions, Obtenue par la méthode des éléments-finis	69
Fig. IV-24 : Comparaison des résultats obtenus, au nœud 2, par les deux méthodes analytique et éléments-finis.....	70

Liste des tableaux

Tableau IV-1 : Calcul des matrices élémentaires d'un problème à 2 éléments linéaires.....	42
Tableau IV-2 : Résultats obtenus par les trois méthodes en régime stationnaire.....	46
Tableau IV-3 : Calcul des matrices élémentaires du problème sans températures imposées	50

Nomenclature

φ : Flux de chaleur	(w) (Kcal/h)
λ : Conductivité thermique des matériaux	(w/m. K)
A: Surface traversée par le flux de chaleur	(m ²)
T : Température	Kelvin
h_c : Désigne le coefficient d'échange entre la paroi et le fluide	(W . m ⁻¹ . K ⁻¹)
σ : Constant de Stefan-Boltzmann	(5,67. 10 ⁻⁸ W m ⁻² K ⁻⁴)
ϵ : Emissivité de surface 0< ϵ >1 (=1 pour un corps noir)	
φ_e : Flux de chaleur entrant dans le système	(W)
\dot{m} : Débit massique	(K _g . S ⁻¹)
C_p : Chaleur Spécifique	(J. K _g ⁻¹ . K ⁻¹)
q : La puissance thermique générée par unité de volume	(W/m ³)
L : La longueur	(mm)
b : La longueur d'un élément rectangulaire	(mm)
h : La hauteur	(mm)
x : Variable d'espace dans la direction du flux	(m)
Q : La puissance thermique reçue par le système	(W)
T_p : Température de surface du solide en	Kelvin
T_∞ : Température du fluide loin de la surface du solide en	Kelvin
S : Aire de la section de passage du flux de chaleur	(m ²)
S_T : Surface du solide où les températures sont imposées	
S_φ : Surface du solide où les flux sont imposés.	
φ_{st} : Flux de chaleur stocké	(W)
ρ : Masse volumique	(K _g . m ⁻³)

V :	Volume	(m^3)
t :	temps	(s)
φ_g :	Flux d'énergie thermique générée	(W)
q :	Densité volumique d'énergie générée	$(\text{W} \cdot \text{m}^{-3})$
$[f(x, y, z)]$:	La fonction polynomiale	
$\{\alpha\}$:	Le vecteur colonne des coefficients inconnus de la fonction polynomiale	
$\{T(x, y, z)\}_e$:	La température au point (x, y, z) de l'élément	Kelvin
$[K]_e$:	La matrice de conductivité thermique élémentaire	(W/m^2)
$[C]_e$:	La matrice de capacité thermique élémentaire	(J/K)
$\{F\}_e$:	Le vecteur des flux élémentaire	(w)
$\{T\}_e$:	Le vecteur des températures élémentaire	Kelvin
$\{T_n\}_e$:	Le vecteur des températures nodales élémentaire	Kelvin
$[N]$:	La matrice d'interpolation	(mm)
$[N]_e$:	La matrice d'interpolation élémentaire	(mm)
$[N]_{e,n}$:	La matrice d'interpolation élémentaire nodale	(mm)
$[N]_e^T$:	La matrice d'interpolation élémentaire transposée	(mm)
$[B]_e$:	La matrice garde de la matrice d'interpolation	(mm)
$[K]$:	La matrice de conductivité thermique globale	(W/m^2)
$[C]$:	La matrice de capacité thermique globale	(J/K)
$\{F\}$:	Le vecteur des flux nodaux global	(w)
$\{T\}$:	Le vecteur des températures global	Kelvin
$\{T_n\}_e$:	Le des températures nodales vecteur élémentaire	Kelvin
$\{T_p\}$:	Le vecteur des températures connues	Kelvin
$\{T_L\}$:	Le vecteur des températures inconnues	Kelvin

Liste des abréviations

MEF : méthode des éléments finis

EDP : équations aux dérivées partielles

APDL : langage de conception paramétrique ANSYS

INTRODUCTION GENERALE

La modélisation mathématique des phénomènes physiques est souvent décrite par des équations aux dérivées partielles (EDP) dont la solution analytique est en général inaccessible. On est donc conduit à chercher une solution approchée via des méthodes numériques.

La méthode des éléments finis est, aujourd'hui, l'une des méthodes numériques les plus utilisées pour résoudre ces équations. Elle consiste à utiliser une approximation simple des variables inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques. C'est une méthode très générale qui s'applique à la majorité des problèmes rencontrés dans la pratique : problèmes stationnaires ou non stationnaires, linéaires ou non linéaires, définis dans un domaine géométrique quelconque à une, deux ou trois dimensions. De plus, elle s'adapte très bien aux milieux hétérogènes souvent rencontrés dans la pratique par l'ingénieur.

L'objectif de ce travail consiste essentiellement à l'application de la méthode des éléments finis pour la résolution des problèmes de transferts de chaleur unidirectionnels et bidimensionnels en régime stationnaire et transitoire. Pour ce faire, le mémoire est organisé en quatre chapitres :

Après cette introduction, vient le premier chapitre dans lequel nous rappellerons, d'une façon succincte, les formules représentatives des différents modes de transferts de chaleur ainsi que la formulation analytique de l'équation de la chaleur en régime stationnaire et transitoire. Puis dans le deuxième chapitre, il s'agit de montrer comment obtenir la forme faible des équations de transfert de chaleur ce qui constitue l'ingrédient essentiel de la méthode des éléments finis. Ensuite, nous présenterons dans le troisième chapitre la mise en œuvre pratique de la MEF par le calcul des matrices élémentaires dans les cas d'un élément fini linéaire à deux nœuds et d'un élément fini rectangulaire à quatre nœuds. Le dernier chapitre sera consacré à l'expérimentation numérique où plusieurs exemples seront présentés afin d'illustrer les techniques d'assemblage des matrices globales et la résolution des systèmes algébriques obtenus. Les résultats numériques seront comparés avec ceux issus de la méthode analytique et du code ANSYS. Et nous terminerons par une conclusion générale qui débouchera sur quelques recommandations futures.

CHAPITRE I : Aspect général sur le transfert de chaleur

I.1 Introduction

L'objectif de ce présent chapitre consiste, en premier lieu, à présenter les lois qui régissent les trois modes principaux de transfert thermique (conduction, rayonnement et convection) ainsi que les expressions de l'énergie stockée et générée. Il s'agit, en second lieu, de développer l'équation de la chaleur en considérant le bilan énergétique de l'ensemble de ces énergies. L'expression ainsi obtenue sera présentée et simplifiée pour le cas d'un transfert de chaleur bidimensionnel et en régime stationnaire et transitoire.

I.2 Définition du transfert de chaleur

Chaque fois qu'un gradient de température existe dans un système, ou chaque fois que deux systèmes à des températures différentes sont mis en contact. L'énergie est transférée. Le processus par lequel l'énergie, transportée d'un lieu à un autre, est connu comme transfert de chaleur. La chose en transit, appelée chaleur, ne peut pas être observée ou mesurée directement. Cependant, ses effets peuvent être identifiés et quantifiés au moyen de mesures et d'analyses. Le flux de chaleur, comme l'exécution du travail, est un processus par lequel l'énergie initiale d'un système est changée. [1].

A la base de l'étude des transferts thermiques se trouvent les concepts de quantité de chaleur et de différence de température. Le transfert de chaleur d'une partie d'une substance à une autre partie, ou d'un corps à un autre corps, s'effectue sous forme d'énergie cinétique.

Ce transfert est dû à la différence de température entre les deux corps. La chaleur se propage spontanément du corps ayant la température la plus élevée vers celui ayant la température la plus basse, élevant ainsi la température de ce dernier, tout en abaissant la température du premier, dans la mesure où le volume des deux corps reste constant. Ceci constitue le second principe de la thermodynamique qui met en évidence la notion d'irréversibilité : La chaleur ne pourra pas se propager d'un corps froid vers un corps chaud, sauf si on fournit un travail [2].

Dans la littérature relative à cette discipline, on reconnaît généralement trois modes distincts de transmission de la chaleur : la conduction, la convection et le rayonnement.

En outre, il est rare qu'une situation particulière ne concerne qu'un seul mode : le plus souvent 2 sinon 3 modes entrent en jeu. Il sera donc nécessaire de poser correctement les problèmes pour prendre en compte ces différents mécanismes [3].

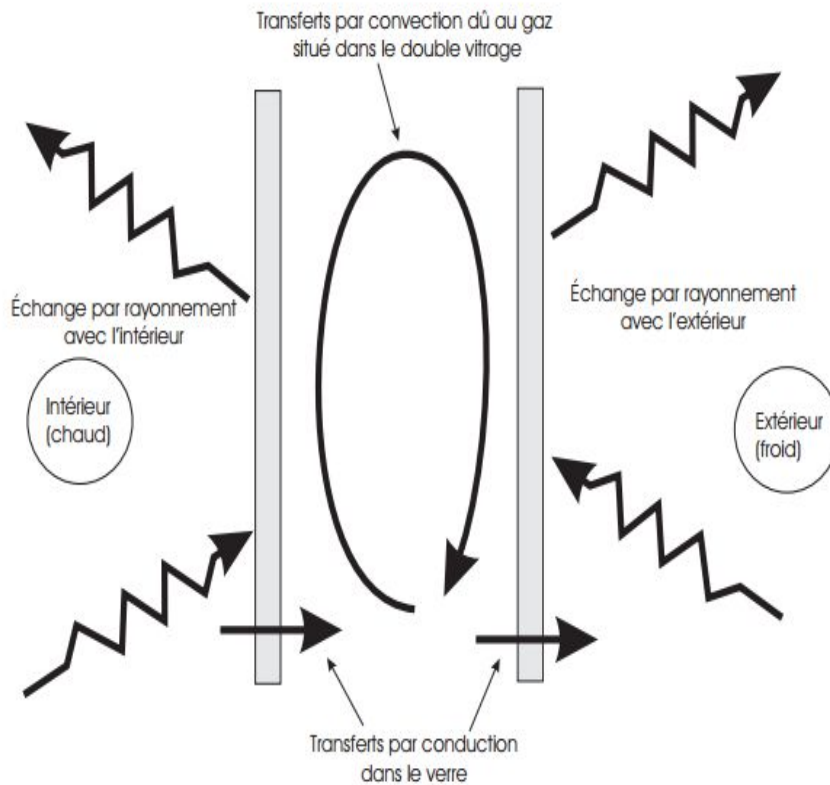


Fig. I-1: Exemple illustrant les différents types de transferts de chaleur dans une porte bi-vitrée. [4]

I.3 Relation entre la thermodynamique et le transfert de chaleur

La branche de la science qui traite de la relation entre la chaleur et d'autres formes de l'énergie, y compris le travail mécanique en particulier, est appelé thermodynamique. Ses principes, comme toutes les lois de la nature, sont fondés sur des observations et ont été généralisés dans les lois que l'on croit tenir pour tous les processus se produisant dans la nature parce qu'aucune exception n'a jamais été trouvée. Par exemple, la première loi de la thermodynamique déclare que l'énergie ne peut être ni créée ni détruite, mais seulement changée d'une forme à l'autre. Elle régit toutes les transformations énergétiques quantitativement, mais ne pose aucune restriction sur la direction de la transformation. Il est connu, cependant, de l'expérience qu'aucun processus n'est possible dont le seul résultat

est le transfert net de chaleur d'une région de température inférieure à une région de température plus élevée [1].

Tous les processus de transfert de chaleur impliquent l'échange et/ou la conversion d'énergie. Ils doivent donc obéir à la première comme à la seconde loi de la thermodynamique. A première vue, on pourrait donc être tenté de supposer que les principes de transfert de chaleur peuvent être dérivés des lois de base de la thermodynamique. Cette conclusion serait toutefois erronée, car la thermodynamique classique se limite principalement à l'étude des états d'équilibre, y compris les équilibres mécaniques, chimiques et thermiques, et est donc, par elle-même, de peu d'aide dans la détermination quantitative des transformations qui se produisent à partir d'un manque d'équilibre dans les processus d'ingénierie. Puisque le flux de chaleur est le résultat du non équilibre de température, son traitement quantitatif doit être basé sur d'autres branches de la science. Le même raisonnement s'applique à d'autres types de processus de transport tels que le transfert de masse et la diffusion [1].

L'exemple schématique d'un moteur automobile de la Fig. I-2 illustre de l'analyse thermodynamique et de transfert de chaleur. Alors que la loi fondamentale d'économie d'énergie est applicable dans les deux, d'un point de vue thermodynamique, la quantité de chaleur transférée au cours d'un processus est simplement égale à la différence entre changement énergétique du système et du travail effectué. Il est évident que ce type d'analyse ne tient compte ni du mécanisme du flux de chaleur ni du temps nécessaire au transfert chaleur. Il prescrit simplement la quantité de chaleur à alimenter ou à rejeter d'un système pendant un processus entre des états finaux spécifiés sans tenir compte de la pourrait être accompli. La question de savoir combien de temps il faudrait pour transférer une quantité de chaleur, via différents mécanismes ou modes [1].

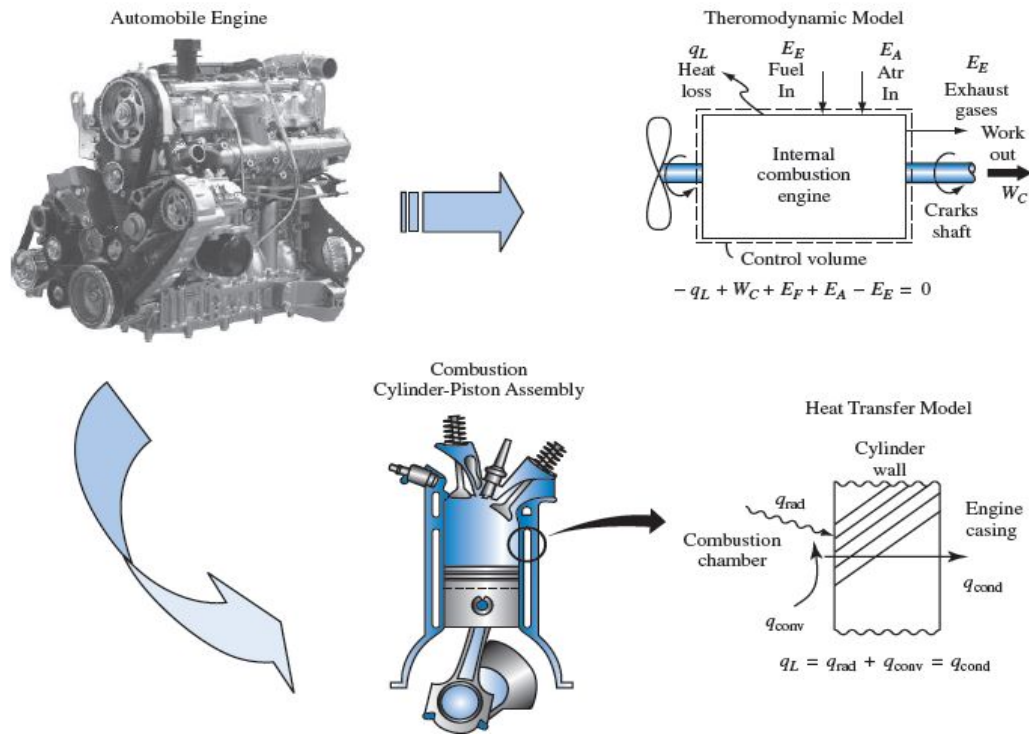


Fig. I-2 : Un modèle thermodynamique classique et un modèle de transfert de chaleur d'une automobile typique moteur à combustion interne (à allumage par étincelles). [5]

I.4 Mécanismes de transfert de chaleur

La littérature sur le transfert de chaleur reconnaît généralement trois modes distincts de transmission de la chaleur : la conduction, le rayonnement et la convection. Strictement parlant, seule la conduction et le rayonnement doivent être classés comme transfert de chaleur processus, car seuls ces deux mécanismes dépendent pour leur fonctionnement de la simple existence d'une différence de température. Le dernier des trois, convection, ne pas se conformer strictement à la définition de transfert de chaleur parce que son fonctionnement aussi dépend du transport de masse mécanique. Mais depuis convection accomplit également transmission de l'énergie des régions à température plus élevée aux régions température, le terme « transfert de chaleur par convection » est généralement accepté [1].

I.5 Bilan d'énergies

Il faut tout d'abord définir un système (S) par ses limites dans l'espace et il faut ensuite établir l'inventaire des différents flux de chaleur qui influent sur l'état du système et qui peuvent être [6] :

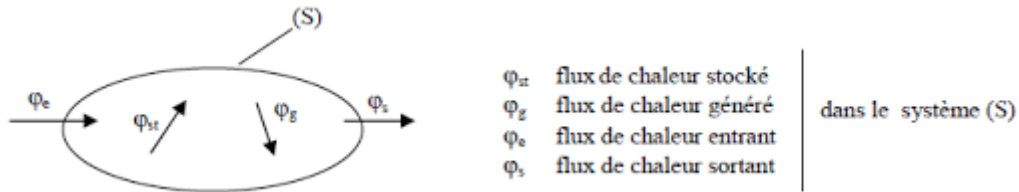


Fig. I-3 : système et bilan énergétique [6]

En appliquant le premier principe de la thermodynamique, nous pouvons établir le bilan d'énergie du système (S) :

$$\varphi_e + \varphi_g = \varphi_s + \varphi_{st} \quad (\text{I-1})$$

I.6 Expressions des flux d'énergie

Nous allons tout d'abord illustrer les expressions des différents flux d'énergie, puis en les reportant dans le bilan d'énergie, on obtient une équation différentielle dont la résolution permet de connaître l'évolution de la température en chaque point du système

I.6.1 Conduction

A) Définition

La conduction est le transfert d'une partie d'une substance à une autre partie de la même substance, ou d'une substance à une autre en contact physique avec elle sans déplacement appréciable de molécules formant la substance. Dans un solide la chaleur est conduite par les deux mécanismes suivants [7] :

- i) Par vibration en treillis (les molécules ou atomes qui se déplacent le plus rapidement dans la partie la plus chaude d'un corps transfèrent la chaleur par impact une partie de leur énergie aux molécules adjacentes)
- ii) Par transport d'électrons libres.

Dans le cas des gaz, le mécanisme de conduction de la chaleur est simple. L'énergie cinétique d'une molécule est une fonction de la température. Ces molécules sont dans un mouvement aléatoire continu échangeant l'énergie et le moment. Lorsque la molécule de la

région tempérée entre en collision avec une molécule de la région basse température, elle perd de l'énergie par des collisions [7].

Dans les liquides, le mécanisme de la chaleur est plus proche de celui des gaz. Cependant, les molécules sont plus rapprochées et les forces intermoléculaires entrent en jeu [7].

Ce mode de transport de chaleur est le seul qui existe au sein d'un solide opaque. Dans les liquides et les gaz, le transport de chaleur par conduction est souvent négligeable devant la convection et le rayonnement [8].

La théorie de la conduction repose sur l'hypothèse de Fourier : La densité de flux est proportionnelle au gradient de température

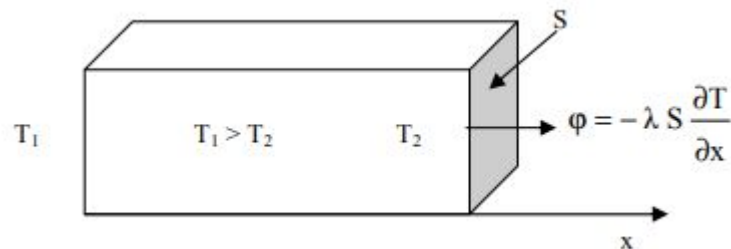


Fig. I-4 : Schéma de transfert de chaleur conductif [6]

Pour le cas unidirectionnel, le flux de chaleur prend la forme algébrique suivante:

$$\varphi = -\lambda S \frac{dT}{dx} \quad (\text{I-2})$$

φ : Flux de chaleur (w) (Kcal/h) ;

λ : Conductivité thermique des matériaux (w/m. k) ;

x : Variable d'espace dans la direction du flux (m) ;

S : Aire de la section de passage du flux de chaleur (m^2).

B) Domaines d'applications

Le transfert de chaleur par conduction caractérise tous les transferts de chaleur qui s'effectuent dans les parois séparant deux corps à des températures différentes. C'est le cas des surfaces d'échange des échangeurs de chaleur, mais c'est aussi celui des murs et vitrages d'un bâtiment, des cuves contenant des liquides chauds ou froids, des parois des fours, etc. [9].

Il est courant que les parois soient constituées de plusieurs matériaux ayant chacun un rôle spécifique (réfractaire, revêtement anticorrosion, isolant thermique, etc.) et qui sont des parois composites à travers lesquelles s'effectue le transfert de chaleur [9].

I.6.2 Rayonnement

A) Définition

Le rayonnement est le transfert de chaleur à travers l'espace ou la matière par d'autres moyens que la conduction ou la convection. L'énergie rayonnante (c'est-à-dire le rayonnement électromagnétique) ne nécessite aucun moyen de propagation et passera par le vide [7].

C'est un transfert d'énergie électromagnétique entre deux surfaces (même dans le vide). Dans les problèmes de conduction, on prend en compte le rayonnement entre un solide et le milieu environnant et dans ce cas nous avons la relation [6] :

$$\varphi = \sigma \varepsilon S(T_p^4 - T_\infty^4) \quad (\text{I-3})$$

Où

φ : Flux de chaleur (w) ;

σ : Constant de Stefan-Bolzman est égale à $(5,67 \cdot 10^{-8} W m^{-2} K^{-4})$;

S : Aire de la section de passage du flux de chaleur (m^2) ;

T_p : Température de surface du solide en (K) ;

T_∞ : Température du fluide loin de la surface du solide en (K).

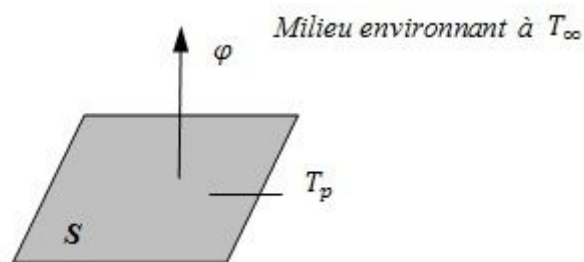


Fig. I-5 : schéma du transfert de chaleur radiatif [6]

B) Domaines d'applications

Le rayonnement infrarouge est appliqué dans de très nombreux procédés industriels. Son action sur la matière est essentiellement thermique et les applications principales concernent [9]:

- le séchage (papiers, cartons, textiles, etc.);

- la cuisson (teintures, apprêts, enductions...);
- le chauffage (avant formage de matériaux divers, traitements thermiques, soudage, chauffage de postes de travail...);
- les polymérisations (encres, revêtements, emballages...);
- la stérilisation (flacons pharmaceutiques, produits alimentaires divers...).

Le rayonnement ultraviolet est constitué de photons dont l'énergie est de l'ordre de grandeur de l'énergie des liaisons atomiques. Ceux-ci agissent sur la matière par déplacement des électrons vers des niveaux énergétiques supérieurs. Lorsque la matière soumise au rayonnement y est sensible, il s'y produit des réactions chimiques. La partie du rayonnement ultraviolet absorbée par la matière et qui n'est pas utilisée à la réaction chimique est transformée en chaleur [9].

Dans la pratique, cet échauffement reste faible et le rayonnement ultraviolet est principalement utilisé dans le domaine des réticulations de films plastiques et des polymérisations de produits organiques comme les encres d'imprimerie, les laques et vernis, opérations qui sont souvent appelées improprement séchages [9].

I.6.3 Convection

A) Définition

La convection est un mode de transfert de chaleur qui met en jeu, en plus de la conduction, le mouvement macroscopique de la matière. Ce phénomène se produit au sein des milieux fluides en écoulement ou entre une paroi solide et un fluide en mouvement. On distingue deux types de convection [10] :

- Convection naturelle: les mouvements sont dus aux variations de masse volumique dans un fluide soumis au champ de pesanteur. Les variations de masse volumique peuvent être générées par des gradients de température (l'air chaud est plus léger que l'air froid) et/ou par des gradients de composition.
- Convection forcée: le mouvement du fluide est provoqué par des actions mécaniques extérieures (pompe, ventilateur...).
- Convection mixte : lorsque les deux types de convection coexistent dans un système.

Ce mécanisme de transfert est régi par la loi de Newton qui stipule que la densité de flux de chaleur échangé entre une paroi solide et un fluide en écoulement est proportionnelle à l'écart de température qui lui a donné naissance [10].

$$\varphi = hS(T_p - T_\infty) \quad (\text{I-4})$$

Où

φ : Flux de chaleur transmis par convection en (W) ;

S : Aire de la surface de contact solide/fluide en (m^2) ;

T_p : Température de surface du solide en (K) ;

T_∞ : Température du fluide loin de la surface du solide en (K) ;

h : Coefficient de transfert de chaleur par convection ($\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$).

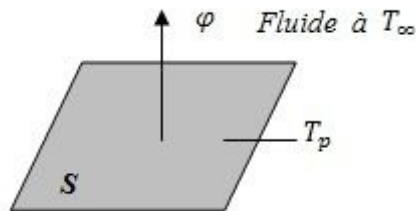


Fig. I-6 : Schéma du transfert de chaleur convectif [6]

B) Domaines d'applications

Les applications du transfert de chaleur par convection sont beaucoup trop nombreuses pour que l'on puisse envisager de les citer toutes. Elles interviennent chaque fois que l'on chauffe ou que l'on refroidit un liquide ou un gaz, qu'il s'agisse de faire bouillir de l'eau dans une casserole, du radiateur de chauffage central, du radiateur associé au moteur d'une voiture ou de l'échangeur dans un procédé, évaporateur ou condenseur [9].

La convection s'applique même si la surface d'échange n'est pas matérialisée par une paroi, ce qui est le cas des condenseurs par mélange ou des réfrigérants atmosphériques, voire des sècheurs à air chaud [9].

I.6.4 Flux de chaleur lié à un débit massique

Lorsqu'un débit massique \dot{m} de matière entre dans le système à la température T_1 et en ressort à la température T_2 , on doit considérer dans le bilan (I-2) un flux de chaleur entrant correspondant [6] :

$$\varphi_e = \dot{m} C_p (T_1 - T_2) \quad (\text{I-5})$$

Où

φ_e : Flux de chaleur entrant dans le système (W) ;

\dot{m} : Débit massique ($K_g \cdot S^{-1}$);

C_p : Chaleur Spécifique ($J \cdot K_g^{-1} \cdot K^{-1}$) ;

T_1, T_2 : Températures d'entrée et de sortie(K).

I.6.5. Stockage d'énergie

Le stockage d'énergie dans un corps correspond à une augmentation de son énergie interne au cours du temps d'où, à pression constante et en l'absence de changement d'état [6] :

$$\varphi_{st} = \rho V C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (I-6)$$

φ_{st} : Flux de chaleur stocké (W) ;

ρ : Masse volumique ($K_g \cdot m^{-3}$) ;

V : Volume (m^3) ;

C_p : Chaleur Spécifique ($J \cdot K_g^{-1} \cdot K^{-1}$) ;

T : Température (K) ;

t : temps (s).

I.6.6 Génération d'énergie

Elle intervient lorsqu'une autre forme d'énergie (chimique, électrique, mécanique, nucléaire) est convertie en énergie thermique. On peut l'écrire sous la forme [6]:

$$\varphi_g = q V \quad (I-7)$$

φ_g : Flux d'énergie thermique générée (W) ;

q : Densité volumique d'énergie générée ($W \cdot m^{-3}$) ;

V : Volume (m^3).

I.7 Equation de la chaleur

Considérons un système d'épaisseur dx dans la direction x et de section d'aire S normale à la direction o_x . L'application du bilan d'énergie sur ce système donnera [6]:

$$\varphi_x + \varphi_g = \varphi_{x+dx} + \varphi_{st} \quad (I-8)$$

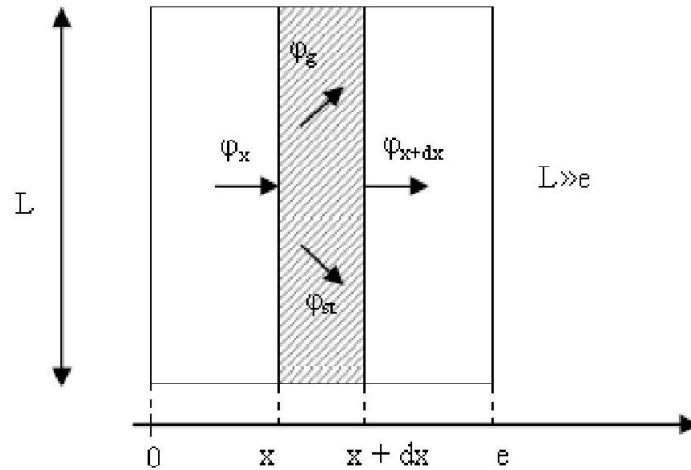


Fig. I-7 : Bilan thermique appliqué à un système élémentaire [6]

Où

$$\varphi_x = -\left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}\right) : \text{Flux entrant (conduction)} ;$$

$$\varphi_g = q S dx : \text{Flux généré} ;$$

$$\varphi_{x+dx} = -\left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}\right) dx : \text{Flux sortant} ;$$

$$\varphi_{st} = \rho C_p S dx \frac{\partial T}{\partial t} : \text{flux stocké.}$$

En tenant compte de ces expressions dans l'équation (I-8) :

$$-\left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}\right) + q S dx = -\left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}\right) dx + \rho C_p S dx \frac{\partial T}{\partial t} \quad (I-9)$$

Après simplification, nous obtenons l'équation de la chaleur dans le cas unidirectionnel :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + q = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (I-10)$$

Dans le cas tridimensionnel, cette équation prend la forme générale suivante:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z}\right) + q = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (I-11)$$

Cette équation peut se simplifier dans un certain nombre de cas :

a) Si le milieu est isotrope $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = \lambda$

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{d\lambda}{dT} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] + q = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (I-12)$$

b) Si l'écart de température n'est pas important, λ peut être considérée constante✓ Cas tridimensionnel

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + q = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{I} - 13)$$

✓ Cas Bidimensionnel

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + q = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{I} - 14)$$

✓ Cas unidimensionnel

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + q = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{I} - 15)$$

c) En régime stationnaire✓ Cas tridimensionnel

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + q = 0 \quad (\text{I} - 16)$$

✓ Cas Bidimensionnel

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + q = 0 \quad (\text{I} - 17)$$

✓ Cas unidimensionnel

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + q = 0 \quad (\text{I} - 18)$$

d) S'il n'y a pas de génération d'énergie à l'intérieur du système ($q = 0$)

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{I} - 19)$$

Remarque :

Dans cette équation, la conductivité thermique est supposée être un scalaire constant (c'est le cas des solides homogènes et isotropes). Il existe cependant de nombreux cas où la conductivité thermique dépend des propriétés d'orientation du solide (cristal, matériau déposé en couches minces, matériau fibreux etc.....). La conductivité thermique devient alors un tenseur dont la représentation matricielle dans le repère orthonormé (O, x, y, z) est :

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_x & \lambda_{xy} & \lambda_{xz} \\ & \lambda_y & \lambda_{yz} \\ \text{Sym.} & & \lambda_z \end{bmatrix} \quad (\text{I-20})$$

I.8 Conclusion

Ce chapitre nous a permis de cerner, d'une manière générale, les mécanismes de transfert de chaleur et de présenter les lois générales qui les gouvernent en considérant le transfert de chaleur stationnaire et transitoire.

CHAPITRE II : Discrétisation par la méthode des éléments finis

II.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est l'application de la méthode des éléments finis pour la résolution des problèmes de transfert de chaleur décrits dans le chapitre précédent. En effet, la solution analytique des équations décrivant le transfert de chaleur (I-13) à (I-14) sont en général inaccessibles. On est donc conduit à chercher des solutions approchées par des méthodes numériques telles que la méthode des éléments finis.

II.2 Principe de la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est l'une des méthodes numériques les plus utilisées aujourd'hui pour résoudre les équations aux dérivées partielles décrivant le comportement des systèmes physiques. Elle nécessite l'utilisation intensive de l'ordinateur. C'est une méthode très générale qui s'applique à la majorité des problèmes rencontrés dans la pratique : problèmes stationnaires ou non stationnaires, linéaires ou non linéaires, définis dans un domaine géométrique quelconque à une, deux ou trois dimensions. De plus elle s'adapte très bien aux milieux hétérogènes souvent rencontrés dans la pratique par l'ingénieur.

