الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

جامعة أكلي محند أولحاج –البويرة–

كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير

محاضرات في الأساليب الكمية

(البرمجة الخطية ، مسائل النقل)

مطبوعة بيداغوجية موجهة لطلبة الماستر تخصص:

محاسبة ومراجعة، مالية المؤسسة

إعداد الدكتور:

عمر دهيمي

2020/2019

مقدمة:

بعد الحرب العالمية الثانية لم تعد الأساليب التقليدية في اتخاذ القرارات الإدارية مجدية، إذ بات لزاما على المؤسسات سلوك توجهات حديثة في الإدارة تركز على ضرورة الاعتماد على الأساليب الكمية كبحوث العمليات، وأول أسلوب أستخدم من هذه الأساليب هو أسلوب البرمجة الخطية، ولقد تطور استخدام بحوث العمليات في السنوات الماضية بشكل كبير جدا، حيث أصبحت أساليب التحليل في بحوث العمليات أدوات ووسائل لمعالجة الكثير من المسائل كتعظيم الأرباح، وتخفيض التكاليف، ومسائل النقل، ومسائل التخصيص ...إلخ

و تعتبر البرمجة الخطية من العلوم التطبيقية التي أحرزت انتشارا واسعا، حيث انها من الوسائل العلمية المساعدة في إعطاء بدائل مختلفة لعملية اتخاذ القرارات بأسلوب أكثر دقة ،لاعتمادها على المعلومات الملائمة في اختيار البديل الأمثل لحل المشاكل التي تواجه متخذ القرار وتمكينه من اتخاذ القرار الأمثل، وذلك باستخدام النماذج الرياضية لمعالجة العوامل المؤثرة وتحليلها ومن ثم اتخاذ القرار المناسب وللبرمجة الخطية تطبيقات في الهندسة والعلوم الاقتصادية والإدارية.

كما تعتبر مسائل النقل من أهم التطبيقات البرمجة الخطية حيث تستخدم النماذج الخطية لمعالجة هذه المشكلة، و نهدف من خلالها للوصول إلى الأسلوب الأمثل لتوزيع الوحدات أو المنتجات المحصل عليها من مصادر عرض مختلفة(شركات، مصانع، مراكز)..... ، إلى مواقع الطلب بأقل تكلفة ممكنة أو بأعلى ربح أو بأقل زمن.

الفصل الأول – عموميات حول الأساليب الكمية

1-مفهوم الأساليب الكمية :

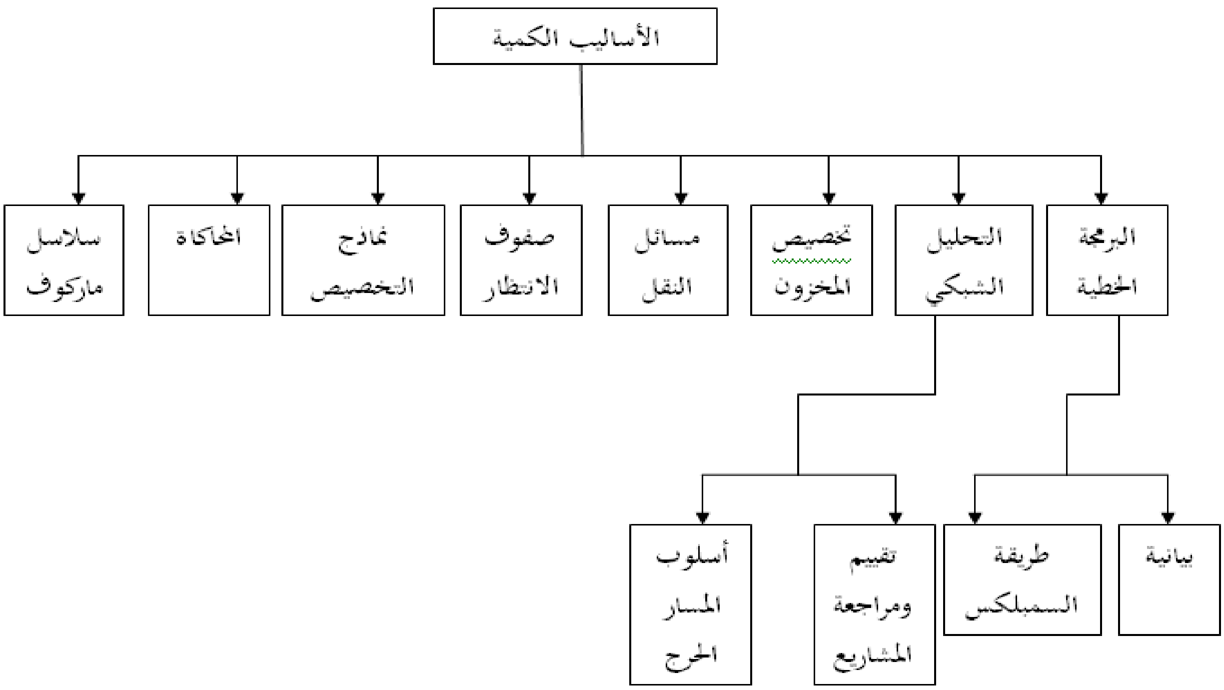
هي عبارة عن أسلوب رياضي يتم على أساسه معالجة وحل المشاكل الاقتصادية والإدارية والتسويقية بمساندة الموارد المتاحة من البيانات والأدوات والطرق التي تستخدم من قبل متخذي القرار لمعالجة المشاكل، و يطلق على هذا النوع من المعرفة أسماء متعددة وكثيرة كعلم الإدارة وبحوث العمليات وعلم اتخاذ القرار ، وتشترك جميعها في أنها تعتمد على استخدام الطرق العلمية في اتخاذ القرار السليم.

2- **تعريف الأساليب الكمية** : للأساليب الكمية عدة تعاريف نذكر منها:

-**التعريف الأول:** " مجموعة الطرق والصيغ والمعدات والنماذج التي تساعد في حل المشكلات على أساس عقلاني "

- **التعريف الثاني:** التعريف الذي اعتمدته جمعية بحوث العمليات البريطانية بأنها " استخدام الأساليب العلمية لحل المعضلات المعقدة في إدارة أنظمة كبيرة من القوى العاملة، المعدات، المواد أولية، الأموال في المصانع والمؤسسات الحكومية وفي القوات المسلحة "

3-الأساليب الكمية المستخدمة ضمن بحوث العمليات:



4-مزايا استخدام الأساليب الكمية: من مزايا استخدام الأساليب الكمية ما يلي:

- تساعد في اتخاذ القرارات بأسلوب أكثر دقة وبعيدا عن العشوائية الناتجة عن التجربة والخطأ.
- تساعد على تناول المشاكل المعقدة بالتحليل والحل والتي يصعب تناولها في صورتها العادية.
- تركز الاهتمام على الخصائص المهمة للمسألة دون الخوض في التفاصيل التي لا تؤثر على القرار، ما من شأنه تحديد العناصر الملائمة لاتخاذ القرار ومن ثم استخدامها للوصول للقرار الأفضل.
- المساهمة في تقريب المشاكل الإدارية إلى الواقع.
- تقوم بالتخصيص الكفء للموارد المتاحة.

الفصل الثاني: البرمجة الخطية.

تحتل البرمجة الخطية في الوقت الحاضر مركزا مرموقا في بحوث العمليات ولها تطبيقات واسعة وتم تطوير الأساليب الفنية المستخدمة في مشاكل البرمجة بعد الحرب العالمية الثانية حيث تم تطوير طريقة رياضية ذات كفاءة عالية من قبل العالم Dantzing– G وسميت بالطريقة المبسطة السمبلكس .

فالبرمجة الخطية هي إحدى الوسائل المستخدمة في بحوث العمليات، والتي تساعد في اتخاذ القرارات في رقابة وإدارة الأموال و الموارد و الآلات والمواد الأولية و العناصر البشرية، وتعتبر من أسهل و أبسط أنواع النماذج التي يمكن إنشاؤها لمعالجة جميع المشاكل الصناعية والحكومية الكبرى، وذلك بالتوافق مع الزيادة في استخدام الحاسبات الالكترونية وظهور البرمجيات الجاهزة الحديثة .

أولا: عموميات حول البرمجة الخطية

تعد البرمجة الخطية من أهم أنواع النماذج الرياضية وأكثر الأساليب الكمية استخداما وشيوعا في بحوث العمليات كونها لا تحتاج إلى خلفية رياضية على درجة عالية من التخصص.

1- تعريف البرمجة الخطية: هي إحدى الأساليب التي تستخدم في بحوث العمليات وهي طريقة رياضية تمكن من التوصل لأفضل أو أمثل الحلول الممكنة لمجموعة من المشاكل التي تتوفر فيها شروط رياضية معينة .

فنجد أن كلمة " البرمجة " تشير إلى الطريقة الرياضية المنتظمة التي على أساسها التوصل إلى الحل الأمثل للمشكلة موضوع التطبيق من بين كل الحلول المتاحة والممكنة. بينما نجد كلمة " خطية " تشير إلى الشروط الواجب توافرها في المشكلة موضوع التطبيق حتى يتسنى حلها بالبرمجة الخطية، وهذه الكلمة تستخدم لوصف العلاقة بين متغيرين أو أكثر وهي علاقة مباشرة و تتغير بنفس النسبة ويمكن تعريفها أيضا كما يلي :

أنها أسلوب رياضي لتوزيع مجموعة من الموارد والإمكانيات المحدودة على عدد من الحاجيات المتنافسة على هذه الموارد ضمن مجموعة من القيود والعوامل الثابتة بحيث يحقق هذا التوزيع أفضل نتيجة ممكنة أي أن يكون توزيعها مثاليا .

كما تعتبر البرمجة الخطية أبسط وأسهل أنواع النماذج الرياضية و التي يمكن إنشاؤها لمعالجة معضلات البرمجة الصناعية و الحكومية الكبرى .

2- تطبيقات البرمجة الخطية: في الحقيقة إن للبرمجة الخطية استخدامات متعددة وكثيرة جداً،حيث يمكن استعمالها في العديد من ميادين الحياة، ولحل الكثير من المسائل التي تواجهنا على أن تستوفي الشروط المذكورة سابقاً، غير أننا سوف نذكر فقط بعض من المجالات التي يمكن استعمالها في المؤسسات من بينها ما يلي:

- المشكلات المتعلقة بالإنتاج كتحديد التشكيلة الممكنة من مختلف المنتجات وكمياتها مما يسمح بتحقيق هدف معين و في ظل كميات متاحة من عوامل الإنتاج تدخل جميعها في تشكيلة الإنتاج .
- تحديد المزيج الإنتاجي المتمثل في العناصر التي تمزج مع بعضها بكيفية معينة و بنسب مختلفة، للحصول على منتج جديد كصناعة المنظفات، الأغذية....الخ.
- تستعمل في اختبار وتعيين الأفراد في المؤسسة بغرض القيام بعمليات و مهام مختلفة (مسائل التعيين و التخصيص)
- توزيع المواد و المنتجات المتجانسة من مصادر تواجدها نحو أماكن استخدامها (مسائل النقل).
- بالإضافة إلى ذلك يمكن استخدام البرمجة الخطية في تخطيط الإشهار، تخطيط المخزون تحديد أماكن إقامة الوحدات...الخ.

3-متطلبات تطبيق نموذج البرمجة الخطية:

تعتبر البرمجة الخطية أسلوبا رياضيا لتوزيع موارد محدودة على عدد من الاستخدامات البديلة بالطريقة التي تحقق أفضل استخدام ممكن لها ، وهذا يعني أن البرمجة الخطية تستند إلى فكرتين هما : فكرة النشاط وفكرة البدائل، ويقصد بفكرة النشاط في مجال الأعمال تلك الطريقة التي يمكن أن يتم بها أداء عمل معين، ويعبر النشاط عن منتج معين أو عملية معينة، ويقصد بفكرة البدائل في هذا الصدد كيفية تحقيق الهدف المعين، وتستخدم البرمجة الخطية لتحديد أي البدائل يجب إتباعه لتحقيق الهدف.

يتطلب إعداد نموذج البرمجة الخطية ضرورة توافر مواصفات معينة في المشكلة المراد حلها، وتتمثل هذه المواصفات فيما يلي :

3-1-ضرورة وجود هدف واحد يراد تحقيقه، و قد يكون هذا الهدف هو تحقيق أقصى ربح ممكن أو أقصى قيمة ممكنة.

3-2- أن تتضمن المشكلة عددا من متغيرات القرار و التي تؤدي اختيار القيمة المثلى لكل منها إلى تحقيق الهدف المراد تحقيقه ، وقد تكون هذه المتغيرات وحدات منتجات أو مناطق توزيع أو أنشطة مختلفة تقوم بها المنشأة .

3-3- أن تكون هناك قيود تحد من القدرة على تحقيق الهدف المرغوب ، وقد تكون هذه القيود معبرة عن الموارد المحدودة المتاحة للوحدة الاقتصادية ،كما قد تكون قيوداً تتعلق بطبيعة النشاط و البيئة المحيطة به ، أي أن متخذ القرار ليس حرا في اختياره لقيم متغيرات القرار التي تحقق الهدف المرغوب .

3-4- ضرورة أن تكون جميع متغيرات القرار مستمرة، أي يمكن لها اتخاذ أي قيم كسرية، وليست بالضرورة قيم صحيحة.

3-5- ضرورة وجود علاقة خطية بين المتغيرات التي تتضمنها المشكلة.

3-6- ضرورة توافر البيانات اللازمة لإعداد النموذج، و أن تكون هذه البيانات معلومة بصفة مؤكدة.

4-افتراضات نموذج البرمجة الخطية:

تتمثل افتراضات نموذج البرمجة الخطية في ثلاث افتراضات هي:الخطية، و القابلية للتجزئة، و التأكد، ونتناول فيما يلي كل من هذه الافتراضات بشيء من التفصيل:

4-1- افتراض الخطية:

نقصد بالخطية وجود علاقات ذات نسب ثابتة بين المتغيرات التي تتضمنها المشكلة، و يعتبر افتراض الخطية هو الافتراض الأساسي للبرمجة الخطية، ذلك أنه يفترض أن تكون العلاقات بين المتغيرات علاقة خطية كشرط أساسي لإعداد نموذج البرمجة الخطية.

تتحقق الخطية في العلاقات المعينة إذا توافر شرطان أساسيان و هما شرط التناسب، وشرط القابلية للإضافة. و يتعلق شرط التناسب بتأثير كل نشاط من الأنشطة التي يعبر عنها النموذج على قيمة الدالة المعينة.

لا يعتبر افتراض التناسب كافياً لضمان أن تكون العلاقة خطية، إذ انه قد يؤدي اشتراك عدد من الأنشطة أو المنتجات في استخدام مورد معين إلى وجود تداخل بين الأنشطة أو المنتجات، وقد

يؤثر وجود هذا التداخل على خطية العلاقات بين المتغيرات لذلك يتضمن افتراض الخطية أيضاً ضرورة افتراض عدم وجود أي تداخل بين الأنشطة أو المنتجات، و يطلق على هذا الافتراض الأخير " القابلية للإضافة " و يقتضي هذا الافتراض بأنه إذا كان لدينا مستويات للأنشطة $(X_1,X_2........X_n)$ فإن إجمالي الكمية المستخدمة من كل مورد و القيمة الناتجة للهدف يكون مساوياً لمجموع الكميات التي بأداء كل نشاطات بصفة مستقلة.

على الرغم من أن الخطية هي افتراض ضروري لإعداد نموذج البرمجة الخطية إلا أن الواقع العملي يتضمن قلة من المشاكل التي يتوافر فيها هذا الافتراض ، و تواجه الإدارة كثيراً مشاكل تتضمن علاقات غير خطية بين المتغيرات ، وتلجأ الإدارة عادةً إلى استخدام إحدى طرق التقريب المعروفة لتحويل العلاقات غير الخطية إلى علاقات خطية بحيث يمكن تطبيق البرمجة الخطية .

4-2- افتراض القابلية للتجزئة :

يعني افتراض القابلية للتجزئة أن مستويات النشاط تتيح لمتغيرات القرار أن تتخذ قيماً كسرية ، أي أنه يمكن عدم التقيد بأن تكون قيم المتغيرات أرقاماً صحيحة، وقد يكون لمتغيرات القرار دلالة من الناحية المادية إذا كانت فقط على هيئة أعداد صحيحة كما هو الحال في إنتاج السيارات مثلاً، إذ لا يعقل أن يكون الحل الأمثل كسرياً، ويمكن استخدام البرمجة الخطية في حالة اشتراط عدم القابلية للتجزئة ، فإذا كان الحل متضمناً لأرقام كسرية فإنه يمكن التقريب في الحل بحيث يصبح غير كسري .

إلا أن هناك بعض المشاكل التي قد تترتب على استخدام هذا المدخل خصوصا إذا كانت متغيرات القرار متعددة وصغيرة الحجم، ويفضل في هذه الحالة استخدام برمجة الأعداد الصحيحة، وهي حالة خاصة من البرمجة الخطية.

4-3- افتراض التأكد التام:

يعتبر نموذج البرمجة الخطية أحد النماذج التحديدية و التي تفترض حالة التأكد التام ويعني افتراض التأكد التام أن يكون متخذ القرار على درجة كاملة من التأكد بالنسبة للعوامل المسببة للقرار من ناحية ، و بالنسبة للنتائج التي تترتب على اتخاذ مثل هذا القرار من ناحية أخرى .

وحيث أن الواقع العملي نادراً ما تتوافر فيه حالة التأكد التام فإنه يفضل دائماً إجراء نوع من تحليل الحساسية بعد تحديد قيمة الحل الأمثل، ويتضمن هذا التحليل دراسة التغيير الذي يطرأ على الحل الأمثل نتيجة تغيير أحد أو بعض المعاملات التي استخدمت في الحل .

ولقد كان فرض التأكد التام عائقاً لاتساع نطاق تطبيق البرمجة الخطية إلى أن تمكن "جورج دانتزج" من التوصل إلى بعض الأساليب الرياضية التي تمكن من حل مشاكل البرمجة في ظل اعتبارات عدم التأكد ، و أطلق على هذا النوع من البرمجة " البرمجة الاحتمالية ".

ثانيا- بناء أو صياغة نموذج البرمجة الخطية .

إن أهم مرحلة في البرمجة الخطية هي مرحلة إنشاء نموذج البرمجة الخطية ونعني بالنموذج هو التعبير عن علاقات واقعية بعلاقات رياضية مفترضة ومبنية على دراسة الواقع وتحليله و تبعا لصيغة المسألة يمكن تقييم النموذج اما بيانيا أو رياضيا .

وبعد الانتهاء من تكوين النموذج الملائم يجب التأكد من مطابقته للمشكلة قيد الدراسة ثم الانتقال الى المرحلة التالية والمتمثلة في تقييمه وتحليله للتعرف على تأثيرات العوامل المختلفة في المشكلة والوصول إلى الحل المناسب .

1- مكونات نموذج البرمجة الخطية :

يتكون نموذج البرمجة الخطية من العناصر الأساسية التالية :

1-1- دالة الهدف :

و تبين هذه الدالة الهدف المنشود والذي نرغب في تحقيقه ويكون الهدف عادة هو الوصول إلى أقصى ربح ممكن أو أدنى تكلفة ممكنة، وتتكون دالة الهدف من المتغيرات التي تشير إلى المنتجات المختلفة والممكن إنتاجها على أن يكون المعامل الخاص بكل متغير هو ربح الوحدة الواحدة من المنتجات في تعظيم دالة الهدف أو يكون المعامل عبارة عن تكلفة الوحدة الواحدة من المنتجات في حالة تخفيض دالة الهدف.

1-2- مجموعة من القيود :

و تشير هذه القيود عادة إلى كميات الموارد المتاحة أو العلاقات الفنية التي توضح ما تحتاجه كل وحدة إنتاج من كل مورد من الموارد المتاحة المحدودة .

1-3- شرط عدم السلبية :

ويعني هذا الشرط أن جميع المتغيرات في المشكلة قيد الدراسة لا يمكن أن تكون سالبة بل تكون موجبة أو معدومة

2- الشكل الرياضي لبرنامج خطي :

نقول عن برنامج أنه خطي إذا كان من الشكل :

$$\begin{cases} \max \ ou \ \min(z) = \sum_{i=1}^{n} c_j x_j \\ s/c \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq, =, \geq b_i \qquad i = 1,2......m \\ x_j \geq 0 \qquad j = 1,2........n \end{cases}$$

حيث : z: دالة الهدف.

b_j ، a_j ،c_j : معاملات ثابتة حقيقية.

x_j : المتغيرات الهيكلية ، أو متغيرات القرار.

مثال (01):

تنتج شركة ما 3 منتجات بحيث تمر هذه المنتجات فى ثلاثة مراحل إنتاجية ويحتاج المنتج الأول إلى 1 ساعة، 3 ساعة، 1 ساعة من المراحل الإنتاجية الثلاثة على الترتيب .بينما يحتاج المنتج الثاني إلى 3 ساعة من المرحلة الأولى، 5 ساعة من المرحلة الثانية والمنتج الثالث يحتاج إلى 1 ساعة من المرحلة الأولى، 2 ساعة من المرحلة الثالثة وقد كان عدد الساعات المتاحة لكل مرحلة هي 430 ، 460 ، 420 على الترتيب .فإذا علمت أن ربح الوحدة الواحدة من المنتجات الثلاثة هو 20 ، 30 ، 50 دينار جزائري على التوالى.

المطلوب: صياغة هذه المشكلة في صورة برنامج خطي لتعظيم الأرباح.

الحل:

1 – تحديد المتغيرات:

بناءا على نص المسألة يتم تحديد متغيرات القرار والتي تتمثل في الكميات المنتجة من المنتجات الثلاثة و لتكن كما يلي:

X_1 : عدد الوحدات المنتجة من المنتج الأول.

X_2 : عدد الوحدات المنتجة من المنتج الثاني.

X_3 : عدد الوحدات المنتجة من المنتج الثالث.

2- تحديد دالة الهدف:

تبحث المؤسسة في هذا المثال عن مخطط الإنتاج الأمثل الذي يسمح لها بتحقيق أقصى ربح ممكن، وبما أن الربح الوحدوي للمنتجات الثلاثة هو: 20 ، 30 ، 50 على التوالي، وبالتلي الربح الاجمالي هو مجموع حاصل ضرب الربح الوحدوي لكل منتج في عدد الوحدات المنتجة منه ، وعليه دالة الهدف في هذا المثال من نوع تعظيم (MAX) وهي كالتالي:

$$MAX(z) = 20x_1 + 30x_2 + 50x_3$$

3- تحديد القيود:

- **قيد ساعات العمل في المرحلة الأولى:**

يتم التعبير عن قيد ساعات العمل المستخدمة، بحيث المنتج الأول فيهذه المرحلة إلى 1 ساعة، والمنتج الثاني إلى 3 ساعة، والمنتج الثالث إلى 1 ساعة، بينما عدد الساعات العمل المتوفرة في هذه المرحلة لا تتجاوز 430 ساعة، وبالتالي يتم التعبير على قيد ساعات العمل المرحلة الأولى بالصياغة التالية:

$$x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 430$$

- **قيد ساعات العمل في المرحلة الثانية:**

بنفس الطريقة المتبعة لصياغة القيد الأول للبرنامج، يتم صياغة قيد ساعات العمل في المرحلة الثانية:

$$3x_1 + 5x_2 \leq 460$$

- **قيد ساعات العمل في المرحلة الثالثة:**

صياغة قيد ساعات العمل في المرحلة الثالثة كالتالي:

$$x_1 + 2x_3 \leq 420$$

- **قيد عدم السالبية:**

بما أن المتغيرات المستعملة في صياغة البرنامج عبارة عن كميات لا يمكن أن تكون اشارتها سالبة، وعليه يتم اضافة قيد آخر للبرنامج للتعبير عن عدم سالبية المتغيرات و يتم صياغته كالتالي:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

4- كتابة البرنامج الخطي: يتكون البرنامج الخطي من دالة هدف و القيود التي تعرفنا عليه في الخطوات السابقة، وعليه يكون البرنامج الخطي على الشكل التالي:

$$MAX(z) = 20x_1 + 30x_2 + 50x_3$$
$$s/c$$
$$x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 430$$
$$3x_1 + 5x_2 \leq 460$$
$$x_1 + 2x_3 \leq 420$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

مثال (02): يمتلك مصنع خطين إنتاجيين، ساعات العامل الواحد في كل خط هي 5 و 4 يوميا على التوالي، و مجموع ما هو متوافر من ساعات العمل اليومية لعمال المصنع هو 112 ساعة. إنتاج العامل الواحد في كل خط إنتاجي من وحدات الإنتاج هو 25 و 35 وحدة يومية .
و على المصنع أن ينتج يوميا ما لا يقل عن 120 وحدة، وعدد الأيدي العاملة يوميا يجب أن لا تقل عن 17 عامل، و أن لا يزيد عدد عمال الخط الإنتاجي الثاني عن 11 عامل.
المطلوب: صياغة البرنامج الخطي الذي يمثل عدد الأيدي العاملة يوميا على كل خط بحيث يؤدي ذلك إلى تقليل كلفة استخدام الأيدي العاملة إلى أقل ما يمكن، مع العلم أن تكلفة استخدام العامل الواحد على كل خط يوميا هي 3 و 4 وحدة نقدية عل التوالي.

الحل:

1 – تحديد المتغيرات:

بناءا على نص المسألة يتم تحديد متغيري القرار والتي تتمثل في عدد الأيدي العاملة في كل خط انتاجي، و لتكن كما يلي:

X_1 : عدد العمال في الخط الإنتاجي الأول.

X_2 : عدد العمال في الخط الإنتاجي الثاني.

2- تحديد دالة الهدف:

تبحث المؤسسة في هذا المثال عن تقليص التكاليف، وعليه دالة الهدف في هذا المثال من نوع تعظيم (MIN) وهي كالتالي:

$$MIN(z) = 3x_1 + 4x_2$$

3- تحديد القيود:

- **قيد ساعات العمل:**

$$5x_1 + 4x_2 \leq 112$$

- **قيد الإنتاج:**

$$25x_1 + 35x_2 \geq 120$$

- **قيد الأيدي العاملة في الخطين الانتاجيين:**

$$x_1 + x_2 \geq 17$$

- **قيد الأيدي العاملة في الخط الإنتاجي الثاني:**

$$\mathrm{x}_2 \leq 11$$

- **قيد عدم السالبية:**

$$x_1, x_2 \geq 0$$

4- كتابة البرنامج الخطي: يكون البرنامج الخطي على الشكل التالي:

$$\begin{gathered} MIN(z) = 3x_1 + 4x_2 \\ s/c \\ 5x_1 + 4x_2 \leq 112 \\ 25x_1 + 35x_2 \geq 120 \\ x_1 + x_2 \geq 17 \\ \mathrm{x}_2 \leq 11 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{gathered}$$

مثال(03):

تنتج مؤسسة خاصة ثلاثة أنواع من المنتجات (A , B , C) ، تريد هذه المؤسسة معرفة الكميات الواجب إنتاجها من كل نوع لتتمكن من تعظيم حجم أرباحها.

علما أن سعر بيع كل وحدة منتجة مكن المنتجات الثلاثة هي 40 دج للمنتج A ، 75 دج للمنتج B ، و 115 دج للمنتج C.

لإنتاج وحدة واحدة من كل نوع من المنتجات الثلاثة ، تحتاج المؤسسة إلى استخدام أربعة أنواع من المدخلات ، الجدول التالي يوضح الاحتياجات اللازمة من المدخلات:

	المادة الأولية 1	المادة الأولية 2	المادة الأولية 3	المادة الأولية 4
المنتج A	2	1	4	2
المنتج B	3	1	5	2
المنتج C	4	0.5	8	3
الإمكانيات المتاحة من المدخلات	300	50	80	400

المطلوب : كتابة المسألة على شكل برنامج خطي.

الحل:

1 – تحديد المتغيرات:

بناءا على نص المسألة يتم تحديد متغيرات القرار والتي تتمثل في الكميات المنتجة من المنتجات الثلاثة و لتكن كما يلي:

X_1 : عدد الوحدات المنتجة من المنتج A.

X_2 : عدد الوحدات المنتجة من المنتج B.

X_3 : عدد الوحدات المنتجة من المنتج C.

2– تحديد دالة الهدف:

تبحث المؤسسة في هذا المثال عن مخطط الإنتاج الأمثل الذي يسمح لها بتحقيق أقصى ربح ممكن، وبما أن الربح الوحدوي للمنتجات الثلاثة هو: 40 ، 75 ، 115 على التوالي، وبالتلي الربح الاجمالي هو مجموع حاصل ضرب الربح الوحدوي لكل منتج في عدد الوحدات المنتجة منه ، وعليه دالة الهدف في هذا المثال من نوع تعظيم (MAX) وهي كالتالي:

$$MAX(z) = 40x_1 + 75x_2 + 115x_3$$

3- تحديد القيود:

- **قيد المادة الأولية 1:**

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 300$$

- **قيد المادة الأولية 2:**

$$x_1 + x_2 + 1/2x_3 \leq 50$$

- **قيد المادة الأولية 3:**

$$4x_1 + 5x_2 + 8x_3 \leq 80$$

- **قيد المادة الأولية 4:**

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 400$$

- **قيد عدم السالبية:**

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

4- كتابة البرنامج الخطي : وعليه يكون البرنامج الخطي على الشكل التالي:

$$\begin{gathered}
MAX(z) = 40x_1 + 75x_2 + 115x_3 \\
s/c \\
2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 300 \\
x_1 + x_2 + 1/2x_3 \leq 50 \\
4x_1 + 5x_2 + 8x_3 \leq 80 \\
2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 400 \\
x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{gathered}$$

تمارين مقترحة:

التمرين الأول:

تمتلك شركة نقل مسافرين 25 حافلة، تعمل على خط البليدة – الجزائر – بومرداس – البويرة .

