الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة أكلي محند أولحاج
- البويرة -
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Université Akli Mohand Oulhadj - Bouira -
Tasdawit Akli Muḥend Ulḥağ - Tubirett -
Faculté des sciences économiques,
commerciales et des sciences de gestion

مطبوعة جامعية في الإقتصاد القياسي
محاضرات وأمثلة

الأستاذ: طهـــراوي فريد

لطلبة السنة الثالثة علوم اقتصادية

تخصص : اقتصاد كمي

السنة الجامعية 2016-2017

فهرس المحتويات	الصفحة

المقدمة

المقدمة

بالرغم من ان علم الاقتصاد يتضمن علوما فرعية هامة الا ان الاقتصادي القياسي يعتبر من ابرز هذه العلوم التي تيضمنها علم الاقتصاد عامة حيث يلعب ا الاخير دوراً مهماً في تدريب وتمرين الاقتصاديين الذين تعلموا المفاهيم الاقتصادية والتعامل مع النماذج الاقتصادية لمختلف الظواهر الاقتصادية
حيث يستند الاقتصاد القياسي على الأساليب الإحصائية لتقدير العلاقات الاقتصادية، واختبار النظريات الاقتصادية، وتقييم وتنفيذ سياسة الحكومة ورجال الأعمال .والتطبيق الأكثر شيوعاً للاقتصاد القياسي هو التنبؤ بالمتغيرات الاقتصادية الكلية المهمة مثل أسعار الفائدة ومعدلات التضخم، والناتج المحلي الإجمالي .في حين أن توقع المؤشرات الاقتصادية واضح للغاية، ومنتشر على نطاق واسع في كثير من الأحيان

يهتم القياس الاقتصادي بصفة عامة، بالوسائل الخاصة بالقياس في الاقتصاد ، غير أن هناك عمليات قياس في الاقتصادلا يمكن اعتبارها بأي حال من الأحوال داخلة في إطار القياس الاقتصادي كتخصص.فعلى سبيل المثال، عملية قياس إنتاجية عامل من عوامل الإنتاج بالطرق الكلاسيكية المعهودة كتقسيم الكمية اللازمة من عامل الإنتاج على عدد الوحدات المنتجة، لايمكن اعتباره من القياس الاقتصادي، بالرغم من أن الأمر يتعلق بعملية قياس في المجال الاقتصادي.وهذا ما يضطرنا إلى التعريف بالقياس الاقتصادي بصفة أدق.

فالهدف الأساسي من وراء استعمال القياس الاقتصادي في أي بحث هو قياس العلاقة التي تربط متغير تابع، وهو مايمثل الظاهرة محل الدراسة، بمتغير مفسر أو أكثر وذلك عن طريق النمذجة، أي بناء نماذج قياسية اقتصادية تربط المتغير التابع بمتغير مفسر لهذه الظاهرة أو أكثر

نقترح من خلال هذه المطبوعة دروسا مبسطة في مقياس الاقتصاد القياسي مع إعطاء أمثلة محلولة بطريقة علمية ،عملية و بيداغوجيةتمكّن الطالب في مختلف ميادين العلوم الاقتصادية : العلوم الاقتصادية، التتسير والعلوم التجارية من التحكم الجيد في القوانين المعطاة في المحاضرة من جهة ودعم وتشجيع الطالب على ايجاد وتاهيل طاقاته من خلال استخدام برمجيات الاقتصاد القياسي من جهة اخرى التي تعتبر كضرورة ملحة في وقتنا الحاضر . حيث حاولنا حل بعض المسائل بمختلف البرمجيات الاحصائية كـ: *RATS 5.04* و *Eviews*

متناولين هذه المطبوعة في فصول اربعة الفصل الاول مفهوم علم الاقتصاد القياسي والفصل الثاني تحليل الانحدار الخطي البسيط والفصل الثالث تحليل الانحدار الخطي العام والفصل الرابع الارتباط الذاتي للاخطاء والفصل الخامس عدم تجانس تباين الخطأ اما السادس التعدد (الازدواج)الخطي اما السابع وهو الاخير في مطبوعتنا فتناولنا نماذج الاخطاء على النموذج

الفصل الاول مفهوم علم الاقتصاد القياسي

يمكن استخدام أساليب الاقتصاد القياسي في المجالات الاقتصادية التي لا علاقة لها بتوقعات الاقتصاد الكلي .على سبيل المثال، سوف ننظر في أثر إنفاق المدرسة عن أداء الطالب في مجال التعليم .وبالإضافة إلى ذلك، سوف نتعلم كيفية استخدام أساليب الاقتصاد القياسي للتنبؤ بالسلاسل الزمنية الاقتصادية.

