REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DE BOUIRA

FACULTE DES SCIENCES ET DES SCIENCES APPLIQUEES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

MEMOIRE PRESENTÉ POUR L'OBTENTION DU DIPLÔME
DE MASTER EN PHYSIQUE
OPTION

Physique Théorique

Etude des systémes quantiques aux dérivées fractionnaires

Présenté par **: Lamri Soumia**

Soutenu le … /… /…

Devant le jury :

Président	**: Mr. Bouhdjer Lazhar**	**M.C.A Univ. Bouira**
Rapporteur	**: Mr. Benaiche Salim**	**M.A.A Univ. Bouira**
Examinateurs	**: Mr. Sadoun Mohamed Améziane**	**M.C.B Univ. Bouira**
	: Mme. Bachi Halima	**M.A.A Univ. Bouira**

ANNEE UNIVERSITAIRE 2019/2020

Remerciements

La réalisation de ce mémoire a été possible grâce au concours de plusieurs personnes à qui je voudrais témoigner toute ma reconnaissance.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Mr Benaiche Salim pour avoir encadré, orienté, aidé et conseillé.

Je remercier Mr Bouhdjer Lazhar d’avoir accepté de jugé ce travail.

Je tiens à remercier Mr Sadoun Mohamed Améziane de m’avoir fait l’honneur d’examiner e travail.

Je remercie Mme Bachi Halima d’avoir accepté d’être un membre de jury.

Je ne pourrais terminer sons remercier ma famille, en particulier ma mère et mon père qui m’ont soutenue et encourage pour terminer ce travail.

Dédicace

Au premier, je tiens à remercier Allah qui m'avoir donné la force d'accomplir ce travail.

Je dédie ce travail à mes chers parents ma mère et mon père pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur soutien et leurs prières tout au long de mes études, que dieu vous protégé.

Je dédie à mon frère et mes sœurs.

A mes amis et mes collègues.

Sans Oublier tous les professeurs que ce soit du premier, du moyen, du secondaire ou de l’enseignement supérieur.

Table des matières

Introduction générale :

La théorie de dérivation fractionnaire est un sujet presque aussi ancien que le calcul classique[1],La question des dérivées fractionnaire est évoquée dés 1695 par Leibnitz dans une lettre à l'Hospital, mais lorsque celui-ci lui demande à quel signifie la dérivée d'ordre un demi de la fonction f,Leibnitz repond que cela méne à un paradoxe dont on tirera un jour d'utiles conséquences [2],Cette lettre de l'Hôpital admise comme le premier incident de la théorie de la dérivation fractionnaire. Plus tard, Les fonctions d'Euler rendent la définition des opérateurs fractionnaires possible. Cependant, un développement systématique du sujet ne vient pas jusqu'à dix-neuvième siècle avec Riemann, Liouville, Grünwald et Letnikov [3].

Les dérivée fractionnaires sont appliquées dans certains domaines de physique par exemple les phénomènes de diffusion anormale peuvent être étudiés en termes de versions fractionnaires de l'équation de diffusion [4].

L'équation de Schrödinger fractionnaire est une généralisation de la mécanique quantique non relativiste, qui apparaît naturellement lorsque les chemins quantiques de type brownien se substituent à ceux de type Lévy dans l'intégrale de chemin de Feynman [9]. L'une des motivations du calcul fractionnel dans les systèmes physiques est due au fait, qu'au niveau mésoscopique des systèmes physique, les quantités infinitésimaux ne peuvent pas être placés arbitrairement à zéro-plutôt ils sont non nuls avec une longueur minimale. Que Signifie si nous désignons x le point dans l'espace et comme t point dans le temps, alors les différentiels dx (et dt) ne peuvent pas être considérés comme limitant zéro, ils se sont étendus. Une pour prendre cela en compte, utilisez des quantités infinitésimales telles que $\Delta x^{\alpha} << \Delta x$ (et $\Delta t^{\alpha} << \Delta t$). De cette façon, définissant les différentiels ou plutôt les différentiels fractionnaires nous obligent à utiliser des dérivés fractionnaires dans l'étude de systèmes dynamiques. L'équation de Schrödinger fractionnaire au points de vu de Naber [5] qui pense qu'il existe deux type de l'équation de Schrödinger : l'équation de Schrödinger de l'espace fractionnaire et l'équation de Schrödinger du temps fractionnaire et en peut avoir équation de Schrödinger fractionnaire de temps et espace.

Plusieurs travaux sont consacrés pour l'étude des équations de Schrödinger fractionnaire, où des différentes méthodes sont utilisées, basé sur les transformations intégrales comme la transformation de Fourier pour l'équation de Schrödinger fractionnaire où la fraction dans l'espace[6], la transformation de Laplace pour l'équation de Schrödinger de temps fractionnaire[7].

Dans notre travail résoudre l'équation de Schrödinger de temps fractionnaire.

Ce mémoire contien essentiellement deux chapitres :

Le premier chapitre présente au début certaines fonctions spéciale de base comme les fonctions d'Euler (Gamma et Béta), qu'elles sont essentiel pour les différentes approches de la définition de la dérivée et l'intégrale fractionnaire (approche de Grünwald-Letnikov, approche de Riemann-Liouville). En suite, nous allons présente certaine transformation intégrale (Laplace et Fourier) de la dérivée fractionnaire. Finalement nous allons définir la fonction H de Fox fractionnaire nécessaire pour le développement des chapitres suivants.

Dans le deuxième chapitre, on représente L'équation de Schrödinger fractionnaire. On commence par écrire la version fractionnaire de l'équation de Schrödinger et trouvé la fonction d'onde qui dépend de temps. En suite on traitée le problème une particule dans un puits de potentiel ou on trouve la forme des les fonctions d'ondes, avec les niveaux d'énergies. A la fin, nous terminons se travail par la résolution de l'équation de Schrödinger fractionnaire, où la fraction dans l'espace et le temps pour une particule libre.

Chapitre 1

Outils de base

1.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons représenter les fonctions d'Euler (gamma et beta)[8], qui jouent un rôle essentiel dans le calcul fractionnaire.

Le calcul fractionnaire est une généralisation de la dérivée ordinaire un ordre non entier, pour cela nous allons aborder la dérivation fractionnaire en présentent deux approches célèbres (Grünwald-Letnikov et Riemann-Liouville). Dans la majorité des solutions des équations différentielles fractionnaires utilisent les transformations de Laplace et Fourier pour la dérivée fractionnaire.

Finalement nous terminons ce chapitre par la représentation de la fonction H de Fox qui jouent un grand rôle pour les solutions des équations différentielles fractionnaires.

1.1.1 Les fonction d'Euler

La fonction Gamma

La fonction Gamma $\Gamma(z)$ est une fonction qui prolonge la factorielle aux valeurs réelles et complexes.

Pour $\mathrm{Re}(\alpha\ ) > 0$ on définie $\Gamma(\alpha)$ par :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \tag{1.1}$$

avec

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha+1) &= \alpha\Gamma(\alpha), && (1.2)\\
\Gamma(\alpha+1) &= n! \ ; \ n \in \mathbb{N} && (1.3)\\
\Gamma(\alpha+\frac{1}{2}) &= \frac{(2\alpha)!}{2^{2\alpha}\alpha!}\sqrt{\alpha} && (1.4)\\
\Gamma\ (1-\alpha)\,\Gamma\,(\alpha) &= \frac{\pi}{\sin\pi\alpha} && (1.5)
\end{aligned}$$

La fonction gamma possède un pôle d'ordre 1 en $\alpha = -n$ pour tout entier naturel n. Le résidu de la fonction en ce pôle est donné par :

$$\mathrm{Re}\, s\,(\Gamma, -n) = \frac{(-1)^n}{n!} \tag{1.6}$$

La fonction Béta

La fonction béta est définie par :

$$\begin{aligned}
\beta(p,q) &= \int_0^1 \tau^{p-1}(1-\tau)^{q-1} d\tau \ , Re(p) > 0 \text{ et } \ Re(q) > 0. && (1.7)\\
\beta(p,q) &= 2\int_0^{\pi/2} \sin^{2p-1}\theta \cos^{2q-1}\theta d\theta && (1.8)\\
\beta(p,q) &= \int_0^{\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{q-1}} dt, && (1.9)
\end{aligned}$$

c'est une fonction symétrique $\beta(p,q)=\beta(q,p)$, et elle satisfait :

$$\begin{aligned}
\beta(p,q+1) &= \frac{q}{p+q}\beta(p,q) && (1.10)\\
\beta\left(p,q\right)\beta(p+q,1-q) &= \frac{\pi}{p\sin\left(\pi q\right)} && (1.11)\\
\beta(q,q) &= 2^{1-2q}\beta\left(\frac{1}{2},q\right) && (1.12)
\end{aligned}$$

1.2 La dérivée fractionnaire

1.2.1 définition

Le calcul fractionnel est la branche du calcul qui généralise la dérivée (classique) d'une fonction à un ordre non entier (arbitraire), permettant des calculs comme le calcul de la dérivée d'ordre 1/2 d'une fonction. Le nom "fractionnelle" est utilisé pour désigner ce type de dérivée. D'autre définitions de la dérivée fractionnelle sont données par Riemann-Liouville, Caputo, Grünwald-Letnikov.[10]