ساعات العمل المتاحة تقدر بـ 230 ساعة عمل (لكل الحافلات) يوميا، وعدد المسافرين المتوقع يوميا لا يزيد عن 6000 مسافر و الجدول التالي يوضح بيانات المشكلة.

	البويرة	بومرداس	الجزائر	البليدة
إيراد الحافلة الواحدة (دج)	10000	15000	13000	20000
ساعات العمل الفعلية اليومية	6	9	8	10
عدد الأفراد المستفيدين من الخدمة لكل حافلة يوميا	200	300	2560	400

فإذا علمت أن عدد الحافلات العاملة على الخطين الأول و الثالث يجب أن لا يقل عن 11 حافلة، و أن توفر الشركة حافلتين للخط الرابع.

المطلوب: صياغة البرنامج الخطي الذي يمثل عدد الحافلات العاملة على كل خط يوميا و الذي يؤدي إلى تعظيم إيراد الشركة.

التمرين الثاني:

تخطط مؤسسة متخصصة في شراء 6 آلات من ثلاثة أنواع M1 ، M2 ، M3 لتصنيع المنتج P مع الأخذ بعين الاعتبار الشروط التالية:

- ✓ يجب أن يكون عدد الآلات التي يتم شراؤها من النوع M1 على الأقل أكثر من النوع الثاني بوحدة واحدة ، ومن النوع M2 و M3 لا يقل عددها عن 2 و1 على التوالي.
- ✓ يمكن بيع الآلة بعد سنة واحدة من الاستخدام بسعر 130 ، 115 ، 120 مليون وحدة نقدية لكل نوع على التوالي.

- ✓ يجب إنتاج على الأقل 60 وحدة يوميا.
- ✓ يجب أن يكون مجموع أعمار هذه الآلات لا يقل عن 25 سنة.

و الجدول التالي يبين بيانات المشكلة :

	M1	M2	M3
التكلفة (مليون وحدة ن)	150	130	140
العمر المتوقع (سنة)	5	4	3
الطاقة الإنتاجية (وحدة)	12	10	13

المطلوب: صياغة المشكلة عل شكل برنامج خطي.

التمرين الثالث: ينتج مصنع ثلاثة أنواع من المكيفات لهذا الشهر هي مكيفات الحائط ومكيفات أرضية و مكيفات مساجد، حيث أن سعر بيع كل نوع هو 40000، 110000، 330000 دج على التوالي، وتكلف هذه المنتجات مواد أولية 16000، 61000، 149000 دج على التوالي، في حين تكلف اليد العاملة 10600، 23000، 45000 دج على التوالي، والطلب على مكيفات المساجد لا يزيد عن 30 وحدة شهريا، والطلب على المكيفات الأرضية 130 وحدة شهريا على الأقل، أما المكيفات الحائطية 90 وحدة شهريا على الأكثر.

فإذا كان المبلغ المخصص للعمالة هو 14 مليون دج، والمبلغ المخصص للمواد الأولية هو 39 مليون دج،

المطلوب: صياغة المشكلة عل شكل برنامج خطي.

ثالثا- طرق حل نموذج البرمجة الخطية

من أجل حل مشكلة برنامج خطي نستخدم الطريقة البيانية وطريقة السمبلكس، وسنتطرق لكلتا الطريقتين فيما يلي :

1-الطريقة البيانية :

يمكن حل النموذج الرياضي أو البرنامج الخطي بطريقة الرسم البياني عندما يكون هذا النموذج متكون من متغيرين فقط، و يسمى أحيانا بالطريقة الهندسية ، وهي من أسهل وأبسط الطرق لحل مسائل البرمجة الخطية ذات متغيرين، أما إستخدام هذه الطريقة في الحياة العملية معدومة لأن عدد المتغيرات التي تؤثر في اتخاذ القرارات كثيرة جدا ولكن استخدامها يعتبر مدخلا لفهم وإستيعاب طريقة الحل، حيث تعطي تصورا عن صورة إحتمالات الحل الأمثل للبرنامج الخطي.

1-1-خطوات الحل بالطريقة البيانية:

لاستخدام طريقة الحل البياني نتبع الخطوات التالية:

- صياغة نموذج البرمجة الخطية للمشكلة.
- تحويل كل المتراجحات إلى معادلات دون إحداث أي تغييرات.
- التمثيل البياني للقيود ودالة الهدف وإيجاد نقاط التقاطع ، أي تحديد ما يسمى بمنطقة الحلول الممكنة (هي المنطقة التي تضم مجموعة من النقاط حيث أن هذه النقاط تحقق كل قيود النموذج وتعطي قيمة لدالة الهدف).
- إيجاد إحداثيات كافة النقاط التقاطع.
- تعويض قيم الإحداثيات في دالة الهدف واختيار أكبر قيمة إذا كان الهدف تعظيم وأقل قيمة إذا كان الهدف تدنئة.

مثال(01):

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\boldsymbol{MAX(z) = 5x_1 + 6x_2}$$
$$\boldsymbol{{}^{s}/_{c}}$$
$$\boldsymbol{x_1 + x_2 \leq 20 \ldots\ldots (01)}$$
$$\boldsymbol{2x_1 + 4x_2 \leq 60 \ldots\ldots\ldots (02)}$$
$$\boldsymbol{x_1, x_2 \geq 0}$$

المطلوب: حل البرنامج الخطي باستعمال الطريقة البيانية.

الحل:

- إيجاد منطقة الحلول الممكنة

نقوم برسم المتراجحتين (1) و (2) ، أما المتراجحة (3) فتمثل شرط عدم السالبية ، أي أخذ النقاط في الربع الأول الموجب فقط لكل متراجحة.

- **تمثيل القيد (01):**

نقوم بكتابة القيد (1) على شكل معادلة:

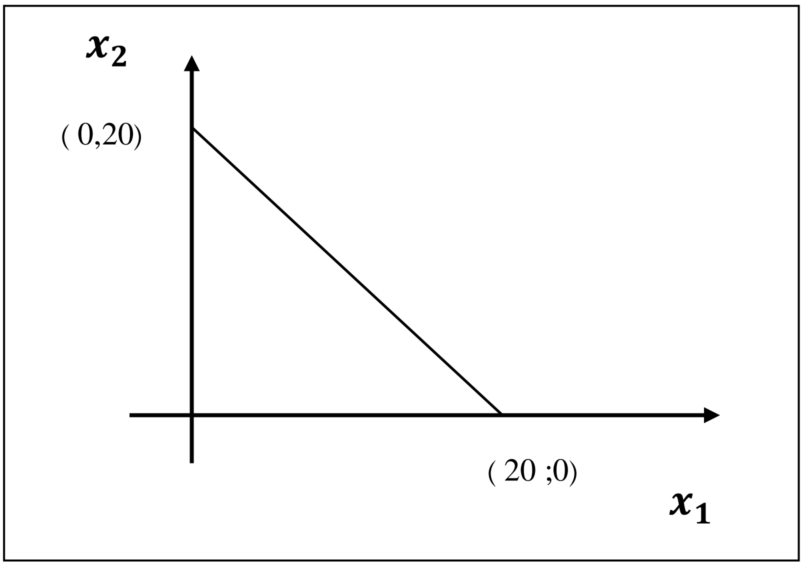
$$x_1 + x_2 = 20$$

نقوم برسم المستقيم الذي يمثل المعادلة كالتالي:

نعطي قيمة $x_1 = 0$ وبالتعويض في المعادلة السابقة نجد أن$0 + x_2 = 20$ أي أن $x_2 = 20$، أي أن النقطة (0,20) تقع على المستقيم.

وبنفس الطريقة نضع $x_2 = 0$ في المعادلة السابقة نجد أن $x_1 + 0 = 20$ أي أن $x_1 = 20$، أي أن النقطة (0, 20) تقع على المستقيم .

x_1	0	20
x_2	20	0



وبما أن المتراجحة من نوع أصغر أو يساوي فإن المساحة الممثلة المتراجحة (01) تكون على يسار الخط المستقيم .

- **تمثيل القيد (02):**

نقوم بكتابة القيد (1) على شكل معادلة:

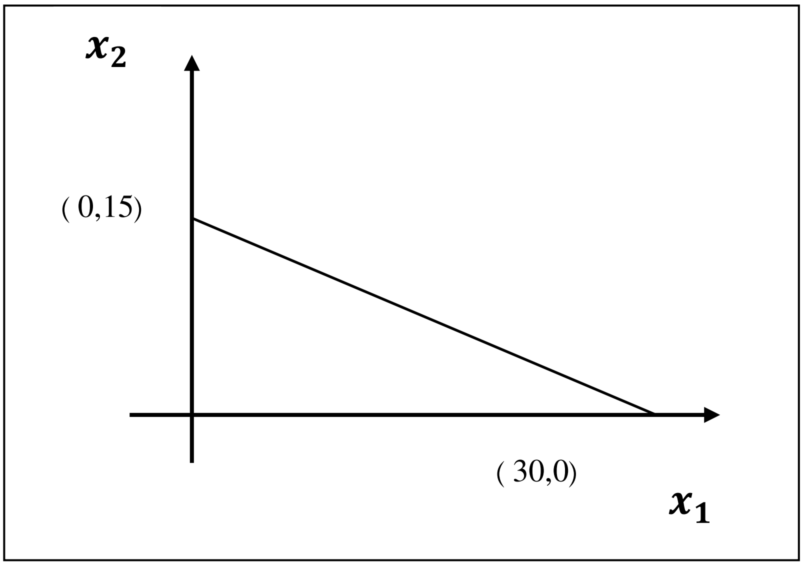
$$2x_1 + 4x_2 = 60$$

نقوم برسم المستقيم الذي يمثل المعادلة كالتالي:

نعطي قيمة $x_1 = 0$ وبالتعويض في المعادلة السابقة نجد أن $2(0) + 4x_2 = 60$ أي أن $x_2 = 15$، أي أن النقطة (0,15) تقع على المستقيم.

وبنفس الطريقة نضع $x_2 = 0$ في المعادلة السابقة نجد أن $2x_1 + 4(0) = 60$ أي أن $x_1 = 30$، أي أن النقطة (0, 30) تقع على المستقيم .

x_1	0	30
x_2	15	0



وبما أن المتراجحة من نوع أصغر أو يساوي فإن المساحة الممثلة المتراجحة (2) تكون على يسار الخط المستقيم .

- **رسم دالة الهدف :**

✓ نأخذ على سبيل المثال النقطة $(1,1)$ التي تقع في منطقة الحلول الممكنة ، وقيمة دالة الهدف **z** عند هذه النقطة هي :

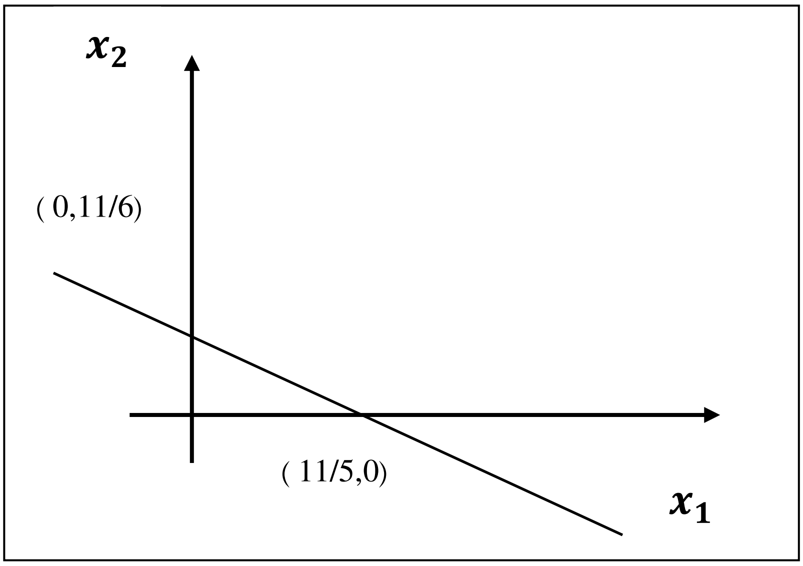
$$z = 5(1) + 6(1) = 11$$

✓ نقوم برسم الآن المستقيم :

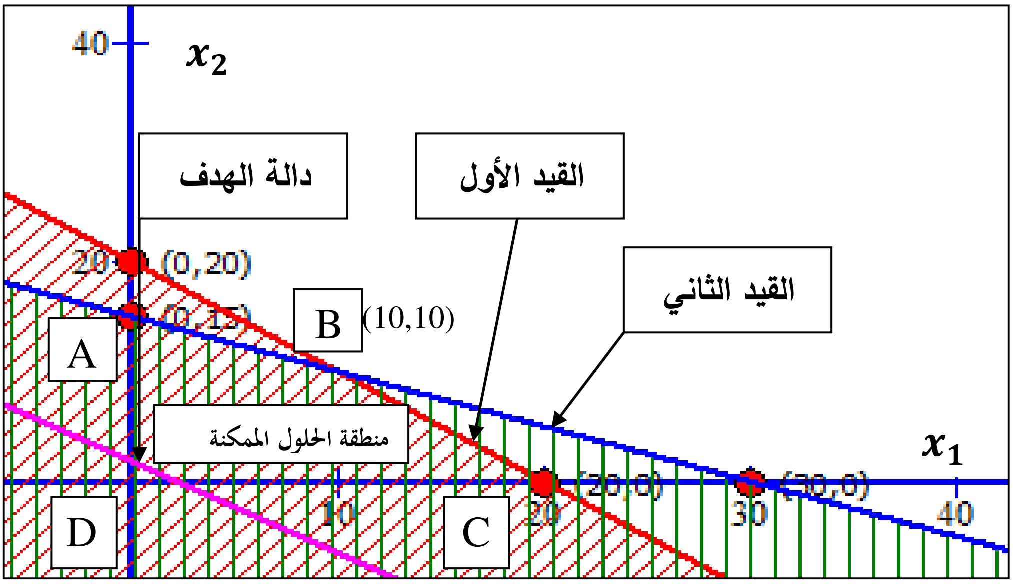
$$\mathbf{5x_1 + 6x_2 = 11}$$

بنفس الطريقة المتبعة سابقا نقوم بتحديد ثنائيتين ثم نقوم بتمثيلهما بيانيا، وبالتالي نحصل المستقيم الممثل لدالة الهدف.

x_1	**0**	**11/5**
x_2	**11/6**	**0**



وبإعادة رسم المستقيمات السابقة في تمثيل بياني واحد نحصل على التمثيل البياني التالي:



وهناك طريقتين لمعرفة الحل الأمثل:

الطريقة الأولى: بما أننا في حالة تعظيم نقوم بسحب المستقيم الممثل لدالة الهدف إلى اليمين بشكل موازي، وأقصى نقطة في منطقة الحلول الممكنة يمسها هذا المستقيم هي التي تمثل الحل الأمثل، وفي مثالنا هذا آخر نقطة يمسها المستقيم هي النقطة ذات الإحداثيتين (10,10) وبالتالي فان النقطة B هي نقطة الحل الأمثل .

نحسب إحداثيتي النقطة B (نقطة تقاطع المستقيم الممثل للقيد الأول مع المستقيم الممثل للقيد الثاني)بحل جملة المعادلتين التالية:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 20 \ldots(1) \\ 2x_1 + 4x_2 = 60 \ldots(2) \end{cases}$$

نضرب المعادلة الأول في (-2) ونجمعها مع المعادلة الثانية (للتخلص x_1) ، فنحصل على

$$-2x_1 - 2x_2 = -20$$
$$2x_1 + 4x_2 = 60$$

فنحصل على:

$$2x_2 = 20$$

أي :

$$x_2 = 10$$

وبالتعويض في أي معادلة نجد أن:

$$x_1 = 10$$

أي أن نقطة التقاطع $B(10,10)$

الطريقة الثانية:

نقوم بتعويض نقاط رؤوس المضلع الذي يمثل منطقة الحلول الممكنة في دالة الهدف في دالة الهدف :

$z = 5x_1 + 6x_2$	نقاط رؤوس المضلع
5(0)+6(15)=90	A (0,15)
5(10)+6(10)=110	B (10,10)
5(20)+6(0)=100	C (20,0)
5(0)+6(0)=0	D (0,0)

نلاحظ أن قيمة دالة الهدف عند النقطة (10,10) B هي أكبر قيمة وهي تمثل الحل الأمثل (أفضل الحلول الممكنة) .

مثال(02):

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$MIN(z) = 6x_1 + 5x_2$$
$$s/c$$
$$2x_1 + 2x_2 \geq 4$$
$$3x_1 + 2x_2 \geq 5$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

المطلوب: حل البرنامج الخطي باستعمال الطريقة البيانية.

الحل:

- **إيجاد منطقة الحلول الممكنة**

نقوم برسم المتراجحتين (1) و (2) ، أما المتراجحة (3) فتمثل شرط عدم السالبية ، أي أخذ النقاط في الربع الأول الموجب فقط لكل متراجحة.

- **تمثيل القيد (01):**

نقوم بكتابة القيد (1) على شكل معادلة:

$$2x_1 + 2x_2 = 4$$

نقوم برسم المستقيم الذي يمثل المعادلة كالتالي:

نعطي قيمة $x_1 = 0$ وبالتعويض في المعادلة السابقة نجد أن $0 + 2x_2 = 4$ أي أن $x_2 = 2$، أي أن النقطة (0,2) تقع على المستقيم.

وبنفس الطريقة نضع $x_2 = 0$ في المعادلة السابقة نجد أن $2x_1 + 0 = 4$ أي أن $x_1 = 2$، أي أن النقطة (0, 2) تقع على المستقيم .

x_1	**0**	**2**
x_2	**2**	**0**

وبما أن المتراجحة من نوع أكبر أو يساوي فإن المساحة الممثلة للمتراجحة (01) تكون على يمين الخط المستقيم .

- **تمثيل القيد (02):**

نقوم بكتابة القيد (1) على شكل معادلة:

$$3x_1 + 2x_2 = 5$$

نقوم برسم المستقيم الذي يمثل المعادلة كالتالي:

نعطي قيمة $x_1 = 0$ وبالتعويض في المعادلة السابقة نجد أن $3(0) + 2x_2 = 5$ أي أن $x_2 = 5/2$، أي أن النقطة (0,5/2) تقع على المستقيم.

وبنفس الطريقة نضع $x_2 = 0$ في المعادلة السابقة نجد أن $3x_1 + 2(0) = 5$ أي أن $x_1 = 5/3$، أي أن النقطة (0, 5/3) تقع على المستقيم .

x_1	**0**	**5/3**
x_2	**5/2**	**0**

وبما أن المتراجحة من نوع أصغر أو يساوي فإن المساحة الممثلة المتراجحة (2) تكون على يسار الخط المستقيم .

- **رسم دالة الهدف :**

✓ نأخذ على سبيل المثال النقطة (2,2) التي تقع في منطقة الحلول الممكنة ، وقيمة دالة الهدف **z** عند هذه النقطة هي :

$$z = 6(2) + 5(2) = 22$$

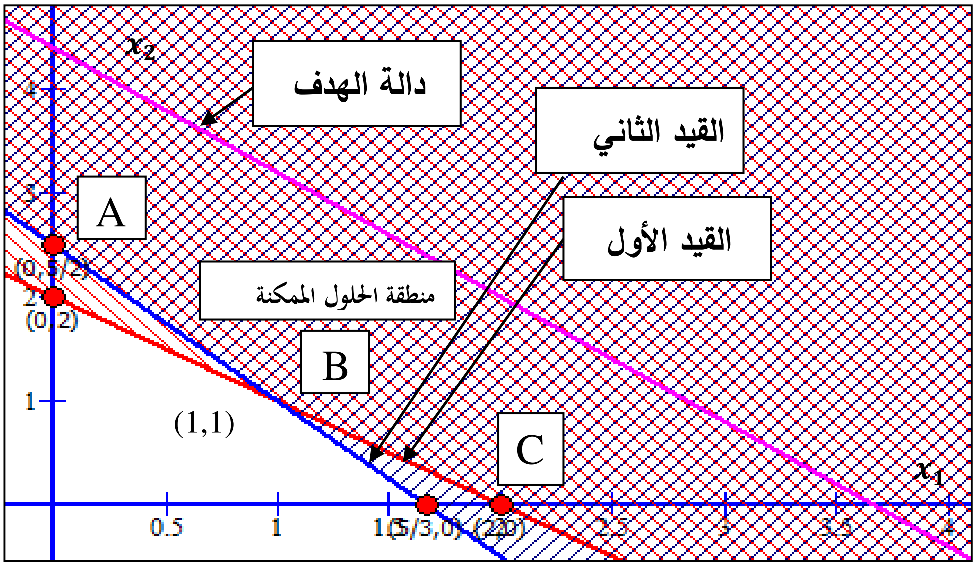
✓ نقوم برسم الآن المستقيم :

$$\boldsymbol{6x_1 + 5x_2 = 22}$$

بنفس الطريقة المتبعة سابقا نقوم بتحديد ثنائيتين ثم نقوم بتمثيلهما بيانيا، وبالتالي نحصل المستقيم الممثل لدالة الهدف.

x_1	**0**	**22/6**
x_2	**22/5**	**0**

ومنه نحصل على التمثيل البياني التالي :



وهناك طريقتين لمعرفة الحل الأمثل:

الطريقة الأولى: بما أننا في حالة تدنئة نقوم بسحب المستقيم الممثل لدالة الهدف إلى اليسار بشكل موازي، وأدنى نقطة في منطقة الحلول الممكنة يمسها هذا المستقيم هي التي تمثل الحل

الأمثل، وفي مثالنا هذا آخر نقطة يمسها المستقيم هي النقطة ذات الاحداثيتين (1,1) وبالتالي فان النقطة B هي نقطة الحل الأمثل .

نحسب إحداثيتي النقطة B (نقطة تقاطع المستقيم الممثل للقيد الأول مع المستقيم الممثل للقيد الثاني)بحل جملة المعادلتين التالية:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 4 \ldots (1) \\ 3x_1 + 2x_2 = 5 \ldots (2) \end{cases}$$

نقوم بطرح المعادلة (2) من المعادلة (1) (للتخلص x_2) ، فنحصل على:

$$x_1 = 1$$

وبالتعويض في أي معادلة نجد أن:

$$x_2 = 1$$

أي أن نقطة التقاطع B(1,1)

الطريقة الثانية:

نقوم بتعويض نقاط رؤوس المضلع الذي يمثل منطقة الحلول الممكنة في دالة الهدف في دالة الهدف :

نقاط رؤوس المضلع	$z = 5x_1 + 6x_2$
A (0,5/2)	6(0)+5(5/2)=25/2
B (1,1)	6(1)+5(1)=11
C (2,0)	6(2)+5(0)=12

نلاحظ أن قيمة دالة الهدف عند النقطة B (1,1) هي أصغر قيمة وهي تمثل الحل الأمثل (أفضل الحلول الممكنة) .

1-2-حالات خاصة للحل البياني لمشكلات البرمجة الخطية:

هناك حالات خاصة يمكن أن نلاحظها عند حل نموذج البرمجة الخطية بالطريقة البيانية والتي تعد حالات خاصة لحلول تلك النماذج وهي :

1-2-1- تعدد الحلول المثلى: في هذه الحالة نحصل على أكثر من حل أمثلي، وتحدث عندما تتوازى أحد القيود المحددة لمنطقة الحلول الممكنة مع المستقيم الممثل لدالة الهدف الخطية، وبصفة عامة تحدث هذه الحالة عندما يكون معاملات أحد القيود (أو أكثر) من مضاعفات معاملات دالة الهدف المناظرة لها .

مثال:

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{Max(z) = 3x_1 + 6x_2} \\ \boldsymbol{s/c} \\ \boldsymbol{6x_1 + 12x_2 \leq 40} \\ \boldsymbol{5x_1 + 2x_2 \leq 20} \\ \boldsymbol{x_1, x_2 \geq 0} \end{gathered}$$

المطلوب: ايجاد الحل الأمثل باستخدام الطريقة البيانية.

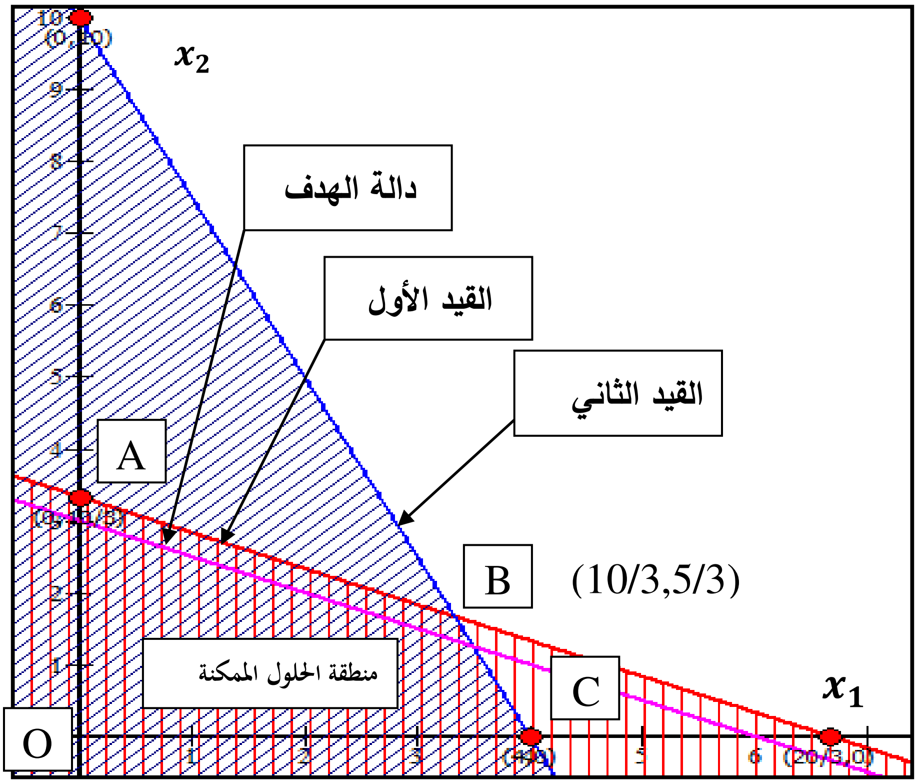
نقوم برسم المستقيمات الممثلة للقيدين بنفس الطريقة السابقة:

القيد الأول:

x_1	0	20/3
x_2	10/3	0

القيد الثاني:

x_1	0	4
x_2	10	0



نلاحظ من الشكل أعلاه أن منطقة الحلول الممكنة هي المحددة بنقاط رؤوس المضلع الذي يمثل منطقة الحلول الممكنة (O , A , B , C) علما أن النقطة B هي نقطة تقاطع القيدين الأول والثاني وإحداثياتها (10/3,5/3) تم الحصول على إحداثياتها بنفس الطريقة السابقة و لإيجاد الحل الأمثل نقوم بسحب المستقيم الممثل لدالة الهدف إلى اليمين(بما أننا في حالة تعظيم) بشكل موازي، وأقصى نقطة في منطقة الحلول الممكنة يمسها هذا المستقيم هي التي تمثل الحل الأمثل، وفي مثالنا هذا آخر نقاط يمسهم المستقيم هي كل النقاط التي تنتمي للقطعة المستقيمة AB الممثلة للقيد الأول والمحددة لمنطقة الحلول الممكنة من الأعلى، ومنه نقول هناك عدد غير منتهي من الحلول المثلى لهذا البرنامج الخطي.

ومن هذه الحلول النقطة **B** التي تنتمي للقطعة المستقيمة **AB** نعوض احداثياتها في دالة الهدف من أجل قيمة **Z** المثلى:

$$Z= 3*(10/3)+6*(5/3)=20$$

اذا قيمة **Z** المثلى هي **20** و أي نقطة من القطعة المستقيمة **AB** هي حل أمثلي وتعطي نفس القيمة لـ **Z**.

1-2-2- الحلول غير المحدودة :

عند حل مشكلات البرمجة الخطية قد نصادف برنامج خطي يقبل حلول ممكنة غير محدودة، إلا أن هذه الحالة خاصة نادرة الحدوث في الحياة العملية.

