

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE AKLI MOAND OULHADJE-BOUIRA



Faculté des Sciences et des Sciences Appliquées
Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études

Présenté par :

OUCHEFOUNE Ahmed

LAMRI Karim

En vue de l'obtention du diplôme de **Master** en :

Filière : **MATHEMATIQUES**

Option : **Recherche Opérationnelle**

Thème :

**Résolution d'un problème de contrôle optimal
avec PMP et MA**

Devant le jury composé de :

M. HAMID karim

Mme OUIDJA Daya

M. AKKOUCHE Abderrahmane

MAA

MAA

MCB

UAMOB

UAMOB

UAMOB

Présidente

Encadreur

Examineur

Année Universitaire 2018/2019

Remerciements

Nous remercions tout d'abord **Allah** le tout puissant de m'avoir donné le courage et la patience afin de mener à réaliser ce modeste travail.

Nos sincères remerciement et notre profonde gratitude à notre promotrice **Mme OUIDJA Daya**, pour nous avoir dirigé, orienté, soutenu et dont les compétences intellectuelles, l'expérience, la modestie, la patience et la disponibilité ont grandement contribué à l'aboutissement de ce travail.

Nous remercions également les membres du jury **M HAMID KARIM** le président, **M AKKOUCHE Abderrahmane** l'examineur d'avoir accepter de juger notre travail.

Un grand merci à nos parents, notre familles, les personnes les plus proches, pour leur encouragements et leurs soutiens. Sans oublier de remercier les collègues pour tout les beau moment qu'on a passée ensemble.

Finalement, nos remerciements vont à tous ceux qui ont contribué d'une quelconque manière à l'aboutissement de ce travail.

Table des matières

Introduction	3
1 Généralités sur le contrôle optimal	7
1.1 Position du problème	7
1.1.1 Objet de la commande	8
1.1.2 Le but de la commande	8
1.1.3 Classe des commandes admissibles	8
1.2 Problème de Mayer-Lagrange	9
1.3 Commandabilité	10
1.3.1 Commandabilité des systèmes linéaires	11
1.3.2 Commandabilité des systèmes non linéaires	14
1.4 Observabilité	16
1.4.1 Définition et critères d'observabilité	16
1.5 Stabilisation	20
2 Principe du Maximum de Pontryagin	23
2.1 Position de problème	23
2.1.1 Condition de transversalité	26
2.2 Problème en temps minimum	28
2.2.1 Formulation du problème	28
2.3 Nature des solutions	31
2.3.1 Solution bang-bang	31
2.3.2 Solution bang-singulier	31
2.4 Exemple d'application	33
3 Méthode direct de résolution d'un problème de contrôle optimal	36
3.1 Concepts de base	37
3.2 Support contrôle	37
3.3 Accroissement de la fonctionnelle	39
3.4 Calcul de la valeur de suboptimalité	41
3.5 Critère d'optimalité	41
3.5.1 Critère d' ε -optimalité	43
3.5.2 Détermination d'un support-contrôle de départ	46
3.6 Méthode de résolution	46
3.6.1 Changement de commande	46
3.6.2 Changement de support	50
3.6.3 Algorithme de la méthode	54

4	Application numérique	58
4.1	Introduction	58
4.2	Exemple numérique	58
4.3	Résolution par le principe du maximum du Pontriaguin "PMP"	59
4.4	Résolution par la méthode direct "Méthode Adaptée" "MA"	64
4.5	Comparaison entre PMP et MA	68
4.6	Conclusion	69
	Conclusion générale	73
	Bibliographie	73

Introduction général

L'optimisation est une branche des mathématiques et de l'informatique en tant que disciplines. Elle intervient pratiquement dans tous les processus de modélisation actuels et elle joue un rôle très important dans beaucoup de domaines. Qu'il s'agisse de problèmes de la recherche opérationnelle, de mathématiques appliquées, d'analyse, d'analyse numérique, de statistiques, de programmation linéaire, ou encore en théorie du contrôle.

Le problème d'optimisation consiste à déterminer une solution qui maximise ou minimise l'objectif quantitatif, tout en respectant éventuellement certaines contraintes. Il existe plusieurs types de problèmes d'optimisations qui sont classés selon leurs fonctions objectifs et leurs contraintes : optimisation linéaire, optimisation non-linéaire, optimisation linéaire quadratique et optimisation convexe, etc.

Les problèmes d'optimisation sont très divers par leurs natures et leurs structures, alors chaque type de ces problèmes sera résolu d'une manière différente [13, 36, 38]. Le premier algorithme qui permet de résoudre un problème d'optimisation linéaire (programmation linéaire) s'appelle la méthode du simplexe, cette méthode a été introduite par George Dantzig à partir de 1947 [3], et en 1970 Klee et Minty prouvent que l'algorithme du simplexe est de complexité exponentielle [19]. Au début des années 80, et en 1984, Karmarkar a mis au point une nouvelle méthode appelée méthode de point intérieur de complexité polynomiale. Il a montré que celle-ci a des performances supérieures à celles de l'algorithme du simplexe [17]. Depuis, il y a eu beaucoup des travaux de recherche portant sur les méthodes de point intérieur introduite par R.Gabasov et F.M.Kirillova, des articles ont également été publiés dans des journaux scientifiques, et ainsi que quelques ouvrages [29, 10, 23, 37]. Au début de son invention, elle a été appliquée à différents types de problèmes de programmation mathématique [23, 25], par la suite à des problèmes de contrôle optimal [6, 30, 32] .

La théorie du contrôle analyse les propriétés des systèmes commandés, c'est-à-dire des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (ou contrôle). Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final en tenant compte éventuellement de certains critères. Les systèmes étudiés sont multiples : systèmes différentiels, systèmes discrets, systèmes avec bruit, etc. Leurs origines sont très diverses : mécanique, électricité, électronique, biologie, chimie, économie, etc. L'objectif peut être de stabiliser le système pour le rendre insensible à certaines perturbations (stabilisation), ou encore de déterminer des solutions optimales pour un certain critère d'optimisation (contrôle optimal). En mathématique, la théorie du contrôle optimal s'inscrit dans la continuité du calcul des variations. Elle est apparue après la seconde guerre mondiale, répondant à des besoins pratiques de guidage, notamment dans le domaine de l'aéronautique et de la dynamique du vol. La théorie du contrôle optimal est très liée à la mécanique classique, en particulier aux principes

variationnels de la mécanique (principe de Fermat, équations d'Euler-Lagrange,...).

Le point clé de cette théorie est le principe du maximum de Pontriaguine, formulé par L. S. Pontriaguine en 1956 [28] qui donne une condition nécessaire d'optimalité et permet ainsi de calculer les trajectoires optimales (pour plus de détails sur l'histoire de cette découverte, voir [12]). Un problème de contrôle optimal se décompose en deux parties : pour déterminer une trajectoire optimale joignant un ensemble initial à une cible, il faut d'abord savoir si cette cible est atteignable, c'est le problème de contrôlabilité. Pour les systèmes de contrôle linéaires en dimension finie, il existe une caractérisation très simple de la contrôlabilité, apparue dans les années soixante avec les travaux de R. E. Kalman [16], et pour les systèmes non linéaires, le problème mathématique de contrôlabilité est beaucoup plus difficile. En suite, une fois le problème de contrôlabilité résolu, il faut chercher parmi toutes les trajectoires possibles celle qui donne le coût minimum (ou maximum). Pour la résolution du problème de contrôle optimal, on dispose de deux grandes classes de méthodes à savoir : les méthodes directes et les méthodes indirectes.

- Une autre approche pour la résolution des problèmes de contrôle optimal, a été proposée par R. Gabasov et F.M. Kirillova dans les années 80, appelée méthode adaptée de la programmation linéaire. Cette méthode est une généralisation de la méthode de simplexe [4, 5], à l'opposé de celle-ci, la méthode adaptée atteint l'optimum du problème en passant par l'intérieur de l'ensemble des solutions réalisables. Elle a été utilisée avec succès pour résoudre des problèmes de programmation linéaire [10], ensuite à la résolution des problèmes de contrôle optimale des systèmes continus [7]. Donc c'est une méthode directe.
- Les méthodes indirectes, quant à elles, consistent à appliquer le principe du maximum de Pontriaguine (PMP) [28]. Ces méthodes sont à la fois précises et rapides, mais en revanche elles sont très sensibles à l'initialisation [24].

Le présent travail est donc divisé en quatre chapitres, organisé de la manière suivante : Dans le premier chapitre, intitulé Généralités sur le contrôle optimal. Nous commençons par une présentation générale de la forme de problème du contrôle optimal, et nous donnons une position de notre problème. Par la suite, nous étudions la notion de commandabilité des systèmes. Nous limitons notre étude aux systèmes dynamiques linéaires autonomes et non autonomes. La commandabilité des systèmes linéaires est développée par Kalman [15]. Enfin, nous terminons ce chapitre par la présentation des notions d'observabilité et la stabilité [33].

Dans le deuxième chapitre, intitulé Principe du maximum de Pontriaguine nous commençons par une présentation de la position du problème. Après nous étudions les conditions de transversalité, par la suite nous étudions le problème en temps minimal et les nature des solutions. Enfin nous terminons ce chapitre par un exemple contrôle de production et consommation où le contrôle sera la fonction de la production restante.

Le troisième chapitre est dédié à la description d'autres méthodes de résolution de problèmes de contrôle optimal pour les systèmes dynamiques linéaires.

Tout d'abord, nous présentons une méthode directe appelée la méthode Adaptée qui est développée par R.Gabasov durant les années 80 [9]. La méthode Adaptée est issue de la programmation linéaire. L'avantage de cette méthode est qu'elle utilise un procédé qui démarre d'un point intérieur, elle permet aussi l'obtention d'une solution

approchée et résout les problèmes de contrôle optimal.

Le dernier chapitre expose les résultats numériques d'un exemple académique, nous traitons cet exemple numérique par deux méthodes : le principe du maximum de Pontryagin (PMP), et la méthode adaptée, et nous terminons par une comparaison entre les résultats obtenus.

Chapitre 1

Généralités sur le contrôle optimal

Introduction

Ce chapitre est structuré de la manière suivante : la section 1.1 est dédiée à la description d'un modèle générale de problème du contrôle optimal. La section 1.2 est consacrée au problème Mayer-Lagrange. Dans la section 1.3 nous étudions la commandabilité, la commandabilité des systèmes linéaires est décrite dans la section 1.3.1, et pour la commandabilité des systèmes non linéaires dans la section 1.3.2. L'observabilité est représenté dans la section 1.4, et la stabilisation dans la section 1.5.

1.1 Position du problème

Pour résoudre un problème d'optimisation, il faut d'abord définir un objectif d'où la nécessité d'une définition du problème en termes physiques et sa modélisation en termes mathématiques. En connaissant la fonction à optimiser, l'état, le modèle et les paramètres du système, le problème est de déterminer la meilleur commande qui optimise l'objectif, par exemple, une commande en temps optimal c'est à dire réaliser l'objectif d'un processus dans le temps le plus court.

A l'aide des commandes u on désire faire de sorte que le système suive une trajectoire déterminée ou atteigne un état fixe ou minimise le long d'une trajectoire un ou plusieurs critères (énergétique, économique,...) donnés à l'avance.



FIGURE 1.1 – problème du contrôle optimal

Un problème de commande optimale est défini par les éléments suivants :

1.1.1 Objet de la commande

On suppose que l'état x est solution d'une équation différentielle :

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0 \quad (1.1)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est la position de l'objet à l'instant t , $x(t_0) \in \mathbb{R}$ la position initiale du système, et $u(t)$ la commande

1.1.2 Le but de la commande

Dans un problème de contrôle, le but de la commande consiste à ramener l'objet considéré de la position initial $x_0 = x(t_0)$, ($x_0 \in G_0$) à la position $x_1(t_1)$, ($x_1 \in G_1$), (où G_0 est l'ensemble de départ, G_1 est l'ensemble d'arrivée (accessibilité)).

1.1.3 Classe des commandes admissibles

U est l'ensemble des contrôles admissibles qui peut être bornés, non bornés ou de type Bang-Bang .

$$U = \{u(t), t \in T = [t_0, t_f]\} \quad (1.2)$$

Commande bornée

Dans beaucoup de problèmes de contrôle, on peut minorer et majorer les $u_j(t)$ par des constantes. Dans la suite, nous considérons ce type de problème avec $a_j \leq u_j \leq b_j$. Notons que l'on peut remplacer u_j par v_j on posant $u_j = \frac{1}{2}(a_j + b_j) + \frac{1}{2}(a_j - b_j)v_j$ et ainsi v_j est aussi intigrable et l'on a $-1 \leq v_j \leq 1$. Danc lorsque U est borné, il est toujours pratique de ce ramener à des commandes entre -1 et 1.

Commande Bang-Bang

On suppose que U est un polyèdre (cube) $[-1, 1]^m$ dans \mathbb{R}^m . Un contrôle $u \in U$ est appelé contrôle Bang-Bang si pour chaque instant t et chaque indice $j = 1, \dots, m$ on a $|u_j(t)| = 1$. En d'autres termes, une commande Bang-Bang est une commande qui possède ou moins un switch.

Critère de qualité

L'objectif, lors de la formulation d'un problème de contrôle, est de fournir la motivation physique pour la sélection d'une mesure de qualité pour le système. Le problème revient à définir une expression mathématique qui, lorsqu'elle est optimisée, indique que le système atteint un état désirable. Donc, choisir une mesure de qualité, est une traduction en termes mathématiques des exigences physiques du système. Le critère de qualité, appelé aussi coût ou fonction objectif, est généralement décrit par la formule

$$J(x, u) = g(t_f, x_f) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(t, x, u) dt \quad (1.3)$$

Cette fonctionnelle comporte deux parties : $g(t_f, x_f)$ est le coût terminal, c'est une sorte de pénalité liée à la fin de l'évolution du système au temps final t_f ; il a son importance lorsque t_f est libre, si non il est constant. Le second terme intervenant dans la fonction objectif $\int_{t_0}^{t_f} f_0(t, x, u) dt$ dépend de l'état du système tout au long de la trajectoire de la solution, définie par les variables d'état. Cette trajectoire dépend aussi du temps t mais surtout des variables de contrôle u . C'est une fonction d'efficacité de chaque commande sur l'intervalle T . On peut classer les fonctions objectifs en deux critères physiques de performance :

i) Temps optimal :

On parle d'un problème en temps optimal lorsque $f_0(t, x, u) = 1$, $g(t_f, x_f) = 0$ et le temps final t_f est libre dans l'expression de $\min_u \int_{t_0}^{t_f} 1 dt$.

ii) Coût optimal :

On parle d'un problème en coût optimal lorsque le temps final t_f est fixé dans l'expression

$$\min_u g(t_f, x_f) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(t, x, u) dt \quad (1.4)$$

Évidemment, il existe des problèmes qui combine les deux critères physiques de qualité, et on parlera dans ce cas d'un problème de contrôle en temps et en coût optimal.

Si dans l'expression de J , f_0 est proportionnelle à u^2 , on parle alors d'un coût quadratique.

Si u est un contrôle scalaire et f_0 est proportionnelle à u , on parle de problème de contrôle à coût d'approvisionnement. Lorsque les équations d'état $\dot{x} = f(x, u)$ ne dépendent pas explicitement de la variable t , on parle dans ce cas de problème autonome. Si t est présent dans les équations d'état on parle de problème non-autonome.

1.2 Problème de Mayer-Lagrange

Le problème de Mayer-Lagrange est donné sous la forme d'un système

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), x(0) = x_0, x(t_f) = x_f, u \in U, t \in [t_0, t_f], \quad (1.5)$$

l'objectif étant de minimiser le coût

$$J(t_f, u) = g(t_f, x_f) + \int_{t_0}^{t_f} f_0(t, x, u) dt \quad (1.6)$$

Lorsque $g = 0$ dans l'expression de la fonctionnelle J , on parlera d'un problème de Lagrange, lorsque $f_0 = 0$, on parlera d'un problème de Mayer.

1.3 Commandabilité

Pour certains types de problème, avant leur résolution, on s'intéresse à l'existence de leurs solutions en utilisant les notions de commandabilité ou de contrôlabilité. Elle consiste à faire passer le système d'un état initial x_0 à un état final x_1 prescrit en un temps fini. Une fois le problème de contrôlabilité résolu, on peut vouloir passer de l'état initial à l'état final en minimisant un certain critère.

On veut répondre à la question suivante : Etant donné le système (1.5), où peut-on aller en temps t_f en faisant varier le contrôle u . On rappelle tout d'abord la notion d'ensemble accessible.

Ensemble accessible

Soient A et B deux applications L^∞ sur l'intervalle U de \mathbb{R} à valeurs respectivement dans $M_{n,n}(\mathbb{R})$ et $M_{n,m}(\mathbb{R})$ où $M_{r,p}$ est l'ensemble des matrices à r lignes et p colonnes, à coefficients dans \mathbb{R} .

Considérons un système contrôlé (1.5) sous la forme matricielle suivant :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), x(0) = x_0, t \in [0, t_f]$$

la solution de système différentiel (1.5) est donnée par la formule de Cauchy :

$$x(t) = F(t)(x_0 + \int_0^t (F(\tau))^{-1} B(\tau)u(\tau) d\tau), t \in T$$

où $F(t)$ est la résolvant du système : $\dot{F}(t) = A(t)F(t), F(0) = I_n, I_n$: matrice identité.

Définition 1.3.1. L'ensemble des points accessibles à partir de x_0 en un temps $t_f > 0$ est défini par :

$$Acc(x_0, t_f) = \{x_u(t_f), u \in L^\infty([t_0, t_f], \Omega)\}$$

où $L^\infty([t_0, t_f], \Omega)$ est l'ensemble des applications mesurables u de $[0, t_f]$ essentiellement bornées et $x_u(\cdot)$ est la solution du système (1.5) associée à u .