La dérivée d'une fonction f est défini par :

$$D^1 f(x)=\frac{d\ f(x)}{dx}, \tag{1.13}$$

L'itération de cette opération donne une expression pour la dérivé n^{ieme} s'écrit comme suite :

$$D^n f(x)=\frac{d^n\ f(x)}{dx^n}, \tag{1.14}$$

alors pour $f(x)=x^k$,où $k\in N^*$,on a

$$D^1x^k = kx^{k-1} \tag{1.15}$$

$$D^2x^k = k(k+1)\ x^{k-2} = \frac{k!}{(k-2)!}\ x^{k-2} \tag{1.16}$$

donc

$$D^n x^k = \frac{k!}{(k-n)!} x^{k-n}\ ,\ \ k \geq n \tag{1.17}$$

Pour un ordre de dérivation réel, en va utiliser l'extension de l'opération factorielle aux nombres réels, qui est la fonction gamma :

$$D^n x^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-n+1)} x^{k-n}\ , \tag{1.18}$$

prenant l'exemple de $f(x) = x$, et $n = 1/2$, on aura :

$$D^{\frac{1}{2}} x = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1-\frac{1}{2}+1)} x^{k-n}\ \ = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}. \tag{1.19}$$

pour $f(x) = e^{ax}$,la dérivé n^{-ieme} de cette fonction s'écrit comme suite :

$$D^n e^{ax} = \frac{d^n}{dx^n} e^{ax} = a^n e^{ax} \tag{1.20}$$

Quand on remplace n entier par ν réel, la puissance de a n'est plus entière, mais on s'en sort avec sa généralisation : $a^\nu = e^{\nu\ ln(a)}$

$$\frac{d^v}{dx^v}e^{ax} = a^\nu e^{ax}$$

Ainsi, la dérivée d'ordre un-demi de la fonction exponentielle est toujours la fonction exponentielle. grâce à cette formule, on peut calculer facilement déduire la dérivée d'ordre ν des fonctions trigonométriques, en utilisant les formules d'Euler et le fait que $(\pm i)^\nu = e^{\pm i\pi\nu/2}$:

$$\frac{d^v}{dx^v}cos(x) = \frac{d^v}{dx^v}(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}) = \frac{(i)^n e^{ix}+(-i)^n e^{-ix}}{2} = \cos(x+\frac{\pi v}{2});$$

$$\frac{d^v}{dx^v}\sin(x) = \frac{d^v}{dx^v}(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}) = \frac{(i)^n e^{ix}-(-i)^n e^{-ix}}{2i} = \sin(x+\frac{\pi v}{2});$$

Il existe plusieurs d'approches pour la dérivation fractionnaire, nous allons citer les approches qui sont fréquemment utilisées dans les différentes applications.

1.2.2 Approche de Grünwald-Letnikov

L'idée de cette approche est unifier deux notions celle de la dérivée d'ordre entier n (si n est positif) et intégrale répétée n-fois (si n est négatif) d'une fonction f par une formule générale.

La dérivée première de la fonction $f(x)$ est définie par :

$$D^{(1)}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x-h)}{h}, \tag{1.21}$$

L'application de cette définition deux fois nous donne la dérivée seconde :

$$\begin{aligned} D^{(2)}f(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f'(x)-f'(x-h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{f(x)-f(x-h)}{h}-\frac{f(x-h)-f(x-2h)}{h}\right\} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x)-2f(x-h)+f(x-2h)}{h^2} \end{aligned}$$

Pour la dérivée d'ordre supérieur, on a :

$$\begin{aligned} D^{(3)}f(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f''(x)-f''(x-h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{f(x)-2f(x-h)+f(x-2h)}{h^2}-\frac{f(x-h)-2f(x-2h)+f(x-3h)}{h^2}\right\} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x)-3f(x-h)+3f(x-2h)-f(x-3h)}{h^3} \end{aligned}$$

et, par récurrence

$$D^{(n)}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k c_n^k f(x-kh) \tag{1.22}$$

qui représente la dérivée de la fonction f d'ordre entier n, où

$$c_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}, n\in\mathbb{N}$$

En utilisant la fonction Γ,telle que $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$ pour $n \geq 0$. On peut avoir

$$(-1)^k\ c_n^k = \frac{-n(1-n)(2-n)\dots(k-n-1)}{k!} = \frac{\Gamma(k-n)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-n)},$$

en remplaçant n par un réel α non entier, on obtient

$$\frac{-\alpha(1-\alpha)(2-\alpha)\dots(k-\alpha-1)}{k!} = \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-\alpha)}$$

La généralisation de à un ordre α non entier est :

$$
\begin{aligned}
D^{(\alpha)} f(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(-\alpha)} f(x-kh) \\
D^{(-\alpha)} f(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{-\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(\alpha)} f(x-kh) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau \qquad (1.23)
\end{aligned}
$$

qui représente la relation de de Grünwald-Letnikov.

Remarque :

Si f est de classe C^n alors en utilisant l'intégration par parties on obtient :

$$D^{(\alpha)} f(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{f^{(i)}(a)\,(x-a)^{i-\alpha}}{\Gamma(i-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(k-\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{k-\alpha-1} f^{(k)}(\tau)\, d\tau. \qquad (1.24)$$

et

$$D^{(-\alpha)} f(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{f^{(i)}(a)\,(x-a)^{i+\alpha}}{\Gamma(i-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(k+\alpha)} \int_a^x (x-\tau)^{k+\alpha-1} f^{(k)}(\tau)\, d\tau. \qquad (1.25)$$

1.2.3 Propriétés :

Composition avec les dérivées d'ordre entier :

Pour n entier positif et α non entier on a :

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(D^{(\alpha)} f(x)\right) = D^{(n+\alpha)} f(x).$$

et

$$D^{(\alpha)}\left\{\frac{d^n}{dx^n} f(x)\right\} = D^{(n+\alpha)} f(x) - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{f^{(k)}(a)\,(x-a)^{k-\alpha-n}}{\Gamma(k-\alpha-n+1)}; n \in \mathbb{N}, \alpha \in R \qquad (1.26)$$

Composition avec les dérivées fractionnaires :

* Si $\beta < 0$ et $\alpha \in R$:

$$D^{(\alpha)} \left(D^{(\beta)} f\left(x\right) \right) = D^{(\alpha+\beta)} f\left(x\right). \tag{1.27}$$

* Si $0 \leq m-1 < \beta < m$ et $\alpha < 0$:

$$D^{(\alpha)} \left(D^{(\beta)} f(x) \right) = D^{(\alpha+\beta)} f(x). \tag{1.28}$$

seulement si $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = \overline{0, m-2}$

* Si $0 \leq m-1 < \beta < m$ et $0 \leq n-1 < \alpha < n$ alors :

$$D^{(\alpha)} \left(D^{(\beta)} f(x) \right) = D^{(\beta)} \left(D^{(\alpha)} f(x) \right) = D^{(\alpha+\beta)} f(x). \tag{1.29}$$

1.3 Approches de Riemann-Liouville :

Ces approches est la généralisation la plus utilisée du dérivé .

1.3.1 Définition 1

Soit f une fonction réelle, a appartient au domaine de définition de f et $\alpha > 0$.

On appelle intégrale fractionnaire de f d'ordre α, et on la note $I_a^{(\alpha)}$, la fonction définie par :

$$D_a^{(-\alpha)} f(x) = I_a^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)} \int_a^x (x-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \tag{1.30}$$

1.3.2 Définition 2

On appelle dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville de f d'ordre α réel $\alpha > 0$, et on la note $D_a^{(\alpha)}$ la fonction définie par :

$$D_a^{(\alpha)}f(x) = D_a^{(n)}I_a^{(n-\alpha)}f(x) = \frac{d^n}{dx^n}I_a^{(n-\alpha)}f(x), \tag{1.31}$$

donc

$$D_a^{(\alpha)}f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x (x-\tau)^{n-\alpha-1}f(\tau)d\tau, \tag{1.32}$$

Où $n \in N^*$telle que $(n-1) \leq \alpha < n$ et $x > a$.

En particulier, quand $\alpha = n \in N$, nous obtenons :

$$D_a^0 f(\tau) = f(\tau), \quad D_a^n f(\tau) = f^{(n)}(\tau). \tag{1.33}$$

Où $f^{(n)}(\tau)$ désigne la dérivée usuelle d'orde n de $f(\tau)$.

si $0 < \alpha < 1$, alors :

$$D_a^{(\alpha)}f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x (x-\tau)^{-\alpha}f(\tau)d\tau, \qquad (x > a) \tag{1.34}$$

1.3.3 Propriétés

La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville a les propriétés suivantes :

1. Si $f(\tau)$ est continue pour $x > a$, alors l'intégration fractionnaire réel arbitraire, possède les propriétés suivantes :

$$I_a^{\alpha}\left(I_a^{\beta}f(x)\right) = I^{\alpha+\beta}f(x), \qquad (\alpha > 0,\ \beta > 0), \tag{1.35}$$

évidement on peut rechanger α et β, nous obtenons :

$$I_a^{\alpha}\left(I_a^{\beta}f(x)\right)=I_a^{\beta}\left(I_a^{\alpha}f(x)\right)=I^{\alpha+\beta}f(x),\qquad(\alpha>0,\ \beta>0)\,. \tag{1.36}$$

2. L'opérateur de fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire

$$D_a^{\alpha}\left(I_a^{\alpha}f\left(x\right)\right)=f\left(x\right). \tag{1.37}$$

En général

$$D_a^{\alpha}\left(I_a^{\beta}f(x)\right) = I^{(\alpha-\beta)}f(x),\ \text{si } \alpha-\beta<0, \tag{1.38}$$

$$I^{(\alpha-\beta)}f(x) = D^{(\alpha-\beta)}f(x) \tag{1.39}$$

3. Soient $\alpha\geq 0, m\in N$ et $D=\frac{d}{dx}$. Si les deux dérivées fractionnaires $D_a^{\alpha}f(x), D_a^{m}f(x)$ existes, nous avons :

$$D_a^{\alpha}D_a^{m}f(x)=D_a^{\alpha+m}f(x). \tag{1.40}$$

4. La différentiation et l'intégration fractionnaire ne commutent pas entre elle.

$$I_a^{\alpha}D_a^{\alpha}f(x)=f(x)-\sum_{k+1}^{m}\left[D_a^{\alpha-k}f(x)\right]_{x=a}\frac{(x-a)^{\alpha-k}}{\Gamma\left(\alpha-k+1\right)} \tag{1.41}$$

avec $m-1\leq\beta\leq m$.