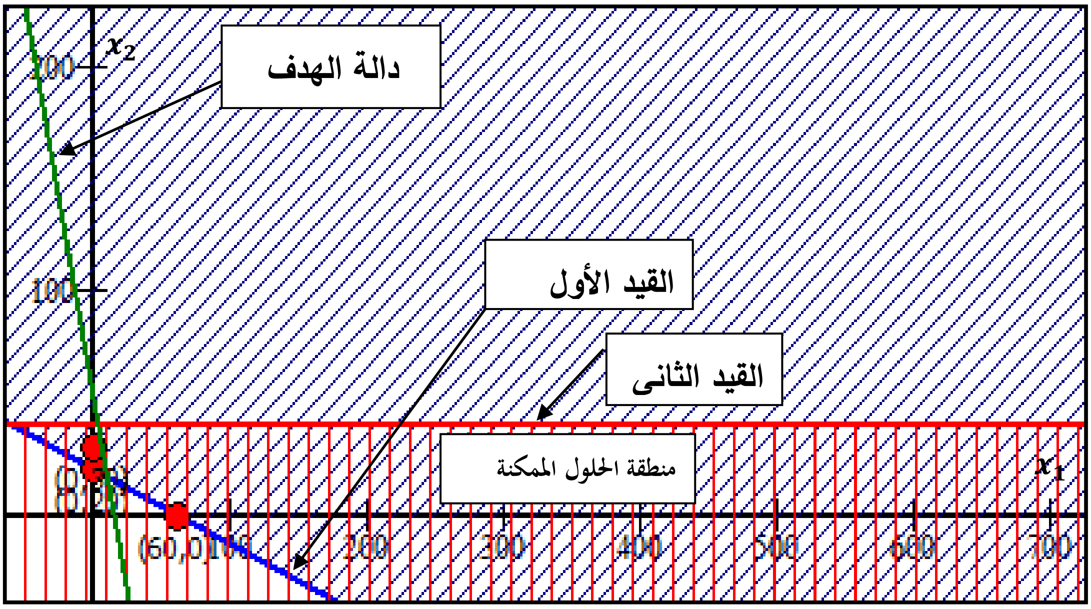
مثال:

باستعمال الطريقة البيانية أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية الآتي :

$$Max(z) = 7x_1 + 20x_2$$
$$s/c$$
$$x_1 + 3x_2 \geq 60$$
$$x_2 \leq 40$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

الحل:

نرسم القيدين الأول والثاني ونحدد منطقة الحلول الممكنة بنفس الخطوات السابقة:



نلاحظ من الشكل أعلاه أن منطقة الحلول الممكنة (المنطقة المشتركة بين القيدين) غير محدودة (مفتوحة) وعليه ليس للمشكلة حل أمثل، حيث كلما اتجهنا يمينا نحصل على حل يعطي قيمة أعلى لدالة الهدف .

1-2-3- عدم وجود حلول مقبولة:

اذا كانت منطقة الحلول الممكنة الناتجة من تقاطع قيود نموذج البرمجة الخطية عبارة عن مجموعة خالية فإننا لن نحصل على حلول ممكنة لمشكلة البرمجة الخطية.

مثال :

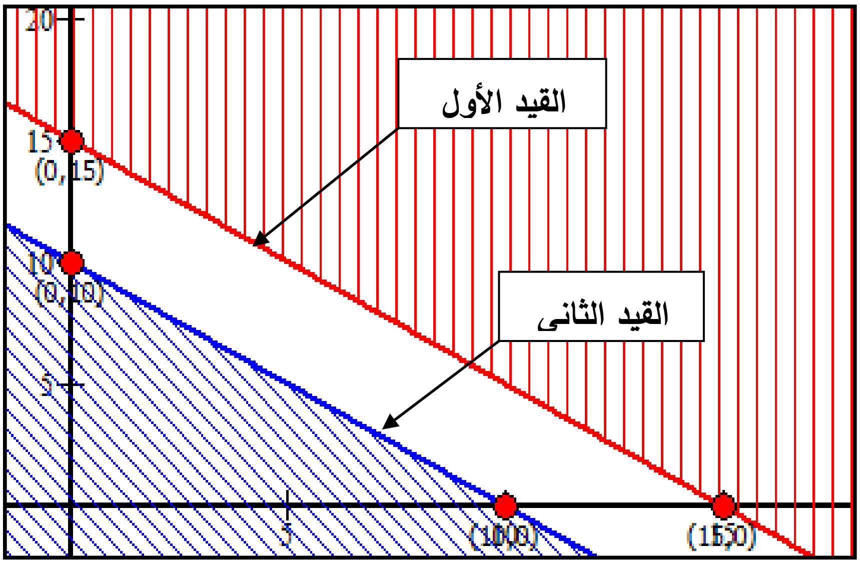
ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$Max(z) = 5x_1 + 2x_2$$
$$s/c$$
$$x_1 + x_2 \geq 15$$
$$x_1 + x_2 \leq 10$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

المطلوب: ايجاد الحل الأمثل باستخدام الطريقة البيانية.

الحل:

نرسم القيدين و المستقيم الممثل لدالة الهدف :



نلاحظ من الشكل أعلاه أن لاتوجد منطقة مشتركة بين القيدين وبالتالي ليس هناك منطقة حلول ممكنة مقبولة (أي لاتوجد حلول ممكنة لهذا النموذج).

1-2-4- الانحلال :

تحدث حالة الانحلال عندما يكون عدد متغيرات القرار التي تكون قيمتها اكبر من الصفر في الحل الأمثل أقل من عدد قيود نموذج البرمجة الخطية. كما موضح بالمثال الآتي:

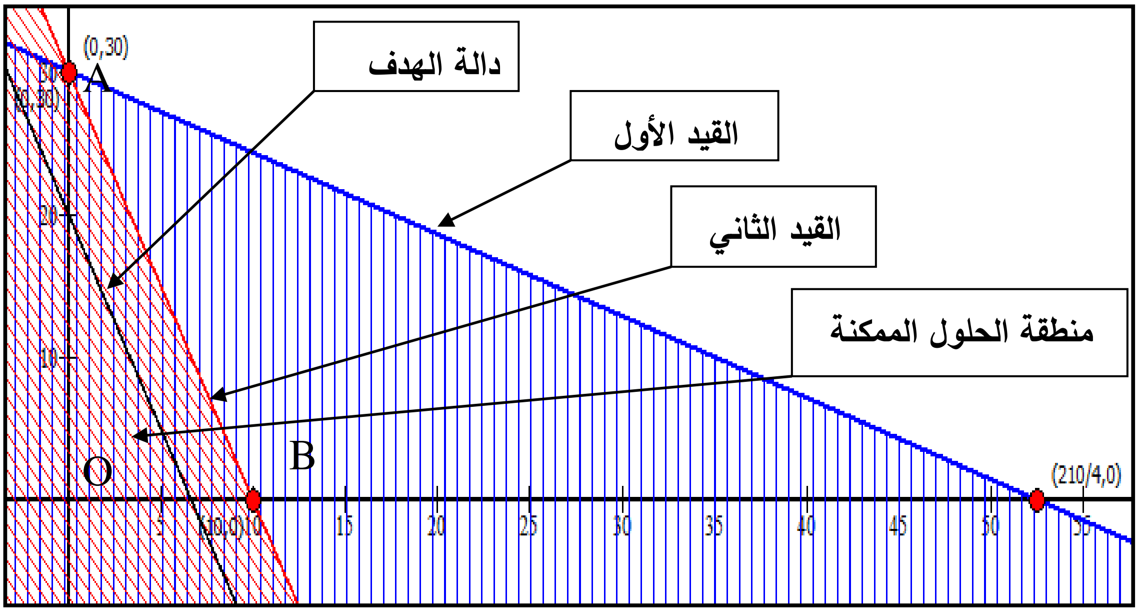
مثال:

باستعمال الطريقة البيانية أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي الآتي :

$$Max(z) = 12x_1 + 4x_2$$
$$s/c$$
$$4x_1 + 7x_2 \leq 210$$
$$3x_1 + x_2 \leq 30$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

الحل:

نرسم القيدين ودالة الهدف ثم نحدد منطقة الحلول الممكنة كما هو مبين بالشكل الآتي:



نلاحظ من خلال البرنامج الخطي أن معاملات القيد الثاني هي من مضاعفات معاملات دالة الهدف المناظرة لها، وهذا ما يظهر في التمثيل البياني حيث أن المستقيم المحدد للقيد الثاني موازي للمستقيم الممثل لدالة الهدف، مما يجعلنا نتوقع تعدد الحلول المثلى, ولإيجاد الحل الأمثل نقوم بسحب المستقيم الممثل لدالة الهدف إلى اليمين(بما أننا في حالة تعظيم) بشكل موازي، وأقصى نقطة في منطقة الحلول الممكنة يمسها هذا المستقيم هي التي تمثل الحل الأمثل، وفي مثالنا هذا آخر نقاط يمسهم المستقيم هي كل النقاط التي تنتمي للقطعة المستقيمة AB الممثلة

للقيد الثاني والمحددة لمنطقة الحلول الممكنة من الأعلى، ومنه نقول هناك عدد غير منتهي من الحلول المثلى لهذا البرنامج الخطي.

وذلك يعني أن أي نقطة تقع على المستقيم AB تحقق إحداثياتها أكبر قيمة لدالة الهدف والبالغة 120، لنعوض النقاط رؤوس المثلث O , A , B في دالة الهدف كما هو مبين في الجدول الآتي:

النقاط	قيمة دالة الهدف
O (0 , 0)	Z = 12*(0)+4*(0)=0
A (0 , 30)	Z = 12*(0)+4*(30)=120
B (10, 0)	Z = 12*(10)+4*(0)=120

من الجدول أعلاه نلاحظ أن النقطتين (30 , 0) A و(10, 0) B تحققان نفس قيمة دالة الهدف والتي تمثل اكبر قيمه له (120) وفي الحقيقة هناك اكثر من هاتين النقطتين تحقق نفس القيمة المثلى للهدف وتلك النقاط تقع على المستقيم AB بمعنى ان النموذج له حلول متعددة مثلى، من هذه الحلول المتعددة المثلى الحل المتمثل بإحداثيات النقطة (30 , 0) A أي $X_1 = 0$ و $X_2 = 30$ يسمى بالحل المنحل لان لدينا متغير واحد فقط قيمته أكبر من الصفر بينما لدينا قيدين في النموذج (عدد متغيرات القرار التي هي أكبر من الصفر أقل من عدد القيود)، وكذلك الحل الذي تمثله إحداثيات النقطة B(10.0) أي $X_2 = 0$ و $X_1 = 0$.

ومنه نرى أن هذا البرنامج يحتوي على حالتين خاصتين وهي تعدد الحلول المثلى و الحلول المنحلة.

2- طريقة السمبلكس SIMPLEX

إن طريقة الرسم البياني في حل المشاكل الخطية على الرغم من بساطتها إلا أنه لا يمكن استخدامها في حل المشاكل الخطية المعقدة التي تزيد فيها المتغيرات عن اثنين، لذلك كان لابد من وجود أداة حل أخرى أكثر فاعلية فى حل المشاكل الخطية المعقدة، هذه الأداة هي طريقة تسمى خوارزمية السمبليكس، حيث أن هذه الطريقة تمتاز عن الطريق البيانية بأنها قادرة على تناول أنواع مختلفة من مشاكل البرمجة الخطية ذات المتغيرات المتعددة، وفي الحياة العملية نجد أن طريقة السمبليكس هي أكثر الطرق شيوعا واستخداما في حل مشاكل البرمجة الخطية سواء في المشروعات الحكومية أو غير الحكومية التجارية أو المالية أو الصناعية، وهناك خاصيتان تميزان هذه الطريقة في الحل :

الأولى : هي أنها تتكون من عمليات أو مراحل متكررة ، حيث تمثل كل مرحلة من تلك المراحل حلا قائما بذاته، وكل تلك الحلول تم التوصل إليها وفق أسلوب أو إجراء محدد ومعروف مع ملاحظة أن كل حل هو أفضل من سابقه...وهكذا، حتى نصل إلى الحل الأمثل .

الثانية : وهي أن كل حل من تلك الحلول يبين قيمة الدالة الاقتصادية (دالة الهدف) (z) المترتبة عن ذلك الحل .

2-1- مختلف أشكال البرمجة الخطية:

هناك عدة أشكال من البرمجة الخطية وهي كالتالي :

2-1-1-الصيغة القانونية للبرنامج الخطي:

نميز نوعين من صيغ البرامج الخطية القانونية وهي حسب حالة البرنامج:

- **حالة التعظيم:** تكون الصيغة القانونية في حالة التعظيم كما يلي:
  - ✓ دالة الهدف تكون في حالة تعظيم.
  - ✓ جميع القيود تكون من نوع أصغر أو يساوي عددا ثابتا موجبا.
  - ✓ جميع المتغيرات موجبة.

$$\begin{cases} \max(z) = \sum_{i=1}^{n} c_j x_j \\ s/c \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i & i = 1,2......m \\ x_j \geq 0 & j = 1,2........n \end{cases}$$

مثال: البرنامج الخطي التالي من نوع تعظيم وهو مكتوب في صيغته القانونية:

$$MAX(z) = 20x_1 + 30x_2 + 50x_3$$
$$s/c$$
$$x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 430$$
$$3x_1 + 5x_2 \leq 460$$
$$x_1 + 2x_3 \leq 420$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

❖ **حالة التخفيض(التدنئة)** : تكون الصيغة القانونية في حالة التدنئة كما يلي:

- ✓ دالة الهدف تكون في حالة تدنئة.
- ✓ جميع القيود تكون من نوع أكبر أو يساوي عددا ثابتا موجبا.
- ✓ جميع المتغيرات موجبة.

$$\begin{cases} \min(z) = \sum_{i=1}^{n} c_j x_j \\ s/c \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i & i = 1,2......m \\ x_j \geq 0 & j = 1,2........n \end{cases}$$

مثال: البرنامج الخطي التالي من نوع تدنئة وهو مكتوب في صيغته القانونية:

$$MIN(z) = 2400x_1 + 1000x_2$$
$$s/c$$
$$3x_1 + 2x_2 \geq 20$$
$$6x_1 + x_2 \geq 30$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

2-1-2-الصيغة المختلطة:

في هذه الصيغة تكون دالة الهدف من نوع تعظيم أو من نوع تدنئة، والقيود مختلطة من نوع (أكبر أو يساوي) و (أصغر أو يساوي) ومساواة، ونقول أن الصيغة مختلطة إذا توفرت الحالات الثلاث السابقة معا، أو حالتين على الأقل.

مثال: البرنامج الخطي التالي مكتوب في صيغته المختلطة:

$$MIN(z) = 60x_1 + 40x_2$$
$$s/c$$
$$18x_1 + 10x_2 \geq 180$$
$$5x_1 + 8x_2 \leq 158$$
$$4x_1 + 9x_3 \geq 110$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

2-1-3-الصيغة النموذجية(الشكل القياسي) :

يعتبر الشكل القياسي أو الصيغة النموذجية من الأشكال المهمة حيث لا يمكن حل البرنامج الخطي بطريقة السمبلكس إلا بعد تحويله إلى الشكل القياسي، و يكون كما يلي :

- تتخذ دالة الهدف صيغة التعظيم أو التخفيض.
- جميع قيود البرنامج الخطي تكون على شكل مساواة .

وتعتبر الصيغة النموذجية مهمة لإيجاد الحل الأساسي للبرنامج الخطي بطريقة السمبلكس، لذا يجب تحويل أي برنامج إلى الصيغة النموذجية من أجل حله بطريقة السمبلكس.

ويتم تحويل البرنامج الخطي إلى الشكل القياسي كما يلي:

- إذا كانت إشارة القيد أكبر أو تساوي

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i$$

فإننا نطرح متغير وهمي موجب يسمى متغير الفجوة (s_i) للطرف الأيسر للقيد ، و يصبح القيد كما يلي :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - s_i = b_i$$

نلاحظ أن معامل متغير الفجوة إشارته سالبة وهذا ما يجعلنا لا نحصل على مصفوفة أحادية في معاملات القيود، لذا نستعين بمتغيرات أخرى تسمى المتغيرات الإصطناعية يرمز لها بالرمز A، ويفترض أن تكون قيمتها معدومة ومعاملها يساوي +1، فهي متغيرات مساعدة للحصول على الحل الأساسي الأولي، كما أن معاملاتها في دالة الهدف يرمز لها بالرمز M وتكون كبيرة جدا بإشارة سالبة إذا كانت دالة الهدف من نوع تعظيم، وبإشارة موجبة إذا كانت دالة الهدف من نوع تدنئة.

- إذا كانت إشارة القيد أصغر أو تساوي

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$$

فإننا نضيف متغير وهمي موجب (s_i) إلى الطرف الأيسر للقيد، و يصبح القيد كما يلي :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + s_i = b_i$$

إذن نستطيع كتابة البرنامج الخطي على شكل مساواة كمايلي :

$$\begin{cases} opt(z) = CX \\ s/c \\ AX = b \\ X \ge 0 \end{cases}$$

البرنامج الخطي الموافق يحتوي على m قيد و n+m متغير .

(n:متغير أصلي و m: متغير وهمي)

مثال(01): ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{gathered} MAX(z) = 20x_1 + 30x_2 + 50x_3 \\ s/c \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 430 \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 460 \\ x_1 + 2x_3 \leq 420 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{gathered}$$

المطلوب: كتابة البرنامج في صيغته النموذجية.

الحل:

كتابة البرنامج على الشكل القياسي بإضافة متغيرات الفجوة إلى الطرف الأيسر للمتراجحات، كما يلي:

- القيد الأول: بما أن اشارة القيد أصغر أو يساوي نضيف متغير الفجوة s_1 إلى الطرف الأيسر من القيد

$$x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 430$$

يصبح:

$$x_1 + 3x_2 + x_3 + s_1 = 430$$

وهكذا نفعل مع باقي القيود بما أن اشارتها كلها أصغر أو يساوي فيصبح البرنامج على الشكل التالي:

$$MAX(z) = 20x_1 + 30x_2 + 50x_3 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$$
$$s/c$$
$$x_1 + 3x_2 + x_3 + s_1 = 430$$
$$3x_1 + 5x_2 + s_2 = 460$$
$$x_1 + 2x_3 + s_3 = 420$$
$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

كما يجب أن تضاف متغيرات الفجوة بالشكل الذي يضمن الحصول على مصفوفة أحادية في معاملات القيود كما في مثالنا هذا:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{5} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{array}$$

تسمى هذه المصفوفة بمصفوفة الحل الأساسي الأولي وهي الخطوة الأولى لإيجاد الحل الأمثل بطريقة السمبلكس.

مثال (02): ليكن لدينا البرنامج التالي:

$$MIN(z) = 2400x_1 + 1000x_2$$
$$s/c$$
$$3x_1 + 2x_2 \geq 20$$
$$6x_1 + x_2 \geq 30$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

المطلوب: كتابة البرنامج في صيغته النموذجية.

الحل:

كتابة البرنامج على الشكل القياسي بإضافة متغيرات الفجوة إلى الطرف الأيسر للمتراجحات، كما يلي:

- القيد الأول: بما أن إشارة القيد أكبر أو يساوي نطرح متغير الفجوة $_1$ من الطرف الأيسر من القيد

$$3x_1 + 2x_2 \geq 20$$

يصبح:

$$3x_1 + 2x_2 - s_1 = 20$$

نضيف متغير اصطناعي A_1 إلى الطرف الأيسر فيصبح كما يلي:

$$3x_1 + 2x_2 - s_1 + A_1 = 20$$

- القيد الثاني: بما أن إشارة القيد أكبر أو يساوي نطرح متغير الفجوة s_2 من الطرف الأيسر من القيد فيصبح كالتالي:

$$6x_1 + x_2 - s_2 = 30$$

نضيف متغير اصطناعي A_2 إلى الطرف الأيسر فيصبح كما يلي:

$$6x_1 + x_2 - s_2 + A_2 = 30$$

أما دالة الهدف فتصبح كالتالي:

$$MIN(z) = 2400x_1 + 1000x_2 + 0s_1 + 0s_2 + \mathrm{MA}_1 + \mathrm{MA}_2$$

ومنه البرنامج في صيغته النموذجية يكتب كالتالي:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{MIN(z) = 2400x_1 + 1000x_2 + 0s_1 + 0s_2 + \mathrm{MA}_1 + \mathrm{MA}_2}\\ \boldsymbol{s/c}\\ \boldsymbol{3x_1 + 2x_2 - s_1 + A_1 = 20}\\ \boldsymbol{6x_1 + x_2 - s_2 + A_2 = 30}\\ \boldsymbol{x_1, x_2, s_1, s_2, A_1, A_2 \geq 0}\end{gathered}$$

2-2-خطوات طريقة السمبلكس:

2-2-1- في حالة دالة الهدف من النوع MAX: للوصول إلى الحل الأمثل نتبع الخطوات التالية:

أ- وضع المشكلة في شكل برنامج خطي.

ب-كتابة البرنامج الخطي في صيغته النموذجية (الشكل القياسي) بحيث يتضمن مصفوفة أحادية في معاملات القيود.

ت-جرد البيانات في جدول يسمى بجدول الحل الأساسي الأولي وإيجاد الحل الأساسي الأولي على النحو التالي:

T_1												
C_j			c_1	c_2	………	c_n	0	0	……..	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	………	x_n	s_1	s_2	………	s_m
0	s_1	b_1	a_{11}	a_{12}	………	a_{1n}	1	0	………	0
0	s_2	b_2	a_{21}	a_{22}	………	a_{2n}	0	1	………	0
. .	. .	. .	. .	. .	………	. .	. .	. .	………	. .
0	s_i	b_i	a_{i1}	a_{i2}	………	a_{in}	0	0	………	0
. .	. .	. .	. .	. .	………	. .	0	0	………	0
0	s_m	b_m	a_{m1}	a_{m2}	………	a_{mn}	0	0	………	1
Z_j		$Z^* = 0$	0	0	………	0	0	0	………	0
$\Delta_j = c_j - z_j$			c_1	c_2	………	c_n	0	0	………	0

نلاحظ من خلال جدول الحل الأساسي ما يلي:

- ✓ متغيرات الأساس الموجودة في العمود الثاني من الجدول هي نفسها المقابلة للقيمة 1 من أعمدة المصفوفة الأحادية، حيث أن هذه المتغيرات في جدول الحل الأساسي إما متغيرات فجوة أو متغيرات اصطناعية، وقد يكونان معا، وتزيحها الخوارزمية خلال مراحل تحسين الحل لتحل محلها متغيرات أخرى.
- ✓ قيم متغيرات الأساس في جدول الحل الأساسي هي القيم المقابلة لها في العمود الثالث (عمود الثوابت) أي:

$$s_1 = b_1, s_2 = b_2, \ldots\ldots s_m = b_m$$

- ✓ قيمة الدالة الاقتصادية (دالة الهدف) معدومة $(Z = 0)$ وهي في الخانة الثانية من السطر ما قبل الأخير من الجدول.
- ✓ يعبر السطر الأخير عن تغير معاملات دالة الهدف خلال مراحل الحل.

ث- في هذه المرحلة نقوم بتحسين الحل فبعد تحويل البرنامج الخطي إلى صيغته القياسية، ثم تفريغ البيانات في جدول، وهذا الجدول يسمى بجدول الحل الأساسي الأولى، الآن في هذه المرحلة نتعرف على كيفية تحسين قيمة دالة الهدف وذلك عن طريق فحص معاملات

السطر $(\Delta_j = c_j - z_j)$ ، فنختار أحد المتغيرات التي لها القدرة على تحسين الحل ويتم هذا وفق الخطوات التالية :

- ✓ **المتغير الداخل :** ويتم تحديد هذا المتغير بموجب شرط الأمثلية ويسمى بالمتغير الداخل لأنه سوف يدخل إلى عمود المتغيرات القاعدية (X_B) في العمود الأول ويصبح من المتغيرات القاعدية، أما أسلوب اختياره فيتم بالنظر إلى معاملات السطر (Δ_j) ، فإذا كانت دالة الهدف من نوع MAX فنختار المتغير الذي يقابل أكبر رقم موجب (أكبر قيمة في الدالة الاقتصادية أو دالة الهدف) فيمثل المتغير الداخل، أما في حالة تساوي قيمتين أو أكثر فنختار عشوائيا، وبعد تحديد المتغير الداخل فإن العمود الذي يعود له يسمى بالعمود المحوري (عمود الارتكاز) .
- ✓ **المتغير الخارج :**ولاختيار المتغير الخارج من بين المتغيرات القاعدية الموجودة في العمود الأول من الجدول ، وذلك بقسمة الطرف الأيمن والمتمثلة بقيم b_i في العمود الثالث من الجدول على القيم المناظرة لها في العمود المحوري (المتغير الداخل) الموجبة فقط (b_i/a^*_{ij})،أما السالبة و المعدومة تهمل فيتكون لدينا عمود جديدة يسمى بالنسب، ويوضع إلى جانب العمود الأخير في الجدول، والمتغير الخارج هو ذلك المتغير الذي يقابل أصغر نسبة ممكنة $\min(\frac{b_i}{a_{ij}})$، ويسمى السطر الذي يقع فيه المتغير الخارج بالسطر المحوري (سطر الارتكاز) .
- ✓ **العنصر المحوري:** إن نقطة تقاطع العمود المحوري بالصف المحوري يسمى بعنصر الارتكاز وبعد تحديد هذا العنصر، فإذا كان أكبر من الواحد فيجب قسمة الصف الذي يعود له ذلك العنصر فنكون صف جديد يسمى بالمعادلة المحورية .
- ✓ **الانتقال إلى جدول جديد** : ويتم ذلك من خلال المراحل التالية:
  - استبدال المتغير الخارج من الأساس بالمتغير الداخل للأساس.
  - تقسيم جميع قيم سطر العنصر المحوري على العنصر المحوري.
  - نستبدل عناصر العمود المحوري بالصفر ماعدا العنصر المحوري.
  - باقي العناصر تحسب بالعلاقة التالية:

العنصر الجديد=العنصر القديم –[(العنصر المقابل في الصف المحوري*العنصر المقابل في العمود المحوري)/العنصر المحوري]

- ✓ حساب قيم صف Z_j وقيم $\Delta_j = C_j - Z_j$.

بعد إنجاز الجدول الجديد نلاحظ أن قيمة Z=0 ازدادت إلى قيمة أكبر وهذه الزيادة أتت عن طريق زيادة وحدة واحدة من المتغير الداخل.

ج– الحصول على الحل الأمثل ونصل إليه عندما تكون جميع قيم $\Delta_j = C_j - Z_j$ مساوية الصفر أو سالبة وهذا يعنى تحقيق الحل الأمثل .

ح– أما إذا كان هناك قيمة موجبة فيجب إعادة خطوة تحسين الحل .

مثال: لدينا في مثال سابق البرنامج الخطي التالي:

$$\boldsymbol{MAX(z) = 20x_1 + 30x_2 + 50x_3}$$
$$\boldsymbol{s/c}$$
$$\boldsymbol{x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 430}$$
$$\boldsymbol{3x_1 + 5x_2 \leq 460}$$
$$\boldsymbol{x_1 + 2x_3 \leq 420}$$
$$\boldsymbol{x_1, x_2, x_3 \geq 0}$$

الحل:

نتبع الخطوات السابق ذكرها:

1–لدينا المسألة مكتوبة في شكل برنامج خطي.

2–كتابة البرنامج على الشكل القياسي بإضافة متغيرات الفجوة إلى الطرف الأيسر للمتراجحات، فمثلا بالنسبة للقيد الأول:

$$x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 430$$

يصبح:

$$x_1 + 3x_2 + x_3 + s_1 = 430$$

وهكذا نفعل مع باقي القيود فيصبح البرنامج على الشكل التالي:

$$MAX(z) = 20x_1 + 30x_2 + 50x_3 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$$
$$s/c$$
$$x_1 + 3x_2 + x_3 + s_1 = 430$$
$$3x_1 + 5x_2 + s_2 = 460$$
$$x_1 + 2x_3 + s_3 = 420$$
$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

3-نقل البيانات إلى جدول الحل الأساسي الأولي:

C_j			20	30	50	0	0	0
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
0	s_1	430	1	3	1	1	0	0
0	s_2	460	3	5	0	0	1	0
0	s_3	420	1	0	2	0	0	1
Z_j		$Z^* = 0$	0	0	0	0	0	0
$\Delta_j = c_j - z_j$			20	30	50	0	0	0

X_B: المتغيرات الداخلة في الأساس(المتغيرات القاعدية).

C_B: معاملات المتغيرات الداخلة في الأساس في دالة الهدف.

C_j : معاملات المتغيرات في دالة الهدف.

b_i: الطرف الأيمن للقيود.

والحل الأساسي الأولي هو:

- كل المتغيرات الأساسية تكون معدومة.
- المتغيرات الداخلة في الأساس تساوي القيم المقابلة لها في عمود b_{i} .
- نحصل على قيمة Z بالتعويض في الدالة الهدف، أو عن طريق جمع حاصل ضرب كل قيمة من عمود b_{i} في القيمة المقابلة لها في عمود C_{B} .

