dre........../F.S.S.A/UAMOB/2017

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE AKLI MOHAND OULHADJ -BOUIRA

Faculté des Sciences et des Sciences Appliquées
Département de Mathématiques

Mémoire de fin de cycle

Présenté par :
GRINE Khedidja
MESSAOUDI Nour El Houda

En vue de l'obtention du diplôme de **Master** en **:**

Domaine : Mathématiques - Informatique
Filière : MATHEMATIQUES
Spécialité : Recherche Opérationnelle

Thème :

Application de la méthode adaptée au problème de programmation linéaire avec des contraintes bornées

Devant le jury composé de :

Mr YOUSFI	Khelifa	MAA	UAMOB	Président
Mme OUIDJA	Daya	MAA	UAMOB	Encadreur
Mr AKKOUCHE	Abderrahmane	MCB	UAMOB	Examinateur
Mr DEMMOUCHE	Nacer	MAA	UAMOB	Examinateur

Année Universitaire 2017/2018

Résumé
On s'intéresse ici à l'application d'une méthode de résolution de problème de programmation linéaire avec contraintes bornées ; cette méthode qui à la fois précise et rapide , fait partie des méthodes dites "directes" . Il s'agit de la méthode adaptée . cette méthode est constituée de deux étapes importantes : changement du plan et changement du support.

Mots clés : programmation linéaire , méthode adaptée , contraintes bornées.

Abstract
We are interested here in the study of resolution of linear programming problem with bounded constraints .This method ,which is pricised and fast at the same time and is part of directe methods . It's the adapted method . This method consists of two important steps : plan change and support change .

Key words : linear programming , adapted methode , bounded constrants .

Remerciements

Nous remercions tout d'abord **Allah** le tout puissant de m'avoir donné le courage et la patience afin de mener à réaliser ce modeste travail.

Nos sincères remerciement et notre profonde gratitude à notre promotrice **Mme OUIDJA Daya**, pour nous avoir dirigé, orienté, soutenu et dont les compétences intellectuelles, l'expérience, la modestie, la patience et la disponibilité ont grandement contribué à l'aboutissement de ce travail.

Nous remercions également les membres du jury **Mr YOUSFI Khelifa** le président, **Mr AKKOUCHE Abderrahmane** l'examinateur et **Mr DEMMOUCHE Nacer** l'examinateur d'avoir accepter de juger notre travail.

Un grand merci à nos parents, notre familles, les personnes les plus proches, pour leur encouragements et leurs soutiens. Sans oublier de remercier les collègues pour tout les beau moment qu'on a passée ensemble.

Finalement, nos remerciements vont à tous ceux qui ont contribué d'une quelconque manière à l'aboutissement de ce travail.

Table des matières

Introduction générale

La programmation mathématique est une branche de l'optimisation qui s'occupe de la minimisation ou de la maximisation sous contraintes d'une fonction à plusieurs variables, schéma très général s'appliquant à de nombreuses situations pratiques dans beaucoup de domaines (minimisation de coûts, de durées, etc.), et se propose pour objet l'étude et la mise en œuvre des algorithmes de résolution.
La présence du terme "programmation" dans le nom donné à cette discipline peut s'expliquer historiquement par le fait que les premières recherches et les premières applications se sont développées dans le contexte de l'économie et de la recherche opérationnelle.

La programmation linéaire constitue un domaine de la programmation mathématique le plus étudié. Elle concerne l'optimisation d'un programme mathématique où la fonction objectif et les fonctions définissant les contraintes sont linéaires.

Beaucoup de problèmes réels de recherche opérationnelle peuvent être modélisé par un problème linéaire. Ceci entraîne une augmentation de la taille du problème pour l'écrire sous forme standard et le résoudre par la méthode du simplexe qui est inventé à partir de l'année 1947 par George Danzig [3] à une complexité au moyenne polynomial en face à d'autre algorithmes pour la programmation linéaire qui ont une complexité polynomiale, citons par exemple la méthode adaptée.

Dans la plupart des problèmes pratiques, les variables sont bornées. Une composante x_j est bornée inférieurement par d_{1j} et supérieurement par d_{2j}, où $d_{1j} < d_{2j}$. Si on note d_1 et d_2 les vecteurs borne inférieure et supérieure respectivement, on obtient les contraintes dites simples (où directes) suivantes $d_1 \leq x \leq d_2$. La plus simple manière de traiter ces contraintes, consiste à introduire des variables d'écarts y_1 et y_2, on obtient ainsi les contraintes $x + y_1 = d_2$ et $x + y_2 = d_1$. Dans ce cas le nombre de contraintes d'un problème de programmation linéaire à variables bornées :

$$(P) : \begin{cases} c'x & \longrightarrow max \\ Ax = b & \\ d_1 \leq x \leq d_2 & \end{cases}$$

tel que : les contraintes sont de taille m et les variables sont de taille n.
Pour cela les contraintes passent de m à $m + 2n$, et le nombre de variables de n à $3n$, il est clair que la taille du problème (complexité) augmente considérablement si les contraintes simples sont transformées en introduisant des variables d'écart.

Une méthode adaptée du simplexe pour la résolution d'un problème de programmation linéaire à variables bornée, sans introduire de variables d'écart, est la méthode dite adaptée qui a été proposée par R.Gabassov et F.M .Kirrillov durant les année 80 [5, 6]. L'avantage de celle-ci est une méthode de points intérieurs, où on plonge dans le polydére pour aller plus vite vers le sommet optimal, elle permet aussi l'obtention d'une solution approchée et résout des problèmes de contrôle optimal. La complexité de cette méthode est exponentiel.

La méthode adaptée est une méthode de point intérieur (le plan et le support sont choisis indépendamment). Elle nous permet aussi d'avoir une solution approchée.
L'itération de l'algorithme se fait en deux procédures :

- Changement du plan
- Changement du support

Au début de son invention, elle a été appliquée à différents types de problèmes de programmation mathématique[5], par la suite à des problèmes de contrôle optimal et problème de programmation linéaire.

Résolution d'un modèle de programmation linéaire à l'aide de l'algorithme adapté et la détermination des valeurs marginales ressources sont deux aspects importants de cet outil puissant qu'est la programmation linéaire pour le gestionnaire.

Le présent travail est réparti en trois chapitres précédés d'une introduction générale avec des exemples d'applications de la méthode adaptée :

Dans le premier chapitre, on a proposé des notions principales et la méthode du simplexe pour résoudre un problème de programmation linéaire .

Dans le deuxième chapitre, on a fait une description de la méthode adaptée pour un problème de programmation linéaire à variable bornées, avec application numérique sur un exemple.

Dans le troisième chapitre, on a appliquées la méthode adaptée au problème de programmation linéaire avec des contraintes bornées par la méthode de point intérieur.

Le mémoire se termine par une conclusion générale et quelques perspectives.

Chapitre 1

Généralités sur la programmation linéaire

1.1 Introduction

L'optimisation est un outil simple pour modéliser des problèmes de décision que soit économique, militaire ou autres. On fait de la programmation linéaire un des champs de recherche les plus actifs au milieu du siècle précédent. Les premiers travaux (1947) sont de George B. Dantzig [3] et ses associés du département des forces de l'air des Etats Unis d'Amérique.

Les problèmes de programmations linéaires sont généralement liés à des problèmes d'allocations de ressources limitées, de la meilleure façon possible, afin de maximiser un profit ou de minimiser un coût. Le terme meilleur fait référence à la possibilité d'avoir un ensemble de décisions possibles qui réalisent la même satisfaction ou le même profit. Ces décisions sont en général le résultat d'un problème mathématique.

Dans ce chapitre, nous donnons quelques notions de la programmation linéaire qui sont nécessaires pour introduire le problème d'optimisation

1.2 Notion de programmation mathématique

1.2.1 Définitions

soit D un domaine de $\mathbb{R}^n$ et $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$

Définition 1.1. un problème mathématique d'optimisation (P) est un problème qui consiste à chercher un élément $x^* \in D$ tel que :

$$f(x^*) \geqslant f(x) \ (ou\ f(x^*) \leqslant f(x)) \, \forall x \in D$$

Définition 1.2. soit (P) un programme mathématique :

- Un point $x \in D$ est appelé solution réalisable de (P)
- Le domaine (D) est appelé domaine des solutions réalisables de (P)
- La solution x^* de (P) est appelée solution optimale de (P)
- La fonction f est appelée fonction objectif de (P)

Remarque 1.1. un programme mathématique (P) est représenté par
la notation suivante :

$$(p) \begin{cases} opt f(x) \\ x \in D \end{cases}$$

$opt f(x)$ peut être minimiser ou maximiser $f(x)$:

$$(p) \begin{cases} Max f(x) & \text{(Pb de maximisation)} \\ x \in D \end{cases}$$

1.3 Définition d'un programme linéaire

Un programme linéaire est un problème d'optimisation mathématique dans lequel :

1) Le domaine D des solutions réalisables est défini par un ensemble d'équations ou d'inéquations linéaires ou les deux à la fois appelées «contraintes».

2) La fonction f dite «fonction objectif» est linéaire.

Notons que les inéquations linéaires strictes sont interdites car elles sont dépourvues de signification physique.

1.4 Formulation d'un programme linéaire

Un modèle est un moyen pour mieux comprendre la réalité d'un phénomène quelconque. Un modèle linéaire est un système d'équations ou d'inéquations appelées contraintes, qui sont linéaires. Et à partir de ces contraintes, on doit optimiser une fonction également linéaire appelée "fonction objectif".

1.4.1 Les conditions de formulation d'un problème de programmation linéaire

La programmation linéaire comme étant un modèle admet des hypothèses (des conditions) que le décideur doit valider avant de pouvoir les utiliser pour modéliser son problème. Ces hypothèses sont :

1) Les variables de décision du problème sont positives

2) Le critère de sélection de la meilleure décision est décrit par une fonction linéaire de ces variables, c'est à dire, que la fonction ne peut pas contenir par exemple un produit croisé de deux de ces variables. La fonction qui représente le critère de sélection est dite fonction objectif (ou fonction économique)

3) Les restrictions relatives aux variables de décision (exemple : limitations des ressources) peuvent être exprimées par un ensemble d'équations linéaires. Ces équations forment l'ensemble des contraintes.

4) Les paramètres du problème en dehors des variables de décisions ont une valeur connue avec certitude

1.4.2 Les étapes de formulation d'un programme linéaire :

Généralement il y a trois étapes à suivre pour pouvoir construire le modèle d'un programme linéaire :

1) Identifier les variables du problème à valeur non connues (variable de décision) et les représenter sous forme symbolique (exp : $x_1,\ y_1$)

2) Identifier les restrictions (les contraintes) du problème et les exprimer par un système d'équations linéaires ou d'inéquations.

3) Identifier l'objectif ou le critère de sélection et le représenter sous une forme linéaire en fonction des variables de décision. Spécifier si le critère de sélection est à maximiser ou à minimiser.

1.4.3 Présentation Théorique

Un programme linéaire consiste à trouver le maximum ou le minimum d'une forme linéaire dite fonction objectif en satisfaisant certaines équations et inégalités dites contraintes. En langage mathématique, on décrira de tels modèles de la manière suivante :

Soient N variables de décision $x_1, x_2, ..., x_N$, l'hypothèse que les variables de décision sont positives implique que $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_N \geq 0$

La fonction objectif est une forme linéaire en fonction des variables de décision de type

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_Nx_N$$

où les coefficients $c_1, ..., c_N$ doivent avoir une valeur bien déterminée (avec certitude) et peuvent être positifs, négatifs ou nuls. Par exemple le coefficient c_i peut représenter un profit unitaire lié à la production d'une unité supplémentaire du bien x_i, ainsi la valeur de z est le profit total lié à la production des différents biens en quantités égales à $x_1, x_2, ..., x_N$.

Supposons que ces variables de décision doivent vérifier un système d'équations linéaires définis par M inégalités

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1N}x_N \geq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2N}x_N \geq b_2$$
$$.$$
$$.$$
$$a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + ... + a_{MN}x_N \geq b_M$$

où les coefficients $a_{1N}, ..., a_{MN}$ et $b_1, ..., b_M$ doivent avoir une valeur bien déterminée (avec certitude) et peuvent être positifs, négatifs ou nuls. Le paramètre b_j représente la quantité de matière première disponible dont le bien x_i utilise une quantité égale à $a_{ij}x_i$

En suivant les étapes de formulation ci-dessus, on peut représenter le PL comme suit :

$$Max \quad c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_Nx_N$$
$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1N}x_N \geq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2N}x_N \geq b_2$$
$$.$$
$$.$$
$$a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + ... + a_{MN}x_N \geq b_M$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_N \geq 0$$

1.5 Les formes d'un programme linéaire

On trouve souvent deux formes de programme linéaire. La forme canonique et la forme standard.

1.5.1 La forme canonique

Un programme linéaire est dit sous forme canonique si :

a)Les contraintes sont sous forme d'inégalités d'infériorité et la fonction objectif est exprimée sous forme de maximisation.

b)Les contraintes sont sous forme d'inégalités de supériorité et la fonction objectif est exprimée sous forme de minimisation.

c)Les contraintes sont sous forme d'inégalités d'infériorité, d'inégalités de supériorité et d'égalités, et la fonction objectif est exprimée sous forme de maximisation ou de minimisation.
C'est-à-dire :

$$(p)\begin{cases} z = c^t x \longrightarrow Max \\ s/c \qquad Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

A : une $m \times n$ matrice
x : n-variables de décision.
b : un m-vecteur colonne
c : n-vecteur ligne de coût
s/c : sous contraintes
On peut obtenir la forme canonique pour n'importe quel programme linéaire à travers des transformations des contraintes.

1.5.2 La forme standard

Un programme linéaire et dit sous forme standard quand les inégalités représentant les contraintes sont transformées en égalités. Ceci s'effectue par l'introduction des variables d'écart pour type de contraintes $(\leq, \geq)$ et variables artificielles pour type de contraintes $(=)$.
"Un problème est sous la forme standard si seulement si contraintes sont toutes des égalités "
C'est-à-dire :

$$(p)\begin{cases} z = c^t x \longrightarrow Max \\ s/c \qquad Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

1.5.3 Forme matricielle

On appelle un système d'équations linéaires, tout système composé de (m) équations à (n) inconnues devaient être vérifiées simultanément et dont l'écriture matricielle est de la forme suivante :

$$Max \;\; ou \;\; Min \quad z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_N x_N$$

Sous contraintes :

$$\begin{bmatrix} a_{11}+a_{12}+.....+a_{1n} \\ a_{21}+a_{22}+.....+a_{2n} \\ .... \\ a_{m1}+a_{m2}+.....+a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \leq \\ = \\ \\ \geq \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .. \\ b_m \end{bmatrix}$$

1.6 Dualité

En programmation linéaire, la dualité est un élément très important. À tout programme linéaire primal, on peut associer un autre programme linéaire dit dual obtenu de la manière suivante :

PRIMALE	DUAL
m contraintes d'infériorité	n contraintes de supériorité
m variables d'activité	m variables d'écart
écriture en ligne	écriture en colonne

Proposition 1.1.

1.*Tout programme linéaire admet un dual*
2.*Soit (P) un programme linéaire (pl) avec*

$$(P) \begin{cases} z(max) = c^t x \\ Ax = b, x \geq 0 \end{cases}$$

Alors le dual de (P) est

$$(P_d) \begin{cases} y'A \leq b, \quad y' \ \textit{quelconque} \\ w(min) = c \end{cases}$$

Exemple

problème primal :

$\max z = x_1 + x_2$

s.c $\quad 2x_1 + x_2 = 5$

$\quad 3x_1 - x_2 = 6$

$\quad x_1, x_2 \geq 0$

problème dual :

$\min w = 5y_1 + 6y_2$

s.c $\quad 2y_1 + 3y_2 \geq 1$

$\quad y_1 - y_2 \geq 1$

$\quad \forall y_1, y_2$

Théorème :

Le problème dual du problème dual est le problème primal.

1.6.1 Importance de la notion de dualité en programmation linéaire

1) La résolution du problème primal (dans un contexte d'entreprise) permet d'obtenir non seulement l'utilisation optimale des ressources mais également l'attribution de valeurs monétaires à ces mêmes ressources (interprétation économique des variables duales).
2) La dualité qui existe entre le primal et le programme dual permet :

− en résolvant le problème primal, d'obtenir également du tableau optimal, la solution optimale au problème dual et inversement.
− d'améliorer éventuellement le processus itératif de résolution en résolvant l'un ou l'autre des problèmes, selon la structure du primal ou du dual.

3) La théorie de la dualité permet d'établir d'autres algorithmes de résolution comme l'algorithme dual du simplexe et conduit à un résultat de grande portée théorique et pratique : le théorème de dualité.

1.7 Notions de base et solution de base d'un programme linéaire

Soient
A : une m $\times$ n matrice
b : un m−vecteur colonne
c : un n−vecteur ligne

Définition 1.3. On appelle rang de la matrice A (noté rgA) le nombre maximum de vecteur colonnes (ou de lignes) linéairement indépendants de A.

Proposition 1.2. *Soit A une $m\times n$ matrice, $rgA = r$ si et seulement s'il existe au moins une sous matrice carrée de A d'ordre r régulière (inversible) et tous les sous matrices carrées de A d'ordre strictement supérieur à r ont un déterminant nul.*

Définition 1.4. Une $m \times n$ matrice A est dite de plein rang si $rgA = m$.
On considère le programme linéaire (pl) suivant écrit sous forme canonique

$$(p)\begin{cases} cx = Z(min) \\ Ax = b, \quad x \geq 0 \end{cases}$$

tel que le système linéaire $Ax = b$ soit de plein rang.

Définition 1.5. On appelle base du programme linéaire (P) ou du système $Ax = b$ un ensemble $J \subset \{1, ..., n\}$ d'indices de colonnes tel que A^J soit une matrice carrée régulière (inversible)

Définition 1.6. Soit J une base de (P)
La matrice A^J est la matrice de base associé à J

Les indices de J (resp. les colonnes de a_j, resp les variables x_j) sont de base si $j \in J_B$ et hors base si $j \notin J_B$

Définition 1.7. La solution

$$(p_c)\begin{cases} x_j = A^{J-1}b \\ x_j = 0 \end{cases}$$

est appelée solution de base associé à la base J

Remarque 1.2. Tout programme linéaire peut être écrit sous forme canonique par rapport à une base .