1- تعريف الاقتصاد القياسي :

لقد استخدم لفظ اقتصاد قياسي لأول مرة سنة 1926 م، ويعود الفضل في ذلك للاقتصادي Frisch Ranger ويهتم الاقتصاد القياسي بقياس العلاقة بين مختلف المتغيرات الاقتصادية لرسم السياسات الاقتصادية والاجتماعية والتنبؤ بالقيم المستقبلية للظاهرة موضوع البحث. كما يركز الاقتصاد القياسي في التطبيق على النظرية الاقتصادية ، الاقتصاد الرياضي والأساليب الإحصائية، حيث عرفه جونستن بانه علم يهتم بتقييم واختبار المعلمات للنموذج الاقتصادي[1]، كما حدده ساموليسون[2]: بانه فرع من علوم الاقتصاد يبحث في التحليل الكمي للظواهر الاقتصادية الحقيقية مستعينا بتطور النظرية الاقتصادية والطرق الاحصائية.اما الكتاب العرب فعرفه ***عصام عزيز شريف*** بانه فرع من فروع علم الاقتصاد يستخدم التحليل الكمي للظواهر الاقتصادية الواقعية المبنية على الاساس التماسك بين النظرية والمشاهدة متخذا لذلك اساليب استقراء ملائمة[3].

يرى العالم Maurice Allais الحائز على جائزة نوبل في علم الاقتصاد سنة 1988 ، بأن غاية القياس الاقتصادي بي دراسة الوسائل الاقتصادية على المستويين النظري والتطبيقي بنفس المنطق البناء المطبق في العلوم الفيزيائية وباستعمال نفس الطرق الكمية من رياضيات وإحصاء سواء كان ذلك على المستوى النظري أو على المستوى التطبيقي.

وفي الاخير يمكن تعريفة بانه: تطبيق الطرق الرياضية والإحصائية لتحليل البيانات الاقتصادية بهدف إعطاء محتوى رقمي للنظريات الاقتصادية للتأكد من صحة تلك النظريات.

فمن خلال مجمل التعاريف السابقة نلاحظ ان الاقتصاد القياسي يركز على علاقته بالعلوم الاخرى وهي:الاحصاء ، النظرية الاقتصادية والاقتصاد الرياضي، اما الاحصاء فهو يمدنا بالاساليب وطرق القياس كالارتباط والانحدار بالاضافة الى البيانات الواقعية المبوبة في جداول، اما النظرية الاقتصادية فهي تحدد لنا نوع العلاقة الاقتصادية المراد دراستها من خلال الفروض المقدمة والمفسرة التي تقدمها،وفيما يخص الاقتصاد الرياضي فهو يصيغ لنا هذه العلاقات في صورة معادلات رياضية قابلة للقياس، ولكن لا يمكن القول بان

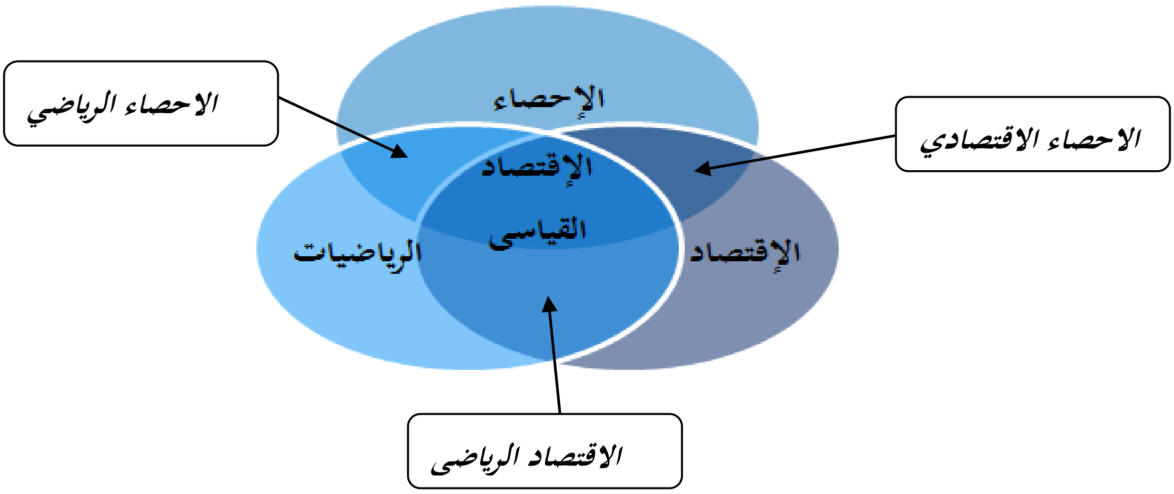
1 A.Koutsyannis,The Theory Of Economitrics, Second Edition 1977,The Macmillan Press Ltd, London P 03.
2 P.A.Samualson .T.C.Copmans, « Report Of Evaluative Commitee For Econometrica , Econometric »,Vol 02, N 02,1954, Pp 141-146.