Ainsi, $Acc(x_0, t_f)$ est l'ensemble des extrémités des solutions du système (1.5), en temps t_f pour différentes valeurs de u .

Théorème 1.3.1. [20] Considérons le système de contrôle linéaire dans \mathbb{R}^n :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

où $\Omega \in \mathbb{R}^m$ est compact, Soit $t_f > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Alors pour tout $t \in [t_0, t_f]$, $Acc(x_0, t_f)$ est compact, convexe, est varié continûment avec t sur $[t_0, t_f]$.

Définition 1.3.2. Un système de contrôle est dit contrôlable si on peut l'amener, en temps fini, d'un état initial vers un état final désiré au moyen d'un contrôle. Autrement dit, le système contrôlé (1.5) est dit contrôlable en temps t_f si

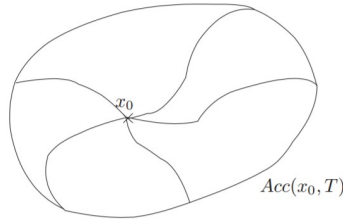


FIGURE 1.2 – Ensemble accessible

$$Acc(x_0, t_f) = \mathbb{R}^n, \text{ pour tout } x_0 \in G_0$$

c'est-à-dire que pour tout $x_0, x_f \in \mathbb{R}^n$, il existe

$$u(\cdot) : [0, t_f] \rightarrow U, \text{ tel que : } x_f = x(t_f, x_0, u(\cdot)).$$

Le système contrôlé (1.5) est dit contrôlable en temps quelconque t depuis x_0 si :

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{t_f > 0} Acc(x_0, t_f).$$

1.3.1 Commandabilité des systèmes linéaires

Définition 1.3.3. Un système défini par :

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u, \quad x(t_0) = x_0 \quad (1.7)$$

est dit non autonome, et il est dit autonome si les matrices $A(t)$ et $B(t)$ sont constantes,

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0$$

Cas non autonome

Considérons le système dynamique linéaire

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0$$

sans contraintes sur la commande u (i.e $u(t)$ est une fonction mesurable à valeur dans \mathbb{R}^m). Soit $\phi(t, s)$ la résolvante du système (1.7). La trajectoire correspondant à l'état initial $x(0) = x_0$ est

$$x(t) = \phi(t, 0)x_0 + \int_0^t \phi(t, s)B(s)u(s)ds.$$

Un critère de commandabilité est donné par le théorème suivant :

Théorème 1.3.2. *Le système précédent (1.7) est complètement commandable si et seulement s'il existe un instant $t > 0$ tel que la matrice $F(t, 0)$ soit définie positive, $F(t, s)$ étant définie par :*

- Soit par l'intégrale :

$$F(t, s) = \int_s^t \phi(t, \tau)B(\tau)B'(\tau)\phi'(t, \tau) dt$$

- Soit de façon équivalente par l'équation différentielle :

$$\frac{d}{dt}F(t, s) = A(t)F + FA'(t) + B(t)B'(t), F(0, 0) = 0.$$

Cas autonome

Définition 1.3.4. Le système autonome $\dot{X} = AX + BU$ où l'état $x \in \mathbb{R}^n$, la commande $u \in \mathbb{R}^m$ et les matrices A et B sont constantes et de taille $n \times n$ et $n \times m$ respectivement, est contrôlable (commandable) si pour tous les états $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, il existe une commande mesurable, bornée $u(t)$ telle que la trajectoire associée relie x_0 et x_1 en un temps fini t_f .

Critère de Kalman

Il existe une caractérisation algébrique de la contrôlabilité d'un système linéaire due à Kalman

Théorème 1.3.3. (Critère de Kalman) [33]

Le système autonome $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + r(t)$ est commandable en temps t_f si et seulement si la matrice de commandabilité de Kalman C est de rang $n = \dim(x)$, on écrit :

$$\text{rang}(A|B) = n$$

Remarque 1.3.1. La matrice K est appelée matrice de Kalman et la condition $\text{rang}(K) = n$ est appelée condition de Kalman, elle ne dépend pas de la condition initiale x_0 , ni de temps final t_f . Ceci signifie que si un système linéaire autonome est contrôlable en temps t_f depuis x_0 , alors il est contrôlable en tout temps depuis tout point. Ce théorème donne ainsi une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité dans le cas où les matrices A et B ne dépendent pas de la variable de temps t .

Exemple 1.3.1. Soit le système décrit par l'équation :

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nous sommes dans la situation où $n = 2$ états et $m = 1$ entrée.
Et la matrice de commandabilité associée :

$$C(A, B) = [B \quad AB] \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

alors

$$C(A, B) = [B \quad AB] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous avons $\text{rang}C(A, B) = 1 < 2 = n$ donc le système n'est pas commandable.

Exemple 1.3.2. Soit le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1 + x_2 + u_1 \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1 + 3x_2 + u_2 \end{cases}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous sommes dans la situation où $n = 2$ états et $m = 2$ entrées.
Et la matrice de commandabilité associéé :

$$C(A, B) = [B \quad AB] \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

alors

$$C(A, B) = [B \quad AB] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Nous avons $\text{rang}C(A, B) = 2 = n$ donc le système est commandable.

1.3.2 Commandabilité des systèmes non linéaires

Considérons un système de contrôle non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.8)$$

Définitions et préliminaires

Etant donné un point $x_1 \in \mathbb{R}^n$ trouver un temps t_f et un contrôle u sur I tel que la trajectoire x_u associée à u , vérifie :

$$x_u(t_0) = x_0, \quad x_u(t_f) = x_1 \quad (1.9)$$

Ceci conduit à la définition suivante :

Définition 1.3.5. Soit $t_f > 0$. L'application entrée-sortie en temps t_f du système contrôlé (1.5) initialisé à x_0 est l'application

$$\begin{aligned} E_{t_f} : U &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ u &\rightarrow x_u(t_f) \end{aligned}$$

où U est l'ensemble des contrôles admissibles, *i.e.* l'ensemble des contrôles u tels que la trajectoire associée est bien définie sur $[t_0, t_f]$.

Autrement dit, l'application entrée-sortie en temps t_f associée à un contrôle u le point final de la trajectoire associée à u .

La régularité en E_{t_f} dépend bien entendu de l'espace de départ et de la forme du système .

Proposition 1.3.1. [34] *Considérons le système (1.5) où f est de classe C^p , $p \geq 1$ et soit $U \subset L^\infty([0, t_f], \mathbb{R}^m)$ le domaine de définition de E_t , c'est-à-dire l'ensemble des contrôles dont la trajectoire associée est bien définie sur $[0, t_f]$. Alors U est un ouvert de $L^\infty([0, t_f], \mathbb{R}^m)$, et E_{t_f} est C^p au sens L^∞ .*

De plus, la différentielle (au sens de Fréchet) de E_{t_f} en un point $u \in U$ est donnée par le système linéarisé en u de la manière suivante. Posons, pour tout $t \in [0, t_f]$,

$$\begin{cases} A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_u(t), u(t)), \\ B(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(t, x_u(t), u(t)) \end{cases}$$

Le système de contrôle linéaire

$$\begin{cases} \dot{y}_v(t) = A(t)y_v(t) + B(t)v(t) \\ y_v(0) = 0 \end{cases}$$

est appelé système linéarisé le long de la trajectoire $x_u(\cdot)$. La différentielle de Fréchet de E_{t_f} en u est alors l'application $dE_{t_f}(u)$ telle que, pour tout $v \in L^\infty([0, t_f], \mathbb{R}^m)$,

$$dE_{t_f}(u).v = y_v(t_f) = F(t_f) \int_0^{t_f} F^{-1}(s)B(s)v(s)ds$$

où F est la résolvante du système linéarisé, i.e. la solution matricielle de

$$\begin{cases} \dot{F} = AF, \\ F(0) = Id. \end{cases}$$

Démonstration 1.3.1. *Pour la démonstration du fait que U est ouvert. Par hypothèse $u(\cdot)$ et sa trajectoire associée $x(\cdot, x_0, u)$ sont définis sur $[0, t_f]$. L'ensemble des contrôles étant les applications mesurables et bornées muni de la norme L^∞ , l'application $E(t_f)$ est de classe C^p sur un voisinage de $u(\cdot)$ en vertu des théorème de dépendance par rapport à un paramètre. Exprimons sa différentielle au sens de Fréchet. Soit $v(\cdot)$ un contrôle fixé, on note $x(\cdot) + \delta x(\cdot)$ la trajectoire associée à $u(\cdot) + v(\cdot)$, issue en $t = 0$ de x_0 . Par un développement de Taylor, on obtient*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x + \delta x)(t) &= f(t, x(t) + \delta x(t), u(t) + v(t)) \\ &= f(t, x(t), u(t)) + \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t), u(t))\delta x(t) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial u}(t, x(t), u(t))v(t) \\ &\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial u}(t, x(t), u(t))(\delta x(t), v(t)) + \dots \end{aligned}$$

Par ailleurs, $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$, donc

$$\frac{d}{dt}(\delta x)(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t), u(t))\delta x(t) + \frac{\partial f}{\partial u}(t, x(t), u(t))v(t) + \dots$$

En écrivant $\delta x = \delta_1 x + \delta_2 x + \dots$ où $\delta_1 x$ est la partie linéaire en v , $\delta_2 x$ la partie quadratique, etc, et en édentifiant, il vient

$$\frac{d}{dt}(\delta_1 x)(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t), u(t))\delta_1 x(t) + \frac{\partial f}{\partial u}(t, x(t), u(t))v(t) = A(t)\delta_1 x(t) + B(t)v(t)$$

Or $x(0) + \delta x(0) = x_0 = x(0)$, donc $\delta x(0) = 0$ et la condition initiale de cette équation différentielle est $\delta_1 x(0) = 0$. On obtient

$$\delta_1 x(t_f) = M(t_f) \int_0^{t_f} M^{-1}(s)B(s)v(s) ds$$

où M est la résolvante du système homogène $\frac{d}{dt}(\delta_1 x)(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t), u(t))\delta_1 x(t)$, c'est-à-dire $\dot{M}(t) = A(t)M(t)$ avec $A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t), u(t))$ et $M(0) = I_n$. On observe que $\delta_1 x(t_f)$ est linéaire et continu par rapport $v(\cdot)$ en topologie L^∞ c'est donc la différentielle de Fréchet en $u(\cdot)$ de E_{t_f} .

Remarque 1.3.2. En générale E_{t_f} n'est pas définie sur $L^\infty([0, t_f], \mathbb{R}^m)$ tout entier à cause de phénomène d'explosion. Par exemple si on considère le système scalaire $\dot{x} = x^2 + u, x(0) = x_0$, on voit que pour $u = 1$ la trajectoire associée explose en $t = \frac{\pi}{2}$, et donc n'est pas défini sur $[0, t_f]$ si $t_f \geq \frac{\pi}{2}$.

1.4 Observabilité

Soit le système linéaire autonome suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases} \quad (1.10)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m, y(t) \in \mathbb{R}^p, A \in M_n(\mathbb{R}), B \in M_{n,m}(\mathbb{R}), C \in M_{p,n}(\mathbb{R})$ et $D \in M_{p,m}(\mathbb{R})$. Dans toute la suite, on peut supposer que $D = 0$: cela ne change rien aux résultats qui suivent.

1.4.1 Définition et critères d'observabilité

Notons $(x_u(t, x_0), y_u(t, x_0))$ la solution de (1.10) tel que $x_u(0, x_0) = x_0$

Définition 1.4.1. Le système (1.10) est observable en temps t_f si

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n \implies \exists u \in L^\infty([0, t_f], \mathbb{R}^m) \quad / \quad y_u(\cdot, x_1) \neq y_u(\cdot, x_2)$$

(Dans ce cas on dit que x_1 et x_2 sont distinguables).

Autrement dit, si x_1 et x_2 sont distinguables s'il existe un contrôle tel que les trajectoires observées diffèrent. De manière équivalente, on peut dire :

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n \quad \forall u \in L^\infty([0, t_f], \mathbb{R}^m) \quad y_u(\cdot, x_1) \neq y_u(\cdot, x_2) \implies x_1 = x_2,$$

i.e. la connaissance de la trajectoire observée détermine d'une manière univoque l'état initial.

L'intérêt de la notion d'observabilité est le suivant. Si on considère le système comme une boîte noire à laquelle on applique une entrée (contrôle, input) $u(t)$, et de laquelle émerge une sortie (observable, output) $y(t)$, la propriété d'être distinguable signifie la possibilité de différencier par des expériences de type entrée-sortie.

On est aussi motivé par la stabilisation. En effet, on a vu comment stabiliser un système par retour d'état. Or il peut s'avérer coûteux de mesurer l'état complet d'un système. On peut alors se demander si la connaissance partielle de cet état permet de reconstituer l'état complet (c'est la propriété d'observabilité), et de stabiliser le système entier : c'est la stabilisation par retour d'état dynamique, ou synthèse régulateur-observateur.

Théorème 1.4.1. [21] *Le système (1.10) est observable (en temps t_f quelconque) si et seulement si :*

$$\text{rang} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n$$

Démonstration 1.4.1. *Faisons une démonstration directe de ce théorème. on montre d'abord si le lemme fondamental suivant :*

Lemme 1.1. *Le système (1.10) est observable en temps t_f si et seulement si, pour le système observé $\dot{x} = Ax$, $y = Cx$, $x(0) = x_0$, et on a*

$$x_0 \neq 0 \implies y(\cdot) \not\equiv 0 \text{ sur } [0, t_f]$$

Preuve du lemme : *Le système (1.10) est observable en temps T si et seulement si*

$$\begin{aligned} (x_1 \neq x_2 \implies \exists u \in L^\infty([0, t_f], \mathbb{R}^m) / y_u(\cdot, x_1) \neq y_u(\cdot, x_2) \text{ sur } [0, t_f]) \\ (x_1 \neq x_2 \implies \exists u \in L^\infty([0, t_f], \mathbb{R}^m) \exists t \in [0, t_f] / \end{aligned}$$

\iff

$$Ce^{tA}x_1 + Ce^{tA} \int_0^t e^{-sA} Bu(s) ds \neq Ce^{tA}x_2 + Ce^{tA} \int_0^t e^{-sA} Bu(s) ds$$

$$\iff (x_0 = x_1 - x_2 \neq 0 \implies \exists t \in [0, t_f] / Ce^{tA}x_0 \neq 0)$$

$$\iff (x_0 \neq 0 \implies y(\cdot) \not\equiv 0 \text{ sur } [0, t_f] \text{ pour le système } \dot{x} = Ax, y = Cx, x(0) = x_0)$$

On est maintenant en mesure de montrer le théorème.

Si (1.10) n'est pas observable en temps t_f , alors

$$\exists x_0 \neq 0 \quad / \quad \forall t \in [0, t_f] \quad y(t) = 0,$$

i.e.

$$\forall t \in [0, t_f] \quad Ce^{tA}x_0 = 0,$$

D'où, par dérivations successives, et en prenant $t = 0$:

$$Cx_0 = CAx_0 = \dots = CA^{n-1}x_0 = 0$$

i.e.

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} x_0 = 0, \quad \text{et donc rang} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} < n$$

Réciproquement, si le rang de cette matrice est strictement inférieure à n , alors il existe $x_0 \neq 0$ tel que

$$Cx_0 = CAx_0 = \dots = CA^{n-1}x_0 = 0$$

et donc par le théorème d'Hamilton-Cayley :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad Ce^{tA}x_0 = 0,$$

et par conséquent le système (1.10) n'est pas observable.

Remarque 1.4.1. Pour un système linéaire autonome, l'observabilité a lieu en temps quelconque si elle a lieu en temps T .

Remarque 1.4.2. La notion d'observabilité pour un système linéaire autonome ne dépend pas de la matrice B

Remarque 1.4.3. On a

$$\text{rang} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n \Leftrightarrow \text{rang}(C^t \quad A^t C^t \quad \dots \quad [A^{n-1}]^t C^t) = n,$$

et par conséquent, le système $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$ est observable si et seulement si le système $\dot{x} = A^t + C^t u$ est contrôlable. C'est la dualité contrôlabilité/observabilité. Ce fait, très important, permet de transférer aux systèmes observés tous les résultats établis sur les systèmes contrôlés.

aurait peut prouver cette équivalence directement en utilisant l'application entrée-sortie, et en remarquant qu'une application linéaire $E : L^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ est surjective si et seulement si l'application adjointe $E^* : \mathbb{R}^n \rightarrow L^2$ est injective.

Corollaire 1.4.1. *Le système (1.10) est observable en temps T si et seulement si la matrice*

$$O(T) = \int_0^T e^{-sA} C^t C e^{-sA} ds$$

est inversible

Remarque 1.4.4. Dans le cas d'un système mono-sortie, la matrice d'observabilité est une matrice carrée

$$P = 1 \implies O(A, C) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Exemple 1.4.1. Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \\ Y(t) = CX(t) + DU(t), \end{cases}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -0 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad D = 0$$

$n = 3$ états, $p = 2$ sorties

$$O(A, C) = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} \quad O(A, C) \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$$

$$O(A, C) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 8 & 2 & 10 \\ 9 & 5 & 13 \\ 28 & 10 & 32 \end{pmatrix}$$

Matrice de rang 3 \implies système observable.

Exemple 1.4.2. Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + BU(t) \\ Y(t) = CX(t) + DU(t), \end{cases}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad C = (1 \quad 1) \quad D = 0$$

$n = 2$ états, $p = 1$ sortie

$$O(A, C) = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} \quad O(A, C) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

$$O(A, C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \quad \det O(A, C) = \beta - \alpha$$

Le système est observable si et seulement si le $\det O(A, C)$ est non nul, i.e.. $\beta \neq \alpha$.

1.5 Stabilisation

Un contrôle (ou une commande) en boucle ouverte est une application $t \rightarrow u(t)$ d'un intervalle de temps dans l'espace des contrôles. Un contrôle en boucle fermée, appelé aussi une rétroaction, ou un bouclage, est une application $u \rightarrow g(t)$ définie sur les variables d'état du système. Un des objectifs de la théorie du contrôle est de déterminer des rétroactions qui stabilisent le système en un état particulier.