Définition 1.8. 1. Une base J de (P) est dite réalisable si la solution de base associée à J vérifie $x_j \geq 0$

2. Une solution de base associée à une base réalisable est appelée solution de base réalisable.

1.8 Méthodes de résolution des programmes linéaires

Les problèmes d'application de la programmation linéaire sont, en pratique, constitués de plusieurs variables de décision dont la résolution nécessite l'utilisation de méthodes appropriées telles que la méthode du simplexe, ou la méthode graphique (géométrique), méthodes des points intérieurs ..., etc.

Méthode graphique

Cette méthode géométrique permet de résoudre les programmes linéaires à deux variables, en résumé, son principe consiste à suivre la démarche suivante :

1) On dessine les demi-plans des contraintes, on trace la droite frontière et on indique par un petit triangle le demi-plan définie par l'inéquation.

2) On détermine le domaine D définissant l'ensemble des points satisfaisant toutes les contraintes, le domaine D est l'intersection de tous les demi-plans.

3) On trace la droite représentant la fonction objectif et passant par l'origine.

4) On translate la droite de la fonction objectif selon son vecteur normal (ou vecteur gradient).

5) Le point optimal est le dernier point du domaine D que la droite de la fonction objectif touchera lors de son déplacement.

Mais dés que le nombre de variables dépasse 2, la résolution graphique devient très difficile, ce qui la rend peu utilisable en pratique, bien qu'elle permet de suivre, à l'aide de graphiques, le processus de recherche de la solution optimale en permettant une meilleur compréhension des situations qui peuvent se présenter pour des modèles à n variables, $n > 2$.

Ainsi, la résolution graphique ne peut pas s'étendre au cas où le nombre de variables est supérieur à trois, d'où la nécessité d'une méthode numérique comme la méthode du simplexe (méthode dual du simplexe, méthode du deux phases, M-Méthode).

1.8.1 La méthode du simplexe

début

1. écrire (P) sous forme canonique par rapport à la base réalisable J.
2.construire le tableau correspondant à cette écriture.
3.tester si les coefficients de la fonction objectif sont tous positif ou nuls :
3-1) si oui , terminer , J est une base optimale, et la solution de base associe à J est une solution optimale de (P).
3-2) sinon, aller à l'étape 4.
4.choisir la variable à introduite dans la base :
choisir le plus petit coefficient de la fonction objectif, notons ce coefficient par c_k.
5. calculer l'ensemble I :

$$I = i/a_{ik} > 0, i = 1, ..., m$$

5-1) $si\ I = \varnothing$; terminer
le programme linéaire (P) n'a de solution optimales $(Z_{min} = -\infty)$
5-2) $si\ I \neq \varnothing$; aller à l'étape (6)
6. choisir la variable a enlevé de la base :
faire le rapport $\frac{b_i}{a_{ik}},\ i \in I$ puis retenir le minimum et on le note $\frac{b_r}{a_{rk}}$
7. Encadrer le pivot correspondant à l'élément a_{rk}
8. Deviser la ligne pivot ($la\ r^{eme}\ ligne$) par l'élément pivot a_{rk}
9. Calculer les valeurs des autres lignes

$$a_{ij} = a_{ij} - a_{ik}\frac{a_{rj}}{a_{rk}}, j = 1, ..., n$$

et

$$b_i = b_i - a_{rk}\frac{b_r}{a_{rk}}, i = 1, ..., m,\ \ i \neq r$$

10. Actualiser la base J :
$J = J \cup k/r$
aller à étape (3)
Fin d'algorithme

1.9 Application numérique

simplexe primal

soit le problème suivant :

$$(P)\begin{cases} Max\ z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ s.c \quad -x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6 \\ x_1 + x_2 \leq 24 \\ x_1 - x_2 + x_3 \leq 9 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

On écrit le problème sous forme standard :

$$(P)\begin{cases} \quad Max\ z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ s.c \quad -x_1 + 2x_2 + x_3 + e_1 = 6 \\ \quad x_1 + x_2 + e_3 = 24 \\ \quad x_1 - x_2 + x_3 + e_4 = 9 \\ \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

La résolution du l'exemple par la méthode simplexe

Etape 2

	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	b	
e_1	-1	2	1	1	0	0	6	6
e_2	1	1	0	0	1	0	24	-
e_3	1	-1	1	0	0	1	9	9
Δ_j	-2	-1	-3	0	0	0	0	0

$\min \Delta_j = min\{-2, -1, -3\} = -3 \Longrightarrow x_3$ entre en base .
$\min \theta_j = min\{6, 9\} = 6 = \theta_1$
e_1 sort de la base

$$a'_i = a_i = \frac{a_{ij}(a_{ij_1})}{a_{j_0 j_0}}$$

	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	b	θ
x_3	-1	2	1	1	0	0	6	-
e_2	1	1	0	0	1	0	24	24
e_3	2	-3	0	-1	0	1	3	3/2
Δ_j	-5	5	0	3	0	0	18	

	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	b	θ
x_3	0	1/2	1	1/2	0	1/2	15/2	15
e_2	0	5/2	0	1/2	1	-1/2	45/2	9
x_1	1	-3/2	0	-1/2	0	1/2	3/2	-
Δ_j	0	-5/2	0	1/2	0	5/2	51/2	

	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	b
x_3	0	0	1	2/5	-1/5	3/5	3
x_2	0	1	0	1/5	2/5	-1/5	9
x_1	1	0	0	-1/5	3/5	1/5	15
Δ_j	0	0	0	1	1	2	48

$\forall j \in J_H = \{1, 2, 3\}, \Delta_j > 0$
Solution de Bas réalisable optimale (ligne $z \geq 0$)

$$x_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 15 \end{pmatrix}, \ x_H = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } z^* = 48$$

simplexe dual :

soit le problème suivant :

$$(P2) \begin{cases} \min z = 90x_1 + 120x_2 + 180x_3 \\ s.c \quad 2x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 4 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 \geq 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

On écrit le problème sous forme standard :

$$(P2) \begin{cases} \max z' = -90x_1 - 120x_2 - 180x_3 \\ s.c \quad -2x_1 - x_2 - 4x_3 + e_1 = -3 \\ -3x_1 - 2x_2 - x_3 + e_2 = -4 \\ -x_1 - 3x_2 + 3x_3 + e_3 = -1 \\ x_1, x_2, x_3, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

La résolution du l'exemple par la méthode dual simplexe

	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	X_B
e_1	-2	-1	-4	1	0	0	-3
e_2	-3	-2	-1	0	1	0	-
e_3	-1	3	3	0	0	1	-1
δ	90	120	180	0	0	0	0
σ	30	60	180				

Les composantes du pseudo plan X_B, ne sont pas toutes positives, donc le critère d'optimalité n'est pas vérifié.
On a $X_2 = -4 = \min\limits_{X_j < 0, j \in J_B} X_j$, donc X_2 sort de la base

	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	X_B
e_1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{-10}{3}$	1	$\frac{-2}{3}$	0	$\frac{-1}{3}$
x_1	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{-1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$
e_3	0	$\frac{11}{13}$	$\frac{10}{13}$	0	$\frac{-1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$
δ	0	60	150	0	30	0	-120
σ			45		45		

	x_1	x_2	x_3	e_1	e_2	e_3	X_B
x_3	0	$\frac{-1}{10}$	1	$\frac{-3}{10}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{10}$
x_1	1	$\frac{7}{10}$	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{-2}{5}$	0	$\frac{13}{10}$
e_3	0	4	0	0	-1	1	0
δ	0	75	0	45	0	0	-135

Ici toutes les composants de X_B sont positives donc X^*=$(x_1^* = \frac{13}{10}, x_2^* = 0)$ est une solution optimale du problème (p2), et $Z^0 = -135$

Chapitre 2

Méthode de point intérieur (adaptée)

2.1 Introduction

On présente dans ce chapitre, une méthode directe dite : Méthode adaptée. Elle a été développée par un professeur Russe R.GABASOV et F.M.Kirrillov durant les années 70-80 [5, 6]. C'est une méthode de point intérieur qui permet de résoudre un problème de programmation linéaire à variables bornées et qui nous permet aussi l'obtention d'une solution approchée.

2.2 Position du problème

Considérons le problème classique de la programmation linéaire suivant :
Maximiser

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = c_1x_1 + ... + c_nx_n \tag{2.1}$$

Sous les contraintes :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2$$

$$.$$

$$.$$

$$.$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m$$

$$d_{11} \leq x_1 \leq d_{21},\ d_{12} \leq x_2 \leq d_{22},\ \ldots\ ,\ d_{1n} \leq x_n \leq d_{2n}$$

La forme matricielle du problème s'écrit :

$$(P_1) : \begin{cases} f(x) = c'x \quad \longrightarrow max \\ Ax = b \\ d_1 \leq x \leq d_2 \end{cases} \tag{2.2}$$

où x,c,d_1,d_2 sont des n-vecteurs réels.
b un m-vecteurs réels.
$A = A[I, J]$ une $m \times n$-matrice.
$I = \{1, ..., m\}$: L'ensemble des indices des lignes de A.
$J = \{1, ..., n\}$: L'ensemble des indices des colonnes de A.
$rangA = m$, $m \leq n$.
c' est le transposé du vecteur c de taille n.

2.2.1 Position du problème dual :

Considérons le problème linéaire suivant le dual de primal (P_1) :

$$\begin{cases} \Phi(u, v, w) = b'u - d_1v + d_2w \quad \longrightarrow min \\ A'u - v + w = c \\ v \geq 0,\ w \geq 0,\ u \in \mathbb{R}^m \end{cases} \tag{2.3}$$

2.3 Définitions

Définition 2.1.

Tout vecteur vérifiant les contraintes du système (2.2) est dit plan réalisable du problème (P_1) :

1. Un plan x^0 est dit optimal si

$$f(x^0) = \max_x f(x).$$

2. Un plan x^ε est dit ε-optimal si

$$f(x^0) - f(x^\varepsilon) \leq \varepsilon$$

($\varepsilon > 0$ réel donné) (x^ε solution approchée).

Définition 2.2. L'ensemble des m indices $J_B \subset J$; $|J_B| = m$ est dit support (appui) du problème (P_1) et la matrice $A_B = A(I, J_B)$ matrice de support (matrice d'appui) si

$$det A_B \neq 0.$$

Exemple 1.

$$(P) : \begin{cases} f(x) = x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 & \longrightarrow max \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 & \\ -x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 5 & \\ -10 \leq x_j \leq 20 & , \ J = 1, ..., 4 \end{cases}$$

On suppose que $x_1 = 1$ *et* $x_2 = 2$ *, Donc :*

$$X = (1, 2, \frac{24}{5}, \frac{2}{5})$$

On prend :

$$J_B = \{2, 4\}, A_B = A(I, J_B) = (a_1, a_2)$$

$$A_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, |A_B| = 1 \neq 0$$

Donc : $J_B = \{2, 4\}$ *est un support du problème* (P)*,* A_B *est la matrice du support* J_B*.*

De là en choisissant un support J_B, tout vecteur $x(J)$ peut s'écrire sous la forme :

$$x(J) = (x(J_B), x(J_H)), \quad J_H = J \setminus J_B \tag{2.4}$$

Où :
$x(J_B)$ est l'ensemble des composantes sur les indices du support.
$x(J_H)$ est l'ensemble des composantes sur les indices hors-support.
De la même manière la matrice A peut être décomposée de la manière suivante :

$$A(I, J) = (A(I, J_B), A(I, J_H)) \tag{2.5}$$

En utilisant cette dernière décomposition le système $Ax = b$ prend la forme :

$$Ax = (A(I, J_B), A(I, J_H)) \cdot (x(J_B), x(J_H)) \tag{2.6}$$

En utilisant cette dernière décomposition le système $Ax = b$ prend la forme :

$$Ax = A(I, J_B) \cdot x(J_B) + A(I, J_H) \cdot x(J_H) = b \tag{2.7}$$

De là comme A_B est inversible, donc on peut calculer les composantes x_B en fonction de x_H :

$$x_B = x(J_B) = A_B^{-1}(b - A_H \cdot x_H) \tag{2.8}$$

Où : $A_H = A(I, J_H)$ et $x_H = x(J_H)$

Définition 2.3. La paire $\{x, J_B\}$ formée du plan x et du support J_B, est appelée *support−plan* (plan d'appui) du problème (P_1).

Définition 2.4. un support plan $\{x, J_B\}$ est dit non-dégénéré si :

$$d_{1j} < x_j < d_{2j}, \quad j \in J_B$$

Exemple 2. *D'après l'exemple précédent :*
On a le plan $x = (1, 2, \frac{24}{5}, \frac{2}{5})$ *et le support* $J_B = \{2, 4\}$ *du problème* (P) *forment un support-plan* $\{x, J_B\}$.

Et $x_j = \{2, \frac{2}{5}\}$, $j \in J_B = \{2, 4\}$ *vérifier*

$$-10 < x_2 < 20$$

et

$$-10 < x_4 < 20$$

Donc : le support-plan est non-dégénérée.

2.4 Accroissement de la fonctionnelle, Critère d'optimalité et de Suboptimalité :

Soit $\{x, J_B\}$ un support-plan non-dégénéré de départ. Construisons les vecteurs suivants :

$$y' = y'(I) = c'_B A_B^{-1} \tag{2.9}$$

$$E' = y'A - c' \tag{2.10}$$

où y' et E' sont appelés respectivement *vecteurs des potentiels et des estimations.*

Remarque. Les composantes de support du vecteur E sont nulles :

$$E_B = E(J_B) = 0.$$

Considérons un autre plan $\bar{x} = x + \Delta x$ et calculons la quantité définissant l'accroissement de la fonctionnelle :

$$\begin{aligned}
\Delta f(x) &= f(\bar{x}) - f(x) \\
&= c'\bar{x} - c'x = c'\Delta x \\
&= c'(J_B) \cdot \Delta x(J_B) + c'(J_H) \cdot \Delta x(J_H) \\
\Delta f(x) &= c'_B \Delta x_B + c'_H \Delta x_H
\end{aligned}$$

Comme $Ax = b$ et $A\bar{x} = b$ alors :

$$A\Delta x = 0 \Longrightarrow A_B \cdot \Delta x_B + A_H \cdot \Delta x_H = 0$$

finalement, on obtient :

$$\Delta x_B = -A_B^{-1} A_H \cdot \Delta x_H$$

En remplaçant Δx_B dans $\Delta f(x)$, on obtient :

$$\Delta f(x) = (-c'_B A_B^{-1} A_H + c'_H) \cdot \Delta x_H = -E'_H \cdot \Delta x_H = -\sum_{j \in J_H} E_j \cdot \Delta x_j \tag{2.11}$$

Comme $\bar{x}$ est un plan admissible alors, l'accroissement Δx vérifie :

$$d_{1j} - x_j \leq \Delta x_j \leq d_{2j} - x_j, \; j \in J_H \tag{2.12}$$

Le maximum de l'accroissement de la fonctionnelles (2.11) sous les contraintes (2.12) est atteint pour :

$$\left\{ \begin{array}{cc} \Delta x_j = d_{1j} - x_j & si \; E_j > 0 \\ \Delta x_j = d_{2j} - x_j & si \; E_j < 0 \\ d_{1j} - x_j \leq \Delta x_j \leq d_{2j} - x_j & si \; E_j = 0 \end{array} \right. , j \in J_H$$

et égal à :

$$\beta = \beta(x, J_B) = \sum_{j \in J_H^+} E_j(x_j - d_{1j}) + \sum_{j \in J_H^-} E_j(x_j - d_{2j}) \tag{2.13}$$

appelé valeur de suboptimalité.

où :

$$J_H^+ = \{j \in J_H / E_j > 0\}, \quad J_H^- = \{j \in J_H / E_j < 0\}$$

de là il en résulte que :

$$0 \leq \Delta f(x) = f(\bar{x}) - f(x) \leq \beta(x, J_B), \quad \forall x \; réalisable$$

et pour $\bar{x} = x^0$, on aura :

$$0 \leq f(x^0) - f(x) \leq \beta(x, J_B)$$

De cette dernière inégalité, on déduit le critère suivant :

Théorème 2.1. *[5](Critère d'optimalité)*
les relations :

$$\left\{\begin{array}{ll} x_j = d_{1j} & si\ E_j \geq 0 \\ x_j = d_{2j} & si\ E_j \leq 0 \quad j \in J_H \\ d_{1j} - x_j \leq \Delta x_j \leq d_{2j} - x_j & si\ E_j = 0 \end{array}\right. \tag{2.14}$$

sont suffisantes et dans le cas de la non dégénérescence, elles sont nécessaires pour l'optimalité du support plan $\{x, J_B\}$.

Preuve.

Condition suffisante : Si les contraintes (2.14) sont vérifiées alors $\beta(x, J_B) = 0$ et comme :

$$\Delta f(x) = f(\bar{x}) - f(x) \leq \beta(x, J_B) = 0$$

Pour tout $\bar{x}$, donc

$$f(\bar{x}) \leq f(x), \forall \bar{x} \Longrightarrow x \text{ est optimal}$$

Condition nécessaire : Soit $\{x, J_B\}$ un support plan optimal non-dégénéré et supposons que les relations (2.14) ne sont pas vérifiées, c'est à dire il existe un indice $j_0 \in J_H$, tel que :

$$E_{j_0} > 0,\ x_{j_0} > d_{1j_0} \ \underline{ou}\ E_{j_0} < 0,\ x_{j_0} < d_{2j_0}$$

Cas 01 : $E_{j_0} > 0,\ x_{j_0} > d_{1j_0},\ j_0 \in J_H$

Construisons un nouveau plan $\bar{x}$ de la manière suivante :

$$\bar{x} = x + \Delta x = x + \theta l$$

θ un réel positif non nul et l est un vecteur (direction).
Il faut trouver l et θ tel que : $A\bar{x} = b$, $d_1 \leq \bar{x} \leq d_2$. Pour cela sur J_H, posons :

$$\Delta x = \left\{\begin{array}{ll} 0 & si\ j \in J_H/j_0 \\ -\theta & si\ j = j_0 \end{array}\right. \quad avec\ \theta > 0$$

$$A\Delta x = 0 \Longrightarrow \Delta x(J_B) = -A_B^{-1}A_H\Delta x(J_H) = \theta A_B^{-1}a_{j_0}$$

$\bar{x}$ vérifie $A\bar{x} = b$ et pour que $\bar{x}$ vérifie $d_1 \leq \bar{x} \leq d_2$, il faut prendre un θ suffisamment petit, d'autant plus que le support plan $\{x, J_B\}$ est non-dégénéré.