5. Nous avons aussi les formules de compositions suivantes

$$D_a^{\alpha}D_a^{\beta}f(x)=D^{\alpha+\beta}f(x)-\sum_{k=1}^{m}\left[D_a^{\beta-k}f(x)\right]_{x=a}\frac{(x-a)^{-\alpha-k}}{\Gamma\left(1-\alpha-k\right)} \tag{1.42}$$

et

$$D_a^\alpha D_a^\beta f(x) = D^{\alpha+\beta} f(x) - \sum_{k=1}^{m} \left[D_a^{\alpha-k} f(x)\right]_{x=a} \frac{(x-a)^{-\beta-k}}{\Gamma(1-\beta-k)}$$

Par suite les deux opérateurs de dérivations fractionnaires ne commutent que si $\alpha = \beta$ et

$$\sum_{k=1}^{m} [D^{\alpha-k} f(t)]_{t=0} = 0$$

pour $k = \overline{1,n}$ et

$$\sum_{k=1}^{m} [D^{\beta-k} f(t)]_{t=0} = 0 \text{ pour } k = \overline{1,m}$$

Exemple 1 :

Soit $f(x) = C$, nous avons

$$D_a^\alpha f(x) = \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)} (x-a)^{-\alpha}$$

Exemple 2 :

Soit $f(x) = (x-\alpha)^p$ au sens de Riemann-Lioville on a,

$$D_a^\alpha (x-a)^p = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-\tau)^{n-\alpha-1} (\tau - a)^p \, d\tau,$$

pour α non-entier,$0 \leq n-1 < \alpha < n$ et $p > -1$.

En faisant un changement de variable, $\tau = a + s(x-a)$.

pour $\tau = a$, $s = 0$, pour $\tau = \alpha$, $s = 1$

$$\begin{aligned}
D_a^\alpha (x-a)^p &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-\tau)^{n-p-\alpha} \int_0^1 (1-S)^{n-\alpha-1} s^p ds \\
&= \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(n+p-\alpha+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(p-\alpha+1)\Gamma(n+p-\alpha+1)} (x-a)^{p-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} (x-a)^{p-\alpha}
\end{aligned}$$

pour $\alpha = \frac{1}{2}$, $a = 0, p = \frac{1}{2}$, on a

$$D^{\left(\frac{1}{2}\right)}(x)^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(1\right)} = \sqrt{\pi}$$

1.4 Intégration fractionnaire

Considérons une fonction f définie pour tout $x > 0$. On pose

$$I\left[f(x)\right] = \int_0^x f(t)dt, \tag{1.43}$$

et

$$I^2\left[f(x)\right] = \int_0^t I\left[f(u)\right]du = \int_0^x \int_0^u f\left(t\right)dt \tag{1.44}$$

en répétant n fois, on obtient d'après la formule de Cauchy

$$I^n\left[f(x)\right] = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1}f(t)dt, \tag{1.45}$$

d'apris la fonction Γ on a la définition suivante :

1.4.1 définition

On appelle intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville de f d'ordre α, $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et on la note I^α , la fonction définie par :

$$I^\alpha\left[f(x)\right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt, \tag{1.46}$$

1.4.2 Théorème

Soit $f \in L_1[a,b]$ et $\alpha \in \mathbb{R}^+$, l'intégrale $I^\alpha\left[f(x)\right]$ existe pour tout $t \in [a,b]$ et la fonction $I^\alpha f$ elle même est un élément de $L_1[a,b]$

1.4.3 Propriété

Pour :α , β> 0 on a :

$$I^\alpha o I^\beta = I^\beta o I^\alpha = I^{\alpha+\beta}. \tag{1.47}$$

et

$$\frac{d}{dx} I^\alpha f = I^{\alpha-1} f. \tag{1.48}$$

1.5 Les transformations intégrale

En mathématiques, la transformation intégrale [11] d'une fonction de son espace original dans un autre espace de la fonction par intégration où quelques-unes des propriétés de la fonction originale peuvent être caractérisés plus facilement et peuvent être manipulés que dans l'espace de la fonction original. La fonction transformée peut être dressée généralement à l'espace de la fonction original en utilisant la transformation inverse.

Il y a beaucoup de classes de problèmes qui sont difficiles de résoudre ou peu maniable algébriquement dans leurs représentations originales. La transformation intégrale des équations de leurs "domaine" original dans un autre domaine. Pour manipuler et résoudre l'équation dans le domaine de la cible peut être plus facile que manipulation beaucoup et solution dans le domaine original. La solution est dressée à son espace originale par une transformation inverse.

Il existe plusieurs transformations[12] [**?**](transformation de Fourier, Laplace, Mellin. . .), qu'elles ont une large application en physique et sciences d'ingénieur.

1.5.1 Outils de base de la transformée de Laplace

La fonction $F(p)$de la variable complexe p défnie par

$$F(p) = L\{f(t)\}= \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)dt \tag{1.49}$$

est appelée la transformée de Laplace de la fonction $f(t)$,

- La transformation de Laplace inverse est donner par :

$$f(t) = L^{-1}\left\{F(p)\right\} = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{-pt} f(t)dt, \qquad c = \mathrm{Re}(p) > c_0, \tag{1.50}$$

où c_0 est réside dans le demi-plan droit de la couvergence absolue de l'integrale de la place.

- La transformation de Laplace de convolution :

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \tag{1.51}$$

La convolution de deux fonction $f(t)$ et $g(t)$ qui soit égale à 0 pour $t < 0$.

La transformation de Laplace $h(t) = f(t) * g(t)$ est

$$L(h(t)) = F(p)G(p).$$

propriété

Soit deux fonction $f(t)$ et $g(t)$, qui sont égale à zéro pour $t > 0$,est égale au produit de leur transformées de Laplace.

$$L\left\{f(t) * g(t)\right\} = F(p).G(p); \tag{1.52}$$

sous l'hypothése que $F(p)$ et $G(p)$ existent.

La transformation de Laplace de la dérivée d'ordre entier de la fonction $f(t)$ est donnée par

$$L\left\{f^{(n)}(t)\right\} = p^n F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-k-1} f_{(0)}^{(k)} = p^n F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^k f^{(n-k-1)}(0), \tag{1.53}$$

1.5.2 La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire (Riemann-Liouville)

Nous donnons la transformée de Laplace de l'intégration fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ de Riemann-Liouville qui peut s'écrire comme convection de deux fonctions

$$f(t) \text{ et } g(t) = t^{p-1}. \tag{1.54}$$

On sait que sur $[0;\infty[$,lintegrale de Riemann-Liouville d'ordre α de f est donnée par

$$\begin{aligned} D_0^{(-\alpha)} f(x) &= I_0^{(\alpha)} f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, t > 0 \\ &= t^{\alpha-1} * f(t) \end{aligned}$$

telle que la transformée de Laplace de la fonction $t^{\alpha-1}$ est donnée par :

$$G(s) = L\left\{t^{\alpha-1}\right\} = \Gamma(\alpha) p^{-\alpha} \tag{1.55}$$

donc nous obtenons la formule de la transformée de La place de l'integrale fractionnaire de Riemann-Liouville suivante :

$$L\left\{I_0^\alpha f(t)\right\} = p^{-\alpha}F(p) \tag{1.56}$$

où $F(p)$ dénote la transformée de Laplace de $f(t)$. Et la formule de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

d'order $\alpha > 0$ est donnée par :

$$L\left\{D_0^\alpha f(t)\right\} = p^\alpha F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^k \left[D^{\alpha-k-1}f(t)\right]_{t=0} (n-1 \leq \alpha \leq n)\,. \tag{1.57}$$

1.5.3 Transformées de Fourier des dérivées fractionnaires

Outils de base pour la transformée de Fourier

La transformée de Fourier d'une fonction continue $h(t)$,est défnie par :

$$F(\omega) = F\left\{f(t)\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} f(t)dt \tag{1.58}$$

La transformée de Fourier inverse

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{-i\omega t}dw. \tag{1.59}$$

La transformée de Fourier de la convolution

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau \tag{1.60}$$

propriété

* les deux fonctions$f(t)$ et$g(t)$, défnies sur R, est égale au produit de leurs transformées de Fourier :

$$F\left\{f(t)*g(t)\right\}=F(\omega)G(\omega); \tag{1.61}$$

où $F(w)$ est $G(w)$ existent.

* la transformée de Fourier de la dérivée $n-ième$ de $h(t)$ est

$$F\left\{h^{(n)}(t)\right\}=(-i\omega)^{n}H(\omega). \tag{1.62}$$

La transformée de Fourier est un outil trés puissant pour plusieurs domaines d'analyse des systèmes dynamiques linéaires.

Transformée de Fourier pour les intégrales fractionnaires

Tout d'abord, nous allons calculer la transformée de Fourier de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville avec la borne inférieure $\alpha=-\infty$,

$$D_{t}^{(-\alpha)}f(t)=I^{(\alpha)}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)\,d\tau, \tag{1.63}$$

où $0<\alpha<1$.

Commençons par la transformée de Fourier de la fonction

$$h(t)=\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

On peut écrire comme

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-pt}dt=p^{-\alpha}.$$

Prenons $p = -i\omega$, où ω est réel. Où l'intégrale converge si $0 < \alpha < 1$. et donc on obtient immédiatement la transformée de Fourier de la fonction

$$h_+(t) = \begin{cases} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, (t > 0) \\ 0, (t \geq 0) \end{cases}$$

sous la forme

$$F\left\{h_+(t)\right\} = (-i\omega)^{-\alpha}$$

Maintenant on peut trouver la transformée de Fourier de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville, laquelle peut s'écrire comme la convolution des fonctions $h_+(t)$ et $g(t)$:

$$D_t^{(-\alpha)} f(t) = h_+(t) * g(t).$$

Donc

$$F\left\{D_t^{(-\alpha)} g(t)\right\} = (-i\omega)^{-\alpha} G(\omega). \tag{1.64}$$

où $G(\omega)$ est la transformée de Fourier de la fonction $g(t)$, qui donne aussi la transformée de Fourier de l'intégrale fractionnaire de Grünwald-Letnikov $D_t^{(-\alpha)} g(t)$ et l'intégrale fractionnaire de Caputo ${}^C D_t^{(-\alpha)} g(t)$, car dans ce cas, elles coïncident avec l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville.

Transformée de Fourier des dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville.