La méthode des éléments finis consiste à utiliser une approximation simple des variables inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques. Elle fait appel aux trois domaines suivants:

- Sciences de l'ingénieur pour construire les équations aux dérivées partielles.
- Méthodes numériques pour construire et résoudre les équations algébriques.
- Programmation et informatique pour exécuter efficacement les calculs sur l'ordinateur.

La MEF consiste donc à discrétiser une forme complexe en un grand nombre de sous domaines élémentaires de forme géométrique simple, interconnectés à des points appelés nœuds. L'analyse se fait en considérant séparément chacun des éléments constituant le domaine puis en assemblant tous ces éléments on obtient la compatibilité du comportement de la structure en chaque nœud. Même lorsque le nombre d'éléments est important, ce qui

est souvent le cas, la méthode des éléments finis est très simple à implémenter sur ordinateur ce qui rend son utilisation très commode.

II.3 Différentes formes d'éléments finis

La notion de type d'élément est liée à leur principe de fonctionnement : chaque élément est muni d'une géométrie de référence figée, dans laquelle sa forme exacte, la position de ses nœuds, ses fonctions de base et ses degrés de liberté sont spécifiés. Chaque élément est identifié par un nom précisant sa forme ainsi que le nombre de nœuds décrivant sa frontière. On cite à titre d'exemples [11] :

II.3.1 Eléments à une dimension

A) Élément linéaire à deux nœuds

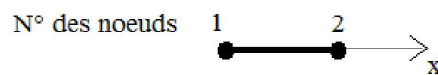


Fig. II-1 : Élément linéaire à deux nœuds

B) Élément linéaire à trois nœuds



Fig. II-2 : Élément linéaire à trois nœuds

II.3.2 Eléments à deux dimensions

Ce sont des triangles ou quadrilatères dont les cotés sont des courbes polynomiales de 1er, 2e ou 3e degré.

A) Élément quadrilatéral à quatre nœuds

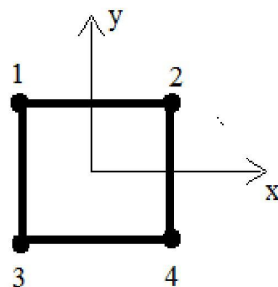


Fig. II-3 : Élément quadrilatéral à quatre nœuds

B) Élément quadrilatéral à huit nœuds

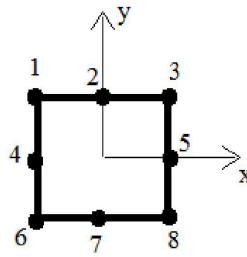


Fig. II-4 : Élément quadrilatéral à huit nœuds

C) Élément triangulaire à trois nœuds

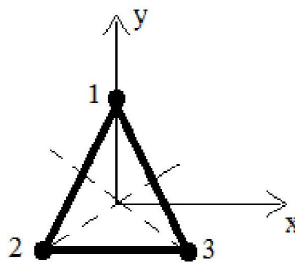


Fig. II-5 : Élément triangulaire à nœuds

II.3.3 Éléments à trois dimensions

Ce sont des tétraèdres, hexaèdres ou prismes dont les faces sont des surfaces polynomiales du 1er ,2 e ou 3 e degré.

A) Éléments tétraédriques à 4 nœuds

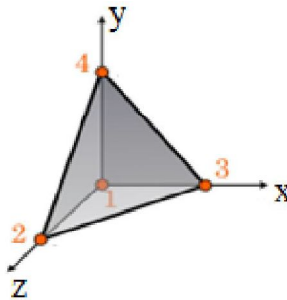


Fig. II-6 : Élément tétraédriques à 4 nœuds

B) Éléments hexaédriques à 8 nœuds

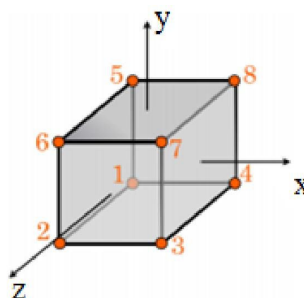


Fig. II-7 : Élément hexaédriques à 8 nœuds

II.4 Forme intégrale de l'équation de chaleur [12]

L'équation de la chaleur présentée dans le chapitre précédent, l'équation (I-13), s'écrit comme suit :

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + q = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II} - 1)$$

Où

$T(x, y, z, t)$: Température en tout point du solide (est la solution recherchée de cette équation) ;

λ : Conductivité thermique du matériau du solide (considérée constante dans ce présent travail) ;

q : Densité volumique d'énergie générée par une source de chaleur ;

ρ : Masse volumique du matériau ;

C_p : Chaleur spécifique.

Cette équation peut également être réécrite sous la forme suivante :

$$\text{div}(\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}T}) + q = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II} - 2)$$

Pour résoudre cette équation par la méthode des éléments finis, nous utilisons la méthode des résidus pondérés dans la formulation de Galerkin. Ainsi, en multipliant cette l'équation par une fonction arbitraire \bar{T} et en l'intégrant sur le domaine V , nous obtenons :

$$\int_V \bar{T} (\text{div}(\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}T}) + q) dV = \int_V \bar{T} \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dV \quad (\text{II} - 3)$$

$$\int_V \bar{T} \text{div}(\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}T}) dV + \int_V \bar{T} q dV - \int_V \bar{T} \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dV = 0 \quad (\text{II} - 4)$$

En considérant la relation suivante où f est un scalaire et v un vecteur :

$$\text{div}(f \vec{v}) = f \text{div}(\vec{v}) + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}f} \quad \text{D'où} \quad f \text{div}(\vec{v}) = \text{div}(f \vec{v}) - \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}f}$$

On peut écrire alors :

$$\bar{T} \text{div}(\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}T}) = \text{div}(\bar{T} \lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}T}) - \lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}T} \cdot \overrightarrow{\text{grad}\bar{T}} \quad (\text{II} - 5)$$

En substituant l'équation (II-5) dans l'équation (II-4), on aura :

$$\int_V \text{div}(\bar{T} \cdot \lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}}T) dV - \int_V \lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}}T \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\bar{T} \cdot dV + \int_V \bar{T} q dV - \int_V \bar{T} \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dV = 0 \quad (\text{II} - 6)$$

Transformons le premier terme de cette équation en intégrale de surface à l'aide du théorème d'Ostrogradski (théorème de la divergence) :

$$\int_V \text{div}(\bar{T}(\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}}T)) dV = \int_{S_\varphi} \bar{T} \cdot \vec{n} \cdot (\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}}T) dS + \int_{S_T} \bar{T} \cdot \vec{n} \cdot (\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}}T) dS \quad (\text{II} - 7)$$

Où

S : Surface totale du solide ($S = S_T \cup S_\varphi$);

S_T : Surface du solide où les températures sont imposées ;

S_φ : Surface du solide où les flux sont imposés,

\vec{n} : Vecteur unitaire normal à S et dirigé vers l'extérieur de V .

En imposant la condition $\bar{T} = 0$ sur S_T , annulera la dernière intégrale de l'équation (II-7). De plus, en considérant les différents modes de transfert de chaleur présentés dans le chapitre précédent, nous aurons :

$$\bar{T} \cdot \vec{n} \cdot (\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}}T) = \bar{T}(\varphi_{cond} + \varphi_{conv} + \varphi_{ray}) \quad (\text{II} - 8)$$

$$\bar{T} \cdot \vec{n} \cdot (\lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}}T) = \bar{T} \cdot (\varphi_{cond} + h(T_f - T) + \varepsilon\sigma(T_\infty^4 - T^4)) \quad (\text{II} - 9)$$

En tenant compte des équations (II-7) et (II-9) dans l'équation (II-6), nous obtenons la formulation intégrale faible d'un problème thermique :

$$\int_{S_\varphi} \bar{T} \cdot (\varphi_{cond} + h(T_f - T) + \varepsilon\sigma(T_\infty^4 - T^4)) dS - \int_V \lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}}T \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\bar{T} \cdot dV + \int_V \bar{T} q dV - \int_V \bar{T} \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} dV = 0 \quad (\text{II} - 10)$$

II.5 Mise en œuvre pratique de la méthode des éléments finis

Dans ce qui suit, nous présenterons les étapes de base nécessaire pour la résolution de l'équation intégrale (II-10) par la méthode des éléments finis dont l'objectif est d'abord la construction de la matrice de conductivité thermique élémentaire $[K]_e$, la matrice de capacité thermique élémentaire $[C]_e$, du vecteur des flux nodaux $\{F\}_e$ et du vecteur des température nodale $\{T\}_e$ et ensuite la construction des matrices globales respectives.

Etape I : Identification du problème

Cette étape consiste à choisir un système de coordonnées et une numération des nœuds appropriés pour l'élément fini considéré. En général, Le domaine V est décomposé en sous-domaines V_e de forme géométrique simple (les éléments) reliés entre eux en des points appelés nœuds. Cette opération s'appelle maillage (figure II-8).

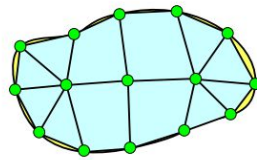


Fig. II-8 : Domaine plan discrétisé en 12 éléments reliés entre eux par 15 nœuds [12]

Etape II : Choisir des fonctions de température convenables

On choisit une fonction de température qui définit de façon unique l'état de température de tous les points de l'élément. Ce modèle peut être représenté de façon commode par une expression polynômiale, et puisque son but est d'exprimer les températures $T_e(x, y, z)$ de n'importe quel point de l'élément en termes des températures nodales $\{T\}_e$, elle doit contenir un coefficient inconnu pour chaque degré de liberté de l'élément. L'état des températures en chaque point (x, y, z) de l'élément peut être écrit sous la forme matricielle suivante :

$$T_e(x, y, z) = [f(x, y, z)] \cdot \{\alpha\} \quad (\text{II} - 11)$$

Où $\{\alpha\}$ est le vecteur colonne des coefficients encore inconnus de la fonction polynômiale $[f(x, y, z)]$ et l'indice « e » signifie que le calcul est élémentaire (pour un seul élément).

Étape III : Relier les températures générales de l'élément aux températures nodales

On exprime maintenant les coefficients de la fonction de température $\{\alpha\}$ en fonction de températures nodales $\{T\}_e$, et en reportant dans l'équation (II-11) on relie les températures des points de l'élément aux températures nodales $\{T\}_e$.

Puisque $T_e(x, y, z)$ représente la température au point (x, y, z) de l'élément, les températures nodales peuvent être obtenues à partir de celui-là en introduisant simplement les coordonnées nodales convenables dans l'équation (II-11). Cela donne par exemple pour le nœud 1:

$$T_1 = T(x_1, y_1, z_1) = [f(x_1, y_1, z_1)] \cdot \{\alpha\} \quad (\text{II} - 12)$$

En procédant de façon similaire pour tous les autres nœuds de l'élément fini, on obtient :

$$\{T\}_e = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_n \end{Bmatrix}_e = \begin{bmatrix} [f(x_1, y_1, z_1)] \\ [f(x_2, y_2, z_3)] \\ \vdots \\ [f(x_n, y_n, z_n)] \end{bmatrix} \cdot \{\alpha\} \quad \Rightarrow \quad \{T\}_e = [A] \cdot \{\alpha\} \quad (\text{II} - 13)$$

Puisque la matrice $[A]$ est maintenant connue, le vecteur des coefficients connus $\{\alpha\}$ peut être obtenu en inversant l'expression précédant ; cela donne :

$$\{\alpha\} = [A]^{-1} \{T\}_e \quad (\text{II} - 14)$$

On remplace $\{\alpha\}$ par sa valeur dans l'équation (II-11) et on obtient la relation recherchée entre les températures $T(x, y, z)$ de tous les points de l'élément et les températures nodales.

$$T_e(x, y, z) = [f(x, y, z)] [A]^{-1} \{T\}_e$$

$$T_e(x, y, z) = [N]_e \cdot \{T\}_e \quad (\text{II} - 15)$$

Où $[N]_e$ est dite matrice d'interpolation.

En considérant la variation en fonction du temps des températures des différents nœuds de l'élément, l'équation (II-15) devient :

$$T_e(x, y, z, t) = [N]_e \cdot \{T(t)\}_e \quad (\text{II} - 16)$$

Etape IV : Discrétisation de la forme intégrale

A partir de l'équation (II-16), nous pouvons écrire :

$$\{grad T(x, y, z, t)\}_e = [B]_e \cdot \{T(t)\}_e \quad (II - 17)$$

$$\frac{\partial T_e(x, y, z, t)}{\partial t} = \dot{T}_e = [N]_e \cdot \{\dot{T}(t)\}_e \quad (II - 18)$$

De façon similaire, on aura pour les températures virtuelles:

$$\bar{T}_e(x, y, z, t) = [N]_e \cdot \{\bar{T}\}_e = \{\bar{T}\}_e^T \cdot [N]_e^T \quad (II - 19)$$

$$\{grad \bar{T}(x, y, z)\}_e = [B]_e \cdot \{\bar{T}\}_e = \{\bar{T}\}_e^T \cdot [B]_e^T \quad (II - 20)$$

$$\dot{\bar{T}}_e = [N]_e \cdot \{\dot{\bar{T}}\}_e = \{\dot{\bar{T}}\}_e^T \cdot [N]_e^T \quad (II - 21)$$

En portant ces relations dans l'équation (II-10), on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{S_\varphi} \{\bar{T}\}_e^T \cdot [N]_e^T \left(\varphi_{cond} + hT_f - h \cdot [N]_e \cdot \{T\}_e + \varepsilon\sigma(T_\infty^4 - T^4) \right) dS \\ & - \int_V \{\bar{T}\}_e^T \cdot [B]_e^T \cdot \lambda \cdot [B]_e \cdot \{T\}_e dV + \int_V \{\bar{T}\}_e^T \cdot [N]_e^T \cdot q \cdot dV \\ & - \int_V \{\bar{T}\}_e^T \cdot \rho \cdot C_p \cdot [N]_e^T \cdot [N]_e \cdot \{\dot{T}\}_e dV = \{0\} \end{aligned} \quad (II - 22)$$

Après un réarrangement de l'équation, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \{\bar{T}\}_e^T \left[\int_{S_\varphi} [N]_e^T \left(\varphi_{cond} + hT_f + \varepsilon\sigma(T_\infty^4 - T^4) \right) dS - \int_{S_\varphi} (h [N]_e^T \cdot [N]_e dS) \cdot \{T\}_e \right. \\ & \left. - \int_V ([B]_e^T \lambda \cdot [B]_e dV) \cdot \{T\}_e + \int_V [N]_e^T q dV - \int_V (\rho C_p [N]_e^T [N]_e dV) \cdot \{\dot{T}\}_e \right] = \{0\} \end{aligned} \quad (II - 23)$$

Afin de contourner le vecteur $\{\bar{T}\}_e^T$ qui est valide pour n'importe quel système de températures appliqué, on peut choisir ce dernier comme on veut. Dans le cas présent, il est commode de supposer que le vecteur des températures virtuelles est égal à l'unité. Par suite, la forme discrétisée d'un problème thermique s'écrit finalement :

$$[C]_e \{\dot{T}\}_e + [K]_e \{T\}_e - \{F\}_e = \{0\} \quad (II - 24)$$

Où

$$[C]_e = \int_V \rho C_p [N]_e^T [N]_e dV \quad (\text{II} - 25)$$

$$[K]_e = \int_V [B]_e^T \cdot \lambda \cdot [B]_e dV + \int_{S_\varphi} h [N]_e^T \cdot [N]_e dS \quad (\text{II} - 26)$$

$$\{F\}_e = \int_V [N]_e^T q dV + \int_{S_\varphi} [N]_e^T (\varphi_{cond} + hT_f + \varepsilon\sigma(T_\infty^4 - T^4)) dS \quad (\text{II} - 27)$$

$[C]_e$: Matrice de capacité thermique élémentaire (J/K) ;

$[K]_e$: Matrice de conductivité thermique élémentaire (W/K) ;

$\{F\}_e$: Vecteur des flux nodaux élémentaire (W) ;

$\{T_n\}_e$: Vecteur des températures nodales élémentaire (K).

Etape V : Assemblage

L'utilisation de la méthode des éléments finis pour résoudre l'équation de chaleur nous a conduit à interpoler sur chaque élément la variable température par ses valeurs prises ou nœuds de l'élément. Ainsi, pour chaque élément considéré, on obtient un système élémentaire [13]. Une fois que le calcul des matrices élémentaires est terminé, on passe à leurs assemblages pour l'obtention du système global en considérant le principe de la superposition. Ainsi, l'équation (II.24) se réécrit après assemblage sous la forme suivante :

$$[C]\{\dot{T}\} + [K]\{T\} - \{F\} = \{0\} \quad (\text{II} - 28)$$

En effet, les nœuds de la structure doivent être numérotés de gauche à droite et du haut en bas afin de simplifier son implémentation sur ordinateur [14]. Par la suite, il faut effectuer un réarrangement des composantes du vecteur des températures globales $\{T\}$ en plaçant d'abord les températures inconnues $\{T_L\}$ puis les températures connues $\{T_P\}$. Ce réarrangement affecte automatiquement les autres composants de l'équation c.à.d. la matrice de capacité thermique globale $[C]$, la matrice de conductivité globale $[K]$ et le vecteur des flux de chaleur global $\{F\}$. Le système (II-28) devient après la partition des degrés de liberté comme suit:

$$\begin{bmatrix} C_{LL} & C_{LP} \\ C_{LP} & C_{PP} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{T}_L \\ \dot{T}_P \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{LL} & K_{LP} \\ K_{LP} & K_{PP} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_L \\ T_P \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F_L \\ F_P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{II} - 29)$$

La résolution de ce système dépend du régime considéré (stationnaire ou transitoire).

II.6 Résolution en régime stationnaire

En régime stationnaire, le système (II-29) se réduit à :

$$\begin{bmatrix} K_{LL} & K_{LP} \\ K_{LP} & K_{PP} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_L \\ T_P \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F_L \\ F_P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{II} - 30)$$

Pour résoudre ce système, l'idéal est d'inverser la matrice de conductivité globale $[K]$ et de déduire les températures inconnues. Cependant, dans la plupart des cas la matrice $[K]$ est une matrice singulière (elle n'admet pas de matrice inverse), ce qui nous oblige à effectuer quelques transformations afin de résoudre ce système. En effet, la technique consiste à :

- Supprimer les lignes correspondant aux températures connues :

~~$$\begin{bmatrix} K_{LL} & K_{LP} \\ K_{LP} & K_{PP} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_L \\ T_P \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F_L \\ F_P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{II} - 31)$$~~

- Réarranger le système comme suit :

$$[K_{LL}]\{T_L\} = \{F_L\} - [K_{LP}]\{T_P\} \quad (\text{II} - 32)$$

- Inverser la matrice de conductivité réduite et résoudre le système:

$$\{T_L\} = [K_{LL}]^{-1} (\{F_L\} - [K_{LP}]\{T_P\}) \quad (\text{II} - 33)$$

II.7 Résolution en régime transitoire

Dans ce cas, le transfert de chaleur est décrit par l'équation (II-28), où :

$$[C]\{\dot{T}\} + [K]\{T\} = \{F\} \quad (\text{II} - 34)$$

Discretisons la durée du chargement en intervalles de temps : $t_0, t_1, t_2, \dots, t_s, t_{s+1} \dots$ Où l'intervalle de temps Δt est décrit par :

$$\Delta t = t_{s+1} - t_s \quad (\text{II} - 35)$$

A l'instant $t + \Delta t$, l'équation (II-34) prend la forme suivante :

$$[C]\{\dot{T}\}_{t+\Delta t} + [K]\{T\}_{t+\Delta t} = \{F\}_{t+\Delta t} \quad (\text{II} - 36)$$

En supposant une variation linéaire de la température sur l'intervalle compris entre t et $t + \Delta t$, on peut écrire :

$$\{\dot{T}\}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} (\{T\}_{t+\Delta t} - \{T\}_t) \quad (\text{II} - 37)$$

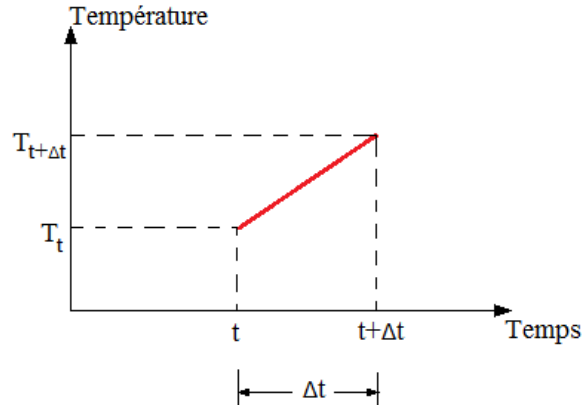


Fig. II-9 : Evolution linéaire de la température sur l'intervalle Δt

En tenant compte de l'équation (II-37) dans l'équation (II-36) :

$$\frac{1}{\Delta t} [C] (\{T\}_{t+\Delta t} - \{T\}_t) + [K] \{T\}_{t+\Delta t} = \{F\}_{t+\Delta t} \quad (\text{II} - 38)$$

En multipliant l'équation par Δt , et après un réarrangement adéquat, nous obtenons :

$$([C] + \Delta t [K]) \cdot \{T\}_{t+\Delta t} = \Delta t \{F\}_{t+\Delta t} + [C] \{T\}_t \quad (\text{II} - 39)$$

En tenant compte de la partition des ddl, nous aurons :

$$\left(\begin{bmatrix} C_{LL} & C_{LP} \\ C_{LP} & C_{PP} \end{bmatrix} + \Delta t \begin{bmatrix} K_{LL} & K_{LP} \\ K_{LP} & K_{PP} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} T_L \\ T_P \end{Bmatrix}_{t+\Delta t} = \Delta t \begin{Bmatrix} F_L \\ F_P \end{Bmatrix}_{t+\Delta t} + \begin{bmatrix} C_{LL} & C_{LP} \\ C_{LP} & C_{PP} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_L \\ T_P \end{Bmatrix}_t \quad (\text{II} - 40)$$

En supprimant les lignes correspondant aux températures connues, nous obtenons :

$$\begin{aligned} ([C_{LL}] + \Delta t [K_{LL}]) \cdot \{T_L\}_{t+\Delta t} &= \Delta t \{F_L\}_{t+\Delta t} + [C_{LL} \quad C_{LP}] \begin{Bmatrix} T_L \\ T_P \end{Bmatrix}_t \\ &\quad - ([C_{LP}] + \Delta t [K_{LP}]) \{T_P\} \end{aligned} \quad (\text{II} - 41)$$

Ou plus simplement, sous la forme suivante :

$$[\bar{K}] \cdot \{T_L\} = \{\bar{F}\} \quad (\text{II} - 42)$$

Avec

$$[\bar{K}] = [C_{LL}] + \Delta t [K_{LL}] \quad (\text{II} - 43)$$

$$\{\bar{F}\} = \Delta t \{F_L\}_{t+\Delta t} + [C_{LL} \quad C_{LP}] \begin{Bmatrix} T_L \\ T_P \end{Bmatrix}_t - ([C_{LP}] + \Delta t [K_{LP}]) \{T_P\} \quad (\text{II} - 44)$$

En régime transitoire, il n'existe pas une seule solution comme pour le régime stationnaire. Il faut, établir les solutions successives dans le temps de l'évolution de la température. La solution transitoire consiste donc, à résoudre le système (II-42) pour chaque intervalle de temps : $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$.

II-8 Conclusion

Ce chapitre est consacré entièrement à la discrétisation par la méthode des éléments finis où nous avons montré comment passer à la discrétisation spatiale ou géométrique en vue de formuler l'expression discrétisée des équations de transfert de chaleur en régime stationnaire et transitoire.

CHAPITRE III : Calculs élémentaires

III.1 Introduction

Nous présenterons dans ce chapitre l'application de la méthode des éléments finis au cas d'un élément fini linéaire à deux nœuds ensuite au cas d'un élément fini quadrilatéral à quatre nœuds.

En effet, nous allons calculer les différents paramètres présentés dans le chapitre précédent tels que le vecteur des coefficients inconnus $\{\alpha\}$, la matrice d'interpolation $[N]$, la matrice de capacité thermique $[C]$, la matrice de conductivité thermique $[K]$ et le vecteur des flux de chaleur $\{F\}$ relatifs aux deux cas d'élément fini susmentionnés.

III.2 Élément fini linéaire à deux nœuds

Etape I : Identification du problème

On considère que l'élément possède une section transversale uniforme et faisant partie d'une structure continue. Pour un tel élément on peut utiliser le système de coordonnées et la numérotation de la figure III-1 où l'axe longitudinal de l'élément fini désigne le sens du flux de chaleur. En utilisant ce type d'élément, on se limite au cas d'un problème de transfert de chaleur unidimensionnel, où chaque nœud est affecté d'une température. Ainsi, le nombre total de *ddl* de chaque élément est égal à deux. Dans le cadre de ce travail, on considère que le terme « *ddl* » a la même signification que « température nodale ».

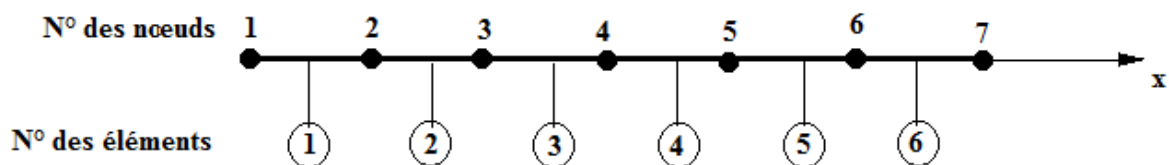


Fig. III-1 : Barre discrétisée en 6 éléments reliés par 7 nœuds

Etape II : choisir des fonctions de température convenables

Pour un élément linéaire à deux nœuds, la température de n'importe quel point de l'élément peut être définie par une seule composante suivant x . Ainsi le vecteur température est donné par :

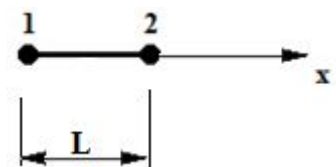


Fig. III-2 : élément à deux nœuds

$$(T(x, y, z) \equiv T(x) \quad (\text{III} - 1)$$

Puisque l'élément possède 2 températures (T_1, T_2), 2 coefficients inconnus doivent apparaître dans le polynôme représentant le modèle de température. Supposons que $T(x)$ soit donnée par l'équation suivante :

$$T_e(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x \quad (\text{III} - 2)$$

Où α_1 et α_2 sont des coefficients encore indéfinis.

L'équation (II-11) peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$T_e(x) = [1 \ x] \cdot \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{III} - 3)$$

Cette expression définit la matrice $[f(x)]$ et le vecteur $\{\alpha\}$ de l'équation (II-11) pour le cas d'un élément fini linéaire à deux nœuds.

Etape III : Relier les températures générales de l'élément aux températures nodales

Pour le simple élément de la figure III-2, les coordonnées des nœuds sont 0 et L respectivement. Les températures nodales peuvent être obtenues en introduisant simplement les coordonnées nodales dans l'équation (III-3), on obtient :

Au nœud 1, $x = 0$ et donc

$$T_1 = \alpha_1 \quad (\text{III} - 4)$$

Au nœud 2, $x = L$ et donc

$$T_2 = \alpha_1 + \alpha_2 L \quad (\text{III} - 5)$$

Cela donne sous forme matricielle (voir l'équation II-13) :

$$\{T\}_e = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}_e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{III} - 6)$$

Ou, plus simplement :

$$\{T\}_e = [A]\{\alpha\} \quad (\text{III} - 7)$$

Où $\{T\}_e$ est le vecteur des températures nodales de l'élément « e ».

Afin de déterminer le vecteur des coefficients inconnus de l'équation (II-14), il suffit d'inverser la matrice $[A]$. Vu la taille de cette matrice (2lignes x 2 colonnes), cela peut être aisément réalisé. On obtient ainsi le vecteur $\{\alpha\}$ écrit sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}_e \quad (\text{III} - 8)$$

La relation entre les températures générales et les températures nodale peut être obtenue en substituant l'équation (III-8) dans l'équation (III-3), on aura :

$$T_e(x) = [1 \ x] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}_e \quad (\text{III} - 9)$$

$$\Rightarrow T_e(x) = \left[1 - \frac{x}{L} \quad \frac{x}{L} \right] \cdot \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}_e \quad (\text{III} - 10)$$

Ou plus simplement :

$$T_e(x) = [N]_e \cdot \{T\}_e \quad (\text{III} - 11)$$

Où $[N]_e$ est la matrice d'interpolation d'un élément linéaire à deux nœuds.

Pour le cas d'un transfert de chaleur transitoire (régime thermique variable) cette dernière expression prend la forme suivante :

$$T_e(x, t) = [N]_e \cdot \{T(t)\}_e \quad (\text{III} - 12)$$

Etape IV: Discrétisation de la forme intégrale

Pour un élément fini linéaire à section « A » constante l'intégrale sur le volume se réduit à une simple intégrale suivant la longueur $\int_V dV = \int_x A dx$. Ainsi les équations (II-24) à (II-27) deviennent:

$$[C]_e = \int_L \rho \cdot A \cdot C_p [N]_e^T \cdot [N]_e dx \quad (\text{III} - 13)$$

$$[K]_e = \int_L \lambda \cdot A \cdot [B]_e^T [B]_e dx + A \cdot h \cdot [N]_{e,n}^T \cdot [N]_{e,n} \quad (\text{III} - 14)$$

$$\{F\}_e = \int_L [N]_e^T \cdot A \cdot q \cdot dx + A \cdot [N]_{e,n}^T \left(\varphi_x + hT_f + \varepsilon\sigma(T_\infty^4 - T^4) \right) \quad (\text{III} - 15)$$

❖ **Définition de la matrice de capacité thermique élémentaire**

L'équation (III-13) devient après intégration et prise en compte de la matrice d'interpolation $[N]_e$:

$$\begin{aligned} [C]_e &= \rho AC_p \int_L \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} dx \\ \Rightarrow [C]_e &= \rho AC_p \int_L \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 & \left(1 - \frac{x}{L}\right) \cdot \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \cdot \left(1 - \frac{x}{L}\right) & \left(\frac{x}{L}\right)^2 \end{bmatrix} dx \\ \Rightarrow [C]_e &= \frac{\rho AC_p L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{III} - 16)$$

❖ **Définition de la matrice de conductivité thermique élémentaire**

Pour calculer la matrice de conductivité élémentaire, nous allons d'abord calculer la matrice $[B]_e$ définie à l'équation (II-17), comme suit :

$$[B]_e = \text{grad}[N]_e = \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} & \frac{dN_2}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d\left(1 - \frac{x}{L}\right)}{dx} & \frac{d\left(\frac{x}{L}\right)}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad (\text{III} - 17)$$

Nous pouvons enfin évaluer le premier terme de l'équation (III-14) :

$$\begin{aligned} [K]_e &= \lambda \cdot A \int_L \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} dx + A \cdot h \cdot [N]_{e,n}^T \cdot [N]_{e,n} \\ \Rightarrow [K]_e &= \lambda \cdot A \int_L \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{L}\right)^2 & -\left(\frac{1}{L}\right)^2 \\ -\left(\frac{1}{L}\right)^2 & \left(\frac{1}{L}\right)^2 \end{bmatrix} dx + A \cdot h \cdot [N]_{e,n}^T \cdot [N]_{e,n} \\ \Rightarrow [K]_e &= \frac{\lambda \cdot A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + A \cdot h \cdot [N]_{e,n}^T \cdot [N]_{e,n} \end{aligned} \quad (\text{III} - 18)$$

Le calcul du second terme de l'équation (III-18) sera présenté dans le chapitre subséquent puisqu'il dépend du problème à considérer.

❖ Définition du vecteur des flux de chaleur élémentaire

L'expression du vecteur des flux de chaleur est donnée par l'équation (III-15) :

$$\{F\}_e = \int_L [N]_e^T \cdot A \cdot q \cdot dx + A \cdot [N]_{e,n}^T (\varphi_x + hT_f + \varepsilon\sigma(T_\infty^4 - T^4)) \quad (\text{III} - 19)$$

$$\Rightarrow \{F\}_e = A \cdot q \int_L \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ x \\ \frac{x}{L} \end{bmatrix} dx + A \cdot [N]_{e,n}^T (\varphi_x + hT_f + \varepsilon\sigma(T_\infty^4 - T^4))$$

$$\Rightarrow \{F\}_e = \frac{A \cdot q \cdot L}{2} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + A \cdot [N]_{e,n}^T (\varphi_x + hT_f + \varepsilon\sigma(T_\infty^4 - T^4)) \quad (\text{III} - 20)$$

Le calcul du second terme de l'équation (III-20) sera également présenté dans le chapitre subséquent puisqu'il dépend du problème à considérer.