وعليه الحل الأساسي الأولي هو:

$$x_1 = 0, \mathrm{x}_2 = 0, \mathrm{x}_3 = 0, \mathrm{s}_1 = 430, \mathrm{s}_2 = 460, \mathrm{s}_3 = 420, \mathrm{Z} = 0$$

4-**مرحلة تحسين الحل:** إن الحل المتحصل عليه سابقا ما هو إلا حل يتم الإنطلاق منه بغية الوصول إلى الحل الأمثل، ولتحسين الحل يتم تحديد العناصر التالية:

✓ **المتغير الداخل إلى الأساس:** وهو المتغير الذي يقابل أكبر قيمة موجبة في صف $C_j - Z_j$ حيث:

$$MAX(20,30,50)=50$$

وعليه أكبر قيمة هي 50 وهي المقابلة للمتغير x_3 و منه هو المتغير الداخل إلى الأساس.

✓ **المتغير الخارج من الأساس:** نقوم بقسمة الطرف الأيمن والمتمثلة بقيم b_i في العمود الثالث من الجدول على القيم المناظرة لها في العمود المحوري (المتغير الداخل) الموجبة فقط، والمتغير الذي يقابل أصغر نسبة ممكنة $\min(\frac{b_i}{a_{ij}})$ هو المتغير الخارج من الأساس حيث:

$$MIN(430/1,420/2)=420/2=210$$

وعليه أصغر قيمة هي 210 وهي المقابلة للمتغير s_3 و منه هو المتغير الخارج من الأساس.

✓ **تحديد العنصر المحوري:** وهو نقطة تقاطع العمود المحوري بالصف المحوري يسمى أيضا بعنصر الارتكاز ومنه هو القيمة (2).

المتغير الخارج المتغير الداخل العمود المحوري

C_j			20	30	50	0	0	0	
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b_i/a^*_{ij}
0	s_1	430	1	3	1	1	0	0	430
0	s_2	460	3	5	0	0	1	0	/
0	s_3	420	1	0	2	0	0	1	210
Z_j		$Z^* = 0$	0	0	0	0	0	0	
$\Delta_j = c_j - z_j$			20	30	50	0	0	0	

السطر المحوري العنصر المحوري

✓ **الانتقال إلى جدول جديد** : نقوم باستبدال المتغير الخارج من الأساس s_3 بالمتغير الداخل وهو x_3 في عمود متغيرات الأساس، أما باقي المتغيرات تبقى على حالها كما هو مبين في الجدول التالي:

C_j			20	30	50	0	0	0	
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b_i/a^*_{ij}
0	s_1								
0	s_2								
50	x_3								
Z_j		$Z^* =$							
$\Delta_j = c_j - z_j$									

ثم نقوم بقسمة جميع قيم الصف المحوري بدءا من قيمة bi إلى غاية آخر متغير في الجدول على العنصر المحوري (2) حيث يضم الصف القيم التالية (1-0-0-2-0-1-420)، وأيضا جعل كل قيم العمود المحوري صفرا ماعدا العنصر المحوري و العنصرين الذين ينتميان للسطر الأخير وقبله، ومنه نتحصل على الجدول التالي:

C_j			20	30	50	0	0	0	
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b_i/a^*_{ij}
0	s_1				0				
0	s_2				0				
50	x_3	210	1/2	0	1	0	0	1/2	
Z_j		$Z^* =$							
$\Delta_j = c_j - z_j$									

ومن ثم نقوم بحساب باقي العناصر في الجدول باستخدام القاعدة:

العنصر الجديد=العنصر القديم-[(العنصر المقابل في الصف المحوري*العنصر المقابل في العمود المحوري)/العنصر المحوري]

مثلا السطر الأول بدءا من قيمة b_i إلى غاية آخر متغير في الجدول يتم حسابه كالآتي:

رقم العنصر	حساب القيم
العنصر الأول	430−[(1*420)/2]=220
العنصر الثاني	1−[(1*1)/2]=1/2
العنصر الثالث	3−[(1*0)/2]=3
العنصر الخامس	1−[(1*0)/2]=1
العنصر السادس	0−[(0*1)/2]=0
العنصر السابع	0−[(1*1)/2]=−1/2

نفس العملية نعيدها على السطر الثاني، فنتحصل على الجدول التالي:

C_j			20	30	50	0	0	0	
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b_i/a^*_{ij}
0	s_1	220	1/2	3	0	1	0	-1/2	
0	s_2	460	3	5	0	0	1	0	
50	x_3	210	1/2	0	1	0	0	1/2	
Z_j		$Z^* =$							
$\Delta_j = c_j - z_j$									

نقوم الآن بحساب قيم Z_j و قيمة Z وقيم $C_j - Z_j$

- قيم Z_j : يم حساب هذه قيم من خلال جمع حاصل ضرب العمود C_B في قيم العمود المقابل له.

فمثلا:

$$Z_1=(1/2*0)+(3*0)+(1/2*50)=25$$

بنفس الطريقة نحسب القيم المتبقية.

- قيمة Z :

$$Z=(220*0)+(460*0)+(210*50)=10500$$

- قيم $C_j - Z_j$:

مثلا القيمة $C_1 - Z_1$:

$$C_1 - Z_1 = 20 - 25 = -5$$

فنتحصل على الجدول الجديد التالي:

C_j			20	30	50	0	0	0
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
0	s_1	220	1/2	3	0	1	0	-1/2
0	s_2	460	3	5	0	0	1	0
50	x_3	210	1/2	0	1	0	0	1/2
Z_j		$Z^* = 10500$	25	0	50	0	0	25
$\Delta_j = c_j - z_j$			-5	30	0	0	0	-25

5-الحصول على الحل الأمثل: من خلال الجدول أعلاه الحل الجديد المتوصل إليه هو:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 210, s_1 = 220, s_2 = 460, s_3 = 0, Z = 10500$$

وهذا يعني أنه يتم إنتاج 210 وحدة من المنتج x_3 ، وعدم إنتاج أي وحدة من المنتجين x_1, x_2 وبذلك نحقق ربح قدره Z=10500 و السؤال الآن هل هذا الحل يعتبر أمثلا أو لا؟

كما ذكرنا سابقا أنه في حالة التعظيم نتوصل للحل الأمثل إذا كانت كل قيم السطر $C_j - Z_j$ سالبة أو معدومة، وفي جدولنا نلاحظ أنه هناك قيمة موجبة وهي (30) المقابلة للمتغير x_2 وبالتالي لم نصل إلى الحل الأمثل و أن هذا الحل ليس أمثلا.

6-بما أن الحل ليس أمثلا نقوم بتحسين الحل مرة أخرى بنفس الخطوات والقواعد وبنفس الترتيب وذلك باستخدام الجدول الجديد:

C_j			20	30	50	0	0	0	
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	b_i/a_{ij}^*
0	s_1	220	1/2	3	0	1	0	-1/2	220/3
0	s_2	460	3	5	0	0	1	0	460/5
50	x_3	210	1/2	0	1	0	0	1/2	/
Z_j		$Z^* = 10500$	25	0	50	0	0	25	
$\Delta_j = c_j - z_j$			-5	30	0	0	0	-25	

وبالتالي نحصل على الجدول الجديد التالي:

C_j			20	30	50	0	0	0
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
30	x_2	220/3	1/6	1	0	1/3	0	-1/6
0	s_2	280/3	13/6	0	0	-5/3	1	1/6
50	x_3	210	1/2	0	1	0	0	1/2
Z_j		$Z^* = 12700$	30	30	50	10	0	20
$\Delta_j = c_j - z_j$			-10	0	0	-20/3	0	-20

نلاحظ من خلال الجدول أن كل قيم $C_j - Z_j$ سالبة أو معدومة وبالتالي الجدول الجديد هو جدول الحل الأمثل، والحل الأمثل هو:

$$\mathbf{x_1^* = 0, x_2^* = \frac{220}{3}, x_3^* = 210, s_1 = 0, s_2 = \frac{280}{3}, s_3 = 0,}$$
$$\mathbf{Z = 12700}$$

وهذا يعني أنه يجب إنتاج 220/3 من المنتج $\boldsymbol{x_2}$ و 210 من المنتج $\boldsymbol{x_3}$ لكي نحقق أقصى ربح ممكن وهو Z=12700 وحدة.

2-2-2- في حالة دالة الهدف من نوع MIN:

عند حل البرنامج الخطي من نوع MIN بطريقة السمبلكس فإنه لا يختلف كثيرا عن حل البرنامج الخطي من نوع MAX، إلا في ثلاث نقاط هي:

- في حالة البرنامج الخطي من نوع MIN نضيف ما يسمى بالمتغيرات الاصطناعية.
- المتغير الخارج من الأساس هو المتغير المقابل لأكبر قيمة باشارة سالبة في سطر $C_j - Z_j$.
- نصل إلى الحل الأمثل إذا كانت كل قيم $C_j - Z_j$ موجبة أو معدومة.

ولحل البرنامج الخطي من نوع MIN هناك عدة طرق سنتطرق إلى أهم طريقتين هما: طريقة M الكبيرة، وطريقة المرحلتين.

الطريقة الأولى: طريقة M الكبيرة :(BIG(M

تستعمل هذه الطريقة في حالة وجود برنامج خطي لا يتوفر فيه الحل الأساسي الأولي (عدم وجود مصفوفة أحادية في معاملات القيود) كما في حالة دالة الهدف من نوع MIN (برنامج خطي من نوع MIN في صيغته القانونية)، ولهذا يلزم إدخال متغيرات جديدة تدعى **بالمتغيرات الاصطناعية** ، في دالة الهدف وفي القيود حتى نتمكن من حل المسألة، كما ذكرنا سابقا، ولها نفس الخطوات التي يتم إتباعها في حالة السمبلكس العادية .

ملاحظة: المتغير الاصطناعي الذي يتم خروجه من الأساس يتم إلغاء التعامل به في مصفوفة المعاملات.

مثال(01): ليكن لدينا البرنامج التالي:

$$MIN(z) = 2400x_1 + 1000x_2$$
$$s/c$$
$$3x_1 + 2x_2 \geq 20$$
$$6x_1 + x_2 \geq 30$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

المطلوب: حل البرنامج الخطي باستخدام طريقة M الكبيرة.

الحل:

1- لدينا المسألة مكتوبة في شكل برنامج خطي.

2-كتابة البرنامج الخطي على الشكل القياسي:

$$MIN(z) = 2400x_1 + 1000x_2 + 0s_1 + 0s_2 + \mathrm{MA}_1 + \mathrm{MA}_2$$
$$s/c$$
$$3x_1 + 2x_2 - s_1 + A_1 = 20$$
$$6x_1 + x_2 - s_2 + A_2 = 30$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2, A_1, A_2 \geq 0$$

1−نقل البيانات إلى جدول الحل الأساسي الأولي وايجاد الحل الأساسي الأولي: يتم ملأ جدول السمبلكس بنفس الطريق التي وضحناها سابقا.

C_j			2400	1000	0	0	M	M	
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2	A_1	A_2	b_i/a^*_{ij}
M	A_1	20	3	2	−1	0	1	0	
M	A_2	30	6	1	0	−1	0	1	
Z_j		$Z^* = 50M$	9M	3M	−M	−M	M	M	
$\Delta_j = c_j - z_j$			2400−9M	1000−3M	M	M	0	0	

وعليه الحل الأساسي الأولي هو:

$$\mathbf{x_1 = 0, x_2 = 0, s_1 = 0, s_2 = 0, A_1 = 20, A_2 = 30,}$$
$$\mathbf{Z = 50M}$$

2−نقوم في هذه الخطوة بتحسين الحل من خلال المراحل الآتية:

أ− **المتغير الداخل للأساس:** بما أننا في حالة دالة من نوع MIN فإن المتغير الداخل للأساس هو المتغير المقابل لأكبر قيمة بإشارة سالبة في صف $C_j - Z_j$ ، ومن خلال الجدول لدينا:

MIN(2400−9M,1000−3M)=2400−9M

وهي القيمة المقابلة للمتغير x_1 وعليه المتغير الداخل للأساس هو المتغير x_1 .

ب−**المتغير الخارج من الأساس:** نقوم بقسمة الطرف الأيمن والمتمثلة بقيم b_i في العمود الثالث من الجدول على القيم المناظرة لها في العمود المحوري (المتغير الداخل) الموجبة فقط، والمتغير الذي يقابل أصغر نسبة ممكنة $\min(\frac{b_i}{a_{ij}})$ هو المتغير الخارج من الأساس حيث:

MIN(20/3,30/6)=30/6=5

وعليه أصغر قيمة هي 5 وهي المقابلة للمتغير A_2 و منه هو المتغير الخارج من الأساس.

ت- تحديد العنصر المحوري: وهو نقطة تقاطع العمود المحوري بالصف المحوري ومنه هو القيمة (6).

C_j			2400	1000	0	0	M	M	
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2	A_1	A_2	b_i/a_{ij}^*
M	A_1	20	3	2	−1	0	1	0	20/3
M	A_2	30	6	1	0	−1	0	1	5
Z_j		$Z^* = 50M$	9M	3M	−M	−M	M	M	
$\Delta_j = c_j - z_j$			2400−9M	1000−3M	M	M	0	0	

3-**الانتقال إلى جدول جديد:** نقوم بالنتقال إلى جدول جديد باتباع المراحل التالية:

المرحلة الأولى: استبدال المتغير الخارج من الأساس A_2 بالمتغير الداخل للأساس $\boldsymbol{x_1}$ ، في حين تبقى المتغيرات الأخرى على حالها.

C_j			2400	1000	0	0	M	
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2	A_1	b_i/a_{ij}^*
M	A_1							
2400	x_1							
Z_j		$Z^* =$						
$\Delta_j = c_j - z_j$								

المرحلة الثانية: ثم نقوم بقسمة جميع قيم الصف المحوري بدءا من قيمة bi إلى غاية آخر متغير في الجدول على العنصر المحوري (6) حيث يضم الصف القيم التالية (5,1,1/6,0,−1/6,0)، وأيضا جعل كل قيم العمود المحوري صفرا ماعدا العنصر المحوري و العنصرين الذين ينتميان للسطر الأخير وقبله، ومنه نتحصل على الجدول التالي:

C_j			2400	1000	0	0	M	
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2	A_1	b_i/a^*_{ij}
M	A_1		0					
2400	x_1	5	1	1/6	0	−1/6	0	
Z_j		$Z^* =$						
$\Delta_j = c_j - z_j$								

المرحلة الثالثة: ومن ثم نقوم بحساب باقي العناصر في الجدول باستخدام القاعدة:

العنصر الجديد=العنصر القديم-[(العنصر المقابل في الصف المحوري*العنصر المقابل في العمود المحوري)/العنصر المحوري]

نفس العملية نعيدها على السطر الثاني، فنتحصل على الجدول التالي:

C_j			2400	1000	0	0	M	
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2	A_1	b_i/a^*_{ij}
M	A_1	5	0	3/2	−1	1/2	1	
2400	x_1	5	1	1/6	0	−1/6	0	
Z_j		$Z^* =$						
$\Delta_j = c_j - z_j$								

المرحلة الرابعة: نقوم الآن بحساب قيم Z_j و قيمة Z وقيم $C_j - Z_j$ بنفس الطريقة التي وضحناها سابقا فنحصل على الجدول التالي:

C_j			2400	1000	0	0	M	
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2	A_1	b_i/a^*_{ij}
M	A_1	5	0	3/2	−1	1/2	1	
2400	x_1	5	1	1/6	0	−1/6	0	
Z_j		$Z^* = 12000 + 5M$	2400	400+3/2M	−M	−400+1/2M	M	
$\Delta_j = c_j - z_j$			0	600−3/2M	M	400−1/2M	0	

4-**الحصول على الحل الأمثل:** من خلال الجدول أعلاه الحل الجديد المتوصل إليه هو:

$$x_1 = 5, x_2 = 0, s_1 = 0, s_2 = 0, A_1 = 5, Z = 12000 + 5M$$

و السؤال الآن هل هذا الحل يعتبر أمثلا أو لا؟

كما ذكرنا سابقا أنه في حالة التدنئة نتوصل للحل الأمثل إذا كانت كل قيم السطر $C_j - Z_j$ موجبة أو معدومة، وفي جدولنا نلاحظ أنه هناك قيم سالبة المقابلة للمتغير x_2 ، والمتغير s_2 وبالتالي هذا الحل ليس أمثلا، ولكن من جهة أخرى نلاحظ أن قيمة دالة الهدف أقل من القيمة المتوصل إليها في الحل الأساسي الأولي.

5-بما أن الحل ليس أمثلا نقوم بتحسين الحل مرة أخرى بنفس الخطوات والقواعد وبنفس الترتيب وذلك باستخدام الجدول الجديد، وبنفس الخطوات السابقة نحدد المتغير الداخل للأساس و المتغير الخارج والعنصر المحوري

C_j			2400	1000	0	0	M	
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2	A_1	b_i/a_{ij}^*
M	A_1	5	0	3/2	−1	1/2	1	10/3
2400	x_1	5	1	1/6	0	−1/6	0	30
Z_j		$Z^* = 12000 + 5M$	2400	400+3/2M	−M	−400+1/2M	M	
$\Delta_j = c_j - z_j$			0	600−3/2M	M	400−1/2M	0	

وبنفس الخطوات السابقة نتحصل على الجدول الجديد التالي:

C_j			2400	1000	0	0
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2
1000	x_2	10/3	0	1	−2/3	1/3
2400	x_1	40/9	1	0	1/9	−2/9
Z_j		$Z^* = 14000$	2400	1000	−400	−200
$\Delta_j = c_j - z_j$			0	0	400	200

نلاحظ من خلال الجدول أن كل قيم $C_j - Z_j$ موجبة أو معدومة وبالتالي الجدول الجديد هو جدول الحل الأمثل، والحل الأمثل هو:

$$x_1^* = \frac{40}{9}, x_2^* = \frac{10}{30}, Z^* = 14000$$

مثال(02) (حالة برنامج خطي من نوع MIN مكتوب في صيغة مختلطة):

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$MIN(z) = 4x_1 + x_2$$
$$s/c$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$
$$3x_1 + x_2 = 3$$
$$4x_1 + 3x_2 \geq 6$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

1-كتابة البرنامج الخطي على الشكل القياسي:

- في هذا المثال بالنسبة للقيد الأول نضيف له متغير فجوة فقط لأن إشارته أصغر أو يساوي.
- القيد الثاني عبارة عن مساواة نضيف له متغير اصطناعي من أجل الحصول على المصفوفة الأحادية في معاملات القيود.
- القيد الثالث نطرح منه متغير فجوة وأيضا نضيف له متغير إصطناعي .

فنحصل على الشكل القياسي التالي:

$$MIN(z) = 4x_1 + x_2 + 0s_1 + 0s_2 + MA_1 + MA_2$$
$$s/c$$
$$x_1 + 2x_2 + s_1 = 4$$
$$3x_1 + x_2 + A_1 = 3$$
$$4x_1 + 3x_2 - s_2 + A_2 = 6$$
$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, A_1, A_2 \geq 0$$

2-نقوم بنقل البيانات إلى جدول السمبلكس كما يلي:

C_j			4	1	0	0	M	M	
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2	A_1	A_2	b_i/a_{ij}^*
0	s_1	4	1	2	1	0	0	0	
M	A_1	3	3	1	0	0	1	0	
M	A_2	6	4	3	0	−1	0	1	
Z_j		$Z^* = 9M$	7M	4M	0	−M	M	M	
$\Delta_j = c_j - z_j$			4−7M	1−4M	0	M	0	0	

من خلال الجدول أعلاه الحل الأساسي الأولي هو:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, s_1 = 4, s_2 = 0, A_1 = 3, A_2 = 6, Z = 9M$$

وبنفس الخطوات السابقة نحدد المتغير الداخل للأساس و المتغير الخارج والعنصر المحوري

C_j			4	1	0	0	M	M	
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2	A_1	A_2	b_i/a_{ij}^*
0	s_1	4	1	2	1	0	0	0	4
M	A_1	3	3	1	0	0	1	0	1
M	A_2	6	4	3	0	−1	0	1	3/2
Z_j		$Z^* = 9M$	7M	4M	0	−M	M	M	
$\Delta_j = c_j - z_j$			4−7M	1−4M	0	M	0	0	

3-نقوم بالانتقال إلى الجدول الجديد:

		C_j	4	1	0	0	M	
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2	A_2	b_i $/a_{ij}^*$
0	s_1	3	0	5/3	1	0	0	
4	x_1	1	1	1/3	0	0	0	
M	A_2	2	0	5/3	0	−1	−1	
Z_j		$Z^* = 4+2M$	4	4/3+5/3M	0	−M	−M	
$\Delta_j = c_j - z_j$			0	−1/3−5/3M	0	M	−2M	

4-الحصول على الحل الأمثل: من خلال الجدول أعلاه الحل الجديد المتوصل إليه هو:

$$x_1 = 1, x_2 = 0, s_1 = 3, s_2 = 0, A_2 = 2, Z = 4 + 2M$$

و السؤال الآن هل هذا الحل يعتبر أمثلا أو لا؟

بما أننا في حالة التدنئة نتوصل للحل الأمثل إذا كانت كل قيم السطر $C_j - Z_j$ موجبة أو معدومة، وفي جدولنا نلاحظ أنه هناك قيم سالبة المقابلة للمتغير x_2 ، والمتغير s_2 وبالتالي هذا الحل ليس أمثلا، ولكن من جهة أخرى نلاحظ أن قيمة دالة الهدف أقل من القيمة المتوصل إليها في الحل الأساسي الأولي.

5-بما أن الحل ليس أمثلا نقوم بتحسين الحل مرة أخرى بنفس الخطوات والقواعد وبنفس الترتيب وذلك باستخدام الجدول الجديد، وبنفس الخطوات السابقة نحدد المتغير الداخل للأساس و المتغير الخارج والعنصر المحوري.

C_j			4	1	0	0	M	
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2	A_2	b_i/a_{ij}^*
0	s_1	3	0	5/3	1	0	0	9/5
4	x_1	1	1	1/3	0	0	0	3
M	A_2	2	0	5/3	0	−1	−1	6/5
Z_j		$Z^* = 4 + 2M$	4	4/3+5/3M	0	−M	−M	
$\Delta_j = c_j - z_j$			0	−1/3−5/3M	0	M	−2M	

نجري عليه نفس الخطوات السابقة نحصل على الجدول الجديد التالي:

C_j			4	1	0	0	
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2	b_i/a_{ij}^*
0	s_1	1	0	0	1	1	
4	x_1	3/5	1	0	0	1/5	
1	x_2	6/5	0	1	0	−3/5	
Z_j		$Z^* = 18/5$	4	1	0	1/5	
$\Delta_j = c_j - z_j$			0	0	0	−1/5	

6-الحصول على الحل الأمثل: من خلال الجدول أعلاه الحل الجديد المتوصل إليه هو:

$$x_1 = 3/5, x_2 = 6/5, s_1 = 1, s_2 = 0, Z = 18/5$$

و السؤال الآن هل هذا الحل يعتبر أمثلا أو لا؟

بما أننا في حالة تدنئة نتوصل للحل الأمثل إذا كانت كل قيم السطر $C_j - Z_j$ موجبة أو معدومة، وفي جدولنا نلاحظ أنه هناك قيم سالبة المقابلة للمتغير s_2 وبالتالي هذا الحل ليس أمثلا، ولكن من جهة أخرى نلاحظ أن قيمة دالة الهدف أقل من القيمة المتوصل إليها في الحل السابق.

7-بما أن الحل ليس أمثلا نقوم بتحسين الحل مرة أخرى بنفس الخطوات والقواعد وبنفس الترتيب وذلك باستخدام الجدول الجديد، وبنفس الخطوات السابقة نحدد المتغير الداخل للأساس و المتغير الخارج والعنصر المحوري.

C_j			4	1	0	0	
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2	b_i/a_{ij}^*
0	s_1	1	0	0	1	1	1
4	x_1	3/5	1	0	0	1/5	3
1	x_2	6/5	0	1	0	−3/5	/
Z_j		$Z^* = 18/5$	4	1	0	1/5	
$\Delta_j = c_j - z_j$			0	0	0	−1/5	

بعد إجراء الخطوات السابقة نتحصل على الجدول الجديد التالي:

C_j			4	1	0	0
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2
0	s_2	1	0	0	1	1
4	x_1	2/5	1	0	−1/5	0
1	x_2	9/5	0	1	3/5	0
Z_j		$Z^* = 17/5$	4	1	−1/5	0
$\Delta_j = c_j - z_j$			0	0	1/5	0

نلاحظ من خلال الجدول أن كل قيم $C_j - Z_j$ موجبة أو معدومة وبالتالي الجدول الجديد هو جدول الحل الأمثل، والحل الأمثل هو:

$$x_1^* = 2/5, x_2^* = 9/5, Z^* = 17/5$$

الطريقة الثانية: طريقة المرحلتان (Méthode de deux phases) :

تعد طريقة المرحلتين أبسط من طريقة M الكبيرة في إيجاد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية، إذ تمكننا هذه الطريقة من إيجاد الحل الأمثل للبرنامج الخطي بعد أن نتأكد بأن هنالك حل للبرنامج وذلك بالحصول على قيمة دالة الهدف الجديدة Z مساوية للصفر، وبعدمه لا يوجد حل للبرنامج، وتختلف هذه الطريقة عن طريقة M الكبيرة بحل البرنامج الخطي في أنها لا تستخدم المتغير M وتعتمد في إيجادها الحل الأمثل على المرحلتين التاليتين :

أ-المرحلة الأولى:

1- تحويل البرنامج الخطي من الصيغة القانونية إلى الصيغة القياسية ومن ثم إضافة المتغيرات الاصطناعية (A_i) لقيود البرنامج فقط.

2-صياغة دالة هدف جديدة (Z) بالاعتماد على المتغيرات الاصطناعية (A_i) فقط بحيث تكون معاملاتها مساوية للواحد، أما باقي المتغيرات فنضع معاملاتها مساوية للصفر.

3- تطبيق خطوات السمبلكس العادية حتى نصل Z=0 (وهنا تنتهي المرحلة الأولى وننتقل إلى المرحلة الثانية، أما إذا لم نصل إلى Z=0 فإن البرنامج لا يقبل حلول)

ب-المرحلة الثانية :

نأخذ الجدول الأخير للمرحلة الأولى كأول جدول للمرحلة الثانية مع إدخال معاملات دالة الهدف للبرنامج الخطي ثم نطبق بعدها طريقة السمبلكس حتى نصل إلى الحل الأمثل.

مثال(01): ليكن لدينا البرنامج التالي:

$$MIN(z) = 2400x_1 + 1000x_2$$
$$s/c$$
$$3x_1 + 2x_2 \geq 20$$
$$6x_1 + x_2 \geq 30$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

❖ **المرحلة الأولى:**

1-كتابة البرنامج الخطي على الشكل القياسي:

$$MIN(z) = 2400x_1 + 1000x_2 + 0s_1 + 0s_2 + A_1 + A_2$$
$$s/c$$
$$3x_1 + 2x_2 - s_1 + A_1 = 20$$
$$6x_1 + x_2 - s_2 + A_2 = 30$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2, A_1, A_2 \geq 0$$

2- ندخل البيانات لجدول السمبلكس وذلك بوضع جميع معاملات المتغيرات في دالة الهدف معدومة ماعدا المتغيرات الاصطناعية فتكون معاملاتها مساوية للواحد كما هو مبين في الجدول التالي:

C_j			0	0	0	0	1	1	
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2	A_1	A_2	b_i/a_{ij}^*
1	A_1	20	3	2	-1	0	1	0	
1	A_2	30	6	1	0	-1	0	1	
Z_j		$Z^* = 50$	9	3	-1	-1	0	0	
$\Delta_j = c_j - z_j$			-9	-3	1	1	1	1	

من خلال الجدول أعلاه الحل الأساسي الأولي هو:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, s_1 = 0, s_2 = 0, A_1 = 20, A_2 = 30, Z = 50$$

3-نقوم في هذه الخطوة بتحسين الحل من خلال المراحل الآتية:

- المتغير الداخل للأساس: بما أننا في حالة دالة من نوع MIN فإن المتغير الداخل للأساس هو المتغير المقابل لأكبر قيمة بإشارة سالبة في صف $C_j - Z_j$ ، ومن خلال الجدول لدينا:

$$\text{MIN}(-9,-3,1,1,1,1)=-9$$

وهي القيمة المقابلة للمتغير x_1 وعليه المتغير الداخل للأساس هو المتغير x_1 .

- المتغير الخارج من الأساس: نقوم بقسمة الطرف الأيمن والمتمثلة بقيم b_i في العمود الثالث من الجدول على القيم المناظرة لها في العمود المحوري (المتغير الداخل) الموجبة فقط، والمتغير الذي يقابل أصغر نسبة ممكنة $\min(\frac{b_i}{a_{ij}})$ هو المتغير الخارج من الأساس حيث:

$$\text{MIN}(20/3,30/6)=30/6=5$$

وعليه أصغر قيمة هي 5 وهي المقابلة للمتغير A_2 و منه هو المتغير الخارج من الأساس.

- **تحديد العنصر المحوري:** وهو نقطة تقاطع العمود المحوري بالصف المحوري ومنه هو القيمة (6).