En portant $\bar{x} = x + \Delta x = x + \theta l$ dans la forme d'accroissement, on obtient :

$$\Delta f(x) = f(\bar{x}) - f(x) = \theta E_{j_0} l_{j_0} > 0$$

Ce qui contredit l'optimalité de $\{x, J_B\}$.

Cas 02 : $E_{j_0} < 0,\ x_{j_0} < d_{2j_0},\ j_0 \in J_H$

Construisons un nouveau plan $\bar{x}$ de la manière suivante :

$$\bar{x} = x + \Delta x = x + \theta l$$

θ un réel positif non nul et l est un vecteur (direction).

Il faut trouver l et θ tel que : $A\bar{x} = b$, $d_1 \leq \bar{x} \leq d_2$. Pour cela sur J_H, posons :

$$\Delta x = \begin{cases} 0 & si\ j \in J_H/j_0 \\ \theta & si\ j = j_0 \end{cases} \quad avec\ \theta > 0$$

$$A\Delta x = 0 \Longrightarrow \Delta x(J_B) = -A_B^{-1}A_H\Delta x(J_H) = -\theta A_B^{-1}a_{j_0}$$

$\bar{x}$ vérifie $A\bar{x} = b$ et pour que $\bar{x}$ vérifie $d_1 \leq \bar{x} \leq d_2$, il faut prendre un θ suffisamment petit, d'autant plus que le support plan $\{x, J_B\}$ est non-dégénéré.

En portant $\bar{x} = x + \Delta x = x + \theta l$ dans la forme d'accroissement, on obtient :

$$\Delta f(x) = f(\bar{x}) - f(x) = -\theta E_{j_0}l_{j_0} > 0$$

Ce qui contredit l'optimalité de $\{x, J_B\}$.

Théorème 2.2. *[5](Critère de Suboptimalité)*
Soit $\varepsilon > 0$ donné. Pour l'ε-optimalité du plan x, il est nécessaire et suffisant de trouver un tel support J_B, pour lequel la valeur de suboptimalité vérifie l'inégalité suivante :

$$\beta(x, J_B) \leq \varepsilon$$

Preuve.

Condition suffisante :

Soit $\varepsilon > 0$.

On sait que :

$$\Delta f(x) = f(x^0) - f(x) \leq \beta(x, J_B) \leq \varepsilon$$

Pour

$$\beta(x, J_B) \leq \varepsilon \Longrightarrow \Delta f(x) = f(x^0) - f(x) \leq \varepsilon \Longrightarrow x\ est\ \varepsilon\text{-}optimal$$

Condition nécessaire :

Faisons une décomposition de $\beta(x, J_B)$:

$$\begin{aligned}\beta(x, J_B) &= \sum_{j\in J_H^+} E_j(x_j - d_{1j}) + \sum_{j\in J_H^-} E_j(x_j - d_{2j}) \\ &= \sum_{j\in J} E_jx_j - \sum_{j\in J_H^+} E_jd_{1j} - \sum_{j\in J_H^-} E_jd_{2j}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta(x, J_B) &= E(J)x(J) - \sum_{j \in J_H^+} E_j d_{1j} - \sum_{j \in J_H^-} E_j d_{2j} \\
&= (y'A - c')x(J) - \sum_{j \in J_H^+} E_j d_{1j} - \sum_{j \in J_H^-} E_j d_{2j} \\
&= y'Ax - c'x - \sum_{j \in J_H^+} E_j d_{1j} - \sum_{j \in J_H^-} E_j d_{2j} \\
&= y'b - c'x - \sum_{j \in J_H^+} E_j d_{1j} - \sum_{j \in J_H^-} E_j d_{2j}
\end{aligned}$$

Pour cela, construisons le problème dual du problème (P_1) :

$$\left\{ \begin{array}{c} \Phi(\lambda) = b'u - d_1'v + d_2'w \quad \longrightarrow min \\ A'u - v + w = c \\ v \geq 0; \;\; w \geq 0 \end{array} \right.$$

Il est facile de vérifier que le vecteur $\lambda = (u, v, w)$ défini de la manière suivante : $u = y$

$$v_j = E_j, \;\; w_j = 0 \; si \; E_j \geq 0$$

$$v_j = 0, \;\; w_j = -E_j \; si \; E_j \leq 0, \;\; j \in J$$

est un plan dual.

$$\beta = \beta(x, J_B) = \sum_{j \in J} E_j x_j - \sum_{j \in J_H^-} E_j d_{2j} - \sum_{j \in J_H^+} E_j d_{1j}$$

En introduisant le plan dual défini ci-dessus, on obtient :

$$\begin{aligned}
\beta(x, J_B) &= E'x - d_1'v + d_2'w \\
&= y'Ax - c'x - d_1'v + d_2'w \\
&= y'Ax - c'x - d_1'v + d_2'w \\
&= b'y - c'x - d_1'v + d_2'w + c'x_0 - c'x_0 \\
&= (c'x_0 - c'x) + (b'y - d_1'v + d_2'w - c'x_0) \\
&= (c'x_0 - c'x) + (\Phi(\lambda) - \Phi(\lambda_0))
\end{aligned}$$

Donc

$$\beta(x, J_B) = \beta_x + \beta_B$$

Où $\beta_x = (c'x_0 - c'x)$: est appelée, l'écart (mesure) de la non optimalité du plan x, $\beta_B = (\Phi(\lambda) - \Phi(\lambda_0))$: est appelée, l'écart (mesure) de la non optimalité du support (J_B).

Pour un support J_B optimal (λ optimal), on aura :

$$\Phi(\lambda) = \Phi(\lambda^0) \Longrightarrow \beta(x, J_B) = c'x^0 - c'x \leq \varepsilon \Longrightarrow x \; est \; \varepsilon - optimal$$

Remarque 2.1. A partir de l'expression $\beta_B = \Phi(\lambda) - \Phi(\lambda^0)$, on conclut que l'amélioration du support plan $\{x, A_B\}$ peut se faire indépendamment de la et de autre.
Le changement du plan $x \Longrightarrow$ la diminution de β_x
Le changement du support $J_B \Longrightarrow$ la diminution de β_B

1. Si $\beta(x, J_B) = 0$, alors x est optimal.

2. Si $\beta(x, J_B) \leq \varepsilon$, alors x est ε-optimal.

3. Si $\beta(x, J_B) > \varepsilon$, alors on passe à l'itération de l'algorithme (au changement du support-plan $\{x, J_B\}$)

2.5 Itération de l'algorithme :

L'itération de l'algorithme est constituée de deux procédures qui sont le changement du plan et changement du support.

2.5.1 Changement du plan :

Soit $\{x, J_B\}$ un support-plan non dégénéré et $\varepsilon \geq 0$ donné, tel que $\beta(x, J_B) > \varepsilon$.
Le nouveau plan $\bar{x}$ sera construit de la manière suivante : $\bar{x} = x + \theta l$
Où :
l : étant la direction admissible.
θ : (un réel positif non nul) est le pas admissible maximal le long de la direction l, tel que : $f(\bar{x}) \geq f(x)$.
Le vecteur de direction $l = (l(J_B); l(J_H))$ est construit de la manière suivante :
sur J_H :

$$l_j = \begin{cases} d_{1j} - x_j & si\ E_j > 0 \\ d_{2j} - x_j & si\ E_j < 0 \\ 0 & si\ E_j = 0 \end{cases} \tag{2.15}$$

et $l(J_B) = -A_B^{-1} A_H l(J_H)$ pour avoir $A\bar{x} = b$.
Pour que $\bar{x}$ vérifie

$$d_1 \leq \bar{x} \leq d_2$$

il faut calculer :

$$\theta_j = \begin{cases} \frac{d_{2j} - x_j}{l_j} & si\ l_j > 0 \\ \frac{d_{1j} - x_j}{l_j} & si\ l_j < 0 \quad j \in J_B \\ \infty & si\ l_j = 0 \end{cases}$$

$$\theta_{j_0} = \min(\theta_j) \quad pour \quad j \in J_B$$

et

$$\theta_j = 1 \quad pour \quad j \in J_H$$

et le pas maximal sera :

$$\theta^0 = \min(1, \theta_{j_0})$$

De là le nouveau plan sera : $\bar{x} = x + \theta^0 l$ et la valeur de suboptimalité pour le nouveau plan sera :

$$
\begin{aligned}
\beta(\bar{x}, J_B) &= \sum_{j \in J_H^+} E_j(\bar{x}_j - d_{1j}) + \sum_{j \in J_H^-} E_j(\bar{x}_j - d_{2j}) \\
&= \sum_{j \in J_H^+} E_j(\bar{x}_j + \theta^0.l_j - d_{1j}) + \sum_{j \in J_H^-} E_j(\bar{x}_j + \theta^0.l_j - d_{2j}) \\
&= \sum_{j \in J_H^+} E_j(\bar{x}_j - d_{1j}) + \sum_{j \in J_H^-} E_j(\bar{x}_j - d_{2j}) + \theta^0 \sum_{j \in J_H^+} E_j.l_j + \theta^0 \sum_{j \in J_H^-} E_j.l_j \\
\beta(\bar{x}, J_B) &= \beta(x, J_B) + \theta^0 \sum_{j \in J_H} E_j.l_j
\end{aligned}
$$

En remplaçant les l_j donnés par (2.15) :

$$\beta(\bar{x}, J_B) = \beta(x, J_B) - \theta^0 \beta(x, J_B)$$

$$\beta(\bar{x}, J_B) = (1 - \theta^0)\beta(x, J_B)$$

De cette dernière expression on conclut :

1- Si $\beta(\bar{x}, J_B) = 0$, alors $\bar{x}$ est optimal.

2- Si $\beta(\bar{x}, J_B) \leq \varepsilon$, alors $\bar{x}$ est ε-optimal.

3- Si $\beta(\bar{x}, J_B) > \varepsilon$, alors on passe au changement du support $J_B \longrightarrow \bar{J}_B$

2.5.2 Changement du support :

1. **Changement du support à pas court :**

Le changement du support J_B vers $\bar{J}_B$ consiste à changer le vecteur de potentiel y vers $\bar{y}$ ce qui implique de changer le vecteur d'estimation de E vers $\bar{E}$:

$$\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) \leq \beta(\bar{x}, J_B)$$

Pour cela, posons :

$$\bar{E}(J) = E(J) + \sigma_0.t(J) \tag{2.16}$$

$$\bar{y}(J) = y(J) + \sigma_0.t(J) \tag{2.17}$$

où t est la direction de diminution de la fonction duale, σ_0 le pas maximal le long de cette direction. Pour calculer σ_0 et t en utilisant la définition de E et y, on obtient :

$$\bar{E} = \bar{y}.A - c' = (y\prime + \sigma_0.t'(I))^{\cdot} A - c' = E' + \sigma_0.t'(I).A$$

de là
$$t'(J) = t'(I).A(I,J) \Longrightarrow t'(J_B) = t'(I).A(I,J_B) \Longrightarrow t'(I) = t'(J_B).A_B^{-1}$$
ce qui donne :
$$t'(J_H) = t'(J_B).A_B^{-1}.A(I,J_H)$$
Après calcul du plan $\bar{x} = x + \theta^0.l$, le pas θ^0 est donné par

$$\theta^0 = \min(1, \theta_{j_0}) = \theta_{j_0},\ \ j_0 \in J_B$$

On cherchera un indice $j_1 \in J_H$ qui va entrer dans la base à la place de j_0.
Pour cela posons :

$$t'_j = \begin{cases} -sign(l_{j_0}), & si\ j = j_0 \\ 0, & si\ j \in J_B \setminus j_0 \end{cases}$$

$$t'(J_H) = t'(J_B).A_B^{-1}.A(I,J_H)$$

Et calculons :
$$\sigma_0 = \sigma_{j_1} = \min_{j \in J_H}(\sigma_j)$$

$$\sigma_j = \begin{cases} -E_j/t_j, & si\ E_j t_j < 0 \\ 0, & si \begin{cases} E_j = 0, x_j \neq d_{1j}, t_j > 0 \\ E_j = 0, x_j \neq d_{2j}, t_j < 0 \end{cases} j \in J_H \\ \infty, & sinon \end{cases}$$

Le calcul de σ_0 satisfait $\bar{E}_j E_j \geq 0,\ \forall j \in J$.

$\bar{E}(j_1) = 0$. Le nouveau support est : $\bar{J}_B = (J_B \setminus j_0)$

On peut facilement remarquer que la quantité $\beta(\bar{x}, \bar{J}_B)$ est égale à :

$$\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) = \sum_{j \in \bar{J}_H^+} \bar{E}_j(\bar{x}_j - d_{1j}) + \sum_{j \in \bar{J}_H^-} \bar{E}_j(\bar{x}_j - d_{2j})$$

où
$$\bar{J}_H^+ = \{j \in J_H / \bar{E}_j \geq 0\}, \quad \bar{J}_H^- = \{j \in J_H / \bar{E}_j \leq 0\}$$
Sachant la relation (2.16) et sur J_B

$$\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) = \sum_{j \in \bar{J}_H^+} \bar{E}_j(\bar{x}_j - d_{1j}) + \sum_{j \in \bar{J}_H^-} \bar{E}_j(\bar{x}_j - d_{2j}) + \sigma_0(\sum_{j \in \bar{J}_H^+} t_j(\bar{x}_j - d_{1j}) + \sum_{j \in \bar{J}_H^-} t_j(\bar{x}_j - d_{2j}))$$

$$\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) = (1 - \theta^0)\beta(x, J_B) + \sigma_0(\sum_{j \in \bar{J}_H^+} t_j(\bar{x}_j - d_{1j}) + \sum_{j \in \bar{J}_H^-} t_j(\bar{x}_j - d_{2j}))$$

$t.l = 0$ car $A.l = 0$, $(t'(J_B) = t'(I)A(I, J_B))$ et $(t'(J_H) = t'(J_B)A_B^{-1}A(I, J_H))$, de plus par construction tout les composantes de $t'(J_B)$ sont nulles sauf à l'indice j_0.
Posons :

$$\alpha = \alpha_0 = \sum_{j \in J_H^+} t_j(\bar{x}_j - d_{1j}) + \sum_{j \in J_H^-} t_j(\bar{x}_j - d_{2j})$$

$$= -(1-\theta^0) \sum_{j \in J_H} t_j l_j = -(1-\theta^0) t_{j_0} l_{j_0}$$

$$\alpha = \alpha_0 = -(1-\theta) t_{j_0} l_{j_0} = \begin{cases} \bar{x}_{j_0} + l_{j_0} - d_{1j_0} & si\ t_{j_0} = 1 \\ -(\bar{x}_{j_0} + l_{j_0} - d_{2j_0}) & si\ t_{j_0} = -1 \end{cases}$$

Donc :

$$\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) = (1-\theta^0)\beta(x, J_B) - \sigma_0|\alpha_0|$$

Remarque 2.2. L'expression de la vitesse initiale de décroissance de la fonctionnelle Φ (du programme dual du programme initial) est donnée par :

$$\alpha_0 = \lim_{\sigma \longrightarrow 0} \frac{\Phi(\bar{\lambda}) - \Phi(\lambda)}{\sigma}, \quad avec\ \bar{\lambda} = \lambda + \sigma.\partial\lambda$$

cette expression montre que la vitesse de décroissance est α_0

2. **Changement du support à pas long :**

Le changement du support entraîne la diminution de la fonctionnelle du dual.