III.3 Élément fini rectangulaire à quatre nœuds

Etape I: Identification du problème

On considère que l'élément possède une section transversale uniforme et faisant partie d'une structure continue. Pour un tel élément on peut utiliser le système de coordonnées et la numération de la figure (III-3) où les deux axes (x, y) de l'élément fini désignent les sens du flux de chaleur. En utilisant ce type d'élément, on se limite au cas d'un problème de transfert de chaleur bidimensionnel, où chaque nœud est affecté d'une température. Ainsi, le nombre total de ddl de chaque élément est égal à quatre.

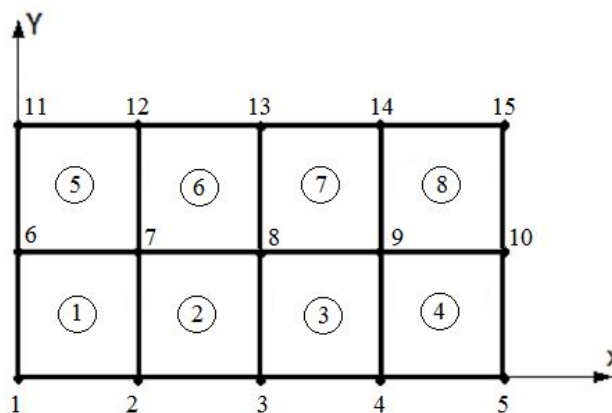


Fig. III-3 : Exemple de discrétisation d'une plaque en 8 éléments reliés par 15 nœuds

Etape II : Choisir des fonctions de température convenables

Pour un élément quadrilatéral à quatre nœuds, la température de n'importe quel point de l'élément peut être localisée par deux composantes suivant x et y. Ainsi :

$$T(x, y, z) = T(x, y) \quad (\text{III-21})$$

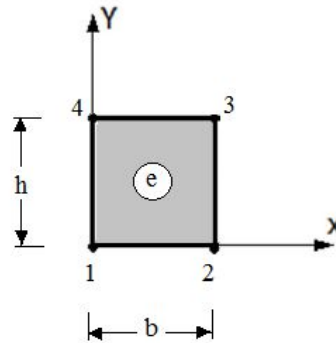


Fig. III-4 : Élément fini rectangulaire à quatre nœuds

Puisque l'élément possède 4ddl (T_1, T_2, T_3, T_4), 4 coefficients inconnus doivent apparaître dans le polynôme représentant le modèle de température. Supposons que $T(x, y)$ soit donnée par l'équation suivante :

$$T(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 xy + \alpha_4 y \quad (\text{III} - 22)$$

Où $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et α_4 sont des coefficients encore indéfinis.

L'équation (III-22) peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$T(x, y) = [1 \quad x \quad xy \quad y] \cdot \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{III} - 23)$$

Etape III : Relier les températures générales de l'élément aux températures nodales

L'équation (III-23) définit la température de n'importe quel nœud de l'élément. Ainsi, en considérant les coordonnées de l'élément présenté à la figure (III-4), on aura :

$$\text{Au nœud 1 (0,0) : } T_1 = \alpha_1$$

$$\text{Au nœud 2 (b,0) : } T_2 = \alpha_1 + \alpha_2 b$$

$$\text{Au nœud 3 (b,h) : } T_3 = \alpha_1 + \alpha_2 b + \alpha_3 bh + \alpha_4 h$$

$$\text{Au nœud 4 (0,h) : } T_4 = \alpha_1 + \alpha_4 h$$

Ces expressions peuvent s'écrire sous forme matricielle comme suit:

$$\{T\}_e = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & b & 0 & 0 \\ 1 & b & bh & h \\ 1 & 0 & 0 & h \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{III} - 24)$$

Dans ce cas, la matrice $[A]$ est une matrice carrée d'ordre 4. Pour simplifier le calcul de sa matrice inverse, nous avons développé un programme, sous le langage Matlab, permettant de déterminer aisément la matrice $[A]^{-1}$. Le programme relatif à cette opération est présenté en annexe 1.

On obtient ainsi le vecteur $\{\alpha\}$ écrit sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/b & 1/b & 0 & 0 \\ 1/bh & -1/bh & 1/bh & -1/bh \\ -1/h & 0 & 0 & 1/h \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{III} - 25)$$

La relation entre les températures générales et les températures nodale peut être obtenue en substituant l'équation (III-25) dans l'équation (III-3), on aura :

$$T(x, y) = [1 \quad x \quad xy \quad y] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/b & 1/b & 0 & 0 \\ 1/bh & -1/bh & 1/bh & -1/bh \\ -1/h & 0 & 0 & 1/h \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{III} - 26)$$

Après développement et simplification, on obtient :

$$T(x, y) = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \cdot \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{III} - 27)$$

Avec

$$N_1 = 1 - \frac{x}{b} + \frac{xy}{bh} - \frac{y}{h} \quad (a)$$

$$N_2 = \frac{x}{b} - \frac{xy}{bh} \quad (b)$$

$$N_3 = \frac{xy}{bh} \quad (c)$$

$$N_4 = -\frac{xy}{bh} + \frac{y}{h} \quad (d)$$

Ou, d'une manière plus simplement :

$$T(x, y) = [N]_e \{T\}_e \quad (\text{III} - 28)$$

En annexe 2, nous avons proposé un programme Matlab permettant de calculer la matrice d'interpolation d'un élément rectangulaire à quatre nœuds $[N]_e$.

Pour le cas d'un transfert de chaleur transitoire (régime thermique variable) cette dernière équation prend la forme suivante :

$$T(x, y, t) = [N]_e \cdot \{T(t)\}_e \quad (\text{III} - 29)$$

Etape IV : Discrétisation de la forme intégrale

Pour un élément fini rectangulaire d'épaisseur « e » constante, l'intégrale sur le volume se réduit à une double intégrale suivant la surface de l'élément où $\int_V dV = \int_x \int_y e \, dx \, dy$. Ainsi les équations (II-24) à (II-27) deviennent:

$$[C]_e = \rho \cdot e \cdot C_p \int_0^h \int_0^b [N]_e^T \cdot [N]_e \, dx \, dy \quad (\text{III} - 30)$$

$$[K]_e = \lambda \cdot e \int_0^h \int_0^b [B]_e^T [B]_e \, dx \, dy + A \cdot h \cdot [N]_{e,n}^T \cdot [N]_{e,n} \quad (\text{III} - 31)$$

$$\{F\}_e = e \cdot q \cdot \int_0^h \int_0^b [N]_e^T \, dx \, dy + A \cdot [N]_{e,n}^T (\varphi_x + hT_f + \varepsilon\sigma(T_\infty^4 - T^4)) \quad (\text{III} - 32)$$

Où A est aire de l'élément fini $A = b \times h$;

❖ Définition de la matrice de capacité thermique élémentaire

L'équation (III-30) devient en compte de la matrice d'interpolation $[N]_e$ définie à l'équation (III-27), comme suit:

$$[C]_e = \rho e C_p \int_0^h \int_0^b \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{b} + \frac{xy}{bh} - \frac{y}{h} \\ \frac{x}{b} - \frac{xy}{bh} \\ \frac{xy}{bh} \\ \frac{y}{h} - \frac{xy}{bh} + \frac{y}{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{b} + \frac{xy}{bh} - \frac{y}{h} & \frac{x}{b} - \frac{xy}{bh} & \frac{xy}{bh} & -\frac{xy}{bh} + \frac{y}{h} \end{bmatrix} \, dx \, dy \quad (\text{III} - 33)$$

$$\Rightarrow [C]_e = \rho \cdot e \cdot C_p \begin{bmatrix} \frac{bh}{9} & \frac{bh}{18} & \frac{bh}{36} & \frac{bh}{18} \\ \frac{bh}{18} & \frac{bh}{9} & \frac{bh}{18} & \frac{bh}{36} \\ \frac{bh}{36} & \frac{bh}{18} & \frac{bh}{9} & \frac{bh}{18} \\ \frac{bh}{18} & \frac{bh}{36} & \frac{bh}{18} & \frac{bh}{9} \end{bmatrix} \quad (\text{III} - 34)$$

Le calcul de la première composante de la matrice $[C]_e$ est illustré ci-après :

$$\begin{aligned} C_{11} &= \rho \cdot e \cdot C_p \int_0^h \int_0^b \left(1 - \frac{x}{b} + \frac{xy}{bh} - \frac{y}{h}\right) \left(1 - \frac{x}{b} + \frac{xy}{bh} - \frac{y}{h}\right) dx dy \\ &\Rightarrow C_{11} = \rho \cdot e \cdot C_p \int_0^h \int_0^b \left[1 - \frac{x}{b} + \frac{xy}{bh} - \frac{y}{h} + \left(-\frac{x}{b} + \frac{x^2}{b^2} - \frac{x^2y}{b^2h} + \frac{xy}{bh}\right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{xy}{bh} - \frac{x^2y}{b^2h} + \frac{x^2y^2}{b^2h^2} - \frac{xy^2}{bh^2}\right) + \left(-\frac{y}{h} + \frac{xy}{bh} - \frac{xy^2}{bh^2} + \frac{y^2}{h^2}\right)\right] dx dy \\ &\Rightarrow C_{11} = \rho \cdot e \cdot C_p \int_0^h \int_0^b \left(1 - \frac{2x}{b} - \frac{2y}{h} + \frac{x^2}{b^2} - \frac{2x^2y}{b^2h} + \frac{4xy}{bh} + \frac{x^2y^2}{b^2h^2} - \frac{2xy^2}{bh^2} + \frac{y^2}{h^2}\right) dx dy \\ &\Rightarrow C_{11} = \rho \cdot e \cdot C_p \left(bh - \frac{b^2h}{b} - \frac{bh^2}{h} + \frac{b^3h}{3b^2} - \frac{b^3h^2}{3b^2h} + \frac{b^2h^2}{bh} + \frac{b^3h^3}{9b^2h^2} - \frac{b^2h^3}{3bh^2} + \frac{bh^3}{3h^2}\right) \\ &\Rightarrow C_{11} = \rho \cdot e \cdot C_p \left(bh - bh - bh + \frac{bh}{3} - \frac{bh}{3} + bh + \frac{bh}{9} - \frac{bh}{3} + \frac{bh}{3}\right) \\ &\Rightarrow C_{11} = \rho \cdot e \cdot C_p \left(\frac{bh}{9}\right) \end{aligned}$$

Vu le nombre important de calculs à réaliser pour la détermination de la matrice $[C]_e$, nous avons élaboré un programme Matlab à cet effet, voir annexe 3.

❖ Définition de la matrice de conductivité thermique élémentaire

Pour calculer la matrice de conductivité élémentaire, nous allons d'abord calculer la matrice $[B]_e$ définie à l'équation (II-17) en considérant les fonctions d'interpolation définies à l'équation (III-27) :

$$[B]_e = grad[N]_e \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (\text{III} - 35)$$

Où :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial x} &= -\frac{1}{b} + \frac{y}{bh} & ; & \quad \frac{\partial N_1}{\partial y} = \frac{x}{bh} - \frac{1}{h} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} &= \frac{1}{b} - \frac{y}{bh} & ; & \quad \frac{\partial N_2}{\partial y} = -\frac{x}{bh} \\ \frac{\partial N_3}{\partial x} &= \frac{y}{bh} & ; & \quad \frac{\partial N_3}{\partial y} = \frac{x}{bh} \\ \frac{\partial N_4}{\partial x} &= -\frac{y}{bh} & ; & \quad \frac{\partial N_4}{\partial y} = -\frac{x}{bh} + \frac{1}{h} \end{aligned}$$

Finalement, la matrice $[B]_e$ prend la forme suivante :

$$[B]_e = \begin{bmatrix} -\frac{1}{b} + \frac{y}{bh} & \frac{1}{b} - \frac{y}{bh} & \frac{y}{bh} & -\frac{y}{bh} \\ \frac{x}{bh} - \frac{1}{h} & -\frac{x}{bh} & \frac{x}{bh} & -\frac{x}{bh} + \frac{1}{h} \end{bmatrix} \quad (\text{III} - 36)$$

L'expression de la matrice de conductivité thermique est donnée par l'équation (III-31), où :

$$[K]_e = \lambda \cdot e \int_0^h \int_0^b [B]_e^T \cdot [B]_e \, dx \, dy + A \cdot h \cdot [N]_{e,n}^T \cdot [N]_{e,n} \quad (\text{III} - 37)$$

Dans ce qui suit, nous allons évaluer seulement le premier terme de cette équation puisque le second terme est défini selon le cas à considérer et son calcul sera présenté dans le chapitre subséquent.

$$[K]_e = \lambda \cdot e \int_0^h \int_0^b \begin{bmatrix} -\frac{1}{b} + \frac{y}{bh} & \frac{x}{bh} - \frac{1}{h} \\ \frac{1}{b} - \frac{y}{bh} & -\frac{x}{bh} \\ \frac{y}{bh} & \frac{x}{bh} \\ -\frac{y}{bh} & -\frac{x}{bh} + \frac{1}{h} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\frac{1}{b} + \frac{y}{bh} & \frac{1}{b} - \frac{y}{bh} & \frac{y}{bh} & -\frac{y}{bh} \\ \frac{x}{bh} - \frac{1}{h} & -\frac{x}{bh} & \frac{x}{bh} & -\frac{x}{bh} + \frac{1}{h} \end{bmatrix} dx dy \quad (\text{III} - 38)$$

$$\Rightarrow [K]_e = \lambda \cdot e \begin{bmatrix} \frac{b^2 + h^2}{3bh} & \frac{b}{6h} - \frac{h}{3b} & \frac{-(b^2 + h^2)}{6bh} & \frac{h}{6b} - \frac{b}{3h} \\ \frac{b}{6h} - \frac{h}{3b} & \frac{b^2 + h^2}{3bh} & \frac{h}{6b} - \frac{b}{3h} & \frac{-(b^2 + h^2)}{6bh} \\ \frac{-(b^2 + h^2)}{6bh} & \frac{h}{6b} - \frac{b}{3h} & \frac{b^2 + h^2}{3bh} & \frac{b}{6h} - \frac{h}{3b} \\ \frac{h}{6b} - \frac{b}{3h} & \frac{-(b^2 + h^2)}{6bh} & \frac{b}{6h} - \frac{h}{3b} & \frac{b^2 + h^2}{3bh} \end{bmatrix} \quad (\text{III} - 39)$$

Le calcul de la première composante de la matrice $[K]_e$ est illustré ci-après :

$$\begin{aligned} K_{11} &= \lambda \cdot e \int_0^b \int_0^h \left(\left(-\frac{1}{b} + \frac{y}{bh} \right)^2 + \left(\frac{x}{bh} - \frac{1}{h} \right)^2 \right) dx dy \\ \Rightarrow K_{11} &= \lambda \cdot e \int_0^b \int_0^h \left(\left(\frac{1}{b^2} + \frac{y^2}{b^2 h^2} - \frac{2y}{b^2 h} \right) + \left(\frac{x^2}{b^2 h^2} + \frac{1}{h^2} - \frac{2x}{bh^2} \right) \right) dx dy \\ \Rightarrow K_{11} &= \lambda \cdot e \int_0^h \left[\left(\frac{1}{b^2} + \frac{y^2}{b^2 h^2} - \frac{2y}{b^2 h} \right) x + \left(\frac{x^3}{3b^2 h^2} + \frac{x}{h^2} - \frac{x^2}{bh^2} \right) \right]_0^b dy \\ \Rightarrow K_{11} &= \lambda \cdot e \int_0^h \left[\left(\frac{1}{b} + \frac{y^2}{bh^2} - \frac{2y}{bh} \right) + \left(\frac{b}{3h^2} + \frac{b}{h^2} - \frac{b}{h^2} \right) \right] dy \\ \Rightarrow K_{11} &= \lambda \cdot e \left[\left(\frac{y}{b} + \frac{y^3}{3bh^2} - \frac{y^2}{bh} \right) + \left(\frac{b}{3h^2} + \frac{b}{h^2} - \frac{b}{h^2} \right) y \right]_0^h \\ \Rightarrow K_{11} &= \lambda \cdot e \left[\left(\frac{h}{b} + \frac{h}{3b} - \frac{h}{b} \right) + \left(\frac{b}{3h} + \frac{b}{h} - \frac{b}{h} \right) \right] = \lambda \cdot e \left[\frac{h}{3b} + \frac{b}{3h} \right] \\ \Rightarrow K_{11} &= \lambda \cdot e \left[\frac{b^2 + h^2}{3bh} \right] \end{aligned}$$

Vu le nombre important de calculs à réaliser pour la détermination de la matrice $[K]_e$, nous avons élaboré un programme Matlab à cet effet, voir annexe 4.

❖ Définition du vecteur des flux de chaleur élémentaire

L'expression du vecteur des flux de chaleur est donnée par l'équation (III-32), où :

$$\{F\}_e = e \cdot q \cdot \int_0^b \int_0^h [N]_e^T dx dy + A \cdot [N]_{e,n}^T (\varphi_x + hT_f + \varepsilon\sigma(T_\infty^4 - T^4)) \quad (\text{III} - 40)$$

En tenant compte de l'expression de matrice d'interpolation définie par l'équation (III-28), nous aurons :

$$\{F\}_e = e \cdot q \int_0^b \int_0^h \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{b} + \frac{xy}{bh} - \frac{y}{h} \\ \frac{x}{b} - \frac{xy}{bh} \\ \frac{xy}{bh} \\ -\frac{xy}{bh} + \frac{y}{h} \end{bmatrix} dx dy + A \cdot [N]_{e,n}^T (\varphi_x + hT_f + \varepsilon\sigma(T_\infty^4 - T^4)) \quad (\text{III} - 41)$$

Le programme informatique relatif au calcul de ces intégrales est présenté en annexe 5. On obtient :

$$\Rightarrow \{F\}_e = e \cdot q \begin{pmatrix} \frac{bh}{4} \\ \frac{bh}{4} \\ \frac{bh}{4} \\ \frac{bh}{4} \end{pmatrix} + A \cdot [N]_{e,n}^T (\varphi_x + hT_f + \varepsilon\sigma(T_\infty^4 - T^4)) \quad (\text{III} - 42)$$

Le calcul du second terme de l'équation (III-42) sera présenté dans le chapitre subséquent puisqu'il dépend du problème à considérer.

III.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté le calcul des matrices élémentaires (matrice d'interpolation, matrice de capacité thermique, matrice de conductivité thermique et le vecteur des flux de chaleur) relatives à un élément fini linéaire à deux nœuds et à un élément fini rectangulaire à quatre nœuds.

CHAPITRE IV : EXPERIMENTATION NUMERIQUE

IV.1 Introduction

Dans le cadre de ce chapitre, nous allons illustrer la théorie de la méthode des éléments finis, établie dans les chapitres précédents, par des applications numériques afin de mieux cerner les techniques de mise en œuvre de cette méthode dont particulièrement l'assemblage des matrices globales et la résolution des systèmes algébriques obtenus en considérant les transferts de chaleur unidirectionnels et bidimensionnels en régimes stationnaire et transitoire.

De plus, une étude comparative sera réalisée afin de valider la démarche suivie où les résultats obtenus via la MEF seront confrontés à ceux obtenus par la méthode analytique et par le logiciel ANSYS.

IV.2 Transferts de chaleur unidirectionnels en régime stationnaire

IV.2-1 Exemple de validation

Dans cette section, nous allons considérer un exemple simple que nous allons résoudre d'abord analytiquement puis par la méthode des éléments finis ensuite en utilisant le logiciel ANSYS. Une comparaison des résultats obtenus par les trois méthodes, sera effectuée afin de jauger la fiabilité de la méthode proposée.

De plus, plusieurs maillages seront considérés dans le but de mettre en évidence l'influence de la taille du maillage sur la qualité des résultats.

A) Description du problème

Soit un mur d'épaisseur L , de section A , de conductivité thermique λ , contenant une source de chaleur q et dont les extrémités sont imposées à une température égale à T_p . On cherche à déterminer la valeur de la température au milieu du mur sachant que : $L = 0,1m$, $\lambda = 0,1 W/m.K$, $q = 1000 W/m^3$, $T_p = 100^\circ C$ et $A = 3 m^2$.

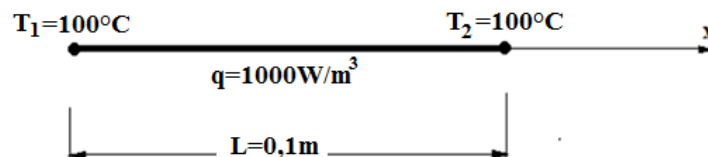


Fig. IV-1 : Description de l'exemple de validation

B) Résolution analytique

L'équation générale de la chaleur est donné par l'équation (I-13), où :

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + q = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{IV} - 1)$$

En considérant que le régime est stationnaire, l'équation de la chaleur devient :

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + q = 0 \quad (\text{IV} - 2)$$

En supposant que le transfert est unidirectionnel suivant l'axe x, on aura :

$$\lambda \frac{d^2 T}{dx^2} + q = 0 \quad (\text{IV} - 3)$$

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{q}{\lambda} \quad (\text{IV} - 4)$$

Après une première intégration, on obtient :

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{q}{\lambda} x + C_1 \quad (\text{IV} - 5)$$

Après une autre intégration, on obtient :

$$T(x) = -\frac{q}{2\lambda} x^2 + C_1 x + C_2 \quad (\text{IV} - 6)$$

Pour évaluer les constantes d'intégration C_1 et C_2 , nous allons considérer les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \text{à } x = 0 \rightarrow T(0) = T_1 = 100^\circ\text{C} & (a) \\ \text{à } x = L \rightarrow T(L) = T_2 = 100^\circ\text{C} & (b) \end{cases}$$

On obtient ainsi :

$$(a) \Rightarrow C_2 = T_1 = 100$$

$$(b) \Rightarrow -\frac{q}{2\lambda} L^2 + C_1 L + T_1 = T_2 \Rightarrow \frac{q}{2\lambda} L^2 = C_1 L \Rightarrow C_1 = \frac{q}{2\lambda} L$$

En reportant ces valeurs dans l'équation (IV-6), nous obtenons l'expression finale de la température décrite par une fonction du deuxième ordre :

$$T(x) = -\frac{q}{2\lambda}x^2 + \frac{qL}{2\lambda}x + T_1 \quad (\text{IV} - 7)$$

Ayant l'expression de la température, nous pouvons déterminer la température au milieu du mur en substituant x par $x = \frac{L}{2}$:

$$\begin{aligned} T\left(x = \frac{L}{2}\right) &= -\frac{q}{2\lambda}\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \frac{qL}{2\lambda}\left(\frac{L}{2}\right) + T_1 = -\frac{qL^2}{8\lambda} + \frac{qL^2}{4\lambda} + T_1 = \frac{qL^2}{8\lambda} + T_1 \\ &= \frac{1000 \cdot 0,1^2}{8 \cdot 0,1} + 100 \\ &\Rightarrow T\left(x = \frac{L}{2}\right) = 112,5^\circ\text{C} \end{aligned} \quad (\text{IV} - 8)$$

C) Résolution par la MEF

Pour cette section, plusieurs maillages seront considérés afin de mettre en évidence l'influence de la taille du maillage sur la qualité des résultats.

✓ Un seul élément fini

En considérant un seul élément fini, on ne pourra pas déterminer la température au milieu du mur (à $x = \frac{L}{2}$) puisque la méthode des éléments-finis affiche les résultats aux nœuds seulement.

✓ Deux éléments finis

• Représentation graphique du maillage

Le maillage considéré, dans ce cas, est représenté sur la figure suivante :

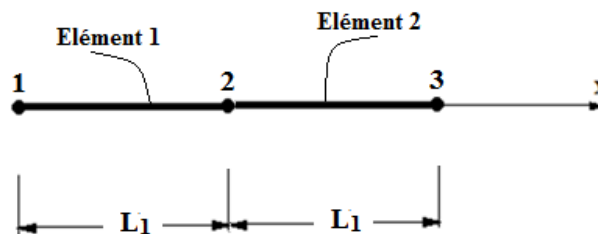


Fig. IV-2 : Exemple de validation discrétisé en deux éléments-finis où $L_1 = \frac{L}{2} = 0,05\text{m}$

- Définitions des matrices élémentaires

	Elément 1 (Nœuds 1-2)	Elément 2 (Nœuds 2-3)
Températures nodales	$\{T\}_1 = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 100 \\ T_2 \end{Bmatrix}$	$\{T\}_2 = \begin{Bmatrix} T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_2 \\ 100 \end{Bmatrix}$
Matrice de conductivité éq. (III-18)	$[K]_1 = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$ $k = \frac{\lambda \cdot A}{L_1} = \frac{0,1 \cdot 3}{0,05} = 6$	$[K]_2 = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$ $k = \frac{\lambda \cdot A}{L_1} = \frac{0,1 \cdot 3}{0,05} = 6$
Vecteur des flux de chaleur Eq. (III-20)	$\{F\}_1 = F \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ $F = \frac{A \cdot q \cdot L_1}{2}$ $= \frac{3 \cdot 1000 \cdot 0,05}{2} = 75$	$\{F\}_2 = F \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ $F = \frac{A \cdot q \cdot L_1}{2}$ $= \frac{3 \cdot 1000 \cdot 0,05}{2} = 75$

Tableau IV-1 : Calcul des matrices élémentaires d'un problème à 2 éléments linéaires

- Assemblage et formulation des matrices globales

En régime stationnaire, l'équation de chaleur discrétisée, s'écrit :

$$[K] \cdot \{T\} = \{F\} \quad (\text{IV} - 9)$$

Où

$$[K] = \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & k+k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -6 & 0 \\ -6 & 6+6 & -6 \\ 0 & -6 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -6 & 0 \\ -6 & 12 & -6 \\ 0 & -6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 100 \\ T_2 \\ 100 \end{Bmatrix}$$

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} 75 \\ 75+75 \\ 75 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 75 \\ 150 \\ 75 \end{Bmatrix}$$

L'équation (IV-9) devient, en tenant compte des expressions ci-dessus :

$$\begin{bmatrix} 6 & -6 & 0 \\ -6 & 12 & -6 \\ 0 & -6 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 100 \\ T_2 \\ 100 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 75 \\ 150 \\ 75 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV} - 10)$$

- Partition des ddl

Le système (IV-10) devient après la suppression des lignes correspondant aux températures connues comme suit:

$$[12 \quad -6 \quad -6] \cdot \begin{Bmatrix} T_2 \\ 100 \\ 100 \end{Bmatrix} = \{150\} \quad (\text{IV} - 11)$$

Après un arrangement adéquat, nous aurons :

$$\Rightarrow [12] \cdot \{T_2\} + [-6 \quad -6] \cdot \begin{Bmatrix} 100 \\ 100 \end{Bmatrix} = \{150\} \quad (\text{IV} - 12)$$

- Résolution en régime stationnaire

D'après l'équation (IV-12) :

$$\{T_2\} = [12]^{-1} \cdot \left(\{150\} - [-6 \quad -6] \cdot \begin{Bmatrix} 100 \\ 100 \end{Bmatrix} \right) = 112,5^\circ\text{C} \quad (\text{IV} - 13)$$

Où, la notation adoptée à l'équation II-33 est :

$$[K_{LL}] = [12] \quad ; \quad \{F_L\} = \{150\} \quad ; \quad [K_{LP}] = [-6 \quad -6] \quad ; \quad \{T_P\} = \begin{Bmatrix} 100 \\ 100 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV} - 14)$$

Pour pouvoir traiter les autres cas de maillages, un programme Matlab, présenté en annexe 6, a été élaboré.

✓ **Quatre éléments finis**

- Représentation graphique du maillage

Le maillage considéré, dans ce cas, est représenté sur la figure suivante :

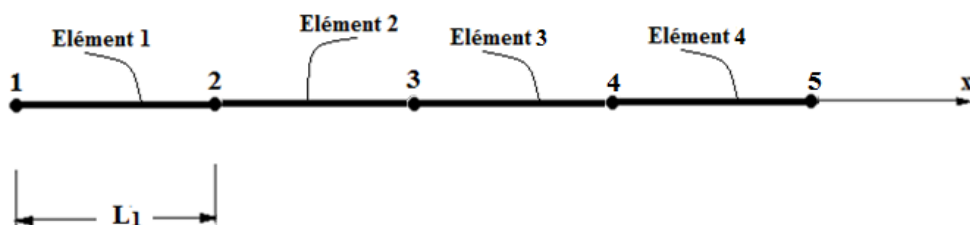


Fig. IV-3 : Exemple de validation discrétisé en quatre éléments-finis où $L_1 = \frac{L}{4} = 0,025m$

- Définitions des matrices élémentaires

$$[K]_e = \begin{bmatrix} 12 & -12 \\ -12 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\{F\}_e = \begin{Bmatrix} 37,5 \\ 37,5 \end{Bmatrix}$$

- Définitions des matrices globales

$$[K] = \begin{bmatrix} 12 & -12 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 24 & -12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 24 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 24 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} 37,5 \\ 75 \\ 75 \\ 75 \\ 37,5 \end{Bmatrix}$$

- Résolution en régime stationnaire

$$\begin{Bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & -12 & 0 \\ -12 & 24 & -12 \\ 0 & -12 & 24 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \left(\begin{Bmatrix} 75 \\ 75 \\ 75 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 100 \\ 100 \end{Bmatrix} \right) = \begin{Bmatrix} 109,375 \\ 112,5 \\ 109,375 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV} - 15)$$

Ces résultats ont été obtenus en modifiant les données du programme présenté en annexe 6. Les modifications apportées à ce dernier sont présentées en annexe 7.

✓ **Huit éléments finis**

- Représentation graphique du maillage

Le maillage considéré, dans ce cas, est représenté sur la figure suivante :

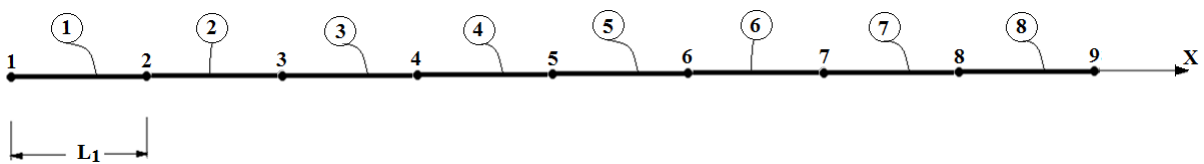


Fig. IV-4 : Exemple de validation discrétisé en huit éléments-finis où $L_1 = \frac{L}{8} = 0,0125m$

- Définitions des matrices élémentaires

$$[K]_e = \begin{bmatrix} 24 & -24 \\ -24 & 24 \end{bmatrix}$$

$$\{F\}_e = \begin{Bmatrix} 18,75 \\ 18,75 \end{Bmatrix}$$

• Définitions des matrices globales

$$[K] = \begin{bmatrix} 24 & -24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -24 & 48 & -24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -24 & 48 & -24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -24 & 48 & -24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -24 & 48 & -24 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -24 & 48 & -24 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -24 & 48 & -24 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -24 & 48 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -24 & 24 \end{bmatrix}$$

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} 18,75 \\ 37,5 \\ 37,5 \\ 37,5 \\ 37,5 \\ 37,5 \\ 37,5 \\ 18,75 \end{Bmatrix}$$

• Résolution en régime stationnaire

$$\begin{Bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ T_7 \\ T_8 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 & -24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -24 & 48 & -24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -24 & 48 & -24 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -24 & 48 & -24 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -24 & 48 & -24 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -24 & 48 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -24 & 48 \end{bmatrix}^{-1} \times$$

$$\left(\begin{Bmatrix} 37,5 \\ 37,5 \\ 37,5 \\ 37,5 \\ 37,5 \\ 37,5 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} -24 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -24 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 100 \\ 100 \end{Bmatrix} \right) = \begin{Bmatrix} 105,4687 \\ 109,375 \\ 111,7187 \\ 112,5 \\ 111,7187 \\ 109,375 \\ 105,4687 \end{Bmatrix} \quad (IV - 16)$$

Ces résultats ont été obtenus en modifiant les données du programme présenté en annexe 6. Les modifications apportées à ce dernier sont présentées en annexe 8.