Bouclage statique

Définition 1.5.1. (Bouclage statique) On dit que u est un bouclage statique du système

$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$, et $(x(t) \in G, u(\cdot) \in U)$ si sa valeur $u(t)$ à l'instant t ne dépend que de $x(t)$, c'est-à-dire $u = g(x)$ où g est une fonction.

Ce système s'écrit tout simplement

$$\dot{x}(t) = f(x, g(t)). \quad (1.11)$$

Il est représenté par la figure.

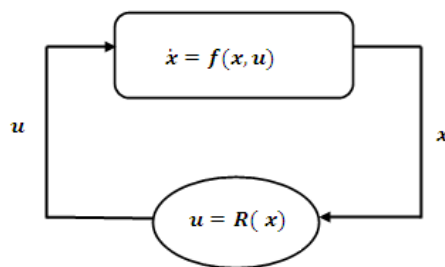


FIGURE 1.3 – bouclage

Le problème de la stabilité (ou régulation) consiste à maintenir le système près d'un équilibre x^* . Il s'agit donc de construire une loi de commande telle que x^* soit un équilibre asymptotiquement stable du système en boucle fermée (1.11).

Concepts de stabilité

On se donne un système

$$\dot{x}(t) = f(x). \quad (1.12)$$

tel que $f(0) = 0$, admettant $x = 0$ comme équilibre (noter que par un changement de variable on peut toujours ramener l'équilibre à l'origine).

Définition 1.5.2. L'équilibre $x = 0$ du système (1.11) est dit stable si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour toute solution $x(t)$ de (1.11), on ait

$$\|x(0)\| < \eta \Rightarrow \forall t \geq 0 \quad \|x(t)\| < \varepsilon.$$

Si l'équilibre n'est pas stable on dit qu'il est instable.

Définition 1.5.3. L'équilibre $x = 0$ du système (1.12) est dit attractif s'il existe $r > 0$ tel que pour toute solution $x(t)$ de (1.12) on ait

$$\|x(0)\| < r \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

l'équilibre $x = 0$ du système (1.12) est dit globalement attractif si pour toute solution $x(t)$ de (1.12) on a $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$. L'ensemble B défini par la propriété

$$x(0) \in B \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

s'appelle le bassin d'attraction de l'origine. Ainsi $x = 0$ est attractif si B est un voisinage de 0. Il est globalement attractif si $B = \mathbb{R}^n$.

Définition 1.5.4. L'équilibre $x = 0$ du système (1.12) est dit asymptotiquement stable s'il est stable et attractif. Il est dit globalement asymptotiquement stable (GAS) s'il est stable et globalement attractif.

Définition 1.5.5. L'équilibre $x = 0$ du système (1.12) est dit exponentiellement stable s'il existe $r > 0$, $M > 0$ et $\alpha > 0$ tels que pour toute solution $x(t)$ on ait

$$\|x(t)\| < r \Rightarrow \|x(t)\| \leq M \|x(0)\| e^{-\alpha t}, \text{ pour tout } t > 0.$$

L'équilibre $x = 0$ du système (1.12) est dit globalement exponentiellement stable s'il existe $M > 0$ et $\alpha > 0$ tels que pour toute solution $x(t)$ de (1.12) on a

$$\|x(t)\| \leq M \|x(0)\| e^{-\alpha t}, \text{ pour tout } t > 0.$$

On montre que, en générale d'après [18] stable n'implique pas attractif, attractif n'implique pas stable, exponentiellement stable implique asymptotiquement stable, et asymptotiquement stable n'implique pas exponentiellement stable.

Chapitre 2

Principe du Maximum de Pontryagin

Introduction

Le Principe du Maximum est développé par Lev Pontryagin et ses collaborateurs dans les années 50, constitue une généralisation de certains théorèmes issus du calcul des variations. Il fournit une condition nécessaire d'optimalité et permet d'exprimer le contrôle optimal en fonction de l'état du système et de l'état dit « adjoint ». Plusieurs variantes de ce principe existent, suivant la présence ou l'absence de contrainte sur le contrôle ou sur l'état, ou bien selon les hypothèses réalisées sur les espaces fonctionnels mis en jeu. [33]

2.1 Position de problème

Soit le problème dynamique suivant :

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (2.1)$$

et la fonctionnelle à optimiser est :

$$\min_u J(u) = \int_{t_0}^{t_f} f_0(t, x, u) + g(t, u, x) dt \quad (2.2)$$

$x \in \mathbb{R}^n$; $u \in U \subset \mathbb{R}^m$; $t \in [t_0, t_f]$; où

$U \subset \Omega \subset \mathbb{R}^m$: l'ensemble des commandes admissibles bornées et continues par morceaux sur $[t_0, t_f]$.

$f_0(x, u, t)$: la fonction de coût définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times [t_0, t_f]$, continue sur $\mathbb{R}^n \times \bar{\Omega} \times [t_0, t_f]$

où $\bar{\Omega}$: la fermeture de Ω .

$\frac{\partial f_0}{\partial x}(x, u, t)$: la dérivée de f_0 par rapport à x , continue sur $\mathbb{R}^n \times \bar{\Omega} \times [t_0, t_f]$.

$\frac{\partial f_0}{\partial t}(x, u, t)$: la dérivée de f_0 par rapport à t , continue sur $\mathbb{R}^n \times \bar{\Omega} \times [t_0, t_f]$.

$f(x, u, t)$, continue sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times [t_0, t_f]$.

x_0 est l'état du système (2.1) à l'instant t_0 (état initial).

x_1 est l'état du système (2.1) à l'instant t_f (état terminal ou final).

Le problème consiste à transférer le point représentatif de l'état x_0 à l'état x_f tout en minimisant la fonctionnelle J .

Définition 2.1.1. On peut rassembler les équations (2.1)-(2.2) en utilisant la fonction $H(x, p_0, p, u, t)$ définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \bar{\Omega}$ dans \mathbb{R} tel que :

$$H(x, p_0, p, u, t) = p^0 f_0(x, u, t) + \langle p, f(x, u, t) \rangle.$$

$H(x, p, u)$ est appelée : fonction Hamiltonienne.

Les fonctions $H(x, p, p, u, t)$ et $\frac{\partial H}{\partial x} H(x, p, p, u, t)$ sont continues sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \bar{\Omega}$

Définition 2.1.2. La fonction p découle de la résolution du système d'équations aux variables auxiliaires p_0, p_1, \dots, p_n suivants :

$$\dot{p} = - \sum_{k=0}^n \frac{\partial H^k}{\partial x_i}(x, u, t) p_k, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (\alpha)$$

Le système (α) est linéaire et homogène

Théorème 2.1.1. *On considère le système de contrôle dans \mathbb{R}^n*

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad (2.3)$$

où $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^1 et où les contrôles sont des applications mesurables et bornées définies sur un intervalle $[0, t_e(u)[$ de \mathbb{R}^+ et à valeurs dans $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Soient G_0 et G_1 deux sous-ensembles de \mathbb{R}^n . On note U l'ensemble des contrôles admissibles u dont les trajectoires associées relient un point initial de G_0 à un point final de G_1 en temps $t(u) < t_e(u)$. Par ailleurs on définit le coût d'un contrôle u sur $[t_0, t]$

$$C(t, u) = \int_0^t f_0(s, x(s), u(s)) ds + g(t, x(t)), \quad (2.4)$$

où $f_0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sont C^1 et $x(\cdot)$ est la trajectoire solution de (2.3) associée au contrôle u .

On considère le problème de contrôle optimal suivant : déterminer une trajectoire reliant G_0 à G_1 et minimisant le coût. Le temps final peut être fixé ou non.

Si le contrôle $u \in U$ associé à la trajectoire $x(\cdot)$ est optimal sur $[t_0, t_f]$, alors il existe une application $p(\cdot) : [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$ absolument continue appelée vecteur adjoint, et un réel $p^0 \leq 0$, tels que le couple $(p(\cdot), p^0)$ est non trivial, et tels que, pour presque tout $t \in [t_0, t_f]$,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)), \\ \dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)), \end{cases} \quad (2.5)$$

où $H(t, x, p, p^0, u) = \langle p, f(t, x, u) \rangle + p^0 f_0(t, x, u)$ est le Hamiltonien du système, et on a la condition de maximisation presque partout sur $[t_0, t_f]$

$$H(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) = \max_{v \in \Omega} H(t, x(t), p(t), p^0, v). \quad (2.6)$$

Si de plus le temps final pour joindre la cible G_1 n'est pas fixé, on a la condition au temps final t_f

$$\max_{v \in \Omega} H(t_f, x(t_f), p(t_f), p^0, v) = -p^0 \frac{\partial g}{\partial t}(t_f, x(t_f)). \quad (2.7)$$

Si de plus G_0 et G_1 (ou juste l'un des deux ensembles) sont des variétés de \mathbb{R}^n ayant des espaces tangents en $x(0) \in G_0$ et $x(t_f) \in G_1$, alors le vecteur adjoint peut être construit de manière à vérifier les conditions de transversalité aux deux extrémités (ou juste l'une des deux)

$$p(0) \perp_{t_f x(0)} G_0 \quad (2.8)$$

et

$$p(t_f) = -p^0 \frac{\partial g}{\partial x}(t_f, x(t_f)) \perp_{t_f x(t_f)} G_1. \quad (2.9)$$

Remarque 2.1.1. Si le contrôle u est continu au temps t_f , la condition (2.6) peut s'écrire

$$H(t_f, x(t_f), p(t_f), p^0, u(t_f)) = -p^0 \frac{\partial g}{\partial t}(t_f, x(t_f)). \quad (2.10)$$

Remarque 2.1.2. Si la variété G_1 s'écrit sous la forme

$$G_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F_1(x) = \dots = F_p(x) = 0\}, \quad (2.11)$$

où les F_i sont des fonctions de classe C^1 sur \mathbb{R}^n (indépendantes puisque G_1 est une variété), alors la condition (2.8) se met sous la forme

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R} \mid p(t_f) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla F_i(x(t_f)) + p^0 \frac{\partial g}{\partial x}(t_f, x(t_f)). \quad (2.12)$$

Remarque 2.1.3. Dans les conditions du théorème (2.1.1), on a de plus pour presque tout $t \in [t_0, t_f]$

$$\frac{d}{dt} H(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) = \frac{\partial H}{\partial t}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)). \quad (2.13)$$

En particulier si le système augmenté est autonome, *i.e.* si f et f^0 ne dépendent pas de t , alors H ne dépend pas de t , et on a

$$\forall t \in [t_0, t_f] \max_{v \in \Omega} H(x(t), p(t), p^0, v) = Cste. \quad (2.14)$$

Notons que cette égalité est alors valable partout sur $[t_0, t_f]$ (en effet cette fonction de t est lipschitzienne).

Remarque 2.1.4. La convention $p^0 \leq 0$ conduit au principe du maximum. La convention $p^0 \geq 0$ conduirait au principe du minimum, *i.e.* la condition (2.5) serait une condition de minimum.

Remarque 2.1.5. Dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^m$, *i.e.* lorsqu'il n'y a pas de contrainte sur le contrôle, la condition de maximum (2.6) devient $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$, et on retrouve le principe du maximum faible.

Définition 2.1.3. Une extrémale du problème de contrôle optimal est un quadruplet $(x(\cdot), p(\cdot), p^0, u(\cdot))$ solution des équations (2.5) et (2.6). Si $p^0 = 0$, on dit que l'extrémale est anormale, et si $p^0 \neq 0$ l'extrémale est dite normale.

Définition 2.1.4. Les conditions (2.8) et (2.9) sont appelées conditions de transversalité sur le vecteur adjoint. La condition (2.7) est appelée condition de transversalité sur le Hamiltonien. Elles sont ici écrites de manière très générale.

2.1.1 Condition de transversalité

La condition de transversalité indique le comportement que doit avoir le contrôle quand on arrive à l'horizon fini (ou infini) : La manière dont le contrôle doit traverser la ligne d'horizon. Cette condition doit nous aider à choisir la trajectoire optimale parmi toutes les trajectoires possibles. Cette condition est donnée par les équations provenant des conditions dites "aux deux bords", en t_0 (temps initial) d'une part et en t_f d'autre part sont appelées "équations de transversalités". Dans le cas de problème point-point, cette condition est donnée par les deux équations suivants :

— à l'origine

$$(-H(t_0) + P_0 \frac{\partial g^0(x(t_f), t_f)}{\partial t_0}) \delta t_0 + (p'(t_0) + P_0 \frac{\partial g^0(x(t_f), t_f)}{\partial x_0})' \delta x_0 = 0. \quad (2.15)$$

— à l'arrivée

$$(H(t_f) + P_0 \frac{\partial g^0(x(t_f), t_f)}{\partial t_f}) \delta t_f + (-p'(t_f) + P_0 \frac{\partial g^0(x(t_f), t_f)}{\partial x_f})' \delta x_f = 0. \quad (2.16)$$

où δt_0 , δt_f , δx_0 et δx_f sont des variations des trajectoires, aux instants initial et final et sont indépendantes.

Puisque, le temps initial t_0 est fixé à zéro et ainsi x_0 fixé, alors nous nous intéressons seulement à l'équation (2.16). Par conséquent, on en déduit qu'il y a 6 cas possibles selon t_f et x_f :

1. Si t_f fixé et x_f fixé : $\delta t_f = 0$, $\delta x_f = 0$, $x(t_0) = x_0$ et $x(t_f) = x_f$.
2. Si t_f fixé et x_f libre : $\delta t_f = 0$, $\delta x_f \neq 0$, $x(t_0) = x_0$ et $-p'(t_f) + P_0 \frac{\partial g^0(x(t_f))}{\partial x_f} = 0$.
3. Si t_f fixé et x_f contraint $\phi(x(t_f)) = 0$, $\phi(\cdot) \in \mathbb{R}^r$: $\delta t_f = 0$, $x(t_0) = x_0$ et $-p'(t_f) + P_0 \frac{\partial g^0(x(t_f))}{\partial x_f} + \frac{\partial \phi'(x(t_f))}{\partial x_f} \nu = 0$, où ν est un scalaire.
4. Si t_f libre et x_f fixé : $\delta t_f \neq 0$, $\delta x_f = 0$, $x(t_0) = x_0$, $x(t_f) = x_f$ et $H(t_f) + P_0 \frac{\partial g^0(x(t_f), t_f)}{\partial t_f} = 0$.
5. Si t_f libre et x_f libre : $\delta t_f \neq 0$, $\delta x_f \neq 0$, $x(t_0) = x_0$, et $(H(t_f) + P_0 \frac{\partial g^0(x(t_f), t_f)}{\partial t_f}) \delta t_f + (-p'(t_f) + P_0 \frac{\partial g^0(x(t_f), t_f)}{\partial x_f})' \delta x_f = 0$.
6. Si t_f libre et x_f contraint : $\phi(x(t_f), t_f) = 0$, $\phi(\cdot) \in \mathbb{R}^r$: $(H(t) + \nu' \frac{\partial \phi(t_f, x(t_f))}{\partial t_f} + P_0 \frac{\partial g^0}{\partial t_f}) \delta t_f + (-p'(t_f) + \frac{\partial \phi'(t_f, x(t_f))}{\partial x_f} \nu + P_0 \frac{\partial g^0}{\partial x_f})' \delta x_f = 0$
où $g^0 = g^0(x(t_f), t_f)$.

Si l'un des deux ensembles G_0 et G_1 sont des variétés de \mathbb{R}^n ayant des espaces tangents en $x_0 \in G_0$ et $x_f \in G_1$, alors le vecteur adjoint peut être construit de manière à vérifier les conditions de transversalités aux extrémités suivantes :

$$p_0 \perp t_{f x_0} G_0 \quad (2.17)$$

$$p(t_f) - \lambda_0 \frac{\partial g^0(x(t_f), t_f)}{\partial x(t_f)} \perp t_{f x_f} G_1 \quad (2.18)$$

où $t_{f(\cdot)} G$ désigne l'espace tangent.

2.2 Problème en temps minimum

Une application typique du principe du maximum est la commande en temps minimum c'est à dire, il s'agit d'atteindre l'objectif ou bien d'arriver à la position x_1 à partir de la position x_0 en un temps minimum.

Le problème consiste à trouver une commande transférant le point x_0 à x_1 en un temps minimum et la fonctionnelle à minimiser est sous la forme suivante :

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} dt$$

Autrement dit :

$$f_0(x, u, t) \equiv 1$$

et le temps final t_f est libre.

2.2.1 Formulation du problème

La classe des problèmes d'optimisation dans laquelle on cherche à minimiser le temps de transition d'un état initial x_0 à un état final x_1 est appelée classe des problèmes en temps minimum.