Coût de la fonctionnelle duale :

Soit $\lambda = (u, v, w)$ une solution réalisable arbitraire du dual. Dans la suite nous considérons que les composants $v,\ w$ sont définis par le vecteur $E = A'y - c$

$$\begin{cases} v_j = E_j, \quad w_j = 0 & si\ E_j \geq 0 \\ v_j = 0, \quad w_j = -E_j & si\ E_j < 0 \end{cases} \quad j \in J$$

parce que sinon la valeur de la fonction du coût dual peut être diminuée sans changer y.
Soit $\lambda(\sigma) = (y(\sigma), v(\sigma), w(\sigma))$ avec $\sigma \geq 0$

$$y(\sigma) = y + \sigma.\Delta y, \quad v(\sigma) = v + \sigma\Delta v, \quad w(\sigma) = w + \sigma\Delta w,$$

est une autre solution réalisable dual avec $v(\sigma), w(\sigma)$ à déterminer par le vecteur

$$E(\sigma) = A'y(\sigma) - c$$

Évidemment,

$$\sigma\Delta E = E(\sigma) - E = \sigma A'\Delta y$$

La valeur de la fonction du coût dual avec $\lambda(\sigma)$:

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda(\sigma)) &= b'y(\sigma) - d_1'.v(\sigma) + d_2'.w(\sigma) \\ &= b'(y+\sigma.\Delta y) - d_1'(v+\sigma.\Delta v) + d_2'(w+\sigma.\Delta w) \\ &= \Phi(\lambda) + \sigma(b'\Delta y - d_1'\Delta v + d_2'\Delta w) \\ &= \Phi(\lambda) + \sigma(\Delta y' Ax - d_1'\Delta v + d_2'\Delta w) \\ &= \Phi(\lambda) + \sigma(\Delta E' x - d_1'\Delta v + d_2'\Delta w)\end{aligned}$$

On peut vérifier facilement l'expression suivante pour $\Phi(\lambda(\sigma))$

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda(\sigma)) = \Phi(\lambda) + \sigma(&\sum_{E_j\le 0, E_j(\sigma)\le 0, j\in J} \Delta E_j(x_j - d_2) + \sum_{E_j\ge 0, E_j(\sigma)\ge 0, j\in J} \Delta E_j(x_j - d_1)) \\ &+ \sum_{E_j\ge 0, E_j(\sigma)<0, j\in J} (E_j(\sigma)(x_j - d_2) - E_j(x_j - d_1)) \\ &+ \sum_{E_j\le 0, E_j(\sigma)>0, j\in J} (E_j(\sigma)(x_j - d_2) - E_j(x_j - d_1))\end{aligned}$$

Analysant la formule au-dessus, nous concluons que la fonction du coût dual est linéaire par morceau le long des directions Δy et ΔE :

$$\Phi(\lambda(\sigma)) = \Phi(\lambda) + \sigma(\sum_{E_j\le 0, E_j(\sigma)\le 0, j\in J} \Delta E_j(x_j - d_2) + \sum_{E_j\ge 0, E_j(\sigma)\ge 0, j\in J} \Delta E_j(x_j - d_1))$$

pour $0 \le \sigma \le \sigma^1,\ \sigma^1 = \max\{\sigma : E_j(\sigma)E_j \ge 0, j \in J\}$

$$\Phi(\lambda(\sigma)) = \Phi(\lambda(\sigma^1 - 0)) + (\sigma - \sigma^1)(\sum_{E_j\le 0, E_j(\sigma^1)=0, j\in J} \Delta E_j(x_j - d_2) + \sum_{E_j\ge 0, E_j(\sigma^1)=0, j\in J} \Delta E_j(x_j - d_1))$$

pour $\sigma^1 \le \sigma \le \sigma^2,\ \sigma^2 = \max\{\sigma \ge \sigma^1 : E_j(\sigma)E_j \ge 0, j \in J\}$
et ainsi de suite.

Donc, le taux initial de diminution de la fonction du coût dual est égal à :

$$\frac{d\Phi(\lambda(\sigma))}{d\sigma}|_{\sigma=0} = \sum_{E_j\le 0, E_j(\sigma^1)\le 0, j\in J} \Delta E_j(x_j - d_2) + \sum_{E_j\ge 0, E_j(\sigma^1)\ge 0, j\in J} \Delta E_j(x_j - d_1)$$

et le taux de diminution reçoit des termes non négatifs quand la composante $E_j + \sigma\Delta E_j$ change son signe :

$$\frac{d\Phi(\lambda(\sigma))}{d\sigma}|_{\sigma=\sigma^*+0} = \frac{d\Phi(\lambda(\sigma))}{d\sigma}|_{\sigma=\sigma^*-0} = \sum_{E_j\le 0, E_j(\sigma^1)=0, j\in J} \Delta E_j(x_j - d_2) + \sum_{E_j\ge 0, E_j(\sigma^1)=0, j\in J} \Delta E_j(x_j - d_1))$$

L'idée du pas long dual consiste à trouver la dimension du pas $\sigma^* \geq 0$ qui minimise la fonction $\Phi(\lambda(\sigma)),\ \sigma \geq 0$.

La méthode adaptée avec un pas long :

La modification de la méthode par rapport à la méthode à pas court consiste à trouver la dimension du pas $\sigma^* \geq 0$ qui minimise la fonction $\Phi(\lambda(\sigma)),\ \sigma \geq 0$..

Calculons les longueurs du pas par les règles :

$$\sigma_j = \begin{cases} -E_j/t_j, & si\ E_jt_j < 0 \\ 0, \quad si \begin{cases} E_j = 0, x_j \neq d_{1j}, t_j > 0 \\ E_j = 0, x_j \neq d_{2j}, t_j < 0 \end{cases} & j \in J_H \\ \infty, & sinon \end{cases}$$

Mettons les pas finis en ordre croissant :

$$\sigma_1 < \sigma_2 < ... < \sigma_q$$

On a la fonction du dual :

$$\Phi(\lambda) = b'u - d_1'v + d_2'w$$

Soit $\bar{\lambda}$ un nouveau plan admissible de problème dual

$$\bar{\lambda} = \lambda(\sigma) = \lambda + \sigma t$$

D'où :

$$y(\sigma) = y + \sigma t, \quad v(\sigma) = v + \sigma t, \quad w(\sigma) = w + \sigma t$$

Calculons la quantité $\Phi(\bar{\lambda})$:

$$\begin{aligned} \Phi(\bar{\lambda}) = \Phi(\lambda(\sigma)) &= b'y(\sigma) - d_1'.v(\sigma) + d_2'.w(\sigma) \\ &= b'(y + \sigma t(I)) - d_1'(v + \sigma t(J)) + d_2'(w + \sigma t(J)) \\ &= b'y - d_1'v + d_2'w + \sigma(b't(I) - d_1't(J) + d_2't(J)) \\ &= \Phi(\lambda) + \sigma[t'(I)b - t'(J)d_1' + t'(J)d_2']) \\ &= \Phi(\lambda) + \sigma[t'(J_B)A_B^{-1}b + t'(J_B)(d_2 - d_1)_B + t'(J_H)(d_2 - d_1)_H] \\ &= \Phi(\lambda) + \sigma[t_BA_B^{-1}b + t_B(d_2 - d_1)_B + t_BA_B^{-1}A_H(d_2 - d_1)_H] \\ &= \Phi(\lambda) + \sigma t_B[A_B^{-1}b + (d_2 - d_1)_B + A_B^{-1}A_H(d_2 - d_1)_H] \end{aligned}$$

Pour chaque σ_i, $i = 1, ...q$, calculons $\Phi(\lambda(\sigma_i))$ qui correspond aux σ_i.

Ordonnons ces $\Phi(\lambda(\sigma_i))$ par ordre croissant :

$$\Phi(\lambda(\sigma_1)), \Phi(\lambda(\sigma_2)), ..., \Phi(\lambda(\sigma_q))$$

l'indice de σ_{q-1} qui correspond à $\Phi(\lambda(\sigma_{q-1}))$ qui doit entrer dans la base, donc $\sigma_* = \sigma_{q-1}$, et cet indice égale à j_1, $\ j_1 \in J_H$

Le nouveau support est : $\bar{J}_B = (J_B \setminus j_0) \cup j_1$.

2.6 Algorithme de la méthode :

Soit $\{x, J_B\}$ un support plan de départ.

i. Calculer :

1. Le vecteur des potentiels : $y' = c'(J_B)A_B^{-1}$

2. le vecteur d'estimation : $E' = y'A - c'$

3. La valeur de suboptimalité :

$$\beta(x, J_B) = \sum_{j \in J_H^+} E_j(x_j - d_{1j}) + \sum_{j \in J_H^-} E_j(x_j - d_{2j})$$

-Si $\beta(x, J_B) = 0$: $\{x, J_B\}$ est optimal, arrêt du processus .
-Si $\beta(x, J_B) \leq \varepsilon$: $\{x, J_B\}$ est ε-optimal, arrêt du processus .
-Si $\beta(x, J_B) > \varepsilon$: aller à (ii).

ii. Changement de plan : $x \rightsquigarrow \bar{x}$

1. Déterminer le vecteur de direction l_j :

$$l_j = \begin{cases} d_{1j} - x_j & si\ E_j > 0 \\ d_{2j} - x_j & si\ E_j < 0 \\ 0 & si\ E_j = 0 \end{cases} \quad j \in J_H$$

$$l(J_B) = -A_B^{-1}.A_H.l(J_H)$$

-En calculant le pas admissible maximal θ_j :

$$\theta_j = \begin{cases} \frac{d_{2j} - x_j}{l_j} & si\ l_j > 0 \\ \frac{d_{1j} - x_j}{l_j} & si\ l_j < 0 \\ \infty & si\ l_j = 0 \end{cases} \quad j \in J_B$$

et $\theta_j = 1$ pour $j \in J_H$.
Le pas maximal $\theta_0 = min_{j \in J_B}\{1, \theta_j\}$

2. Déterminer le vecteur $\bar{x}(J) = x + \theta_0 l$.

3. Calculer la valeur de suboptimalité :

$$\beta(x, J_B) = \sum_{j \in J_H^+} E_j(\bar{x}_j - d_{1j}) + \sum_{j \in J_H^-} E_j(\bar{x}_j - d_{2j})$$

$$\beta(\bar{x}, J_B) = (1 - \theta^0)\beta(x, J_B)$$

-Si $(1-\theta^0)\beta > \varepsilon$: aller à (iii).
-Si $(1-\theta^0)\beta \leq \varepsilon$: $\{\bar{x}, J_B\}$ est ε-optimal, arrêt du processus.
-Si $\theta_0 = 1$: $\{\bar{x}, J_B\}$ est optimal, arrêt du processus.

iii. Changement de support : $J_B \rightsquigarrow \bar{J}_B$

1. Calculer le vecteur de direction t_j :

$$t_j = \begin{cases} +1 & si\ x_{j_0} = d_{1j_0} \\ -1 & si\ x_{j_0} = d_{2j_0} \quad j \in J_B \\ 0 & si\ j \in J_B \setminus j_0 \end{cases}$$

2. Calculer le pas admissible maximal $\sigma_0 = \sigma_{j_1} = \min_{j \in J_H}(\sigma_j)$.

$$\sigma_j = \begin{cases} -E_j/t_j, & si\ E_j t_j < 0 \\ 0, & si \begin{cases} E_j = 0, x_j \neq d_{1j}, t_j > 0 \\ E_j = 0, x_j \neq d_{2j}, t_j < 0 \end{cases} \quad j \in J_H \\ \infty, & sinon \end{cases}$$

3. Le nouveau appui (support) est : $\bar{J}_B = (J_B \setminus j_0) \cup j_1$.

4. Calculer la valeur de suboptimalité :
On calcule :

$$\bar{E}(J) = E(J) + \sigma t(J)$$
$$\bar{y}(I) = y(I) + \sigma t(I)$$

donc

$$\begin{aligned} \beta(\bar{x}, \bar{J}_B) &= \sum_{j \in \bar{J}_H^+} \bar{E}_j(\bar{x}_j - d_{1j}) + \sum_{j \in \bar{J}_H^-} \bar{E}_j(\bar{x}_j - d_{2j}) \\ &= (1-\theta^0)\beta(x, J_B) - \sigma_0|\alpha_0| \end{aligned}$$

avec

$$\alpha_0 = -(1-\theta)t_{j_0} l_{j_0} = \begin{cases} x_{j_0} + l_{j_0} - d_{1j_0} & si\ t_{j_0} = 1 \\ -(x_{j_0} + l_{j_0} - d_{2j_0}) & si\ t_{j_0} = -1 \end{cases}$$

-Si $\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) > \varepsilon$: aller à (i)(on passe à une nouvelle itération).
-Si $\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) \leq \varepsilon$: $\{\bar{x}, \bar{J}_B\}$ est ε-optimal, arrêt du processus.
-Si $\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) = 0$: $\{\bar{x}, \bar{J}_B\}$ est optimal, arrêt du processus.

2.7 Convergence de la méthode :

Définition 2.5. On dit qu'un support plan $\{x, J_B\}$ est très dégénéré si la valeur de la fonctionnelle pour ce support plan n'augmente pas en appliquant l'algorithme ci-dessus.

Théorème 2.3. *[5]*

L'algorithme de la méthode de point intérieur (adaptée) pour la résolution de problème est fini, si à chaque itération on a des support plan non dégénérées.

Preuve.

Supposons que l'algorithme n'est pas fini, comme le nombre de support du problème (P_1) est fini, alors il va exister un nombre infini d'itérations avec le même support.

Soit $\{x, J_B\}$ et $\{y, J_B\}$ deux itérations de même support J_B, par hypothèse on ne rencontre pas de support plan très dégénérée en appliquant l'algorithme, c'est à dire qu'on a soit l'amélioration du plan primal ou satisfaction du critère d'optimalité.

Supposons que le critère d'optimalité n'est pas vérifié alors $y \neq x$ et $c'y > c'x$. Soit l la direction du plan x et θ le pas maximal le long de l, posons $\bar{x} = x + \theta l$, alors on a deux cas :

1. Si $y = \bar{x}$, alors le support J_B doit améliorer obligatoirement ce qui est impossible.

2. Si $y \neq \bar{x}$, alors $c'y > c'\bar{x}$ et comme le support est le même (donc même vecteur d'estimation) en courant $y = x + \Delta x$, $A\Delta x = 0$ alors le maximum de $c'\Delta x = c'\theta l$ et $c'y = c'\bar{x}$ ce qui est impossible.

donc dans le deux cas on aboutit à une contradiction, ce qui preuve que l'algorithme du problème (P_1) est fini.

2.8 Conclusion :

Cette méthode est une méthode itérative, à chaque itération de l'algorithme le transfert $\{x, J_B\} \rightsquigarrow \{\bar{x}, \bar{J}_B\}$ est exécuté d'un support-plan à un autre tel que :

$$\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) \leq \beta(x, J_B)$$

En d'autre, dans chaque itération on change en premier le plan x vers $\bar{x}$, puis on change le support J_B vers $\bar{J}_B$ à la fin de l'itération la valeur de suboptimalité assure l'optimalité du support-plan $\{x, J_B\}$

2.9 Application numérique :

Considérons le problème de la programmation linéaire suivant :
$f(x) = x_1 + 2x_2 \longrightarrow max$
$2x_1 + x_2 \leq 3$
$2x_1 + 3x_2 \geq -1$
$0 \leq x_1 \leq 1.5$
$-1 \leq x_2 \leq 1$

On écrit le problème sous forme standard :
Donc on ajoute les variables d'écart :
$f(x) = x_1 + 2x_2 \longrightarrow max$
$2x_1 + x_2 + x_3 = 3$
$2x_1 + 3x_2 - x_4 = -1$
$0 \leq x_1 \leq 1.5$
$-1 \leq x_2 \leq 1$
Où x_3 et x_4 sont les variables d'écart

Remarque
car $-1 \leq x_2 \leq 1$ donc on a $-x_2 \leq 1$
$0 \leq x_3 = -2x_1 - x_2 + 3 \leq 0 + 1 + 3 = 4 \Longrightarrow 0 \leq x_3 \leq 4$
$-2 \leq x_4 = 2x_1 + 3x_2 + 1 \leq 2 \times 1.5 + 3 \times 1 + 1 = 7 \Longrightarrow -2 \leq x_4 \leq 7$

avec $x' = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $d_1 = (0, -1, 0, 0), d_2 = (1.5, 1, 4, 7)$, $c = (1, 2, 0, 0), b' = (3, -1)$ et

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Appliquant la méthode adaptée :
soit le support-plan initial $(x,\ J_B)$ avec :
$x = (1, 0, 1, 3)$ est le plan initial non dégénéré .
$J_B = \{1, 3\}$ est le support initial

Le plan de départ x est choisit de tel sorte qu'il vérifie la deuxième condition de l'admissibilité $(d_1 \leq x \leq d_2)$ et pour la première condition $(Ax = b)$ sera testée dans le programme.

<u>Première itération</u>
L'ensemble des indices du support est : $J_B = [1, 3]$
L'ensemble des indices du hors-support est : $J_H = [2, 4]$

La matrice de support est :

$$A_B = (a_1, a_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice du support est :
$|A_B| = -2 \neq 0 \Longrightarrow A_B$ est inversible
L'inverse de matrice du support est :
$A_B^{-1} = \dfrac{1}{det A_B}(com A_B)^t$
$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
la matrice de hors-support est :
$A_H = (a_2, a_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$
Le vecteur des potentiel
$y' = c'_B A_B^{-1}$
$c'_B = (c_1, c_3) = (1, 0)$
$y' = (1,0) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
donc $y' = (0, \frac{1}{2})$
Le vecteur des estimation :
$E = y'A - c'$
$E_2 = y'a_2 - c'_2 = (0, \frac{1}{2}) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$
$E_2 = \dfrac{-1}{2}$
$E_4 = y'a_4 - c'_4 = (0, \frac{1}{2}) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 0 = -\frac{1}{2}$
$E_4 = -\dfrac{1}{2}$
$E_B = E(J_B) = 0$ donc $E_1 = E_2 = 0$
Le plan est : $x = (1, 0, 1, 3)$
La valeur de la fonction objectif : $f(x) = 1$.
La valeur de suboptimalité est :

$$\beta(x, J_B) = \sum_{j \in J_H^+} E_j(x_j - d_{1j}) + \sum_{j \in J_H^-} E_j(x_j - d_{2j})$$

$\beta(x, J_B) = E_2(x_2 - d_{21} + E_4(x_4 - d_{24}))$
$\beta(x, J_B) = -\frac{1}{2}(0 - 1) + \frac{-1}{2}(3 - 7) = \frac{5}{2} > \varepsilon$
Passons au changement de plan

changement de plan $x \rightsquigarrow \bar{x} = x + \theta l$
Le vecteur de direction

$l = (l(J_B), l(J_H))$

$$l_j = \begin{cases} d_{1j} - x_j & si\ E_j > 0 \\ d_{2j} - x_j & si\ E_j < 0 \quad j \in J_H \\ 0 & si E_j = 0 \end{cases}$$

$l(J_H) = (l_2, l_4)$
$l_2 = d_{22} - x_2 = 1 - 0 = 1$
$l_4 = d_{24} - x_4 = 7 - 3 = 4$
$l(J_H) = (1; 4)$
$l(J_B) = -A_B^{-1} A_H l(J_H)$

$$l(J_B) = -\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \end{pmatrix}$$

Le vecteur de direction est l$(J_B) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix} = (l_1, l_3)$

$l_j = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 & l_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

Le pas admissible est :

Pour J_H, on prend $\theta = 1$
et pour J_B

$$\theta_j = \begin{cases} \frac{d_{2j} - x_j}{l_j} & si\ l_j > 0 \\ \frac{d_{1j} - x_j}{l_j} & si\ l_j < 0 \quad j \in J_B \\ \infty & si\ l_j = 0 \end{cases}$$

$\theta_1 = \dfrac{d_{21} - x_1}{l_1} = \dfrac{1.5 - 1}{\frac{1}{2}} = 1$
$\theta_3 = \dfrac{d_{13} - x_3}{l_3} = \dfrac{0 - 1}{-2} = \dfrac{1}{2}$
$\theta_{j_0} = min(1, \theta_1, \theta_3) = \dfrac{1}{2} = \theta_3$
donc $j_0 = 3$
$\bar{x_1} = x_1 + \theta_{j_0} l_1 = 1 + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{4}$
$\bar{x_3} = x_3 + \theta_{j_0} l_3 = 1 + \dfrac{1}{2} \times -2 = 0$
$\bar{x_2} = x_2 + l_2 = 0 + 1 = 1$
$\bar{x_4} = x_4 + l_4 = 3 + 4 = 7$
donc le nouveau plan est :
$x \rightsquigarrow \bar{x} = x + \theta l$
$\bar{x} = (\frac{5}{4}, 1, 0, 7)$

La valeur de suboptimalité donnée par :

$\beta(\bar{x}, J_B) = (1 - \theta^0)\beta(x, J_B)$

$\beta(\bar{x}, J_B) = (1 - \frac{1}{2}) \times \frac{5}{2} = \frac{5}{4} > \varepsilon$
on a $\beta(\bar{x}, J_B) > \varepsilon$, alors on passe au deuxième étape, qu'est le changement de support.