D) Résolution par le logiciel ANSYS-APDL

Il est à noter que la version utilisée dans le cadre de ce travail est la version 14.0. Les étapes de simulation sont présentées dans l'annexe 9, où nous obtenons les résultats ci-après :

```

PRINT TEMP NODAL SOLUTION PER NODE

**** POST1 NODAL DEGREE OF FREEDOM LISTING ****

LOAD STEP=    1  SUBSTEP=    1
TIME=    1.0000  LOAD CASE=    0

   NODE      TEMP
     1      100.00
     2      105.47
     3      109.37
     4      111.72
     5      112.50
     6      111.72
     7      109.38
     8      105.47
     9      100.00

MAXIMUM ABSOLUTE VALUES
NODE           5
VALUE        112.50

```

Fig. IV-5 : Températures nodales obtenues par le logiciel ANSYS

E) Comparaison des résultats obtenus par les trois méthodes

Les résultats obtenus par chacune des trois méthodes sont présentés dans le tableau suivant où nous remarquons une parfaite concordance des résultats ce qui permet de valider l'approche présentée aux chapitres précédents.

Méthodes		Température à $x = \frac{L}{2}$ (°C)
Méthode analytique		112,5
Méthode des éléments- finis	2 éléments	112,5
	4 éléments	112,5
	8 éléments	112,5
Logiciel ANSYS		112,5

Tableau IV-2 : Résultats obtenus par les trois méthodes en régime stationnaire

Nous remarquons, dans ce cas, que les résultats obtenus par la méthode proposée ne sont pas influencés par le nombre d'éléments considérés. Cependant, il faut rappeler que la MEF n'affiche les résultats qu'aux nœuds, donc le maillage est conditionné par les objectifs recherchés. Une représentation graphique des résultats obtenus par les différents maillages est présentée dans la figure suivante :

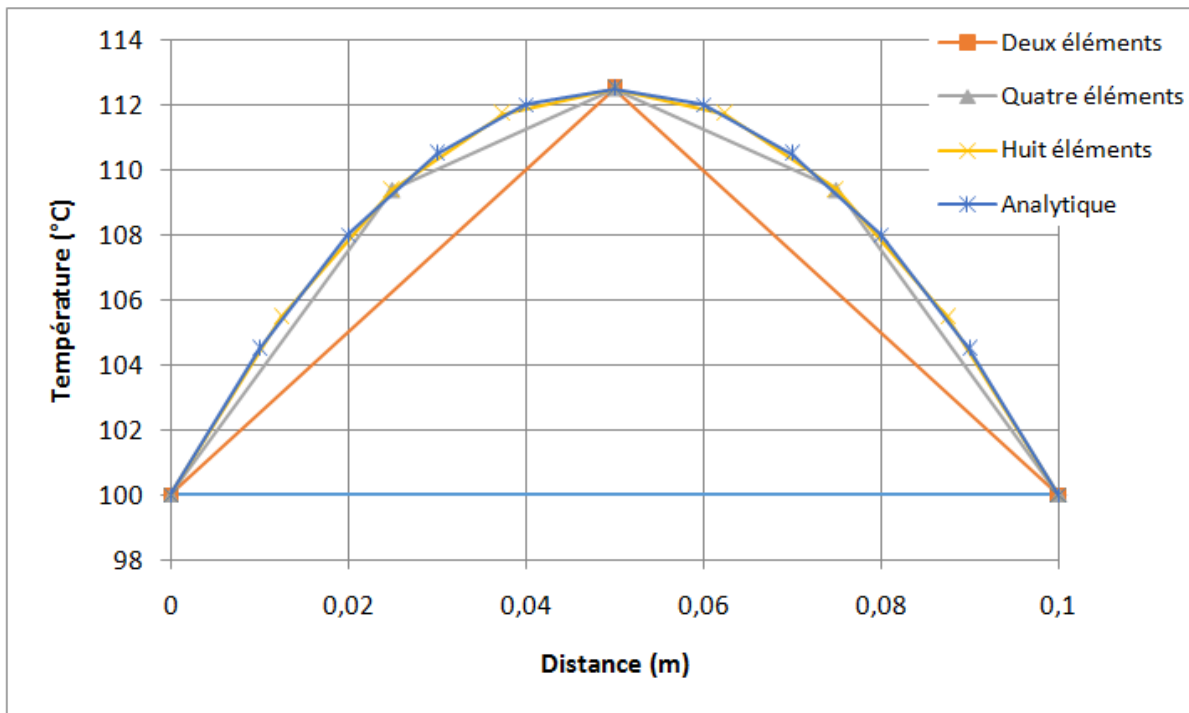


Fig.IV-6 : Comparaison des résultats pour différents maillages avec la solution analytique

IV.2-2 Exemple d'un problème convectif

Le mur représenté sur la figure suivante est constitué de deux tronçons de même longueur L . Le premier tronçon étant soumis à une charge volumique q et sa face gauche est imposée à une température T_1 . Le second tronçon est soumis à un flux convectif sur sa face droite φ . On donne : $L = 0,1m$; $T_1 = 10\text{ °C}$; $T_{f3} = 30\text{ °C}$; $q = 1000\text{ W/m}^3$; $\lambda = 3\text{ W/m}^\circ\text{C}$ $h_3 = 120\text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$; $A = 2\text{ m}^2$.

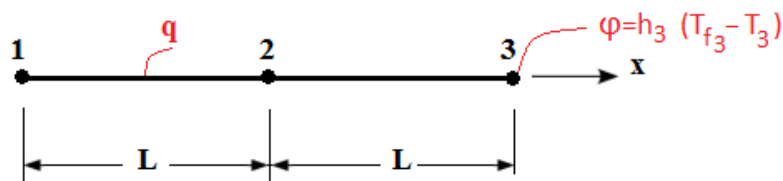


Fig. IV- 7: Exemple d'un problème convectif

➤ Définitions des matrices élémentaires

- Élément 1 (Défini entre les nœuds 1 et 2)

Le vecteur élémentaire des températures nodales, prend la forme suivante :

$$\{T\}_1 = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \\ T_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV} - 17)$$

D'après l'équation (III-18), l'expression de la matrice de conductivité est :

$$[K]_e = \frac{\lambda \cdot A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + A \cdot h \cdot [N]_{e,n}^T \cdot [N]_{e,n}$$

$$[K]_1 = \frac{\lambda \cdot A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{3 \cdot 2}{0,1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 60 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

D'après l'équation (III-20), l'expression du vecteur élémentaire des flux de chaleur est :

$$\{F\}_1 = \frac{A \cdot q \cdot L}{2} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{2 \cdot 1000 \cdot 0,1}{2} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 100 \\ 100 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV} - 18)$$

- **Élément 2 (défini entre les nœuds 2 et 3)**

Le vecteur élémentaire des températures nodales, prend la forme suivante :

$$\{T\}_2 = \begin{Bmatrix} T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV} - 19)$$

D'après l'équation (III-18), l'expression de la matrice de conductivité est :

$$[K]_2 = \frac{\lambda \cdot A}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + A \cdot h \cdot [N]_{e,n}^T \cdot [N]_{e,n}$$

$$[K]_2 = \frac{3 \cdot 2}{0,1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + 2 \cdot 120 \cdot \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{bmatrix}_{x=L} \cdot \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix}_{x=L}$$

$$[K]_2 = \begin{bmatrix} 60 & -60 \\ -60 & 60 \end{bmatrix} + 240 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 & -60 \\ -60 & 60 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 240 \end{bmatrix}$$

$$[K]_2 = \begin{bmatrix} 60 & -60 \\ -60 & 300 \end{bmatrix} \quad (\text{IV} - 20)$$

D'après l'équation (III-20), l'expression du vecteur élémentaire des flux de chaleur est :

$$\{F\}_2 = \frac{A \cdot q \cdot L}{2} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + A \cdot [N]_{e,n}^T \left(\varphi_x + hT_f + \varepsilon\sigma(T_\infty^4 - T^4) \right)$$

$$\Rightarrow \{F\}_2 = \frac{2 \cdot 0 \cdot 0,1}{2} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{bmatrix}_{x=L} (0 + 120 \cdot 30 + 0)$$

$$\Rightarrow \{F\}_2 = 3600 \cdot 2 \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 7200 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV} - 21)$$

➤ Assemblage et formulation des matrices globales

En régime stationnaire, l'équation de chaleur discrétisée, s'écrit :

$$[K] \cdot \{T\} = \{F\} \quad (\text{IV} - 22)$$

Où

$$[K] = \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & k+k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 & -60 & 0 \\ -60 & 60+60 & -60 \\ 0 & -60 & 300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 & -60 & 0 \\ -60 & 120 & -60 \\ 0 & -60 & 300 \end{bmatrix}$$

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix}$$

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} 100 \\ 100+0 \\ 7200 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 100 \\ 100 \\ 7200 \end{Bmatrix}$$

L'équation (IV-22) devient, en tenant compte des expressions ci-dessus :

$$\begin{bmatrix} 60 & -60 & 0 \\ -60 & 120 & -60 \\ 0 & -60 & 300 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 10 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 100 \\ 100 \\ 7200 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV} - 23)$$

➤ Partition des ddl

Le système (IV-23) devient après la suppression de la ligne correspondant à la température connue comme suit:

$$\begin{bmatrix} -60 & 120 & -60 \\ 0 & -60 & 300 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 10 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 100 \\ 7200 \end{Bmatrix}$$

Après un arrangement adéquat, nous aurons :

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 120 & -60 \\ -60 & 300 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -60 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \{10\} = \begin{Bmatrix} 100 \\ 7200 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV} - 24)$$

➤ Résolution en régime stationnaire

D'après l'équation (IV-24) :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 120 & -60 \\ -60 & 300 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \left(\begin{Bmatrix} 100 \\ 7200 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} -60 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \{10\} \right) \\ \Rightarrow \begin{Bmatrix} T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} &= \frac{1}{32400} \begin{bmatrix} 300 & 60 \\ 60 & 120 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 700 \\ 7200 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 19,815 \\ 27,963 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{IV} - 25)$$

IV.2-3 Exemple d'un problème sans températures imposées

Soit un mur de surface $A = 5m^2$ et constitué de trois couches comme c'est illustré par la figure ci-dessous :

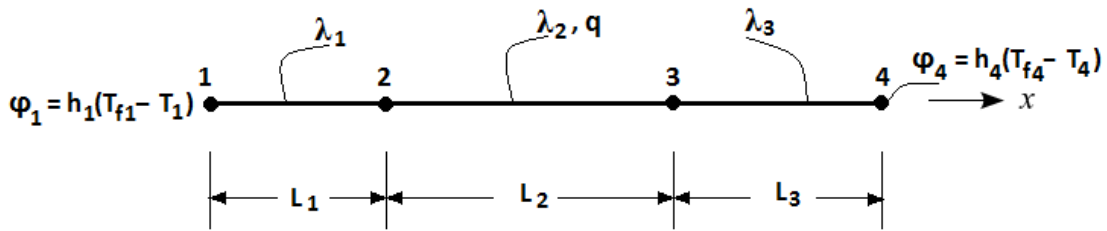


Fig.IV-8 : Exemple d'un problème sans températures imposées

On donne :

- Géométrie

$L_1 = 50 \text{ mm}$, $L_2 = 200 \text{ mm}$, $L_3 = 100 \text{ mm}$.

- Conductivité thermique

$\lambda_1 = 1 \text{ W/(m.K)}$; $\lambda_2 = 3 \text{ W/(m.K)}$, $\lambda_3 = 10 \text{ W/(m.K)}$

- Conditions aux limites

Convection sur la face 1 : coefficient $h_1 = 120 \text{ W/(m}^2\text{.K)}$, température du fluide $T_{f1} = 30 \text{ }^\circ\text{C}$;

Convection sur la face 4 : coefficient $h_4 = 200 \text{ W/(m}^2\text{.K)}$, température du fluide $T_{f4} = 10 \text{ }^\circ\text{C}$;

Source volumique dans la deuxième couche : $q = 3000 \text{ W/m}^3$.

➤ Définition des matrices élémentaires

Élément 1	Élément 2	Élément 3
$\{T\}_1 = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}$	$\{T\}_2 = \begin{Bmatrix} T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix}$	$\{T\}_3 = \begin{Bmatrix} T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix}$
$[K]_1 = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_1 \cdot A}{L_1} + Ah_1 & -\frac{\lambda_1 \cdot A}{L_1} \\ -\frac{\lambda_1 \cdot A}{L_1} & \frac{\lambda_1 \cdot A}{L_1} \end{bmatrix}$ $[K]_1 = \begin{bmatrix} 100 + 600 & -100 \\ -100 & 100 \end{bmatrix}$	$[K]_2 = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_2 \cdot A}{L_2} & -\frac{\lambda_2 \cdot A}{L_2} \\ -\frac{\lambda_2 \cdot A}{L_2} & \frac{\lambda_2 \cdot A}{L_2} \end{bmatrix}$ $[K]_2 = \begin{bmatrix} 75 & -75 \\ -75 & 75 \end{bmatrix}$	$[K]_3 = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_3 \cdot A}{L_3} & -\frac{\lambda_3 \cdot A}{L_3} \\ -\frac{\lambda_3 \cdot A}{L_3} & \frac{\lambda_3 \cdot A}{L_3} + Ah_4 \end{bmatrix}$ $[K]_3 = \begin{bmatrix} 500 & -500 \\ -500 & 500 + 1000 \end{bmatrix}$
$\{F\}_1 = \begin{Bmatrix} Ah_1 T_{f1} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 18000 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\{F\}_2 = 1500 \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$	$\{F\}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 10000 \end{Bmatrix}$

Tableau IV-3 : Calcul des matrices élémentaires du problème sans températures imposées

➤ Définition du système global

$$\begin{bmatrix} 700 & -100 & 0 & 0 \\ -100 & 100 + 75 & -75 & 0 \\ 0 & -75 & 75 + 500 & -500 \\ 0 & 0 & -500 & 1500 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 18000 \\ 0 + 1500 \\ 1500 + 0 \\ 10000 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 700 & -100 & 0 & 0 \\ -100 & 175 & -75 & 0 \\ 0 & -75 & 575 & -500 \\ 0 & 0 & -500 & 1500 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 18000 \\ 1500 \\ 1500 \\ 10000 \end{Bmatrix}$$

➤ Résolution directe du système

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 700 & -100 & 0 & 0 \\ -100 & 175 & -75 & 0 \\ 0 & -75 & 575 & -500 \\ 0 & 0 & -500 & 1500 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} 18000 \\ 1500 \\ 1500 \\ 10000 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{79}{50400} & \frac{7}{7200} & \frac{1}{5600} & \frac{1}{16800} \\ \frac{7}{7200} & \frac{49}{7200} & \frac{1}{800} & \frac{1}{2400} \\ \frac{1}{5600} & \frac{1}{800} & \frac{3}{11200} & \frac{1}{1120} \\ \frac{1}{16800} & \frac{1}{2400} & \frac{1}{1120} & \frac{27}{28000} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 18000 \\ 1500 \\ 1500 \\ 10000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 30,5357 \\ 33,75 \\ 18,0357 \\ 12,6786 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV} - 26)$$

IV.3 Transfert de chaleur unidirectionnel en régime transitoire

Dans cette section, nous allons considérer un exemple simple, en régime transitoire, que nous allons résoudre d'abord analytiquement puis par la méthode des éléments finis ensuite en utilisant le logiciel ANSYS. Une comparaison des résultats obtenus par les trois méthodes, sera effectuée afin de jauger la fiabilité de la méthode proposée.

IV.3-1 Description du problème

Soit à déterminer l'évolution, en fonction du temps, des températures d'une barre ayant une température initiale T_i et dont les extrémités sont imposées à une température T_p comme c'est illustré par la figure suivante. On donne : $L = 0,1m$; $A = 1 m^2$; $q = 0$;
 $\lambda = 209 W/m^\circ C$; $\rho = 2700 kg/m^3$; $Cp = 885 J/Kg.K$; $T_i = 20^\circ C$; $T_p = 150^\circ C$.

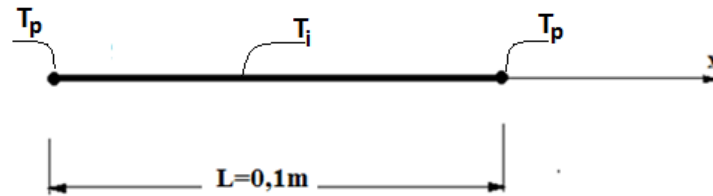


Fig. IV-9 : Exemple d'un transfert de chaleur unidirectionnel en régime transitoire

IV.3-2 Résolution par la méthode analytique

L'équation de la chaleur, en régime transitoire, est définie à l'équation (I-13) :

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + q = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{IV} - 27)$$

En considérant que le transfert de chaleur est unidirectionnel suivant l'axe x et en l'absence de source de chaleur, $q = 0$, cette équation devient :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{IV} - 28)$$

Où $a = \frac{\lambda}{\rho \cdot C_p}$ est la diffusivité thermique du matériau.

Avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} T(x = 0, t) = T_p & (a) \\ T(x = l, t) = T_p & (b) \end{cases}$$

Et la condition initiale :

$$T(x, t = 0) = T_i \quad (c)$$

Pour des raisons qui seront plus claires plus loin et afin de simplifier les conditions aux limites, on pose :

$$T(x, t) = \theta(x, t) + T_p \quad (\text{IV} - 29)$$

En substituant l'équation (IV-29) dans (IV-28), on obtient :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (\text{IV} - 30)$$

Avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \theta(x = 0, t) = 0 & (d) \\ \theta(x = l, t) = 0 & (e) \end{cases}$$

Et la condition initiale :

$$\theta(x, t = 0) = T_i - T_p \quad (f)$$

Utilisons la méthode de séparation de variables, en écrivant :

$$\theta(x, t) = X(x) \cdot f(t) \quad (\text{IV} - 31)$$

En substituant l'équation (IV-31) dans l'équation (IV-30), nous aurons :

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \cdot f = \frac{1}{a} \cdot X \cdot \frac{df}{dt} \quad (\text{IV} - 32)$$

Cette équation devient après un arrangement adéquat :

$$\frac{a}{X} \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{1}{f} \cdot \frac{df}{dt} \quad (\text{IV} - 33)$$

Afin de simplifier les écritures, nous allons considérer la notation suivante :

$$a \frac{X''}{X} = \frac{f'}{f} \quad (\text{IV} - 34)$$

On voit clairement que le terme de gauche, de l'équation (IV-34), ne dépend que de x seulement et le terme de droite ne dépend que de t seulement. Alors, chaque terme doit être égal à une constante (ω) :

$$a \cdot \frac{X''}{X} = \frac{f'}{f} = \omega \quad (\text{IV} - 35)$$

Par conséquent, nous pouvons écrire :

$$\frac{f'}{f} = \omega \quad (\text{IV} - 36)$$

$$\frac{X''}{X} = \frac{\omega}{a} \quad (\text{IV} - 37)$$

La solution de l'équation (IV-36) peut être calculé aisément :

$$\int \frac{f'}{f} dt = \int \omega dt \longrightarrow \ln(f) = \omega \cdot t + C \implies f = e^{(\omega \cdot t + C)}$$

$$\implies f(t) = A \cdot e^{\omega \cdot t} \quad (\text{IV} - 38)$$

Où A est une constante d'intégration.

Afin d'intégrer la relation (IV-37), posons :

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad (\text{IV} - 39)$$

La forme de cette fonction a été choisie de sorte à satisfaire les conditions aux limites de problème considéré où les deux extrémités de la barre sont soumises à une température

imposée. Autrement dit, l'équation (IV-39) satisfait les conditions aux limites définies par les équations (d-e-f) :

$$\begin{cases} X_n(x=0) = 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{n\pi}{L} \cdot 0\right) = 0 & \text{condition vérifiée} \\ X_n(x=l) = 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{n\pi}{L} \cdot L\right) = \sin(n\pi) = 0 & \text{condition vérifiée} \end{cases}$$

La substitution de l'équation (IV-39) dans (IV-37) conduit à :

$$\begin{aligned} \frac{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 * \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)}{\sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)} &= \frac{\omega_n}{a} \\ \Rightarrow \omega_n &= -\left(\frac{n\pi \sqrt{a}}{L}\right)^2 \end{aligned} \quad (\text{IV} - 40)$$

A chaque valeur de n correspond une valeur de ω_n .

En substituant les équations (IV-39) et (IV-38) dans l'équation (IV-31), on obtient :

$$\theta_n(x, t) = \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \cdot A_n \cdot e^{\omega_n \cdot t} \quad (\text{IV} - 41)$$

En additionnant toutes les solutions de l'équation (IV-41), nous obtenons la solution générale de l'équation (IV-30) :

$$\theta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \cdot e^{\omega_n t} \quad (\text{IV} - 42)$$

Où

$n = 1, 2, 3, \dots$: Un nombre entier.

A_n : Coefficient à déterminer par la condition initiale. Dans ce cas, nous avons :

$$\theta(x, t = 0) = T_i - T_p \quad (\text{IV} - 43)$$

Ou d'une manière générale, on peut écrire :

$$\theta(x, t = 0) = \varphi(x) \quad (\text{IV} - 44)$$

En remplaçant cette condition dans l'équation (VI-42), nous obtenons :

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \cdot e^{\omega_n \cdot 0} = \varphi(x) \quad (\text{IV} - 45)$$

En multipliant les deux façons de l'équation par $\left(\sin\frac{n\pi}{L} x\right)$ puis en intégrant de 0 à L, on trouve :

$$\begin{aligned}
\int_0^L A_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx &= \int_0^L \varphi(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \\
A_n \cdot \int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx &= \int_0^L \varphi(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \\
A_n \cdot \frac{1}{2} \int_0^L \left[1 + \cos\left(\frac{2n\pi}{L}x\right)\right] dx &= \int_0^L \varphi(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \\
A_n \cdot \frac{1}{2} \cdot \left\{L + \left[\frac{L}{2n\pi} \cdot \sin\left(\frac{2n\pi}{L}x\right)\right]_0^L\right\} &= \int_0^L \varphi(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \\
A_n \cdot \frac{L}{2} &= \int_0^L \varphi(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \\
A_n &= \frac{2}{L} \cdot \int_0^L \varphi(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \tag{IV - 46}
\end{aligned}$$

Dans le cas particulier où $\varphi(x) = T_i - T_p = Cste$

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{2}{L} (T_i - T_p) \cdot \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \frac{2(T_i - T_p)}{L} \cdot \frac{L}{n\pi} \cdot \left[-\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right]_0^L \\
\Rightarrow A_n &= \frac{-2(T_i - T_p)}{n \cdot \pi} [\cos(n\pi) - \cos 0]
\end{aligned}$$

Sachant que :

$$\cos(n\pi) = \begin{cases} 1 & : \text{si } n = \text{paire (possibilité rejetée)} \\ -1 & : \text{si } n = \text{impaire} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A_n = \frac{-2(T_i - T_p)}{n \cdot \pi} (-1 - 1)$$

$$A_n = \frac{4(T_i - T_p)}{n \cdot \pi} \tag{IV - 47}$$

Avec $n = 1, 3, 5, \dots$ Nombre impaire

L'équation (IV-42) s'écrit finalement, en tenant compte de l'expression de A_n , comme suit :

$$\theta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(T_i - T_p)}{n \cdot \pi} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} \cdot x\right) \cdot e^{\omega_n \cdot t} \tag{IV - 48}$$

Où n est un nombre impaire ;

En substituant l'équation (IV-48) dans l'équation (IV-29), nous obtenons l'expression finale de la solution de l'équation de transfert de chaleur unidirectionnel en régime transitoire :

$$T(x, t) = T_p + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(T_i - T_p)}{n \cdot \pi} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \cdot e^{\omega_n \cdot t} \quad (\text{IV} - 49)$$

Où

$L = 0,1m$: Longueur de barre ;

$T_p = 150^\circ\text{C}$: Température imposée aux extrémités de la barre ;

$T_i = 20^\circ\text{C}$: Température initiale de la barre ;

$0 < x < L$: Position où l'on désire afficher l'évolution de la température ;

$n = 1,3,5, \dots$: Nombre entier impaire ;

$$\omega_n = -\left(\frac{n\pi\sqrt{a}}{L}\right)^2.$$

Pour pouvoir tracer l'équation (IV-49), nous avons établi un programme sous le langage Matlab. Ce dernier est présenté en annexe 10, où le temps a été discrétisé en plusieurs intervalles $\Delta t = 0,1 \text{ sec}$. Après 1500 itérations, la température de la barre s'est stabilisée à T_p . Les résultats obtenus, à différentes positions de la barre, sont récapitulés dans la figure suivante :

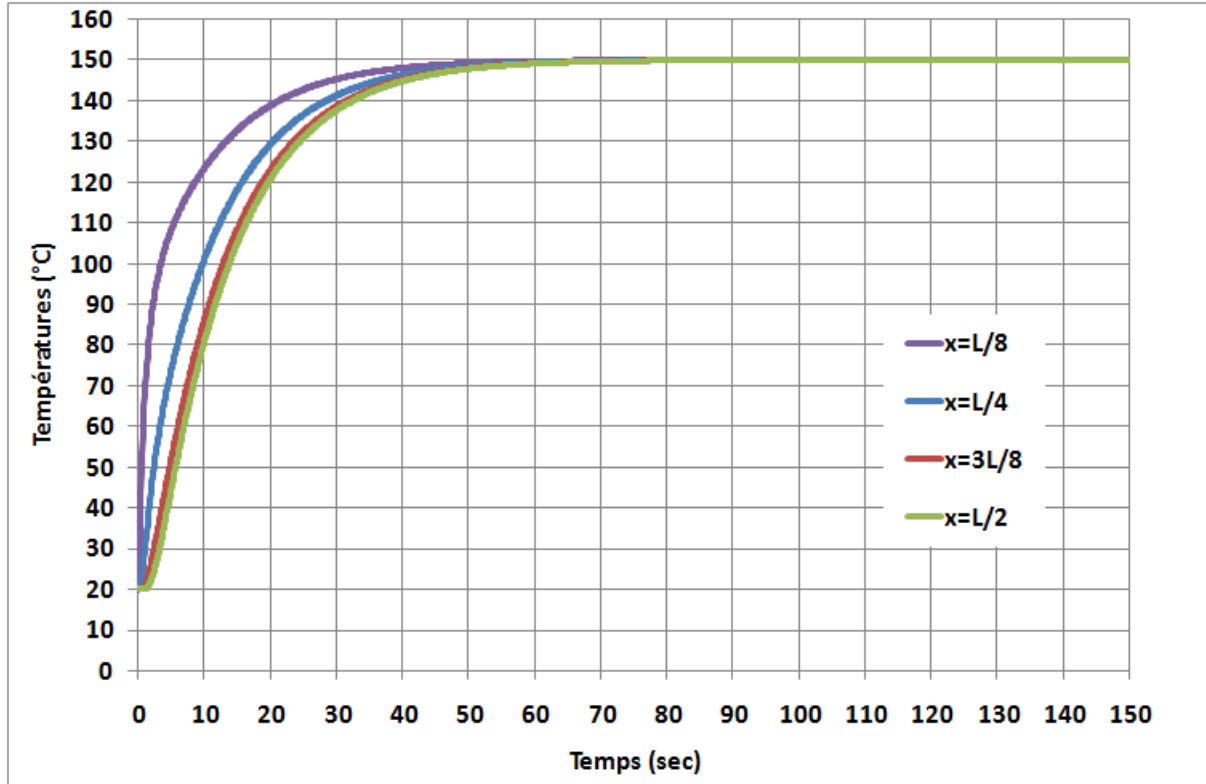


Fig. IV-10 : Variation de la température en fonction du temps, pour différentes positions, obtenue par la méthode analytique

IV.3-3 Résolution par la méthode des éléments finis

A) En considérant deux éléments-finis

➤ Maillage

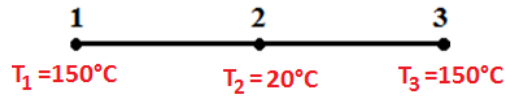


Fig. IV-11 : Barre discrétisée en deux éléments finis où $L_1 = 0,05m$

➤ Définitions des matrices élémentaires

Les vecteurs élémentaires des températures nodales, prennent la forme suivante :

$$\{T\}_1 = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 150 \\ 20 \end{Bmatrix}; \{T\}_2 = \begin{Bmatrix} T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 20 \\ 150 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV} - 50)$$

D'après l'équation (III-16), l'expression de la matrice de capacité thermique élémentaire s'écrit :

$$[C]_e = \frac{\rho A C_p L_1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{2700 \cdot 1 \cdot 885 \cdot 0,05}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[C]_e = 19912,5 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{IV} - 51)$$

D'après l'équation (III-18), l'expression de la matrice de conductivité thermique s'écrit :

$$[K]_e = \frac{\lambda \cdot A}{L_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + A \cdot h \cdot [N]_{e,n}^T \cdot [N]_{e,n} = \frac{209 \cdot 1}{0,05} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[K]_e = 4180 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV} - 52)$$

D'après l'équation (III-20), l'expression du vecteur élémentaire des flux de chaleur est :

$$\{F\}_e = \frac{A \cdot q \cdot L}{2} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + A \cdot [N]_{e,n}^T (\varphi_x + hT_f + \varepsilon\sigma(T_\infty^4 - T^4)) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV} - 53)$$

➤ Assemblage et formulation des matrices globales

Le vecteur global des températures nodales prend la forme :

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} 150 \\ T_2 \\ 150 \end{Bmatrix}; \{T\}_{t_0} = \begin{Bmatrix} 150 \\ 20 \\ 150 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV} - 54)$$

Le vecteur global des flux nodaux prend la forme :

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV} - 55)$$

La matrice de capacité globale prend la forme :

$$[C] = 19912,5 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 + 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{IV} - 56)$$

La matrice de conductivité globale prend la forme :

$$[K] = 4180 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 + 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV} - 57)$$

➤ Partition des ddl

En régime transitoire, l'équation de chaleur discrétisée est présentée à l'équation (II-42), où:

$$[\bar{K}] \cdot \{T_L\} = \{\bar{F}\} \quad (\text{IV} - 58)$$

Avec

$$[\bar{K}] = [C_{LL}] + \Delta t [K_{LL}] \quad (\text{IV} - 59)$$

$$\{\bar{F}\} = \Delta t \cdot \{F_L\}_{t+\Delta t} + [C_{LL} \quad C_{LP}] \cdot \begin{Bmatrix} T_L \\ T_P \end{Bmatrix}_{t_0} - ([C_{LP}] + \Delta t [K_{LP}]) \cdot \{T_P\} \quad (\text{IV} - 60)$$

Nous allons maintenant effectuer un réarrangement des composantes du vecteur des températures globales $\{T\}$ en plaçant d'abord les températures inconnues $\{T_L\}$ puis les températures connues $\{T_P\}$:

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} T_2 \\ T_1 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{T_L\} \\ \{150\} \\ \{150\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{T_L\} \\ \{T_P\} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV} - 61)$$

Ce réarrangement affecte automatiquement les autres composants du système d'équations c.à.d. la matrice de capacité thermique globale $[C]$, la matrice de conductivité globale $[K]$ et le vecteur des flux de chaleur global $\{F\}$. On obtient après réarrangement :

$$[C] = 19912,5 \cdot \begin{bmatrix} [4] & [1] & [1] \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{IV} - 62)$$

Où $[C_{LL}] = 19912,5 \cdot [4]$

$$[K] = 4180 \cdot \begin{bmatrix} [2] & [-1] & [-1] \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV} - 63)$$

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_L\} \\ \{F_P\} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV} - 64)$$

➤ Résolution en régime transitoire

D'après l'équation (IV-59), et en considérant $\Delta t = 0,1 \text{ sec}$:

$$[\bar{K}] = [C_{LL}] + \Delta t [K_{LL}] = 19912,5 \cdot [4] + 4180 \cdot \Delta t \cdot [2] = 80486 \quad (\text{IV} - 65)$$

D'après l'équation (IV-60) :

$$\{\bar{F}\} = \Delta t \{0\} + 19912,5 \cdot [4 \quad 1 \quad 1] \cdot \begin{Bmatrix} 150 \\ 20 \\ 150 \end{Bmatrix}_{t_0} - (19912,5 \cdot [1 \quad 1] + 4180 \cdot \Delta t [-1 \quad -1]) \cdot \begin{Bmatrix} 150 \\ 150 \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{F}\} = 1718400 \quad (\text{IV} - 66)$$

On résout le système présenté à l'équation (IV-58) en considérant les équations (IV-65) et (IV-66) afin de déterminer la température du nœud 2 à $t = 0,1 \text{ sec}$:

$$\{T_L\}_{n+1} = [\bar{K}]^{-1} \cdot \{\bar{F}\} = 21,350 \text{ } ^\circ\text{C} \quad (\text{IV} - 67)$$

La température obtenue via l'équation (IV-67) sera considérée comme température initiale pour le calcul de l'étape suivante c.-à-d. à $t = 0,2 \text{ sec}$, où:

$$\{T\}_{t_0} = \begin{Bmatrix} 150 \\ 21,350 \\ 150 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV} - 68)$$

Ensuite, on reprend le calcul de $\{\bar{F}\}$, en considérant le résultat de l'équation (IV-68) :

$$\{\bar{F}\} = 19912,5 \cdot [4 \quad 1 \quad 1] \cdot \begin{Bmatrix} 150 \\ 21,35 \\ 150 \end{Bmatrix}_{t_0} - (19912,5 \cdot [1 \quad 1] + 4180 \cdot \Delta t [-1 \quad -1]) \cdot \begin{Bmatrix} 150 \\ 150 \end{Bmatrix}$$

$$\{\bar{F}\} = 1\ 825\ 950,598 \quad (\text{IV} - 69)$$

On résout, encore une autre fois, le système présenté à l'équation (IV-58) en considérant les équations (IV-65) et (IV-69) afin de déterminer la température du nœud 2 à $t = 0,2 \text{ sec}$:

$$\{T_L\}_{n+1} = [\bar{K}]^{-1} \cdot \{\bar{F}\} = 22,686 \text{ } ^\circ\text{C} \quad (\text{IV} - 70)$$

On reprend ces calculs jusqu'à ce que la température du nœud 2 se stabilise à $T_p=150^\circ\text{C}$. Les résultats obtenus, en fonction du temps, sont représentés sur la figure IV-12.