On formulera un problème du contrôle en temps optimal (en temps minimum) en essayant de trouver :

1. Le premier instant d'atteindre l'état terminal x_1 .
2. La commande qui accomplira cette tâche.

Exemple 2.2.1. Soit le problème en temps minimal suivant :

$$(p) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Minmiser} \quad J(u(t_f), t_f) = t_f \\ \text{Sous les contraintes} \quad \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \dot{x}_2(t) = u(t) \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad x_1(t_f) = 0, \quad x_2(t_f) = 0 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad -1 \leq u(t) \leq 1, \quad t \in T = [0, t_f] \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad t_f > 0 \quad \text{libre} \end{array} \right.$$

Notons par $p(t) = (p_1(t), p_2(t))$ le vecteur adjoint associé au problème (p). Le Hamiltonien du problème (p) est :

$$H(-1, x(t), p(t), u(t), t) = p_1(t)x_2(t) + p_2(t)u(t) - 1.$$

et ainsi le système adjoint du Hamiltonien associé est :

$$\begin{cases} \dot{p}_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0 \\ \dot{p}_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -p_1(t) \end{cases} \quad (2.19)$$

Le système dynamique est autonome, alors le Hamiltonien est constant le long d'une extrimale. Ce qui donne :

$$H(-1, x(0), p(0), u(0), 0) = H(-1, x(t_f), p(t_f), u(t_f), t_f)$$

où

$$\begin{cases} H(-1, x(0), p(0), u(0), 0) = p_2(0)u(0) - 1, \\ H(-1, x(t_f), p(t_f), u(t_f), t_f) = p_1(t_f)x_2(t_f) + p_2(t_f)u(t_f) - 1 \end{cases}$$

De plus, le temps final t_f est libre, d'après la condition de transversalité :

$$H(-1, x(t_f), p(t_f), u(t_f), t_f) = 0$$

Ce qui implique :

$$p_2(0)u(0) = 1$$

Puisque le contrôle est borné, le maximum du Hamiltonien est donné par :

$$\begin{aligned} H(-1, x(t), p(t), u^*(t), t) &= \max_{-1 \leq u(t) \leq 1} H(-1, x(t), p(t), u(t), t) \\ &= p_1(t)x_2(t) - 1 + \max_{-1 \leq u(t) \leq 1} (p_2(t)u(t)). \end{aligned}$$

Le contrôle optimal maximisant le Hamiltonien à chaque instant est égal à :

$$u^*(t) = \text{sign}(p_2(t))$$

Du système (2.21), on en déduit que :

$$\begin{cases} p_1(t) = p_{10} \\ p_2(t) = -p_{10}t + p_{20} \end{cases}$$

avec $p_{10} = p_{10}(0)$, $p_{20} = p_{20}(0)$,

Toutes les valeurs propres de la matrice A sont réelles, le problème admet au plus une commutation, *i.e.*, $n - 1$ commutations. Alors, on en déduit quatre stratégies possibles :

1. $u(t) = 1$,
2. $u(t) = -1$,
3. $u(t) = 1$, puis $u(t) = -1$,
4. $u(t) = -1$, puis $u(t) = 1$,

Stratégie optimale $u(t) = -1$, puis $u(t) = 1$, sur $[0, t_f]$ Nous avons

$$u^*(t) \begin{cases} -1 & t \in [0, t_c[\\ 1 & t \in [t_c, t_f] \end{cases}$$

Première étape : Si $u(t) = -1$, $t \in [0, t_c[$

$$\begin{cases} x_1(t) = -\frac{t^2}{2} + 1 \\ x_2(t) = -t \end{cases}$$

Deuxième étape : Si $u(t) = 1$, $t \in [t_c, t_f[$

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{t^2}{2} + c_1t + c_2 \\ x_2(t) = t + c_1 \end{cases}$$

Détermination de c_1 et c_2

Par continuité on a au point $t = t_c$

$$\begin{cases} x_1(t_c) = -\frac{t_c^2}{2} + 1 = \frac{t_c^2}{2} + c_1t_c + c_2 \\ x_2(t_c) = -t_c = t_c + c_1 \end{cases}$$

Ce qui implique :

$$c_2 = 1 - t_c^2 - c_1 t_c$$

$$c_1 = 2t_c$$

à $t = t_f$ on a $x(t_f) = 0$

$$\begin{cases} \frac{t_f^2}{2} - 2t_c t_f + t_c^2 + 1 = 0 & (*) \\ t_f = t - 2t_c = 0 & (**) \end{cases}$$

On remplace (**) dans (*) on obtient $t_c = 1$ et $t_f = 2$

2.3 Nature des solutions

La nature des solutions optimales dépend de la structure du contrôle. Il existe plusieurs types de solutions d'un problème de contrôle optimal. Les plus classiques sont :

2.3.1 Solution bang-bang

La solution de type bang-bang est la trajectoire où la norme du contrôle n'est pas continue et commute entre les valeurs des bornes du contrôle.

2.3.2 Solution bang-singulier

La solution de type bang-singulier est la trajectoire où le contrôle n'est pas continu et il existe des arcs saturant la contrainte sur le contrôle et d'autres non saturants, elle commute entre les valeurs de la borne inférieure ou bien de la borne supérieure du contrôle et appartient à l'intérieur de l'intervalle.

Autrement dit, si on suppose que le contrôle est borné $|u(t)| \leq 1$ et on peut d'écrire le Hamiltonien de cette forme :

$$H = H_1 + u(t)H_2$$

avec $H = H(\lambda_0, u(t), x(t), p(t), t)$, $H_1 = H(\lambda_0, x(t), p(t), t)$ et $H_2 = H(\lambda_0, x(t), p(t), t)$. Notons par $\Psi(t) = H_2$:

1. Si dans le voisinage de t_c , le contrôle est constant par morceaux avec $u(t) = +1/-1$ ou $u(t) = -1/+1$, cette commande est dite de type bang-bang ou régulière.
2. S'il existe un intervalle de temps $[a, b]$, $b > a$ non réduit à t_c tel que la fonction de commutation est identiquement nulle sur cet intervalle, i.e. pour tout $t \in [a, b]$, $\Psi(t) = 0$. Cette situation fait référence à ce qui est connu sous le vocable d'arc singulier.

Lemme 2.1. *Le problème en temps minimal n'admet pas de contrôle singulier*

Preuve 2.1. Le problème admet des trajectoires singulières si :

$$\partial_u H = 0.$$

D'après l'équation de Hamiltonien :

$$H(-1, u(t), x(t), p(t), t) = p(t)(Ax(t) + B(t)u) - 1 \quad (2.20)$$

on obtient :

$$p(t)B = 0$$

Ensuite, en dérivant par rapport à t , on obtient : $\dot{p}(t)B = 0$, sachant que $\dot{p}(t) = Ap(t)$ de là on obtient :

$$p(t)AB = 0$$

Ainsi, par dérivons successives on obtient finalement :

$$p(t)B = p(t)AB = \dots = p(t)A^{n-1}B = 0$$

On en déduit par récurrence immédiate que, pour tout entier k ,

$$p(t)A^k B = 0 \quad k \in \{0, \dots, n-1\}.$$

Par conséquent, $p(t)$ est orthogonal à la matrice de contrôlabilité du système qui est de rang n pour un système contrôlable, ce qui implique $p(t) = 0$. Par conséquent :

$$H(-1, p(t), x(t), u(t), t) = -1 \quad (2.21)$$

D'autre part, nous avons le temps final est libre, d'après la condition de transversalité, on obtient :

$$H(-1, p(t), x(t), u(t), t) = 0$$

Ce qui est en contradiction avec l'équation (2.23)

2.4 Exemple d'application

Supposons que nous disposons d'une usine pour laquelle nous pouvons contrôler la production. Commençons par construire le modèle mathématique en posant

$$x(t) = \text{quantité produite à l'instant } t$$

Supposons que nous consommons une fraction de notre production à chaque instant t , de même nous réinvestissons la fraction restante. Notons par

$$\alpha(t) = \text{fraction de la production testante à l'instant } t$$

α sera notre fonction contrôle que nous allons en outre soumettre à la contrainte suivante :

$$0 \leq \alpha(t) \leq 1 \quad \text{à chaque instant } t$$

La production de notre usine est régie par le système dynamique

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = k\alpha(t)x(t) \\ x(t_0) = x^0 = 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

où k est une constante qui représente le taux de croissance de notre réinvestissement. Prenons comme fonction de coût de la fonction suivante :

$$P[\alpha(\cdot)] = \int_0^T (1 - \alpha(t))x(t) dt$$

qui signifie que nous cherchons à maximiser la consommation totale de la quantité produite. Notre consommation à une instant donné t est $(1 - \alpha(t))x(t)$.

Nous allons maintenant chercher à caractériser un contrôle optimal de notre problème. Et pour cela nous appliquons le principe du maximum de Pontryagin. Nous avons $n = m = 1$

$$f(x, \alpha) = x\alpha, \quad g = 0, \quad r(x, \alpha) = (1 - \alpha)x.$$

Calcul du Hamiltonien

Le Hamiltonien du système précédent s'écrit :

$$H(x, p, \alpha) = f(x, \alpha)p + r(x, \alpha) = px\alpha + (1 - \alpha)x = x + \alpha x(p - 1).$$

Et l'équation dynamique du système est :

$$\dot{x}(t) = H_p = \frac{\partial H}{\partial p} = \alpha^*(t)x(t) \quad (2.23)$$

et l'équation adjointe donnée par :

$$\dot{p}(t) = -H_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -1 - \alpha^*(t)(p(t) - 1). \quad (2.24)$$

Conditions de transversaliité

La condition finale peut s'exprimer de la manière suivante :

$$p(T) = g_x(x(T)) = 0. \quad (2.25)$$

Enfin, le maximum de l'Hamiltonien :

$$H(x(t), p(t), \alpha^*(t)) = \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \{x(t) + \alpha x(t)(p(t) - 1)\}. \quad (2.26)$$

Utilisation du principe du maximum

Nous déduisons les informations utiles à partir des équations du système ainsi que les équations (2.25)-(2.28).

À partir de (2.28), à toute instant t , la valeur $\alpha^*(t)$ doit être choisie d'une manière à maximiser $\alpha(p(t) - 1)$ pour $0 \leq \alpha \leq 1$. Ceci est puisque $x(t) > 0$, alors :

$$\alpha^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } p(t) \leq 1 \\ 1 & \text{si } p(t) > 1 \end{cases}$$

Ainsi, il reste à connaître $p(\cdot)$ pour déterminer le contrôle optimal $\alpha^*(\cdot)$. Nous allons devoir résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = -1 - \alpha^*(t)(p(t) - 1) & (0 \leq t \leq T). \\ p(T) = 0 \end{cases}$$

Puisque $p(T) = 0$, on déduit, par continuité, que $p(t) \leq 1$ pour tout t assez proche de T , $t < T$. Ainsi $\alpha(t) = 0$ pour ces valeurs de t .

Donc $\dot{p}(t) = -1$, et par conséquent $p(t) = T - t$ pour les instants t qui se trouvent dans cet intervalle. Nous avons donc $p(t) = T - t$ pour les instants vérifiant $p(t) \leq 1$, et ceci se produit pour $T - 1 \leq t \leq T$.

Mais pour les instants $t \leq T - 1$, avec t proche de $T - 1$, on a $\alpha(t) = 1$, et d'après (2.26) on aura :

$$\dot{p}(t) = -1 - (p(t) - 1) = -p(t).$$

Du moment que $p(T - 1) = 1$, on a $p(t) = e^{T-1-t} > 1$ pour tout les instants $0 \leq t \leq T - 1$. En particulier, il n'existe pas des points de commutation au-dessus de cet intervalle.

Par conséquent, on déduit que le contrôle optimal est :

$$\alpha^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq t^* \\ 0 & \text{si } t^* \leq t \leq T \end{cases}$$

pour un temps de commutation optimal $t^* = T - 1$.

Coclusion

Le principe de maximum du Pontriaguin donne des conditions nécessaires d'optimalité qui permettent de calculer les trajectoires optimales.

Chapitre 3

Méthode direct de résolution d'un problème de contrôle optimal

Introduction

Le présent chapitre est consacré à la résolution d'un problème terminal d'un système dynamique linéaire de contrôle optimal.

Nous utiliserons, dans la résolution de ce problème la méthode dite adaptée du simplexe. Elle a été inventée par "R-Gabasov" et "F.M.Kirillova" durant les années 80. elle a été ainsi ,appliquée à différents problèmes tels que la programmation linéaire et les problème de contrôle. Cette méthode se différencie de la méthode du simplexe du fait que le plan et la base ne sont pas liés, elle nous permet d'avoir une solution approchées et permet de démarer l'ittération à partir d'un point intérieur.

Position de problème

Considérons un problème (P) de contrôle optimal de la forme suivante :

$$\text{Maximiser } J_c(u(t_f)) = c'x(t_f) \quad (3.1)$$

$$\text{Sous les contraintes } \dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \quad \text{pour } t \in [0, t_f] \quad (3.2)$$

$$x(0) = x_0, \text{ et } Hx(t_f) = g, \quad (3.3)$$

$$d_1 \leq u(t) \leq d_2, \quad \forall t \in T = [0, t_f], \quad (3.4)$$

$$t_f > 0 \text{ fixé} \quad (3.5)$$

où

- $J_c(u(t_f))$ est un coût terminal linéaire en $x(t) \in \mathbb{R}^n$, défini par la matrice $c \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.
- $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système linéaire autonome (3.2) avec $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.
- $u(t) \in \mathbb{R}$ est le signal de contrôle, supposé constant par morceaux.
- $Hx(t)$ est le signal se sortie, avec $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$ de rang maximal, $\text{rang}(H) = m < n$.
- l'état final $x(t_f)$ est contraint par la relation $Hx(t_f) = g$, $g \in \mathbb{R}^m$

3.1 Concepts de base

Définition 3.1.1. 1. Un contrôle $u(t), t \in T$, est dit admissible si $u(t)$ et la trajectoire $x(t)$ solution de (3.2) correspondant, vérifient les contraintes (3.3)(3.4).
2. Un contrôle admissible $u^0(t)$ est dit optimal si

$$J_c(u^0) = \max_{d_1 \leq u \leq d_2} J_c(u)$$

3. Soit $\varepsilon \geq 0$ donné. Un contrôle admissible $u^\varepsilon(t)$ est dit ε -optimal si et seulement si :

$$J_c(u^0) - J_c(u^\varepsilon) \leq \varepsilon$$

La solution du système différentiel (3.2) est donnée par la formule de Cauchy :

$$x(t) = F(t)\left(x_0 + \int_0^t F^{-1}(\tau)B(\tau)u(\tau) d\tau\right), t \in T \quad (3.6)$$

où $F(t)$ est la resolvant du système :

$$\begin{cases} \dot{F}(t) = AF(t), \\ F(0) = I_n, \end{cases} \quad (3.7)$$

avec I_n matrice identité.

En utilisant cette dernière solution, le problème (3.1)(3.5) prend la forme suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Maximiser } J_c(u(t_f)) = c'F(t_f)x_0 + \int_0^{t_f} C(t)u(t) dt, \\ \text{Sous les contraintes} \quad : \int_0^{t_f} \phi(t)u(t) dt = \bar{g}, \\ \quad \quad \quad d_1 \leq u(t) \leq d_2, \quad t \in T \end{array} \right. \quad (3.8)$$

où $c(t) = c'F(t_f)F^{-1}(t)B$, $\phi(t) = HF(t_f)F^{-1}(t)B$ et $\bar{g} = g - HF(t_f)x_0$.

3.2 Support contrôle

Définition 3.2.1.

L'ensemble $T_B = \{T_i = [\tau_i, \tau^i], T_i \subset T, i = \{1, 2, \dots, m\} / [\tau_i, \tau^i] \cap [\tau_j, \tau^j] = \emptyset, \forall i \neq j\}$ est appelé support généralisé du problème (3.1) (3.4) si le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + Bu(t), & x(0) = x_0 \\ Hx(t_f) = 0, & t \in T \end{cases} \quad (3.9)$$

n'admet pour $u(t) = 0, t \in T_H = T/T_B$ que la solution triviale $u(t) = 0, t \in T_B$, mais pour tout intervalle $T^* = [\tau_*, \tau^*], T^* \subset T_H, \tau_* \neq \tau^*$ et

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t \in T_H/T^* \\ u^*, & t \in T^* \end{cases}$$

le système (3.9) admet une solution non triviale, *i.e.*,

$$u(t) \neq 0, \quad t \in T_B \cup T^*$$

dans la classe des commandes constantes sur $T_i, i = \overline{1, m}$

Lemme 3.1. *L'ensemble T_B est un support généralisé si et seulement si la matrice du support généralisée*

$$\phi(T_B) = \int_{\tau_i}^{\tau_i+h} \phi(t) dt, \quad i = \overline{1, m} \quad (3.10)$$

est non dégénérée.

Prenons une autre solution de support du problème. Choisissons les points isolés $\tau_i, i \in \{1, 2, \dots, m\}$ qu'on appelle des moments de support et l'ensemble $\tau_B = \tau_i, i = \overline{1, m}$ est dit support si la matrice correspondante ϕ_B est non dégénérée

$$\phi_B = \phi(T_B) = \int_{\tau_i}^{\tau_i} \phi(t_i) dt, \quad i = \overline{1, m} \quad (3.11)$$

Remarque 3.2.1. A chaque moment t_i , on fait correspondre un intervalle T_i tel que $t_i = \tau_i$ ou τ^i . L'existence du support est très lié a la notion de commandabilité du système de (3.1)(3.4)

Définition 3.2.2. Le couple $\{u, \tau_B\}$ formé de la commande admissible u et de support τ_B est appelé support-contrôle.