C_j			0	0	0	0	1	1	
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2	A_1	A_2	b_i/a_{ij}^*
1	A_1	20	3	2	−1	0	1	0	20/3
1	A_2	30	6	1	0	−1	0	1	5
Z_j		$Z^* = 50$	9	3	−1	−1	0	0	
$\Delta_j = c_j - z_j$			−9	−3	1	1	1	1	

4−الانتقال إلى جدول جديد: نقوم بالانتقال إلى جدول جديد بإتباع المراحل التالية:

- استبدال المتغير الخارج من الأساس A_2 بالمتغير الداخل للأساس x_1 ، في حين تبقى المتغيرات الأخرى على حالها.
- ثم نقوم بقسمة جميع قيم الصف المحوري بدءا من قيمة bi إلى غاية آخر متغير في الجدول على العنصر المحوري (6) حيث يضم الصف القيم التالية:

(5,1,1/6,0,−1/6,0)

وأيضا جعل كل قيم العمود المحوري صفرا ماعدا العنصر المحوري و العنصرين الذين ينتميان للسطر الأخير وقبله، ومنه نتحصل على الجدول التالي:

C_j			0	0	0	0	1	
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2	A_1	b_i/a_{ij}^*
1	A_1							
0	x_1	5	1	1/6	0	−1/6	0	
Z_j		$Z^* =$						
$\Delta_j = c_j - z_j$								

ومن ثم نقوم بحساب باقي العناصر في الجدول باستخدام القاعدة:

العنصر الجديد=العنصر القديم-[(العنصر المقابل في الصف المحوري*العنصر المقابل في العمود المحوري)/العنصر المحوري]

نقوم الآن بحساب قيم Z_j و قيمة Z وقيم $C_j - Z_j$ بنفس الطريقة التي وضحناها سابقا فنحصل على الجدول التالي:

C_j			0	0	0	0	1	
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2	A_1	b_i / a_{ij}^*
1	A_1	5	0	3/2	−1	1/2	1	
0	x_1	5	1	1/6	0	−1/6	0	
Z_j		$Z^* = 5$	0	3/2	−1	1/2	1	
$\Delta_j = c_j - z_j$			0	−3/2	1	−1/2	0	

5-من خلال الجدول أعلاه الحل الجديد المتوصل إليه هو:

$$x_1 = 5, x_2 = 0, s_1 = 0, s_2 = 0, A_1 = 5, Z = 5$$

في الجدول أعلاه نلاحظ أنه هناك قيم سالبة المقابلة للمتغير x_2 ، والمتغير s_2 ، وكذلك قيمة Z لا تساوي الصفر وبالتالي نقوم بتحسين الحل مرة أخرى، ولكن من جهة أخرى نلاحظ أن قيمة دالة الهدف أقل من القيمة المتوصل إليها في الحل الأساسي الأولي.

6-نقوم بتحسين الحل مرة أخرى بنفس الخطوات السابقة:

C_j			0	0	0	0	1	
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2	A_1	b_i/a_{ij}^*
1	A_1	5	0	3/2	−1	1/2	1	10/3
0	x_1	5	1	1/6	0	−1/6	0	30
Z_j		$Z^* = 5$	0	3/2	−1	1/2	1	
$\Delta_j = c_j - z_j$			0	−3/2	1	−1/2	0	

نحصل على الجدول التالي:

C_j			0	0	0	0
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2
0	x_2	10/3	0	1	−2/3	1/3
0	x_1	40/9	1	0	1/9	−2/9
Z_j		$Z^* = 0$	0	0	0	0
$\Delta_j = c_j - z_j$			0	0	0	0

نلاحظ من خلال الجدول أعلاه أن قيمة Z=0 وكل المتغيرات الاصطناعية خرجت من الأساس، وهنا انتهت المرحلة الأولى وننتقل إلى المرحلة الثانية.

المرحلة الثانية: نأخذ الجدول الأخير للمرحلة الأولى كأول جدول للمرحلة الثانية مع إدخال معاملات دالة الهدف للبرنامج الخطي، وكذلك نحسب باقي قيم الجدوب بنفس الطريقة التي كونا بها جدول الحل الأساسي الأولي، ثم نطبق بعدها طريقة السمبلكس حتى نصل إلى الحل الأمثل، ومنه نحصل على الجدول التالي:

C_j			2400	1000	0	0
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2
1000	x_2	10/3	0	1	−2/3	1/3
2400	x_1	40/9	1	0	1/9	−2/9
Z_j		$Z^* = 14000$	2400	1000	−400	−200
$\Delta_j = c_j - z_j$			0	0	400	200

نلاحظ من خلال الجدول أعلاه أن كل قيم $C_j - Z_j$ موجبة أو معدومة وبما أننا في حالة MIN فإنه هو جدول الحل الأمثل، والحل الأمثل هو:

$$x_1^* = \frac{40}{9}, x_2^* = \frac{10}{3}, Z^* = 14000$$

وهو نفس الحل المتوصل إليه بطريقة M الكبيرة.

مثال(02) (حالة برنامج خطي من نوع MIN مكتوب في صيغة مختلطة):

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$MIN(z) = 4x_1 + x_2$$
$$s/c$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$
$$3x_1 + x_2 = 3$$
$$4x_1 + 3x_2 \geq 6$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

المرحلة الأولى:

1-كتابة البرنامج الخطي على الشكل القياسي:

$$MIN(z) = 4x_1 + x_2 + 0s_1 + 0s_2 + A_1 + A_2$$
$$s/c$$
$$x_1 + 2x_2 + s_1 = 4$$
$$3x_1 + x_2 + A_1 = 3$$
$$4x_1 + 3x_2 - s_2 + A_2 = 6$$
$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, A_1, A_2 \geq 0$$

2- نقل البيانات إلى جدول السمبلكس:

C_j			0	0	0	0	1	1	
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2	A_1	A_2	b_i / a_{ij}^*
0	s_1	4	1	2	1	0	0	0	
1	A_1	3	3	1	0	0	1	0	
1	A_2	6	4	3	0	−1	0	1	
Z_j		$Z^* = 9$	7	4	0	−1	1	1	
$\Delta_j = c_j - z_j$			−7	−4	0	1	0	0	

من خلال الجدول أعلاه الحل الأساسي الأولي هو:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, s_1 = 4, s_2 = 0, A_1 = 3, A_2 = 6, Z = 9$$

3-نقوم في هذه الخطوة بتحسين الحل من خلال المراحل الآتية:

- **المتغير الداخل للأساس:** بما أننا في حالة دالة من نوع MIN فإن المتغير الداخل للأساس هو المتغير المقابل لأكبر قيمة بإشارة سالبة في صف $C_j - Z_j$ ، ومن خلال الجدول لدينا:

$$\text{MIN}(-7,-4)=-7$$

وهي القيمة المقابلة للمتغير x_1 وعليه المتغير الداخل للأساس هو المتغير x_1 .

- **المتغير الخارج من الأساس:** نقوم بقسمة الطرف الأيمن والمتمثلة بقيم b_i في العمود الثالث من الجدول على القيم المناظرة لها في العمود المحوري (المتغير الداخل) الموجبة فقط و غير معدومة، والمتغير الذي يقابل أصغر نسبة ممكنة $\min(\frac{b_i}{a_{ij}})$ هو المتغير الخارج من الأساس حيث:

$$\text{MIN}(4, 1, 3/2)=1$$

وعليه أصغر قيمة هي 1 وهي المقابلة للمتغير A_1 و منه هو المتغير الخارج من الأساس.

- **تحديد العنصر المحوري:** وهو نقطة تقاطع العمود المحوري بالصف المحوري ومنه هو القيمة (3).

C_j			0	0	0	0	1	1	
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2	A_1	A_2	b_i/a^*_{ij}
0	s_1	4	1	2	1	0	0	0	4
1	A_1	3	3	1	0	0	1	0	1
1	A_2	6	4	3	0	−1	0	1	3/2
Z_j		$Z^* = 9$	7	4	0	−1	1	1	
$\Delta_j = c_j - z_j$			−7	−4	0	1	0	0	

4-الانتقال إلى جدول جديد: نقوم بالانتقال إلى جدول جديد بإتباع المراحل التالية:

- استبدال المتغير الخارج من الأساس A_1 بالمتغير الداخل للأساس x_1 ، في حين تبقى المتغيرات الأخرى على حالها.
- ثم نقوم بقسمة جميع قيم الصف المحوري بدءا من قيمة bi إلى غاية آخر متغير في الجدول على العنصر المحوري (3) حيث يضم الصف القيم التالية:

(1,1,1/3,0,0,1/3,0)

وأيضا جعل كل قيم العمود المحوري صفرا ماعدا العنصر المحوري و العنصرين الذين ينتميان للسطر الأخير وقبله، ومنه نتحصل على الجدول التالي:

C_j			0	0	0	0	1	
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2	A_2	b_i / a_{ij}^*
0	s_1			0				
0	x_1	1	1	1/3	0	0	0	
1	A_2			0				
Z_j		$Z^* =$						
$\Delta_j = c_j - z_j$								

- ومن ثم نقوم بحساب باقي العناصر في الجدول باستخدام القاعدة:

العنصر الجديد=العنصر القديم-[(العنصر المقابل في الصف المحوري*العنصر المقابل في العمود المحوري)/العنصر المحوري]

- نقوم الآن بحساب قيم Z_j و قيمة Z وقيم $C_j - Z_j$ بنفس الطريقة التي وضحناها سابقا فنحصل على الجدول التالي:

C_j			0	0	0	0	1	
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2	A_2	b_i $/a_{ij}^*$
0	s_1	3	0	5/3	1	0	0	
0	x_1	1	1	1/3	0	0	0	
1	A_2	2	0	5/3	0	−1	−1	
Z_j		$Z^* = 2$	0	5/3	0	−1	−1	
$\Delta_j = c_j - z_j$			0	−5/3	0	1	1	

5-من خلال الجدول أعلاه الحل الجديد المتوصل إليه هو:

$$x_1 = 1, x_2 = 0, s_1 = 3, s_2 = 0, A_2 = 2, Z = 2$$

في الجدول أعلاه نلاحظ أنه هناك قيمة سالبة المقابلة للمتغير x_2 ، وكذلك قيمة Z لا تساوي الصفر وبالتالي نقوم بتحسين الحل مرة أخرى، ولكن من جهة أخرى نلاحظ أن قيمة دالة الهدف أقل من القيمة المتوصل إليها في الحل الأساسي الأولي.

6-نقوم بتحسين الحل مرة أخرى بنفس الخطوات السابق نحصل على الجدول الجديد التالي:

C_j			0	0	0	0
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2
0	s_1	1	0	0	1	1
0	x_1	3/5	1	0	0	1/5
0	x_2	6/5	0	1	0	−3/5
Z_j		$Z^* = 0$	0	0	0	0
$\Delta_j = c_j - z_j$			0	0	0	0

نلاحظ من خلال الجدول أعلاه أن قيمة Z=0 وكل المتغيرات الاصطناعية خرجت من الأساس، وهنا انتهت المرحلة الأولى وننتقل إلى المرحلة الثانية.

المرحلة الثانية: نأخذ الجدول الأخير للمرحلة الأولى كأول جدول للمرحلة الثانية مع إدخال معاملات دالة الهدف للبرنامج الخطي ثم نطبق بعدها طريقة السمبلكس حتى نصل إلى الحل الأمثل، ومنه نحصل على الجدول التالي:

C_j			4	1	0	0	
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2	b_i/a_{ij}^*
0	s_1	1	0	0	1	1	1
4	x_1	3/5	1	0	0	1/5	5
1	x_2	6/5	0	1	0	−3/5	/
Z_j		$Z^* = 18/5$	4	1	0	1/5	
$\Delta_j = c_j - z_j$			0	0	0	−1/5	

نلاحظ من خلال الجدول أعلاه أن هناك قيمة في صف $C_j - Z_j$ سالبة وهي القيمة المقابلة للمتغير s_2 ، ومنه الجدول ليس جدول الحل الأمثل لذا نقوم بتحسين الحل من خلال اتباع نفس الخطوات المتبعة سابقا في طريقة السمبلكس العادية، حيث نحصل على الجدول التالي:

C_j			4	1	0	0
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2
0	s_2	1	0	0	1	1
4	x_1	2/5	1	0	−1/5	0
1	x_2	9/5	0	1	3/5	0
Z_j		$Z^* = 17/5$	4	1	−1/5	0
$\Delta_j = c_j - z_j$			0	0	1/5	0

نلاحظ من خلال الجدول أعلاه أن كل قيم $C_j - Z_j$ موجبة أو معدومة وبما أننا في حالة MIN فإنه هو جدول الحل الأمثل، والحل الأمثل هو:

$$\mathbf{x_1^* = \frac{2}{5}, x_2^* = \frac{9}{5}, Z^* = 17/5}$$

وهو نفس الحل المتوصل إليه بطريقة M الكبيرة.

3-بعض الحالات الخاصة في البرمجة الخطية:

- **حالة التفكك (التفسخ):** يقصد بمشكلة التفسخ أنه في أحد مراحل الحل قبل الجدول النهائي نواجه مشكلة تكرار نفس الحلول والعودة إليها دون الوصول إلى الحل الأمثل، وقد ننتقل من حل متفكك إلى آخر دون تحسين الحل، وتحدث هذه الحالة إذا كان أحد متغيرات الأساس معدوما.
- **حالة تعادل قيم السطر الأخير $C_j - Z_j$:** عند تعادل القيم في السطر الأخير سواء في حالة MAX أو حالة MIN والتي من شأنها تحديد المتغير الذي يدخل للأساس، في هذه الحالة نختار المتغير الذي يدخل للأساس حسب القاعدتين التاليتين:

- إذا كان التعادل بين متغير أصلي ومتغير إضافي يتم اختيار المتغير الأصلي (الأساسي) لكي يدخل لمتغيرات الأساس.
- إذا كان التعادل بين متغيرين أصليين، أو متغيرين اضافيين يتم إختيار المتغير الذي له أكبر تأثير في دالة الهدف (المتغير الذي له أكبر معامل في دالة الهدف في حالة MAX والمتغير الذي له أصغر معامل في دالة الهدف في حالة MIN).

- **حالة وجود حلول بديلة:** تظهر هذه الحالة في جدول السمبلكس إذا كانت قيمة السطر الأخير $C_j - Z_j$ لمتغير أو أكثر من المتغيرات غير الأساسية معدومة، بحيث أن ادخالها إلى الأساس لا يؤثر في قيمة دالة الهدف.
- **حالة عدم وجود حلول:** تظهر هذه الحالة عند الوصول للحل الأمثل في جدول السمبلكس في حين نجد متغير اصطناعي أو أكثر في الحل الأساس وله قيمة.
- **حالة المشكلة غير محدودة:** تظهر هذه الحالة عند تحديد المتغير الخارج من الأساس، حيث عند قسمة قيم bi على قيم العمود المحوري تكون جميع القيم سالبة أو معدومة.

تمارين مقترحة:

التمرين الأول:

حل البرنامج الخطي التالي:

$$MAX(z) = 1/2x_1 + 2x_2$$
$$s/c$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 24$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 16$$
$$x_1 \leq 6$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

التمرين الثاني:

حل البرنامج الخطي التالي:

$$MAX(z) = 2x_1 + 5x_2 + 4x_3$$
$$s/c$$
$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 60$$
$$4x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 100$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

التمرين الثالث:

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$MAX(z) = 6x_1 + 4x_2 + 20x_3$$
$$^{s}/_{c}$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 5$$
$$x_1 + x_2 + 10x_3 \leq 1$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

المطلوب:

6-أكتب البرنامج على الشكل القياسي.

7-حل البرنامج باستعمال طريقة السمبليكس.

التمرين الرابع:

حل البرنامج الخطي التالي:

$$MAX(z) = 5x_1 + x_2 + 6x_3 + 2x_4$$
$$s/c$$
$$4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 44$$
$$8x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 36$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

التمرين الخامس:

ليكن لدينا الجدول التالي الذي يمثل أحد مراحل الحل الأمثل لبرنامج خطي:

C_j			10	...	8	0	0	0
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	x_3	....	....	....
0	....	100	1/2	0	1/2	1	-1/2	0
0	....	500	1/2	1	1/2	0	1/2	0
0	....	300	1/2	0	5/2	0	-3/2	1
Z_j		$Z^* = \cdots$	….	….	….	….	….	….
$\Delta_j = c_j - z_j$			….	….	….	….	….	….

المطلوب:

إكمال الجدول مع متابعة الحل حتى الوصول إلى الحل الأمثل.

التمرين السادس:

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$MIN(z) = 600x_1 + 1000x_2 + 1800x_3$$
$$s/c$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 10$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 12$$
$$x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 8$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

المطلوب:

1-أكتب البرنامج على الصيغة القياسية.

2-حل البرنامج باستخدام طريقة M الكبيرة وطريقة المرحلتين.

رابعا- المسألة الثنائية (النموذج المقابل، البرنامج الثنائي) DUAL :

إن من إحدى الخصائص المهمة للبرمجة الخطية هي صفة الثنائية حيث أن لكل حالة تعظيم للربح هناك حالة تقليل للنفقات والعكس، فالوجه الأول للمسألة يسمى بالمسألة الأولية PRIMAL والوجه الثاني المقابل يسمى بالمسألة الثنائية DUAL، ويتم اللجوء للمسألة الثنائية في حالة صعوبة حل المسألة الأولية ويمكن استخدام طريقة السمبلكس بحل المسألتين في آن واحد وهي ظاهرة تحوي على معاني اقتصادية مهمة.

1-مفهوم المسألة الثنائية (البرنامج الثنائي): هي عبارة عن نموذج معكوس للنموذج الأولي، يتم اللجوء إليه عندما يصعب حل المسألة الأولية، وكل نموذج أولي يقابله نموذج ثنائي، فإذا كان النموذج من نوع تعظيم الأرباح مثلا فإنه يقابله نموذج تدنئة التكاليف والعكس.

2-صياغة المسألة الثنائية:

2-1- تحديد المسألة الثنائية للصيغة القانونية: إن شكل البرنامج الخطي في حالة التعظيم في صيغته القانونية يكون كما يلي:

المسألة الأولية (البرنامج الأولي)

$$\begin{cases} Max(Z) = C\ X \\ s/c \\ AX \leq B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

البرنامج الثنائي الذي يقابل هذه المسألة هو:

المسألة الثنائية (البرنامج الثنائي)

$$\begin{cases} Min(W) = BY \\ S/C \\ A^t Y \geq C \\ Y \geq 0 \end{cases}$$

و لإيجاد المسألة الثنائية لأي برنامج أولي في صيغته القانونية نتبع الخطوات التالية:

1- تحويل صيغة دالة الهدف حيث إذا كانت MAX في المسألة الأولية تصبح MIN في المسألة الثنائية و العكس.

2- تتعاكس المتراجحات، بحيث المتراجحة أصغر أو تساوي في حالة MAX تتحول إلى أكبر أو تساوي في حالة MIN، و أكبر أو تساوي في حالة MIN تتحول إلى أصغر أو تساوي في حالة MAX.

3- اذا كانت متغيرات المسألة الأولية هي: $x_1, x_2, \dots x_n$ فإن متغيرات المسألة الثنائية هي: $y_1, y_2, \dots, y_m$ حيث m هي عدد القيود في المسألة الأولية.

4- مصفوفة معاملات المتغيرات في القيود للمسألة الثنائية هي منقول مصفوفة معاملات المتغيرات في قيود المسألة الأولية.

5- معاملات المتغيرات في دالة الهدف في المسألة الثنائية هي قيم الطرف الأيمن (b_i) في المسألة الأولية.

6- قيم الطرف الأيمن في المسألة الثنائية هي معاملات المتغيرات في دالة الهدف للمسألة الأولية.

7- تكون المتغيرات غير سالبة في كلتا المسألتين ما دام المسألة الأولية مكتوبة في صيغتها القانونية.

ملاحظة:

نظراً للارتباط بين المسألتين الأولية والثنائية فإنه بحل إحدى المسألتين نحصل على حل المسألة الأُخرى، فبدون حل المسألة الثنائية يمكن الحصول على حلها من واقع قراءة الصف الأخير في الجدول النهائي للمسألة الأولية، حيث نجد في جدول الحل الأمثل:

- القيم المقابلة لمتغيرات الفجوة في المسألة الأولية والتي تظهر في السطر الأخير تساوي قيم المتغيرات الرئيسية بنفس الترتيب للمسألة الثنائية بالقيمة المطلقة.
- القيم المقابلة لمتغيرات الفجوة في المسألة الثنائية والتي تظهر في السطر الأخير تساوي قيم المتغيرات الرئيسية بنفس الترتيب للمسألة الأولية بالقيمة المطلقة.

- قيم المتغيرات الحقيقية في المسألة الأولية والتي تظهر في عمود الثوابت، تساوي القيم المقابلة لمتغيرات الفجوة للمسألة الثنائية والتي تظهر في السطر الأخير من جدول الحل الأمثل بالقيمة المطلقة.
- قيم المتغيرات الحقيقية في المسألة الثنائية والتي تظهر في عمود الثوابت، تساوي القيم المقابلة لمتغيرات الفجوة للمسألة الأولية والتي تظهر في السطر الأخير من جدول الحل الأمثل بالقيمة المطلقة.
- قيمة دالة الهدف في الحل الأمثل للمسألتين تكون متساوية.

مثال(01): (مثال سابق) :ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{MAX(z) = 20x_1 + 30x_2 + 50x_3} \\
\boldsymbol{s/c} \\
\boldsymbol{x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 430} \\
\boldsymbol{3x_1 + 5x_2 \leq 460} \\
\boldsymbol{x_1 + 2x_3 \leq 420} \\
\boldsymbol{x_1, x_2, x_3 \geq 0}
\end{gathered}$$

المطلوب:

1-إيجاد البرنامج الثنائي (المسألة الثنائية) لهذا البرنامج الخطي.

2-استنتج الحل الأمثل للمسألة الثنائية.

الحل:

1-إيجاد المسألة الثنائية:

لدينا المسألة الأولية مكتوبة على في صيغتها القانونية اذا نتبع الخطوات السابقة لإيجاد المسألة الثنائية.

لدينا ثلاثة قيود في المسألة الأولية ومنه عدد المتغيرات في المسألة الثنائية هو ثلاثة ولتكن:

$\boldsymbol{Y_1, Y_2, Y_3}$.

- **دالة الهدف:** لدينا في المسألة الأولية دالة الهدف من نوع MAX، إذا سوف تكون دالة الهدف في المسألة الثنائية من نوع MIN، أما معاملات المتغيرات في دالة الهدف هي

الطرف الأيمن من القيود في المسألة الأولية وهي 430، 460، 420 على الترتيب، وعليه تكون دالة الهدف على الشكل التالي:

$$\boldsymbol{Min(w) = 430y_1 + 460y_2 + 420y_3}$$

- **القيود:** نعلم أن عدد القيود في المسألة الثنائية مساو لعدد المتغيرات في المسألة الأولية، وبما أنه لدينا ثلاث متغيرات في المسألة الأولية إذن ستكون هناك ثلاثة قيود في المسألة الثنائية، أما معاملات المتغيرات في المسألة الثنائية فهي منقول مصفوفة المعاملات في المسألة الأولية.

لدينا :

$$A = \begin{matrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{matrix} \rightarrow \mathrm{A}^{\mathrm{t}} = \begin{matrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{matrix}$$

نلاحظ هنا أن :

$$A = A^t$$

لأن المصفوفة متناظرة.

وعليه يكون الطرف الأيسر للقيود في المسألة الثنائية على الشكل التالي:

$$\boldsymbol{y_1 + 3y_2 + y_3}$$
$$\boldsymbol{3y_1 + 5y_2}$$
$$\boldsymbol{y_1 + 2y_3}$$

بما أن المسألة الأولية مكتوبة في صيغتها القانونية وهي من نوع MAX فإن إشارة المتراجحات تكون في المسألة الثنائية عكس إشارة المتراجحات في المسألة الأولية أي كلها أكبر أو يساوي.

وعليه تكون القيود على الشكل التالي:

$$\boldsymbol{y_1 + 3y_2 + y_3 \geq}$$
$$\boldsymbol{3y_1 + 5y_2 \geq}$$
$$\boldsymbol{y_1 + 2y_3 \geq}$$

وبالنسبة للطرف الأيمن للقيود في المسألة الثنائية فهي معاملات دالة الهدف في المسألة الأولية وهي 20، 30، 50 على التوالي.

وعليه تكون القيود في المسألة الثنائية في شكلها النهائي على النحو التالي:

$$\boldsymbol{y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 20}$$
$$\boldsymbol{3y_1 + 5y_2 \geq 30}$$

$$y_1 + 2y_3 \geq 50$$

إشارة المتغيرات:

تكون المتغيرات غير سالبة في كلتا المسألتين ما دام المسألة الأولية مكتوبة في صيغتها القانونية أي:

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

وعليه يكون البرنامج الخطي الثنائي في شكله النهائي على النحو التالي:

$$Min(w) = 430y_1 + 460y_2 + 420y_3$$
$$y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 20$$
$$3y_1 + 5y_2 \geq 30$$
$$y_1 + 2y_3 \geq 50$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

2-استنتاج الحل الأمثل للمسألة الثنائية:

الجدول التالي هو جدول الحل الأمثل للمسألة الأولية:

C_j			20	30	50	0	0	0
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
30	x_2	220/3	1/6	1	0	1/3	0	-1/6
0	s_2	280/3	13/6	0	0	-5/3	1	1/6
50	x_3	210	1/2	0	1	0	0	1/2
Z_j		$Z^* = 12700$	30	30	50	10	0	20
$\Delta_j = c_j - z_j$			-10	0	0	-10	0	-20

نعلم أن القيم المقابلة لمتغيرات الفجوة في المسألة الأولية والتي تظهر في السطر الأخير تساوي قيم المتغيرات الرئيسية بنفس الترتيب للمسألة الثنائية بالقيمة المطلقة، ومنه:

- القيمة المقابلة لمتغير الفجوة s_1 في المسألة الأولية هي (-10) وعليه قيمة المتغير الرئيسي y_1 في المسألة الثنائية تساوي القيمة المطلقة لـ (-10).

$$y_1 = |-10| = 10$$

- القيمة المقابلة لمتغير الفجوة s_1 في المسألة الأولية هي (0) وعليه قيمة المتغير الرئيسي y_2 في المسألة الثنائية تساوي صفر (0).

$$y_2 = 0$$

- القيمة المقابلة لمتغير الفجوة s_3 في المسألة الأولية هي (20−) وعليه قيمة المتغير الرئيسي y_3 في المسألة الثنائية تساوي القيمة المطلقة لـ (20−).

$$y_1 = |-20| = 20$$

- قيمة دالة الهدف في الحل الأمثل للمسألتين تكون متساوية، ومنه قيمة دالة الهدف للمسألة الثنائية تساوي 12700.

$$\mathrm{W} = 12700$$

وعليه الحل الأمثل للمسألة الثنائية هو:

$$\mathbf{y_1^* = 10, y_2^* = 0}, \boldsymbol{y_3^*} \mathbf{= 20, W^* = 12700}$$

مثال(02): ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\boldsymbol{MIN(z) = 2400x_1 + 1000x_2}$$
$$\boldsymbol{s/c}$$
$$\boldsymbol{3x_1 + 2x_2 \geq 20}$$
$$\boldsymbol{6x_1 + x_2 \geq 30}$$
$$\boldsymbol{x_1, x_2 \geq 0}$$

المطلوب: إيجاد النموذج المقابل لهذا البرنامج الخطي.

الحل:

لدينا المسألة الأولية مكتوبة على في صيغتها القانونية اذا نتبع الخطوات السابقة لايجاد المسألة الثنائية.

لدينا قيدين في المسألة الأولية ومنه عدد المتغيرات في المسألة الثنائية هو اثنان ولتكن:

.$\boldsymbol{Y_1}, \mathbf{Y_2}$

1. **دالة الهدف:** لدينا في المسألة الأولية دالة الهدف من نوع MIN، إذا سوف تكون دالة الهدف في المسألة الثنائية من نوع MAX، أما معاملات المتغيرات في دالة الهدف هي الطرف الأيمن من القيود في المسألة الأولية وهي 20، 30 على الترتيب، وعليه تكون دالة الهدف على الشكل التالي:

$$\boldsymbol{MAX(w) = 20y_1 + 30y_2}$$

2. **القيود:** نعلم أن عدد القيود في المسألة الثنائية مساو لعدد المتغيرات في المسألة الأولية، وبما أنه لدينا متغيرين في المسألة الأولية إذن سيكون هناك قيدين في المسألة الثنائية، أما معاملات المتغيرات في المسألة الثنائية فهي منقول مصفوفة المعاملات في المسألة الأولية.

لدينا :

$$A = \begin{matrix} 3 & 2 \\ 6 & 1 \end{matrix} \rightarrow \mathrm{A}^{\mathrm{t}} = \begin{matrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{matrix}$$

وعليه يكون الطرف الأيسر للقيود في المسألة الثنائية على الشكل التالي:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{3y_1 + 6y_2} \\ \boldsymbol{2y_1 + y_2} \end{gathered}$$

بما أن المسألة الأولية مكتوبة في صيغتها القانونية وهي من نوع MIN فإن إشارة المتراجحات تكون في المسألة الثنائية عكس إشارة المتراجحات في المسألة الأولية أي كلها أصغر أو يساوي.