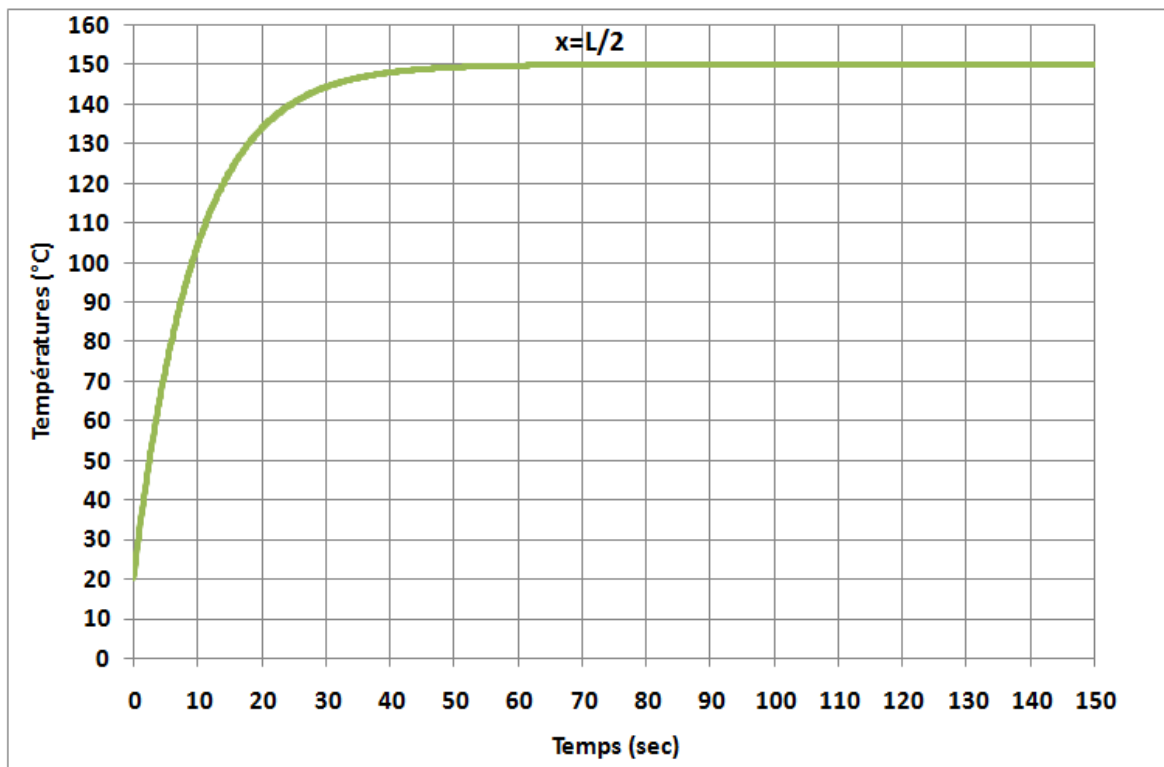


Fig. IV-12 : Variation de la température en fonction du temps, à mi-longueur de la barre, obtenue par la méthode des éléments-finis en considérant deux éléments.

B) En considérant quatre éléments-finis

➤ Maillage

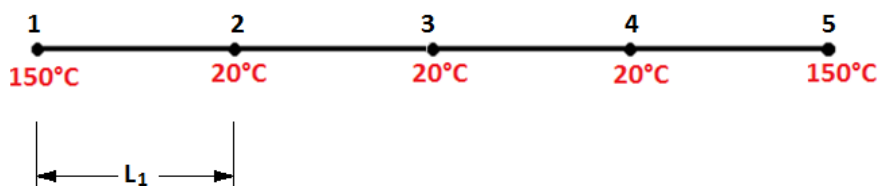


Fig. IV-13 : Barre discrétisée en quatre éléments finis où $L_1 = 0,025\text{m}$

➤ Résultats obtenus

Les températures T_2 et T_3 , obtenues dans ce cas, sont représentées sur la figure suivante.

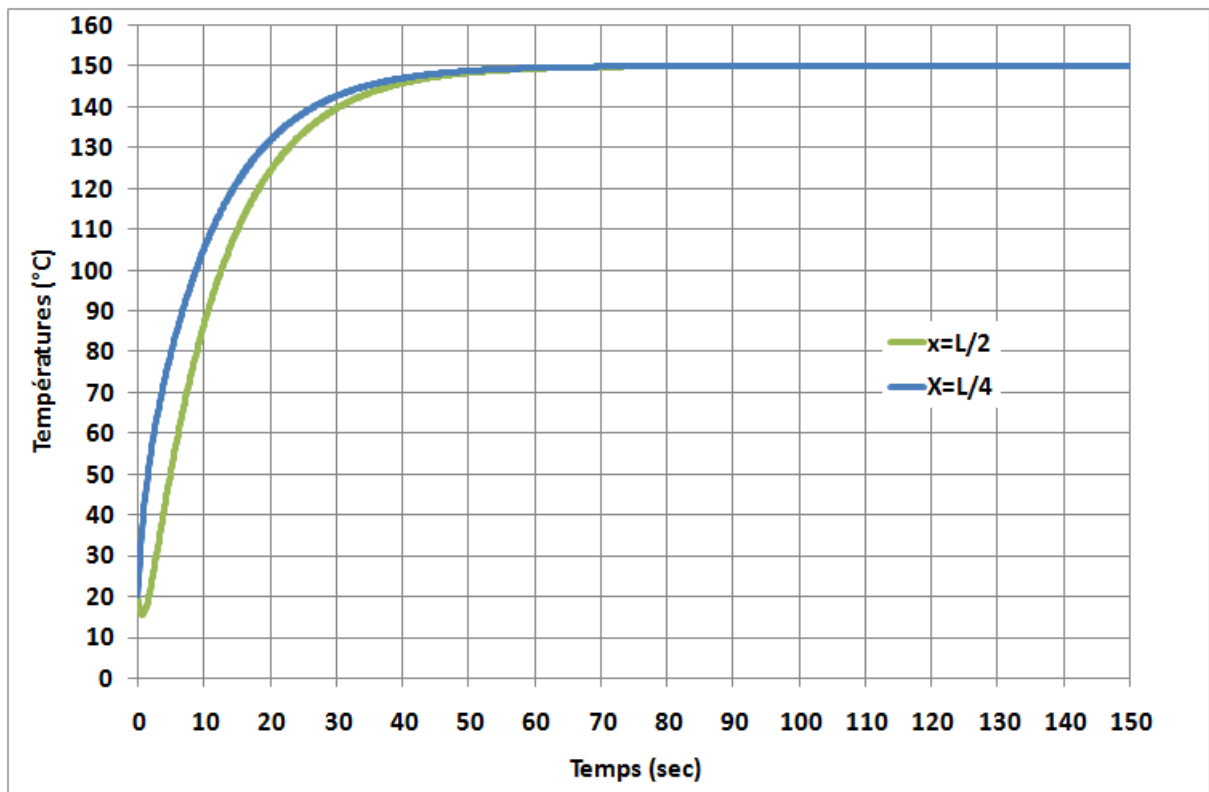


Fig. IV-14 : Variation de la température en fonction du temps obtenue par la méthode des éléments-finis en considérant quatre éléments-finis.

C) En considérant huit éléments-finis

➤ Maillage

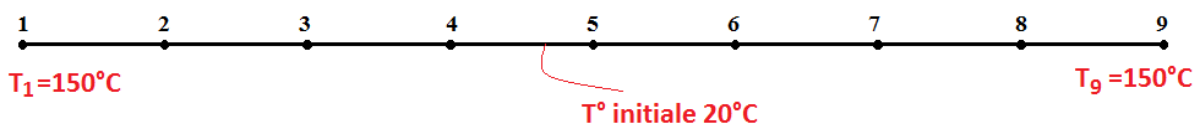


Fig. IV-15 : Barre discrétisée en huit éléments finis où $L_1 = 0,0125m$

➤ Résultats obtenus

Les températures obtenues correspondant aux nœuds 2, 3, 4 et 5 sont représentées sur la figure suivante. Le programme relatif à cette résolution est présenté en annexe 11.

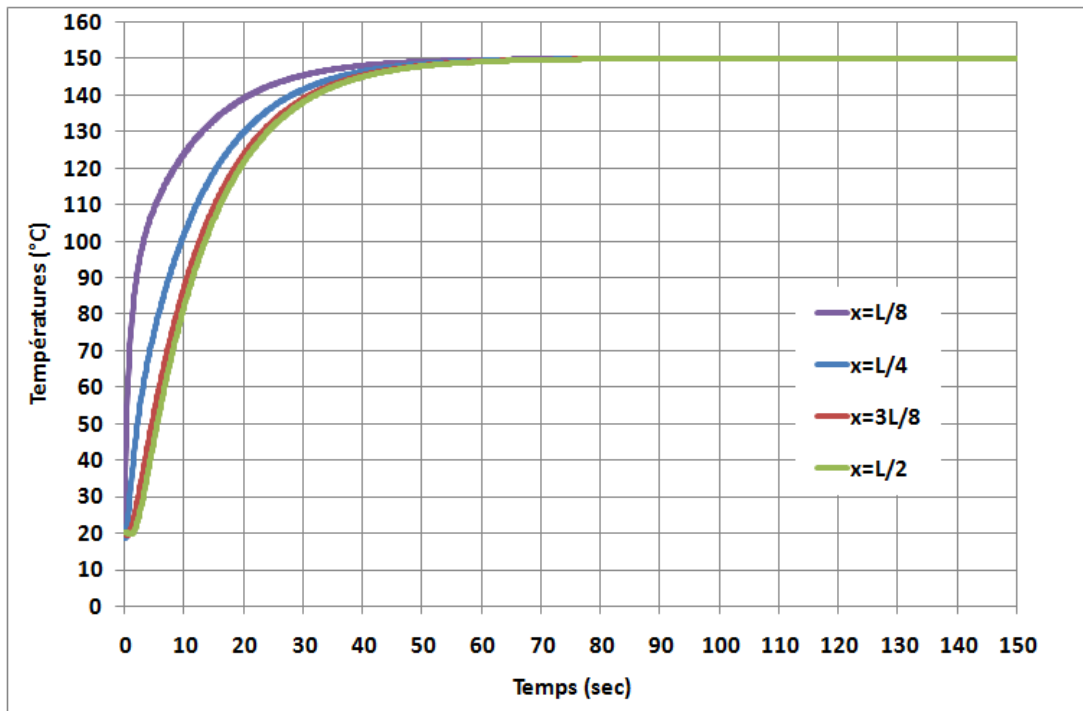


Fig. IV-16 : Variation de la température en fonction du temps, pour différentes positions, obtenue par la méthode des éléments-finis en considérant huit éléments

IV.3-4 Résolution par le logiciel ANSYS

Les étapes de simulation sont présentées dans l’annexe 12. Les résultats ainsi obtenus, en termes de variation temporelle de la température, sont représentés graphiquement sur la figure IV-17 en considérant plusieurs points de la barre.

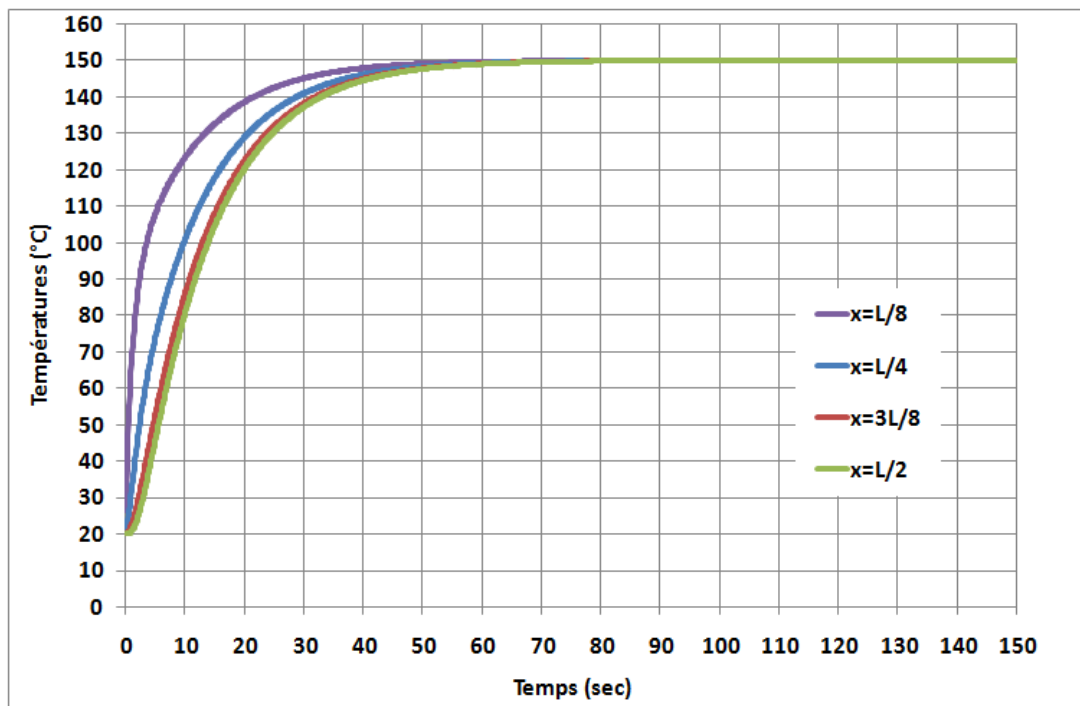


Fig. IV-17 : Variation de la température en fonction du temps, pour différentes positions, obtenue par le logiciel ANSYS.

IV.3-5 Comparaison des résultats

Les évolutions de la température en fonction du temps, à mi-longueur de la barre, obtenues par les trois méthodes (analytique, MEF à 8 éléments et ANSYS) sont représentées sur la figure IV-18 où nous remarquons une parfaite concordance des résultats ce qui démontre clairement la fiabilité de la méthode proposée.

Sur la figure IV-19, nous présentons en abscisse la variable temps et en ordonnée l'erreur relative, exprimée en pourcentage, calculée en prenant comme référence la solution analytique. Les valeurs négatives des erreurs signifient que la valeur calculée par la MEF est supérieure à la valeur obtenue par la méthode analytique. Nous remarquons ainsi une bonne concordance des résultats où l'erreur relative maximale est de 3,25% cette erreur a été enregistrée à $t=4,6$ secondes.

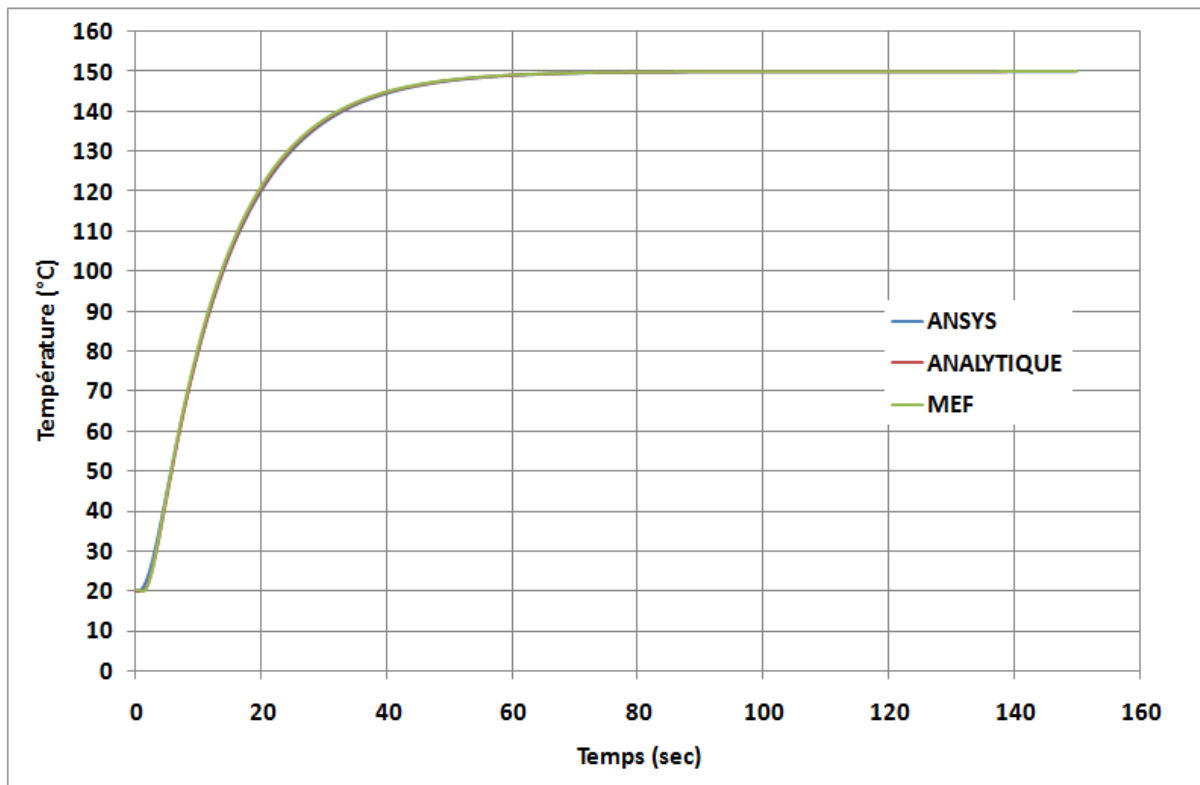


Fig. IV-18 : Comparaison des résultats obtenus par les trois méthodes à mi-longueur de la barre

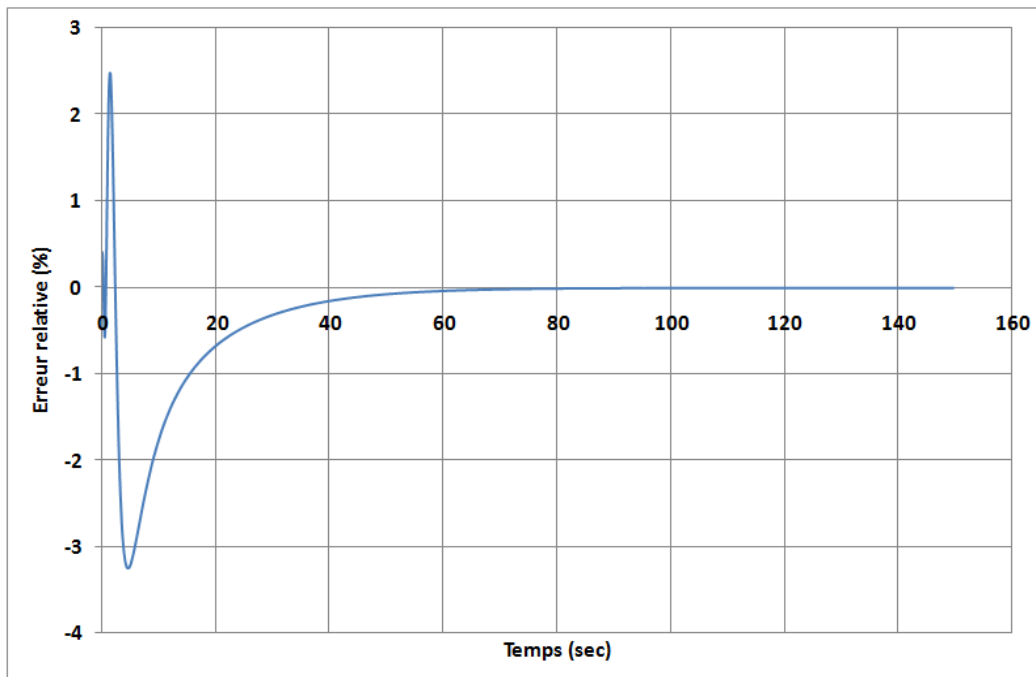


Fig. IV-19 : Variation en fonction du temps de l'erreur relative obtenue entre la solution analytique et la solution élément-fini

Afin d'analyser la convergence des résultats en faisant augmenter le nombre d'éléments du maillage, nous avons superposé les résultats obtenus précédemment au centre de la barre (à $x = L/2$), voir le paragraphe VI.3-3. Nous remarquons que les résultats convergent bien au fur et à mesure que le nombre d'éléments augmente.

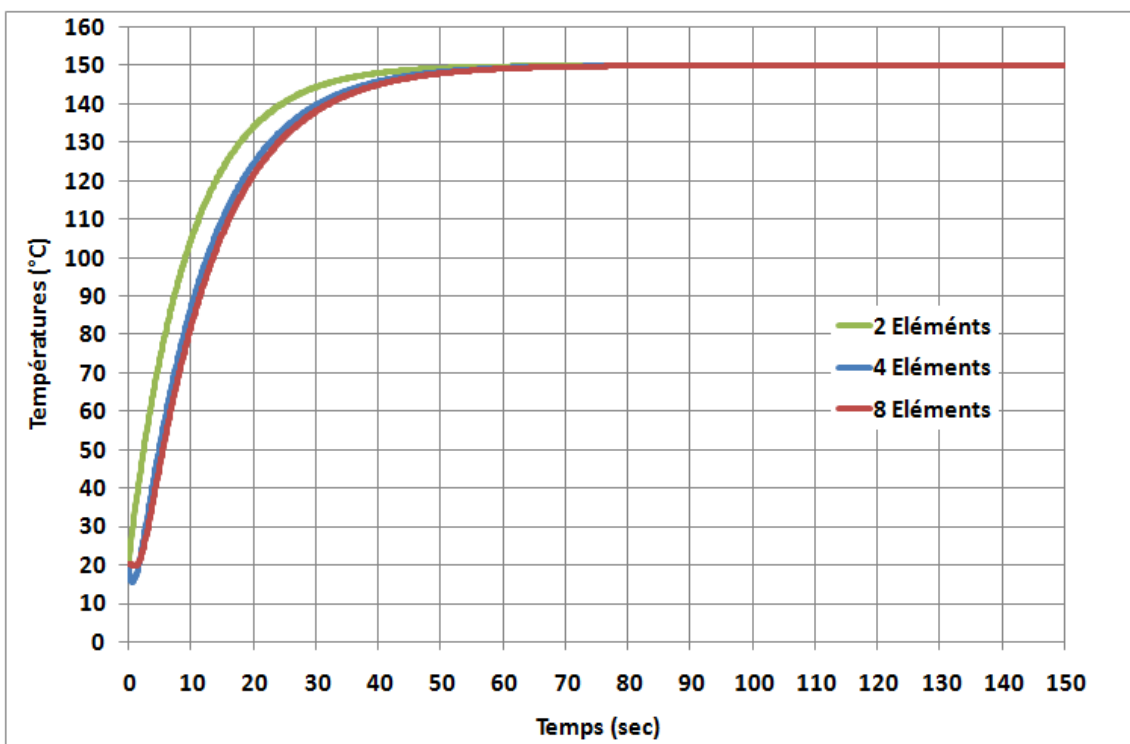


Fig. IV-20 : Variation en fonction du temps de l'erreur relative obtenue entre la solution analytique et la solution élément-fini

IV.4 Transfert de chaleur bidirectionnel en régime stationnaire

Afin de contourner la validation des résultats, nous allons reprendre le problème décrit au paragraphe IV.2-1 en utilisant un élément fini rectangulaire à quatre nœuds. En effet, pour pouvoir afficher les résultats au milieu du mur, nous allons considérer deux éléments finis comme c'est illustré sur la figure IV-21. De plus, la hauteur h de l'élément sera calculée en respectant la formule $A = h \cdot e$ où e est l'épaisseur du mur suivant l'axe z .
Résumé des données :

$$L = 0,1\text{m}; \lambda = 0,1 \text{ W/m.K}; q = 1000 \text{ W/m}^3; T_p = 100^\circ\text{C}; A = 3 \text{ m}^2; h = 1\text{m}; e = 3\text{m}.$$

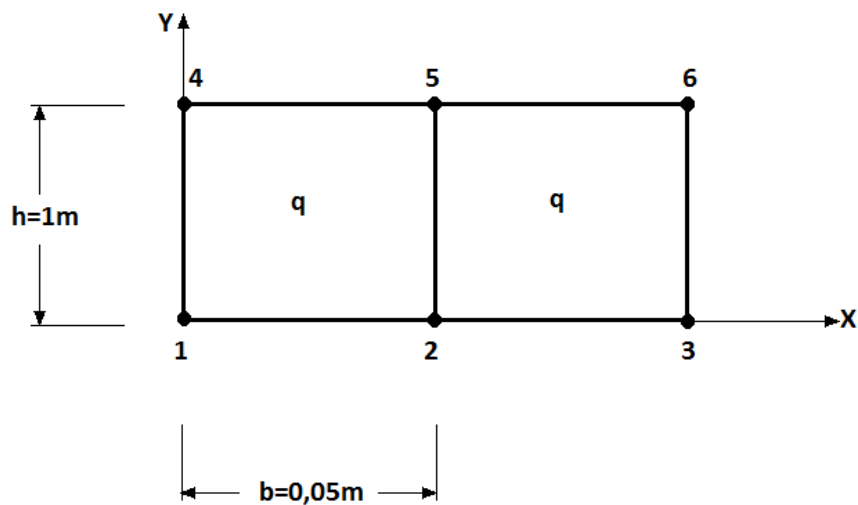


Fig. IV-21 : Discrétisation du mur en deux éléments rectangulaires

- **Définitions des matrices élémentaires**

Le premier élément est défini par les nœuds 1,2,5 et 4 notés dans le sens trigonométrique. Le vecteur des températures nodales lui correspondant est :

$$\{T\}_1 = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_5 \\ T_4 \end{pmatrix} \quad (\text{IV-71})$$

Le deuxième élément est défini par les nœuds 2,3,6 et 5. Le vecteur des températures nodales lui correspondant est :

$$\{T\}_2 = \begin{pmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_6 \\ T_5 \end{pmatrix} \quad (\text{IV-72})$$

La matrice de conductivité thermique, d'un élément rectangulaire, est définie à l'équation (III-39):

$$[K]_e = \lambda \cdot e \begin{bmatrix} \frac{b^2 + h^2}{3bh} & \frac{b}{6h} - \frac{h}{3b} & \frac{-(b^2 + h^2)}{6bh} & \frac{h}{6b} - \frac{b}{3h} \\ \frac{b}{6h} - \frac{h}{3b} & \frac{b^2 + h^2}{3bh} & \frac{h}{6b} - \frac{b}{3h} & \frac{-(b^2 + h^2)}{6bh} \\ \frac{-(b^2 + h^2)}{6bh} & \frac{h}{6b} - \frac{b}{3h} & \frac{b^2 + h^2}{3bh} & \frac{b}{6h} - \frac{h}{3b} \\ \frac{h}{6b} - \frac{b}{3h} & \frac{-(b^2 + h^2)}{6bh} & \frac{b}{6h} - \frac{h}{3b} & \frac{b^2 + h^2}{3bh} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [K]_e = \begin{bmatrix} 2,005 & -1,9975 & -1,0025 & 0,995 \\ -1,9975 & 2,005 & 0,995 & -1,0025 \\ -1,0025 & 0,995 & 2,005 & -1,9975 \\ 0,995 & -1,0025 & -1,9975 & 2,005 \end{bmatrix} \quad (\text{IV} - 73)$$

Le vecteur des flux nodaux, d'un élément rectangulaire, défini à l'équation (III-42):

$$\{F\}_e = e \cdot q \begin{Bmatrix} \frac{bh}{4} \\ \frac{bh}{4} \\ \frac{bh}{4} \\ \frac{bh}{4} \end{Bmatrix} + A \cdot [N]_{e,n}^T (\varphi_x + hT_f + \varepsilon\sigma(T_\infty^4 - T^4)) = e \cdot q \begin{Bmatrix} \frac{bh}{4} \\ \frac{bh}{4} \\ \frac{bh}{4} \\ \frac{bh}{4} \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \{F\}_e = 37,5 \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV} - 74)$$

• Assemblage et résolution

Après assemblage, le système global prend la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} 2,005 & -1,9975 & 0 & 0,995 & -1,0025 & 0 \\ -1,9975 & 4,01 & -1,9975 & -1,0025 & 1,99 & -1,0025 \\ 0 & -1,9975 & 2,005 & 0 & -1,0025 & 0,995 \\ 0,995 & -1,0025 & 0 & 2,005 & -1,9975 & 0 \\ -1,0025 & 1,99 & -1,0025 & -1,9975 & 4,01 & -1,9975 \\ 0 & -1,0025 & 0,995 & 0 & -1,9975 & 2,005 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 37,5 \\ 75 \\ 37,5 \\ 37,5 \\ 75 \\ 37,5 \end{Bmatrix}$$

Ensuite, on supprime les lignes correspondantes aux températures imposées (T_1, T_3, T_4, T_6), et le système se réduit à :

$$\begin{bmatrix} 4,01 & 1,99 \\ 1,99 & 4,01 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} T_2 \\ T_5 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1,9975 & -1,9975 & -1,0025 & -1,0025 \\ -1,0025 & -1,0025 & -1,9975 & -1,9975 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 75 \\ 75 \end{Bmatrix}$$

Un arrangement adéquat de cette équation, permet de déterminer les températures inconnues du système :

$$\begin{Bmatrix} T_2 \\ T_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,01 & 1,99 \\ 1,99 & 4,01 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \left(\begin{Bmatrix} 75 \\ 75 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} -1,9975 & -1,9975 & -1,0025 & -1,0025 \\ -1,0025 & -1,0025 & -1,9975 & -1,9975 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \end{Bmatrix} \right)$$

$$\begin{Bmatrix} T_2 \\ T_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 112,5 \\ 112,5 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV} - 75)$$

On voit clairement que ces résultats sont identiques à ceux présentés dans le tableau IV-2. Le programme relatif à ces calculs est présenté en annexe 13.