Calculons maintenant la transformée de Fourier des dérivées fractionnaires.

$$D_t^{(-\alpha)}g(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{-\infty}^{t}\frac{g^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)}d\tau = D_t^{(\alpha-n)}g^{(n)}(t), (n-1<\alpha<n) \tag{1.65}$$

la transformée de Fourier de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville,avec la borne inférieure $\alpha=-\infty$

$$\begin{aligned} F\left\{D_t^{\alpha}g(t)\right\} &= (-i\omega)^{\alpha-n}F\left\{g^{(n)}(t)\right\} \\ &= (-i\omega)^{\alpha-n}(-i\omega)^{n}G(\omega) \\ F\left\{D_t^{\alpha}g(t)\right\} &= (-i\omega)^{\alpha}G(\omega). \end{aligned} \tag{1.66}$$

1.6 Fonctions H de Fox

Les fonctions de Fox H fournissent un formalisme efficace pour gérer le problème de calcul fractionnaire. C'est fonction sont définit par Fox en 1961 [14],qui représente une généralisation pour les fonctions G de Meijer a l'aide des transformations intégrales de Mellin.

la fonction Fox H est définie comme :

$$
\begin{aligned}
H_{p,q}^{m,n}(z) &= H_{p,q}^{m,n}\left(z \mid \begin{array}{c}(a_p,A_p)\\ (b_q,B_q)\end{array}\right) = H_{p,q}^{m,n}\left(z \mid \begin{array}{c}(a_1,A_1),...,(a_p,A_p)\\ (b_1,B_1),...,(b_q,B_q)\end{array}\right)\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_C h(s)z^{-s}ds \qquad (1.67)\\
h(s) &= \frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j+B_js)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j-A_js),}{\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j+A_js)\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j-B_js)}, \qquad (1.68)
\end{aligned}
$$

avec $0 \leq n \leq p, 1 \leq m \leq q, \{a_j, b_j\} \in C, \{A_j, B_j\} \in R_+, A_j(b_h+\nu) \neq B_h(a_j-\lambda-1)$ pour $\nu,\ \lambda = 0, 1, ...;\ h = 1, ..., m,\ j = 1, ..., n.$

La fonction H est une fonction analytique de z pour tout $|z| \neq 0$ quand $\mu > 0$ et pour $0 < |z| < 1/\beta$ lorsque $\mu = 0$, où μ elles sont définis comme

$$
\mu = \sum_{j=1}^{q}B_j - \sum_{j=1}^{p}A_j\,;\ \beta = \prod_{j=1}^{p}A_j^{A_j}\prod_{j=1}^{p}B_j^{-B_j}
$$

La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liuoville de la fonction de Fox H est donnée par :

$$
{}^{R-L}D_z^{\beta}\left[z^a H_{p,q}^{m,n}\left((cz)^b \mid \begin{array}{c}(a_j,A_j)\\ (b_j,B_j)\end{array}\right)\right] = z^{a-\beta}H_{p+1,q+1}^{m,n+1}\left((cz)^b \mid \begin{array}{c}(-a,b),(a_j,A_j)\\ (b_j,B_j),(\beta-a,b)\end{array}\right), \qquad (1.69)
$$

Idem la transformée de Laplace de la fonction de Fox H est :

$$
\pounds\left\{x^{\rho-1}H_{p,q+1}^{m,n}\left(ax^{\sigma} \mid \begin{array}{c}(a_p,A_p)\\ (b_q,B_q),(1-\rho,\sigma)\end{array}\right)\right\} = s^{-\rho}H_{p,q}^{m,n}\left(as^{-\sigma} \mid \begin{array}{c}(a_p,A_p)\\ (b_q,B_q)\end{array}\right) \qquad (1.70)
$$

avec la transformée inverse donnée comme

$$\pounds^{-1}\left\{s^{-\rho}H_{p,q}^{m,n}\left(as^{\sigma}\mid\begin{array}{c}(a_p,A_p)\\(b_q,B_q)\end{array}\right)\right\}=x^{\rho-1}H_{p,q+1}^{m,n}\left(ax^{-\sigma}\mid\begin{array}{c}(a_p,A_p),(\rho,\sigma)\\(b_q,B_q)\end{array}\right),\quad(1.71)$$

où

$$\begin{aligned}\rho,\alpha,s &\in C,\mathrm{Re}(s)>0,\sigma>0\quad\text{et}\\ \mathrm{Re}(\rho)+\sigma\max_{1\leq\ i\ \leq n}\left[\frac{1}{A_i}+\frac{\mathrm{Re}(a_i)}{A_i}\right] &> 0,|\arg a|<\frac{\pi\theta}{2},\theta=\alpha-\sigma.\end{aligned}$$

$$\mu=\sum_{j=1}^{q}B_j-\sum_{j=1}^{p}A_j,\beta=\prod_{j=1}^{p}A_j^{A_j}\prod_{j=1}^{p}B_j^{-B_j}$$

Chapitre 2

L'équation de Schrödinger fractionnaire

2.1 Introduction

L'équation de Schrödinger du temps fractionnaire au points de vu de Naber [15], est une généralisation de l'équation de Schrödinger au monde du calcul fractionnaire, où la motivations du calcul fractionnaire dans les systèmes physiques est due au fait que les différentes variables spatiales et temporelles que nous traitons qui présentent des grains originels dans l'approche mathématique des phénomènes, ne sont plus infinitésimales et qui ne peuvent pas être placés arbitrairement à zéro-plutôt ils sont non nuls avec une longueur minimale à l'échelle microscopique.

A l'échelle microscopique les différentiels dx (et dt) ne peuvent pas être considérés comme limitant zéro, ils se sont étendus. Une pour prendre cela en compte, utilisez des quantités infinitésimales telles que $\Delta x^{\alpha} << \Delta x$ (et $\Delta t^{\alpha} << \Delta t$). De cette façon, définissant les différentiels ou plutôt les différentiels fractionnaires nous obligent à utiliser des dérivés fractionnaires dans l'étude de systèmes dynamiques. L'équation de Schrödinger fractionnaire avec points de vu de Naber qui pense qu'il existe deux type de l'équation de

Schrödinger : l'équation de Schrödinger de l'espace fractionnaire et l'équation de Schrödinger du temps fractionnaire et en peut avoir équation de Schrödinger fractionnaire de temps et espace.

L'étude de l'équation de Schrödinger du temps fractionnaire au points de vu de Naber[16]. On commence par une orientation ou en cherche la forme de la fonction d'onde qui dépend de temps en utilisons les fonctions de base (Gamma, Beta, Fox ...) et nous traitée le problème une particule dans une boite ou on trouve la forme de la fonction d'onde fractionnaire, avec les niveaux d'énergies.

Nous finissons notre travail par la résolution de l'équation de Schrödinger fractionnaire de temps pour une particule libre.

L'équation de Schrödinger est considérée avec la première dérivée du temps, changé par une dérivée fractionnaire. D'après Naber il y a deux types pour l'équation de Schrödinger fractionnaire, la première type est un l'équation de Schrödinger du l'espace fractionnaire tel que

$$\frac{\partial}{\partial t}U = C\frac{\partial^{\beta}}{\partial x^{\beta}}U \tag{2.1}$$

C ... constante de diffusion et $1 < \beta < 2$, et le deuxième type est l'équation de Schrödinger du temps fractionnaire.

$$\frac{\partial^{\alpha}}{\partial t^{\alpha}}U = C\frac{\partial}{\partial x}U \tag{2.2}$$

$0 < \alpha < 1$ et $1 < \alpha < 2$

Le cas mélange peut être considère avec les deux espace et temps à dérivés fractionnaire.

$$\frac{\partial^{\alpha}}{\partial t^{\alpha}}U = C\frac{\partial^{\beta}}{\partial x^{\beta}}U \tag{2.3}$$

L'équation de Schrödinger du temps fractionnaire est examinée le temps, sera construite en récrivant L'équation de Schrödinger afin que tous les opérateurs dérivées paraissent comme objets du dimensionnels alors la dérivée du temps est fractionnaire, et l'unité imaginaire est élevée à l'ordre du temps fractionnaire, ce dernier pas important par ce que il assure le même caractère physique de l'équation de Schrödinger du temps fractionnaire peu importe ce que l'ordre.

2.2 Équation de Schrödinger de temps fractionaire

Pour écrire la version fractionnaire de l'équation de Schrödinger, nous utilisons le fait qu'elle est analytique dans la moitié inférieure du plan t complexes. En effectuant une rotation, $t \to -it$, l'équation de Schrödinger à une dimension est :

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + V(x)\Psi(x,t) \tag{2.4}$$

devient

$$-\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\left(\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\Psi + V(x)\Psi(x,t)$$

qui représente l'équation de Bloch

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \tilde{D}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{\hbar}V(x)\Psi(x,t),$$

où $\tilde{D} = \frac{\hbar}{2m}$est la constante de diffusion quantique et $V(x)$ est le potentiel. Nous pouvons maintenant écrire la forme de l'équation fractionnaire comme :

$$D_t^{\alpha}\Psi(x,t) = \frac{1}{\hbar}\tilde{D}_{\alpha,\beta}\hbar^{\beta}R_x^{\beta}\Psi(x,t) - \frac{1}{\hbar}V(x)\Psi(x,t), 0 < \alpha < 1, 1 < \beta < 2. \tag{2.5}$$

avec $D_t^{\alpha} \equiv \frac{\partial^{\alpha}}{\partial t^{\alpha}}$ et $R_x^{\beta} \equiv \nabla^{\beta} \equiv \frac{\partial^{\beta}}{\partial x^{\beta}}$,où R_x^{β} est le dérivé de Reisz. Nous avons également introduit un nouveau constante de diffusion quantique, $\tilde{D}_{\alpha,\beta}$ avec les unités appropriées. Effectuer une rotation, $t \to it$, on obtient la version fractionnaire de l'équation de Schrödinger comme :

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}\Psi(x,t) = \frac{i^\alpha}{\hbar}\tilde{D}_{\alpha,\beta}\left(\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta \Psi(x,t) - \frac{i^\alpha}{\hbar}V(x)\Psi(x,t). \tag{2.6}$$

pour $\alpha = 1$,Cela devient l'équation fractionnaire spatiale de Schrödinger étudiée par Laskin [17] :

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t) = \frac{i}{\hbar}\tilde{D}_{1,\beta}\left(\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^\beta \Psi(x,t) - \frac{i}{\hbar}V(x)\Psi(x,t). \tag{2.7}$$

qu'il a écrit comme

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -D_\beta\left[\hbar\nabla\right]^\beta \Psi(x,t) + V(x)\Psi(x,t). \tag{2.8}$$

Laskin a appelé $[\hbar\nabla]^\beta$ la dérivée quantique de Riesz et D_β la constante de diffusion quantique pour l'équation de Schrödinger pour une fraction spatiale , où $\beta \to 2$, $D_\beta \to 1/2m$.