Il est dit dégénéré si la valeur de la fonctionnelle n'augmente pas après l'itération, et non dégénéré s'il existe de tels nombres $\lambda_0 > 0, \mu_0 > 0, u_i^\lambda, i = \overline{1, m}$ tel que, $\forall \lambda, 0 < \lambda < \lambda_0$, les relations suivantes sont vérifiées

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m \int_{t_i-\lambda}^{t_i+\lambda} \phi(t) u(t) dt = \sum_{i=1}^m u_i^\lambda \int_{t_i-\lambda}^{t_i+\lambda} \phi(t) dt \\ d_1 + \mu_0 \leq u_i^\lambda \leq d_2 - \mu_0, & i = \overline{1, m} \end{cases} \quad (3.12)$$

par la suit, on supposera que la commande $u(t)$ prend des valeurs dans les intervalles $T_i, i = \overline{1, m}$ i.e.

$$u(t) = u_i, \quad t \in T_i = [\tau_i, \tau^i], \quad d_1 \leq u_i \leq d_2, \quad i \in \{1, 2, \dots, m\} \quad (3.13)$$

Comme u est admissible, alors

$$\int_{t_0}^{t_f} \phi(t)u(t) dt = g - HF(t_f)x_0, \quad (3.14)$$

et on utilisant le support, on obtient

$$\int_{t_0}^{t_f} \phi(t)u(t) dt = g - HF(t_f)x_0 - \int_{T_H} \phi(t)u(t) dt, \quad (3.15)$$

Comme $u(t)$ est constante par morceaux et de la définition du support, on obtient

$$u(T_B) = \phi^{-1}(T_B)(g - HF(t_f)x_0 - \int_{T_H} \phi(t)u(t) dt), \quad (3.16)$$

où $T_B = \{T_i, \quad i = \overline{1, m}\}$

3.3 Accroissement de la fonctionnelle

Soit $\{u, \tau_B\}$ un support-contrôle non dégénéré, et $x(t), t \in T$ la trajectoire (3.2) correspondante, on construite le vecteur de potentiel y' tel que :

$$y' = c_B \phi_B^{-1} \quad (3.17)$$

et le vecteur des estimations (co-contrôle) $\Delta(t)$ tel que :

$$\Delta(t) = -\psi(t)B, \quad t \in T, \quad (3.18)$$

avec $c_B \in \mathbb{R}^{1 \times m}$ égale à $(c_B)_j = c(\tau_j)$ et $\psi(t)$ est la solution du système conjugué :

$$\begin{cases} \dot{\psi} = -A'\psi, \\ \psi(t_f) = c - H'y. \end{cases} \quad (3.19)$$

la solution $\psi(t)$ est donnée par :

$$\psi'(t) = (c' - y'H)F(t_f)F^{-1}(t). \quad (3.20)$$

Le co-contrôle peut être écrit sous la forme :

$$\Delta(t) = -(c' - y'H)F(t_f)F^{-1}(t)B. \quad (3.21)$$

par conséquent :

$$\Delta(t) = y'\phi(t) - c(t), \quad t \in T \quad (3.22)$$

Soit $\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t)$, $t \in T$ une autre contrôle admissible et $\bar{x}(t) = x(t) + \Delta x(t)$, $t \in T$, sa trajectoire correspondante.

De là, l'accroissement de la fonctionnelle sera :

$$\begin{aligned} \Delta J_c(t) &= J_c(\bar{u}) - J_c(u), \\ &= c'F(t_f)x_0 + \int_0^{t_f} c(t)\bar{u}(t) dt - c'F(t_f)x_0 - \int_0^{t_f} c(t)u(t) dt \\ &= \int_0^{t_f} c(t)\bar{u}(t) dt - \int_0^{t_f} c(t)u(t) dt \\ &= \int_0^{t_f} c(t)(\bar{u}(t) - u(t)) dt \\ &= \int_0^{t_f} c(t)\Delta u(t) dt \\ &= \int_0^{t_f} (y'\phi(t) - \Delta(t))\Delta u(t) dt \\ &= \int_0^{t_f} y'\phi(t)\Delta u(t) dt - \int_0^{t_f} \Delta(t)\Delta u(t) dt \end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$\Delta J_c(u) = - \int_0^{t_f} \Delta(t)\Delta u(t) dt \quad (3.23)$$

car $\int_0^{t_f} y'\phi(t)\Delta u(t) dt = 0$. En effet, de l'admissibilité de $u(t)$ et $\bar{u}(t)$, nous avons :

$$\int_0^{t_f} y'\phi(t)\Delta u(t) dt = y'(HF(t_f)F^{-1}(t_f)B(\bar{u}(t) - u(t))) dt$$

D'après l'équation (3.6), on obtient :

$$\int_0^{t_f} y'\phi(t)\Delta u(t) dt = y'(H\bar{x}(t_f) - Hx(t_f)) = y'(g - g) = 0$$

3.4 Calcul de la valeur de suboptimalité

La nouvelle commande $\bar{u}(t)$ est admissible, donc :

$$d_1 - u(t) \leq \Delta u(t) \leq d_2 - u(t). \quad (3.24)$$

Le maximum de la fonctionnelle (3.23) sous les contraintes (3.24) est atteint pour :

$$\begin{cases} \Delta u(t) = d_1 - u(t), & \text{si } \Delta(t) > 0 \\ \Delta u(t) = d_2 - u(t), & \text{si } \Delta(t) < 0 \\ d_1 - u(t) \leq \Delta u(t) \leq d_2 - u(t). & \text{si } \Delta(t) = 0, \quad t \in T \end{cases} \quad (3.25)$$

et est égal à :

$$\beta = \beta(u, \tau_B) = \int_{T^+} \Delta(t)(u(t) - d_1) dt + \int_{T^-} \Delta(t)(u(t) - d_2) dt \quad (3.26)$$

appelé valeur de suboptimalité du support contrôle $\{u, \tau_B\}$, où

$$T^+ = \{t \in T : \Delta > 0\}, \quad T^- = \{t \in T : \Delta < 0\}.$$

de ce qui précède, on a toujours :

$$\Delta J_c(u) = J_c(\bar{u}) - J_c(u) \leq \beta(u, \tau_B),$$

pour tout \bar{u} , et pour $\bar{u} = u^0$, on obtient :

$$J_c(u^0) - J_c(u) \leq \beta(u, \tau_B),$$

De cette dernière inégalité, on déduit les critères suivants :

3.5 Critère d'optimalité

Théorème 3.5.1. [11][14] *Les relations suivantes :*

$$\begin{cases} \Delta(t) > 0, & \text{si } u(t) = d_1 \\ \Delta(t) < 0, & \text{si } u(t) = d_2 \\ \Delta(t) = 0, \quad t \in T & \text{si } d_1 \leq u(t) \leq d_2. \end{cases} \quad (3.27)$$

sont suffisantes et dans les cas de la non dégénérescence, elles sont nécessaires pour l'optimalité de support-contrôle $\{u, \tau_B\}$

Preuve 3.1. 1. **Condition suffisante**

Si les relations (3.27) sont vérifiées, alors $\beta(u, \tau_B) = 0$.

Comme $J_c(\bar{u}) - J_c(u) \leq \beta(u, \tau_B)$, $\forall \bar{u}$, ce qui implique $J_c(\bar{u}) \leq J_c(u)$, $\forall \bar{u}$.

Par conséquent, la paire $\{u, \tau_B\}$ est un support-contrôle optimal.

2. **Condition nécessaire**

Soit $\{u, \tau_B\}$ un support-contrôle non dégénéré et supposons que les relations (3.27) ne sont pas vérifiées, *i.e.* :

$\exists t_* \in T, \Delta(t_*) > 0, u(t_*) > d_1$ ou bien $\exists t_* \in T, \Delta(t_*) < 0, u(t_*) < d_2$.

Supposons $\exists t_* \in T, \Delta(t_*) > 0, u(t_*) > d_1$

Construisons le contrôle $\Delta u(t)$ de la manière suivante :

$$\Delta u(t) = \begin{cases} -\theta, & \text{si } t = t_*, \quad \theta > 0 \\ 0, & \text{si } t \in T_H/t_* \end{cases} \quad (3.28)$$

L'accroissement de la fonctionnelle devient :

$$\begin{aligned} \Delta J_c(u(t)) &= J_c(\bar{u}(t)) - J_c(u(t)), \\ &= - \int_0^{t_f} \Delta(t) \Delta u(t) dt, \\ &= -\Delta(t_*) \Delta u(t_*) - \int_{T/t_*} \Delta(t) \Delta u(t) dt, \end{aligned}$$

Par conséquent, $\Delta J_c(u(t)) = \theta \Delta(t_*) > 0$, ce qui implique :

$$J_c(\bar{u}(t)) > J_c(u(t))$$

et ceci contredit l'optimalité de $u(t)$.

Remarque 3.5.1. En utilisant la fonction Hamiltonienne :

$$H(x(t), \psi(t), u(t)) = \psi'(Ax(t) + Bu(t)).$$

Le critère d'optimalité peut être écrit sous la forme traditionnelle du principe du maximum de Pontriaguin :

La condition :

$$H(x(t), \psi(t), u(t)) = \max_{d_1 \leq u \leq d_2} H(x(t), \psi(t), u), t \in T. \quad (3.29)$$

est suffisante, et dans le cas de la non dégénérescence, elle est nécessaire pour l'optimalité du support-contrôle $\{u, \tau_B\}$.

3.5.1 Critère d' ε -optimalité

Théorème 3.5.2. [11][14] *Pour tout $\varepsilon \geq 0$, la commande admissible $u(t)$, $t \in T$ est ε -optimale si et seulement s'il existe un tel support τ_B sur lequel le long de $u(t)$ et des solutions $x(t), \psi(t)$, $t \in T$, des systèmes direct et conjugué, la condition ε -maximum est vérifiée :*

$$H(x(t), \psi(t), u(t)) = \max_{d_1 \leq u \leq d_2} H(x(t), \psi(t), u) - \varepsilon(t), \quad t \in T. \quad (3.30)$$

avec

$$\int_0^{t_f} \varepsilon(t) dt \leq \varepsilon$$

Preuve 3.2. Condition suffisante : Supposons que la condition (3.30) est vérifiée et construisons la valeur de suboptimalité (3.26) du support-contrôle $\{u, \tau_B\}$. D'après (3.18), on a :

$$\begin{aligned} \beta = \beta(u, \tau_B) &= \int_{T^+} \psi'(t)B(d_1 - u(t)) dt - \int_{T^-} \psi'(t)B(d_2 - u(t)) dt \\ &= \int_{T^+} [\psi'(t)Ax(t) + \psi'(t)Bd_1 - \psi'(t)Ax(t) - \psi'(t)Bu(t)] dt \\ &+ \int_{T^-} [\psi'(t)Ax(t) + \psi'(t)Bd_2 - \psi'(t)Ax(t) - \psi'(t)Bu(t)] dt \\ &= \int_0^{t_f} \left[\max_{d_1 \leq u \leq d_2} H(x(t), \psi(t), t) - H(x(t), \psi(t), t) \right] dt \\ &= \int_0^{t_f} \varepsilon(t) dt \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Pour l'optimalité de la commande $u^0(t)$, $t \in T$, et du support τ_B , on a l'inégalité :

$$J(u^0) - J(u) \leq \beta \leq \varepsilon$$

qui nous confirme que la commande $u(t)$, $t \in T$ est ε -optimale.

Condition nécessaire :

Soit $u(t)$, $t \in T$, une commande ε -optimale. de la formule (3.26) pour un certain support τ_B , on calcule la valeur de suboptimalité $\beta(u, \tau_B)$ et on l'écrit sous la forme

$$\beta = \beta(u, \tau_B) = \int_0^{t_f} \Delta(t)u(t) dt - \int_{T^+} \Delta(t)d_1 dt - \int_{T^-} \Delta(t)d_2 dt \quad (3.31)$$

Introduisons le problème dual du problème (3.26) :

$$\begin{cases} J^*(\nu, v, \omega) = c'F(t_f)x_0 + \bar{B}'\nu - \int_0^{t_f} v(t)d_1 dt + \int_0^{t_f} \omega(t)d_2 dt \longrightarrow \min; \\ \nu'\phi(t) - v(t) + \omega(t) = c(t); \\ v(t) \geq 0, \omega(t) \geq 0, \quad t \in T. \end{cases} \quad (3.32)$$

où

$$\bar{B} = g - HF(t_f)x_0 \quad (3.33)$$

Ici les fonctions $v(t), \omega(t)$, $t \in T$, pour $\nu(I) = y(I)$, définies de la manière suivante :

$$\begin{cases} v(t) = \Delta(t), \quad \omega(t) = 0 & \text{si } \Delta(t) \geq 0; \\ v(t) = 0, \quad \omega(t) = -\Delta(t) & \text{si } \Delta(t) < 0; \end{cases} \quad (3.34)$$

forment un plan dual du problème.

Désignons par $(\nu^0, v^0(t), \omega^0(t), t \in T)$ sa solution optimale.

De la valeur de suboptimalité (3.31) et en vertu des relations (3.22) et (3.34), on obtient :

$$\beta = \beta(u, \tau_B) = \int_0^{t_f} y'\phi(t)u(t)dt - \int_0^{t_f} c(t)u(t)dt - \int_0^{t_f} v(t)d_1dt + \int_0^{t_f} \omega(t)d_2dt. \quad (3.35)$$

Or, on a :

$$\int_0^{t_f} y'\phi(t)u(t)dt = \bar{B}'y$$

et la relation de dualité :

$$\begin{aligned} J(u^0) &= J^*(\nu^0, v^0, \omega^0) \\ &= J^*(\nu^0, y^0, \omega^0) \end{aligned}$$

nous donne :

$$\int_0^{t_f} c(t)u^0(t)dt - \bar{B}'y^0 + \int_0^{t_f} v^0(t)d_1dt - \int_0^{t_f} \omega^0(t)d_2dt = 0$$

De cette dernière égalité, on obtient :

$$\begin{aligned}
\beta &= \int_0^{t_f} c(t)u^0(t)dt - \int_0^{t_f} c(t)u(t)dt + \bar{B}'y - \int_0^{t_f} v(t)d_1dt \\
&+ \int_0^{t_f} \omega(t)d_2dt - \bar{B}'y^0 + \int_0^{t_f} v^0(t)d_1dt - \int_0^{t_f} \omega^0(t)d_2dt \\
&= \beta_u + \beta_B
\end{aligned}$$

où

$$\beta_u = \int_0^{t_f} c(t)u^0(t)dt - \int_0^{t_f} c(t)u(t)dt$$

est la mesure de la non optimalité de la commande $u(t), t \in T$, et

$$\beta_B = \bar{B}'y - \int_0^{t_f} v(t)d_1dt + \int_0^{t_f} \omega(t)d_2dt - \bar{B}'y^0 + \int_0^{t_f} v^0(t)d_1dt - \int_0^{t_f} \omega^0(t)d_2dt$$

est mesure de la non optimalité du support.

Si à la commande $u(t), t \in T$, on donne un support τ_B^0 optimal, c'est-à-dire $\beta(\tau_B) = \beta_B = 0$, alors

$$\beta(u, \tau_B^0) = \beta_u \leq \varepsilon \quad (3.36)$$

Posons

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \Delta(t)(u(t) - d_1), & \text{si } t \in T^+; \\ \Delta(t)(u(t) - d_2), & \text{si } t \in T^-; \\ 0, & \text{si } \Delta = 0, t \in T. \end{cases}$$

De là, en utilisant la définition de la co-commande (3.18), on obtient

$$\begin{aligned}
\varepsilon(t) &= -\psi'(t)B(u(t) - d_1) \\
&= \psi'(t)Ax(t) + \psi'(t)Bd_1 - \psi'(t)Ax(t) - \psi'(t)Bu(t) \\
&= \psi'(t)(Ax(t) + Bd_1) - \psi'(t)(Ax(t) + Bu(t)) \quad \text{pour } \psi'(t)B < 0 \\
&= \psi'(t)(Ax(t) + Bd_2) - \psi'(t)(Ax(t) + Bu(t)) \quad \text{pour } \psi'(t)B > 0 \\
&= 0 \quad \text{pour } \psi'(t)B = 0, t \in T.
\end{aligned}$$

En utilisant la fonction hamiltonnienne $H, \varepsilon(t)$ sera égale à :

$$\varepsilon(t) = \max_{d_1 \leq u \leq d_2} H(x(t), \psi(t), u) - H(x(t), \psi(t), u(t)), t \in T \quad (3.37)$$

Des conditions (3.36) et (3.37) découle alors la condition ε -maximum (3.30)

Conclusion :

- Si $\Delta J(u) = J(u^0)J(u) = \beta = \beta(u, \tau_B) \leq \varepsilon$, alors u est ε -optimale.
- Pour $\varepsilon = 0$, le principe ε -maximum devient le principe traditionnel du maximum

3.5.2 Détermination d'un support-contrôle de départ

Soit $\{u, \tau_B\}$ un support-contrôle de départ, où $u(t), t \in T$, est la commande vérifiant :

$$\begin{aligned} d_1 &\leq u(t) \leq d_2, t \in T \\ Hx(t_f) &= g \end{aligned}$$

avec sa trajectoire correspondante $x(t), t \in T$ solution du système :

$$\dot{x} = Ax + Bu, x(0) = x_0$$

$\tau_B = \{\tau_i = \overline{1, m}\}$, le support qu'on choisit de manière à avoir $|\phi_B| \neq 0$, et si on ne peut pas déterminer un tel support, on démarre l'algorithme à partir de $\tau_B = \{\emptyset\}$, et par convention $|\phi_B(\emptyset)| \neq 0$.

3.6 Méthode de résolution

Soit $\{u(t), \tau_B\}$ un support-contrôle admissible de départ ne vérifiant pas la condition du principe du ε -maximum, et $\Delta(t) \neq 0$ sur n'importe quel intervalle non vide de T .

La transformation $\{u(t), \tau_B\}$ vers $\{\bar{u}(t), \bar{\tau}_B\}$ est constituée de trois procédures :

1. Changement de commande $u(t) \rightsquigarrow \bar{u}(t)$,
2. Changement de support $\tau_B \rightsquigarrow \bar{\tau}_B$,
3. La procédure finale.