Passons au changement de support

On cherche un indice $j_1 \in J_H$ qui va entrer dans la base à la place de $j_0 \in J_B$

Le vecteur de direction $J_B \rightsquigarrow \bar{J}_B$
$\bar{J}_B = (J_B/j_0) \cup j_1 \qquad\qquad j_1 \in J_H$
$i)\underline{sur J_B}$

$$t_j = \begin{cases} +1 & si\ x_{j_0} = d_{1j_0} \\ -1 & si\ x_{j_0} = d_{2j_0} \quad j \in J_B \\ 0 & si\ j \in J_B \setminus j_0 \end{cases}$$

$t(J_B/j_0) = t_1 = 0$
$t_3 = 1$
$ii)$ $\underline{sur J_H}$

$t'(J_H) = t'(J_B).A_B^{-1}.A(I, J_H)$

$t'(J_H) = (t_2, t_4) = (0, 1) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix}$

Le pas admissible Calculons $\sigma_0 = \min\limits_{j \in J_H}(\sigma_j)$

$$\sigma_j = \begin{cases} -E_j/t_j, & si\ E_j t_j < 0 \\ 0, & si \begin{cases} E_j = 0, x_j \neq d_{1j}, t_j > 0 \\ E_j = 0, x_j \neq d_{2j}, t_j < 0 \end{cases} \quad j \in J_H \\ \infty, & sinon \end{cases}$$

On a : $E_2 t_2 = -\frac{1}{2}(-2) = 1 > 0$ et $E_4 t_4 = -\frac{1}{2}(1) = -\frac{1}{2} < 0$
Donc $\sigma_0 = \sigma_4 = -E_4/t_4 = \frac{1}{2} \Longrightarrow J_1 = 4$
Le nouveau support est : $\bar{J}_B = (J_B/j_0) \cup j_1 = [1, 4]$
Le nouveau hors-support est : $J_H = [2, 3]$

Calculons la valeur de suboptimalité :
Le vecteur d'estimation :

$\bar{E}(J) = E(J) + \sigma_0.t(J)$
On a : $\sigma_0 = \frac{1}{2}$ et $t(J) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $E(J) = (E_1, E_2) = (\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2})$
Donc : $\bar{E}(J) = (\frac{-1}{2}\ \ \frac{-1}{2}) + \frac{1}{2}(-2\ \ 1) = (\frac{-1}{2}\ \ \frac{-1}{2}) + (-1\ \ \frac{1}{2}) = (\frac{-3}{2}\ \ 0)$

et on a :
$\bar{E}_2 = \frac{-3}{2}$
$\bar{E}_4 = 0$
$\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) = \sum_{j \in \bar{J}_H^+} \bar{E}_j(\bar{x}_j - d_{1j}) + \sum_{j \in \bar{J}_H^-} \bar{E}_j(\bar{x}_j - d_{2j})$

$\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) = \bar{E}_2(\bar{x}_2 - d_{22})$

$\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) = \frac{-3}{2}(1 - 1) = 0$

d'où le support plan $\{\bar{x}, \bar{J}_B\}$ est optimal.
avec, $\bar{x} = (\frac{5}{4}, 1, 0, 7)$ est le plan optimal
$\bar{J}_B = \{1, 4\}$ est le support optimal
donc on arrête le processus.

et la valeur optimale de la fonction objectif est :

$$f(\bar{x}) = \bar{x}_1 + 2\bar{x}_2 = \frac{5}{4} + 2(1) = \frac{13}{4}$$

Chapitre 3

Application de la méthode adaptée au problème de programmation linéaire avec des contraintes bornées

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on présente une résolution d'un programme linéaire à variable bornée et des contraintes bornées avec la méthode de point intérieur, on l'appelle aussi méthode adaptée avec des contraintes bornées.

3.2 Position du problème

Considérons le problème classique de la programmation linéaire avec contrainte bornées suivant :

Maximiser

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = c_1x_1 + ... + c_nx_n$$

Sous les contraintes :

$$b_{11} \leq a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_{21}$$

$$b_{12} \leq a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leq b_{22}$$

$$.$$

$$.$$

$$.$$

$$b_{1m} \leq a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq b_{2m}$$

$$d_{11} \leq x_1 \leq d_{21},\ d_{12} \leq x_2 \leq d_{22}, ...,\ d_{1n} \leq x_n \leq d_{2n}$$

La forme matricielle du problème est s'écrit :

$$(P_1) : \begin{cases} f(x) = c'x & \longrightarrow max \\ b_1 \leq Ax \leq b_2 \\ d_1 \leq x \leq d_2 \end{cases} \tag{3.1}$$

où x,c,d_1,d_2 sont des n-vecteurs réels.
b_1, b_2 sont des m-vecteurs réels.
$A = A[I, J]$ une $m \times n$-matrice.
$I = \{1, ..., m\}$: L'ensemble des indices des lignes de A.
$J = \{1, ..., n\}$: L'ensemble des indices des colonnes de A.
$rangA = m$, $m \leq n$.
c' est le transposé du vecteur c de taille n.

3.3 Définitions

Définition 3.1.

Tout vecteur vérifiant les contraintes de système (3.1) est dit plan du problème (P_1) :

1. Un plan x^0 est optimal si

$$f(x^0) = \max_x f(x)$$

2. Un plan x^ε est dit ε-optimal si

$$f(x^0) - f(x^\varepsilon) \leq \varepsilon$$

($\varepsilon \geq 0$ réel donné) (x^ε solution approchée).

Définition 3.2. L'ensemble des m indices $J_B \subset J$; $|J_B| = p$ et $I_B \subset I$; $|I_B| = p$ sont dits support du problème (P_1) et la matrice $A_B = A(I_B, J_B)$ matrice de support si

$$detA_B \neq 0.$$

De là en choisissant un support J_B, tout vecteur $x(J)$ peut s'écrire sous la forme :

$$x(J) = (x(J_B), x(J_H)), J_H = J \setminus J_B \tag{3.2}$$

Où :
$x(J_B)$ est l'ensemble des composantes sur les indices du support.
$x(J_H)$ est l'ensemble des composantes sur les indices hors-support.

De la même manière la matrice A peut être décomposée de la manière suivante :

$$A(I, J) = (A(I_B, J_B), A(I_H, J_H)) \tag{3.3}$$

En utilisant cette dernière décomposition le système $b_1 \leq Ax \leq b_2$ prend la forme :

$$Ax = (A(I_B, J_B), A(I_H, J_H)) \cdot (x(J_B), x(J_H)) \tag{3.4}$$

En utilisant cette dernière décomposition le système $b_1 \leq Ax \leq b_2$ prend la forme :

$$b_2 \leq Ax = A(I_B, J_B) \cdot x(J_B) + A(I_H, J_H) \cdot x(J_H) \leq b_2 \tag{3.5}$$

De là comme A_B est inversible, donc on peut calculer les composantes x_B en fonction de x_H :

$$A_B^{-1}(b_1 - A_H \cdot x_H) \leq x_B = x(J_B) \leq A_B^{-1}(b_2 - A_H \cdot x_H) \tag{3.6}$$

Où : $A_H = A(I_H, J_H)$ et $x_H = x(J_H)$

Définition 3.3. La paire $\{x, S_B\}$, avec $S_B = (I_B, J_B)$, formée du plan x et du support S_B, est appelée support-plan du problème (P_1).

Définition 3.4. un support plan $\{x, S_B\}$ est dit non-dégénéré
si :

$$d_{1j} < x_j < d_{2j}, \ j \in J_B$$

et

$$b_{1i} < A(i, J_B)x_j < b_{2i}, \ i \in I_B, \ j \in J_B$$

3.4 Accroissement de la fonctionnelle, critère d'optimalité et de suboptimalité :

Soit $\{x, S_B\}$ un support plan non-dégénéré de départ. Construisons les vecteurs suivants :

$$y' = y'(I_B) = c'_B A_B^{-1} \tag{3.7}$$

$$E' = y'(I_B)A(I_B, J) - c'(J) \tag{3.8}$$

Où : y'et E' sont appelés respectivement vecteurs des potentiels et des estimations.

Remarque. Les composantes de support du vecteur y' sont nulle :

$$y'(I_H) = 0.$$

Considérons un autre plan $\bar{x} = x + \Delta x$ et calculons la quantité définissant l'accroissement de la fonctionnelle :

$$\Delta f(x) = f(\bar{x}) - f(x) = c'\bar{x} - c'x = c'\Delta x$$

$$= c'(J_B) \cdot \Delta x(J_B) + c'(J_H) \cdot \Delta x(J_H)$$
$$= c'_B \Delta x_B + c'_H \Delta x_H$$

Comme $b_1 \leq Ax \leq b_2$ et $b_1 \leq A\bar{x} \leq b_2$ alors :

$$b_1 \leq A\bar{x} \leq b_2$$

$$b_1 \leq Ax + A\Delta x \leq b_2$$
$$b_1 - Ax \leq A\Delta x \leq b_2 - Ax$$
$$b_1(I_B) - A(I_B, J)x(J) \leq A(I_B, J)\Delta x(J) \leq b_2(I_B) - A(I_B, J)x(J)$$
$$b_1(I_H) - A(I_H, J)x(J) \leq A(I_H, J)\Delta x(J) \leq b_2(I_H) - A(I_H, J)x(J)$$

On pose :

$$W_1(I) = b_1 - A(I, J)x(J)$$

et

$$W_2(I) = b_2 - A(I, J)x(J)$$

et

$$Z(I_B) = A(I_B, J)\Delta x(J)$$
$$Z(I_B) = A(I_B, J_B)\Delta x(J_B) + A(I_B, J_H)\Delta x(J_H)$$

ce qui implique que :

$$\Delta x(J_B) = A_B^{-1} Z(I_B) - A_B^{-1} A(I_B, J_H)\Delta x(J_H)$$

D'où :

$$W_1(I_B, J) \leq Z(I_B) \leq W_2(I_B, J)$$

En remplaçant Δx_B dans $\Delta f(x)$, On obtient :

$$\Delta f(x) = c'_B A_B^{-1} Z(I_B) + (c'_B A_B^{-1} A(I_B, J) + c'_H)\Delta x(J_H)$$
$$\Delta f(x) = y'(I_B)Z(I_B) - E(J_H)\Delta x(J_H) \tag{3.9}$$

Comme $\bar{x}$ est un plan admissible alors, l'accroissement Δx vérifie :

$$d_{1j} - x_j \leq \Delta x_j \leq d_{2j} - x_j, j \in J \tag{3.10}$$

Le maximum de l'accroissement de la fonctionnelles (3.9) sous les contraintes (3.10) est atteint pour :

$$\left\{\begin{array}{cc} \Delta x_j = d_{1j} - x_j & si\ E_j > 0 \\ \Delta x_j = d_{2j} - x_j & si\ E_j < 0 \\ \Delta x_j = 0 & si\ E_j = 0 \\ Z_i = W_{1i} & si\ y_i < 0 \\ Z_i = W_{2i} & si\ y_i > 0 \\ Z_i = 0 & si\ y_i = 0 \end{array}\right. i \in I_B,\ j \in J_H$$

et est égale à $\beta = \beta(x, S_B)$ avec :

$$\beta = \beta(x, S_B) = \sum_{i \in I_B^-} y_i W_{1i} + \sum_{i \in I_B^+} y_i W_{2i} + \sum_{j \in J_H^+} E_j(x_j - d_{1j}) + \sum_{j \in J_H^-} E_j(x_j - d_{2j}) \tag{3.11}$$

appelée valeur de suboptimalité.
Où :

$$J_H^+ = \{j \in J_H / E_j \geq 0\}, \quad J_H^- = \{j \in J_H / E_j \leq 0\}$$

$$I_B^+ = \{I \in I_B / y_i \geq 0\}, \quad I_B^- = \{I \in I_B / y_i \leq 0\}$$

De là il en résulte que :

$$\Delta f(x) = f(\bar{x}) - f(x) \leq \beta(x, S_B)$$

et pour $\bar{x} = x^0$ (x^0 un plan optimal), on aura :

$$0 \leq f(x^0) - f(x) \leq \beta(x, S_B)$$

De cette dernière inégalité, on déduit le critère suivant :

3.4.1 Critère d'optimalité :

Théorème 3.1.

Les relations :

$$\left\{\begin{array}{lll} W_{1i}=0 & si\ y_i<0 & \\ W_{2i}=0 & si\ y_i>0 & \\ x_j=d_{1j} & si\ E_j>0 & i\in I_B,\ j\in J_H \\ x_j=d_{2j} & si\ E_j<0 & \\ d_{1j}\leq x_j\leq d_{2j} & si\ Ej=0 & \end{array}\right. \tag{3.12}$$

sont suffisantes et dans le cas de la non dégénérescence, elles sont nécessaires pour l'optimalité du support plan $\{x, S_B\}$.

Preuve.

Condition suffisante :
Si les contraintes (3.12) sont vérifiées alors $\beta(x, S_B) = 0$ et comme :

$$\Delta f(x) = f(\bar{x}) - f(x) \leq \beta(x, S_B) = 0$$

Pour tout $\bar{x}$, donc

$$f(\bar{x}) \leq f(x), \forall \bar{x} \Longrightarrow \ x \ est\ optimal$$

Condition nécessaire :
Soit $\{x, S_B\}$ un support plan optimal non-dégénéré et supposons que les relation (3.12) ne sont pas vérifiées, c'est à dire :

a. pour E_{j_0} la démonstration est analogue au cas du deuxième chapitre.

$$\exists j_0 \in J_H,\ \underline{telque}:\ E_{j_0} > 0,\ x_{j_0} > d_{1j_0}\ \underline{ou}\ E_{j_0} < 0,\ x_{j_0} < d_{2j_0}$$

b. Pour y_{i_0}

$$\exists i_0 \in I_B,\ \underline{telque}:\ y_{i_0} > 0,\ W_{2i_0} > 0\ \underline{ou}\ y_{i_0} < 0,\ W_{1i_0} < 0$$

cas 01 : $y_{i_0} > 0;\ \ W_{2i_0} > 0$

Construisons un nouveau plan $\bar{x}$ de la manière suivante :

$$\bar{x} = x + \Delta x = x + \theta l$$

θ un réel positif non nul et l est un vecteur (direction).
Il faut trouver l et θ tel que :

$$b_1 \leq A\bar{x} \leq b_2,\ d_1 \leq \bar{x} \leq d_2.$$

Pour cela sur J_H, posons :

$$a_{i_0}\Delta x = \begin{cases} 0 & si \;\; i \in I_B \setminus i \\ -\theta & si \;\; i = i_0 \end{cases}$$

$$\Delta x(J) = A_B^{-1}(Z(I_B) - A_H \Delta x_H)$$
$$A(I_B, J)\Delta x(J) = -\theta A_B^{-1} a_{i_0}$$

$\bar{x}$ vérifie $b_1 \leq A\bar{x} \leq b_2$ et pour que $\bar{x}$ vérifie $d_1 \leq \bar{x} \leq d_2$, il faut prendre un θ suffisamment petit d'autant plus que le support plan $\{x, S_B\}$ est non dégénéré.
En portant $\bar{x} = x + \Delta x = x + \theta l$ dans la formule d'accroissement de la fonctionnelle. On obtient :

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= y(I_B)Z(I_B) - E(J_H)\Delta x(J_H) \\ &= y(I_B)Z(I_B) - (y'A - c_B)\Delta x(J_H) \\ &= c'_B A_B^{-1} Z(I_B) - (c'_B A_B^{-1} A_B - c_B)\Delta x(J_H) \end{aligned}$$
$$\Delta f(x) = -\theta y > 0$$

Ce qui contredit l'optimalité de $\{x, S_B\}$.

Cas 02 : $y_{i_0} < 0; \;\; W_{2i_0} < 0$

Construisons un nouveau plan $\bar{x}$ de la manière suivante :

$$\bar{x} = x + \Delta x = x + \theta l$$

θ un réel positif non nul et l est un vecteur (direction).
Il faut trouver l et θ tel que :

$$b_1 \leq A\bar{x} \leq b_2$$
$$d_1 \leq \bar{x} \leq d_2.$$

Pour cela sur J_H, posons :

$$a_i \Delta x = \begin{cases} 0 & si \;\; i \in I_B \setminus i \\ \theta & si \;\; i = i_0 \end{cases}$$

$$\Delta x(J) = A_B^{-1}(Z(I_B) - A_H \Delta x_H)$$
$$A(I_B, J)\Delta x(J) = \theta A_B^{-1} a_{i_0}$$

$\bar{x}$ vérifie $b_1 \leq A\bar{x} \leq b_2$ et pour que $\bar{x}$ vérifie $d_1 \leq \bar{x} \leq d_2$, il faut prendre un θ suffisamment petit d'autant plus que le support plan $\{x, S_B\}$ est non dégénéré.
En portant $\bar{x} = x + \Delta x = x + \theta l$ dans la formule d'accroissement de la fonctionnelle. On obtient :

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= y(I_B)Z(I_B) - E(J_H)\Delta x(J_H) \\ &= y(I_B)Z(I_B) - (y'A - c_B)\Delta x(J_H) \\ &= c'_B A_B^{-1} Z(I_B) - (c'_B A_B^{-1} A_B - c_B)\Delta x(J_H) \end{aligned}$$
$$\Delta f(x) = \theta y < 0$$

Ce qui contredit l'optimalité de $\{x, S_B\}$.