Pour $\beta = 2$ nous écrivons

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}\Psi(x,t) = \frac{i^\alpha}{\hbar}\tilde{D}_{\alpha,2}\left(\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \Psi(x,t) - \frac{i^\alpha}{\hbar}V(x)\Psi(x,t). \tag{2.9}$$

On obtient :

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}\Psi(x,t) = i^\alpha\tilde{D}_{\alpha,2}\hbar\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t) - \frac{i^\alpha}{\hbar}V(x)\Psi(x,t). \tag{2.10}$$

En définissant une nouvelle constante de diffusion quantique $D_\alpha = \tilde{D}_{\alpha,2}\hbar$, nous écrivons l'équation de Schrödinger de temps fractionnaire comme :

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}\Psi(x,t) = i^\alpha D_\alpha\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t) - \frac{i^\alpha}{\hbar}V(x)\Psi(x,t), 0 < \alpha < 1, \tag{2.11}$$

où $D_\alpha \to \hbar/2m$ comme $\alpha \to 1$.

En utilisant la méthode de séparation des variables $\Psi(x,t) = X(x)T(t)$, l'équation de Schrödinger de temps fractionnaire devient :

$$\frac{\partial^\alpha T(t)}{\partial t^\alpha} X(x) = i^\alpha D_\alpha \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} T(t) - \frac{i^\alpha}{\hbar} V(x) X(x) T(t). \tag{2.12}$$

Nous obtenons les équations à résoudre pour $T(t)$, comme :

$$\frac{\partial^\alpha T(t)}{\partial t^\alpha} = i^\alpha \lambda_n T(t), \tag{2.13}$$

où λ_n sont les valeurs propres réelles de l'équation spatiale et $0 < \alpha < 1$. En appliquant la transformation de Laplace,

$$\pounds \left\{ {}^{R-L}D_t^q f(t) \right\} = s^q \tilde{f}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \left({}^{R-L}D_t^{q-k-1} f(t) \right) |_{t=0} \; n-1 < q \leq n, \tag{2.14}$$

sur l'équation diffirentielle satisfaite par $T(t)$,

$$s^\alpha \tilde{T}(s) - s^{\alpha-1} T(0) = i^\alpha \lambda_n \tilde{T}(s),$$

où e $T(s) = \pounds\{T(t)\}$. Cela donne la transformée de Laplace de la dépendance temporelle de la fonction d'onde comme :

$$\tilde{T}(s) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - i^\alpha \lambda_n} T(0), = T(0) \frac{s^{-1}}{1 - i^\alpha \lambda_n s^{-\alpha}} \tag{2.15}$$

En utilisant des séries géométriques, nous pouvons écrire ceci comme

$$\tilde{T}(s) = T(0) \sum_{m=0}^{\infty} \left(i^\alpha \lambda_n s^{-\alpha} \right)^m s^{-1} = T(0) \sum_{m=0}^{\infty} i^{\alpha m} \lambda_n^m s^{-\alpha m - 1}, \tag{2.16}$$

cela converge pour $|i^\alpha \lambda_n s^{-\alpha}| < 1$.

Pour la transformation inverce de Laplace, on a $\pounds \left\{ t^\alpha u(t) \right\} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$,tel que $\sigma_0 = 0$, c'est Transformée d'un fonction usuelle $(p > \sigma_0)$

Donc

$$\pounds\left\{s^{-\alpha m-1}\right\}=\pounds\left\{\frac{1}{s^{\alpha m+1}}\right\}=\pounds\left\{\frac{1}{s^{\alpha m}\times s}\right\}=\frac{t^{\alpha m+1}}{\Gamma\left(\alpha m+1\right)}\frac{1}{t}=\frac{t^{\alpha m}}{\Gamma\left(\alpha m+1\right)}. \qquad (2.17)$$

alors

$$\begin{aligned} T(t) &= T(0)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{i^{\alpha m}\lambda_n^m t^{\alpha m}}{\Gamma\left(1+\alpha m\right)}, \\ &= T(0)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(i^{\alpha}\lambda_n t^{\alpha}\right)^m}{\Gamma\left(1+\alpha m\right)} \\ T(t) &= T(0)E_{\alpha}\left(i^{\alpha}\lambda_n t^{\alpha}\right), \qquad (2.18) \end{aligned}$$

On a $E_{\alpha,\beta}(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha m+\beta)}$,l'exprition génirale de la fonction de Mittag-Leffler avec α est strictement positif[18], donc

$$E_{\alpha}\left(i^{\alpha}\lambda_n t^{\alpha}\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(i^{\alpha}\lambda_n t^{\alpha}\right)^m}{\Gamma\left(1+\alpha m\right)} \qquad (2.19)$$

$E_{\alpha}\left(i^{\alpha}\lambda_n t^{\alpha}\right)$ est la fonction de Mittag-Leffler avec un argument imaginaire.

Cependant, un chemin alternatif pourrait également être pris en évaluant directement l'intégrale

$$T(t)=T(0)\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{e^{st}s^{\alpha-1}ds}{s^{\alpha}-i^{\alpha}\lambda_n}\right],$$

Considérant le pôle à $s_1=0$ dû au numérateur, et le pôle à $s_2=i\lambda_n^{1/\alpha}$, en raison de la dénominateur, on peut écrire

$$T(t)=T(0)\left[\frac{e^{i\lambda_n^{1/\alpha}t}}{\alpha}-\frac{\sigma\sin\sigma\pi}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{-xt}x^{\alpha-1}dx}{x^{2\alpha}-2\sigma\cos\alpha\pi x\ x^{\alpha}+\sigma^2}\right] \qquad (2.20)$$

$$T(t)=T(0)\left[\frac{e^{i\lambda_n^{1/\alpha}t}}{\alpha}-F_\alpha(\sigma;t)\right],\sigma=\lambda_n i^\alpha. \tag{2.21}$$

Pour $\lambda_n>0$, l'expression ci-dessus est valable pour tous les $0<\alpha<1$. Pour $\lambda_n<0$, le deuxième pôle,

$s_2=|\lambda_n|^{1/\alpha}e^{i(\pi/\alpha+\pi/2)}$, à la fois des parties réelles et imaginaires. Puisque la coupe de branche est située le long de l'axe réel négatif, nous devons exclure $\alpha=2/(5+4n), n=0,1,2,...$ valeurs, donc que le pôle se trouve à l'intérieur du contour.

Nous nous concentrons maintenant sur l'intégrale :

$$F_\alpha(\sigma;t)=\frac{\sigma\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty\frac{e^{-xt}x^{\alpha-1}dx}{x^{2\alpha}-2\sigma\cos\alpha\pi x\ x^\alpha+\sigma^2} \tag{2.22}$$

Puisque la fonction de Mittag-Leffler représente un comportement entre une loi de puissance et une exponentielle, elle joue un rôle très important dans les applications scientifiques et techniques. Il est impératif que nous ayons une expression fermée pour cette intégrale, ce qui permet de séparer la fonction de Mittag -Leffler avec un argument imaginaire en sa fonction purement oscillante est une partie en décomposition [15][12]. Puisque les méthodes standard ne permettent pas d'évaluer cette intégrale, nous allons utiliser le langage des $H-$ fonctions. Nous commençons par noter qu'au-dessus de l'intégrale nécessite l'évaluation de la transformée de Laplace

$$\pounds\left\{\frac{x^{\alpha-1}}{x^{2\alpha}-2\sigma\cos\alpha\pi x\ x^\alpha+\sigma^2}\right\} \tag{2.23}$$

nous allons d'abord exprimer la fonction

$$f(x)=\frac{x^{\alpha-1}}{x^{2\alpha}-2\sigma\cos\alpha\pi x\ x^\alpha+\sigma^2} \tag{2.24}$$

en termes de $H-$ fonctions. Pour cela, nous devons évaluer sa transformée de Mellin :

$$M\left\{f(x)\right\} = \hat{f}(s) = \int_0^\infty f(x)x^{s-1}dx. \tag{2.25}$$

$$M\left\{\frac{1}{x^{2\alpha} - 2\sigma\cos\alpha\pi x\ x^{\alpha} + \sigma^2}\right\} = -\frac{\pi\left(-\sigma\right)^{s-2}\sin\alpha\left(s-1\right)\pi}{\sin\pi s\ \sin\alpha\pi}, \tag{2.26}$$

En utilisant la propriétée

$$M\left\{f(x^{\beta})\right\} = \frac{1}{\beta}\hat{f}\left(\frac{s}{\beta}\right), \beta > 0,$$

qui nous permet d'écrire

$$M\left\{f(x^{\alpha})\right\} = \frac{1}{\alpha}\hat{f}\left(\frac{s}{\alpha}\right) = -\frac{\pi\left(-\sigma\right)^{s-2}}{\alpha}\frac{\sin\alpha\left(s/\alpha-1\right)\pi}{\sin\pi s/\alpha\ \sin\alpha\pi} \tag{2.27}$$

donc

$$M\left\{f(x)\right\} = -\frac{\pi\left(-\sigma\right)^{s/\alpha}}{\alpha\sigma^2}\frac{\sin\left(s-\alpha\right)\pi}{\sin\alpha\pi\sin\frac{s\pi}{\alpha}}. \tag{2.28}$$

D'après les propriètèes de la fonction Gamma, nous avons :

$$\begin{aligned} \sin\pi z &= \frac{\pi}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)} \Rightarrow \\ \sin\left(s-\alpha\right)\pi &= \frac{\pi}{\Gamma\left(s-\alpha\right)\Gamma\left(1-\alpha-s\right)} \end{aligned}$$

pour écrire

$$h(s) = M\left\{f(x)\right\} = \frac{\pi}{\alpha\sigma^2\sin\alpha\pi}\frac{\left(-\sigma\right)^{s/\alpha}\Gamma(s/\alpha)\Gamma(1-s/\alpha)}{\Gamma(\alpha-s)\Gamma(1-\alpha-s)}.$$

Et la transformée inverse de Mellin :

$$g(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\hat{g}(s)x^{-s}ds, \tag{2.29}$$

où $\hat{g}(s)$ est la transformée de Mellin de $g(x)$, nous permet d'écrire

$$\frac{1}{x^{2\alpha}-2\sigma\cos\alpha\pi x\ x^{\alpha}+\sigma^2}=\left(\frac{\pi}{\alpha\sigma^2\sin\alpha\pi}\right)\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{(-\sigma)^{s/\alpha}\,\Gamma(s/\alpha)\Gamma(1-s/\alpha)}{\Gamma(\alpha-s)\Gamma(1-\alpha-s)}x^{-s}ds\right]. \tag{2.30}$$