3.6.1 Changement de commande

On construit une nouvelle commande admissible sous la forme :

$$\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t), t \in T$$

où $\Delta u(t), t \in T$ est la direction d'amélioration du contrôle $u(t), t \in T$ et θ est le pas maximal admissible le long de cette direction, qui sera cherchés comme solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta J_c(u) = -\theta \int_0^{t_f} \Delta(t) \Delta u(t) dt \longrightarrow \max_{\theta, \Delta u(t)} \\ \int_T \phi(t) \theta \Delta u(t) dt = 0; \\ d_1 - u(t) \leq \theta \Delta u(t) \leq d_2 - u(t), t \in T \end{cases} \quad (3.38)$$

Choisissons les nombres : $\alpha > 0, h > 0$ (paramètres de la méthode), et construisons les ensembles suivants :

$$T_0 = \{t \in T : |\Delta(t)| < \alpha\}, T_1 = \{t \in T : |\Delta(t)| \geq \alpha\}, T_1 = T/T_0$$

On a :

$$\Delta(t) = 0, t \in \tau_B \implies \tau_B \subset T_0$$

Subdivisons l'ensemble T_0 en sous ensembles :

$$T_0 = \bigcup_{j=1}^N [\tau_j, \tau^j[, j = \overline{1, N}$$

tel que :

$$[\tau_j, \tau^j[\cap [\tau_i, \tau^i[= \emptyset, \forall i \neq j \text{ et } \tau_j - \tau^j \leq h;$$

et posons :

$$u(t) = u_j = c^{ste}, \quad t \in [\tau_j, \tau^j[, \quad j = \overline{1, N},$$

$$\Delta u(t) = \begin{cases} d_2 - u(t) & \text{si } \Delta(t) \leq -\alpha \\ d_1 - u(t) & \text{si } \Delta(t) \geq \alpha, \quad t \in T \end{cases} \quad (3.39)$$

Faisons un changement de variables :

$$\ell_j = \begin{cases} \theta \Delta u(t) & t \in [\tau_j, \tau^j[, \quad j = \overline{1, N}, \\ \theta & j = N + 1 \end{cases} \quad (3.40)$$

où $j = N + 1$ est l'indice supplémentaire correspondant à l'ensemble T_1 . Calculons les quantités suivantes :

$$g_i = - \int_{\tau_j}^{\tau^j} \Delta(t) dt, \quad j = \overline{1, N}; \quad g_{N+1} = \int_{T_1} \Delta(t) \Delta u(t) dt$$

$$q_i = \int_{\tau_j}^{\tau_j} \phi(t) dt, \quad j = \overline{1, N}; \quad q_{N+1} = \int_{T_1} \phi(t) \Delta u(t) dt$$

$$d_{1j} = d_1 - u_j, \quad d_{2j} = d_2 - u_j, \quad j = \overline{1, N}$$

$$d_{1N+1} = 0, \quad d_{2N+1} = 1.$$

De ce qui précède, le problème (3.38) devient le problème de programmation linéaire suivant, appelé problème du support :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{N+1} g_i \ell_j \longrightarrow \max_{\ell_j}; \\ \sum_{j=1}^{N+1} q_i \ell_j = 0; \\ d_{1j} \leq \ell_j \leq d_{2j}, \quad j = \overline{1, N+1} \end{cases} \quad (3.41)$$

Ce problème est un problème de programmation linéaire qu'on va résoudre par la méthode adaptée avec comme plan de départ ($\ell = 0, J_B$), où :

$$Q_B = Q(J_B) = (q_j, j \in J_B), \quad J_B = \{j \in \{1, \dots, N+1\} / T_j \subset T_B\}.$$

où

$$q_i = \int_{\tau_j}^{\tau_j+h} \phi(t) dt, \quad j = \overline{1, N+1};$$

Lemme 3.2. Pour $h > 0$ petit et $\det(\phi_B) \neq 0$, on a $\det(Q_B) \neq 0$ où $\phi_B = \phi(\tau_B)$.

Preuve

Soit $\det(\phi_B) \neq 0$

$$\begin{aligned} q_i &= \int_{\tau_j}^{\tau_j+h} \phi(t) dt, \\ &= h[\phi(\tau_j) + \sum_{i=1}^{\infty} h^i \frac{\phi^{(i)}(\tau_j)}{(i+1)!}] \\ &= h.q_j^h, \quad j \in J, \end{aligned}$$

où

$$h.q_j^h = \phi(\tau_j) + \sum_{i=1}^{\infty} h^i \frac{\phi^{(i)}(\tau_j)}{(i+1)!}, \quad j \in J$$

De là

$$Q_B = h.q^h(J_B).$$

Soit alors

$$q(h) = \det q^h(J_B).$$

Comme τ_B est un support du problème (P), alors :

$$q(0) = \det \phi_B \neq 0.$$

Or $q(h)$ est continue par rapport à h , donc pour h petit on aura :

$$\det q^h(J_B) \neq 0 \implies \det Q_B \neq 0.$$

On utilisant $\{\bar{\ell}, \bar{J}_B\}$ la solution optimale du problème (3.41), trouvée par la méthode adaptée, la nouvelle commande sera :

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} u(t) + \bar{\ell}_{N+1}\Delta u(t), & t \in T_1; \\ u(t) + \bar{\ell}_j, & t \in [\tau_j, \tau^j[, \quad j = \overline{1, N} \end{cases} \quad (3.42)$$

la commande \bar{u} ainsi construite vérifie l'inégalité, $J(\bar{u}) \geq J(u)$.

- Si l'indice $(N+1) \notin \bar{J}_B$, alors on pose $\tilde{J}_B = \bar{J}_B$.
- Si non on l'exclut de support J_B de la manière suivante :
Soit $\tilde{\Delta}(t) = \Delta(t) + \sigma\delta(t)$.
Déterminons j_* tel que :

$$\sigma_{j_*} = \min \sigma_j, \quad j \in J/J_B..$$

Sachant que :

$$\sigma_j = \begin{cases} -\Delta_j/\delta_j & \text{si } \Delta_j \leq 0, \delta_j \neq 0; \\ 0 & \text{si } \Delta_j = 0, u(t) \neq d_1, \delta_j > 0 \text{ et } \Delta_j = 0, u(t) \neq d_2, \delta_j < 0, j \in J_H \\ \infty & \text{si non.} \end{cases} \quad (3.43)$$

et

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{sur } T_B/t_{N+1}; \\ 1 & \text{si } \bar{u}(t_{N+1}) = d_1; \\ -1 & \text{si } \bar{u}(t_{N+1}) = d_2; \end{cases} \quad (3.44)$$

avec

$$\delta_j = (g_j, \quad j \in \bar{J}_B)' Q^{-1}(\bar{J}_B) q_j - g_j.$$

Le nouveau support sera alors :

$$\bar{J}_B = (\bar{J}_B/N + 1) \cup \{j_*\}.$$

Posons maintenant

$$\bar{\tau}_B = \{\tau_j, \quad j \in \bar{J}_B\}.$$

et construisons la matrice

$$\phi_B = (\phi(\tau_j), \quad j \in \bar{J}_B) = \phi(\bar{\tau}_B).$$

Vérifions que :

$$\det \phi_B \neq 0.$$

et calculons la nouvelle valeur de suboptimalité correspondante $\beta(\bar{u}, \bar{\tau}_B) = \bar{\beta}$, on peut réaliser le test d'optimalité suivant :

1. Si $\bar{\beta} = 0$ alors $\bar{u}(t)$, $t \in T$ est une commande optimal.
2. Si $\bar{\beta} \leq \varepsilon$ alors $\bar{u}(t)$, $t \in T$ est une commande ε -optimal.
3. Si non on passe soit à une nouvelle itération en démarrant avec $\{\bar{u}, \bar{\tau}_B\}$, $\bar{\alpha} < \alpha$, $\bar{h} < h$, ou à la procédure de changement de support.

3.6.2 Changement de support

Soit $\beta(\bar{u}, \bar{\tau}_B) > \varepsilon$, à partir du support $\bar{\tau}_B$ construisons la solution $\tilde{\psi}(t)$, $t \in T$ du système conjugué. Posons

$$\tilde{\Delta}(t) = -\tilde{\psi}'(t)b, \quad t \in T$$

et calculons la quasi-commande suivante :

$$\tilde{\omega}(t) = \begin{cases} d_2 & \text{si } \tilde{\Delta}(t) < 0; \\ d_1 & \text{si } \tilde{\Delta}(t) > 0; \\ \in [d_1, d_2] & \text{si } \tilde{\Delta}(t) = 0, \quad t \in T. \end{cases} \quad (3.45)$$

et sa quasi trajectoire correspondante $\chi = (\chi(t), t \in T)$ solution de l'équation suivante :

$$\dot{\chi} = A\chi + B\tilde{\omega}, \quad \chi(0) = x_0. \quad (3.46)$$

- Si $H\chi(t_f) = g$, alors $\tilde{\omega}(t), t \in T$ est optimale pour le problème (P) .
- Si $H\chi(t_f) \neq g$, construisons alors le vecteur :

$$\lambda(\tilde{T}_B) = \phi^{-1}(\tilde{T}_B)(g - H\chi(t_f)) \quad (3.47)$$

- Si $\lambda(\tilde{T}) = 0$, alors la quasi commande $\tilde{\omega}$ construite par le support $\tilde{\tau}_B$ est optimale pour le problème (P).
- Si non calculons $\|\lambda(\tilde{T}_B)\|$, deux cas peuvent se présenter :
 1. Si $\|\lambda(\tilde{T}_B)\| > \mu$: alors on change \tilde{T}_B en \bar{T}_B par la méthode duale.
 2. Si $\|\lambda(\tilde{T}_B)\| < \mu$: alors on passe à la procédure finale, $\mu > 0$, paramètre de la méthode.

Méthode duale

Soit

$$|\lambda(t_0)| = \max |\lambda(t)|, t \in \tilde{T}_B$$

On a :

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}(t) &= \tilde{\Delta}(t) + \sigma\delta(t) = \tilde{y}'\phi(t) - c(t) \\ &= \tilde{y}'\phi(t) - c(t) + \sigma\delta(t) \implies \Delta y'\phi(t) = \delta'(t) \end{aligned}$$

Par suit

$$\Delta y' = \delta'(\tau_B)\phi_B^{-1}$$

On a aussi

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{sur } T_B/\{t_0\} \\ \pm 1 & \text{pour } t = t_0. \end{cases}$$

On aura ainsi :

$$\begin{cases} \Delta_y(I) = -\phi^{-1}(t_0, I) \text{sign} \lambda(t_0); \\ \delta(t) = \Delta \psi'(t) b, \quad t \in T; \\ \Delta \dot{\psi} = -A' \Delta \psi'; \\ \Delta \psi(t_1) = H' \Delta y. \end{cases} \quad (3.48)$$

avec $\phi^{-1}(t_0, I)$: la t_0 de ième ligne de la matrice $[\phi(I, T_B)]^{-1}$.
Déterminons le pas dual en définissant la fonction suivante :

$$\sigma(t) = \begin{cases} -\tilde{\Delta}(t)/\delta(t), & \text{si } \tilde{\Delta}(t)\delta(t) < 0, \\ 0, & \text{si } \tilde{\Delta}(t) = 0, \delta(t) > 0, \tilde{\omega} \neq d_1 \text{ ou } \tilde{\Delta}(t) = 0, \delta(t) < 0, \quad , \tilde{\omega} \neq d_2, \\ \infty, & \text{si non, } t \in T \end{cases} \quad (3.49)$$

Construisons l'ensemble :

$$T(\sigma) = \{t \in T : \sigma(t) < 0\}$$

et soit alors :

$$\alpha(\sigma) = -|\lambda(t_0)| + (d_2 - d_1) \int_{T(\sigma)} |\delta(t)| dt$$

la vitesse de décroissance de la fonctionnelle duale. par construction :

$$\alpha(0) < 0, \quad \text{et } \alpha(\sigma) \leq \alpha(\bar{\sigma}) \quad \text{pour } \sigma \leq \bar{\sigma}$$

Si $\alpha(\sigma) < 0$ pour $\sigma > 0$, alors le problème (P) ne possède pas de commande admissible, dans le cas contraire cherchons un tel $\sigma_0 > 0$ tel que :

$$\alpha(\sigma_0 - y) \leq 0, \quad \alpha(\sigma_0 + 0) \geq 0, \quad \forall y/0 < y < \sigma_0$$

Soit $t_* \in T \tilde{T}_B$ un tel moment vérifiant :

$$\tilde{\Delta}(t_*) + \sigma_0 \delta(t_0) = 0, \quad \delta(t_*) \neq 0 \quad (3.50)$$

On obtient alors le nouveau support :

$$\tilde{T}_B = (\tilde{T}_B/t_0) \cup \{t_*\}.$$

- Si $\lambda(\tilde{T}_B) = 0$, alors la quasi commande $\tilde{\omega}$ construite par le support \tilde{T} est optimale pour le problème (P).
- Sinon refaire la même itération dans le cas où $\|\lambda(\tilde{T})\| > \mu$, et aller à la procédure finale dans le cas contraire.

Procédure finale

Supposons que pour la quasi commande $\tilde{\omega}$ et sa quasi trajectoire correspondante χ construite par le support \tilde{T}_B on la condition :

$$\|\lambda(\tilde{T}_B)\| \leq \mu$$

Désignons par :

$$T^0 = \{t \in T, \tilde{\Delta}(t) = 0\}$$

L'ensemble des point isolés $t_j, j = \overline{1, m}$, vérifiant :

$$\tilde{\Delta}(t_j) \neq 0, j = \overline{1, m}$$

On à la contrainte :

$$\begin{aligned} H\chi(t_f) - g &= \int_T \phi(t)\omega(t) dt - g + HF(t_f)x_0 \\ &= \int_{T^0} \phi(t)\omega(t) dt + \int_{T/T^0} \phi(t)\omega(t) dt - g + HF(t_f)x_0 \end{aligned}$$

Or, on $\|\lambda(\tilde{\Delta}_B)\| \leq \mu$, alors on peut poser :

$$\begin{aligned} H\chi(t_f) - g &= \int_{T^0} \phi(t)\omega(t) dt \\ &= \int_{T^{0+}} \phi(t)\omega(t) dt + \int_{T^{0-}} \phi(t)\omega(t) dt \end{aligned}$$

où :

$$T^{0-} = \{t \in T, \dot{\tilde{\Delta}}(t_j) < 0\}, T^{0+} = \{t \in T, \dot{\tilde{\Delta}}(t_j) > 0\}$$

On aura ainsi :

$$H\chi(t_f) - g = \begin{cases} \sum_{j=1}^m (d_2 - d_1) \int_{t_j}^{\tau_j} \phi(t) dt & \text{si } \dot{\tilde{\Delta}}(t_j) > 0, \\ -\sum_{j=1}^m (d_2 - d_1) \int_{t_j}^{\tau_j} \phi(t) dt & \text{si } \dot{\tilde{\Delta}}(t_j) < 0. \end{cases}$$

La procédure finale consiste à déterminer l'appui $\tau_B^0 = \{\tau_j^0, j = \overline{1, m}\}$ à partir des équations :

$$(d_2 - d_1) \sum_{j=1}^m \text{sign} \dot{\Delta}(t_j) \int_{t_j}^{\tau_j} \phi(t) dt = H\chi(t_f) - g \quad (3.51)$$

Pour la résolution des équations (3.44), on prend comme approximation initiale de $\tau_B^{(0)} = \{\tau_j^0, j = \overline{1, m}\}$:

$$\tau_B^{(0)} = \tilde{\tau}_B = \{\tau_j, j = \overline{1, m}\} \quad (3.52)$$

Supposons connue la $k^{\text{ième}}$ approximation

$$\tau_B^{(k)} = \{\tau_j^{(k)}, j = \overline{1, m}\} \quad (3.53)$$

on a alors la relation de récurrence suivante :

$$\tau_B^{(k+1)} = \tau_B^{(k)} + \frac{1}{d_2 - d_1} \{\text{sign} \dot{\Delta}(t_j) \lambda_j(\tau_B^{(k)}), j = \overline{1, m}\} \quad (3.54)$$

où $\lambda(\tau^{(k)})$ est un vecteur calculé par la relation (3.47), alors la fonction $\omega^0(t) = \tilde{\omega}(t), t \in T$, calculée par le support τ_B^0 est une commande optimale du problème (P).

3.6.3 Algorithme de la méthode

1. Test de commandabilité du système :
Calculer

$$\text{rg} [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$$

— Si

$$\text{rg} [B, AB, \dots, A^{n-1}B] = n$$

alors le système est commandable aller en 2,

— Sinon arrêter le processus de résolution et le problème (P) n'admet pas de solution optimale.

2. Prendre un support-contrôle de départ admissible $\{u, \tau_B\}$, avec la trajectoire admissible correspondante $x(t), t \in T$.
Calculer la valeur de la fonctionnelle en u :

$$J(u) = c'x(t_f)$$

Déterminer la co-commande :

$$\Delta(t) = y'\phi(t) - c(t), \quad t \in T$$

3. Test d'optimalité du support-contrôle de départ :
 Calculer la valeur de suboptimalité $\beta(u, \tau_B) = \beta$.
 - Si $\beta = 0$ alors arrêter le processus de résolution avec $\{u, \tau_B\}$ un support-contrôle optimal du problème (P).
 - Si $\beta \leq \varepsilon$ alors arrêter le processus de résolution avec $\{u, \tau_B\}$ un support-contrôle ε -optimal du problème (P).
 - Sinon aller en 4.
4. Changement de commande u en \bar{u} où :

$$\bar{u}(t) = u(t) + \theta \Delta u(t), \quad t \in T :$$

- (a) Choisir $\alpha > 0, h > 0, N > 0$:

$$T_0 = \{t \in T : |\Delta(t)| < \alpha\} = \bigcup_{j=1}^N [\tau_j, \tau^j[$$

$$T_1 = \{t \in T : |\Delta(t)| \geq \alpha\}, \quad \tau_j - \tau^j \leq h.$$

Poser

$$\ell_j = \begin{cases} \theta \Delta u(t) & t \in [\tau_j, \tau^j[, \quad j = \overline{1, N}, \\ 0, & j = N + 1 \end{cases}$$

Calculer :

$$\Delta u(t) = \begin{cases} d_2 - u(t) & \text{si } \Delta(t) \leq -\alpha \\ d_1 - u(t) & \text{si } \Delta(t) \geq \alpha, \quad t \in T \end{cases}$$

- (b) Formalisation du problème de support :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{N+1} g_j \ell_j \longrightarrow \max_{\ell_j}; \\ \sum_{j=1}^{N+1} q_j \ell_j = 0; \\ d_{1j} \leq \ell_j \leq d_{2j}, \quad j = \overline{1, N+1} \end{cases}$$

Déterminer par la méthode adaptée sa solution optimale $\{\bar{\ell}, \bar{J}_B\}$

(c) Calculer la nouvelle commande \bar{u} :

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} u(t) + \bar{\ell}_{N+1} \Delta u(t), & t \in T_1; \\ u(t) + \bar{\ell}_j, & t \in [\tau_j, \tau^j[, \quad j = \overline{1, N} \end{cases}$$

— Si l'indice $(N+1) \notin \bar{J}_B$, alors on pose $\tilde{J}_B = \bar{J}_B$.