3.4.2 Critère de suboptimalité

Théorème 3.2.

Soit $\varepsilon \geq 0$ donné. Pour l'ε-optimalité du plan x, il est suffisant et nécessaire de trouver un tel support S_B, pour lequel la valeur de suboptimalité vérifie l'inégalité suivante :

$$\beta(x, S_B) \leq \varepsilon$$

Preuve.

Condition suffisante :
Soit $\varepsilon > 0$.
On sait que :

$$\Delta f(x) = f(x^0) - f(x) \leq \beta(x, S_B) \leq \varepsilon$$

Pour

$$\beta(x, S_B) \leq \varepsilon \Longrightarrow \Delta f(x) = f(x^0) - f(x) \leq \varepsilon \Longrightarrow \ x \ est \ \varepsilon - optimal$$

Condition nécessaire :
Faisons une décomposition de $\beta(x, S_B)$

$$\beta(x, S_B) = \sum_{i \in I_B^-} y_i W_{1i} + \sum_{i \in I_B^+} y_i W_{2i} + \sum_{j \in J_H^+} E_j (x_j - d_{1j}) + \sum_{j \in J_H^-} E_j (x_j - d_{2j})$$

$$= \sum_{i \in I_B^-} y_i (b_1 - A(i, J)x(J)) + \sum_{i \in I_B^+} y_i (b_2 - A(i, J)x(J))$$

$$+ \sum_{j \in J_H^+} E_j (x_j - d_{1j}) + \sum_{j \in J_H^-} E_j (x_j - d_{2j})$$

$$\beta(x, S_B) = \sum_{i \in I_B^-} y_i b_1 + \sum_{i \in I_B^+} y_i b_2 - \sum_{i \in I} y_i (i, J)x(J) + \sum_{j \in J} E_j x_j - \sum_{j \in J_H^+} E_j d_{1j}$$

$$- \sum_{j \in J_H^-} E_j d_{2j}$$

$$= \sum_{i \in I_B^-} y_i b_1 + \sum_{i \in I_B^+} y_i b_2 - y(I)x(J) + E(J)x(J) - \sum_{j \in J_H^+} E_j d_{1j} - \sum_{j \in J_H^-} E_j d_{2j}$$

$$\beta(x, S_B) = \sum_{i \in I_B^-} y_i b_1 + \sum_{i \in I_B^+} y_i b_2 - y(I)x(J) + (y(I)A(I, J) - c(J))x(J) - \sum_{j \in J_H^+} E_j d_{1j}$$

$$- \sum_{j \in J_H^-} E_j d_{2j}$$

$$\beta(x, S_B) = y(I)A(I,J)x(J) - c(J)x(J) - y(I)x(J) + \sum_{i \in I_B^-} y_i b_1 + \sum_{i \in I_B^+} y_i b_2 - \sum_{j \in J_H^+} E_j d_{1j}$$
$$- \sum_{j \in J_H^-} E_j d_{2j}$$

Pour cela, construisons le problème dual du problème (3.1) :

$$\begin{cases} \Phi(u,v,w) & = b_2 u_1 - b_1 u_2 - d_1 v + d_2 w \quad \longrightarrow min \\ & A'(u_2 - u_1) - v + w = c \\ v & \geq 0, \ w \geq 0, \ (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{3.13}$$

Il est facile de vérifier que le vecteur $\lambda = (u_1, u_2, v, w)$ défini de la manière suivante :

$$\begin{cases} v_j = E_j, \quad w_j = 0, & si \ E_j \geq 0 \\ v_j = 0, \quad w_j = -E_j, & si \ E_j \leq 0, \ j \in J \\ u_{1i} = y_i, \quad u_{2i} = 0, & si \ y_i \geq 0 \\ u_{1i} = 0, \quad u_{2i} = -y_i, & si \ y_i \leq 0, \ i \in I \end{cases}$$

est un plan dual.

$$\beta = \beta(x, S_B) = \sum_{i \in I_B^-} y_i b_1 + \sum_{i \in I_B^+} y_i b_2 - \sum_{i \in I} y_i(i,J)x(J) + \sum_{j \in J} E_j x_j - \sum_{j \in J_H^+} E_j d_{1j}$$
$$- \sum_{j \in J_H^-} E_j d_{2j}$$

En introduisant le plan dual défini ci -dessus, on obtient :

$$\begin{aligned} \beta(x, S_B) &= E'x - d_1 v + d_2 w - y'x - b_1 u_2 + b_2 u_1 \\ &= y'Ax - c'x - d_1 v + d_2 w - y'x - b_1 u_2 + b_2 u_1 + c'x^0 - c'x^0 \\ \beta(x, S_B) &= (c'x^0 - c'x) + (-b_1 u_2 + b_2 u_1 - d_1 v + d_2 w - c'x^0) \\ &= (c'x^0 - c'x) + (\Phi(\lambda) - \Phi(\lambda_0)) \end{aligned}$$

Donc
$$\beta(x, S_B) = \beta_x + \beta_B$$

où $\beta_x = (c'x^0 - c'x)$: est appelée, l'écart (mesure) de la non optimalité du plan x, $\beta_B = (\Phi(\lambda) - \Phi(\lambda_0))$: est appelée, l'écart (mesure) de la non optimalité du support (J_B).

Pour un support J_B optimal (λ optimal), on aura :

$$\Phi(\lambda) = \Phi(\lambda^0) \Longrightarrow \beta(x, J_B) = c'x - c'x^0 \leq \varepsilon \Longrightarrow x \ est \ \varepsilon - optimal$$

Remarque. A partir de l'expression $\beta_B = \Phi(\lambda) - \Phi(\lambda^0)$, on conclut que l'amélioration du support-plan $\{x, S_B\}$ peut se faire indépendamment de la et de autre.
Le changement du plan $x \Longrightarrow$ la diminution de β_x
Le changement du support $S_B \Longrightarrow$ la diminution de β_B

1. Si $\beta(x, S_B) = 0$, alors x est optimal.

2. Si $\beta(x, S_B) \leq \varepsilon$, alors x est ε-optimal.

3. Si $\beta(x, S_B) > \varepsilon$, alors on passe à l'itération de l'algorithme (au changement du support-plan $\{x, S_B\}$)

Remarque 3.1. Si le critère d'optimalité et de suboptimalité ne sont pas vérifiés alors on passe à l'itération de l'algorithme.

3.5 Itération de l'algorithme :

L'itération de l'algorithme est constitué de deux procédures qui sont le changement du plan et du support.

3.5.1 Changement du plan :

Soit $\{x, S_B\}$ un support-plan non dégénérée et $\varepsilon \geq 0$ donné, tel que $\beta(x, S_B) > \varepsilon$.
Le nouveau plan $\bar{x}$ sera construit de la manière suivante : $\bar{x} = x + \theta l$
Où :
l : étant la direction admissible (pour améliorer le plan x).
θ :(un réel positif non nul) est le pas admissible maximal le long de la direction l. tel que : $f(\bar{x}) \geq f(x)$.
Le vecteur de direction $l = (l(J_B); l(J_H))$ est construit de la manière suivante :

Construisons la direction admissible :
sur J_H, on pose $\theta = 1$ et :

$$l_j = \begin{cases} d_{1j} - x_j & si\ E_j > 0 \\ d_{2j} - x_j & si\ E_j < 0 \quad j \in J_H \\ \quad 0 & si\ E_j = 0 \end{cases} \tag{3.14}$$

on a

$$b_1(I_B) \leq A(I_B, J)\bar{x}(J) \leq b_2(I_B)$$

$$b_1(I_B) \leq A(I_B, J)(x + \theta l) \leq b_2(I_B)$$

$$b_1(I_B) \leq A(I_B, J)x + \theta A(I_B, J)l \leq b_2(I_B)$$

$$b_1(I_B) - A(I_B, J)x \leq \theta A(I_B, J)l \leq b_2(I_B) - A(I_B, J)x$$

$$W_1(I_B) \leq \theta A(I_B, J_B)l_B + \theta A(I_H, J_H)l_H \leq W_2(I_B)$$

$$W_1(I_B) - \theta A(I_H, J_H)l_H \leq \theta A(I_B, J_B)l_B \leq W_2(I_B) - \theta A(I_H, J_H)l_H$$

puisque $\theta = 1$

$$A_B^{-1}[W_1(I_B) - A(I_H, J_H)l_H] \leq l_B \leq A_B^{-1}[W_2(I_B) - A(I_H, J_H)l_H]$$

$$l(J_B) = \begin{cases} A_B^{-1}[W_2(I_B) - A(I_H, J_H)l_H] & si\ y_i > 0 \\ A_B^{-1}[W_1(I_B) - A(I_H, J_H)l_H] & si\ y_i < 0 \end{cases}$$

et $l(J_B) = A_B^{-1}[W(I_B) - A_H l(J_H)]$ pour avoir et que $\bar{x}$ vérifie

$$b_1 \leq A\bar{x} \leq b_2$$

$$d_1 \leq \bar{x} \leq d_2$$

il faut calculer le pas maximal θ^0 :

$$\theta_j = \begin{cases} \frac{d_{2j} - x_j}{l_j} & si\ l_j > 0 \\ \frac{d_{1j} - x_j}{l_j} & si\ l_j < 0 \quad j \in J_B \\ \infty & si\ l_j = 0 \end{cases}$$

$$\theta_{j_0} = \min(\theta_j) \ \ pour \ \ j \in J_B$$

et

$$\theta_i = \begin{cases} \frac{b_{2i} - a_i x}{a_i l_j} & si\ a_i l_j > 0 \\ \frac{b_{1i} - a_i x}{a_i l_j} & si\ a_i l_j < 0 \quad i \in I_H \\ \infty & si\ a_i l_j = 0 \end{cases}$$

$$\theta_{i_0} = \min(\theta_i) \ \ pour \ \ i \in I_H$$

et le pas maximal sera :

$$\theta^0 = \min(1, \theta_{j_0}, \theta_{i_0}) \ \ pour \ \ i_0 \in I_H, \ \ j_0 \in J_B$$

De là le nouveau plan sera $\bar{x} = x + \theta^0 l$ et la valeur de suboptimalité pour le nouveau plan sera :

$$\begin{aligned} \beta(\bar{x}, S_B) &= \sum_{i \in I_B^-} y_i \bar{W}_{1i} + \sum_{i \in I_B^+} y_i \bar{W}_{2i} + \sum_{j \in J_H^+} E_j(\bar{x}_j - d_{1j}) + \sum_{j \in J_H^-} E_j(\bar{x}_j - d_{2j}) \\ &= \beta(x, S_B) + \theta^0 \sum_{j \in J_H} E_j l_j = \beta(x, S_B) - \theta^0 \beta(x, S_B) \end{aligned}$$

$$\beta(\bar{x}, S_B) = (1 - \theta^0)\beta(x, S_B)$$

De cette dernière expression on conclut :

Si $\theta^0 = 1$ alors le support-plan $\{\bar{x}, S_B\}$ est optimal.
Si $\beta(\bar{x}, S_B) \leq \varepsilon$ alors $\{\bar{x}, S_B\}$ est ε-optimal.
Si $\beta(\bar{x}, S_B) > \varepsilon$, alors on passe au changement du support.

$$S_B \longrightarrow \bar{S}_B \ \ (A_B \longrightarrow \bar{A}_B)$$

3.5.2 Changement du support :

1. **Changement du support à pas court :**

Le changement du support S_B vers $\bar{S}_B$ consiste à faire un changement du co-plan E vers $\bar{E}$ et du vecteur des potentiels y vers $\bar{y}$ de telle sort que :

$$\beta(\bar{x}, \bar{S}_B) \leq \beta(\bar{x}, S_B)$$

Pour cela posons :

$$\bar{E}(J) = E(J) + \sigma_0 t(J) \tag{3.15}$$

$$\bar{y}(I) = y(I) + \sigma_0 t(I) \tag{3.16}$$

où $t = (t(J), t(I))$ est la direction admissible de diminution de la fonction objectif du dual, σ_0 le pas maximal le long de cette direction.
Calcul de t et σ_0 :
En utilisant la définition de E et y on obtient :

$$\bar{E} = \bar{y}A - c' = (y' + \sigma_0 t(I))A - c' = E' + \sigma_0 t(I)A$$

et là

$$t'(J) = t'(I)A(I,J) \Longrightarrow t'(J_B) = t'(I)A(I,J_B) \Longrightarrow t'(I) = t'(J_B)A_B^{-1}$$

ce qui donne :

$$t'(J_H) = t'(J_B)A_B^{-1}A(I,J_H)$$

Après calcul du plan $\bar{x} = x + \theta^0 l$, le pas θ^0 est donné par

$$\theta^0 = min(1, \theta_{j_0}, \theta_{i_0}), j_0 \in J_B, i_0 \in I_H$$

On cherchera un indice $j_1 \in J_H$ qui va entrer dans la base à la place de l'indice j_0 et un indice $i_1 \in I_B$ qui va sortir de la base pour être remplacé par l'indice i_0.

Pour cela posons :

$$t_j = \begin{cases} -sign(l_{j_0}), & si\ j = j_0 \\ 0, & si\ j \in J_B \setminus j_0 \end{cases}$$

d'où

$$t_j = \begin{cases} +1 & si\ \bar{x}_j = d_{1j} \\ -1 & si\ \bar{x}_j = d_{2j} \\ 0 & si\ j \in J_B \setminus j_0 \end{cases}$$

$$t'(J_H) = t'(J_B)A_B^{-1}A(I_B,J_H)$$

et

$$t_i = \begin{cases} sign(a_{i_0}l), & si\ i = i_0 \\ 0, & si\ i \in I_B \setminus i_0 \end{cases}$$

d'où

$$t_i = \begin{cases} +1 & si\ a_i\bar{x} = b_{1i} \\ -1 & si\ a_i\bar{x} = b_{2i} \\ 0 & si\ i \in I_B \setminus i_0 \end{cases}$$

$$t'(I_H) = t'(J_B)A(I_H, J_B)$$

Et calculons :
Pour

$$\sigma_0 = \sigma_{j_1} = \min_{j \in J_H}(\sigma_j)$$

avec

$$\sigma_j = \begin{cases} -E_j/t_j, & si\ E_j t_j < 0 \\ 0, & si \begin{cases} E_j = 0, x_j \neq d_{1j}, t_j > 0 \\ E_j = 0, x_j \neq d_{2j}, t_j < 0 \end{cases} j \in J_H \\ \infty, & sinon \end{cases}$$

- Le calcul de σ_0 satisfait $\bar{E}_j E_j \geq 0, \forall j \in J$.
- $\bar{E}_{j_1} = 0$.

Pour

$$\sigma_0 = \sigma_{i_1} = \min_{i \in I_H}(\sigma_i)$$

$$\sigma_i = \begin{cases} -y_i/t_i, & si\ y_i t_i < 0 \\ 0, & si \begin{cases} y_i = 0, a_i x \neq b_{2i}, t_i > 0 \\ y_i = 0, a_i x \neq b_{1i}, t_i < 0 \end{cases} i \in I_B \\ \infty, & sinon \end{cases}$$

- Le calcul de σ_0 satisfait $\bar{y}_i y_i \geq 0, \forall i \in I$.
- $\bar{y}_{i_1} = 0$.

D'où

$$\sigma_0 = \min_{j_1 \in J_B, i_1 \in I_B}(\sigma_{j_1}, \sigma_{i_1})$$

Pour construire le nouveau support $\bar{S}_B$, on considère les deux cas suivants :
Cas 01 : Pour $\theta^0 = \theta_{j_0}$ on aura deux possibilités de construction de support :

1- $\sigma_0 = \sigma_{j_1}$, on construit

$$\bar{J}_B = \{J_B \setminus j_0\} \cup j_1 \quad et \quad \bar{I}_B = I_B$$

2- $\sigma_0 = \sigma_{i_1}$, on construit

$$\bar{J}_B = J_B \setminus j_0 \quad et \quad \bar{I}_B = I_B \setminus i_1$$

cas 02 : Pour $\theta^0 = \theta_{i_0}$ on aura deux possibilités de construction de support :

1- $\sigma_0 = \sigma_{j_1}$, on construit

$$\bar{J}_B = J_B \cup j_1 \quad et \quad \bar{I}_B = I_B \cup i_0$$

2- $\sigma_0 = \sigma_{i_1}$, on construit

$$\bar{J}_B = J_B \quad et \quad \bar{I}_B = \{I_B \setminus i_1\} \cup i_0$$

On peut facilement remarquer que la quantité $\beta(\bar{x},\bar{S_B})$ est égale à :

$$\beta(\bar{x},\bar{S_B}) = \sum_{i\in I_B^-} \bar{y}_i(b_1 - A(i,J)\bar{x}(J)) + \sum_{i\in I_B^+} \bar{y}_i(b_2 - A(i,J)\bar{x}(J))$$
$$+ \sum_{j\in J_H^+} \bar{E}_j(\bar{x}_j - d_{1j}) + \sum_{j\in J_H^-} \bar{E}_j(\bar{x}_j - d_{2j})$$

Où

$$\bar{J}_H^+ = \{j \in J_H / \bar{E}_j \geq 0\}, \quad \bar{J}_H^- = \{j \in J_H / \bar{E}_j \leq 0\}$$

$$\bar{I}_B^+ = \{I \in I_B / \bar{y}_i \geq 0\}, \quad \bar{I}_B^- = \{I \in I_B / \bar{y}_i \leq 0\}$$

Sachant que la relation (3.15) de $\bar{E}$ et $\bar{y}$ et sur J_B et I_B

$$\beta(\bar{x},\bar{S}_B) = \sum_{i\in I_B^-} y_i(b_1 - A(i,J)\bar{x}(J)) + \sum_{i\in I_B^+} y_i(b_2 - A(i,J)\bar{x}(J)) + \sum_{j\in J_H^+} E_j(\bar{x}_j - d_{1j}) + \sum_{j\in J_H^-} E_j(\bar{x}_j - d_{2j})$$

$$+\sigma_0(\sum_{i\in I_B^-} t_i(b_1 - A(i,J)\bar{x}(J)) + \sum_{i\in I_B^+}(b_2 - A(i,J)\bar{x}(J)) + \sum_{j\in J_H^+} t_j(\bar{x}_j - d_{1j}) + \sum_{j\in J_H^-} t_j(\bar{x}_j - d_{2j}))$$

$$\beta(\bar{x},\bar{S}_B) = (1-\theta^0)\beta(x,S_B) + \sigma_0(\sum_{i\in I_B^-} t_i(b_1 - A(i,J)\bar{x}(J)) + \sum_{i\in I_B^+} t_j(b_2 - A(i,J)\bar{x}(J))$$
$$+ \sum_{j\in J_H^+} t_j(\bar{x}_j - d_{1j}) + \sum_{j\in J_H^-} t_j(\bar{x}_j - d_{2j}))$$

$t.l = 0$ car $A.l = 0$, $(t'(J_B) = t'(I)A(I,J_B)$ et $(t'(J_H) = t'(J_B)A_B^{-1}A(I,J_H))$,
de plus par construction toutes les composantes de $t'(J_B), t'(I_B)$ sont nulles sauf à l'indice i_0 et j_0.