Par comparaison avec la définition de la fonction H, on a :

$$H_{p,q}^{m,n}\left(z\mid\begin{array}{c}(a_1,A_1),...,(a_p,A_p)\\(b_1,B_1),...,(b_q,B_q)\end{array}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_C h(s)z^{-s}ds,$$

Par identéfication des valeurs des paramètres :

$$\begin{aligned}m &= 1,n=1,p=2,q=2,\\ a_1 &= 0,A_1=1/\alpha,a_2=\alpha,A_2=-1,\\ b_1 &= 0,B_1=1/\alpha,b_2=\alpha,B_2=-1.\end{aligned}$$

Ainsi, on obtenant :

$$\frac{1}{x^{2\alpha}-2\sigma\cos\alpha\pi x\ x^{\alpha}+\sigma^2}=\left(\frac{\pi}{\alpha\sigma^2\sin\alpha\pi}\right)H_{2,2}^{1,1}\left(\frac{x}{(-\sigma)^{1/\alpha}}\mid\begin{array}{c}(0,1/\alpha),...,(\alpha,-1)\\(0,1/\alpha),...,(\alpha,-1)\end{array}\right).$$

Pour évaluer $F_\alpha(\sigma;t)$ et enfin la dépendance temporelle $T(t)$ de la fonction d'onde, la transformée de Laplace

$$\pounds\left\{\frac{x^{\alpha-1}}{x^{2\alpha}-2\sigma\cos\alpha\pi x\ x^{\alpha}+\sigma^2}\right\}=\left(\frac{\pi}{\alpha\sigma^2\sin\alpha\pi}\right)\pounds\left\{x^{\alpha-1}H_{2,2}^{1,1}\left(\frac{x}{(-\sigma)^{1/\alpha}}\mid\begin{array}{c}(0,1/\alpha),...,(\alpha,-1)\\(0,1/\alpha),...,(\alpha,-1)\end{array}\right)\right\}.$$

En utilisant l'expression suivante de la transformée de Laplace :

$$\pounds\left\{x^{\alpha-1}H_{p,q}^{m,n}\left(ax^{\sigma}\mid\begin{array}{c}(a_p,A_p)\\(b_q,B_q)\end{array}\right)\right\}=s^{-\rho}H_{p+1,q}^{m,n+1}\left(as^{-\sigma}\mid\begin{array}{c}(1-\rho,\sigma),(a_p,A_p)\\(b_q,B_q)\end{array}\right),$$

avec

$$\begin{aligned}
\rho &\rightarrow \alpha, a\rightarrow 1/(-\sigma)^{1/\alpha}, \sigma\rightarrow 1, s\rightarrow t,\\
m &= 1, n=1, p=2, q=2,\\
a_1 &= 0, A_1=1/\alpha; a_2=\alpha, A_2=-1,\\
b_1 &= 0, B_1=1/\alpha; b_2=\alpha, B_2=-1.
\end{aligned}$$

On trouve

$$\pounds\left\{\frac{x^{\alpha-1}}{x^{2\alpha}-2\sigma\cos\alpha\pi x\ x^{\alpha}+\sigma^2}\right\}=\frac{\pi}{\alpha\sigma^2\sin\alpha\pi}\frac{1}{t^{\alpha}}H_{3,2}^{1,2}\left(\frac{1}{(-\sigma)^{1/\alpha}t}\mid\begin{array}{c}(1-\alpha,1),(0,1/\alpha),(\alpha,-1)\\(0,1/\alpha),(\alpha,-1)\end{array}\right) \tag{2.31}$$

On utilise la relation

$$H_{p,q}^{m,n}\left(z\mid\begin{array}{c}(a_p,A_p)\\(b_q,B_q)\end{array}\right)=H_{p,q}^{m,n}\left(\frac{1}{z}\mid\begin{array}{c}(1-b_p,B_q)\\(1-a_q,A_q)\end{array}\right)$$

nous obtenons la transformation nécessaire comme

$$\pounds\left\{\frac{x^{\alpha-1}}{x^{2\alpha}-2\sigma\cos\alpha\pi x\ x^{\alpha}+\sigma^{2}}\right\}=\frac{\pi}{\alpha\sigma^{2}\sin\alpha\pi}\frac{1}{t^{\alpha}}H_{2,3}^{2,1}\left((-\sigma)^{1/\alpha}t\mid\begin{array}{c}(1,1/\alpha),(1-\alpha,-1)\\(\alpha,1)(0,1/\alpha),(1-\alpha,-1)\end{array}\right).$$

Donc

$$\begin{aligned}F_{\alpha}(\sigma;t)&=\frac{\sigma\sin\alpha\pi}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-xt}x^{\alpha-1}dx}{x^{2\alpha}-2\sigma\cos\alpha\pi x\ x^{\alpha}+\sigma^{2}},\\F_{\alpha}(\sigma;t)&=\frac{1}{\alpha\sigma t^{\alpha}}H_{2,3}^{2,1}\left((-\sigma)^{1/\alpha}t\mid\begin{array}{c}(1,1/\alpha),(1-\alpha,-1)\\(\alpha,1),(0,1/\alpha),(1-\alpha,-1)\end{array}\right)\end{aligned}$$

Maintenant, la partie dépendant du temps de la fonction d'onde peut être écrite comme

$$T(t)=T(0)\left[\frac{e^{i\lambda_{n}^{1/\alpha}t}}{\alpha}-\frac{1}{\alpha\sigma t^{\alpha}}H_{2,3}^{2,1}\left((-\sigma)^{1/\alpha}t\mid\begin{array}{c}(1,1/\alpha),(1-\alpha,-1)\\(\alpha,1),(0,1/\alpha),(1-\alpha,-1)\end{array}\right)\right]\quad(2.32)$$

La forme calculable est :

$$F_{\alpha}(\sigma;t)=-\frac{1}{\alpha}\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\frac{\Gamma(-\frac{\upsilon}{\alpha})\Gamma\left(1+\frac{\nu}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(-\upsilon\right)\upsilon!}\frac{(\lambda_{n}i^{\alpha})^{\frac{\nu}{\alpha}}t^{\nu}}{\upsilon!}-\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\lambda_{n}i^{\alpha})^{\frac{\nu}{\alpha}}t^{\nu}}{\Gamma\left(1+\alpha\upsilon\right)}.\quad(2.33)$$

Dans la première série, nous nous concentrons sur l'expression

$$I=(-1)^{\nu\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\frac{\Gamma\left(-\frac{\nu}{\alpha}\right)\Gamma\left(1+\frac{\nu}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(-\nu\right)\upsilon!}.$$

en utilisant la formule

$$\frac{\Gamma(-n)}{\Gamma(-N)} = (-1)^{N-n}\frac{N!}{n!},$$

où N et n sont des entiers positifs, nous l'étendons aux arguments non entiers comme

$$\frac{\Gamma(-q)}{\Gamma(-Q)} = (-1)^{Q-q}\frac{\Gamma(Q+1)}{\Gamma(q+1)},$$

et écrire

$$\frac{\Gamma\left(-\frac{\nu}{\alpha}\right)}{\Gamma(-\nu)} = \mp(-1)^{\nu-\frac{\nu}{\alpha}}\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{\alpha}+1\right)}.$$

Nous avons inséré le signe $\mp$ pour afficher l'ambiguïté dans la fonction gamma pour le négatif valeurs entières de son argument, où il diverge comme $\mp\infty$. Ainsi,I est évalué comme

$$I = \mp(-1)^{\nu\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}(-1)^{\frac{\nu}{\alpha}-\nu}\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{\alpha}+1\right)}\frac{\Gamma\left(1+\frac{\nu}{\alpha}\right)}{\nu!} = \mp 1. \tag{2.34}$$

avec $\Gamma(\nu+1) = \nu!$,et $(-1)^{2\frac{\nu}{\alpha}} = 1$,qeulque soit ν et α.

En remplaçant cela par $F_\alpha(\sigma;t)$

$$\begin{aligned} F_\alpha(\sigma;t) &= \pm\frac{1}{\alpha}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\lambda_n i^\alpha)^{\frac{\nu}{\alpha}}t^\nu}{\upsilon!} - \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\lambda_n i^\alpha)^\nu t^{\nu\alpha}}{\Gamma(1+\alpha\nu)} \qquad (2.35) \\ &= \pm\frac{1}{\alpha}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\left(i\lambda_n^{1/\alpha}t\right)^\nu}{\upsilon!} - \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\lambda_n i^\alpha t^\alpha)^\nu}{\Gamma(1+\alpha\nu)}, \end{aligned}$$

qui n'est rien d'autre que

$$F_\alpha(\sigma;t) = \pm\frac{e^{i\lambda_n^{1/\alpha}t}}{\alpha} - E_\alpha(\lambda_n i^\alpha t^\alpha). \tag{2.36}$$

En le remplaçant, nous écrivons la partie dépendant du temps de la fonction d'onde comme

$$T(t) = T(0)\left[\frac{e^{i\lambda_n^{1/\alpha}t}}{\alpha} \mp \frac{e^{i\lambda_n^{1/\alpha}t}}{\alpha} + E_\alpha\left(\lambda_n i^\alpha t^\alpha\right)\right]. \tag{2.37}$$

Pour être cohérent avec le résultat robuste de l'équation de Schrödinger de temps fractionnaire, nous choisissons le signe moins. Ainsi le temps une partie dépendante de la fonction d'onde est à nouveau obtenue comme

$$T(t) = T(0)E_\alpha\left(\lambda_n i^\alpha t^\alpha\right). \tag{2.38}$$

En développant la fonction Mittag-Leffler sur le côté droit, nous pouvons l'écrire comme

$$E_\alpha\left(\lambda_n i^\alpha t^\alpha\right) = E_\alpha^R(t) + iE_\alpha^I(t)\,, 0 < \alpha < 1,$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\lambda_n^\nu\left[\cos\frac{\nu\alpha\pi}{2}\right]t^{\alpha\nu}}{\Gamma(1+\alpha\nu)} + i\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\lambda_n^\nu\left[\sin\frac{\nu\alpha\pi}{2}\right]t^{\alpha\nu}}{\Gamma(1+\alpha\nu)},$$

Pour $\alpha = 1$, naturellement,$E_\alpha\left(\lambda_n i^\alpha t^\alpha\right)$ devient l'équation d'Euler, c'est-à-dire

$$T_{\alpha=1}(t) = T(0)\left(\cos\lambda_n t + i\sin\lambda_n t\right)$$

$$= T(0)e^{i\lambda_n t},$$

où les valeurs propres,λ_n , proviennent de la solution de la partie espace d'équation de Schrödinger.