3عصام عزيز شريف، مقدمة في القياس الاقتصادي،ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 1981، ص 07.

الاقتصاد القياسي ليس له صفة مستقلة عن هذه الفروع بل هو فرع متميز عن كل واحد منها.

ان الاقتصاد القياسي يدعو إلى" توحيد "العلاقة بين القياس والنظرية في علم الاقتصاد، فالنظرية دون قياس تعتبر فقط كفرع من المنطق، و يمكن أن يكون لها قيمة محدودة في تحليل المشاكل الاقتصادية الحقيقية . و أيضا فإن القياس بدون نظرية، سوف يكون خالي و مجرد من الإطار اللازم لتفسير الملاحظات الإحصائية، ومن غير المرجح أن يؤدي إلى تفسير مقنع لكيفية تفاعل القوى الاقتصادية مع بعضها البعض.

الشكل رقم 01: الاقتصاد القياسي وعلاقته بالعلوم الاخرى



المصدر: من اعداد الباحث

2 نظرية واهداف الاقتصاد القياسي

تتميز مهمة نظرية الاقتصاد القياسي أساسًا في قياس العلاقات وتكييفها مع مميزات الظواهر الاقتصادية التي يمكن إخضاعها إلى التجربة المخبرية وذلك بتطبيق أدوات إحصائية طورت لملائمتها، بهدف تحليل العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية في إطار دراسة علمية دقيقة. حيث يمكن إيجاز أهم أهدافه فيما يلي[1]:

-.**بناء نموذج قياسي**: ان السلوك الاقتصادي المبني اساسا على النظرية الاقتصادية يمكننا من بناء نموذج اقتصادي بشكل يمكن اختباره حيث هناك العديد من الطرق لبناء النموذج القياسي انطلاقا من النموذج الاقتصادي[2]، حيث يجب أن نختار الشكل المناسب، وهذا لا يتم الا بالتحقق من ملائمة النموذج لصحة النظريات من خلال التوصل الى نتائج وادلة عملية وعلمية ليتم بعدها تحديد البناء للمتغيرات العشوائية.

-.**تقدير واختبار هذه النماذج** باستخدام البيانات المشاهدة، والتطرق الى المتغيرات العشوائية في النموذج التي يجب ان لا تتعدى حدا معينا يحدده الباحث،عن طريق تقييم الوزن الاقتصادي له .

-. **استخدام تلك النماذج للتنبوء و رسم السياسات الاقتصادية** للأغراض التحليل، ، فالقدرة التنبؤية

1 مجيد حسين، عفاف سعيد، الاقتصاد القياسي النظرية والتطبيق، دار وائل للنشر، عمان، الأردن 1998،ط1،ص07.

2 وليد اسماعيل السيفو، فيصل مفتاح شلوف، صائب جواد ابراهيم، اساسيات الاقتصاد التحليلي،دار الاهلية للنشر والتوزيع، الاردن، 2006، ص 26.

الخاضعة للاقتصاد لا تكون مبنية على الحدس والخبرة فقط وإنما تكون على اسس كمية وعلاقات رياضية انطلاقا من سلوك اقتصادي سابق للظاهرة الاقتصادية. ومن ذلك رسم السياسة الاقتصادية واتخاذ القرارات من خلال الحصول على التقديرات لمعالم العلاقات الاقتصادية والتي يمكن استخدامها فيما بعد في اتخاذ القرارات فكل هذا سوف يساعد الحكومات و كذا اصحاب المؤسسات في اتخاذ القرارات المناسبة.