IV.5 Transfert de chaleur bidirectionnel en régime transitoire

IV.5-1 Exemple de validation

Comme pour la section précédente, nous allons reprendre le problème décrit au paragraphe IV.3-1 en utilisant un maillage de huit éléments-finis rectangulaires afin d'éviter les erreurs de convergence dues à la qualité du maillage. Rappel des données :

$$L = 0,1\text{m}; q = 0; \lambda = 209 \text{ W/m}^\circ\text{C}; \rho = 2700 \text{ kg/m}^3; Cp = 885 \text{ J/Kg.K}; T_i = 20 \text{ }^\circ\text{C};$$

$$T_p = 150 \text{ }^\circ\text{C}; A = 1 \text{ m}^2; h = 1\text{m}; e = 1\text{m}.$$

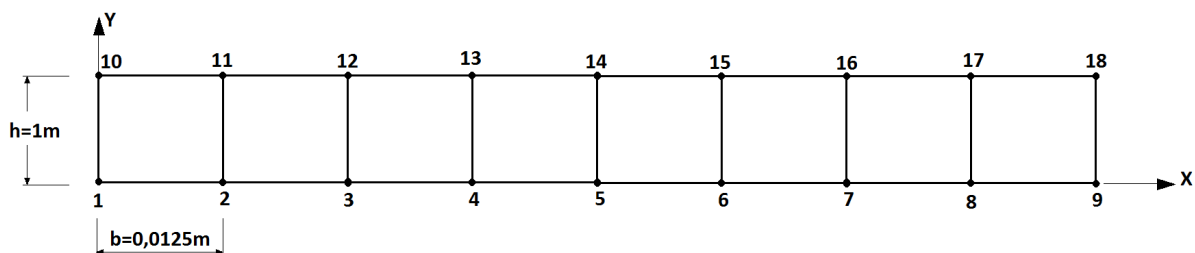


Fig. IV-22 : Discrétisation du mur en huit éléments rectangulaires

IV.5-2 Résolution par la MEF

- Définitions des matrices élémentaires

Les vecteurs des températures nodales s'écrivent comme suit :

$$\{T\}_1 = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_{11} \\ T_{10} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 150 \\ T_2 \\ T_{11} \\ 150 \end{Bmatrix}; \quad \{T\}_2 = \begin{Bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_{12} \\ T_{11} \end{Bmatrix}; \quad \{T\}_3 = \begin{Bmatrix} T_3 \\ T_4 \\ T_{13} \\ T_{12} \end{Bmatrix} \dots \dots \dots$$

$$\{T\}_8 = \begin{Bmatrix} T_8 \\ T_9 \\ T_{18} \\ T_{17} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_8 \\ 150 \\ 150 \\ T_{17} \end{Bmatrix} \quad (\text{IV} - 76)$$

La matrice de conductivité thermique, d'un élément rectangulaire, est définie à l'équation (III-39):

$$[K]_e = \begin{bmatrix} 5574,2 & -5572,9 & -2787,1 & 2785,8 \\ -5572,9 & 5574,2 & 2785,8 & -2787,1 \\ -2787,1 & 2785,8 & 5574,2 & -5572,9 \\ 2785,8 & -2787,1 & -5572,9 & 5574,2 \end{bmatrix} \quad (\text{IV} - 77)$$

La matrice de capacité thermique, d'un élément rectangulaire, est définie à l'équation (III-34), où :

$$[C]_e = \rho \cdot e \cdot C_p \begin{bmatrix} \frac{bh}{9} & \frac{bh}{18} & \frac{bh}{36} & \frac{bh}{18} \\ \frac{bh}{18} & \frac{bh}{9} & \frac{bh}{18} & \frac{bh}{36} \\ \frac{bh}{36} & \frac{bh}{18} & \frac{bh}{9} & \frac{bh}{18} \\ \frac{bh}{18} & \frac{bh}{36} & \frac{bh}{18} & \frac{bh}{9} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [C]_e = \begin{bmatrix} 3318,75 & 1659,375 & 829,6875 & 1659,375 \\ 1659,375 & 3318,75 & 1659,375 & 829,6875 \\ 829,6875 & 1659,375 & 3318,75 & 1659,375 \\ 1659,375 & 829,6875 & 1659,375 & 3318,75 \end{bmatrix} \quad (\text{III} - 78)$$

Le vecteur des flux nodaux, d'un élément rectangulaire, défini à l'équation (III-42):

$$\{F\}_e = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{IV} - 79)$$

- **Assemblage et résolution**

Vu la taille importante des matrices globales, elles ne seront pas présentées dans ce manuscrit.

La résolution de ce problème, en régime transitoire, suit la procédure décrite au paragraphe II-7 où il suffit de résoudre le système d'équations II-42, où :

$$[\bar{K}] \cdot \{T_L\}_{t+\Delta t} = \{\bar{F}\} \quad (\text{IV} - 80)$$

Avec

$$[\bar{K}] = [C_{LL}] + \Delta t [K_{LL}] \quad (\text{IV} - 81)$$

$$\{\bar{F}\} = \Delta t \{F_L\}_{t+\Delta t} + [C_{LL} \quad C_{LP}] \begin{Bmatrix} T_L \\ T_P \end{Bmatrix}_t - ([C_{LP}] + \Delta t [K_{LP}]) \{T_P\} \quad (\text{IV} - 82)$$

Ces calculs ont été effectués à l'aide du logiciel MATLAB, où le programme relatif à cette opération est présenté dans l'annexe 14.

Les températures des nœuds 2, 3, 4 et 5 sont représentées sur la figure suivante :

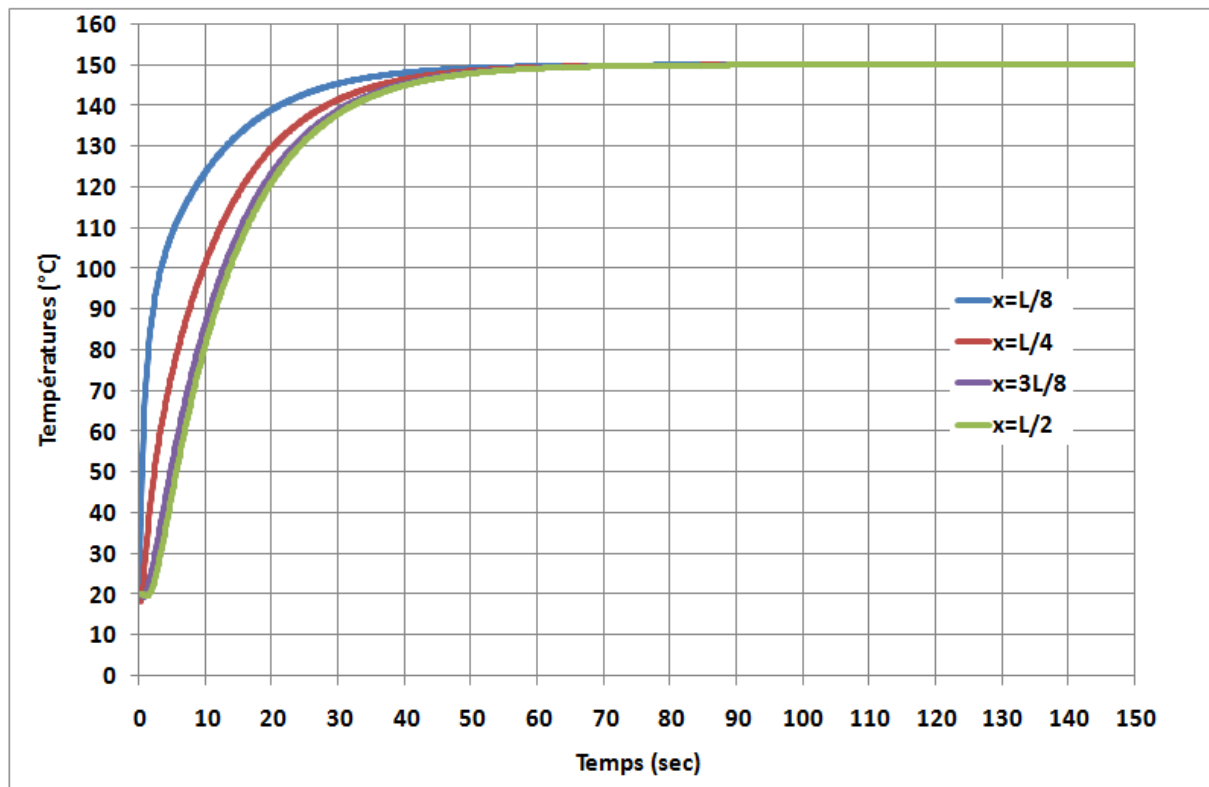


Fig. IV-23 : Variation de la température en fonction du temps, pour différentes positions, obtenue par la méthode des éléments-finis

IV.5-2 Validation des résultats

Les résultats obtenus par la MEF utilisant un élément-fini rectangulaire (figure IV-23) ont été comparés avec ceux obtenus par la méthode analytique présentés à la figure IV-10 où nous remarquons une parfaite concordance des résultats. Notons cependant une légère différence des résultats entre les deux méthodes durant les premiers instants.

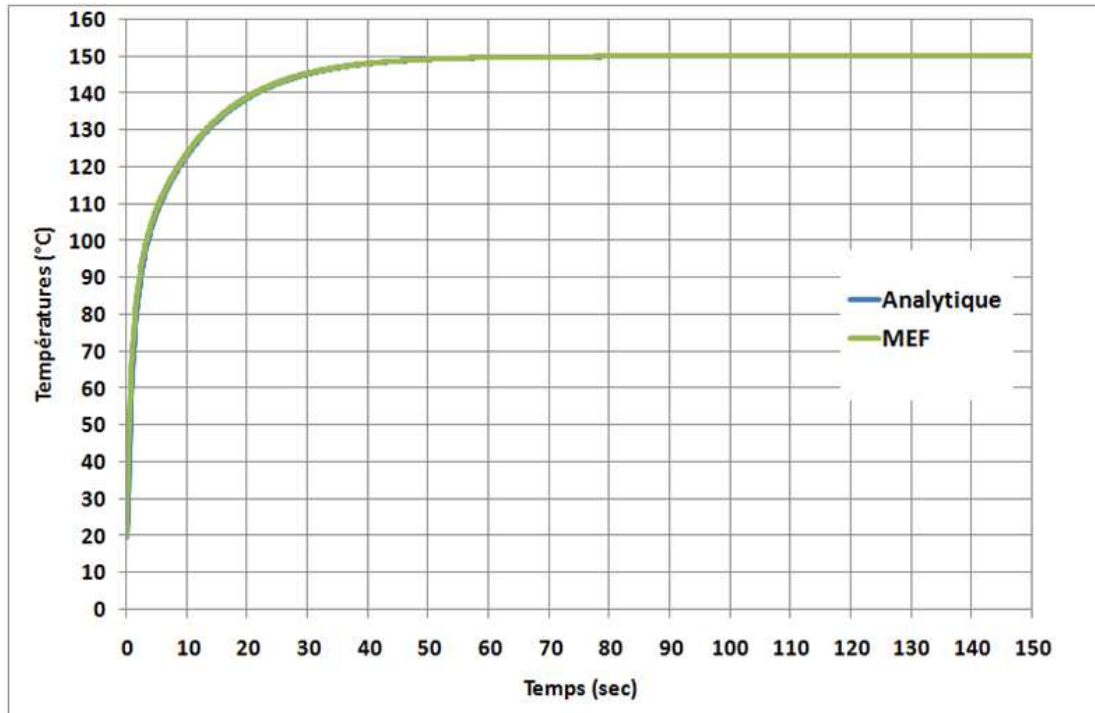


Fig. IV-24 : Comparaison des résultats obtenus, au nœud 2, par les deux méthodes analytique et éléments-finis

IV.6 Conclusion

La première partie de ce chapitre, relative à un élément fini linéaire, a été étalée afin d'exposer plusieurs détails tels que le problème sans températures imposées où la matrice de rigidité est directement inversible, le problème convectif et le calcul analytique de l'équation de la chaleur en régimes stationnaire et transitoire. Cependant, la deuxième partie de ce chapitre, relative à l'élément fini rectangulaire, a été très brève en présentant seulement le calcul des matrices élémentaires et les méthodes de résolution vu que le principe de calcul suit toujours la même méthodologie.

En effet, nous avons pu à travers ce chapitre afficher les résultats des transferts de chaleur unidirectionnels et bidimensionnels en considérant les deux régimes stationnaire et transitoire en utilisant la méthode des éléments finis. Les résultats sont comparés à ceux issus de la méthode analytique et du logiciel ANSYS où nous remarquons une parfaite concordance des résultats, ce qui montre l'efficacité et la précision de la MEF.

CONCLUSION GENERALE

L'objectif de ce travail est l'application de la méthode des éléments finis pour la résolution des problèmes de transfert de chaleur unidirectionnels et bidirectionnels en considérant les deux régimes stationnaire et transitoire. Le développement de la méthode à été présenté d'une manière générale puis appliqué aux cas d'éléments finis linéaires et quadrilatérales. Ensuite, des exemples numériques de complexités progressives ont été présentés pour mieux comprendre le calcul matriciel, la procédure d'assemblage et les techniques de résolution. Et pour pouvoir valider l'approche présentée, les résultats obtenus par la MEF ont été comparés avec ceux obtenus par la méthode analytique et ceux obtenus par le logiciel ANSYS où nous constatons une parfaite concordance des résultats.

Quant aux résultats de l'expérimentation numérique effectuée, nous pouvons en dégager les conclusions générales suivantes:

- ✓ La méthode des éléments finis permet de donner des résultats très satisfaisants pour les problèmes de transferts de chaleur ;
- ✓ Le nombre d'éléments finis considéré dans le maillage influe sensiblement sur la qualité des résultats en régime transitoire (plus le nombre d'éléments est élevé meilleurs sont les résultats) ce qui n'est pas le cas en régime stationnaire ;
- ✓ Capacité de la méthode des éléments finis à traiter les problèmes complexes vue sa simplicité et ses calculs répétitifs qui sont facilement programmables sur ordinateur.

Enfin, pour améliorer ce sujet, nous proposons les suggestions suivantes :

- Développer les caractéristiques élémentaires d'autres éléments finis tels que les éléments triangulaires et tridimensionnels ;
- Traiter les problèmes de transfert de chaleur non linéaires ;
- Traiter le transfert de chaleur par rayonnement.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Frank Kreith, Raj M. Manglik, Mark S. Bohn: Principles of heat transfert, seventh edition, cengage learning, 2011.
- [2] Jean-Luc, Battaglia , Andrzej, Kusiak, Jean-Rodolphe Puiggali : Introduction aux transferts thermiques ,2e édition, Dunod, 2014.
- [3] Nicolas ERRIEN : Transfert thermique, polycopié de cours, Département de Physique, Faculté des Sciences, université du Main.
- [4] Philippe Marty, polycopié de cours : Transfert thermique, Université Joseph Fourier, Grenoble, 2013.
- [5] J. SACADURA: Transfert thermique, initiation et approfondissement ; Lavoisier, 2015.
- [6] Yves JANNOT: Transferts thermique, polycopié de cours, Ecole des mines Nancy, 2012.
- [7] Er. R. K. Rajput, Heat and Mass transfer, revised Edition, S. chand & ncompany LTD, 2011.
- [8] A. Bianchi, Y. Fautrelle, J. Etay : Transferts thermiques, PPUR presses polytechniques, 2004.
- [9] K. Bathe : Finite element procedures, Prentice Hall, 1996.
- [10] G. Dhatt, G. Touzot : Une présentation de la méthode des éléments finis, Paris, 1981.
- [11] K. Rockey, H. Evans : Introduction à la méthode des éléments finis, Eyrolles, 2005.
- [12] Jean-Michel Bergheau, Roland Fortunier : Finite element simulation of heat transfert, Wiley, 2008.
- [13] Jean-Charles Craveur : Modélisation des éléments finis, 3^{ème} édition, Dunod, 2008.
- [14] Y. Tamene, S. Abboudi, C. Bougruoi : Simulation des transferts thermiques transitoires à travers un mur multicouche soumis à des conditions de flux solaire et de convection, Revue des energies renouvelables vol. 12 n°1, 2009 pages 117-124.
- [15] Mivhel Cazenave : Méthode des éléments finis, Dunod, 2010.
- [16] Patrick Paultre : Dynamique des structures, Lavoisier, 2005.

Annexe 1 : Programme pour le calcul de la matrice inverse de [A]

```
clc
clear all
syms b h
A=[1 0 0 0;1 b 0 0;1 b b*h h; 1 0 0 h];
A1=inv(A)
```

Annexe 2 : Programme pour le calcul des matrices d'interpolation [N]

```
clc
clear all
syms b h x y
A=[1 0 0 0;1 b 0 0;1 b b*h h; 1 0 0 h];
A1=inv(A);

N=[1 x x*y y]*A1;
N=simplify(N)
```

Annexe 3 : Programme pour le calcul de matrice de capacité thermique [C]_e

```
clc
clear all
syms b h x y
b=sym('b','real');
h=sym('h','real');
x=sym('x','real');
y=sym('y','real');
A=[1 0 0 0;1 b 0 0;1 b b*h h; 1 0 0 h];
A1=inv(A);

N=[1 x x*y y]*A1;
N=simplify(N)

NT=N'
Ci=NT*N;
Ci=simplify(Ci);
C1=int(Ci,0,b);
C2=int(C1,0,h);
C=simplify(C2)
```

Annexe 4 : Programme pour le calcul de matrice de conductivité thermique $[K]_e$

```
clc
clear all
syms b h x y
b=sym('b','real');
h=sym('h','real');
x=sym('x','real');
y=sym('y','real');

B=[((-1/b)+(y/(b*h))) ((1/b)-(y/(b*h))) y/(b*h) -y/(b*h);
   ((x/(b*h))-(1/h)) (-x/(b*h)) x/(b*h) (-x/(b*h))+1/h];
k=B'*B;
k=simplify(k);
K1=int(k,0,b);
K2=int(K1,0,h);
K=simplify(K2)
```

Annexe 5 : Programme pour le calcul du vecteur des flux de chaleur $\{F\}_e$

```
clc
clear all
syms b h x y
b=sym('b','real');
h=sym('h','real');
x=sym('x','real');
y=sym('y','real');
A=[1 0 0 0;1 b 0 0;1 b b*h h; 1 0 0 h];
A1=inv(A);
N=[1 x x*y y]*A1;
N=simplify(N);
NT=N';
N1=int(NT,0,b);
N2=int(N1,0,h);
F=simplify(N2)
```

Annexe 6 : Programme pour la résolution de l'exemple de validation

```
clear all
clc
L=0.1;      % Epaisseur du mur en (m)
q=1000;     % Source de chaleur volumique (w/m^3)
lamda=0.1;  % Conductivité thermique du matériau du mur (w/m°C)
A=3;        % Section de transfert de chaleur (section du mur) (m^2)
nn=3;       % Nbre de noeuds dans le maillage
NT=[1;2];   % nbre et numéros des noeuds où les températures sont inconnues
Tc=[100;100] % Respecter l'ordre d'assemblage T1 et T5
Ti=[nn-NT(1);1;3] % Nbre de températures imposées
                % N° des noeuds où les Température sont imposées (connues)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
ne=nn-1;    % Nbre d'éléments dans le maillage
L1=L/ne;    % Longueur d'un élément fini

% Calcul de la matrice de conductivité élémentaire
disp('Matrice élémentaire de conductivité thermique')
Ke=((lamda*A)/L1)*[1 -1;-1 1]
% Calcul du vecteur élémentaire des flux de chaleur
disp('Vecteur élémentaire des flux de chaleur')
Fe=((A*q*L1)/2)*[1;1]
% Calcul des matrices globales
K=zeros(nn,nn);
F=zeros(nn,1);
T=zeros(nn,1);

for i=0:ne-1
    for l=1:2; % l:ligne
        F(l+i)=Fe(l)+F(l+i);
    for c=1:2; % c: colonne
        K(l+i,c+i)=Ke(l,c)+K(l+i,c+i);
    end
    end
end
disp('Matrice globale de conductivité thermique')
K
disp('Vecteur global des flux de chaleur')
F

cc=1;
KL=zeros(NT(1),nn);
FL=zeros(NT(1),1);
for nnt=1:NT(1)
    cc=cc+1;
    KL(nnt,:)=K(NT(cc),:);
    FL(nnt)=F(NT(cc));
end
KL
FL
% Résolution du système
KLL=KL;
cc=0;
for i=1:Ti(1)
    KLL(:,Ti(i+1)-cc)=[];
    cc=cc+1;
end
KLL
KLP=KL;
cc=0;
for i=1:NT(1)
    KLP(:,NT(i+1)-cc)=[];
    cc=cc+1;
end
KLP
T=inv(KLL)*(FL-(KLP*Tc))
```



Annexe 7 : Données pour la résolution de l'exemple de validation à quatre nœuds

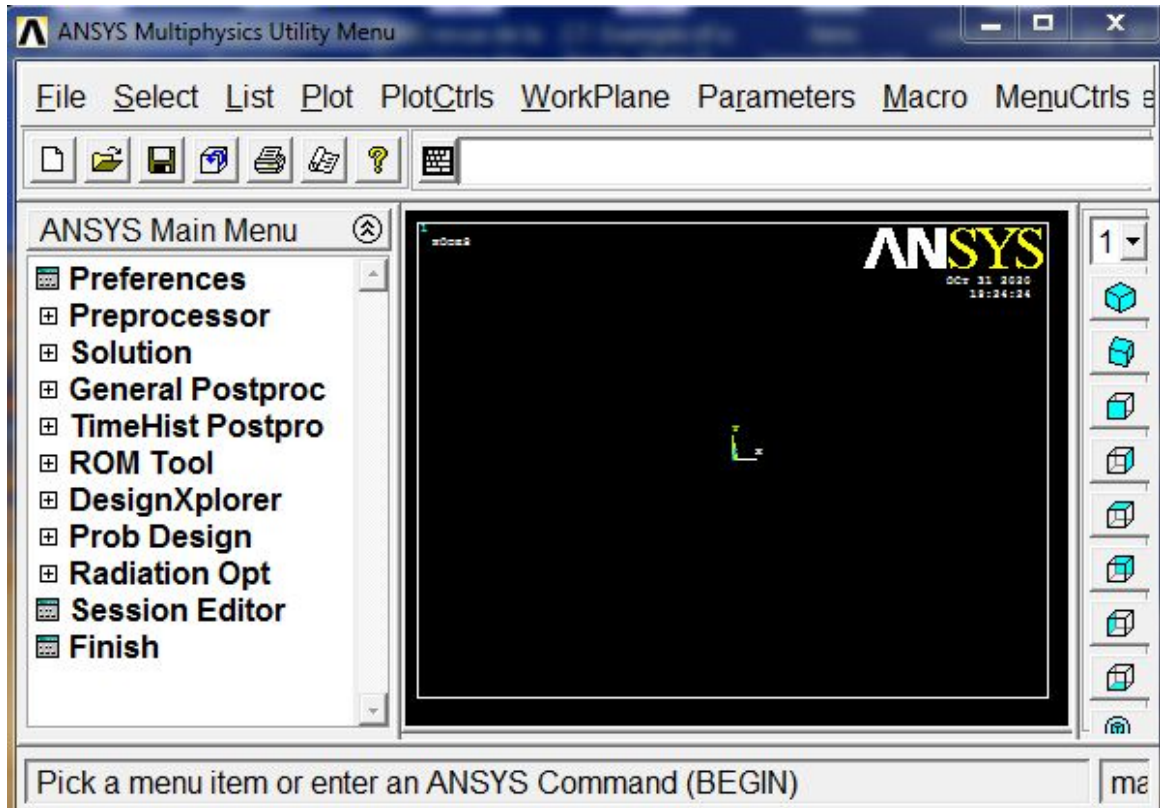
```
clear all
clc
L=0.1;      % Epaisseur du mur en (m)
q=1000;    % Source de chaleur volumique (w/m^3)
lamda=0.1; % Conductivité thermique du matériau du mur (w/m°C)
A=3;       % Section de transfert de chaleur (section du mur) (m^2)
nn=5;      % Nbre de noeuds dans le maillage
NT=[3;2;3;4]; % nbre et numéros des noeuds où les températures sont inconnues
Tc=[100;100] % Respecter l'ordre d'assemblage T1 et T5
Ti=[nn-NT(1);1;5] % Nbre de températures imposées
                % N° des noeuds où les Température sont imposées (connues)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

Annexe 8 : Données pour la résolution de l'exemple de validation à huit nœuds

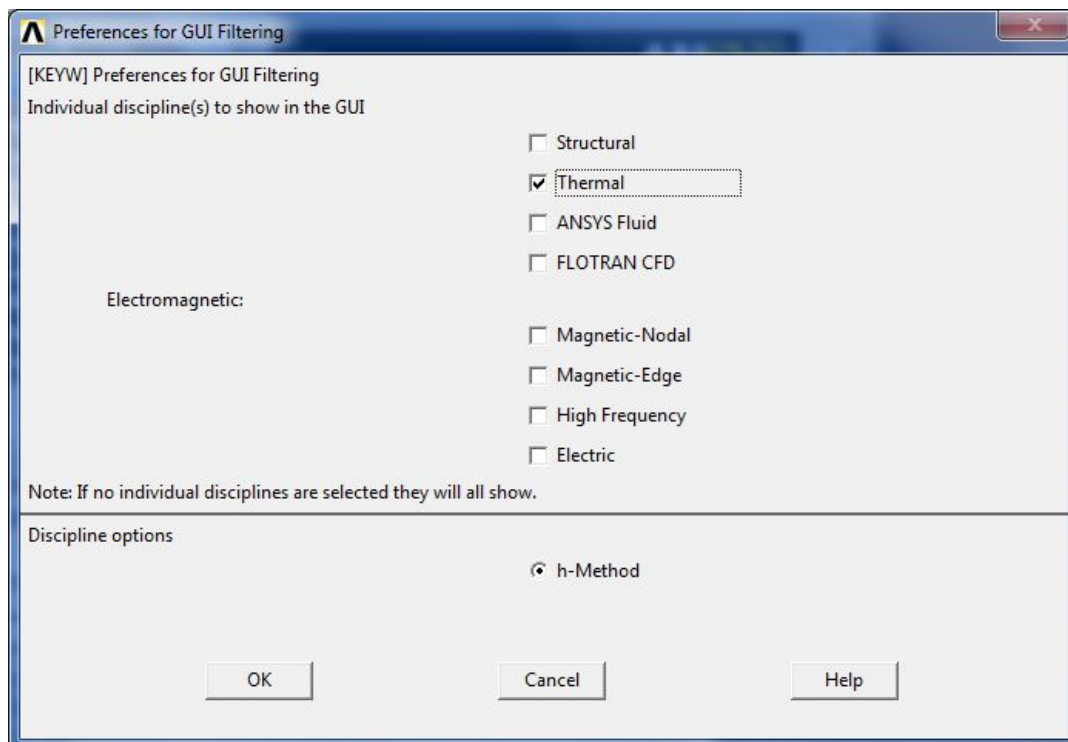
```
clear all
clc
L=0.1;      % Epaisseur du mur en (m)
q=1000;    % Source de chaleur volumique (w/m^3)
lamda=0.1; % Conductivité thermique du matériau du mur (w/m°C)
A=3;       % Section de transfert de chaleur (section du mur) (m^2)
nn=9;      % Nbre de noeuds dans le maillage
NT=[7;2;3;4;5;6;7;8]; % nbre et numéros des noeuds où les températures sont inconnues
Tc=[100;100] % Respecter l'ordre d'assemblage T1 et T5
Ti=[nn-NT(1);1;9] % Nbre de températures imposées
                % N° des noeuds où les Température sont imposées (connues)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

Annexe 9 : Méthodologie de simulation sous le code ANSYS en régime stationnaire

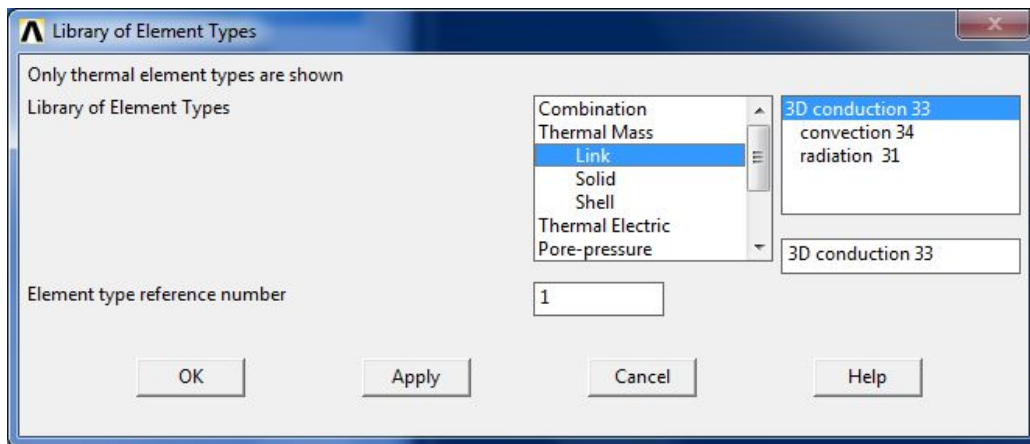
- Lancer le logiciel Mechanical APDL, en effectuant un double clic sur l'icône  . La fenêtre d'accueil suivante s'affiche :



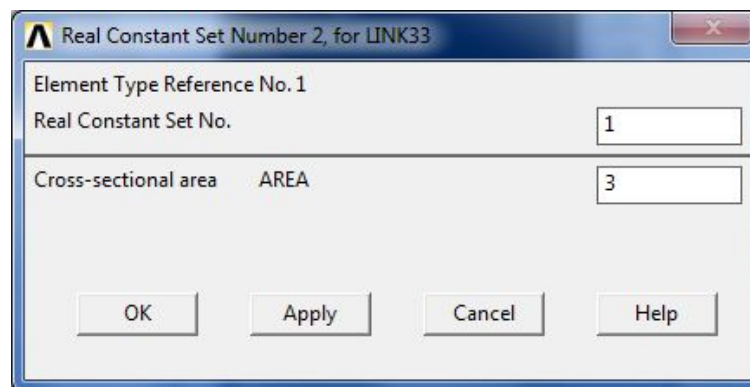
- Cliquer sur « Preferences » situé dans le menu principal, pour sélectionner le domaine d'analyse, dans ce cas on choisit « Thermal » :



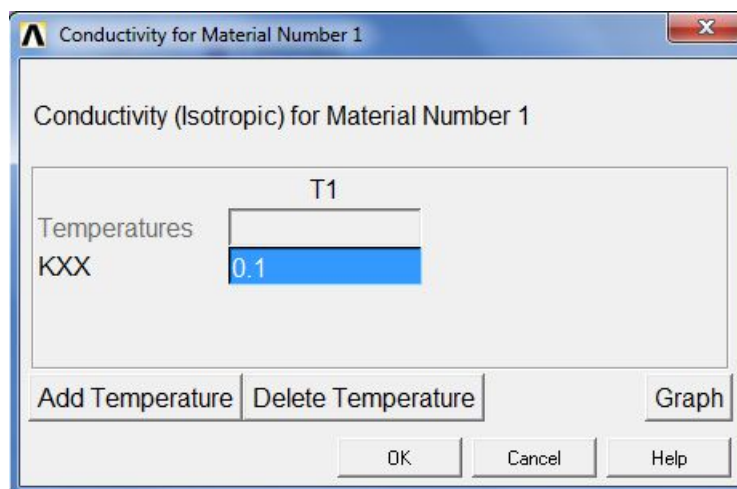
- Développer l'onglet « Preprocessor » situé dans le menu principal, puis :
 - Cliquer sur « Element Type » ⇒ « Add/edit/delete » ⇒ « Add ». Dans la fenêtre qui s'affiche sélectionner le type de l'élément fini « Link » puis « 3D conduction 33 » comme c'est illustré par fenêtre ci-après :



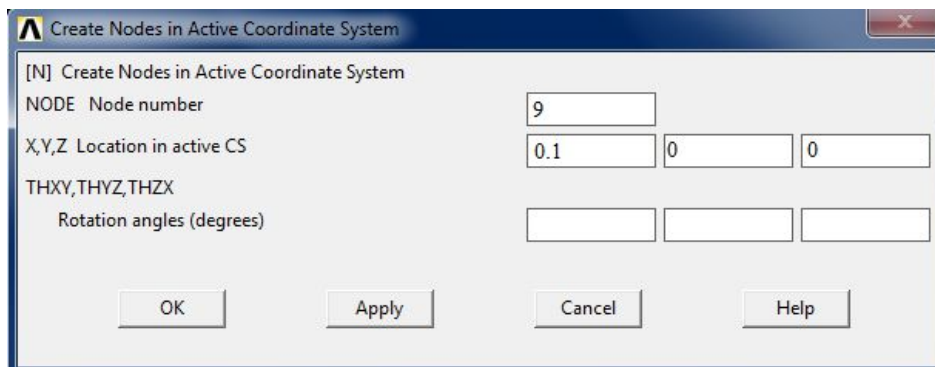
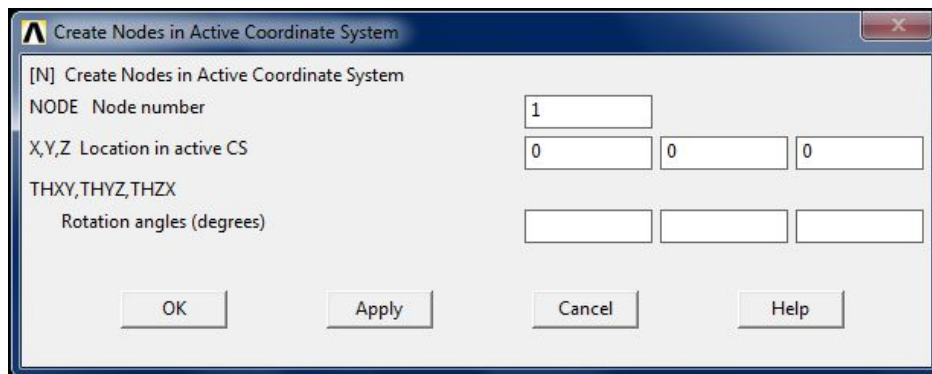
- Cliquer sur « Real Constants » ⇒ « Add » ⇒ « Ok ». Puis spécifier la valeur de la section de transfert « $A = 3m^2$ » dans la fenêtre suivante :



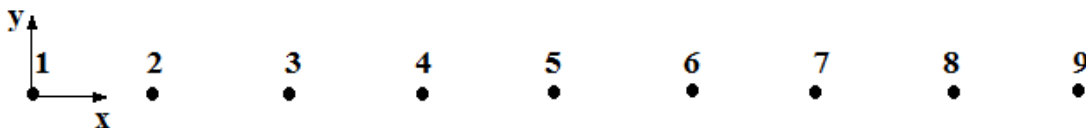
- Cliquer sur « Material props » ⇒ « Material Models ». Développer le dossier « Thermal » situé dans la zone « Material Models Available », puis cliquer sur « Conductivity » ⇒ « Isotropic » afin de spécifier la valeur de la conductivité thermique du matériau :



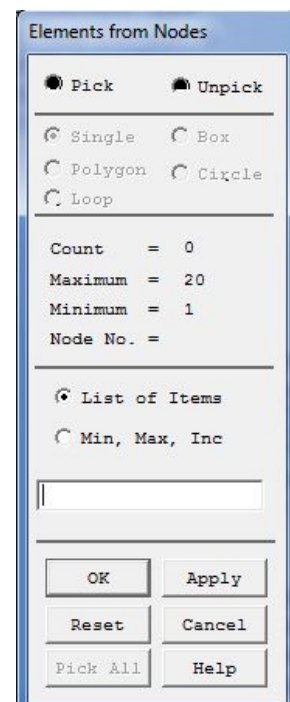
- Cliquer sur « Modeling » ⇒ « Create » ⇒ « Nodes ». Cliquer sur « In active CS » pour insérer les coordonnées des différents nœuds. A titre d'exemple, nous représentons sur les deux figures suivantes la création des nœuds 1 et 9 :



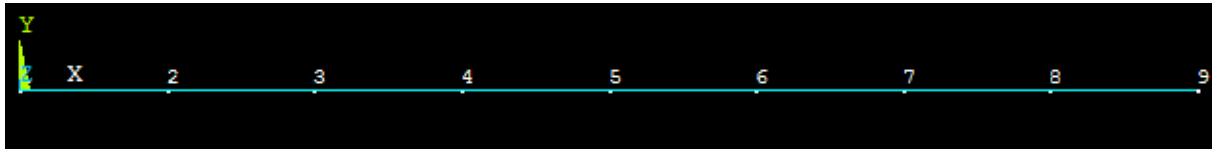
On obtient ainsi, le résultat suivant :



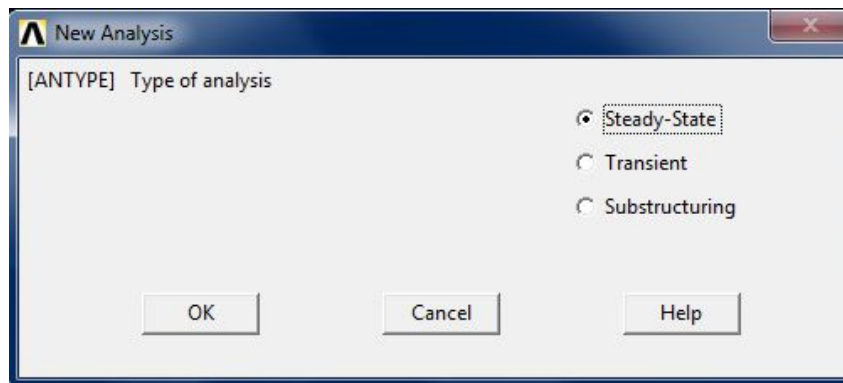
- Cliquer sur « Modeling » ⇒ « Create » ⇒ « Elements ». Cliquer sur « Auto Numbered » ⇒ « Thru nodes » afin de créer les éléments entre chaque paire de nœuds. Ainsi, pour créer l'élément 1 défini entre les nœuds 1 et 2, on sélectionne ces deux nœuds dans la zone graphique de ANSYS puis on clique sur « Apply » pour définir l'élément 2 qui est défini entre les nœuds 2 et 3 et ainsi de suite jusqu'à la création de l'élément 8 où on clique sur « OK ».