On peut aussi l'écrire comme :

$$T(t) = T(0)\left[E_\alpha\left(\lambda_n\cos^{1/\nu}\left(\frac{\nu\alpha\pi}{2}\right)t^\alpha\right) + iE_\alpha\left(\lambda_n\sin^{1/\nu}\left(\frac{\nu\alpha\pi}{2}\right)t^\alpha\right)\right], \tag{2.39}$$

ou, en termes de $H-$fonctions comme

$$T(t)=T(0)\left[\begin{array}{c} H_{1,2}^{1,1}\left(-\lambda_n\cos^{1/\nu}\left(\frac{\nu\alpha\pi}{2}\right)t^{\alpha}\mid \begin{array}{c}(0,1)\\ (0,1),(0,\alpha)\end{array}\right)+ \\ iH_{1,2}^{1,1}\left(-\lambda_n\sin^{1/\nu}\left(\frac{\nu\alpha\pi}{2}\right)t^{\alpha}\mid \begin{array}{c}(0,1)\\ (0,1),(0,\alpha)\end{array}\right)\end{array}\right]. \tag{2.40}$$

Une conséquence importante de ce résultat est que pour l'équation de Schrödinger de temps fractionnaire,

la probabilité totale, $\int_{-\infty}^{+\infty}|\Psi(x,t)|\,dx$,qui est fonction du temps :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}|\Psi(x,t)|^2\,dx &= |T(t)|^2\int_{-\infty}^{+\infty}|X(x)|^2\,dx\\ &= \left[\left|E_{\alpha}^{R}(t)\right|^2+\left|E_{\alpha}^{I}(t)\right|^2\right]\int_{-\infty}^{+\infty}|X(x)|^2\,dx\\ &= \left|E_{\alpha}^{R}(t)\right|^2+\left|E_{\alpha}^{I}(t)\right|^2\end{aligned}$$

n'est pas conservé.La constante de normalisation est fixée par la probabilité totale à $t=0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\Psi(x,0)|^2\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}|X(x)|^2=1.$$

2.2.1 Puit de potentiel

Nous considérons une particule dans un puits de potentiel infini, où

$$V(x)=\begin{cases}0, 0<x<a\\ \infty, ailleurs\end{cases} \tag{2.41}$$

La séparation des variables pour l'équation de schrödinger à temps fractionnaire est :

$$\Psi(x,t) = T(0)E_{\alpha}\left(\lambda_n i^{\alpha} t^{\alpha}\right) X(x) \tag{2.42}$$

où la solution de la partie spatiale

$$D_{\alpha}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = \lambda_n X(x) \tag{2.43}$$

avec les conditions aux limites

$$\Psi(0,t) = \Psi(a,t) = 0 \tag{2.44}$$

Le spectre énergétique est :

$$\lambda_n = -D_{\alpha}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, n = 1, 2, ..., D_{\alpha} > 0, \tag{2.45}$$

et les fonctions d'onde sont :

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \tag{2.46}$$

où nous avons utilisé la condition de normalisation

$$\int \left|\Psi\left(x,0\right)\right|^2 dx = 1,$$

et mettre $T(0) = 1$. Ainsi, la fonction d'onde complète est obtenue comme :

$$\Psi(x,t) = \sqrt{\frac{2}{a}}\left[\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\right] E_{\alpha}\left(\lambda_n i^{\alpha} t^{\alpha}\right) \tag{2.47}$$

Notez que la probabilité totale dépend du temps :

$$\int \left|\Psi\left(x,t\right)\right|^2 dx = \left|E_{\alpha}^{R}\left(t\right)\right|^2 + \left|E_{\alpha}^{I}\left(t\right)\right|^2 \tag{2.48}$$

2.2.2 Les niveaux d'énergie

Le nouveau opérateur énergétique utiliser dans l'équation de Schrödinger à tamps fractionnaire est

$$E = -\frac{\hbar}{i^{\alpha}} \frac{\partial^{\alpha}}{\partial t^{\alpha}}, \tag{2.49}$$

Et pour trouver le spectre énergétique de système, nous évaluons l'intégrale suivant :

$$\begin{aligned} E_n &= -\frac{\hbar}{i^{\alpha}} \int \Psi^{*}(x,t) \frac{\partial^{\alpha}}{\partial t^{\alpha}} \Psi(x,t) dx & (2.50) \\ &= -\hbar \lambda_n \left| E_{\alpha} \left(\lambda_n i^{\alpha} t^{\alpha} \right) \right|^2 \int \left| X(x) \right|^2 dx & (2.51) \\ &= -\hbar \lambda_n \left| E_{\alpha} \left(\lambda_n i^{\alpha} t^{\alpha} \right) \right|^2 & (2.52) \end{aligned}$$

où les énergies du système, sont des fonctions décroissantes du temps :

$$E_n = \frac{\hbar \pi^2 n^2 D_{\alpha}}{a^2} \left[\left| E_{\alpha}^{R}(t) \right|^2 + \left| E_{\alpha}^{I}(t) \right|^2 \right] \tag{2.53}$$

Pour tester ces résultats nous revenons au cas ordinaire (non-fractionnaire), pour cela nous ramenons l'indice de fraction α vers 1, dans l'équation de Schrödinger à tamps fractionnare, bien sur avec $D_{\alpha} = \hbar/2m$. Le spectre inergétique devient :

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2ma^2}, \tag{2.54}$$

d'où l'approche des valeurs propres d'énergie à leurs valeurs habituelles.

2.3 Solution de l'équation de Schrödenger fractionnaire pour la particule libre

Nous considérons maintenant l'équation libre de Schrödinger avec à la fois une fraction dans temps et dans d'espace :

$$\frac{\partial^{\alpha}}{\partial t^{\alpha}}\Psi\left(x,t\right)=\frac{i^{\alpha}}{\hbar}\tilde{D}_{\alpha,\beta}\left(\hbar R_{x}\right)^{\beta}\Psi\left(x,t\right),0<\alpha<1,1<\beta<2. \tag{2.55}$$

L'exécution d'une rotation donne l'équation de Bloch :

$$\frac{\partial^{\alpha}}{\partial t^{\alpha}}\Psi\left(x,t\right)=\frac{1}{\hbar}\tilde{D}_{\alpha,\beta}\hbar^{\beta}R_{x}^{\beta}\Psi\left(x,t\right),0<\alpha<1,1<\beta<2. \tag{2.56}$$

où $\tilde{D}_{\alpha,\beta}=1/2m$. Utilisation des conditions aux limites

$$\Psi\left(x,t\right)=\delta\left(x\right)et\lim_{x\to\pm\infty}\Psi\left(x,t\right)\to 0. \tag{2.57}$$

On prend la transformée de Laplace par rapport au temps et la transformée de Fourier avec respect à l'espace, pour obtenir la transformée de Fourier-Laplace de la solution [13]. Écrire l'inverse transformer puis effectuer une rotation inverse de la mèche, donne la fonction d'onde en intégrale de cette forme :

$$\Psi\left(x,t\right)=\frac{\Psi_{0}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ikx}E_{\alpha}\left(-\frac{i^{\alpha}}{\hbar}\tilde{D}_{\alpha,\beta}\hbar^{\beta}k^{\beta}t^{\beta}\right)dk. \tag{2.58}$$

où $E(z)$est la fonction de Mittag-Leffler . On peut aussi écrire $\Psi(x,t)$ comme

$$\Psi\left(x,t\right)=\frac{\Psi_{0}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos kxE_{\alpha}\left(-\frac{i^{\alpha}}{\hbar}\tilde{D}_{\alpha,\beta}\hbar^{\beta}k^{\beta}t^{\beta}\right)dk, \tag{2.59}$$

Cette fonction d'onde satisfait à la fois l'équation fractionnaire de Schrodinger dans le temps et dans l'espace :

$$\frac{\partial^{\alpha}}{\partial t^{\alpha}}\Psi\left(x,t\right)=\frac{i^{\alpha}}{\hbar}\tilde{D}_{\alpha,\beta}\hbar^{\beta}R_{x}^{\beta}\Psi\left(x,t\right),0<\alpha<1,1<\beta<2. \tag{2.60}$$

En termes de fonctions H, peut s'écrire

$$\Psi\left(x,t\right)=\frac{\Psi_{0}}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos kxH_{1,2}^{1,1}\left(-\frac{i^{\alpha}}{\hbar}\tilde{D}_{\alpha,\beta}\hbar^{\beta}k^{\beta}t^{\beta}\mid\begin{array}{c}(0,1)\\(0,1),(0,\alpha)\end{array}\right)dk, \tag{2.61}$$

qui, après évaluation de l'intégrale, donne

$$\Psi\left(x,t\right)=\frac{\Psi_{0}}{\sqrt{\pi}\left|x\right|}H_{2,3}^{1,2}\left(\tilde{D}_{\alpha,\beta}\hbar^{\beta}t^{\beta}\left(\frac{2}{\left|x\right|}\right)^{\beta}\mid\begin{array}{c}(1/2,\beta/2),(0,1),(0,\beta/2)\\(0,1),(0,\alpha)\end{array}\right). \tag{2.62}$$

Pour déterminer Ψ_0, la fonction d'onde finale doit être normalisée comme

$$\int\left|\Psi\left(x,0\right)\right|^{2}dx=1.$$

Cas pour $\beta=2$, la solution de l'équation de Schrödinger à temps fractionnaire pour la particule libre est :

$$\begin{aligned}\Psi\left(x,t\right)&=\frac{\Psi_{0}}{\sqrt{\pi}\left|x\right|}H_{2,3}^{1,2}\left(\frac{4i^{\alpha}\tilde{D}_{\alpha}t^{\alpha}}{\left|x\right|^{2}}\mid\begin{array}{c}(1/2,1),(0,1),(0,1)\\(0,1),(0,\alpha)\end{array}\right),\\D_{\alpha}&=\tilde{D}_{\alpha,2}\hbar,\end{aligned} \tag{2.63}$$

qui peut également être :

$$\Psi\left(x,t\right)=\frac{\Psi_{0}}{\sqrt{\pi}\left|x\right|}H_{1,2}^{2,0}\left(\frac{\left|x\right|^{2}}{4i^{\alpha}\tilde{D}_{\alpha}t^{\alpha}}\mid\begin{array}{c}(1,\alpha)\\(1/2,1),(1,1)\end{array}\right), \tag{2.64}$$

où pour

$$\Psi\left(x,t\right)=\frac{\Psi_0}{|x|}H_{1,1}^{1,0}\left(\frac{|x|^2}{i^\alpha\tilde{D}_\alpha t^\alpha}\mid\begin{array}{c}(1,\alpha)\\(1,2)\end{array}\right), \tag{2.65}$$

Dans la limite de $\alpha\to 1$, cela devient

$$\Psi\left(x,t\right)=\frac{\Psi_0}{\left(4i^\alpha D_{\alpha=1}t\right)^{1/2}}\exp\left(-\frac{|x|^2}{4i^\alpha D_{\alpha=1}t}\right), \tag{2.66}$$

avec $D_{\alpha=1}=\hbar/2m$.