3 مراحل بناء النموذج القياسي[1]:

يمر يتم بناء النموذج القياسى من خلل عدد من المراحل يمكن ايجازهما في عدد من المراحل الاساسية وهى تعيين النموذج او مرحلة وضع الفروض ، ومسن ثم تقدير معلمات النموذج او مرحلة اختبار الفروض ، ثم تأتى مرحلة تقييم المعلمات المقدرة للنموذج ، واختيرا" تأتى مرحلة اختبار مقدرة النموذج على التنبؤ .

3-1 بناء وتوصيف النموذج *IDENTIFICATION*:

يقصد بتوصيف او تعيين النموذج صياغة العلاقات الاقتصادية محل البحث فى صورة رياضية حتى يمكن قياس معاملتها باستخدام ما يسمى بالطرق القياسية، فالنظرية الاقتصادية تفيد في وضع الهيكل النظري للنموذج والتي هي مجموعة مبادئ متفق عليها لشرح أو تفسير ظاهرة اقتصادية؛ وأما الرياضيات فلصياغة هذه النظرية في إطار رياضي في شكل معادلات، إضافة إلى العمليات الرياضية المختلفة في البحث في خصائص النموذج، أما الإحصاء فيتم من خلاله استغلال المعطيات الميدانية وتنطوي هذه المرحلة على الخطوات التالية[2]:

- تحديد متغيرات النموذج
- تحديد الشكل الرياضي للنموذج
- تحديد القيم والشارات المسبقة للمعالم

ويتم توضيح هذه الخطوات كالأتي-:

أ- تحديد متغيرات النموذج

يمكن للباحث ان يحدد المتغيرات التي يتضمنها النموذج عند دراسته لظاهرة اقتصادية معينة من خلال عدة مصادر[3]:-

1/ مصادر النظرية الاقتصادية.

2/ المعلومات المتاحة عن دراسات قياسية سابقة.

3/المعلومات المتاحة عن الظاهرة بوجه خاص.

ولكن وعلي الرغم من ذلك فأنه ليمكن بوجه عام ادراج جميع المتغيرات التفسيرية التي تؤثر علي الظاهرة

1 عبد القادر محمد عبد القادر عطية، "الاقتصاد القياسي بين النظرية والتطبيق"، ط(2)، الإسكندرية: الدار الجامعية، 2000، ص 03.

2 مولود حشمان، نماذج وتقنيات التنبؤ على المدى القصير OPU ،الجزائر؛ 2002 ، ص 05.

3طارق محمد الرشيد، المرشد فى لاقتصاد القياسى التطبيقى ،الخرطوم ، جى تاون ،الطبعة الاولى، 2005 ، ص 15-18.

محل البحث في النموذج وذلك لصعوبات كثيرة اهمها عدم توافر بيانات عن بعض المتغيرات او لصعوبة القياس ولذلك عاده مايتم الاقتصار فقط علي عدد منها وهمي المتغيرات الاكثر اهمية .

وحسب التقسيمات العلمية السائدة يتسم تقسيم متغيرات النماذج الى نوعين من المتغيرات :

1/ متغيرات داخلية *Endogenous Variables:* وهي المتغيرات التي تتحدد اختلافاتها عن طريق النموذج الاقتصادي قيد البحث بمعنى ان اختلافات المتغيرات الداخلية تتحدد بعد معرفة قيم معالم النموذج وقيم المتغيرات الاخرى .

2/ متغيرات محددة مسبقا *Predetermined Variables*: وهي متغيرات تتحدد قيمها بعوامل خارجة عن النموذج وتنقسم الي نوعين:

أ/متغيرات خارجية (Exogenous Variables) .

ب/ متغيرات ذات فترة ابطاء (lagged Variables) مثل الدخل القومي في الفترة السابقة.

ب- تحديد الشكل الرياضي للنموذج :-

يقصد بالشكل الرياضي للنموذج عدد المعادلات التي يتضمنها هذا النموذج (فقد تكون معادلة واحدة او عدد من المعادلات) ودرجة خطية النموذج (فقد يكون نموذج خطي او غير خطي) ودرجة تجانس كل معادلة (فقد تكون متجانسة او غير متجانسة من درجة معينة)، فالنظرية الاقتصادية لا توضح الشكل الرياضي.