Posons :

$$\alpha_0 = \sum_{j\in J_H^+} t_j(\bar{x}_j - d_{1j}) + \sum_{j\in J_H^-} t_j(\bar{x}_j - d_{2j})$$

$$\alpha_1 = \sum_{i\in I_B^-} t_i(b_1 - A(i,J)\bar{x}(J)) + \sum_{i\in I_B^+} t_i(b_2 - A(i,J)\bar{x}(J))$$

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 = (1-\theta^0)(\sum_{j\in J} t_j l_j + \sum_{i\in I} t_i a_i l)$$

alors

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 = (1-\theta^0)(t_{j_0} l_{j_0} + t_{i_0} a_{i_0} l)$$

avec

$$\alpha_0 = (1-\theta) t_{j_0} l_{j_0} = \begin{cases} \bar{x}_{j_0} + l_{j_0} - d_{1j_0} & si\ t_{j_0} = 1 \\ -(\bar{x}_{j_0} + l_{j_0} - d_{2j_0}) & si\ t_{j_0} = -1 \end{cases}$$

et

$$\alpha_1 = (1-\theta) t_{i_0} a_{i_0} l = \begin{cases} b_{2i_0} - a_{i_0}\bar{x} - a_{i_0} l_j & si\ t_{i_0} = 1 \\ -(b_{2i_0} - a_{i_0}\bar{x} - a_{i_0} l_j) & si\ t_{i_0} = -1 \end{cases}$$

Donc :

$$\beta(\bar{x}, \bar{S}_B) = (1-\theta^0)\beta(x, S_B) - \sigma_0 |\alpha|$$

Remarque 3.2. L'expression de la vitesse initiale de décroissance de la fonctionnelle Φ (du programme dual du programme initial) est donnée par :

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 = \lim_{\sigma \longrightarrow 0} \frac{\Phi(\bar{\lambda}) - \Phi(\lambda)}{\sigma}, \quad avec\ \bar{\lambda} = \lambda + \sigma.\partial\lambda$$

cette expression montre que la vitesse de décroissance est α

2. **Changement du support à pas long :**
Le changement du support entraîne la diminution de la fonctionnelle du dual $\Phi(\lambda)$.

Coût de la fonctionnelle duale :

Soit $\lambda = (u_1, u_2, v, w)$ une solution réalisable arbitraire du dual. Dans la suite nous considérons que les composants $v,\ w$ sont définis par le vecteur $E = A'y - c$

$$\begin{cases} v_j = E_j, \quad w_j = 0, & si\ E \geq 0 \\ v_j = 0, \quad w_j = -E_j, & si\ E < 0,\ j \in J \\ u_{1i} = y_i, \quad u_{2i} = 0, & si\ y_i \geq 0 \\ u_{1i} = 0, \quad u_{2i} = -y_i, & si\ y_i < 0,\ i \in I \end{cases}$$

parce que si non la valeur de la fonction du coût dual peut être diminuée sans changer y.

Soit $\lambda(\sigma) = (u_1(\sigma), u_2(\sigma), v(\sigma), w(\sigma))$ avec $\sigma \geq 0$.

$$u_1(\sigma) = u_1 + \sigma.\Delta u_1, \quad u_2(\sigma) = u_2 + \sigma.\Delta u_2$$

$$v(\sigma) = v + \sigma\Delta v, \quad w(\sigma) = w + \sigma\Delta w,$$

est une autre solution réalisable dual avec $v(\sigma), w(\sigma)$ à déterminer par le vecteur

$$E(\sigma) = A'y(\sigma) - c$$

Évidemment,

$$\sigma\Delta E = E(\sigma) - E = \sigma A'\Delta y$$

La valeur de la fonction du coût dual avec $\lambda(\sigma)$:

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda(\sigma)) &= b_2.u_1(\sigma) - b_1.u_2(\sigma) - d'_1.v(\sigma) + d'_2.w(\sigma)\\ &= b_2(u_1+\sigma.\Delta u_1)-b_1(u_2+\sigma.\Delta u_2)-d'_1(v+\sigma.\Delta v)+d'_2(w+\sigma.\Delta w)\\ &= \Phi(\lambda) + \sigma(b'_2\Delta u_1 - b'_1\Delta u_2 - d'_1\Delta v + d'_2\Delta w)\\ &= \Phi(\lambda) + \sigma(W_2(x)\Delta u_1 - W_1(x)'\Delta u_2 - d'_1\Delta v + d'_2\Delta w)\end{aligned}$$

La méthode adaptée avec un pas long :

La modification de la méthode à pas long par rapport à la méthode à pas court consiste à trouver la dimension du pas $\sigma^* \geq 0$ qui minimise la fonction dual $\Phi(\lambda(\sigma)),\ \sigma \geq 0$..

Calculons les longueurs du pas par les règles :

$$\sigma_j = \begin{cases} -E_j/t_j, & si\ E_jt_j < 0 \\ 0, \quad si \begin{cases} E_j = 0, x_j \neq d_{1j}, t_j > 0 \\ E_j = 0, x_j \neq d_{2j}, t_j < 0 \end{cases} & j \in J_H \\ \infty, & sinon \end{cases}$$

et

$$\sigma_i = \begin{cases} -y_i/t_i, & si\ y_it_i < 0 \\ 0, \quad si \begin{cases} y_i = 0, a_ix \neq b_{2i}, t_i > 0 \\ y_i = 0, a_ix \neq b_{1i}, t_i < 0 \end{cases} & i \in I_B \\ \infty, & sinon \end{cases}$$

Comme on a vu dans le premier chapitre le changement du support est basé sur le pas σ_0.
Calculons la quantité $\Phi(\bar{\lambda})$ l'accroissement de la fonctionnelle du dual :

Posons : $\bar{\lambda} = \lambda(\sigma) = \lambda + \sigma t$ le nouveau plan dual
avec

$$\bar{\lambda}(\sigma) = (u_1(\sigma), u_2(\sigma), v(\sigma), w(\sigma))$$

tel que :

$$u_1(\sigma) = u_1 + \sigma t, \quad u_2(\sigma) = u_2 + \sigma t, \quad v(\sigma) = v + \sigma t, \quad w(\sigma) = w + \sigma t$$

$$\begin{aligned}\Phi(\bar{\lambda}) = \Phi(\lambda(\sigma)) &= b'_2u_1(\sigma) - b'_1u_2(\sigma) - d'_1.v(\sigma) + d'_2.w(\sigma)\\ &= b'_2(u_1 + \sigma.t(I)) - b'_1(u_2 + \sigma.t(I)) - d'_1(v + \sigma t(J)) + d'_2(w + \sigma t(J))\\ &= b'_2u_1 - b'_1u_2 - d'_1v + d'_2w + \sigma(b'_2t(I) - b'_1t(I) - d'_1t(J) + d'_2t(J))\\ &= \Phi(\lambda) + \sigma(t'(I)b_2 - t'(I)b_1 - t'(J)d_1 + t'(J)d_2)\\ &= \Phi(\lambda)+\sigma[t'(J_B)A_B^{-1}b_2+t'(J_B)A_B^{-1}b_1+t'(J_B)(d_2-d_1)_B+t'(J_H)(d_2-d_1)_H]\\ &= \Phi(\lambda)+\sigma[t'(J_B)A_B^{-1}b_2+t'(J_B)A_B^{-1}b_1+t_B(d_2-d_1)_B+t_BA_B^{-1}A_H(d_2-d_1)_H]\end{aligned}$$

$$\Phi(\bar{\lambda}) = \Phi(\lambda) + \sigma t_B[A_B^{-1}b_2 + A_B^{-1}b_1 + (d_2 - d_1)_B + A_B^{-1}A_H(d_2 - d_1)_H]$$

Mettons les pas finis en ordre croissant :

$$\sigma_{j_1} < \sigma_{j_2} < ... < \sigma_{j_q}, \quad sur\ J_H$$

et

$$\sigma_{i_1} < \sigma_{i_2} < ... < \sigma_{i_p}, \quad sur\ J_B$$

d'où

$$\sigma_{s_1} < \sigma_{s_2} < ... < \sigma_{s_p}, \quad avec \quad s_k \in \{J_H \cup I_B\}$$

Pour chaque σ_j, $j = 1, ...q$ et σ_i, $i = 1, ...p$, calculons $\Phi(\lambda(\sigma_j))$ et $\Phi(\lambda(\sigma_i))$ qui correspond aux σ_j et σ_i.

Ordonnons ces $\Phi(\lambda(\sigma_j))$ et $\Phi(\lambda(\sigma_i))$ par ordre croissant :

$$\Phi(\lambda(\sigma_1)), \Phi(\lambda(\sigma_2)), ..., \Phi(\lambda(\sigma_q))$$

et

$$\Phi(\lambda(\sigma_1)), \Phi(\lambda(\sigma_2)), ..., \Phi(\lambda(\sigma_p))$$

l'indice de σ_{q-1} et σ_{p-1} qui correspond à $\Phi(\lambda(\sigma_{q-1}))$ et $\Phi(\lambda(\sigma_{p-1}))$ qui doit entrer dans la base, donc $\sigma_* = \sigma_{q-1}$ ou $\sigma_* = \sigma_{p-1}$, et cet indice égale à j_1, $\;j_1 \in J_H$ ou i_1, $\;i_1 \in I_B$

Le nouveau support est : $\bar{J}_B = (J_B \setminus j_0) \cup j_1$ ou $\bar{I}_B = (I_B \setminus i_1) \cup i_0$.

On continue le mouvement le long de t après l'apparition de composantes nulles du co-plan E, alors la vitesse de décroissance de la fonctionnelle du dual diminue et est égale à :

$$\alpha_1 = \alpha_0 + \sum_{t_j<0}(x_j - d_{1j}) + \sum_{t_j>0}(x_j - d_{1j})$$

Pour chaque s_k, nous calculons le saut du taux de la fonction objectif duale :

$$\Delta\alpha_k = -|t_{s_p}|(d_{2s_k} - d_{1s_k})$$

La fonction objectif dual se comporte selon la direction t comme une fonction continue, linéaire par morceaux et leur pentes sur l'intervalle $[\sigma_k, \sigma_{k+1}]$ est égale à :

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k - \begin{cases} -\sum\limits_{s_k \in J_B} |t_{s_p}|(d_{2s_k} - d_{1s_k}) & si \;\; t_{s_p} > 0 \\ -\sum\limits_{s_k \in I_B} |t_{s_p}|(b_{2s_k} - b_{1s_k}) & si \;\; t_{s_p} < 0 \end{cases}$$

Par construction le nouveau support est support coordinateur associé au plan $\bar{x}$ et la valeur de la suboptimalité au support plan $\{\bar{x}, \bar{S}_B\}$ est donnée par la fonction :

$$\beta(\bar{x}, \bar{S}_B) = (1 - \theta)\beta(x, S_B) - \sum_{k=0}^{s_1-1} \alpha_k(\sigma_k)$$

3.6 Algorithme de la méthode :

Soit $\{x, S_B\}$ un support plan de départ de problème (P_1), $\varepsilon \geq$ donné.
i. Calculer :

1. Le vecteur des potentiels :

$$y'(I_B) = c'(J_B)A_B^{-1}$$

Calculons

$$W(I_B) = \begin{cases} b_{2i} - A(I_B, J)x(J) & si\ y_i > 0 \\ b_{1i} - A(I_B, J)x(J) & si\ y_i < 0 \end{cases} \quad i \in I_B$$

2. Le vecteur d'estimation :

$$E'(J_H) = y'(I_B)A(I_B, J_H) - c'(J_H)$$

3. La valeur de suboptimalité :

$$\beta(x, S_B) = \sum_{i \in I_B^-} y_i W_{1i} + \sum_{i \in I_B^+} y_i W_{2i} + \sum_{j \in J_H^+} E_j(x_j - d_{1j}) + \sum_{j \in J_H^-} E_j(x_j - d_{2j})$$

-Si $\beta(x, S_B) = 0$: $\{x, S_B\}$ est optimal, arrêt du processus .
-Si $\beta(x, S_B) \leq \varepsilon$: $\{x, S_B\}$ est ε-optimal, arrêt du processus .
-Si $\beta(x, S_B) > \varepsilon$: aller à (ii).

ii. Changement de plan : $x \rightsquigarrow \bar{x} = x + \theta^0 l$.
1. Déterminer le vecteur de direction $l(J)$:

$$l_j = \begin{cases} d_{1j} - x_j & si\ E_j > 0 \\ d_{2j} - x_j & si\ E_j < 0 \\ 0 & si\ E_j = 0 \end{cases} \quad j \in J_H$$

$$l(J_B) = A_B^{-1}[W(I_B) - A_H.l(J_H)]$$

-En calculant le pas admissible maximal θ_j, θ_i :

$$\theta_j = \begin{cases} \frac{d_{2j}-x_j}{l_j} & si\ l_j > 0 \\ \frac{d_{1j}-x_j}{l_j} & si\ l_j < 0 \\ \infty & si\ l_j = 0 \end{cases} \quad j \in J_B$$

$$\theta_{j_0} = min\{\theta_j\}, \quad j \in J_B$$

et

$$\theta_j = 1, \quad pour \quad j \in J_H$$

et

$$\theta_i = \begin{cases} \frac{b_{2i}-a_i x_j}{a_i l_j} & si\ a_j l_j > 0 \\ \frac{b_{1i}-a_i x_j}{a_i l_j} & si\ a_i l_j < 0 \\ \infty & si\ a_i l_j = 0 \end{cases} \quad i \in I_H$$

$$\theta_{i_0} = min\{\theta_i\}$$

Le pas maximal sera : $\theta^0 = min\{1, \theta_j, \theta_i\}$

2. Déterminer le nouveau plan $\bar{x}(J) = x + \theta^0 l$.

Calculons

$$\bar{W}(I_B) = \begin{cases} b_{2i} - A(I_B, J)\bar{x}(J) & si\ y_i > 0 \\ b_{1i} - A(I_B, J)\bar{x}(J) & si\ y_i < 0 \end{cases} \quad i \in I_B$$

3. Calculer la valeur de suboptimalité :

$$\beta(x, S_B) = \sum_{i \in I_B^-} y_i \bar{W}_{1i} + \sum_{i \in I_B^+} y_i \bar{W}_{2i} + \sum_{j \in J_H^+} E_j(\bar{x}_j - d_{1j}) + \sum_{j \in J_H^-} E_j(\bar{x}_j - d_{2j})$$

$$\beta(\bar{x}, S_B) = (1 - \theta^0)\beta(x, S_B)$$

-Si $\beta(\bar{x}, S_B) > \varepsilon$: aller à (iii).
-Si $\beta(\bar{x}, S_B) \leq \varepsilon$: $\{\bar{x}, S_B\}$ est ε-optimal, arrêt du processus.
-Si $\beta(\bar{x}, S_B) = 0$: $\{\bar{x}, S_B\}$ est optimal, arrêt du processus.

iii. Changement de support :