— Si l'indice $(N+1) \in \bar{J}_B$, on l'exclut par la méthode duale et on obtient :

$$\tilde{J}_B = (\bar{J}_B / N + 1) \cup j^*.$$

(d) Poser $\tilde{\tau} = \{\tau_j, j \in \tilde{J}_B\}$

5. Test d'optimalité du nouveau support-contrôle $\{\bar{u}, \tilde{\tau}_B\}$.

Calculer la nouvelle valeur de suboptimalité correspondante $\beta(\bar{u}, \tilde{\tau}_B) = \bar{\beta}$, on peut réaliser le test d'optimalité suivant :

— Si $\bar{\beta} = 0$ alors arrêter le processus de résolution avec $\{\bar{u}, \tilde{\tau}_B\}$ un support-contrôle optimal du problème (P) .

— Si $\bar{\beta} \leq \varepsilon$ alors arrêter le processus de résolution avec $\{\bar{u}, \tilde{\tau}_B\}$ un support-contrôle ε -optimal du problème (P) .

— Sinon aller en 6 ou en 4 avec $\bar{\alpha} < \alpha, \bar{h} < h$

6. Changement de support $\tilde{\tau}_B \longrightarrow \bar{\tau}_B$: Construire la quasi-commande $\tilde{\omega}(t)$, $t \in T$:

$$\tilde{\omega}(t) = \begin{cases} d_2 & \text{si } \tilde{\Delta}(t) < 0; \\ d_1 & \text{si } \tilde{\Delta}(t) > 0; \\ \in [d_1, d_2] & \text{si } \tilde{\Delta}(t) = 0, \quad t \in T. \end{cases}$$

et sa quasi trajectoire $\chi = (\chi(t), t \in T)$

$$\dot{\chi} = A\chi + B\tilde{\omega}, \quad \chi(0) = x_0.$$

— Si $H\chi(t_f) = g$, alors arrêter le processus de résolution et la quasi-commande $\tilde{\omega}(t)$,

$t \in T$, construite par le support $\bar{\tau}_B$ est optimale pour le problème (P) .

— Sinon aller en 6-(a)

(a) Calculer

$$\lambda(\tilde{T}_B) = \phi^{-1}(\tilde{T}_B)(g - H\chi(t_f))$$

- Si $\|\lambda(\tilde{T}_B)\| > \mu$, aller en 6-(b)
- Sinon aller en 7.

(b) Déterminer t_0

$$|\lambda(t_0)| = \max |\lambda(t)|, \quad t \in \tilde{T}_B$$

Calculer

$$\bar{\Delta}(t) = \Delta(t) + \sigma_0 \delta(t), \quad t \in T.$$

Déterminer $t_* \in T/\tilde{T}_B$ tel que

$$\Delta(t_*) = 0, \delta(t_*) \neq 0.$$

Aller en 6-(a).

7. Procédure finale :

Déterminer le support optimal τ_B^0 à partir de relation de récurrence

$$\tau_B^{(k+1)} = \tau_B^{(k)} + \frac{1}{d_2 - d_1} \{ \text{sign} \dot{\Delta}(t_j) \lambda_j(\tau_B^{(k)}), \quad j = \overline{1, m} \}$$

en prenant comme approximation initiale $\tau_B^{(0)} = \tilde{\tau}_B$.

Arrêter le processus de résolution avec $\{\omega^0(t), t \in T; \tau_B^0\}$ un support-contrôle optimal du problème (P).

Remarque 3.6.1. — Les itérations de cet algorithme ne donnent pas un plan de support très dégénéré, donc cet algorithme est fini.

- Tout problème terminal d'un système dynamique linéaire de commande optimale peut être résolu par cette méthode constructive de résolution qui est la méthode adaptée .

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons résolu le problème de contrôle optimal en boucle ouverte d'un système dynamique. Tout d'abord, nous avons transformé le problème sous la forme d'un problème de programmation linéaire. Ensuite, l'utilisation de la méthode adaptée conduit à obtenir des résultats intéressants dans cas des systèmes continus.

Chapitre 4

Application numérique

4.1 Introduction

Ce chapitre porte les résultats numériques d'un exemple académique présenté dans la section 4.2, et il est ordonné de la manière suivante : la section 4.2 est dédiée à l'étude de la contrôlabilité de cet exemple. La section 4.3 et 4.4 sont consacrées à la résolution de cet exemple par deux manières : Le principe du maximum du Pontryagin, la méthode Adaptée respectivement, et à la fin une comparaison entre les résultats obtenus.

4.2 Exemple numérique

Supposons que le contrôle $u(t), t \in [0, t_f]$ est borné : $|u(t)| \leq 2$. Le critère est de type Mayer, avec une contrainte terminal donnée.

Soit le vecteur d'état $x = (x_1, x_2)$, le problème est donné par :

$$(p) = \begin{cases} \text{Maximiser} & J(u(t_f), t_f) = x_2(t_f) \\ \text{Sous les contraintes} & \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= u(t) \\ x_1(0) &= -\frac{1}{2}, & x_2(0) &= 2 \\ x_1(t_f) &= 3, \\ -2 &\leq u(t) \leq 2, & t \in T &= [0, t_f] \\ t_f &> 0 & \text{fixé} \end{aligned} \end{cases}$$

Pour ce problème le système dynamique peut être écrit sous la forme : $\dot{x} = Ax + Bu$ où :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad c' = (0, 1) \quad \text{et} \quad H = (1, 0) \quad \text{et} \quad g = 3$$

Étude la contrôlabilité du système

Le système est linéaire et de plus les deux matrices A et B sont indépendantes de la variable de temps t , cela implique que le système linéaire est autonome. Par conséquent, la contrôlabilité du système est donnée par le rang de la matrice de Kalmen qui est de la forme :

$$K = (B, AB) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui implique $\text{rang}(K) = 2$ donc le système est contrôlable.

4.3 Résolution par le principe du maximum du Pontriaguin "PMP"

Dans cette section nous résolvons le problème (P) avec le principe du maximum. Tout d'abord, nous transformons le problème (P) sous forme d'un problème de minimisation. Ensuite, nous trouvons la stratégie optimale et finalement, nous présentons ces résultats analytiquement et numériquement.

Transformé le problème (P)

$$(\tilde{P}) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser} \quad \tilde{J}(u(t_f), t_f) = -x_2(t_f) \\ \text{Sous les contraintes} \quad \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \\ x_1(0) = -\frac{1}{2}, \quad x_2(0) = 2 \\ x_1(t_f) = 3, \quad x_2(t_f) \text{ est libre} \\ -2 \leq u(t) \leq 2, \quad t \in T = [0, t_f] \\ t_f > 0 \quad \text{fixé} \end{array} \end{array} \right.$$

avec $\tilde{J}(u) = -J(u)$. Le Hamiltonien du problème \tilde{P} est :

$$H(x(t), p(t), u(t), t) = p_1(t)x_2(t) + p_2(t)u(t)$$

Le système adjoint est donné par :

$$\begin{cases} \dot{p}_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0. \\ \dot{p}_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -p_1(t). \end{cases} \implies \begin{cases} p_1(t) = p_{10} \\ p_2(t) = -p_{10}t + p_{20}. \end{cases} \quad (4.1)$$

Conditions de transversalité :

Les conditions de transversalité permettent d'avoir des conditions sur les vecteurs adjoints, et dans notre cas, elles sont des conditions finales. Nous avons, t_f fixé et $x(t_f)$ contraint par l'équation $g - Hx(t_f) = 0$, alors la condition de transversalité est donnée :

$$-p(t_f) - \frac{\partial g^0(x(t_f))}{\partial x_f} + \frac{\partial (g - Hx(t_f))'}{\partial x_f} \nu = 0.$$

où $g - Hx(t_f) = 3 - x_1(t_f)$ et $g^0(t_f) = -x_2(t_f)$

De là on obtient les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} p_1(t_f) = -\nu \\ p_2(t_f) = 1 \end{cases}$$

Par suite, le système (4.1) devient :

$$\begin{cases} \dot{p}_1(t) = -\nu \\ \dot{p}_2(t) = \nu(t - 2) + 1 \end{cases}$$

avec $p_{10} = -\nu$

Puisque le contrôle optimal est donné par le signe du vecteur adjoint $p_2(t)$, alors les temps de commutation sont donnés par les racines de $p_2(t)$.

Calculons :

$$\nu(t - 2) + 1 = 0$$

alors $t = -\frac{1}{\nu} + 2$

Donc $u(t)$ peut changer de signe au plus une fois, alors il peut y avoir au plus une commutation. Alors, on en déduit quatre stratégies possibles :

1. **Stratégie 1** : $u(t) = +2$ sur $[0, t_f]$,
 $\dot{x}_2(t) = 2$, ce qui implique :

$$\begin{cases} x_2(t) = 2t + c_1 \\ x_1(t) = t^2 + c_1 t + c_2 \end{cases}$$

En utilisant les conditions initiales, on obtient :

$$\begin{cases} x_2(t) = 2t + 2 \\ x_1(t) = t^2 + 2t - \frac{1}{2} \end{cases}$$

Calculons $x_1(t_f)$:

$x_1(t_f) = \frac{15}{2} \neq 3$, donc la stratégie 1 n'est pas optimale.

2. **Stratégie 2** $u(t) = -2$ sur $[0, t_f]$,

$\dot{x}_2(t) = -2$, ce qui implique :

$$\begin{cases} x_2(t) = -2t + c_1 \\ x_1(t) = -t^2 + c_1t + c_2 \end{cases}$$

En utilisant les conditions initiales, on obtient :

$$\begin{cases} x_2(t) = -2t + 2 \\ x_1(t) = -t^2 + 2t - \frac{1}{2} \end{cases}$$

Calculons $x_1(t_f)$:

$x_1(t_f) = -\frac{1}{2} \neq 3$, donc la stratégie 2 n'est pas optimale.

3. **stratégie 3**

$$u(t) = \begin{cases} 2, & \text{sur } [0, t_c] \\ -2, & \text{sur } [t_c, t_f] \end{cases}$$

Les équations du premier morceau de trajectoire, lorsque $u(t) = 2, t \in [0, t_c]$ sont :

$$\begin{cases} x_2(t) = 2t + c_1 \\ x_1(t) = t^2 + c_1t + c_2 \end{cases}$$

Les équations du deuxième morceau de trajectoire, lorsque $u(t) = -2, t \in [t_c, t_f]$ sont :

$$\begin{cases} x_2(t) = -2t + c_1 \\ x_1(t) = -t^2 + c_1t + c_2 \end{cases} \quad (4.2)$$

Au point d'intersection des deux morceaux, nous obtenons :

$$c_2 = -2t_c^2 - \frac{1}{2}, \quad c_1 = 4t_c + 2$$

Substituons ces dernières constantes dans le système (4.2), les trajectoires sont donnés par :

$$\begin{cases} x_2(t) = -2t + 4t_c + 2 \\ x_1(t) = -t^2 + 4t_c t - 2t_c^2 + 2t - \frac{1}{2} \end{cases} \quad (4.3)$$

Calculons t_c tel que $x_1(2) = 3$:

Cette dernière condition nous permet d'obtenir cette équation

$$-2t_c^2 + 8t_c - \frac{7}{2} = 0$$

La solution de cette dernière équation est donnée par :

$$t_c = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad t_c = \frac{7}{2}$$

Donc

$$t_c = \frac{1}{2}$$

Calculons $\tilde{J}(u)$:

D'après le système (4.3), nous avons : $x_2(t) = -2t + 4t_c + 2$, alors le coût du problème (\tilde{P}) est égale à :

$$\tilde{J}(u) = -x_2(2) = 0$$

par conséquent, le coût du problème (P) est égal à : $J(u) = 0$.

4. stratégie 4

$$u(t) = \begin{cases} -2, & \text{sur } [0, t_c] \\ 2, & \text{sur } [t_c, t_f] \end{cases}$$

Les équations du premier morceau de trajectoire, lorsque $u(t) = -2, t \in [0, t_c]$ sont :

$$\begin{cases} x_2(t) = -2t + c_1 \\ x_1(t) = -t^2 + c_1t + c_2 \end{cases}$$

Les équations du deuxième morceau de trajectoire, lorsque $u(t) = +2, t \in [t_c, t_f]$ sont :

$$\begin{cases} x_2(t) = 2t + c_1 \\ x_1(t) = t^2 + c_1t + c_2 \end{cases} \quad (4.4)$$

Au point d'intersection des deux morceaux, nous obtenons :

$$c_2 = 2t_c^2 - \frac{1}{2}, \quad c_1 = -4t_c + 2$$

Substituons ces dernières constantes dans le système (4.4), les trajectoires sont donnés par :

$$\begin{cases} x_2(t) = 2t - 4t_c + 2 \\ x_1(t) = t^2 - 4t_c t + 2t_c^2 + 2t - \frac{1}{2} \end{cases} \quad (4.5)$$

Calculons t_c tel que $x_1(2) = 3$:

Cette dernière condition nous permet d'obtenir cette équation

$$2t_c^2 - 8t_c + \frac{7}{2} = 0$$

La solution de cette dernière équation est donnée par :

$$t_c = 0.67 \quad \text{et} \quad t_c = 3.32$$

Donc

$$t_c = 0.67$$

Calculons $\tilde{J}(u)$:

D'après le système (4.5), nous avons : $x_2(t) = 2t - 4t_c + 2$, alors le coût du problème (\tilde{P}) est égale à :

$$\tilde{J}(u) = -x_2(2) = -3.29$$

Par conséquent, le coût du problème (P) est égal à : $J(u) = 3.29$.

Remarquons que le coût donné par stratégie 4 est supérieur à celui de la stratégie 3. De là, on en déduit que la solution optimale est décrite par le contrôle de la stratégie 4 et qui est de type Bang-bang. Le temps de commutation est donné par : $t_c = 0.67$. De l'égalité $t_c = \frac{-1 + 2\nu}{\nu}$ on obtient $\nu = 0.75$.

Par conséquent $P_{10}^\nu = -0.75$.

Ainsi le vecteur $p_2(t) = 0.75t + 0.5$

4.4 Résolution par la méthode directe "Méthode Adaptée" "MA"

$$(p) = \begin{cases} J(u) = c'x(2) \rightarrow \max \\ \dot{x} = Ax + Bu, & x(0) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix} \\ Hx(2) = g \\ -2 \leq u(t) \leq 2, & t \in T = [0, 2] \end{cases} \quad (4.6)$$

où :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad c' = (0, 1) \quad \text{et} \quad H = (1, 0) \quad \text{et} \quad g = 3$$

On a :

$$\text{rang}[B, AB] = 2$$

donc le système est contrôlable.

La trajectoire correspondant à l'état initial $x(0) = x_0$ est :

$$x(t) = F(t)x_0 + F(t) \int_0^t F^{-1}(\tau)Bu(\tau) d\tau, \quad t \in T$$

avec F la solution du système :

$$\begin{cases} \dot{F} = AF \\ F(0) = I_n \end{cases}$$

$$F(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p(t) = HF(2)F^{-1}(t)B = -t + 2, \quad c(t) = c'F(2)F^{-1}(t)B = 1$$

Soit la commande constante par morceaux suivante :

$$u(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0, 1[\\ 0, & t \in [1, 2] \end{cases}$$

Vérifions que cette commande est admissible :

— Sur $[0, 1[$, $u(t) = -1$

$$x(t) = F(t)x_0 + F(t) \int_0^t F^{-1}(\tau)Bu(\tau) d\tau = \begin{pmatrix} -\frac{t^2}{2} + 2t - \frac{1}{2} \\ -t + 2 \end{pmatrix} \implies x(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

— Sur $[1, 2]$, $u(t) = 0$

$$x(t) = F(t)x_0 + F(t) \int_0^t F^{-1}(\tau)Bu(\tau) d\tau = \begin{pmatrix} 1 + t \\ 1 \end{pmatrix} \implies x(2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a $Hx(2) = g$ et pour cette commande la fonctionnelle $J(u) = 1$

Soit l'appui généralisé $T_B = \{[\frac{1}{2}, 1[$ à qui correspond le moment d'appui :

$$\tau_B = \{t_j = \frac{1}{2}, j = 1\}$$

$$p_B = p(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}, p_B^{-1} = \frac{2}{3}$$

$$\Delta(t) = y'p(t) - c'(t), \quad t \in T$$

$$y' = c'_B p_B^{-1} = \frac{2}{3}; \quad \Delta(t) = \frac{1}{3}(1 - 2t), \quad t \in T$$

$$\begin{cases} \Delta(t) = 0 & , t = \frac{1}{2} \\ \Delta(t) > 0 & , t < \frac{1}{2} \\ \Delta(t) < 0 & , t > \frac{1}{2} \end{cases}$$

La valeur de suboptimalité correspondante à ce plan d'appui :

$$\beta = \beta(u, \tau_B) = \int_{T^+} \Delta(t)(u(t) - d_1) dt + \int_{T^-} \Delta(t)(u(t) - d_2) dt = 1.66 > \varepsilon$$

$\{u, \tau_B\}$ n'est pas une solution optimale, passons alors à la procédure de changement de commande :

Soit $\bar{u}(t) = u(t) + \theta \Delta u(t)$ une autre commande admissible et considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \Delta J(u) = -\theta \int_0^{t_f} \Delta(t) \Delta u(t) dt \longrightarrow \max \\ d_1 - u(t) \leq \theta \Delta u(t) \leq d_2 - u(t), t \in T \end{cases}$$

On prend comme paramètre de la méthode $\alpha = \frac{1}{3}$, $h = \frac{1}{2}$, $N = 2$

Costruisons alors les ensembles suivants :

$$T_0 = \{t \in T : |\Delta(t)| < \frac{1}{3}\} = \{[0, \frac{1}{2}[; [\frac{1}{2}, 1]\}$$

$$T_1 = \{t \in T : |\Delta(t)| \geq \frac{1}{3}\} = \{[1, 2]\}$$

$[\tau_{N+1}, \tau^{N+1}] = [\tau_3, \tau^3] = [1, 2]$ est un intervalle supplémentaire n'appartient pas à T_0
Posons :

$$\ell_j = \begin{cases} \theta \Delta u(t) & t \in [\tau_j, \tau^j[, \quad j = 1, 2, \\ \theta & j = 3 \end{cases} \quad (4.7)$$

$\Delta u(t) = d_2 - u(t) = 2$, $t \in T_1 = [1, 2]$.