ج/ الاشارات المسبقة للمعلمات :

وفي هذه الخطوة يتم تحديد توقعات نظرية مسبقة عن اشارة وحجم معلمات النموذج بناءا على ما تقدمه النظرية الاقتصادية او المصادر السابقة من معلومات.

وهنا نميز بين عدة نماذج اقتصادية قياسية **جدول رقم 01: نختلف الصيغ للنماذج الاقتصادية**

نوع الصيغة	الصيغة غير الخطية	الصيغة الخطية	الميل $\frac{\Delta Y}{\Delta X}$	الأثر النسبي $\frac{\Delta Y}{\Delta X} / \frac{Y}{X}$
الصيغة الخطية	...	$Y = \beta_0 + \beta_1 X$	β_1	$\beta_1(\frac{Y}{X})$
الصيغة العكسية	...	$Y = \beta_0 + \beta_1(\frac{1}{X})$	$-\beta_1(\frac{1}{X^2})$	$-\beta_1(\frac{1}{XY})$
الصيغة التربيعية	...	$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2$	$\beta_1 + 2\beta_2 X$	$(\beta_1 + 2\beta_2 X)(\frac{X}{Y})$
الصيغة اللوغارتمية المزدوجة	$Y = \beta_0 + X^{\beta_1}$	$LnY = Ln\beta_0 + \beta_1 LnX$	$\beta_1(\frac{Y}{X})$	β_1
الصيغة نصف اللوغارتمية	$e^Y = e^{\beta_0} X^{\beta_1}$	$Y = \beta_0 + \beta_1 LnX$	$\beta_1(\frac{1}{X})$	$\beta_1(\frac{1}{Y})$
الصيغة الأسية	$Y = e^{\beta_0 + \beta_1 X}$	$LnY = \beta_0 + \beta_1 X$	$\beta_1 e^{\beta_0 + \beta_1 X}$	$\beta_1 X$

المصدر: **أموري هادي كاظم الحسناوي، طرق القياس الاقتصادي (عمان ، دار وائل للنشر، 2002)، ص60.**

3-2 جمع البيانات و تقدير معلمات النموذجESTIMATION[1]:

في هذه المرحلة يتم جمع البيانات المتعلقة بالظاهرة الاقتصادية (المشكلة) بعد صياغة العلاقات محل البحث في شكل رياضي خلال مرحلة التعيين، يبدأ الباحث القياسي في الحصول على التقديرات الكمية للمعالم وتسمى هذه المرحلة باختبار الفروض، ويعتبر هذا التقدير عمل فني يتطلب الالمام الكامل من الباحث القياسي بكافة أساليب التحليل القياسي حيث يتم معالجة المعلومات المتوفرة عن المجتمع وعن العينة ايضا، رياضيا وإحصائيا وذلك بتقدير معلمات النموذج، وأثناء هذه المرحلة نقوم بما يلي:

أولا: تجميع البيانات عن المتغيرات التي يحتويها النموذج.

ثانيا:تحليل ومعالجة البيانات

ثالثا:اختيار طريقة القياس الملائمة، من بين الطرق الممكن استخدامها في عملية التقدير، ومنها: طريقة المعادلة الواحدة او طريقة المعادلات الآنية.

اولا : تجميع البيانات الحصائية لمتغيرات النموذج [2]:

يتعين علي الباحث قبل القيام بتقدير النموذج أن يقوم بجمع البيانات عن متغيرات الظاهرة موضوع الدراسة، وتعتبر هذه المرحلة من أهم مراحل العمل القياسي، فإذا توافرت فيها الموضوعية والدقة والبعد عن الاخطاء انعكس ذلك في دقة التحليل وصحة النتائج التي يحصل عليها الباحث وفي هذه المرحلة يتم تحديد كل من:-

***مصادر جمع البيانات:**

يتم عملية جمع البيانات من المصادر الاحصائية والتي تصنف إلى مصدرين أساسين هما المصادر الاولية (التاريخية) وهي البيانات التي تقوم بأعدادها ونشرها بعض الجهات والهيئات المحلية والمركزية حكومية أو غير حكومية، والمصادر الثانوية وهمي البيانات التي يتم نشرها من الجهات المشار أليها في المصادر الاولية وذلك إذا تم اقتباسها عن طريق جهات أخرى .