Cas $\alpha=1$, nous obtenons la fonction d'onde comme

$$\Psi\left(x,t\right)=\frac{\Psi_0}{\sqrt{\pi}\,|x|}H_{3,2}^{1,2}\left(\frac{i}{\hbar}D_\beta\hbar^\beta t\left(\frac{2}{|x|}\right)^\beta\mid\begin{array}{c}(1/2,\beta/2),(0,1),(0,\beta/2)\\(0,1),(0,\alpha)\end{array}\right), \tag{2.67}$$

qui satisfait

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}\Psi\left(x,t\right)=-D_\beta\hbar^\beta R_x^\beta\Psi\left(x,t\right),1<\beta<2. \tag{2.68}$$

où

$$\tilde{D}_{1,\beta}=D_\beta.$$

Cette solution a également été donnée par Guo et Hu[19] sous la forme :

$$\Psi\left(x,t\right)=\frac{\pi\Psi_0}{\beta\,|x|}H_{2,2}^{1,1}\left(\frac{1}{\hbar}\left(\frac{\hbar}{iD_\beta t}\right)^{1/\beta}|x|\mid\begin{array}{c}(1,1/\beta),(1,1/2)\\(1,1),(1,1/2)\end{array}\right). \tag{2.69}$$

2.4 Conclusion

L'équation de Schrödinger fractionnaire est une équation fondamentale de la mécanique quantique fractionnaire. dans ce chapitre nous avons étudier l'équation de Schrödinger du temps fractionnaire au points de vu de Naber[15]. qui a discuté de l'équation de Schrödinger de temps fractionnaire, développant une solution en termes d'intégrale avec une décomposition supposée dépendance du temps. Après avoir évalué cette intégrale via le langage des fonctions H, nous avons reconsidéré l'équation fractionnaire de Schrödinger. En séparant la fonction de Mittag-Leffler avec un argument imaginaire en ses parties réelle et imaginaire, nous avons obtenu la dépendance temporelle générale de la fonction d'onde en coordonnées séparables.

Nous avons aussi traitée le problème d'une particule dans un puits de potentiel et en obtient la fonction d'onde fractionnaire en termes de fonctions de Mittag-Leffler, avec les niveaux d'énergies.

Pour l'équation de Schrödenger fractionnaire dépant de l'éspace et le temps, nous donnons la solution des particules libres en termes de fonctions H, qui dans les limites appropriées reproduit les solutions précédentes.

Les solutions que nous donnons pour la particule libre sont en coordonnées générales.

Conclusion générale

L'objet de ce mémoire est d'étudier la généralisation de la mécanique quantique au monde fractionnaire, par l'intermédiaire de l'équation de Schrödinger fractionnaire, lorsqu'on va appliquer l'opérateur fractionnaire sur l'équation fondamental de la mécanique quantique.

Dans le premier chapitre, nous avons présenté des notions de base qui nous semblent utiles pour la compréhension du calcul fractionnaire. L'outil nécessaire utilisé dans la résolution des équations différentielles aux dérivées fractionnaires, comme les transformations intégrales (transformation Fourier, Laplace...). En finalise ce chapitre avec la représentation de la fonction de Fox H qui génère la majorité des solutions pour ces équations différentielles, avec quelques propriétés de cette fonction qu'elles sont nécessaire dans le développement de deuxième chapitres.

Dans le deuxième chapitre, nous avons étudier l'équation de Schrödinger-temps fractionnaire, lorsque on utilisée la méthode de séparation des variable pour trouver le partie temporelles dans l'équation de Schrödinger fractionnaire, on développant le problème de la particule dans une boite pour trouvé les fonctions d'ondes associées et le spectre énergétique du système, par la suite nous avons abordé l'équations de Schrödinger fractionnaire, où la fraction dans l'espace et le temps, en finalise ce travail avec une application sur la particule libre.

Bibliographie

[1] B. Ross, The Development of Fractional Calculus 1695-1900, Historia Math 4 : 75-89, 1977.

[2] Dubois, François, Ana Cristina Galucio, and Nelly Point. "Introduction à la dérivation fractionnaire-Théorie et Applications." (2010).

[3] K.B. Oldham and J. Spanier, The Fractional Calculus (Dover, 1974).

[4] S.S. Bayin, Mathematical Methods in Science and Engineering (Wiley, 2006)

[5] M. Naber, J. Math. Phys., 45, 3339 (2004).

[6] Jianping Dong and Mingyu Xu, Somme solutions to the space fractional schrödinger using momentum representation method, 2007.

[7] S.Selcuk Bayin, Fox's H-Functions and the Time Fractional Schödinger Equation (july26,2011).

[8] George E. Andrews, Richard Askey, and Ranjan Roy, Special functions, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 71, Cambridge University Press, Cambridge, 1999. MR 1688958 (2000g :33001)

George B. Arfken and Hans J. Weber, Mathematical methods for physicists, fifth ed., Harcourt/Academic Press, Burlington, MA, 2001. MR 1810939 (2001j :00004)

[9] Laskin, Nikolai (2000). "Fractional quantum mechanics and Lévy path integrals". Physics Letters A. 268 (4–6) : 298–305.

[10] R.S.Miller,B.Ross,Introduction to the Fractional calculus and Fractional Défferntiel Equation, John Wiley.N.Y.1993.

[11] Davies, Brian (2002), Integral transforms and their applications (Third ed.), New York : Springer, ISBN 978-0-387-95314-4

[12] J. Dong and M. Xu, J. Math. Anal. Appl. 344,1005 (2008).

[13] A.M.A. El-Sayed and M. Gaber, EJTP 3, 81 (2006).

[14] A. M. Mathai and R. K. Saxena, The H-Function with Applications in Statistics and other Disciplines (Wiley Eastern, New Delhi, 1978).

[15] M. Naber, J. Math. Phys. 45, 3339 (2004).

[16] S.Selcuk Bayin, Fox's H-Functions and the Time Fractional Schödinger Equation (july26,2011).

[17] N. Laskin, Phys. Rev. E 62, 3135 (2000).

[18] Simon, Thomas. "Fonctions de Mittag–Leffler et processus de Lévy stables sans sauts négatifs." Expositiones Mathematicae 28.3 (2010) : 290-298.

[19] X. Guo and M. Xu, J. of Math. Phys. 47, 082104 (2006).

الملخص

يركز هذا البحث على دراسة وإيجاد حل لمعادلة شرود نغر للوقت الكسري.

قدمنا فيه نبذة عن الحساب الكسري الذي يحتوي على تقريب لتشن كوب وتقريب ريمان ليوبيل مع امثلة وخصائص ثم درسنا تحويل فوري وتحويل لبلاس للمشتقات الكسرية لريمان ليوبيل، وأيضا عرفنا معادلة اش لفوكس.

وبعد ذلك درسنا معادلة شرود نجر للوقت الكسري ووجدنا دالة الموجة المرتبطة بالزمن ثم عالجنا مشكلة الجسيم في صندوق لإيجاد وظائف الموجة المرتبطة وطيف الطاقة للنظام و. في النهاية قمنا بحل معادلة شرود نغر اعتمادًا على المكان والزمان للجسيم الحر.

<u>كلمات مفتاحية</u> :

الحساب الكسري، معادلة اش لفوكس، معادلة شرود نغر للوقت الكسري.

Abstract

In this work we introduce the fractional calculus wichs contains the approach of Letnikov and the approach of Riemann Liouville with examples and properties. After studying the Laplace transform and the Fourier transformation for the fractional derivative as defined Riemann Liouville, and we define the Fox's H-Functions.

Next, we had to the representation of the time fractional Schrödinger equation and found the time-dependent wave function then we treated the problem of the particle in a box to find the wave functions and the energy spectrum of the system. At the end, we resolved the Schrödinger equation depending on space and time for the free particle.

<u>Key words:</u>

Fractional derivatives, Fox's H-Functions, Time Fractional Schrödinger Equation.

Résumé :

Le présent mémoire port sur l’étude et la résolution de l’équation de Schrödinger de temps fractionnaire.

Nous avons présenté des Outils de base qu’on a besoin dans le travail. On a rappelé les différentes approches du calcul fractionnaire (approche de Grünwald-Letnikov, approche de Riemann-Liouville) et la transformation de Laplace et la transformation de Fourier pour la dérivée fractionnaire au sens de Riemann Liouville, Après on a définir la fonction H de Fox fractionnaire.

En suite on a étudié la fonction de Schrödinger de temps fractionnaire et trouvé la fonction d'onde qui dépend de temps puis on a traité le problème de la particule dans une boite pour trouver les fonctions d'ondes associées et le spectre énergétique du système. A la fin on a résolu l’équation de Schrödinger dépant de l'espace et le temps pour la particule libre.

Mots clés :

Dérivé fractionnaire, Fonctions H de Fox, Equation de Schrödinger de temps fractionnaire.