وعليه تكون القيود على الشكل التالي:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{3y_1 + 6y_2 \leq} \\ \boldsymbol{2y_1 + y_2 \leq} \end{gathered}$$

وبالنسبة للطرف الأيمن للقيود في المسألة الثنائية فهي معاملات دالة الهدف في المسألة الأولية وهي 2400 ، 1000 على التوالي.

وعليه تكون القيود في المسألة الثنائية في شكلها النهائي على النحو التالي:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{3y_1 + 6y_2 \leq 2400} \\ \boldsymbol{2y_1 + y_2 \leq 1000} \end{gathered}$$

3. **إشارة المتغيرات:**

تكون المتغيرات غير سالبة في كلتا المسألتين ما دام المسألة الأولية مكتوبة في صيغتها القانونية أي:

$$\boldsymbol{y_1, y_2 \geq 0}$$

وعليه يكون البرنامج الخطي الثنائي في شكله النهائي على النحو التالي:

$$MAX(w) = 20y_1 + 30y_2$$
$$s/c$$
$$3y_1 + 6y_2 \leq 2400$$
$$2y_1 + y_2 \leq 1000$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

تحديد المسألة الثنائية للصيغة المختلطة: لإيجاد المسألة الثنائية للصيغ المختلطة باتباع الخطوات التالية:

- إذا كانت إشارة القيد في المسألة الأولية يساوي (=) فإننا نقوم بتعويض القيد بقيدين أحدهما أكبر أو يساوي و الآخر أصغر أو يساوي وذلك بغية كتابته على الصيغة القانونية.

مثلا إذا كان لدينا القيد:

$$x_1 + 2x_2 = 5$$

نقوم بتعويضه بالقيدين التاليين:

$$x_1 + 2x_2 \leq 5$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 5$$

ثم نقوم بضرب طرفي أحد القيدين في الإشارة (−) حسب نوع المسألة الأولية لدينا فإذا كانت من نوع MAX نضرب طرفي القيد الثاني في (−) لكي تصبح إشارة القيد أصغر أو يساوي، وإذا كانت من نوع MIN نقوم بضرب طرفي القيد الأول في (−) لكي تصبح إشارة القيد أكبر أو يساوي.

- إذا كانت المسألة الأولية من نوع MAX و إشارة القيد أكبر أو يساوي نقوم بضرب طرفي هذا القيد في الإشارة (−) بغية كتابته على الصيغة القانونية، والعكس أي إذا كانت المسألة الأولية من MIN وإشارة القيد أصغر أو يساوي فإننا نقوم بضرب طرفي القيد في الإشارة (−).
- بعد ذلك نتبع الخطوات المذكورة سابقا في ايجاد المسألة الثنائية للصيغة القانونية.

مثال:

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$MIN(z) = 4x_1 + x_2$$
$$s/c$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$
$$3x_1 + x_2 = 3$$
$$4x_1 + 3x_2 \geq 6$$
$$x_1, x_2 \geq$$

المطلوب: إيجاد المسألة الثنائية لهذا البرنامج الخطي.

الحل:

لدينا المسألة الأولية في صيغة مختلطة لذا سوف نقوم بكتابتها في صيغتها القانونية:

- المسألة الأولية من نوع MIN وإشارة القيد الأول أصغر أو يساوي لذا يجب جعل اشارته أكبر أو يساوي وذلك بضرب طرفيه في الاشارة (−)، فيصبح كما يلي:

$$-x_1 - 2x_2 \geq -4$$

- القيد الثاني عبارة عن مساواة لذا يتم تعويضه بالقيدين التاليين:

$$3x_1 + x_2 \geq 3 \ldots (1)$$
$$3x_1 + x_2 \leq 3 \ldots (2)$$

ثم نقوم بضرب طرفي القيد (2) في الاشارة (−) فيصبح كالآتي:

$$-3x_1 - x_2 \geq -3$$

وعلية المسألة الأولية في صيغتها القانونية تكون على الشكل التالي:

$$MIN(z) = 4x_1 + x_2$$
$$s/c$$
$$-x_1 - 2x_2 \geq -4$$
$$3x_1 + x_2 \geq 3$$
$$-3x_1 - x_2 \geq -3$$
$$4x_1 + 3x_2 \geq 6$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

وعليه المسألة الثنائية تكون على الشكل التالي:

$$MAX(w) = -4y_1 + 3y_2 - 3y_3 + 6y_4$$
$$s/c$$
$$-y_1 + 3y_2 - 3y_3 + 4y_4 \leq 4$$
$$-2y_1 + y_2 - y_3 + 3y_4 \leq 1$$
$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

تمارين مقترحة:

التمرين الأول:

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$MAX(z) = 6x_1 + 4x_2 + 20x_3$$
$$^{s}/_{c}$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 5$$
$$x_1 + x_2 + 10x_3 \leq 1$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

المطلوب :

1- حل البرنامج الخطي باستعمال طريقة السمبلكس.
2- أوجد المسألة الثنائية لهذا البرنامج الخطي.
3- استنتج الحل الأمثل للمسألة الثنائية.

التمرين الثاني:

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$MAX(z) = 5x_1 + 6x_2$$
$$^{s}/_{c}$$
$$x_1 + x_2 \leq 20$$
$$2x_1 + 4x_2 \leq 60$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

المطلوب :

1-أكتب البرنامج على الشكل الثنائي.

2-حل البرنامج الثنائي ثم استنتج الحل الأمثل للبرنامج الخطي الأولي.

التمرين الثالث:

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$MAX(z) = 10x_1 + 20x_2$$
$$^{s}/_{c}$$
$$5x_1 + 8x_2 \leq 60$$
$$x_1 \leq 8$$
$$x_2 \leq 3$$
$$x_1 \geq 6$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

المطلوب :

1-أكتب البرنامج الخطي في صيغته القانونية.

2- أكتب البرنامج على الشكل الثنائي.

خامسا– تحليل الأمثلية أو تحليل الحساسية:

يعتبر أسلوب تحليل الأمثلية أحد المزايا التي تقدمها السمبلكس وغير متاحة بالنسبة للطرق الأخرى، يهتم هذا الأسلوب بدراسة مدى صلاحية الحل، ومدى تأثره بالمتغيرات التي يتوقع حدوثها في النموذج سواء في ما يتعلق بالمدى القصير أو بالمدى الطويل، وذلك انطلاقا من الجدول الأخير المتضمن الحل الأمثل، ودون الرجوع لحل المسألة من جديد .

إن الشخص الذي يتخذ القرار في المؤسسة لا يمكنه أن يأخذ الحل الأمثل لأي نموذج من نماذج البرمجة الخطية هكذا وبصفة مطلقة، نظرا لما قد يحدث من ظروف تغير من أمثليته، لهذا لابد من معرفة ما هي التغيرات الممكنة، والتي يحتمل حدوثها في النموذج ، وإلى أي مدى يكون الحل الأمثل الذي توصل إليه صالحا في ظل هذه التغيرات.

في نموذج البرمجة الخطية توجد الكثير من المعطيات التي تؤثر على أمثلية الحل، فالتغيرات التي قد تحدث إما أن تكون في دالة الهدف أو في القيود الأساسية، فبالنسبة لهذه الأخيرة هناك متغيرين يحتمل تغيير أحدهما أو كلاهما، وهما إما الشطر الأول والذي يمثل المعاملات التقنية للمسألة وهي تلك المتعلقة بمعايير استهلاك أو استخدام الموارد المتاحة في المؤسسة وهذا التغيير مرتبط إلى حد ما بمستوى التطور التكنولوجي في العملية الإنتاجية، وكذلك باليقظة التكنولوجية في المؤسسة، أو الشطر الثاني من القيود و المتمثل في الموارد المتاحة في المؤسسة أو الظروف التي يتحقق في ظلها الهدف.

1- تغيير معاملات متغيرات القرار في دالة الهدف:

إن دراسة أمثلية الحل في هذه الحالة ينصب على تحديد المجالات التي تتغير فيها معاملات المتغيرات في دالة الهدف، أو بتعبير آخر تحديد الحد الأعلى والحد الأدنى لهذه المعاملات، بحيث ضمن هذه الحدود لا يتأثر الحل الأمثل ويبقى صالح، ولتحديد مدى أمثلية الح نتبع الخطوات التالية:

أ- في جدول السمبلكس للحل الأمثل نقوم باستبدال معامل المتغير الذي نبحث له عن مدى الأمثلية بمعامل مجهول ونرمز له بالرمز C_i حيث $(i = 1,2,3, \dots, n)$

ب-نعيد حساب صف Z_J وصف $C_j - \mathrm{Z_j}$.

ت–في صف $C_j - Z_j$ الجديد نقوم باختبار أمثلية الحل حيث يجب أن تكون جميع قيم $C_j - Z_j$ أصغر أو تساوي الصفر في حالة دالة الهدف من نوع MAX، أو أكبر أو تساوي الصفر في حالة دالة هدف من نوع MIN.

ث–يتم حل المتراجحات التي تكونت في الخطوة السابقة ومن نتيجة هذا الحل نحدد حدود المعامل C_i.

مثال (01): لدينا المثال السابق:

$$MAX(z) = 20x_1 + 30x_2 + 50x_3$$
$$s/c$$
$$x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 430$$
$$3x_1 + 5x_2 \leq 460$$
$$x_1 + 2x_3 \leq 420$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

والذي جدول حله الأمثل التالي:

C_j			20	30	50	0	0	0
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
30	x_2	220/3	1/6	1	0	1/3	0	-1/6
0	s_2	280/3	13/6	0	0	-5/3	1	1/6
50	x_3	210	1/2	0	1	0	0	1/2
Z_j		$Z^* = 12700$	30	30	50	10	0	20
$\Delta_j = c_j - z_j$			-10	0	0	-10	0	-20

المطلوب: تحديد مدى أمثلية الحل لمعاملي المتغيرين x_3, x_2.

الحل:

1–تحديد مدى الأمثلية لمعامل x_2

في جدول الحل الأمثل نقوم باستبدال معامل المتغير x_2 في دالة الهدف بمعامل آخر نرمز له بالرمز C_2 فنحصل على الجدول التالي:

C_j			20	C_2	50	0	0	0
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
C_2	x_2	220/3	1/6	1	0	1/3	0	-1/6
0	s_2	280/3	13/6	0	0	-5/3	1	1/6
50	x_3	210	1/2	0	1	0	0	1/2
Z_j		$Z^* =$	$\frac{C_2}{6}+25$	C_2	50	$C_2/3$	0	$\frac{-C_2}{6}+25$
$\Delta_j = c_j - z_j$			$-5-\frac{C_2}{6}$	0	0	$-C_2/3$	0	$\frac{C_2}{6}-25$

نقوم بتحقيق شروط أمثلية الحل الأمثل، وبما أننا في حالة MAX فيجب أن تكون جميع قيم $c_j - z_j$ سالبة أو معدومة، إذا تتكون لدينا المتراجحات التالية:

$$-5-\frac{C_2}{6} \le 0 \rightarrow C_2 \ge -30$$

$$-C_2/3 \le 0 \rightarrow C_2 \ge 0$$

$$\frac{C_2}{6} - 25 \le 0 \rightarrow C_2 \le 150$$

ومنه يمكن كتابة مدى الأمثلية لمعامل المتغير x_2 بالشكل التالي:

$$0 \le C_2 \le 150$$

2–تحديد مدى الأمثلية لمعامل x_3

في جدول الحل الأمثل نقوم باستبدال معامل المتغير x_3 في دالة الهدف بمعامل آخر نرمز له بالرمز C_3 فنحصل على الجدول التالي:

C_j			20	30	C_3	0	0	0
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
30	x_2	220/3	1/6	1	0	1/3	0	-1/6
0	s_2	280/3	13/6	0	0	-5/3	1	1/6
C_3	x_3	210	1/2	0	1	0	0	1/2
Z_j		$Z^* =$	$\frac{C_3}{2}+5$	30	C_3	10	0	$\frac{C_3}{2}-5$
$\Delta_j = c_j - z_j$			$-\frac{C_3}{2}+15$	0	0	-10	0	$-\frac{C_3}{2}+5$

نقوم بتحقيق شروط أمثلية الحل الأمثل، وبما أننا في حالة MAX فيجب أن تكون جميع قيم $c_j - z_j$ سالبة أو معدومة، إذا تتكون لدينا المتراجحتين التالية:

$$15 - \frac{C_3}{2} \leq 0 \to C_3 \geq 30$$

$$5 - \frac{C_3}{2} \leq 0 \to C_3 \geq 10$$

ومنه يمكن كتابة مدى الأمثلية لمعامل المتغير x_3 بالشكل التالي:

$$30 \leq C_3$$

2- **تأثير التغير في قيم الطرف الأيمن:**

2-1- أسعار الظل: تشير أسعار الظل إلى العوائد الإجمالية الناجمة عن إضافة جديدة من الموارد الموظفة في العملية الإنتاجية، وتتمثل أسعار الظل في القيم المقابلة لمتغيرات الفجوة في صف z_j في جدول الحل الأمثل.

ونميز ثلاث حالات لمتغيرات الفجوة وكل من هذه الحالات لها معناها الخاص: وهذه الحالات هي:

- قيم متغيرات الفجوة في عمود متغيرات الأساس، أي أن قيمة متغير الفجوة في الحل الأمثل، وهذا يعني أن هناك مقدار غير مستغل من مورد القيد الذي ينتمي إليه هذا المتغير وتسمى أيضا طاقة عاطلة.
- قيم متغيرات الفجوة المقابلة لمتغيرات القرار حيث تشير إلى مقدار التغير الذي يمكن أن يحدث في قيم متغيرا القرار في حالة حدوث تغير في مورد القيد الذي ينتمي إليه متغير الفجوة.
- القيم المقابلة لمتغير الفجوة في صف z_j وهذه القيم تشير إلى أسعار الظل، حيث أن زيادة قيمة مورد القيد الذي ينتمي إليه هذا المتغير بوحدة واحدة يؤدي إلى تغير قيمة دالة الهدف بقيمة متغير الفجوة.

ولإيجاد الكميات الجديدة عند إضافة مرد نتبع القاعدة التالية:

الكميات الجديدة = الكميات الأصلية + (مقدار التغير في كمية المورد i * القيم المقابلة لها في عمود s_i الممثل للمورد)

مثال: لدينا المثال السابق:

$$MAX(z) = 20x_1 + 30x_2 + 50x_3$$
$$s/c$$
$$x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 430$$
$$3x_1 + 5x_2 \leq 460$$
$$x_1 + 2x_3 \leq 420$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

والذي جدول حله الأمثل التالي:

C_j			20	30	50	0	0	0
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
30	x_2	220/3	1/6	1	0	1/3	0	-1/6
0	s_2	280/3	13/6	0	0	-5/3	1	1/6
50	x_3	210	1/2	0	1	0	0	1/2
Z_j		$Z^* = 12700$	30	30	50	10	0	20
$\Delta_j = c_j - z_j$			-10	0	0	-10	0	-20

المطلوب: تحديد كل من:

1-أسعار الظل للنموذج.

2-الطاقات العاطلة والموارد غير المستغلة.

3-مدى تأثير تغير الموارد على الطاقة الإنتاجية للنموذج.

الحل:

1-**تحديد أسعار الظل:** كما قلنا سابقا تتمثل أسعار الظل في القيم المقابلة لمتغيرات الفجوة في صف z_j في جدول الحل الأمثل، ومن خلال جدول الحل الأمثل لدينا:

- **متغير الفجوة** s_1 يقابله القيمة (10) في صف z_j .
- **متغير الفجوة** s_2 يقابله القيمة (0) في صف z_j .
- **متغير الفجوة** s_3 يقابله القيمة (20) في صف z_j .

ومنه القيم (10 ,0 , 20) تمثل قيم الظل للنموذج حيث أن :

- زيادة المورد الأول والذي قيمته 430 بوحدة واحدة يؤدي إلى زيادة الأرباح بـ 10 وحدات.
- زيادة المورد الثاني والذي قيمته 460 بوحدة واحدة يؤدي إلى زيادة الأرباح بـ 0 وحدة.

- زيادة المورد الثالث والذي قيمته 420 بوحدة واحدة يؤدي إلى زيادة الأرباح بـ 20 وحدة.

2-تحديد الطاقات العاطلة: تتمثل الطاقات العاطلة في قيمة متغير الفجوة الداخل في الأساس في جدول الحل الأمثل، حيث لدينا الحل الأمثل من خلال الجدول أعلاه:

$$\mathbf{x_1^* = 0, x_2^* = \frac{220}{3}, x_3^* = 210, s_1^* = 0, s_2^* = \frac{280}{3}, s_3^* = 0,}$$
$$\mathbf{Z^* = 12700}$$

لدينا المورد الثاني يحتوي على (280/3) غير مستعملة وغير داخلة في العملية الإنتاجية، لذا إضافة أي وحدة لهذا المورد لا تؤدي إلى زيادة الإنتاج بل على العكس تزيد الطاقة العاطلة بوحدة إضافية، فيجب على متخذ القرار تخفيض هذا المورد غير المستغل.

فيما يخص الموردان الأول والثالث قيم متغيري الفجوة المقابلة لهما معدومة $\mathbf{s_3^* = s_1^* = 0}$ وبالتالي جميع طاقات هذين الموردين مستغلة تماما.

3-تأثير تغير الموارد على الطاقة الإنتاجية للنموذج: كما ذكرنا سابقا يتم تحديد هذا التأثير من خلال قيم متغيرات الفجوة المقابلة لمتغيرات القرار في الأساس، حيث لدينا:

✓ **المورد الأول:**

- قيمة s_1^* المقابلة لـ x_2 هي (1/3) وهذا يعني أن زيادة المورد الأول بوحدة واحدة يؤدي إلى زيادة قيمة x_2 بـ 1/3وحدة.
- قيمة s_1^* المقابلة لـ x_3 هي (0) وهذا يعني أن زيادة المورد الأول بوحدة واحدة يؤدي إلى زيادة قيمة x_3 بـ 0 وحدة.

✓ **المورد الثاني:**

- قيمة s_2^* المقابلة لـ x_2 هي (0) وهذا يعني أن زيادة المورد الثاني بوحدة واحدة يؤدي إلى زيادة قيمة x_2 بـ 0وحدة.
- قيمة s_2^* المقابلة لـ x_3 هي (0) وهذا يعني أن زيادة المورد الثاني بوحدة واحدة يؤدي إلى زيادة قيمة x_3 بـ 0 وحدة.

✓ **المورد الثالث:**

- قيمة s_3^* المقابلة لـ x_2 هي $(-1/6)$ وهذا يعني أن زيادة المورد الثالث بوحدة واحدة يؤدي إلى نقصان قيمة x_2 بـ $1/6-$وحدة.
- قيمة s_3^* المقابلة لـ x_3 هي $(1/2)$ وهذا يعني أن زيادة المورد الثالث بوحدة واحدة يؤدي إلى زيادة قيمة x_3 بـ $1/2$ وحدة.

2-2-مدى الإمكانية: تهدف إلى تحديد الحد الأدنى والحد الأعلى لقيم الطرف الأيمن أي الموارد، والذي من شأنه أن يحافظ علي قيم أسعار الظل، وكذلك تمكننا من تحديد عدد الوحدات التي يمكننا إضافتها لأي مورد أو خفضها بدون أن يؤثر في سعر الظل الخاص بهذا المورد، ولإيجاد مدى الإمكانية نتبع الخطوات التالية:

- من خلال جدول الحل الأمثل نقوم بإيجاد مدى التغير في الطرف الأيمن للقيد ونرمز له بالرمز Δb_i حيث يساوي حاصل قسمة قيم الطرف الأيمن للقيود على القيم المقابلة لها في عمود متغير الفجوة التابع للقيد الذي نبحث له عن مدى الإمكانية لطرفه الأيمن.
- تحديد طرفي مدى الإمكانية باستخدام القاعدة التالية:

مدى الإمكانية = الكمية الأصلية للطرف الأيمن للقيد i− مدى التغير

ملاحظة: إذا كان متغير الفجوة ضمن الحل الأمثل فهذا يعني أنه توجد كمية إضافية من المورد الذي يتبع له هذا المتغير، وأن الحد الأعلى لهذا المورد غير محدود و الحد الأدنى يساوي الكمية الأصلية للمورد ناقص قيمة متغير الفجوة في جدول الحل الأمثل.

مثال: لدينا المثال السابق:

$$\boldsymbol{MAX(z) = 20x_1 + 30x_2 + 50x_3}$$
$$\boldsymbol{s/c}$$
$$\boldsymbol{x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 430}$$
$$\boldsymbol{3x_1 + 5x_2 \leq 460}$$
$$\boldsymbol{x_1 + 2x_3 \leq 420}$$
$$\boldsymbol{x_1, x_2, x_3 \geq 0}$$

والذي جدول حله الأمثل التالي:

C_j			20	30	50	0	0	0
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
30	x_2	220/3	1/6	1	0	1/3	0	-1/6
0	s_2	280/3	13/6	0	0	-5/3	1	1/6
50	x_3	210	1/2	0	1	0	0	1/2
Z_j		$Z^* = 12700$	30	30	50	10	0	20
$\Delta_j = c_j - z_j$			-10	0	0	-10	0	-20

المطلوب: تحديد مدى الإمكانية لموارد النموذج.

الحل:

1-مدى الإمكانية بالنسبة للمورد الأول b_1:

نتبع الخطوات السابق ذكرها:

- حساب مدى التغير Δb_1: نقوم بقسمة قيم عمود b_i على القيمة المقابلة لها لمتغير الفجوة s_1 فنحصل على النتائج التالية:

$$\Delta b_{11} = \frac{220}{3} * \frac{3}{1} = 220, \Delta b_{12} = \frac{280}{3} * \left(-\frac{3}{5}\right) = -26$$

- حساب حدود مدى الإمكانية $(\mathrm{R_i})$: نستخدم القاعدة السابق ذكرها (**مدى الإمكانية = الكمية الأصلية للطرف الأيمن للقيد i− مدى التغير**) فنحصل على النتائج التالية:

$$\mathrm{R}_1 = 430 - 220 = 210, \mathrm{R}_2 = 460 - (-26) = 486$$

وعليه يتم حصر مدى الإمكانية للمورد الأول بأكبر قيمة وأصغر قيمة كما يلي:

$$\mathbf{220 \leq b_1 \leq 486}$$

2-مدى الإمكانية بالنسبة للمورد الأول b_2:

بما أن متغير الفجوة المقابل لهذا المرد موجود ضمن الحل الأمثل فإن مدى الإمكانية له يحدد وفق القاعدة التي ذكرناها في الملاحظة السابقة:

$$\mathbf{460 - \frac{280}{3} \leq b_2 \leq} \text{غير محدود}$$

$$\mathbf{1100/3 \leq b_2 \leq} \text{غير محدود}$$

3-مدى الإمكانية بالنسبة للمورد الأولb_3:

- حساب مدى التغير Δb_3: نقوم بقسمة قيم عمود b_i على القيمة المقابلة لها لمتغير الفجوة s_3 فنحصل على النتائج التالية:

$$\Delta b_{31} = \frac{220}{3} * \left(-\frac{6}{1}\right) = -440, \Delta b_{32} = \frac{280}{3} * \left(\frac{6}{1}\right) = 560, \Delta b_{33} = 210 * \left(\frac{2}{1}\right) = 420$$

- حساب حدود مدى الإمكانية $(\mathrm{R_i})$:

$$\mathrm{R_1} = 430 - (-440) = 870, \mathrm{R_2} = 460 - (560) = -100, \mathrm{R_3} = 420 - (420) = 0$$

وعليه يتم حصر مدى الإمكانية للمورد الأول بأكبر قيمة وأصغر قيمة كما يلي:

$$\boldsymbol{0 \leq b_1 \leq 870}$$

تهمل القيمة السالبة.

تمارين مقترحة:

عد للتمارين التالية: التمرين(1) والتمرين(02) صفحة 69 والتمرين(6) صفحة 70

المطلوب:

1-تحديد مدى أمثلية الحل لمعاملات متغيرات القرار.

2-تحديد كل من:

- أسعار الظل للنموذج.
- الطاقات العاطلة والموارد غير المستغلة.
- مدى تأثير تغير الموارد على الطاقة الإنتاجية للنموذج.

الفصل الثالث: مسائل النقل

تعتبر مشكلة النقل حالة خاصة من مشاكل البرمجة الخطية، وتهدف إلى تقليل تكاليف نقل السلع والبضائع من مصادر مختلفة إلى جهات معينة، أي من المصادر الإنتاجية (مصانع، شركات ...الخ) إلى المراكز التسويقية (مناطق الاستهلاك)، بحيث تكون هذه التكاليف أقل ما يمكن، مع احترام ظروف الإنتاج (الطاقة الإنتاجية لكل مصنع) إذ أنه لا يمكن للمصنع أن يزود السوق بسلعة معينة أكبر من الطاقة المحددة له، كما نراعي أيضا احتياجات السوق، حيث لا يمكن تجاوز الكمية المحددة له.

من خلال ما سبق نستخلص أن مسألة النقل يجب أن تتوفر على العناصر التالية:

- ✓ مواقع توزيع (مصانع ، شركات، مستودعات) لكل منهم طاقة محددة.
- ✓ مواقع طلب (مراكز تجارية، مناطق استهلاك) لكل منهم طلب محدد.
- ✓ تكلفة نقل محددة من المصادر الإنتاجية إلى مناطق الاستهلاك.

1-عرض مسألة النقل:

يمكن أن نعرض مسألة النقل على الشكل النموذجي الآتي، لنفرض أن هناك كميات منتجة x_{i} $(\mathrm{i} = 1,2,3, \dots \mathrm{m})$ من منتج معين (قمح، زيت، بترول ...الخ) متوفرة في مصادر الانتاج S_{i} $(\mathrm{i} = 1,2,3, \dots \mathrm{m})$، نريد أن ننقلها إلى مراكز التسويق D_j $(\mathrm{i} = 1,2,3, \dots \mathrm{m})$ حيث يطلب مركز التسويق a_j الكمية b_j من هذا المنتج.

نرمز لتكلفة نقل الوحدة الواحدة من وحدة الانتاج i إلى المنطقة المراد تموينها j والمحددة محاسبيا بالرمز C_{ij} (تكون غير سالبة).

لنفرض أن : $a = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = b$ أي أن الكمية المطلوبة تساوي تماما الكمية المعروضة، ونقول في هذه الحالة أن مسألة النقل متوازنة ويمكن عرضها في الجدول التالي في الجدول التالي:

مناطق التسويق / مصادر الانتاج	D_1	D_2	……..	D_j	……..	D_n
S_1	C_{11}	C_{12}	……..	C_{1j}	……..	C_{1n}
S_2	C_{21}	C_{22}	……..	C_{2j}	……..	C_{2n}
. . .	. . .	. . .		. . .		. . .
S_i	C_{i1}	C_{i2}	……..	C_{ij}	……..	C_{in}
. . .	. . .	. . .		. . .		. . .
S_m	C_{m1}	C_{m2}	……..	C_{mj}	……..	C_{mn}

المطلوب في مسألة النقل هو تموين مناطق التسويق D_j بكل احتياجاتها من خلال مصادر الانتاج S_i، بحيث تكلفة النقل أصغر ما يمكن وفي حدود طاقات العرض الممكنة، فإذا كانت الكميات التي يمكن أن تمون بها المصدر i المنطقة j هي x_{ij} (تكون غير سالبة)، فإن الكميات التي يتم توجيهها من كل مصدر إلى كل منطقة ممثلة في الجدول التالي:

مناطق التسويق / مصادر الانتاج	D_1	D_2	....	D_j		D_n	الكميات المتوفرة
S_1	X_{11}	X_{12}	....	X_{1j}	....	X_{1n}	a_1
S_2	X_{21}	X_{22}	....	X_{2j}	....	X_{2n}	a_2
. . .	. . .	. . .		. . .		. . .	. . .
S_i	X_{i1}	X_{i2}	....	X_{ij}	....	X_{in}	a_i
. . .	. . .	. . .		. . .		. . .	
S_m	X_{m1}	X_{m2}	....	X_{mj}	....	X_{mn}	a_m
الكميات المطلوبة	b_1	b_2		b_j		b_n	

هذا الجدول مشابه لجدول التكاليف، إلا أنه الفرق بينهما يتمثل في أن قيم التكاليف c_{ij} من كل مصدر إنتاج إلى كل منطقة تسويق أو استهلاك معلومة، في حين أن الكميات X_{ij} مجهولة وهي التي نهدف إلى تحديدها من خلال حل مسألة النقل.