ثم المصادر الميدانية يتم اعدادها عن طريق الدراسة الميدانية وذلك بتصميم صحيفة استبيان وفق الشروط العلمية حيث يقوم المحلل باعداد مجموعة من الاسئلة حول أبعاد المتغيرات المختلفة لمجال الاهتمام.

*** أنواع البيانات:**

أ- بيانات سلسلة زمنية (*Time Series Data*) : تحتوي السلسلة الزمنية علي عدد من المشاهدات لمتغير ما عند نقاط زمنية مختلفة ومن الامثلة علي ذلك مشاهدات التضخم خلال الفترة (1985- 2015).

ب- بيانات مقطعية (*Gross Section Data*) : ويوضح همذا النوع البيانات المشاهمدات التي يأخذها

1مجيد حسين، عفاف سعيد، مرجع سابق، ص 32.

2طارق محمد الرشيد ، المرجع السابق ذكره ،ص 27-29.

متغير ما بالنسبة لمفردات عينة عند نقطة زمنية معينة، مثال لذلك البيانات الخاصة بدخول عينة من المستهلكين عند نقطة زمنية معينة.

ج- بيانات سلسلة قطاعية (*Cross Series Data*) : وهي تحتوي علي مزيج من بيانات السلسلة الزمنية والبيانات المقطعية ومثال بيانات عن دخول عينة من الافراد عبر فترة زمنية معينة .

د- بيانات تجريبية (*Experiment Data*) : وهي البيانات التي يتم الحصول عليها من خلال أجراء بعض التجارب ومن أمثلة ذلك تلك التي في محلات السوبر ماركت لمعرفة اثر تغير سعر سلعة ما علي الكميات المطلوبة منها.

*** حل مشاكل التجميع [1]:**

تنشأ مشاكل التجميع عندما يحتاج الباحث لاستخدام متغيرات تجميعية فى الدالة محل القياس مثل الناتج القومى والاستهلاك النهائي للافراد، وعملية التجميع قد تتم على اكثر من مستوى، فهناك التجميع على مستوى الافراد مثال لذلك الدخل القومى فمن المشاكل التى تواجه الباحث اختلاف محتوى الدخل من فرد لأخر فهناك الدخل العينى وهناك الدخل النقدى ، وأيضا هناك التجميع على مستوى السلع حيث تواجهنا مشكلة عدم التجانس واختلاف الاوزان ،كما ان التجميع قد يتم على مستوى الفترات الزمنية، وبالطبع يتعين على الباحث ان يتأكد من حل مشاكل التجميع قبل ان يبدأ فى عملية تقدير المعلمات .

ثانيا : تحليل ومعالجة البيانات

تعتمد دقة التقديرات بشكل أساسي علي حجم وطبيعة هذه الاخطاء ولذلك لابد من تحسين دقة قياس متغيرات النموذج وذلك عن طريق التحليل. الاولي للبيانات وخاصة إذ اكانت بيانات السلسلة الزمنية معظم الدراسات القياسية تعتمد عليها . ولذلك فان التحليل الاولي للبيانات يشتمل علي:

1/ **اختبار سكون واستقرار السلسلة :**

تعتبر اولى خطوات التحليل القياسى هو التحليل الاولي للبيانات، وخاصة اذاكانت بيانات السلسلة الزمنية ، اذ ان معظم الدراسات القياسية تعتمد عليها ، وقد اوضحت عدد من الدراسات التطبيقية منها على سبيل المثال دراسة Nelson and Polsser[2] 1989 ،ودراسة (Stock and Watson1989)[3] أن اغلب السلاسل الزمنية غير مستقرة فى مستوياتها (غير ساكنة) أى انها تحتوى على جذر الوحدة(Unit Root) ويؤدى وجود جذر الوحدة الى وجود ارتباط زائف ومشاكل فى التحليل والاستدلال القياسي، لذا لابد من التأكد من سلامة البيانات بأجراء اختبارات سكون السلاسل الزمنية .

1عبد القادر محمد عبد القادر عطية ،الاقتصاد القياسى بين النظرية والتطبيق ، مرجع سابق ،ص 39.

2 Nelson C.and Pollser, Trends and Random Walkes in Macroeconomic Time Series:Some Evidens and Implication , Journal of money economics, 1989,vol,10,pp.139-162.

3 Stock,J.H and M.W.Watson, Interpreting the eviden Money Income Causality, Jorunal of .econometrics,1989,vol,40,pp.161-182.