1. Calculer le vecteur de direction $t = (t(I), t(J))$

$$t_j = \begin{cases} +1 & si\ \bar{x}_{j_0} = d_{1j} \\ -1 & si\ \bar{x}_{j_0} = d_{2j} \\ 0 & si\ j \in J_B \setminus j_0 \end{cases}$$

$$t'(J_H) = t'(J_B) A_B^{-1} A(I, J_H)$$

et

$$t_i = \begin{cases} +1 & si\ a_{i_0}\bar{x} = b_{1i} \\ -1 & si\ a_{i_0}\bar{x} = b_{2i} \\ 0 & si\ i \in I_B \setminus i_0 \end{cases}$$

$$t'(I_H) = t'(J_B) A(I_H, J_B)$$

2. Calculer le pas admissible maximal σ_j

$$\sigma_j = \begin{cases} -E_j/t_j, & & si\ E_j t_j < 0 \\ 0, & si \begin{cases} E_j = 0, x_j \neq d_{1j}, t_j > 0 \\ E_j = 0, x_j \neq d_{2j}, t_j < 0 \end{cases} & j \in J_H \\ \infty, & & sinon \end{cases}$$

$$\sigma_{j_1} = \min_{j \in J_H}(\sigma_j)$$

3. Calculer le pas admissible maximal σ_i

$$\sigma_i = \begin{cases} -y_i/t_i, & si\ y_i t_i < 0 \\ 0, & si \begin{cases} y_i = 0, a_i x \neq b_{2i}, t_i > 0 \\ y_i = 0, a_i x \neq b_{1i}, t_i < 0 \end{cases} i \in I_B \\ \infty, & sinon \end{cases}$$

$$\sigma_{i_1} = \min_{i \in I_B}(\sigma_i)$$

d'où le pas admissible

$$\sigma^0 = \min(\sigma_{j_1}, \sigma_{i_1})$$

4. La construction de nouveau support :

Pour $\theta^0 = \theta_{j_0}$, on a :
-Si $\sigma_0 = \sigma_{j_1}$, le nouveau support est

$$\bar{J}_B = \{J_B \setminus j_0\} \cup j_1 \quad et \quad \bar{I}_B = I_B$$

-Si $\sigma_0 = \sigma_{i_1}$, le nouveau support est

$$\bar{J}_B = J_B \setminus j_0 \quad et \quad \bar{I}_B = I_B \setminus i_1$$

Pour $\theta^0 = \theta_{i_0}$, on a :
-Si $\sigma_0 = \sigma_{j_1}$, le nouveau support est

$$\bar{J}_B = J_B \cup j_1 \quad et \quad \bar{I}_B = I_B \cup i_0$$

-Si $\sigma_0 = \sigma_{i_1}$, le nouveau support est

$$\bar{J}_B = J_B \quad et \quad \bar{I}_B = \{I_B \setminus i_1\} \cup i_0$$

5. Calculer la valeur de suboptimalité :
On calcul :

$$\bar{E}(J) = E(J) + \sigma t(J)$$
$$\bar{y}(I) = y(I) + \sigma t(I)$$

donc

$$\beta(\bar{x}, S_B) = \sum_{i \in \bar{I}_B^-} \bar{y}_i \bar{W}_{1i} + \sum_{i \in \bar{I}_B^+} \bar{y}_i \bar{W}_{2i} + \sum_{j \in \bar{J}_H^+} \bar{E}_j(\bar{x}_j - d_{1j}) + \sum_{j \in \bar{J}_H^-} \bar{E}_j(\bar{x}_j - d_{2j})$$

$$\beta(\bar{x}, \bar{S}_B) = (1 - \theta^0)\beta(x, S_B) - \sum_{k=0}^{s_1 - 1} \alpha_k |\sigma_k|$$

avec

$$\alpha_k = \alpha_{k-1} - \begin{cases} -\sum_{s_k \in J_B} |t_{s_p}|(d_{2s_k} - d_{1s_k}) \quad si \quad t_{s_p} > 0 \\ -\sum_{s_k \in I_B} |t_{s_p}|(b_{2s_k} - b_{1s_k}) \quad si \quad t_{s_p} < 0 \end{cases}$$

-Si $\beta(\bar{x}, \bar{S}_B) > \varepsilon$: aller à (i).
-Si $\beta(\bar{x}, \bar{S}_B) \leq \varepsilon$: $\{\bar{x}, \bar{S}_B\}$ est ε-optimal, arrêt du processus.
-Si $\beta(\bar{x}, \bar{S}_B) = 0$: $\{\bar{x}, \bar{S}_B\}$ est optimal, arrêt du processus.

3.7 Application numérique :

soit à résoudre le problème suivant :

$$(P) \begin{cases} f(x) = 2x_1 - 3x_2 \longrightarrow Max \\ 1 \leq 2x_1 - x_2 \leq 3 \\ -2 \leq -x_1 + 4x_2 \leq 2 \\ 1 \leq x_1 \leq 3 \quad -1 \leq x_2 \leq 1 \end{cases}$$

Où $n = 2$, $m = 2$, $I = \{1, 2, \}$ et $J = \{1, 2\}$
$x = (1, 0)$ une solution admissible de problème (p)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Appliquant la méthode adaptée :
soit le support-plan initial $(x,\, S_B)$ avec :
$x = (1, 0)$ est le plan initial non dégénéré .
$S_B = \{I_B, J_B\} = \{\{1\}, \{1\}\}$ est le support initial

On choisit $A_B = [2]$ et $A_H = [4]$
$detA_B = 2 \neq 0 \Longrightarrow A_B$ est inversible donc $A_B^{-1} = [\frac{1}{2}]$.

Le vecteur des potentiels
$y' = C'_B A_B^{-1}$
$y_1 = C_1 A_B^{-1} = 2 \times \frac{1}{2} = 1 > 0$
$y'(I_H) = 0$
On a

$$W(I_B) = \begin{cases} b_{2i} - A(I_B, J)x(J) & si\ y_i > 0 \\ b_{1i} - A(I_B, J)x(J) & si\ y_i < 0 \end{cases} \quad i \in I_B$$

$$W_{2i} = b_{2i} - A(I_B, J)x(J) \Longrightarrow W_{21} = b_{21} - A(1, J)x(J) = 3 - \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1$$

Le vecteur des estimations :
$E'(J_H) = y'(I_B)A(I_B, J_H) - C(J_H)$
$E_2 = y_1(a_{12}) - C_2 = 1\,\big(-1\big) - \big(-3\big) = -1 + 3 = 2$
$E_j = 0,\ Si\ j \in J_B$

La valeur de suboptimalité :

$$\beta(x,S_B)=\sum_{y_i\geq 0} y_iW_{2i}+\sum_{y_i\leq 0} y_iW_{1i}+\sum_{E_j\geq 0} E_j(x_j-d_{1j})+\sum_{E_j\leq 0} E_j(x_j-d_{2j})$$

$$\beta(x,S_B)=y_1W_{21}+E_2(x_2-d_{12})=1(1)+(2)(0+1)=1+2=3>\varepsilon$$

le support plan $\{x,S_B\}$ n'est pas optimal.
Passons au changement du plan $\bar{x}=x+\theta l$

Le vecteur de direction
sur $J_H=\{2,3\}$ avec $\theta=1$

$$l_j=\begin{cases} d_{1j}-x_j & si\ E_j>0 \\ d_{2j}-x_j & si\ E_j<0 \\ 0 & si\ E_j=0 \end{cases} \quad j\in J_H$$

$l_2=d_{12}-x_2=-1-0=-1$ car $E_2=2>0$
sur $I_B=\{1\}$

$$l(J_B)=\begin{cases} A_B^{-1}[W_1(I_B)-A(I_B,J_H)l(J_H)] & si\ y_i<0 \\ A_B^{-1}[W_2(I_B)-A(I_B,J_H)l(J_H)] & si\ y_i>0 \end{cases} \quad j\in J_H$$

on a $y\geq 0$ donc
$l_1=A_B^{-1}[W_{21}-(a_{12})\left(l_2\right)]=1[1-(-1)\left(-1\right)]=1(1-(-2))=3=l_1$
la direction est : $l=(l_1,l_2)=(0,-1)$

Le pas admissible θ_0
sur $I_H=\{2\}$ on cherche θ_{i_0} :

$$\theta_i=\begin{cases} \frac{b_{2i}-a_ix}{a_il_j} & si\ a_il_j>0 \\ \frac{b_{1i}-a_ix}{a_il_j} & si\ a_il_j<0 \\ \infty & si\ a_il_j=0 \end{cases} \quad i\in I_H$$

on a $A(2,j)l=(-1\ \ 4\ \ )\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=-4<0$
donc
$\theta_{i_0}=\theta_2=\dfrac{b_1(2)-A(2,J)x(J)}{A(2,J)l(J)}=[-2-(-1\ \ 4)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}]\div[(-1\ \ 4)\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}]$
$\theta_{i_0}=\theta_2=\dfrac{(-2+1)}{-4})=\dfrac{1}{4}$

sur $J_B=\{1\}$ on cherche θ_{j_0}

$$\theta_j=\begin{cases} \frac{d_{2j}-x_j}{l_j} & si\ l_j>0 \\ \frac{d_{1j}-x_j}{l_j} & si\ l_j<0 \\ \infty & si\ l_j=0 \end{cases} \quad j\in J_B$$

on a : $l_1 = 0$
donc :
$\theta_{j_0} = \theta_1 = \infty$
Alors
$\theta^0 = min\{1, \theta_{i_0}, \theta_{j_0}\} = min\{1, \theta_1, \theta_2\} = \frac{1}{4}$

D'où le nouveau plan est :
pour J_B on a :
$\bar{x}_1 = x_1 + \theta_0 l_1 = 1 + \dfrac{1}{4}(0) = 1$
pour J_H et $\theta = 1$ on a :
$\bar{x}_2 = x_2 + l_2 = 0 - 1 = -1$
donc le nouveau plan est : $\bar{x} = (1 \quad -1)$
La valeur de suboptimalité :

$$\beta(\bar{x}, S_B) = (1 - \theta_0)\beta(x, S_B) = (1 - \frac{1}{4})(3) = \frac{9}{4} > 0$$

Passons au changement du support

Le vecteur de direction
sur $j \in J_B = \{1\}$ calculons la direction $t(J)$

$$t_j = \begin{cases} +1 & si\ \bar{x}_j = d_{1j} \\ -1 & si\ \bar{x}_j = d_{2j} \\ 0 & si\ j \in J_B \setminus j_0 \end{cases}$$

donc :
$t_1 = 1 \quad$ (car $\bar{x}_1 = d_{11} = 1$)

sur $j \in J_H = \{2\} \quad t'(J_H) = t'(J_B)A_B^{-1}A^{-1}(I_B, J_H)$
$t_2 = t_1 A_B^{-1} a_{12} = (1)(\frac{1}{2})(-1) = -\frac{1}{2}$

donc la direction admissible $t(J)$
$t(J) = (1 \quad -\frac{1}{2})$

sur $i \in I_B = \{1\}$ calculons la direction $t(I)$

$$t_i = \begin{cases} +1 & si\ a_i\bar{x} = b_{1i} \\ -1 & si\ a_i\bar{x} = b_{2i} \\ 0 & si\ i \in I_B \setminus i_0 \end{cases}$$

$t_1 = -1 \quad$ (car $a_1\bar{x} = (2 \quad -1)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 + 1 = 3 = b_{21}$
sur $i \in I_H = \{2\} \quad t'(I_H) = t'(J_B)A(I_B, J_H)$
$t_2 = t_1 a_{21} = 1(-1) = -1$

donc la direction admissible $t(I)$ est :
$t(I) = (-1 \quad -1)$

Le pas admissible σ_0
sur $j \in J_H$ on cherche $\sigma_{j_1} = \min_{j \in J_H}(\sigma_j)$

$$\sigma_j = \begin{cases} -E_j/t_j, & si\ E_j t_j < 0 \\ 0, & si \begin{cases} E_j = 0, x_j \neq d_{1j}, t_j > 0 \\ E_j = 0, x_j \neq d_{2j}, t_j < 0 \end{cases} j \in J_H \\ \infty, & sinon \end{cases}$$

$\sigma_2 = -E_2/t_2 = -2/-\frac{1}{2} = 4 \quad$ (car $E_2 t_2 = 2(-\frac{1}{2}) = -1 < 0$)

sur $i \in I_B$ on cherche $\sigma_{i_1} = \min_{i \in I_B}(\sigma_i)$

$$\sigma_i = \begin{cases} -y_i/t_i, & si\ y_i t_i < 0 \\ 0, & si \begin{cases} y_i = 0, a_i x \neq b_{2i}, t_i > 0 \\ y_i = 0, a_i x \neq b_{1i}, t_i < 0 \end{cases} i \in I_B \\ \infty, & sinon \end{cases}$$

$\sigma_1 = -y_1/t_1 = -(1/-1) = 1 \quad$ (car $y_1 t_1 = 1(-1) = -1 < 0$)

D'où : $\sigma_0 = \min(\sigma_i, \sigma_j) = \min(\sigma_1, \sigma_2) = \min(1, 4) = 1 = \sigma_1$

on a : $\theta_0 = \theta_{i_0} = \theta_2$ et $\sigma_0 = \sigma_{i_1} = \sigma_1$

donc le nouveau support est

$$\bar{I}_B = \{I_B \setminus i_1\} \cup i_1 = (\{1\} \setminus \{1\}) \cup \{2\} = \{2\} \quad et \quad \bar{J}_B = J_B = \{1\}$$

La valeur de suboptimalité :
Calculons :
$\bar{E}_2 = E_2 + \sigma t_2 = \dfrac{4-1}{2} = \dfrac{3}{2}$
$\bar{y}_1 = y_1 + \sigma t_1 = 1 + 1(-1) = 1 - 1 = 0$

$$\beta(x, S_B) = \sum_{\bar{y}_i \geq 0} \bar{y}_i \bar{W}_{2i} + \sum_{\bar{y}_i \leq 0} \bar{y}_i W_{1i} + \sum_{\bar{E}_j \geq 0} \bar{E}_j(\bar{x}_j - d_{1j}) + \sum_{\bar{E}_j \leq 0} \bar{E}_j(\bar{x}_j - d_{2j})$$

$$\beta(x, S_B) = \bar{y}_1 \bar{W}_{21} + \bar{E}_2(\bar{x}_2 - d_{12}) = \frac{3}{2}(-1+1) = 0$$

d'où le support plan $\{\bar{x}, \bar{S}_B\}$ est optimal
avec, $\bar{x} = (1, -1)$ est le plan optimal
$\bar{S}_B = \{\{I_B\}, \{J_B\}\} = \{\{2\}, \{1\}\}$ est le support optimal
donc on arrête le processus.

et la valeur optimale de la fonction objectif est :

$$f(\bar{x}) = 2\bar{x}_1 - 3\bar{x}_2 = 2(1) - 3(-1) = 2 + 3 = 5$$

Conclusion Générale

L'objectif de notre travail était de résoudre un problème d'optimisation linéaire avec des contraintes bornées.

Tout d'abord on s'est intéressée à des notions principales d'une programmation linéaire et la résolution du problème a été avec la méthode du simplexe primale .

On a résolu un problème tel que les contraintes sont des égalités ($Ax = b$) avec la méthode adaptée, ensuite nous avons utilisé un problème dual. Nous nous sommes intéressées à la généralisation de la méthode adaptée pour le cas du problème dual dans le changement du support à pas court et à pas long, nous avons proposé un algorithme de cette méthode qu'on a implémenté sur un exemple numérique.

Puisque la méthode adaptée est une amélioration de la méthode du simplexe tel que :
-Le changement de plan puis le support.
-Le plan admissible est un point de l'intérieur de polyèdre.
Par contre dans la méthode de base simplexe :
-Le support et le plan change au même temps.
-Le plan admissible es un des sommets de polyèdre.

On s'est basées dans notre travail à la résolution d'un problème de programmation linéaire par la méthode adaptée avec des contraintes bornées.

L'itération de l'algorithme consiste au changement

$$\{x, S_B\} \longrightarrow \{\bar{x}, \bar{S}_B\} \textit{ telle que : } \beta(\bar{x}, \bar{S}_B) \leq \beta(x, S_B)$$

En d'autre termes, une itération de la méthode adaptée est basée sur la décroissance de la valeur du suboptimalité.
Cette itération est constituée de deux procédures :
-Changement du plan.
-Changement du support.

1. La procédure du changement du plan $x \longrightarrow \bar{x}$ consiste à diminuer $\beta(S_B)$.

2. La procédure du changement du support $S_B \longrightarrow \bar{S}_B$ consiste à diminuer $\beta(\bar{S}_B)$.

D'où le changement de plan consiste à augmenter $f(x)$ et le changement du support consiste à diminuer $\Phi(\lambda)$.

Cette méthode adaptée se différencie de la méthode du simplexe du fait que le plan et la base ne sont pas liés, aussi elle nous permet d'avoir une solution approchée. Les méthodes directes sont donc supposées être robuste, mais sont en contre partie relativement pas précises.

Pour terminer, nous estimons qu'il est intéressant de compléter ce travail par une application numérique.

En perspective de ce travail il est souhaitable de raffiner l'étude, pour l'application de cette méthode à des exemples pratiques, et pour traiter des structures plus complexes, comme par exemple :
-Généralisation de cette méthode aux problèmes de programmation non linéaire.
-Généralisation de cette méthode aux problèmes de programmation quadratique.
-Généralisation de cette méthode aux problèmes stochastiques.

Bibliographie

[1] Aidene.M et Oukacha.B
Programmation Linéaire, Pages bleus Edition 2007.

[2] Assas.O, Boulil.M
Etude de programmation linéaire dans un environnement incertain, Mémoire de Master Université de Boumerdes 2016.

[3] G.Dantzig
Programmation Linéaire, Edition Dunod,Paris 1998.

[4] Hameurlain.A
Une nouvelle approche simpliciale en programmation linéaire, Thèse de Magister Université de Constantine 2006.

[5] R.Gabasov
Adaptive method of solving linear programming problems, Byelorussian State University, Minsk, Belarus 1980.

[6] R. Gabasov, V.S. Glushenkov, F. M. Kirillova, A.V. Pokayev, A.A. Senko, and A.I. Tyatyshkin.
Algorithms of optimization of linear and non-linear systems. In G.Ferrate and E.A.Puente, editors, Software for computer control, Proceedings of the Third IFAC/IFIP Symposim, Madrid (Spain), 1982.

[7] Kennouche.S
L'usage des téchnique de la PL dans la planification de la production : Optimisation linéaire du coût de revient dans l'entreprise Alcoste, Thèse de Magister Université Béjaia 2016.

[8] Lochmot.O
Résolutions des problèmes de programmation linéaire avec des contrainte bornée,.

[9] M.Minoux
Programmation Mathématique Théorie et algorithmes, volume 1 Borbas et C.n.e.t-Enst 1983.

[10] Oukacha.O
Méthode directe d'optimisation de problème de contrôle, Thèse de doctorat Université Tizi-Ouzou 2016.

[11] Oukacha.O
Problème d'analyse de sensibilité en programmation linéaire, Mémoire de Master Université Tizi-Ouzou 2011.