2-تكوين جدول مسألة النقل:

يمكن التعبير عن الإطار العام لمسألة النقل بالصيغة الجدولية التي تمثل مبدأ لإيجاد الحل الأساسي الأولي، بفضله نصل للحل النهائي الذي يحقق أقل تكلفة ممكنة، وتكون الصيغة الجدولية كالآتي:

مناطق التسويق / مصادر الانتاج	D_1	D_2	....	D_{j}		D_{n}	الكميات المتوفرة
S_1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	....	C_{1j} X_{1j}	....	C_{1n} X_{1n}	a_1
S_2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	....	C_{2j} X_{2j}	....	C_{2n} X_{2n}	a_2
. . .	. . .	. . .		. . .		. . .	. . .
S_{i}	C_{i1} X_{i1}	C_{i2} X_{i2}	....	C_{ij} X_{ij}	....	C_{in} X_{in}	a_{i}
. . .	. . .	. . .		. . .		. . .	. . .
S_{m}	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	....	C_{mj} X_{mj}	....	C_{mn} X_{mn}	a_{m}
الكميات المطلوبة	b_1	b_2		b_{j}		b_{n}	$a = b$

حيث: c_{ij}: تمثل تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المصدر i إلى المنطقة j.

x_{ij} : تمثل عدد الوحدات المنقولة من المصدر i إلى المنطقة j.

نلاحظ من خلال هذا الجدول أنه يلخص كامل مسألة النقل، حيث تظهر تكلفة نقل الوحدة الواحدة من كل مصدر إنتاج إلى كل منطقة تسويق(استهلاك) في أعلى كل خانة، في حين أن متغيرات المسألة وهي الكميات الموجهة من كل مصدر إلى كل منطقة تظهر أسفل الخانة وهي

القيم x_{ij} التي نحن بصدد البحث عنها، أما العمود أقصى اليمين يمثل الكميات القصوى التي يوفرها كل مصدر إنتاج، والسطر الأخير يمثل الكميات القصوى التي تطلبها كل منطقة استهلاك، لنسمي مصادر الإنتاج بالمنبع، كما نسمي مناطق التسويق أو الاستهلاك بالمصب.

3- النموذج الرياضي لمسألة النقل:

يتم تكوين الصيغة الرياضية لمسألة النقل كما يلي:

- **التكلفة الإجمالية:**

يمكن حسابها بالصيغة الرياضية التالية:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Z} = {} & \boldsymbol{x_{11}c_{11} + x_{12}c_{12} + \cdots + x_{1j}c_{1j} + \cdots x_{1n}c_{1n} + x_{21}c_{21} + x_{22}c_{22}} \\ & \boldsymbol{+ \cdots + x_{2j}c_{2j} + \cdots + x_{2n}c_{2n} + x_{i1}c_{i1} + x_{i2}c_{i2} + \cdots + x_{ij}c_{ij}} \\ & \boldsymbol{+ \cdots + x_{in}c_{in} + x_{m1}c_{m1} + x_{m2}c_{m2} + \cdots + x_{mj}c_{mj} + \cdots} \\ & \boldsymbol{+ x_{mn}c_{mn}} \end{aligned}$$

وتكتب هذه الصيغة اختصارا كما يلي:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} c_{ij}$$

- الكميات التي يعرضها كل منبع (مصدر انتاج):

المنبع1: $x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1j} + \cdots x_{1n} = a_1$

المنبع2: $x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2j} + \cdots x_{2n} = a_2$

.

.

المنبعi: $x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{ij} + \cdots x_{in} = a_i$

.

.

المنبعm: $x_{m1} + x_{m2} + \cdots + x_{mj} + \cdots x_{mn} = a_n$

وتكتب الكميات التي يعرضها كل منبع اختصارا كما يلي:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$$

- الكميات المطلوبة في كل مصب (منطقة تسويق):

المصب: $x_{11} + x_{21} + \cdots + x_{i1} + \cdots x_{m1} = b_1$

المصب2: $x_{12} + x_{22} + \cdots + x_{i2} + \cdots x_{m2} = b_2$

.

.

المصبj: $x_{1j} + x_{2j} + \cdots + x_{ij} + \cdots x_{mj} = b_i$

.

المصبn: $x_{1n} + x_{2n} + \cdots + x_{in} + \cdots x_{mn} = b_n$

وتكتب الكميات التي يطلبها كل مصب اختصارا كما يلي:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$$

كما قلنا سابقا أن الهدف من مسألة النقل هو تقليل التكاليف، وحسب هذا الافتراض فإن الصيغة الرياضية لمسألة النقل تكون كالتالي:

$$\begin{cases} MIN\ (Z) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} c_{ij} \\ {}^{s}/_{c} \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \\ \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \\ c_{ij} \geq 0 \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

ملاحظة: تحتوي مسائل النقل على ثلاث حالات رئيسية وهي:

- الكمية المعروضة تساوي الكمية المطلوبة (حالة التوازن)
- الكمية المعروضة أكبر من الكمية المطلوبة.
- الكمية المطلوبة أكبر من الكمية المعروضة.

مثال (01):

تقوم إحدى الشركات بإنتاج نوع واحد من الثلاجات، حيث تحتوي على ثلاثة مصانع (المصنع الأول، المصنع الثاني، المصنع الثالث) في مواقع مختلفة، كما أن لديها أربعة مراكز تسويقية (المركز التسويق1، المركز التسويقي2، المركز التسويقي3، المركز التسويق4).

- الطاقة الإنتاجية القصوى للمصنع الأول تقدر بـ (100) وحدة، أما المصنع الثاني (500) وحدة، أما المصنع الثالث (400) وحدة.
- الكمية المطلوبة في المركز التسويقي 1 تقدر بـ (200) وحدة، أما المركز التسويقي2 (100) وحدة، المركز التسويقي3 (400)، أما المركز التسويقي4 تقدر الكمية المطلوبة فيه بـ (300).
- تكاليف نقل كل وحدة منتجة من كل مصنع إلى كل مركز تسويقي ملخصة في الجدول التالي:

م. التسويقي4	م. التسويقي3	م. التسويقي2	م. التسويقي1	
2000	1000	3000	2000	المصنع الأول
3000	2500	0	1500	المصنع الثاني
5000	4500	4000	3500	المصنع الثالث

تهدف الشركة إلى البحث عن أفضل طريقة لتموين مختلف المراكز التسويقية بمنتجها بأقل تكلفة ممكنة.

المطلوب: أولا: بين أن هذه المسألة تخضع لمسائل النقل.

ثانيا: شكل جدول المسألة.

الحل:

أولا:

- تهدف الشركة إلى ايجاد الكميات الواجب توجيهها من كل مصنع إلى كل مركز تسويقي بحيث تكون التكاليف أقل ما يمكن، وعليه يمكن تشكيل دالة الهدف كما يلي:

$$MIN\ (Z) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} x_{ij}c_{ij}$$

- مجموع الطلب يساوي مجموع العرض:

$$\textstyle\sum_{i=1}^{3} a_i = 100 + 500 + 400 = 1000$$

$$\sum_{j=1}^{4} b_j = 200 + 100 + 400 + 300 = 1000$$

إذا لدينا الكمية المطلوبة = الكمية المعروضة وهي كميات غير سالبة وعليه من1 و2 نقول أن المسألة تخضع لمسائل النقل.

ثانيا:

يمكن تلخيص المسألة في جدول مسألة النقل التالي:

مراكز التسويق / المصنع	م. التسويقي1	م. التسويقي2	م. التسويقي3	م. التسويقي4	الكميات المعروضة
المصنع الأول	2000	3000	1000	2000	100
المصنع الثاني	1500	0	2500	3000	500
المصنع الثالث	3500	4000	4500	5000	400
الكميات المطلوبة	200	100	400	300	1000

4-طرق حل مسألة النقل:

بعد الانتهاء من إعداد الصيغة الجدولية نقوم بالبحث عن الحل الأساسي الأولي، لنصل انطلاقا منه للحل الأمثل، ويمكن استخدام إحدى الطرق التالية:

- طريقة الزاوية الشمالية الغربية
- طريقة أقل التكاليف.
- طريقة فوجل التقريبية.

4-1- طريقة الزاوية الشمالية الغربية:

تعد هذه الطريقة من أبسط الأساليب الرياضية لحل مسائل النقل، إلا أنه في معظم الحالات لا تحقق الحل الأمثل لمسألة النقل، ويمكن شرح آلية عمل هذه الطريقة كما يلي:

نبدأ بتعيين أعلى كمية مسموح بها من بين العرض والطلب للمتغير x_{11} (أقصى الركن الشمالي الغربي من الجدول) أي أن $x_{11} = \min(\mathrm{a}_1, \mathrm{b}_1)$، ثم نستبعد الصف (العمود) المتحقق، لنساوي بقية المتغيرات في هذا الصف (العمود) بالصفر، بعد تعديل كميات العرض و الطلب لكل الصفوف و الأعمدة غير المستبعدة نعين الخلية المقبولة العظمى للعنصر الأول غير المستبعد في الصف (العمود) الجديد، وتكتمل هذه العملية عندما يكون بالضبط صف واحد أو عمود واحد غير مستبعد.

ما يعاب على طريقة الزاوية الشمالية الغربية هو عدم تحقيق الاستفادة من التكلفة القليلة المتوفرة في مسألة النقل عند تلبية احتياجات مراكز الطلب.

الحالة الأولى: الكمية المعروضة مساوية للكمية المطلوبة.

مثال:

لنقم بحل المثال السابق:

1/ كتابة البرنامج الرياضي للمسألة:

- دالة الهدف:

$$MIN\ (Z) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} x_{ij} c_{ij}$$

❖ دوال العرض:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 100$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 500$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 400$$

❖ **دوال الطلب:**

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 200$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 100$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 400$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 300$$

❖ شرط التوازن:

$$\sum_{j=1}^{4} b_j = \sum_{i=1}^{3} a_i = 1000$$

❖ شرط عدم السلبية:

$$x_{ij}, c_{ij} \geq 0$$

2/ إيجاد الحل الأساسي الأولي بطريقة الزاوية الشمالية الغربية:

ننطلق في تعبئة الخلايا من الخانة 1.1 وهي التي تقع في الشمال الغربي، حيث نراعي أن نصب أقل قيمة بين الطلب والعرض بالإضافة إلى الانتباه للقيم الهامشية بعد كل عملية.

مراكز التسويق / المصنع	م. التسويقي1	م. التسويقي2	م. التسويقي3	م. التسويقي4	العرض
المصنع الأول	2000 / 100	3000 / 0	1000 / 0	2000 / 0	100
المصنع الثاني	1500 / 100	0 / 100	2500 / 300	3000 / 0	500
المصنع الثالث	3500 / 0	4000 / 0	4500 / 100	5000 / 300	400
الطلب	200	100	400	300	1000

- نبدأ من الخانة الشمالية الغربية (العلوية اليسرى) ونضع فيها أكبر قيمة ممكنة $x_{11} = \min(a_1, b_1) = 100$، ثم ننتقل إلى الخانة على اليمين ونضع فيها أكبر قيمة ممكنة ولكن لا يمكننا لأن $(a_1 = 100)$ أستهلكت في الخانة الأولى، لذا نضع في الخانات المتبقية في السطر الأول القيمة صفر.
- بعدها ننتقل إلى السطر الثاني نبدأ بالخانة على اليسار ونضع فيها القيمة $x_{21} = 100$ ، ثم ننتقل إلى اليمين ونضع فيها أكبر قيمة ممكنة $(x_{22} = 100)$، لننتقل مرة أخرى إلى اليمين ونضع فيها أكبر قيمة ممكنة $(x_{23} = 300)$، أما الخانة المتبقية التي على اليمين نضع فيها صفر لأن $b_2 = 500$ أستهلكت كلها في الخانات الثلاثة الأولى من هذا السطر.
- ثم ننتقل إلى السطر الثالث ونضع صفر في الخانات الثلاثة الأولى لأن كل القيم $b_1 = 200$، $b_2 = 100$، $b_3 = 300$ أستهلكت في الخانات أعلاها، أما الخانة الرابعة نضع فيها أكبر قيمة ممكنة هي $(x_{34} = 400)$.

نلاحظ أن عدد الخانات المشغولة مساو لعدد الحلول الممكنة وهو:

$$m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$$

نحسب قيمة التكلفة الإجمالية للنقل:

$$z = 100 * 2000 + 100 * 1500 + 100 * 0 + 300 * 2500 + 100 * 4500 + 300 * 5000$$

$$z = 3050000$$

الحالة الثانية: الكمية المعروضة غير مساوية للكمية المطلوبة.

أولا: العرض أكبر من الطلب

في حالة ما إذا كان العرض أكبر من الطلب $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$ نقوم بإضافة عمود وهمي والتكاليف من أي منبع إلى هذا المصب نفترض أنها معدومة.

مثال 02: لدينا أربعة مجمعات سكنية c_4, c_3, c_2, c_1 تستمد حاجياتها المقدرة بـ 1، 1.2، 1.4، 1.6 مليون لتر من الماء، من ثلاث خزانات هي s_3, s_2, s_1 التي يمكنها ضخ 1.4، 2.4، 2.5 مليون لتر من الماء يوميا.

تكلفة نقل كل مليون لتر من الماء من كل خزان إلى كل مجمع سكني موضحة في الجدول التالي:

	c_1	c_2	c_3	c_4
s_1	1	1.5	3	4
s_2	2	1	4	1
s_3	3	0.5	1	2

المطلوب: البحث عن أفضل طريقة لتموين المجمعات السكنية باحتياجاتها من الماء من الخزانات الثلاث.

الحل: نلاحظ أن الكمية المعروضة في الخزانات الثلاث تساوي 6.3 وهي أكبر من الكمية المطلوبة، لذا نقوم بإضافة مصب وهمي بحيث تكون الكمية المطلوبف فية مساوية للفرق وهي 1.1 مليون لتر.

م سكني / الخزان	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	الكميات المعروضة
s_1	(1) 1	(1.5) 0.4	(3) 0	(4) 0	(0) 0	1.4
s_2	(2) 0	(1) 0.8	(4) 1.4	(1) 0.2	(0) 0	2.4
s_3	(3) 0	(0.5) 0	(1) 0	(2) 1.4	(0) 1.1	2.5
الكميات المطلوبة	1	1.2	1.4	1.6	1.1	6.3

- نبدأ من الخانة الشمالية الغربية (العلوية اليسرى) ونضع فيها أكبر قيمة ممكنة $x_{11} = \min(s_1, c_1) = 1$، ثم ننتقل إلى الخانة على اليمين ونضع فيها أكبر قيمة ممكنة وهي 0.4، مرة أخرى ننتقل للخانة علي اليمين ونضع فيها أكبر قيمة ممكنة ولكن لا يمكننا لأن $(s_1 = 1.4)$ أستهلكت كلها، لذا نضع في الخانتين المتبقيتين في السطر الأول القيمة صفر،

أما باقي الخانات في عمود المجمع السكني الأول c_1 نضع فيها أصفار لأن الكمية المطلوبة من طرف هذا المجمع تم توفيرها كلها من الخزان الأول s_1.

- بعدها ننتقل إلى السطر الثاني نبدأ بالخانة على اليسار ونضع فيها أكبر قيمة ممكنة $(x_{21} = 0.8)$ ، ثم ننتقل إلى اليمين ونضع فيها أكبر قيمة ممكنة $(x_{22} = 1.4)$، لننتقل مرة أخرى إلى اليمين ونضع فيها أكبر قيمة ممكنة $(x_{23} = 0.2)$، أما الخانة المتبقية التي على اليمين نضع فيها صفر لأن $s_2 = 2.4$ أستهلكت كلها في الخانات الثلاثة الأولى من هذا السطر(أي نفاذ الكمية المعروضة لدي الخزان الثاني)، أما الخانات المتبقية في العمود الثاني و الثالث نضع فيها أصفار لأن الكمية المطلوبة من المجمع السكني الثالث والثاني تم تلبيتها كلها.
- ثم ننتقل إلى السطر الثالث ونضع أكبر كمية ممكنة في الخانة (s_3, c_4) وهي 1.4 والتي تعتبر الكمية المطلوبة المتبقية للمجمع السكني الرابع c_4، بعدها ننتقل للخانة على اليمين ونضع فيها أكبر كمية ممكنة وهي 1.1.

نلاحظ أن عدد الخانات المشغولة مساو لعدد الحلول الممكنة وهو:

$$m + n - 1 = 3 + 5 - 1 = 7$$

نحسب قيمة التكلفة الإجمالية للنقل:

$$z = 1 * 1 + 0.4 * 1.5 + 0.8 * 1 + 1.4 * 4 + 0.2 * 1 + 1.4 * 2 + 1.1 * 0$$
$$z = 13.2$$

ثانيا: العرض أصغر من الطلب

في حالة ما إذا كان العرض أصغر من الطلب $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ نقوم بإضافة سطر وهمي والتكاليف من أي منبع إلى هذا المصب نفترض أنها معدومة.

ونتبع نفس الخطوات السابقة من أجل إيجاد الحل للطريقة السابقة والطرق التي سنتعرف عليها.

4-2- طريقة أقل تكلفة:

تعد هذه الطريقة أفضل من طريقة الزاوية الشمالية الغربية لأنها تعمل على مبدأ أن التكاليف هي العنصر المهم في مسألة النقل، فهي تهدف إلى إيجاد حل أولي ممكن عبر تخفيض تكلفة النقل، و الأسلوب المتبع في هذه الطريقة هو كالتالي:

- تحديد الخانة ذات التكلفة الأقل في الجدول (عندما تكون التكلفة متساوية نختار عشوائيا).
- تعبئة الخانة المختارة بأكبر كمية ممكنة حيث تستوفي الشرط $x_{ij} = \min(a_i, b_j)$.
- ننتقل إلى الخانة الأعلى مباشرة من الخانة السابقة وتعبئتها بأكبر قيمة ممكنة، ونواصل نفس العملية حتى يتم حذف جميع الصفوف والأعمدة.

مثال(01): لدينا المثال رقم (01)

مراكز التسويق / المصنع	م. التسويقي1	م. التسويقي2	م. التسويقي3	م. التسويقي4	الكميات المعروضة
المصنع الأول	2000 0	3000 0	1000 100	2000 0	100
المصنع الثاني	1500 200	0 100	2500 200	3000 0	500
المصنع الثالث	3500 0	4000 0	4500 100	5000 300	400
الكميات المطلوبة	200	100	400	300	1000

- نلاحظ أن أقل تكلفة في الجدول هي 0 وهي تقابل المصنع الثاني و المركز التسويقي 2، لذا نقارن ما هو متوفر في المصنع الثاني، وما يحتاجه المركز التسويقي 2، ثم نختار أقل الكميتين ونخصصها لهذه للخانة، إذا أصغر كمية هي 100 نصبها في الخانة ذات التكلفة

الأقل، أما باقي الخانات في عمود المركز التسويقي 2 نضع فيها أصفار لأن الكمية المطلوبة من طرف هذا المركز تم توفيرها كلها.

- ثم نبحث عن أقل تكلفة ضمن الخانات المتبقية، وهي الخانة المقابلة للمصنع الأول والمركز التسويقي 3 والتي تكلفتها 1000 ونضع فيها أقل كمية وهي 100، أما باقي الخانات في سطر المصنع الأول نضع فيها أصفار لأن الكمية المتوفرة في المصنع الأول تم استهلاكها كلها.
- التكلفة الأقل التالية هي 1500 وتقع في الخانة المقابلة للمصنع الثاني والمركز التسويقي 1 نصب أقل الكميتين وهي 200، أما باقي الخانات في عمود المركز التسويقي 1 نضع فيها أصفار لأن الكمية المطلوبة من طرف هذا المركز تم توفيرها كلها.
- التكلفة الأقل التالية هي 2500 وتقع في الخانة المقابلة للمصنع الثاني والمركز التسويقي 3 نصب أقل الكميتين وهي 200 (المتبقية لدى المصنع الثاني)، أما باقي الخانات في سطر المصنع الثاني وهي الخانة الأخيرة نضع فيها صفر لأن الكمية المتوفرة في المصنع الثاني تم استهلاكها كلها.
- التكلفة الأقل التالية هي 4500 وتقع في الخانة المقابلة للمصنع الثالث والمركز التسويقي 3 نصب أقل الكميتين وهي 100(الكمية المطلوبة المتبقية للمركز التسويقي 3).
- الخانة المتبقية ذات 4500 المقابلة للمصنع الثالث والمركز التسويقي 4 نصب أقل الكميتين وهي 300(الكمية المطلوبة المتبقية للمركز التسويقي 3)، أما باقي الخانات في سطر المصنع الثالث فيها صفر لأن الكمية المتوفرة في المصنع الثالث تم استهلاكها كلها.

نلاحظ أن عدد الخانات المشغولة مساو لـ :

$$\mathrm{m} + \mathrm{n} - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$$

وتكون تكلفة النقل وفق الحل المبدئي الذي حصلنا عليه بطريقة أقل تكلفة هي:

$$z = 100 * 1000 + 200 * 1500 + 100 * 0 + 200 * 2500 + 100 * 4500 + 300 * 5000$$

$$z = 2850000$$

مثال (02):

لدينا مثال سابق:

م.السكني الخزان	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	العرض
s_1	1 0.3	1.5	3	4	0 1.1	1.4
s_2	2 0.7	1	4 0.1	1 1.6	0	2.4
s_3	3	0.5 1.2	1 1.3	2	0	2.5
الطلب	1	1.2	1.4	1.6	1.1	1000

نلاحظ أن عدد الخانات المشغولة مساو لـ :

$$\mathrm{m+n-1=3+5-1=7}$$

وتكون تكلفة النقل وفق الحل المبدئي الذي حصلنا عليه بطريقة فوجل التقريبية هي:

$$z = 0.3 * 1 + 1.1 * 0 + 0.7 * 2 + 0.1 * 4 + 1.6 * 1 + 1.2 * 0.5 + 1.3 * 1$$

$$z = 5.6$$

4-3- طريقة فوجل التقريبية:

تعتبر هذه الطريقة أفضل من الطريقتين السابقتين في معظم الحالات، لما تتميز به من القدرة على الوصول للحل الأمثل، أو الحل الأقرب من الحل الأمثل، إلا أنها تحتاج إلى عمليات حسابية أطول من الطريقتين السابقتين.

تتلخص خطوات ايجاد الحل الأساسي الأولي بهذه الطريقة كالآتي:

- ✓ التحقق من توازن العرض والطلب (العرض = الطلب).

- ✓ حساب الفرق بين أقل كلفتين في كل صف وفي كل عمود، وتأشير هذه الفروق على جانبي جدول الحل. تحت كل عمود وبجانب كل صف (تسمى الغرامة أو تكلفة الفرصة البديلة أو الجزاء)
- ✓ تحديد الصف أو العمود الذي يمتلك أكبر فرق في التكلفة (أعلى جزاء) ليبدأ الحل به.
- ✓ اختيار الخانة ذات التكلفة الأقل في ذلك الصف أو العمود.
- ✓ في الخانة التي أختيرت في الخطوة السابقة نقارن احتياجات المركز مع ما هو متوفر في المصدر لنأخذ القيمة الأقل.
- ✓ نعيد حساب الفرق مرة أخرى لكل من الأعمدة والصفوف ونكرر العملية السابقة إلى أن نلبي احتياجات جميع مراكز الطلب من المصادر المتاحة.

ملاحظة:

- في حالة وجود قيمتين عظميتين من أرقام فوجل فإننا نقارن بين التكلفتين الدنيويتين، ونختار أقل تكلفة مقابلة ونشبع الخانة التي تنتمي إليها، وفي حالة ما إذا كانت هاتين التكلفتين أيضا متساويتين نختار الخانة التي تحوي أكبر قيمة .
- عند حساب أرقام فوجل ووجود تكلفتين دنيوتين فإننا نحسب أيضا الفرق بينهما وهو الصفر .

مثال(01):

لدينا المثال السابق:

مراكز التسويق / المصنع	م. التسويقي1	م. التسويقي2	م. التسويقي3	م. التسويقي4	الكميات المعروضة	1	2	3	4
المصنع الأول	2000	3000	1000 100	2000	100	1000	1000	/	/
المصنع الثاني	1500 100	0 100	2500 300	3000	500	1500	1000	1000	1500
المصنع الثالث	3500 100	4000	4500	5000 300	400	500	1000	1000	1500
الكميات المطلوبة	200	100	400	300	1000				
1	500	3000	1500	1000					
2	500	/	1500	1000					
3	2000	/	2000	2000					
4	2000	/	/	2000					

نلاحظ أن عدد الخانات المشغولة مساو لـ :

$$m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$$

وتكون تكلفة النقل وفق الحل المبدئي الذي حصلنا عليه بطريقة فوجل التقريبية هي:

$$z = 100 * 1000 + 100 * 1500 + 100 * 0 + 300 * 2500 + 100 * 3500 + 300 * 5000$$

$$z = 2850000$$

مثال (02):

لدينا المثال السابق:

المجمع السكني الخزان	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	العرض	1	2	3
s_1	1 0.3	1.5	3	4	0 1.1	1.4	1	1	1
s_2	2 0.7	1 0.1	4	1 1.6	0	2.4	1	1	1
s_3	3	0.5 1.1	1 1.4	2	0	2.5	0.5	0.5	0.5
الطلب	1	1.2	1.4	1.6	1.1				
1	1	0.5	2	1	0				
2	1	0.5	/	1	0				
3	1	0.5	/	/	0				

نلاحظ أن عدد الخانات المشغولة مساو لـ :

$$\mathrm{m} + \mathrm{n} - 1 = 3 + 5 - 1 = 7$$

وتكون تكلفة النقل وفق الحل المبدئي الذي حصلنا عليه بطريقة فوجل التقريبية هي:

$$z = 0.3 * 1 + 1.1 * 0 + 0.7 * 2 + 0.1 * 1 + 1.6 * 1 + 1.1 * 0.5 + 1.4 * 1$$

$$z = 5.35$$

5-اختبار أمثلية الحل:

نعلم أن الحل الذي توصلنا إليه يعتبر حلا أوليا ممكنا، ويحتمل أن لا يكون هو الحل الأمثل للمسألة، ولاختبار أن الحل أمثليا يتم اختبار الخلايا الفارغة التي لم تستخدم في الحل لمعرفة إمكانية استخدامها وأثر ذلك في تخفيض التكاليف، وهناك عدة طرق يمكن استخدامها سنتطرق إلى طريقتين هما طريقة التخطي وطريقة التوزيع المعدلة.

5-1- طريقة التخطي:

تتعامل هذه الطريقة مع الخلايا الخارجة عن الحل، والتي من المرجح أنها تقوم بتدنئة التكاليف الكلية عند إدخالها في الحل الأساسي، لذا وجب ايجاد قيم التكاليف الحدية لكل خلية غير داخلة في الحل.

مثال(01):

لدينا المثال السابق، نحاول اختبار أمثلية الحل الأولي، جدول الحل الأساسي هو:

- نبدأ بالخانة (2.1) نحسب التكلفة الحدية : هذه الخانة غير داخلة في الحل، فإذا قمنا بتعبئة وحدة واحدة فيها فإنه يحدث اختلال في شروط توازن المسألة، لأن مجموع العرض في السطر الأول يصبح 101 وهو أكبر من 100، وأيضا مجموع الطلب في العمود الثاني يصبح 101 بدلا من 100، لذا وجب طرح طرح القيمة −1 من الخانة (2.2) إلا أن هذ الطرح يؤدي إلى اختلال في السطر الثاني إذ يصبح مجموع العرض 499 بدلا من 500 لذا نضيف القيمة 1 إلى الخانة (1.2) ، وهذا الطرح أيضا يؤدي بدوره إلى اختلال في العمود الأول فيصبح مجمع الطلب 201 بدلا من 200 ولمعالجة هذا الاختلال نطرح القيمة −1 من الخانة (1.1) وهكذا يحصل التوازن في المسألة، وبصفة عامة يجب أن نضيف ونطرح القيمة 1 على مدار المسار الموضحة في الجدول أدناه.

نرمز للتكلفة الحدية بالرمز δ_{ij} إذا نقوم بحساب التكلفة الحدية للخلية (2.1) δ_{12} ولجميع الخانات الخارجة من الحل الأساسي.