Calculons les quantités suivantes :

$$q_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} p(t) dt = \frac{7}{8}; \quad q_2 = \int_{\frac{1}{2}}^1 p(t) dt = \frac{5}{8};$$

$$g_1 = - \int_0^{\frac{1}{2}} \Delta(t) dt = -\frac{1}{12}; \quad g_2 = - \int_{\frac{1}{2}}^1 \Delta(t) dt = \frac{1}{12};$$

$$q_3 = \int_1^2 p(t) \Delta u(t) dt = 1; \quad g_3 = - \int_1^2 \Delta(t) \Delta u(t) dt = \frac{4}{3};$$

Le problème (P) est équivalent au problème d'appui suivant :

$$\begin{cases} -\frac{1}{12}l_1 + \frac{1}{12}l_2 + \frac{4}{3}l_3 \longrightarrow \max \\ \frac{7}{8}l_1 + \frac{5}{8}l_2 + l_3 = 0 \\ -1 \leq l_1 \leq 3 \\ -1 \leq l_2 \leq 3 \\ 0 \leq l_3 \leq 1 \end{cases} \quad (4.8)$$

qui est un problème de programmation linéaire qu'on va résoudre par la méthode adaptée, avec comme plan d'appui initial $\{\ell = 0, J_B = 2\}$, $J = \{1, 2, 3\}$, $\ell' = (\ell_1, \ell_2, \ell_3)$.

$$A_B = \frac{5}{8}, \quad A_B^{-1} = \frac{8}{5}$$

$$\Delta[J] = (\frac{1}{5}, 0, -\frac{6}{5})$$

Calculons la valeur de suboptimalité :

$$\beta(\ell, J_B) = \sum_{j \in J_H^+} \Delta_j(\ell_j - d_{1j}) + \sum_{j \in J_H^-} \Delta_j(\ell_j - d_{2j}) = \frac{7}{5} > \varepsilon$$

Donc $\{\ell = 0, J_B\}$, n'est pas une solution optimale de problème (4.8), passons à la procédure de changement de plan, en posant $\bar{\ell} = \ell + \theta^0 \Delta \ell$,

où

$$\Delta \ell_1 = \tilde{d}_{11} - \ell_1 = -1, \quad \Delta \ell_3 = \tilde{d}_{23} - \ell_3 = 1, \quad \Delta \ell_2 = -A_B^{-1} A_H \Delta \ell_H = -\frac{1}{5},$$

$$\theta_2 = \frac{\tilde{d}_{12} - \ell_2}{\Delta \ell_2} = 5 \implies \theta^0 = \min\{1; 5\} = 1$$

$$\implies \beta(\bar{\ell}, J_B) = (1 - \theta^0) \beta(\ell, J_B) = 0$$

$\{\bar{\ell}, J_B\}$ est un plan d'appui optimale pour le problème (4.8).

$$\bar{\ell} = (-1, -0.2, 1); J_B = 2$$

La nouvelle commande $\bar{u}(t)$, $t \in T$ du problème (4.6) devient alors :

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} -2 & , t \in [0, \frac{1}{2}[\\ -1.2 & , t \in [\frac{1}{2}, 1[\\ 2 & , t \in [1, 2], \end{cases}$$

et sa trajectoire correspondante $x(t)$, $t \in T$ vérifie $Hx(2) = 3$.

La nouvelle valeur de la fonctionnelle $J(\bar{u}) = c'x(2) = 2.8 > 1$.

On a $N + 1 \notin J_B \implies \tilde{J}_B = J_B$.

Posons $\tilde{\tau}_B = \{\tau_j, j \in \tilde{J}_B\} = \{\frac{1}{2}\}$; $p_B = p(\tilde{\tau}_B) = \frac{3}{2}$.

Calculons $\beta(\bar{u}, \tilde{\tau}_B) = \int_{T^+} \tilde{\Delta}(\bar{u}(t) - d_1) dt + \int_{T^-} \tilde{\Delta}(t)(\bar{u}(t) - d_2) dt = 0.26$

$\beta(\bar{u}, \tilde{\tau}_B) = 0.26 > \varepsilon$, on passe alors à la procédure de changement d'appui :

Soit la quasi-commande $\bar{\omega} = (\tilde{\omega}(t), t \in T)$:

$$\tilde{\omega}(t) = \begin{cases} 2 & , \text{si } \tilde{\Delta}(t) < 0, \\ -2 & , \text{si } \tilde{\Delta}(t) > 0, \\ \in [-2, 2] & , \text{si } \tilde{\Delta}(t) = 0, \quad t \in T \end{cases}$$

sa quasi trajectoire correspondante $\chi = (\chi(t), t \in T)$:

$$\dot{\chi} = A\chi + B\tilde{\omega}, \chi(0) = x_0.$$

— Sur $[0, \frac{1}{2}[$, $\tilde{\omega} = -2$

$$\chi(t) = \begin{pmatrix} -t^2 + 2t - \frac{1}{2} \\ -2t + 2 \end{pmatrix}, x(\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}$$

— Sur $[\frac{1}{2}, 2]$, $\tilde{\omega} = +2$

$$\chi(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix}, x(2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$g - H\chi(2) = -1 \neq 0$$

Calculons alors le vecteur $\lambda(\tilde{T}_B) = p_B^{-1}(g - H\chi(t_f)) = -\frac{2}{3}$.

$\|\lambda(\tilde{T}_B)\| = \frac{2}{3} > \mu$, alors on change l'appui $\tilde{\tau}_B$ de la manière suivante :

$$t_0 = \frac{1}{2}; \text{sign}(\lambda(t_0)) = -1$$

On obtient : $\delta(t) = \frac{3}{2}(-t + 2)$; $\tilde{\Delta}(t) = \frac{1}{3}(1 - 2t)$,

avec le pas dual $\sigma_0 = 0.13$ on obtient la nouvelle co-commande :

$$\bar{\Delta}(t) = \tilde{\Delta}(t) + \sigma_0\delta(t); \bar{\Delta}(t) = -0.75t + 0.51$$

$$\implies t^* = 0.67 \text{ d'où } \bar{\tau} = (\tilde{\tau}_B/t_0) \cup t^* = 0.67$$

La nouvelle commande $\bar{\omega}(t), t \in T$ est donnée par :

$$\bar{\omega}(t) = \begin{cases} -2 & , t \in [0, 0.67[, \\ 2 & , t \in [0.67, 2] \end{cases}$$

$H'\bar{\chi}(2) = 3 = g$ est $J(\bar{\omega}) = c'\chi(2) = 3.29 > J(\bar{u}) \implies \{\bar{\omega}, \bar{\tau}_B\}$ est une commande-appui optimale pour le problème(4.6) .

4.5 Comparaison entre PMP et MA

La résolution de l'exemple académique par deux manières différentes, soit avec la méthode indirecte ou bien la méthode directe, nous permettent d'étudier les points communs entre ces méthodes.

La solution optimale donnée par le principe du maximum de Pontryagin est représentée par le signe du vecteur adjoint $p_2(t)$, c'est-à-dire $u^*(t) = \text{sign}(p_2(t))$, avec

$$p_2(t) = \nu(t - 2) + 1$$

ou bien

$$p_2(t) = -p_{10}(t - 2) + 1 \quad (4.9)$$

Avec p_{10} est la solution de l'équation $\dot{p}_1(t) = 0$

D'autre part, nous avons : $c(t) = 1$ et $p(t) = -t + 2$ d'après la méthode adaptée et l'équation (4.9) devient :

$$p_2(t) = p_{10}p(t) + c(t)$$

En posant $p_{10} = -y'$ (y : vecteur des potentiels) on obtient :

$$p_2(t) = -\Delta(t) \quad , \Delta(t) \text{ est le co-commande}$$

Le temps de commutation t_c égale à $\tau_B = 0.67$ avec t_c est le temps auquel le contrôle extrémal $u(t), t \in T$ change de signe.

Ainsi, le nombre de commutation est égale à 1.

La solution optimale est donnée par le contrôle de type bang-bang :

$$u^*(t) = \begin{cases} -2, & \text{si } \Delta(t) \geq 0, \quad [0, 0.67] \\ 2, & \text{si } \Delta(t) < 0, \quad [0.67, 2] \end{cases}$$

La valeur optimale de la fonction du critère $J(u^*) = x_2(t_f) = 3.29$

4.6 Conclusion

Les résultats numériques obtenus nous ont permis de faire une comparaison entre les deux méthodes et de voir l'avantage et l'inconvénient de chacune d'elle

Conclusion générale

L'objectif de notre mémoire a été de résoudre un problème de contrôle optimal avec une commande bornée. Notre but était de trouver une meilleure condition initiale et une commande optimale qui pouvait nous ramener de l'état initial $x_0 \in G_0$ vers l'état final décrit par l'équation $Hx(t_f) = g$ pour sa résolution, on a utilisé deux méthodes : méthode direct et méthode indirect.

On trouve deux approches de résolution des problèmes de contrôle optimal :

- Les méthodes indirectes.
- Les méthodes directes.

Méthodes indirectes :

Les méthodes indirectes sont basées sur le principe du maximum de Pontriaguine qui donne une condition nécessaire d'optimalité. On cherche ensuite les trajectoires vérifiant les conditions, le choix de ces méthodes s'explique par leur avantages, la bonne rapidité de convergence (quand il y a convergence) et leur grande précision dans le traitement des problèmes de contrôle optimal mais lourdement dépendantes de point initial.

Méthodes directes :

Les méthodes directes ont pris de l'importance dans le domaine de contrôle optimale numérique depuis les années 80.

Les méthodes directes sont très faciles à appliquer, et relativement robustes à l'initialisation. On peut traiter un système avec un grand nombre de variables d'état. Leur précision est limitée par la précision de la discrétisation.

En guise de perspectives, nous proposons les axes de recherche suivants :

- Généralisation de la méthode directe sur un problème de contrôle optimal quadratique.
- Application de ces méthodes à des problèmes en nombre entier à des problèmes de contrôle optimal non linéaire.

Bibliographie

- [1] N. V. Balashevich, R. Gabasov, and F. M. Kirillova. Numerical methods for open loop and closed loop optimization of piecewise linear systems. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 41(11) :1578-1593, 2001.
- [2] M. Bergounioux. *Optimisation et contrôle des systèmes linéaires : cours et exercices avec solutions*. 2001.
- [3] G. B. Dantzig. *Linear Programming and Extensions*. Princeton University Press, Princeton (N.J.), 1963
- [4] G.B. Dantzig. Linear optimal control processes and mathematical programming. *J.SIAM Contr.*, 4 no. 1,
- [5] G.B. Dantzig. *Linear Programming and Extensions*. Princeton University Press, Princeton.1963
- [6] R. Gabasov, F.M. Kirillova, *Méthodes de programmation linéaire*. Tome 1, , 3, Minsk. : Edition de l'université, 1977, 1978, 1980.
- [7] R.F. Gabasov N.V. Balashevich and F.M. Kirillova. Numerical methods for openloop and closed-loop optimization of linear control systems. *Zh.Vychisl.Mat.Mat.Fiz*, **40** : 838 - 859., 2000.
- [8] R.F. Gabasov N.V. Balashevich and F.M. Kirillova. Numerical methods for open loop and closed loop optimisation of piecewise linear systems. *Zh.Vychisl.Mat.Mat.Fiz*, 41, no.11 :1658-1674., 2001.
- [9] R. Gabasov, V.S. Glushenkov F.M. Kirillova, A.V. Pokayev, A.A. Senko, and A.I. Tyatyshkin. Algorithms of optimization of linear and non-linear systems. In G.Ferrate and E.A. Puente, editors, *Software for computer control, Proceedings of the third IFAC/ifip Symposim, Madrid(spain)*,1982
- [10] R. Gabasov. Adaptive method of solving linear programming problem. Preprint series of University of Karlsruhe, Institut of statistics and mathematics, 1994
- [11] R. Gabasov, F.M. Kirillova, "Méthode constructives d'optimisation". T1, Edition de l'université de Minsk, 1984(en russe)
- [12] | R. V. Gamkrelidze, Discovery of the maximum principle. *Journal of Dynamical and Control Systems*, Vol. 5, no. 4, 437-451, 1999.
- [13] J.C. Gilbert. Mise à jour de la métrique dans les méthodes de quasi-newton réduites en optimisation avec contraintes d'égalité. pages 251 ?288, 1988.
- [14] F.Kara. "Optimisation de problème de contrôle d'une commande polyédrale". Mémoire de Magistère en recherche opérationnelle. Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou.2008

- [15] R.E.Kalman. Contribution to theory of optimal control. Boletin de la Sociedad Matematica Mixican 5(2) : 102-119,1960
- [16] R.E. Kalman, Mathematical description of linear dynamical systems. SIAM Journal on control, 1 : 152-192, 1963.
- [17] N. Karmarkar. A new polynomial-time algorithm for linear programming. In Proceedings of the sixteenth annual ACM symposium on Theory of computing, pages 302-311, 1984.
- [18] H. K. Khalil, Nonlinear systems. Prentice Hall, 1996.
- [19] V. Klee and G.J. Minty. Inequalities III, chapter How good is the simplex algorithm ?, pages 159-175. Academic Press, New York, 1972.
- [20] E.B Lee and L.Markus. Foundation of optimal control theory. The SIAM series in Applied Mathematics. John Wiley and Sons, New-York-London-Sydney,1967.
- [21] C. Lobry et T. Sari, Introduction à la théorie du contrôle. CIMPA, Tlemcen, 2003.
- [22] K. Louadj. Résolution de problèmes paramétrés de contrôle optimal. Thèse de doctorat en recherche opérationnelle. Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou. 2012
- [23] I.J. Lustig, R.E. Marsten, and D.F. Shanno. On implementing mehrotra's predictor-corrector interior-point method for linear programming. SIAM Journal of Optimization, 2(3) :435-449, 1992.
- [24] P. Martinon, Résolution numérique de problèmes de contrôle optimal par une méthode homotopique simpliciale. Thèse de Doctorat à l'institut national polytechnique de Toulouse, 2005.
- [25] Y. Nesterov, A. Nemirovskii, and Y. Ye. Interior-point polynomial algorithms in convex programming, volume 13 of Theory and Algorithms of Studies in Applied Mathematics. Society for industrial and applied mathematics Publications, Philadelphia, 1994.
- [26] D. Ouidja. Principe du maximum et méthode de tir. Mémoire de magistère en recherche opérationnelle. Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou. 2011
- [27] O. Oukacha. Méthode directe d'optimisation de problèmes de contrôle optimal. Thèse de doctorat en Mathématique Appliquées et recherche opérationnelle. Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou.
- [28] L. S. Pontriagin, Mathematical Theory of Optimal Processus. Interscience, New York, 1962
- [29] L. S. Pontriagin, V. Boltianski, R.Gamkrelidze et E. Michtchenko, Théorie Mathématique des processus optimaux . Edition MIR-Moscou, (traduit du Russe), 1974
- [30] C.V. Rao, S.J. Wright, and J.B. Rawlings. Application of interior-point methods to model predictive control. Journal of Optimization Theory and Applications,99(3) :723-757, 1998.
- [31] C. Roos, T. Terlaky, and J.P. Vial. John Wiley and Sons, Chichester, UK, 1997.
- [32] M.C. Steinbach. Structured interior point sqp methods in optimal control. ZAMM-Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik, 76(3) :59-62, 1996.

- [33] E. Trélat Contrôle optimal Théorie et application Vuibert, Collection "Mathématique Concrètes", 2005.
- [34] E. Trélat Commande optimal . Notes du cours A08, 2007/2008
- [35] R. J. Vanderbei. Linear Programming : Foundations and Extensions. Kluwer Academic Publishers Princeton University, 2001.
- [36] J. Vignes. Implémentation des méthodes d'optimisation : Test d'arrêt optimal, contrôle et précision de la solution. Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle, 18(1) :1 - 8, 1984.
- [37] S.J. Wright. Primal-dual interior-point methods. SIAM Publications, Philadelphia, 1997.
- [38] A. Yassine. Etudes adaptatives et comparatives de certains algorithmes en optimisation : implémentations effectives et applications. PhD thesis, Université Joseph-Fourier-Grenoble I, 1989.

Résumé

Dans ce mémoire, deux méthodes de résolution d'un problème de contrôle optimal sont présentées. la première fait partie des méthodes dites indirectes. Elle est basée sur le principe du maximum de Pontriaguine. La deuxième est une méthode directe, il s'agit de la méthode adaptée inventée par R. Gabasov. A titre d'illustration, une application de ces deux méthodes sur un exemple est faite. Les résultats numériques obtenus nous ont permis une comparaison les deux méthodes proposées.

Mots clés : contrôle optimal, contrôlabilité, principe du maximum, méthode adaptée.

Abstract

In this memoir, two methods for solving an optimal control problem are presented. The first is part of the so-called indirect methods. It is based on the principle of the maximum Pontriaguine. The second is a direct method, it is the adapted method invented by R. Gabasov. By way of illustration, these two methods are applied to an example. The numerical results obtained allowed us to compare the two proposed methods.

Keywords : optimal control, controllability, maximum principle, adapted method.