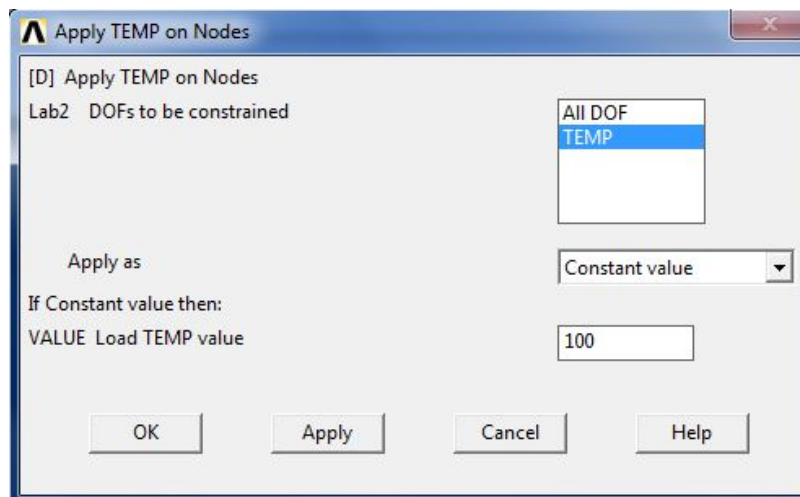
La figure suivante illustre le maillage obtenu :



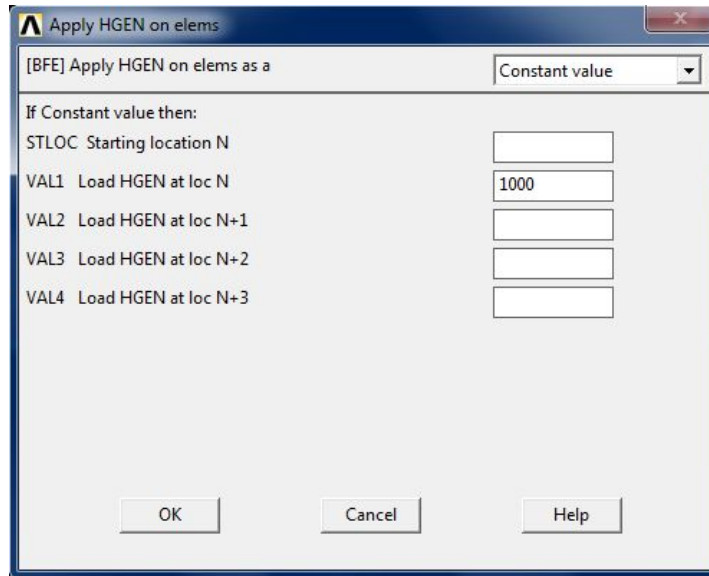
- Développer l'onglet « Solution » situé dans le menu principal, puis :
 - Cliquer sur « Analysis Type » ⇒ « New Analysis ». Pour effectuer une analyse stationnaire, il faut sélectionner « Steady-State » :



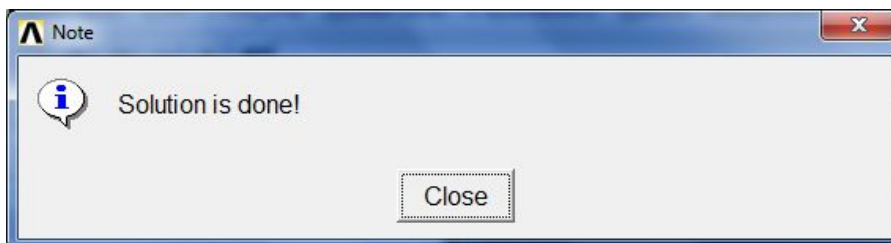
- Cliquer sur « Define loads » ⇒ « Apply » ⇒ « Thermal » ⇒ « Temperature » ⇒ « On Nodes ». Sélectionner ensuite les nœuds où les températures sont imposées. Dans ce cas, on sélectionne les nœuds 1 et 9 puis on clique sur « OK ». Les valeurs des températures imposées sont introduites dans la fenêtre suivante :



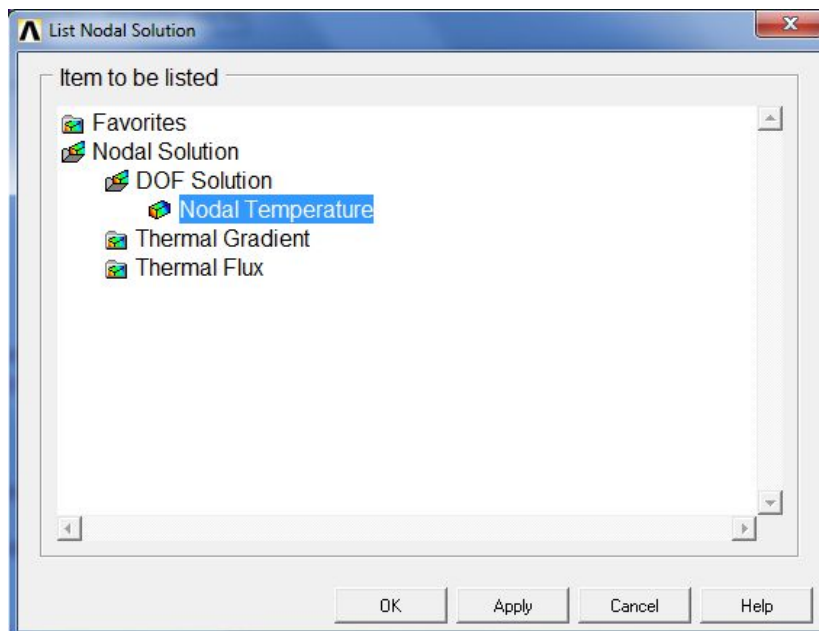
- Cliquer sur « Define loads » ⇒ « Apply » ⇒ « Thermal » ⇒ « Heat Generat » ⇒ « On Elements ». Cliquer sur « Pick all » pour sélectionner tous les éléments du maillage puis on introduit la valeur de la source de chaleur volumique comme suit :



- L'exécution de l'analyse s'effectue en cliquant sur « Solve » ⇒ « Current LS ».



- Développer l'onglet « General Postproc » puis « List Result » et cliquer sur « Nodal Solution » pour afficher les températures des nœuds :



- Les résultats obtenus sont représentés à la figure IV-2.

Annexe 10 : Programme pour le calcul de la solution analytique en régime transitoire

```

clear all
clc
Lamda=209; % Conductivité thermique (W/m.K)
Cp=885; % Capacité thermique massique (J/Kg.K)
RHO=2700; % Masse volumique du matériau (Kg/m^3)
A=1; % Section de transfert (m^2)

Tp=150; % Température imposée aux extrémités de la barre (°C)
Ti=20; % Température initiale de la barre (°C)
L=0.1; % Longueur de la barre (m)
a=Lamda/(RHO*Cp);
Ra=a^0.5;
Pi=3.1415926535897932384626433832795;

x=(7*L)/8 % Position du point à considérer
i=0;
for t=0:0.1:150
    T=0;
    i=i+1;
    for n=1:2:1000
        w=-((n*Pi*Ra)/L)^2;
        T0=((4*(Ti-Tp))/(n*Pi))*sin((n*Pi*x)/L)*exp(t*w);
        T=T0+T;
    end
    TF=Tp+T;
    Result(i,2)=TF;
    Result(i,1)=t;
end
Result

```

Annexe 11 : Programme pour le calcul de la solution élément-fini en régime transitoire

```

clear all
clc
L=0.1; % Epaisseur du mur en (m)
q=0; % Source de chaleur volumique (w/m^3)
lamda=209; % Conductivité thermique du matériau du mur (w/m°C)
RHO=2700; % Masse volumique (Kg/m^3)
Cp=885; % Chaleur spécifique (J/Kg.K)
A=1; % Section de transfert de chaleur (section du mur) (m^2)
nn=9; % Nbre de noeuds dans le maillage
NT=[7;2;3;4;5;6;7;8]; % nbre et numéros des noeuds où les températures sont
Tc=[100;100] % Respecter l'ordre d'assemblage T1 et T5
Ti=[nn-NT(1);1;9] % Nbre de températures imposées
% N° des noeuds où les Température sont imposées (connue)

istep=1500;
dt=0.1;
Result=zeros(istep,7);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%


```

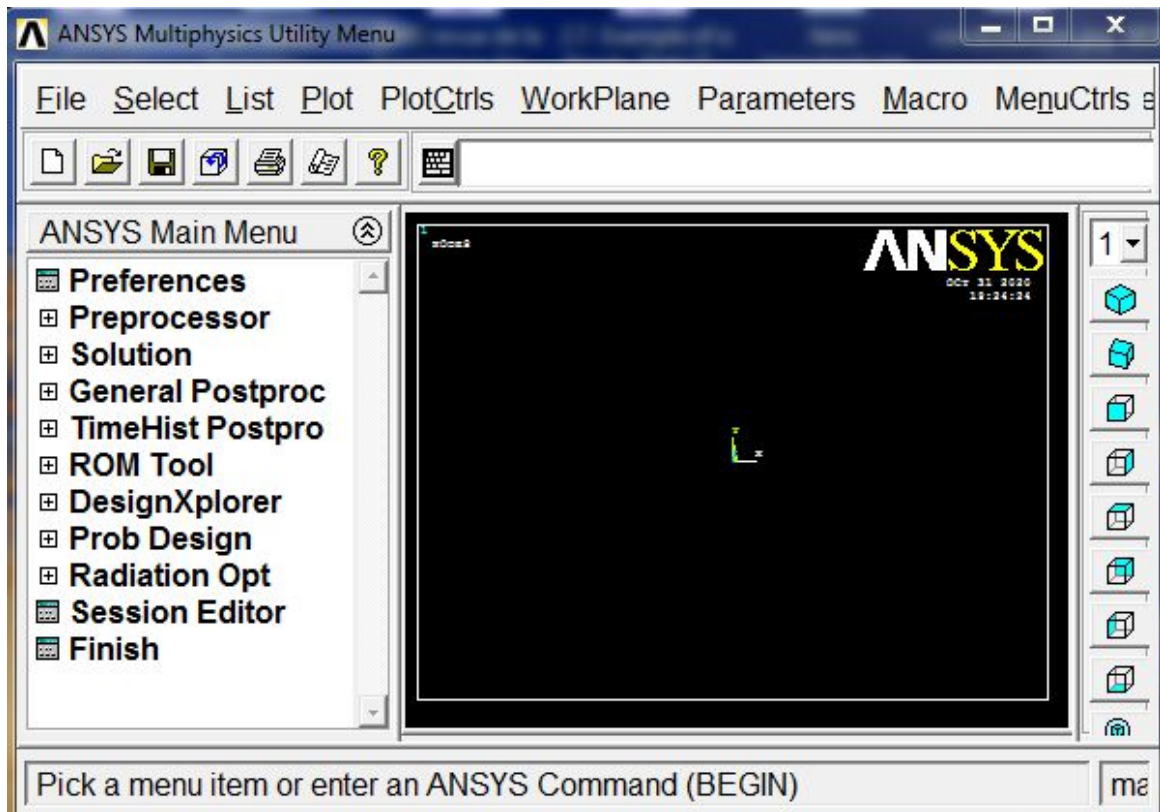
```

ne=nn-1;    % Nbre d'éléments dans le maillage
L1=L/ne;    % Longueur d'un élément fini
Ce=((RHO*A*Cp*L1)/6)*[2 1;1 2]
Ke=((lamda*A)/L1)*[1 -1;-1 1]
Fe=((A*q*L1)/2)*[1;1]
% Calcul des matrices globales
K=zeros(nn,nn); C=zeros(nn,nn);
F=zeros(nn,1); T=zeros(nn,1);
for i=0:ne-1
    for l=1:2;    % l:ligne
        F(l+i)=Fe(l)+F(l+i);
        for c=1:2;    % c: colonne
            K(l+i,c+i)=Ke(l,c)+K(l+i,c+i); C(l+i,c+i)=Ce(l,c)+C(l+i,c+i);
        end
    end
end
cc=1;
CL=zeros(NT(1),nn); KL=zeros(NT(1),nn);
FL=zeros(NT(1),1);
for nnt=1:NT(1)
    cc=cc+1;
    CL(nnt,:)=C(NT(cc),:);    % Suppression des lignes correspondant aux T imposées
    KL(nnt,:)=K(NT(cc),:);
    FL(nnt)=F(NT(cc));
end
% Résolution du système
KLL=KL; CLL=CL;
cc=0;
for i=1:Ti(1)
    KLL(:,Ti(i+1)-cc)=[]; CLL(:,Ti(i+1)-cc)=[];
    cc=cc+1;
end
KLP=KL;
CLP=CL;
cc=0;
for i=1:NT(1)
    CLP(:,NT(i+1)-cc)=[];
    KLP(:,NT(i+1)-cc)=[];
    cc=cc+1;
end
t=0;
C1=inv(CLL+dt*KLL);
Tn=[150;20;20;20;20;20;20;20;150];
Tp=[150;150];
for i=1:istep
    Result(i,1)=t;
    Result(i,2)=Tn(2); Result(i,3)=Tn(3); Result(i,4)=Tn(4); Result(i,5)=Tn(5);
    Result(i,6)=Tn(6); Result(i,7)=Tn(7); Result(i,8)=Tn(8);
    t=t+dt;
    Tn1=C1*(CL*Tn-(CLP+dt*KLP)*Tp);
    Tn(1)=150; Tn(2)=Tn1(1); Tn(3)=Tn1(2); Tn(4)=Tn1(3); Tn(5)=Tn1(4);
    Tn(6)=Tn1(5); Tn(7)=Tn1(6); Tn(8)=Tn1(7); Tn(9)=150;
end
Result

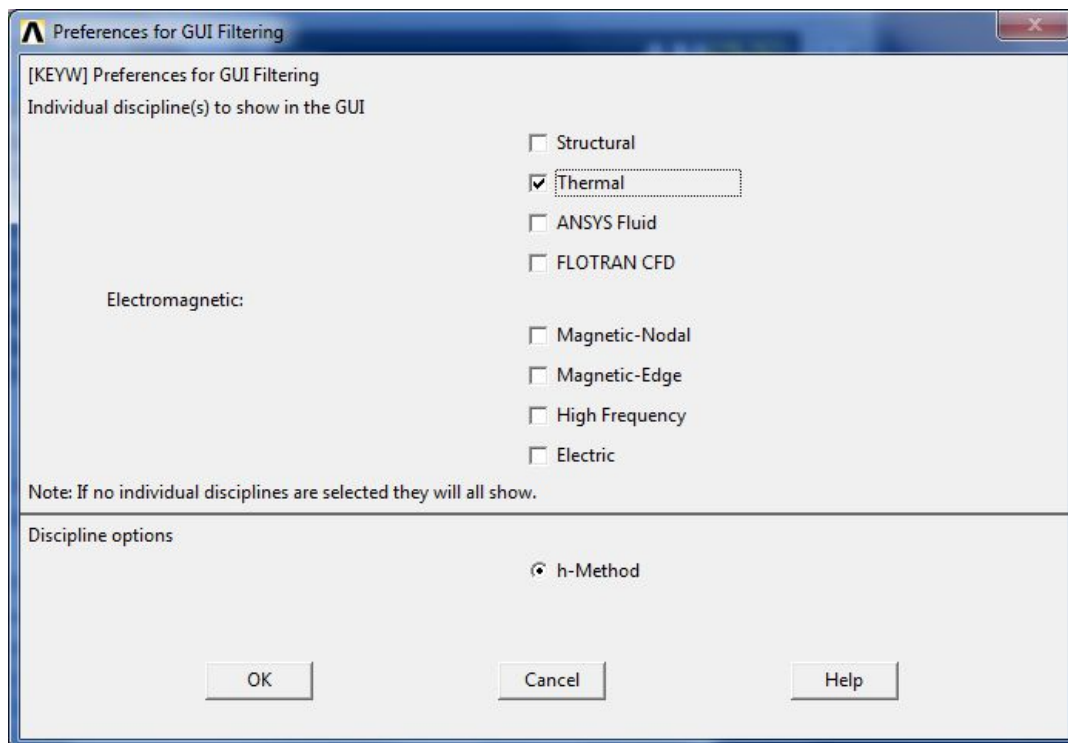
```


Annexe 12 : Méthodologie de simulation sous le code ANSYS en régime transitoire

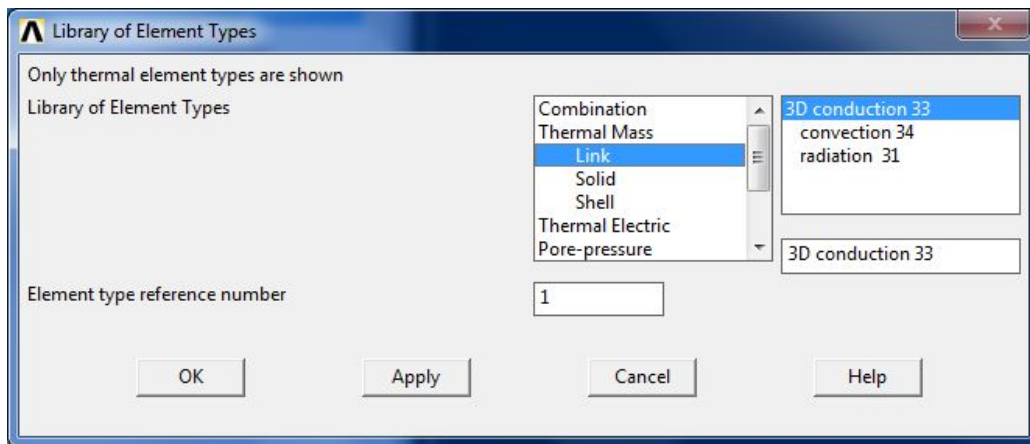
- Lancer le logiciel Mechanical APDL, en effectuant un double clic sur l'icône  . La fenêtre d'accueil suivante s'affiche :



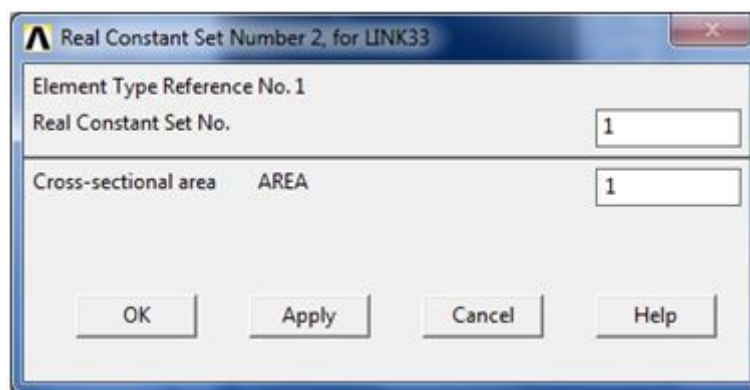
- Cliquer sur « Preferences » situé dans le menu principal, pour sélectionner le domaine d'analyse, dans ce cas on choisit « Thermal » :



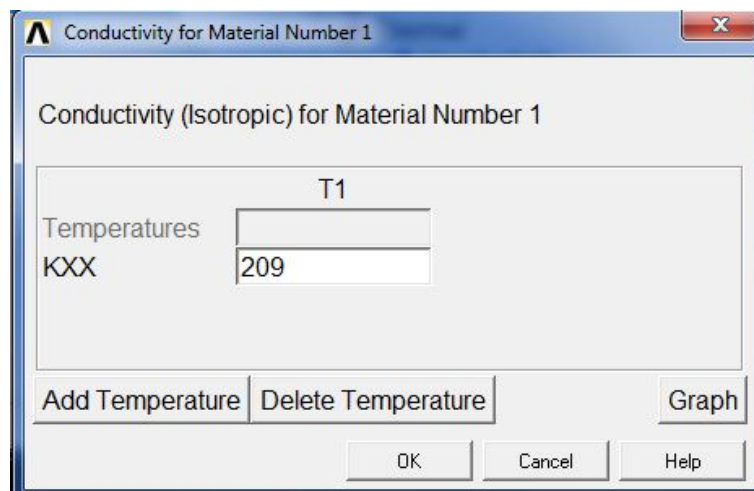
- Développer l'onglet « Preprocessor » situé dans le menu principal, puis :
 - Cliquer sur « Element Type » ⇒ « Add/edit/delete » ⇒ « Add ». Dans la fenêtre qui s'affiche sélectionner le type de l'élément fini « Link » puis « 3D conduction 33 » comme c'est illustré par fenêtre ci-après :



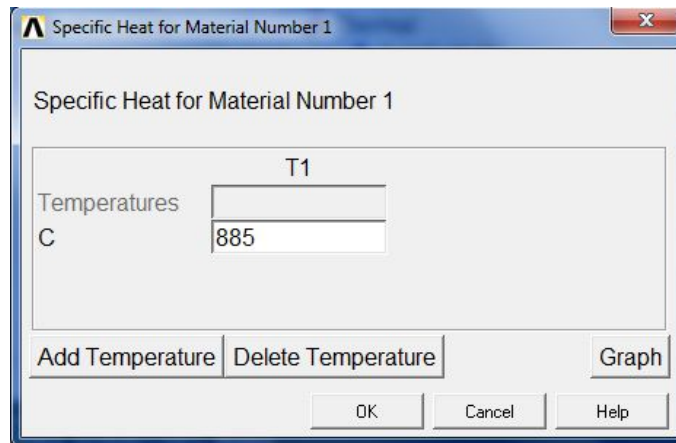
- Cliquer sur « Real Constants » ⇒ « Add » ⇒ « Ok ». Puis spécifier la valeur de la section de transfert « $A = 1m^2$ » dans la fenêtre suivante :



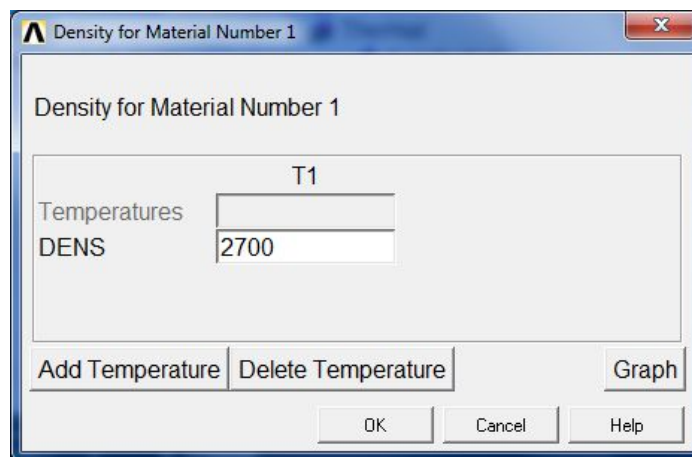
- Cliquer sur « Material props » ⇒ « Material Models ». Développer le dossier « Thermal » situé dans la zone « Material Models Available », puis cliquer sur :
 - ✓ « Conductivity » ⇒ « Isotropic » afin de spécifier la valeur de la conductivité thermique du matériau $\lambda=209$;



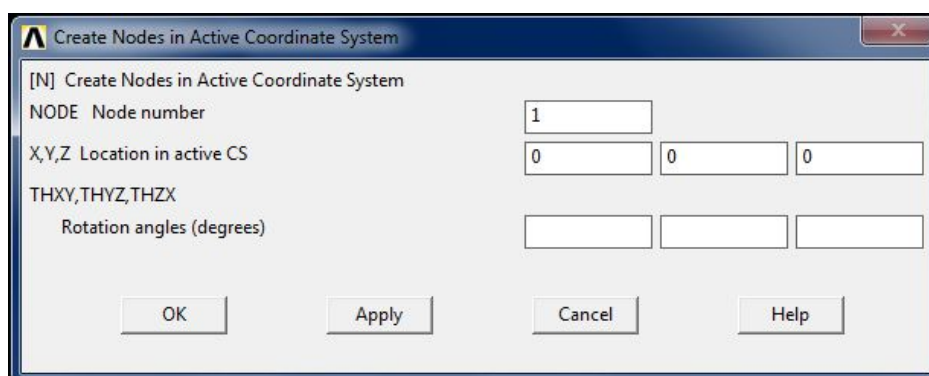
- ✓ « Specific Heat » afin de spécifier la valeur de la conductivité thermique du matériau $C_p= 885$.

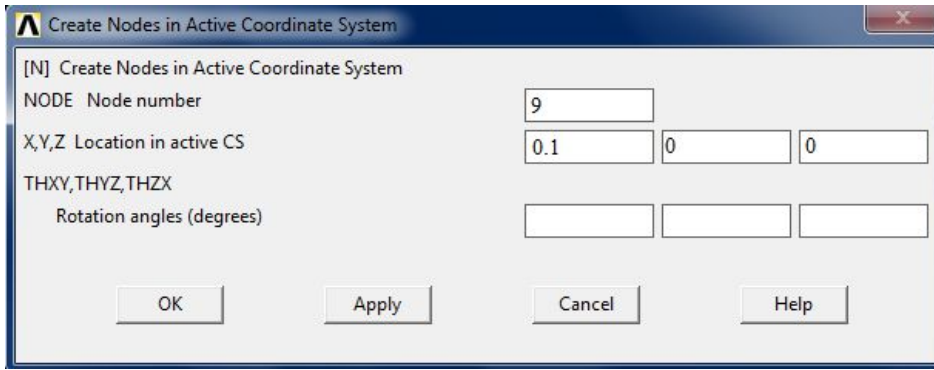


- ✓ « Density » afin de spécifier la valeur de la masse volumique $\rho=2700$

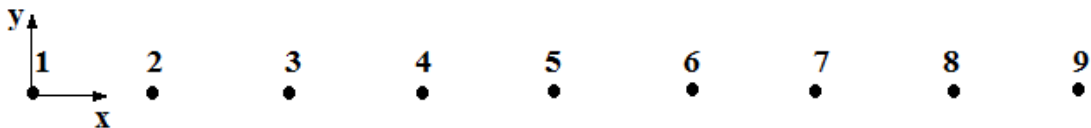


- Cliquer sur « Modeling » ⇒ « Create » ⇒ « Nodes ». Cliquer sur « In active CS » pour insérer les coordonnées des différents nœuds. A titre d'exemple, nous représentons sur les deux figures suivantes la création des nœuds 1 et 9 :

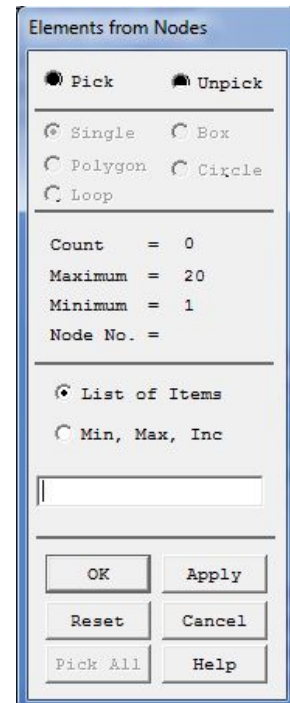




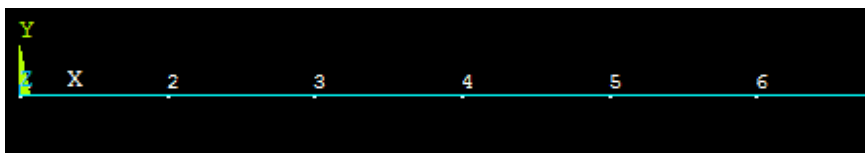
On obtient ainsi, le résultat suivant :



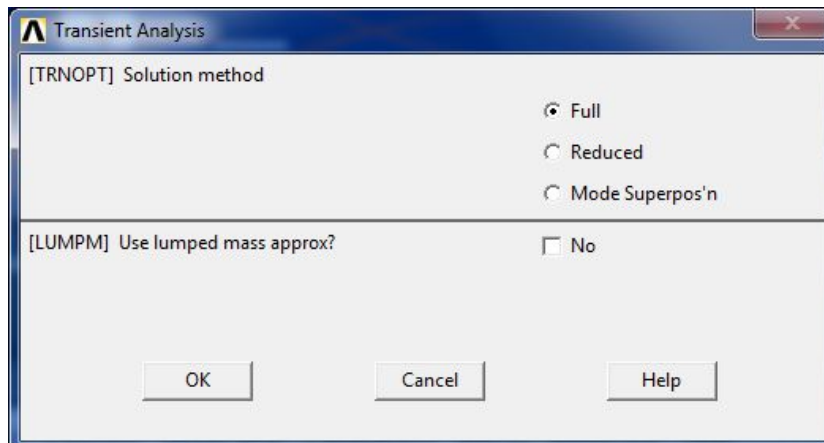
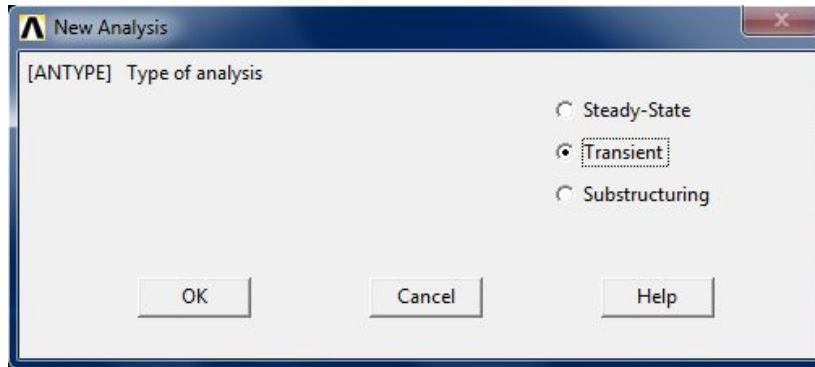
- Cliquer sur « Modeling » ⇒ « Create » ⇒ « Elements ». Cliquer sur « Auto Numbered » ⇒ « Thru nodes » afin de créer les éléments entre chaque paire de nœuds. Ainsi, pour créer l'élément 1 défini entre les nœuds 1 et 2, on sélectionne ces deux nœuds dans la zone graphique de ANSYS puis on clique sur « Apply » pour définir l'élément 2 qui est défini entre les nœuds 2 et 3 et ainsi de suite jusqu'à la création de l'élément 8 où on clique sur « OK ».