- التكلفة الحدية للخانة (2.1):

مراكز التسويق / المصنع	م. التسويقي1	م. التسويقي2	م. التسويقي3	م. التسويقي4	العرض
المصنع الأول	-1 · 2000 · 100	+1 · 3000 · 0	1000 · 0	2000 · 0	100
المصنع الثاني	+1 · 1500 · 100	-1 · 0 · 100	2500 · 300	3000 · 0	500
المصنع الثالث	3500 · 0	4000 · 0	4500 · 100	5000 · 300	400
الطلب	200	100	400	300	1000

$$\delta_{12} = +1 * (3000) - 1 * (0) + 1 * (1500) - 1 * (2000) = +2500$$

- التكلفة الحدية للخانة (3.1):

مراكز التسويق / المصنع	م. التسويقي1	م. التسويقي2	م. التسويقي3	م. التسويقي4	العرض
المصنع الأول	1- 2000 100	3000 0	1+ 1000 0	2000 0	100
المصنع الثاني	1+ 1500 100	0 100	1- 2500 300	3000 0	500
المصنع الثالث	3500 0	4000 0	4500 100	5000 300	400
الطلب	200	100	400	300	1000

$$\delta_{13} = +1 * (1000) - 1 * (2500) + 1 * (1500) - 1 * (2000) = -2000$$

- التكلفة الحدية للخانة (4.1):

مراكز التسويق / المصنع	م. التسويقي1	م. التسويقي2	م. التسويقي3	م. التسويقي4	العرض
المصنع الأول	1- 2000 100	3000 0	1000 0	1+ 2000 0	100
المصنع الثاني	1+ 1500 100	0 100	1- 2500 300	3000 0	500
المصنع الثالث	3500 0	4000 0	1+ 4500 100	1- 5000 300	400
الطلب	200	100	400	300	1000

$$\delta_{14} = +1 * (2000) - 1 * (5000) + 1 * (4500) - 1 * (2500) + 1 * (1500) - 1 * (2000) = -1500$$

- التكلفة الحدية للخانة (4.2):

مراكز التسويق / المصنع	م. التسويقي1	م. التسويقي2	م. التسويقي3	م. التسويقي4	العرض
المصنع الأول	2000 / 100	3000 / 0	1000 / 0	2000 / 0	100
المصنع الثاني	1500 / 100	0 / 100	1- 2500 / 300	1+ 3000 / 0	500
المصنع الثالث	3500 / 0	4000 / 0	1+ 4500 / 100	1- 5000 / 300	400
الطلب	200	100	400	300	1000

$$\delta_{24} = +1 * (3000) - 1 * (5000) + 1 * (4500) - 1 * (2500) = 0$$

- التكلفة الحدية للخانة (1.3):

مراكز التسويق / المصنع	م. التسويقي1	م. التسويقي2	م. التسويقي3	م. التسويقي4	العرض
المصنع الأول	2000 / 100	3000 / 0	1000 / 0	2000 / 0	100
المصنع الثاني	1- 1500 / 100	0 / 100	1+ 2500 / 300	3000 / 0	500
المصنع الثالث	1+ 3500 / 0	4000 / 0	1- 4500 / 100	5000 / 300	400
الطلب	200	100	400	300	1000

$$\delta_{31} = +1 * (3500) - 1 * (1500) + 1 * (2500) - 1 * (4500) = 0$$

- التكلفة الحدية للخانة (2.3):

مراكز التسويق / المصنع	م. التسويقي1	م. التسويقي2	م. التسويقي3	م. التسويقي4	العرض
المصنع الأول	2000 100	3000 0	1000 0	2000 0	100
المصنع الثاني	1500 100	1- 0 100	1+ 2500 300	3000 0	500
المصنع الثالث	3500 0	1+ 4000 0	1- 4500 100	5000 300	400
الطلب	200	100	400	300	1000

$$\delta_{32} = +1 * (4000) - 1 * (0) + 1 * (2500) - 1 * (4500) = +2000$$

نلاحظ وجود قيم سالبة في قيم التكلفة الحدية المحسوبة، إذا هذا الحل لا يعتبر الأمثل يعني أنه توجد خانة إذا أدخلناها في النموذج ستعمل على تخفيض التكاليف بمقدار 2000 للوحدة الواحدة و هي الخانة (3.1).

نعدل النموذج بإدخال الخانة (3.1) والتي تحمل أكبر قيمة حدية سالبة (−2000)، نتبع في هذا التعديل عدة مراحل:

أولا: نحدد الزوايا السالبة للخانة التي سندخلها (الخانات السالبة هي التي تحمل رقم −1)

ثانيا: نختار أقل قيمة من الخانات السالبة وهي حسب مثالنا 100.

ثالثا: نضيف ونطرح 100 من الخانات الأربع حسب الاشارة + أو −.

وعليه يكون الجدول الحل الأمثل كما يلي:

مراكز التسويق / المصنع	م. التسويقي1	م. التسويقي2	م. التسويقي3	م. التسويقي4	العرض
المصنع الأول	2000 0	3000 0	1000 100	2000 0	100
المصنع الثاني	1500 200	0 100	2500 200	3000 0	500
المصنع الثالث	3500 0	4000 0	4500 100	5000 300	400
الطلب	200	100	400	300	1000

$$z = 100 * 1000 + 200 * 1500 + 100 * 0 + 200 * 2500 + 100 * 4500 + 300 * 5000$$

$$z = 2850000$$

ونلاحظ أنه نفس الحل الأساسي المتحصل عليه بطريقة التكلفة الدنيا.

ملاحظة: في مثالنا هذا نلاحظ أنه لدينا حلين أمثلين أعطانا نفس الحل، وهما الحل المتحصل عليه بطريقة أقل تكلفة، وكذا الحل المتحصل عليه بطريقة فوجل التقريبية.

مثال(02):

في مثالنا السابق: لدينا جدول الحل الأساسي هذه المرة بطريقة أقل تكلفة

م.السكني / الخزان	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	العرض
s_1	1 0.3	1.5	3	4	0 1.1	1.4
s_2	2 0.7	1	4 0.1	1 1.6	0	2.4
s_3	3	0.5 1.2	1 1.3	2	0	2.5
الطلب	1	1.2	1.4	1.6	1.1	6.3

نستخدم طريقة التخطي:

- نبدأ بالخانة (2.1) نحسب التكلفة الحدية :

م.السكني / الخزان	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	العرض
s_1	1−	1	0.3	1+	1.5	3	4	0	1.1	1.4
s_2	1+	2	0.7	1	1−	4	0.1	1	1.6	0	2.4
s_3	3	1−	0.5	1.2	1+	1	1.3	2	0	2.5
الطلب	1	1.2	1.4	1.6	1.1	6.3

$$\delta_{12} = +1 * (1.5) - 1 * (0.5) + 1 * (1) - 1 * (4) + 1 * (2) - 1 * (1) = -1.5$$

- التكلفة الحدية للخانة (3.1):

م.السكني / الخزان	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	العرض
s_1	1−	1	0.3	1.5	1+	3	4	0	1.1	1.4
s_2	1+	2	0.7	1	1−	4	0.1	1	1.6	0	2.4
s_3	3	0.5	1.2	1	1.3	2	0	2.5
الطلب	1	1.2	1.4	1.6	1.1	6.3

$$\delta_{13} = +1 * (3) - 1 * (4) + 1 * (2) - 1 * (1) = 0$$

- التكلفة الحدية للخانة (4.1):

م.السكني الخزان	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	العرض
s_1	1− 1 0.3	1.5	3	1+ 4	0 1.1	1.4
s_2	1+ 2 0.7	1	4 0.1	1− 1 1.6	0	2.4
s_3	3	0.5 1.2	1 1.3	2	0	2.5
الطلب	1	1.2	1.4	1.6	1.1	6.3

$$\delta_{14} = +1 * (4) - 1 * (1) + 1 * (2) - 1 * (1) = 4$$

- التكلفة الحدية للخانة (2.2):

م.السكني الخزان	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	العرض
s_1	1 0.3	1.5	3	4	0 1.1	1.4
s_2	2 0.7	1+ 1	1− 4 0.1	1 1.6	0	2.4
s_3	3	1− 0.5 1.2	1+ 1 1.3	2	0	2.5
الطلب	1	1.2	1.4	1.6	1.1	6.3

$$\delta_{22} = +1 * (1) - 1 * (4) + 1 * (1) - 1 * (0.5) = -2.5$$

- التكلفة الحدية للخانة (5.2):

م.السكني الخزان	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	العرض
s_1	1+ 1 0.3	1.5	3	4	1− 0 1.1	1.4
s_2	1− 2 0.7	1	4 0.1	1 1.6	1+ 0	2.4
s_3	3	0.5 1.2	1 1.3	2	0	2.5
الطلب	1	1.2	1.4	1.6	1.1	6.3

$$\delta_{25} = +1 * (0) - 1 * (2) + 1 * (1) - 1 * (0) = -1$$

– التكلفة الحدية للخانة (1.3):

م.السكني الخزان	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	العرض
s_1	1 0.3	1.5	3	4	0 1.1	1.4
s_2	1− 2 0.7	1	1+ 4 0.1	1 1.6	0	2.4
s_3	1+ 3	0.5 1.2	1− 1 1.3	2	0	2.5
الطلب	1	1.2	1.4	1.6	1.1	6.3

$$\delta_{31} = +1 * (3) - 1 * (2) + 1 * (4) - 1 * (1) = 4$$

– التكلفة الحدية للخانة (4.3):

م.السكني الخزان	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	العرض
s_1	1 0.3	1.5	3	4	0 1.1	1.4
s_2	2 0.7	1	1+ 4 0.1	1− 1 1.6	0	2.4
s_3	3	0.5 1.2	1− 1 1.3	1+ 2	0	2.5
الطلب	1	1.2	1.4	1.6	1.1	6.3

$$\delta_{34} = +1 * (2) - 1 * (1) + 1 * (4) - 1 * (1) = 4$$

- التكلفة الحدية للخانة (5.3):

م.السكني الخزان	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	العرض
s_1	1+ 1 0.3	1.5	3	4	1− 0 1.1	1.4
s_2	1− 2 0.7	1	1+ 4 0.1	1 1.6	0	2.4
s_3	3	0.5 1.2	1− 1 1.3	2	1+ 0	2.5
الطلب	1	1.2	1.4	1.6	1.1	6.3

$$\delta_{35} = +1 * (0) - 1 * (1) + 1 * (4) - 1 * (2) + 1 * (1) - 1 * (0) = 2$$

نلاحظ وجود قيم سالبة في قيم التكلفة الحدية المحسوبة، إذا هذا الحل لا يعتبر الأمثل يعني أنه توجد خانة إذا أدخلناها في النموذج ستعمل على تخفيض التكاليف بمقدار 2.5 للوحدة الواحدة و هي الخانة (2.2).

نعدل النموذج بإدخال الخانة (2.2) والتي تحمل أكبر قيمة حدية سالبة (−2.5)، نتبع في هذا التعديل عدة مراحل:

أولا: نحدد الزوايا السالبة للخانة التي سندخلها (الخانات السالبة هي التي تحمل رقم −1)

ثانيا: نختار أقل قيمة من الخانات السالبة وهي حسب مثالنا 0.1.

ثالثا: نضيف ونطرح 0.1 من الخانات الأربع حسب الاشارة + أو −.

وعليه يكون الجدول الحل الأمثل كما يلي:

م.السكني الخزان	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	العرض
s_1	1 0.3	1.5	3	4	0 1.1	1.4
s_2	2 0.7	1 0.1	4 0	1 1.6	0	2.4
s_3	3	0.5 1.1	1 1.4	2	0	2.5
الطلب	1	1.2	1.4	1.6	1.1	6.3

$$z = 0.3 * 1 + 1.1 * 0 + 0.7 * 2 + 0.1 * 1 + 1.6 * 1 + 1.1 * 0.5 + 1.4 * 1$$
$$z = 5.35$$

ونلاحظ أنه نفس الحل الأساسي المتحصل عليه بطريقة فوجل التقريبية.

5−2− طريقة التوزيع المعدل:

تقوم هذه الطريقة على فروض أن U_i تعبر عن الأسطر و V_j تعبر عن الأعمدة، وتعتمد هذه الطريقة على مرحلتين هما:

- **المرحلة الأولى:** في هذه المرحلة نتعامل مع القيم الداخلة في الحل الأساسي ونحل المعادلات $U_i + V_j = C_{ij}$، ونفترض أن U_i لأول معادلة معدوم ثم نجد قيم U_i، و قيم V_j الداخلة في الحل.
- **المرحلة الثانية:** في هذه المرحلة نتعامل مع القيم الخارجة من الحل الأساسي ونجد القيم الحدية حيث يعبر عنها بالعلاقة التالية: $\boldsymbol{\delta_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j}$

مثال:

في مثالنا السابق:

لدينا جدول الحل الأساسي بطريقة الزاوية الشمالية الغربية

مراكز التسويق / المصنع	م. التسويقي1	م. التسويقي2	م. التسويقي3	م. التسويقي4	العرض
المصنع الأول	2000 / 100	3000 / 0	1000 / 0	2000 / 0	100
المصنع الثاني	1500 / 100	0 / 100	2500 / 300	3000 / 0	500
المصنع الثالث	3500 / 0	4000 / 0	4500 / 100	5000 / 300	400
الطلب	200	100	400	300	1000

نستخدم طريقة التوزيع المعدل لاختبار الحل الأساسي:

المرحلة الأولى:

في هذه المرحلة نتعامل مع الخلايا الداخلة في الحل ونفترض أن $U_1 = 0$

$$\boldsymbol{U_1 + V_1 = 2000 \rightarrow U_1 = 0, V_1 = 2000}$$

$$\boldsymbol{U_2 + V_1 = 1500 \rightarrow U_2 = -500, V_1 = 2000}$$

$$\boldsymbol{U_2 + V_2 = 0 \rightarrow U_2 = -500, V_2 = 500}$$

$$\boldsymbol{U_2 + V_3 = 2500 \rightarrow U_2 = -500, V_3 = 3000}$$

$$\boldsymbol{U_3 + V_3 = 4500 \rightarrow U_3 = 1500, V_1 = 3000}$$

$$\boldsymbol{U_3 + V_4 = 5000 \rightarrow U_3 = 1500, V_4 = 3500}$$

المرحلة الثانية: في هذه المرحلة نتعامل مع الخلايا الخارجة من الحل.

$U_i.V_j$	$\boldsymbol{\delta_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j}$	δ
$U_1.V_2$	3000−0−500	2500
$U_1.V_3$	1000−0−3000	−2000
$U_1.V_4$	2000−0−3500	−1500
$U_2.V_4$	3000+500−3500	0
$U_3.V_1$	3500−1500−2000	0
$U_3.V_2$	4000−1500−3500	−1000

نلاحظ وجود قيم سالبة في قيم التكلفة الحدية المحسوبة، إذا هذا الحل لا يعتبر الأمثل يعني أنه توجد خانة إذا أدخلناها في النموذج ستعمل على تخفيض التكاليف بمقدار 2000 للوحدة الواحدة و هي الخانة $(U_1.V_3)$.

نعدل النموذج بإدخال الخانة $(U_1.V_3)$ والتي تحمل أكبر قيمة حدية سالبة (−2000)، نتبع في هذا التعديل عدة مراحل:

أولا: نحدد الزوايا السالبة للخانة التي سندخلها (الخانات السالبة هي التي تحمل رقم −1)

مراكز التسويق / المصنع	م. التسويقي1	م. التسويقي2	م. التسويقي3	م. التسويقي4	العرض
المصنع الأول	2000 − 100	3000 0	1000 + 0	2000 0	100
المصنع الثاني	1500 + 100	0 100	2500 − 300	3000 0	500
المصنع الثالث	3500 0	4000 0	4500 100	5000 300	400
الطلب	200	100	400	300	1000

ثانيا: نختار أقل قيمة من الخانات السالبة وهي حسب مثالنا 100.

ثالثا: نضيف ونطرح 100 من الخانات الأربع حسب الاشارة + أو −.

وعليه يكون الجدول الحل الأمثل كما يلي:

مراكز التسويق / المصنع	م. التسويقي1	م. التسويقي2	م. التسويقي3	م. التسويقي4	العرض
المصنع الأول	2000 0	3000 0	1000 100	2000 0	100
المصنع الثاني	1500 200	0 100	2500 200	3000 0	500
المصنع الثالث	3500 0	4000 0	4500 100	5000 300	400
الطلب	200	100	400	300	1000

ونلاحظ أنه نفس الحل الأساسي المتحصل عليه بطريقة التكلفة الدنيا.

ملاحظة:

نلاحظ أن هذه الطريقة أعطت لنا نفس النتائج المتوصل إليها عندما استعملنا طريقة التخطي، إلا أنه هذه الطريقة تعتبر أوجز من الطريقة السابقة.

مثال (02):

في مثالنا السابق:

لدينا جدول الحل الأساسي هذه المرة بطريقة أقل تكلفة

م.السكني / الخزان	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	العرض
s_1	1 / 0.3	1.5	3	4	0 / 1.1	1.4
s_2	2 / 0.7	1	4 / 0.1	1 / 1.6	0	2.4
s_3	3	0.5 / 1.2	1 / 1.3	2	0	2.5
الطلب	1	1.2	1.4	1.6	1.1	6.3

نستخدم طريقة التوزيع المعدل لاختبار الحل الأساسي:

المرحلة الأولى:

في هذه المرحلة نتعامل مع الخلايا الداخلة في الحل ونفترض أن $U_1 = 0$

$$\boldsymbol{U_1 + V_1 = 1 \rightarrow U_1 = 0, V_1 = 1}$$

$$\boldsymbol{U_1 + V_5 = 0 \rightarrow U_1 = 0, V_5 = 0}$$

$$\boldsymbol{U_2 + V_1 = 2 \rightarrow U_2 = 1, V_1 = 1}$$

$$\boldsymbol{U_2 + V_3 = 4 \rightarrow U_2 = 1, V_3 = 3}$$

$$U_2+V_4=1 \rightarrow U_2=1, V_4=0$$

$$U_3+V_2=0.5 \rightarrow U_3=-2, V_2=2.5$$

$$U_3+V_3=1 \rightarrow U_3=-2, V_3=3$$

المرحلة الثانية: في هذه المرحلة نتعامل مع الخلايا الخارجة من الحل.

$U_i.V_j$	$\boldsymbol{\delta_{ij}=C_{ij}-U_i-V_j}$	δ
$U_1.V_2$	1.5−0−2.5	−1.5
$U_1.V_3$	3−0−3	0
$U_1.V_4$	4−0−0	4
$U_2.V_2$	1−1−2.5	−2.5
$U_2.V_5$	0−1−0	−1
$U_3.V_1$	3+2−1	4
$U_3.V_4$	2+2−0	4
$U_3.V_5$	0+2−0	2

نلاحظ وجود قيم سالبة في قيم التكلفة الحدية المحسوبة، إذا هذا الحل لا يعتبر الأمثل يعني أنه توجد خانة إذا أدخلناها في النموذج ستعمل على تخفيض التكاليف بمقدار 2.5 للوحدة الواحدة و هي الخانة $(U_2.V_2)$.

نعدل النموذج بإدخال الخانة $(U_2.V_2)$ والتي تحمل أكبر قيمة حدية سالبة (−2.5)، نتبع في هذا التعديل عدة مراحل:

أولا: نحدد الزوايا السالبة للخانة التي سندخلها (الخانات السالبة هي التي تحمل رقم −1)

م.السكني / الخزان	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	العرض
s_1	1 0.3	1.5	3	4	0 1.1	1.4
s_2	2 0.7	1+ 1	1- 4 0.1	1 1.6	0	2.4
s_3	3	1- 0.5 1.2	1+ 1 1.3	2	0	2.5
الطلب	1	1.2	1.4	1.6	1.1	6.3

ثانيا: نختار أقل قيمة من الخانات السالبة وهي حسب مثالنا 100.

ثالثا: نضيف ونطرح 0.1 من الخانات الأربع حسب الاشارة + أو −.

وعليه يكون الجدول الحل الأمثل كما يلي:

م.السكني / الخزان	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	العرض
s_1	1 0.3	1.5	3	4	0 1.1	1.4
s_2	2 0.7	1 0.1	4 0	1 1.6	0	2.4
s_3	3	0.5 1.1	1 1.4	2	0	2.5
الطلب	1	1.2	1.4	1.6	1.1	6.3

$$z = 0.3 * 1 + 1.1 * 0 + 0.7 * 2 + 0.1 * 1 + 1.6 * 1 + 1.1 * 0.5 + 1.4 * 1$$
$$z = 5.35$$

ونلاحظ أنه نفس الحل الأساسي المتحصل عليه بطريقة فوجل التقريبية.

ملاحظة: نلاحظ أن كل من طريقة التخطي وطريقة التوزيع المعدل أعطتا نفس النتائج.

حالة خاصة في مسائل النقل– حالة التفكك: نعني بحالة التفكك أن المتغيرات الداخلة في الحل الأساسي لا تساوي $m+n-1$ و الذي هو شرط أساسي لإيجاد مسارات الحل، لذا نلجأ إلى التحايل وذلك بوضع خلية تصورية (أو أكثر حسب الحالة) داخلة في الحل الأساسي ونفترض قيمتها تساوي **ε** (حيث أن هذه القيمة تؤول للصفر)، ثم نبحث عن الحل الأمثل، وفي النهاية نهملها باعتبارها قيمة مساعدة فقط، ويتم ذلك سواء حصل التفكك في جدول الحل الأساسي الأولي أو جداول الحل الموالية.

مثال: (نفس المثال 01 مع بعض التعديل)

تقوم إحدى الشركات بإنتاج نوع واحد من الثلاجات، حيث تحتوي على ثلاثة مصانع (المصنع الأول، المصنع الثاني، المصنع الثالث) في مواقع مختلفة، كما أن لديها أربعة مراكز تسويقية (المركز التسويق1، المركز التسويقي2، المركز التسويقي3، المركز التسويق4).

- الطاقة الإنتاجية القصوى للمصنع الأول تقدر بـ (100) وحدة، أما المصنع الثاني (500) وحدة، أما المصنع الثالث (400) وحدة.
- الكمية المطلوبة في المركز التسويقي 1 تقدر بـ (200) وحدة، أما المركز التسويقي2 (100) وحدة، المركز التسويقي3 (300)، أما المركز التسويقي4 تقدر الكمية المطلوبة فيه بـ (400).
- تكاليف نقل كل وحدة منتجة من كل مصنع إلى كل مركز تسويقي ملخصة في الجدول التالي:

	م. التسويقي1	م. التسويقي2	م. التسويقي3	م. التسويقي4
المصنع الأول	2000	3000	1000	2000
المصنع الثاني	1500	0	2500	3000
المصنع الثالث	3500	4000	4500	5000

تهدف الشركة إلى البحث عن أفضل طريقة لتموين مختلف المراكز التسويقية بمنتجها بأقل تكلفة ممكنة.

الحل:

لنستعمل طريقة أقل تكلفة

الكميات المعروضة	م. التسويقي4	م. التسويقي3	م. التسويقي2	م. التسويقي1	مراكز التسويق / المصنع
100	2000	1000 100	3000	2000	المصنع الأول
500	3000	2500 200	0 100	1500 200	المصنع الثاني
400	5000 400	4500	4000	3500	المصنع الثالث
1000	400	300	100	200	الكميات المطلوبة

نلاحظ أنه عندنا وصولنا لتشبيع الخانة (4.3) التي تنتمي إليها التكلفة 5000، نجد أن السطر والعمود يتشبعان في آن واحد، و عدد المتغيرات الداخلة في الحل الأساسي هي 5 في حين أنه من المفروض أن عدد المتغيرات الداخلة في الحل الأساسي هو $m+n-1=6$، وهذا ما يحيلنا على حل متفكك، لذا نفترض بقاء قيمة صغيرة موجبة **ε** تؤول للصفر كعرض للمصنع الثالث ويتم التعامل معها كأنها قيمة عادية موجبة، وبهذا يصبح لدينا عدد المتغيرات في الحل مساو لـ $m+n-1=6$.

الكميات المعروضة	م. التسويقي4	م. التسويقي3	م. التسويقي2	م. التسويقي1	مراكز التسويق / المصنع
100	2000	1000 100	3000	2000	المصنع الأول
500	3000	2500 200	0 100	1500 200	المصنع الثاني
400	5000 400	4500	4000	3500 **ε**	المصنع الثالث
1000	400	300	100	200	الكميات المطلوبة

و الآن نختبر الحل إذا كان أمثلا أم هو قابل للتحسين ونستخدم طريقة التوزيع المعدل.

المرحلة الأولى:

في هذه المرحلة نتعامل مع الخلايا الداخلة في الحل ونفترض أن $U_1 = 0$

$$\boldsymbol{U_1 + V_3 = 1000 \rightarrow U_1 = 0, V_3 = 1000}$$

$$\boldsymbol{U_2 + V_1 = 1500 \rightarrow U_2 = 500, V_1 = 0}$$

$$\boldsymbol{U_2 + V_2 = 0 \rightarrow U_2 = 1500, V_2 = -1500}$$

$$\boldsymbol{U_2 + V_3 = 2500 \rightarrow U_2 = 1500, V_3 = 1000}$$

$$\boldsymbol{U_3 + V_1 = 3500 \rightarrow U_3 = 3500, V_1 = 0}$$

$$\boldsymbol{U_3 + V_4 = 5000 \rightarrow U_3 = 3500, V_4 = 1500}$$

المرحلة الثانية: في هذه المرحلة نتعامل مع الخلايا الخارجة من الحل.

$U_i.V_j$	$\boldsymbol{\delta_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j}$	δ
$U_1.V_1$	2000−0−0	2000
$U_1.V_2$	3000−0+1500	4500
$U_1.V_4$	2000−0−1500	500
$U_2.V_4$	3000−1500−1500	0
$U_3.V_2$	4000−3500+1500	2000
$U_3.V_3$	4500−3500−1000	0

نلاحظ عدم وجود قيم سالبة في قيم التكلفة الحدية المحسوبة، إذا جدول الحل هذا يعتبر حلا أمثلا، وتهمل القيمة ε.

تمارين مقترحة:

التمرين الأول:

ترغب شركة إنتاج الاسمنت بنقل منتجاتها من أماكن الإنتاج (المصانع) إلى أماكن الطلب، فإذا تقدمت إليها إحدى شركات النقل بالجدول التالي والذي يوضح تكلفة نقل الطن الواحد من مناطق الإنتاج إلى أماكن الطلب.

م.الطلب 4	م. الطلب 3	م. الطلب 2	م. الطلب 1	
40	50	50	70	المصنع الأول
80	40	40	80	المصنع الثاني
30	60	60	100	المصنع الثالث

وإذا علمت أن:

- الطاقة الإنتاجية القصوى للمصنع الأول تقدر بـ 1000 طن، أما المصنع الثاني 1500طن، أما المصنع الثالث 2500 وحدة.
- الكمية المطلوبة في م. الطلب 1 تقدر بـ 1200 طن، أما م. الطلب2 تقدر بـ 1500 طن، و م .الطلب 3 تقدر بـ 1300 طن أما م. الطلب 4 تقدر الكمية المطلوبة فيه بـ 1000 طن.

تهدف الشركة إلى البحث عن أفضل طريقة لتموين مختلف أماكن الطلب بمنتجها بأقل تكلفة ممكنة.

المطلوب: أولا: بين أن هذه المسألة تخضع لمسائل النقل.

ثانيا: شكل جدول المسألة.

ثالثا: حل المسألة باستخدام طريقة فوجل التقريبية وطريقة أقل تكلفة.

رابعا:اختبر أمثلية الحل باستخدام طريقة التخطي.

التمرين الثاني:

أوجد الحل لمسألة النقل في ضوء معطيات التكاليف والعرض والطلب المبينة في الجدول التالي:

	A	B	C	العرض
1	20	15	14	700
2	12	20	14	500
3	28	22	18	800
الطلب	1000	400	600	2000

التمرين الثالث:

أوجد الحل لمسألة النقل في ضوء معطيات التكاليف والعرض والطلب المبينة في الجدول التالي:

	A	B	C	العرض
1	20	15	14	700
2	12	20	14	300
3	28	22	18	800
الطلب	1000	400	600	

المراجع:

1-إسماعيل إبراهيم جمعة ، زينات محمد محرم، صبحي محمود الخطيب، المحاسبة الإدارية و نماذج بحوث العمليات في اتخاذ القرار، الدار الجامعية ، 2001.

2-جلال إبراهيم العيد،" إدارة الأعمال : مدخل اتخاذ القرارات وبناء المهارات الإدارة والمديرين، وظائف الإدارة والمهارات الإدارية " دار الجامعة الجديدة للنشر ، مصر ، 2003 .

3-حسين رحيم، " مبادئ الإدارة الحديثة : (النظريات – العمليات الإدارية –وظائف المنظمة ، " دار حامد للنشر ، الطبعة الأولى ، الأردن ، 2006

4-سليمان محمد مرجان، " بحوث العمليات " ، دار الكتب الوطنية بن غازي ، ليبيا ، الطبعة الأولى ، 2002

5-سهيلة عبدالله سعيد، " الجديد في الأساليب الكمية وبحوث العمليات" ، دار حامد للنشر والتوزيع، الأردن، الطبعة الأولى ، 207

6-كمال خليفة أبو زيد، زينات محمد محرم " دراسات في استخدام بحوث العمليات في المحاسبة ، المكتب الجامعي الحديث ، مصر ، 2006

7-محمد راتول، بحوث العمليات، ديوان المطبوعات الجامعية، الطبعة الثانية، بن عكنون، الجزائر، 2006.

8-محمد صالح الحناوي، محمد توفيق ماضي : " بحوث العمليات في تخطيط و مراقبة الإنتاج "، الدار الجامعية ، مصر ، 2006

9- محمد كعبور، بحوث العمليات ، نماذج وتطبيقات ، طرابلس، ليبيا، 2004.

10- محمد موفق الكبيسي، بحوث العمليات : تطبيقات و خوارزميات، دار الحامد،عمان، 1999.

11- نجنم عبود نجم، " مدخل للأساليب الكمية مع تطبيق باستخدام ميكروسوفت اكسل " الوراق للنشر والتوزيع ، الأردن ، الطبعة الثانية ، 2008

12- اليمين فالته، بحوث العمليات، إيتراك للنشر و التوزيع ،الجزائر، الجزء الأول 2006.

13 - ERIC JACKET-LAGREZE , programmation linéaire mise en œuvre informatique .ED (Economica) , Paris ;1998.
14 -Minoux.M, « programmation mathématique théorie et algorithme » ,édition :DUNOUD , Paris1980 .