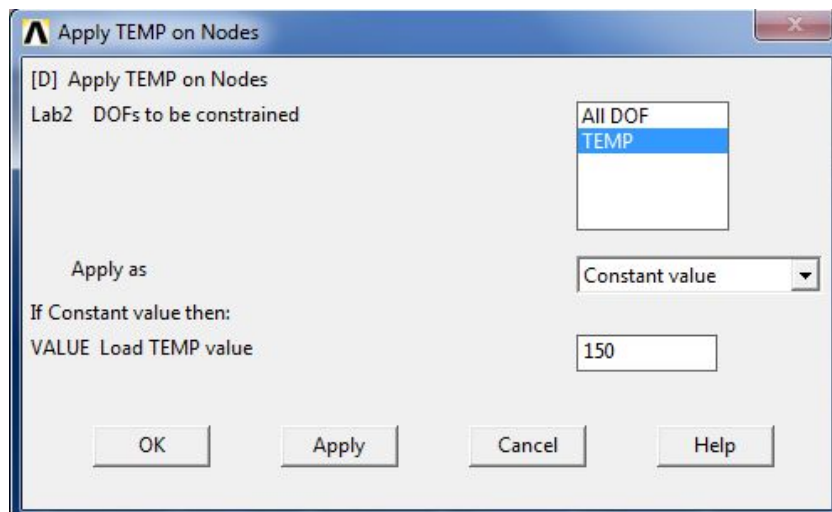
La figure suivante illustre le maillage obtenu :



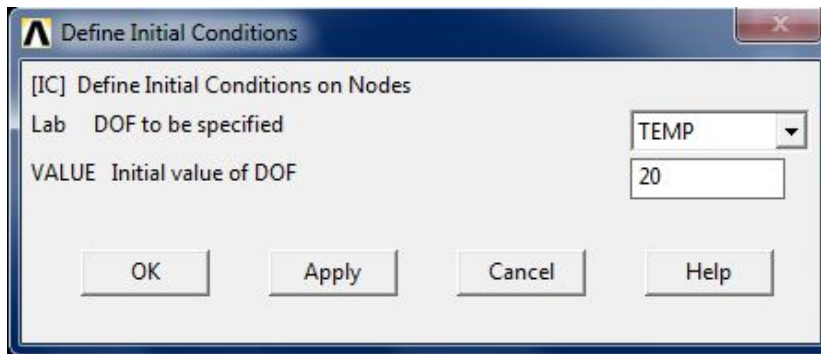
- Développer l'onglet « Solution » situé dans le menu principal, puis :
 - Cliquer sur « Analysis Type » ⇒ « New Analysis ». Pour effectuer une analyse transitoire, il faut sélectionner « Transient » ⇒ OK. Dans la fenêtre qui s'affiche, sélectionner « Full » ⇒ OK.



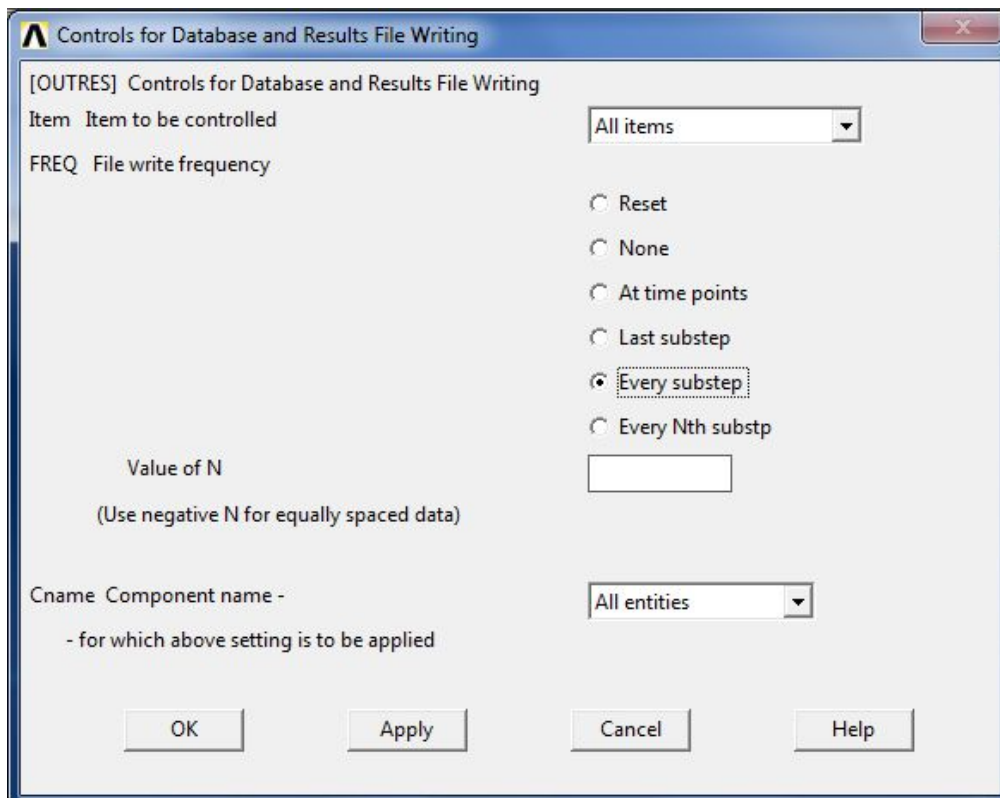
- Cliquer sur « Define loads » ⇒ « Apply » ⇒ « Thermal » ⇒ « Temperature » ⇒ « On Nodes ». Sélectionner ensuite les nœuds où les températures sont imposées. Dans ce cas, on sélectionne les nœuds 1 et 9 puis on clique sur « OK ». Les valeurs des températures imposées sont introduites dans la fenêtre suivante :



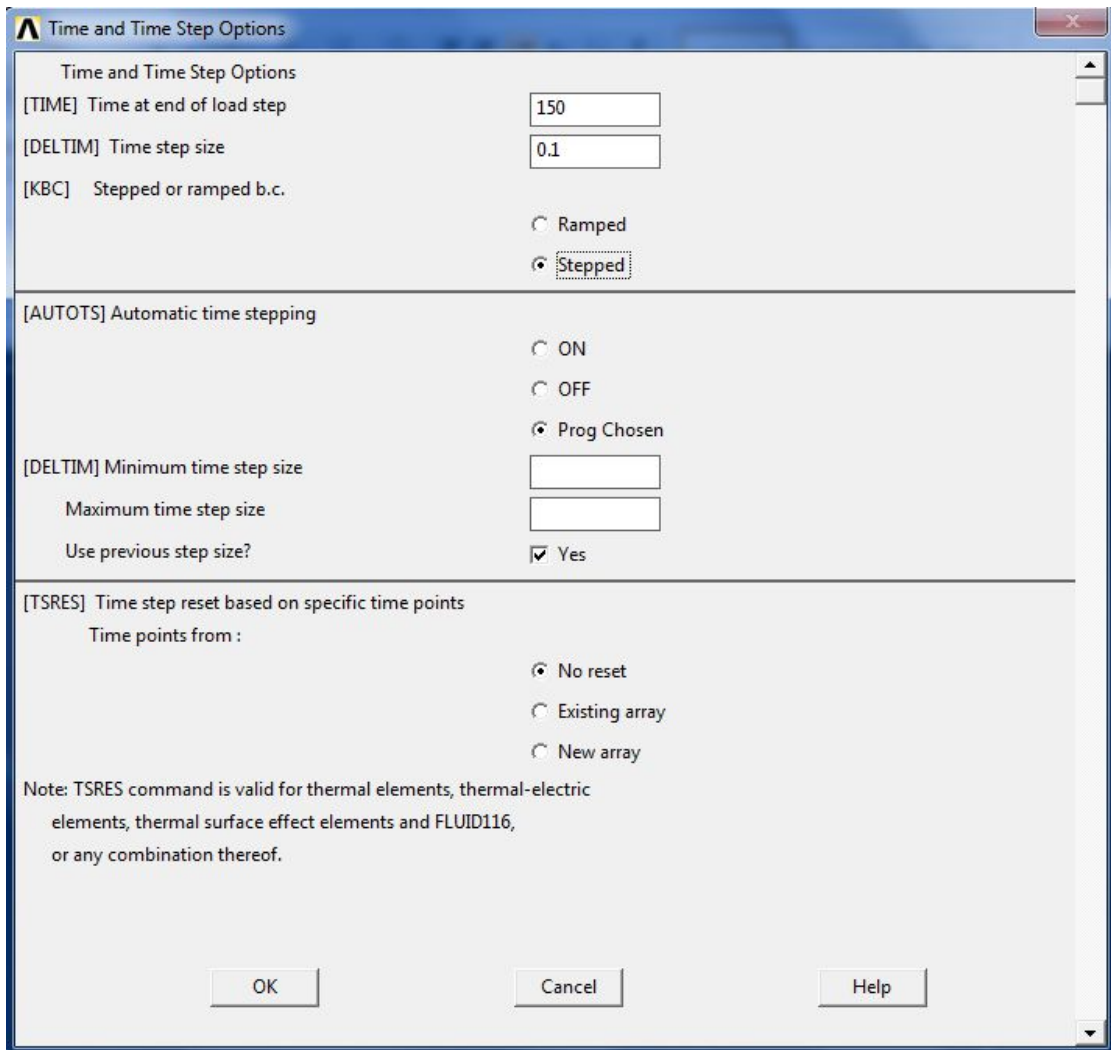
- Cliquer sur « Define loads » ⇒ « Apply » ⇒ « Initial condit'n » ⇒ Define. Sélectionner ensuite les nœuds 1,2,3,4,5,6,7 et 8 ⇒ puis cliquer sur OK. Sur la fenêtre qui s'affiche spécifier la valeur le température initiale 20°C :



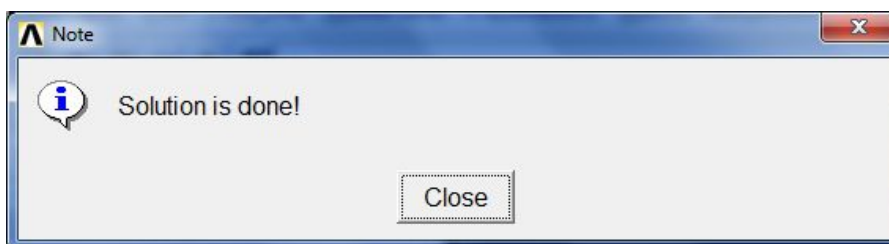
- Cliquer sur « Load Step Opts » ⇒ Output Ctrl ⇒ DB/Result ⇒ et cocher la case « Every substep».



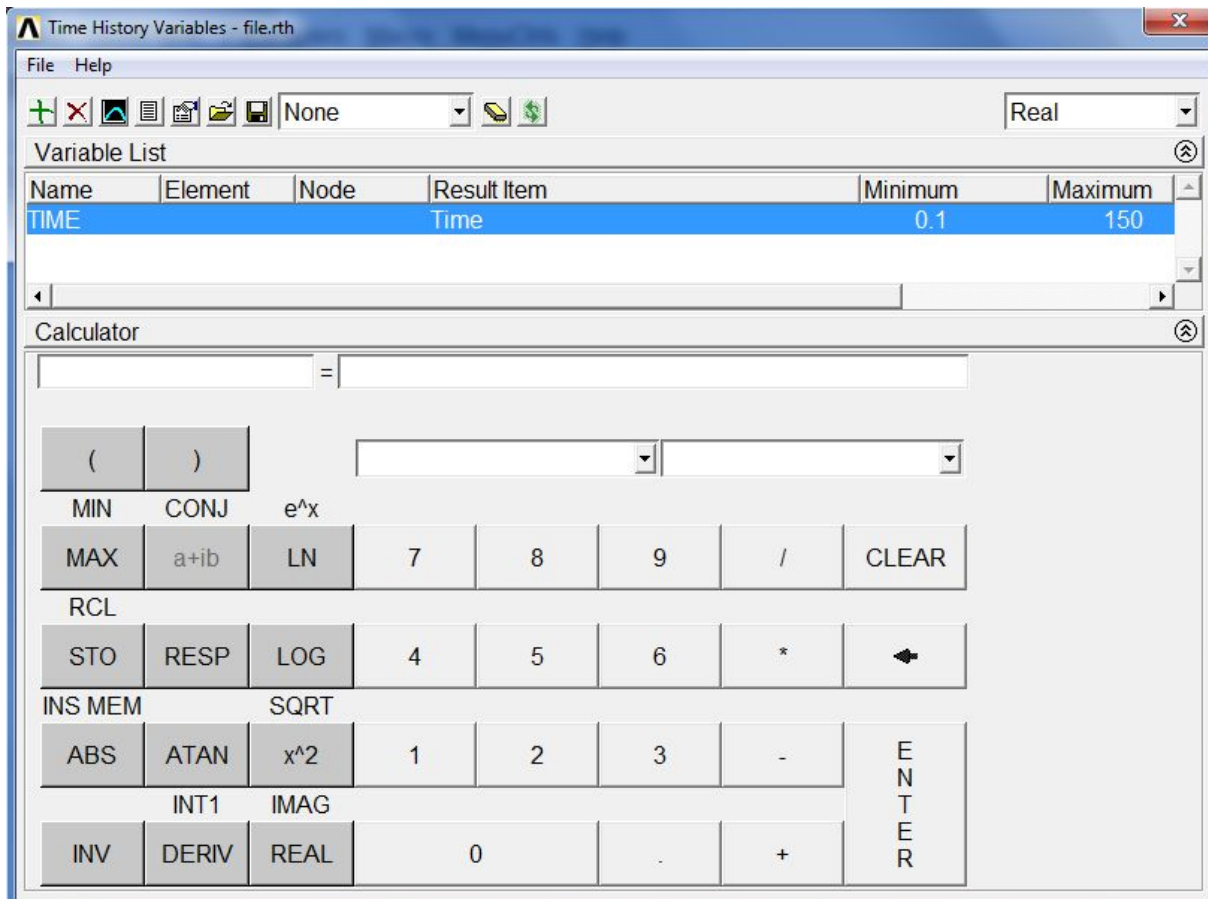
- Cliquer sur « Load Step Opts » ⇒Time/Frequenc ⇒Time-Time Step et spécifier la valeur maximale du temps et l'intervalle à utilisé:




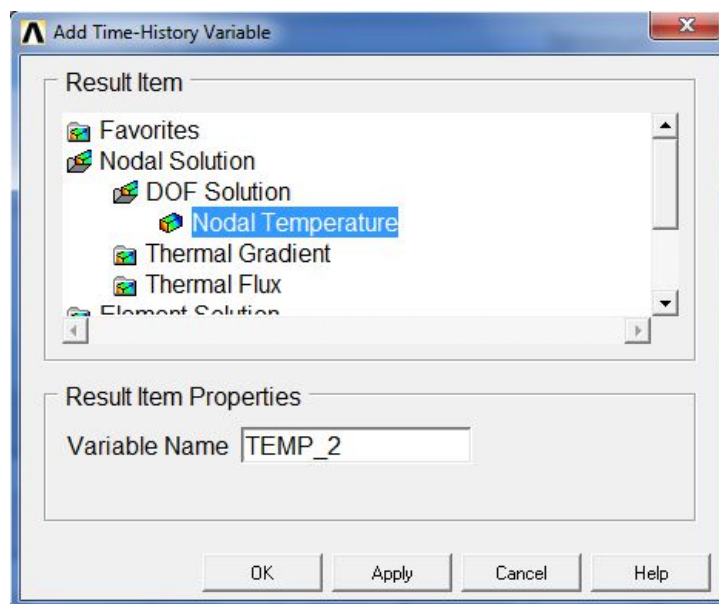
- L'exécution de l'analyse s'effectue en cliquant sur « Solve » ⇒ « Current LS ».




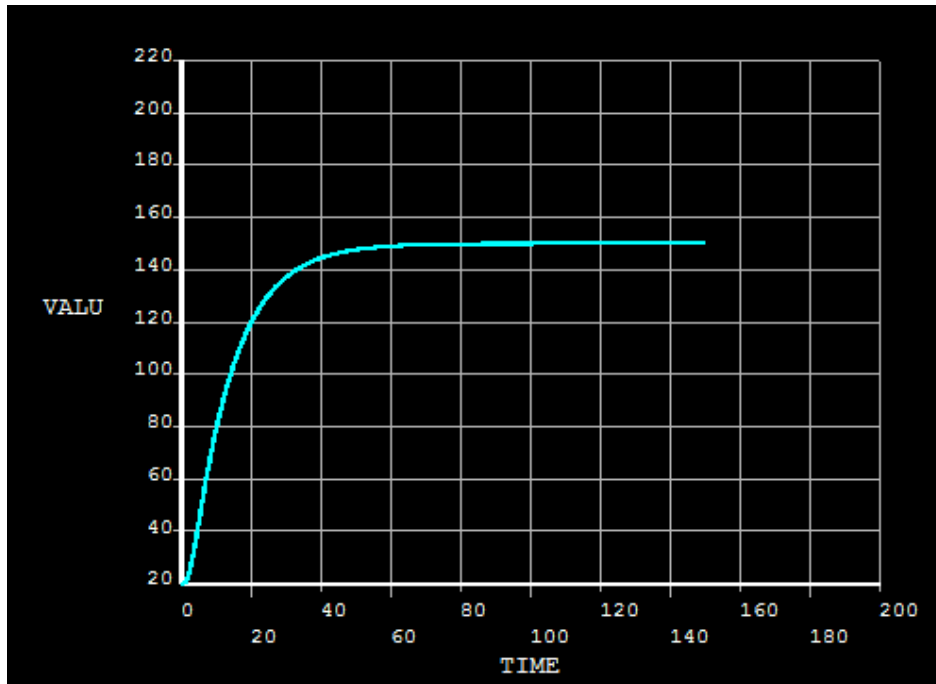
- Pour afficher les températures nodales, cliquer sur l'onglet « TimeHist Postpro » et la fenêtre suivante s'affiche :




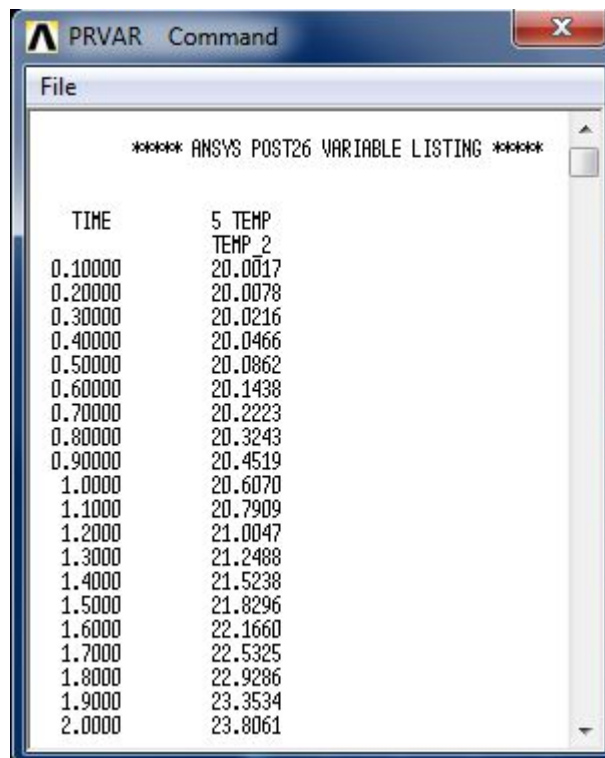
- Cliquer sur l'icône « Add Data  » pour afficher un résultat, puis spécifier le type de résultats à afficher :



- Sélectionner ensuite un nœud dans la zone graphique (exemple le nœud 5) pour afficher l'évolution de sa température en fonction du temps. Puis cliquer sur OK.
- On peut, à présent, représenter graphiquement l'évolution de la température du nœud 5 en cliquant sur la commande « Graph Data  » située dans la fenêtre « Time History variables » :



- On peut également récupérer les données relatives à l'évolution de la température du nœud 5 en cliquant sur la commande « List Data  » située dans la fenêtre « Time History variables » :



- Les résultats obtenus, pour les différents nœuds, sont représentés à la figure IV-13.

**Annexe 13 : Programme relatif au calcul stationnaire en utilisant un élément fini
rectangulaire**

```

clear all
clc
% Introduction des données
L=0.1;      % Longueur du mur (m)
b=L/2;      % Longueur de l'élément-fini (m)
q=1000;     % Source de chaleur volumique (w/m^3)
lamda=0.1; % Conductivité thermique du matériau du mur (w/m°C)
h=1;        % Hauteur de l'élément-fini (m)
e=3;        % Epaisseur du mur (m)
A=h*e;      % Section de transfert de chaleur (section du mur) (m^2)
nn=6;       % Nbre de noeuds dans le maillage
ne=2;       % Nbre d'éléments
NT=[2;2;5]; % nbre et numéros des noeuds où les températures sont inconnues
disp('Vecteur des températures imposée')
Tp=[100;100;100;100]
disp('Matrice élémentaire de conductivité thermique')
aa=(b^2+h^2)/(3*b*h);
Ke=(lamda*e)*[aa b/(6*h)-h/(3*b) -(h^2+b^2)/(6*b*h) h/(6*b)-b/(3*h);
              b/(6*h)-h/(3*b) aa h/(6*b)-b/(3*h) -(b^2+h^2)/(6*b*h);
              -(b^2+h^2)/(6*b*h) h/(6*b)-b/(3*h) aa b/(6*h)-h/(3*b);
              h/(6*b)-b/(3*h) -(b^2+h^2)/(6*b*h) b/(6*h)-h/(3*b) aa]
disp('Vecteur élémentaire des flux de chaleur')
Fe=((e*q*b*h)/4)*[1;1;1;1]
% Calcul des matrices globales
K=zeros(nn,nn);
F=zeros(nn,1);
vect=[1 2 5 4;2 3 6 5];
for i=1:ne
    for k=1:4
        F(vect(i,k))=Fe(k)+F(vect(i,k));
        for m=1:4
            K(vect(i,k),vect(i,m))=Ke(k,m)+K(vect(i,k),vect(i,m));
        end
    end
end
disp('Matrice globale de conductivité thermique')
K
disp('Vecteur global des flux de chaleur')
F
KLL=[K(2,2) K(2,5);K(5,2) K(5,5)]
KLP=[K(2,1) K(2,3) K(2,4) K(2,6);K(5,1) K(5,3) K(5,4) K(5,6)]
FL=[F(2);F(5)]
T=inv(KLL)*(FL-KLP*Tp)

```

Annexe 14 : Programme relatif au calcul transitoire en utilisant un maillage de huit éléments finis rectangulaires

```

clear all
clc
% Introduction des données
L=0.1;      % Longueur du mur (m)
b=L/8;      % Longueur de l'élément-fini (m)
q=0;        % Source de chaleur volumique (w/m^3)
lamda=209;  % Conductivité thermique du matériau du mur (w/m°C)
RHO=2700    % Masse volumique (Kg/m^3)
Cp=885      % Chaleur spécifique (J/kg.K)
h=1;        % Hauteur de l'élément-fini (m)
e=1;        % Epaisseur du mur (m)
A=h*e;      % Section de transfert de chaleur (section du mur) (m^2)
nn=18;      % Nbre de noeuds dans le maillage
ne=8;       % Nbre d'éléments
dt=0.1;     % Pas de temps
istep=1500; % Nombre d'itérations
Result=zeros(istep,14);
disp('Vecteur des températures imposée')
Tp=[150;150;150;150]
disp('Vecteur global des températures initiale')
Tn=[150;20;20;20;20;20;20;20;150;150;20;20;20;20;20;150]
disp('Matrice élémentaire de conductivité thermique')
aa=(b^2+h^2)/(3*b*h);
Ke=(lamda*e)*[aa b/(6*h)-h/(3*b) -(h^2+b^2)/(6*b*h) h/(6*b)-b/(3*h);
              b/(6*h)-h/(3*b) aa h/(6*b)-b/(3*h) -(b^2+h^2)/(6*b*h);
              -(b^2+h^2)/(6*b*h) h/(6*b)-b/(3*h) aa b/(6*h)-h/(3*b);
              h/(6*b)-b/(3*h) -(b^2+h^2)/(6*b*h) b/(6*h)-h/(3*b) aa]
disp('Matrice élémentaire de capacité thermique')
Ce=(RHO*Cp*e)*[b*h/9 b*h/18 b*h/36 b*h/18;
               b*h/18 b*h/9 b*h/18 b*h/36;
               b*h/36 b*h/18 b*h/9 b*h/18;
               b*h/18 b*h/36 b*h/18 b*h/9]
disp('Vecteur élémentaire des flux de chaleur')
Fe=(e*q*b*h)/4*[1;1;1;1]
% Calcul des matrices globales
K=zeros(nn,nn);
C=zeros(nn,nn);
F=zeros(nn,1);
vect=[1 2 11 10;2 3 12 11;3 4 13 12; 4 5 14 13; 5 6 15 14; 6 7 16 15;
      7 8 17 16; 8 9 18 17];
for i=1:ne
    for k=1:4
        F(vect(i,k))=Fe(k)+F(vect(i,k));
        for m=1:4
            K(vect(i,k),vect(i,m))=Ke(k,m)+K(vect(i,k),vect(i,m));
            C(vect(i,k),vect(i,m))=Ce(k,m)+C(vect(i,k),vect(i,m));
        end
    end
end
disp('Matrice globale de conductivité thermique')
K
disp('Matrice globale de capacité thermique')
C

```

```

disp('Vecteur global des flux de chaleur')
E
KLL=K;
KLL(1,:)=[]; % Suppression des lignes
KLL(9-1,:)=[];KLL(10-2,:)=[];KLL(18-3,:)=[];

KLP=KLL;KLP(:,2:8)=[];KLP(:,4:10)=[];

KLL(:,1)=[]; % Suppression des colonnes
KLL(:,9-1)=[];KLL(:,10-2)=[];KLL(:,18-3)=[];

CL=C;
CL(1,:)=[]; % Suppression des lignes
CL(9-1,:)=[];CL(10-2,:)=[];CL(18-3,:)=[];

CLL=CL;
CLL(:,1)=[]; % Suppression des colonnes
CLL(:,9-1)=[];CLL(:,10-2)=[];CLL(:,18-3)=[];

CLP=CL;CLP(:,2:8)=[];CLP(:,4:10)=[];

FL=[F(2);F(3);F(4);F(5);F(6);F(7);F(8);
     F(11);F(12);F(13);F(14);F(15);F(16);F(17)];

Kbar=CLL+dt*KLL;
K1=inv(Kbar);
t=0;
for i=1:istep
    Result(i,1)=t;
    Result(i,2)=Tn(2); Result(i,3)=Tn(3);Result(i,4)=Tn(4);
    Result(i,5)=Tn(5);Result(i,6)=Tn(6);Result(i,7)=Tn(7);
    Result(i,8)=Tn(8);Result(i,9)=Tn(9);Result(i,10)=Tn(10);
    Result(i,11)=Tn(11);Result(i,12)=Tn(12);Result(i,13)=Tn(13);
    Result(i,14)=Tn(14);

    Fbar=(dt*FL)+CL*Tn-(CLP+dt*KLP)*Tp;
    T=K1*Fbar;
    Tn(2)=[T(1)];Tn(3)=[T(2)];Tn(4)=[T(3)];Tn(5)=[T(4)];Tn(6)=[T(5)];
    Tn(7)=[T(6)];Tn(8)=[T(7)];Tn(11)=[T(8)];Tn(12)=[T(9)];Tn(13)=[T(10)];
    Tn(14)=[T(11)];Tn(15)=[T(12)];Tn(16)=[T(13)];Tn(17)=[T(14)];

    t=t+dt;
end
Result

```

Résumé

L'objectif de ce travail consiste essentiellement à l'application de la méthode des éléments finis pour la résolution des problèmes de transfert de chaleur unidimensionnel et bidimensionnel en considérant les deux régimes stationnaire et transitoire. Il s'agit ensuite d'exploiter cette méthode, par des exemples numériques de complexités progressives, afin de mieux cerner le calcul matriciel, la procédure d'assemblage et les techniques de résolution. Les résultats obtenus sont confrontés avec succès à ceux issus de la méthode analytique et du logiciel ANSYS qui est un code essentiellement numérique. On se basera en outre sur l'hypothèse classique d'un matériau solide, homogène, continu et isotrope.

Mots Clés: méthode des éléments finis, transfert de chaleur, régime stationnaire, régime transitoire, conduction, convection, rayonnement, ANSYS.

Abstract

The aim of this work is essentially to apply the finite element method to solve the problems of one-dimensional and two-dimensional heat transfer by considering the two stationary and transient regimes. It is then a question of exploiting this method, by numerical examples of progressive complexities, in order to better understand the matrix calculation, the assembly procedure and the resolution techniques. The results obtained are successfully compared with those of the analytical method and the ANSYS software, which is essentially a numerical code. In addition, the classical hypothesis of a solid, homogeneous, continuous and isotropic material will be used.

Keywords: finite element method, heat transfer, stationary regime, transient regime, conduction, convection, radiation, ANSYS.

ملخص

الهدف من هذا العمل هو أساسا تطبيق طريقة العنصر المحدود لحل مشاكل نقل الحرارة أحادي البعد ثنائي الأبعاد بالنظر إلى النظامين الثابت والعاير. ثم إنها مسألة استغلال هذه الطريقة، من خلال أمثلة عديدة للتعقيدات التقدمية، من أجل فهم أفضل لحساب المصفوفة، وإجراءات التجميع وتقنيات الحل. و تتم مقارنة النتائج التي تم الحصول عليها بنجاح بنتائج الطريقة التحليلية وبرمجيات النظام ANSYS. وهي في الأساس عبارة عن رمز رقمي. بالإضافة إلى ذلك، سيتم استخدام الفرضية الكلاسيكية للمادة الصلبة، المتجانسة والمتواصلة والمتماثلة.

الكلمات الرئيسية: طريقة العنصر المحدود، انتقال الحرارة، النظام الثابت، النظام المؤقت، التوصيل الحراري، الحمل الحراري، الإشعاع، ANSYS.