وحيث ان جذور الوحدة ترتكز على وجود ارتباط ذاتى بين المتغيرات فأن اختبارات جذور الوحدة ترتكز على فرضية ان حدود الخطأ ليست مترابطة بشكل جوهرى واسقاط هذا الفرض يؤدى الى حدوث مشكلة الارتباط الذاتى ، ومن اهم هذه لاختبارات اختبار ديكى فولر البسيط (Dickey-Fuller1979)، اختبار ديكى فوللر المطور (Augmented Dickey-Fuller 1981)، اختبار فيليبس بيرون (Phillips and Perron 1988).

2/تحليل التكامل المشترك :

على الرغم من ان عدم استقرار بيانات السلاسل الزمنية يمثل مشكلة فى التحليل والاستدلال الاحصائى حيث يمكن ان تقود الى نتائج زائفة ، الا أن [1](Engle-Granger 1987) قد وجد ان بيانات السلاسل الزمنية غير المستقرة يمكن ان تقود الى نتائج احصائية غير زائفة اذا كانت البيانات غير الساكنة درجة التكامل بينها واحدة.

وهذا يعنى ان السلاسل الزمنية موضع الدراسة لها علاقة توازنية فى الاجل الطويل على الرغم من اختلالها فى الاجل القصير.

ويلاحظ ان الدراسات التطبيقية فى مجال التكامل المشترك قد تطورت من خلل اتجاهين رئيسين:

- اختبارات تعتمد عل البواقى المتحصلة من جراء انحدار التكامل المشترك مثال Engle-Granger) 1987).
- اختبارات تعتمد على نظام متجه الانحدار الذاتى (Vector Auto Regression) (VAR)مثال ذلك: (Johnson 1988,1989) and (Juselius,1990).

ثالثا: اختيار طرق القياس الملائمة:-

يوجد هنالك عدة طرق قياسي، يمكن استخدامها في تقدير قيم المعالم ويمكن تصنيفها إلي نوعين:-

النوع الاول : طرق المعادلة الواحدة (Techniques Single Equation) وهي تطبق علي كل معادلة من معادلات النموذج على حدة ونجسد من أهمها[2]:

- طريقة المربعات الصغرى(OLS).
- طريقة المربعات الصغرى الغير مباشرة (ILS).
- طريقة المربعات الصغرى بمرحلتين(SLS2).
- طرق التقدير المختلط.

1 Engle, Robert F.and C.W.J Ganger , "Co integration and Error Correction:Representation Estimation and Testing " Econometrica ,1987,vol 55.

2عزالدين مالك الطيب محمد ، المدخل الى الاقتصاد القياسى ، الجزء الاول ،نموذج المعادلة الواحدة ومشاكل القياس ،مطبعة جي تاون الخرطوم 2008. ص 104.

- طريقة المتغيرات المساعدة.

النوع الثاني:طريقة المعادلات الآنية:The Simultaneous Equation Techniques

وتطبق هذه الطرق علي مجموعة المعادلات في النموذج ونجسد من أهممها:-

- طريقة المربعات الصغرى بثلاث مراحل(SLS3)

- طريقة الامكان الاعظم(L.H)

ونتناول بشيء من الشرح والتوضيح في هذا الفصل طريقتين من كل نوع وهما طريقة المربعات الصغرى وطريقة الامكانية العظمى.

3 -3 مرحلة الاختبار وتقييم معلمات النموذج*VALIDATION*:

في هذه المرحلة قد يواجه الباحث عدة مشاكل منها مشكلة عدم ثبات التباين او التغاير، او الارتباط الذاتي او التعدد الخطي،وعلى الباحث في هذه الحالة ان يعالج هذه المشاكل قبل البدء في عملية التقييم[1]. وبعدها يقوم بتقييم المعلمات المقدرة، أي تحديد ما إذا كانت مقبولة من الناحية الإحصائية، وما إذا كانت قيم هذه المعلمات لها مدلول أو معنى من الناحية الاقتصادية وهذا بالاعتماد على المعايير التالية:

- **المعايير الاقتصادية**[2]:

تتعلق بحجم وإشارة المعلمات المقدرة فاذا كانت حجم وإشارة المعلمات لا تتوافق والنظرية الاقتصادية كان هذا سبب كافي في رفض النموذج، وهى تعتمد فى ذلك على منطق معين ، فإذا جاءت المعلمات المقدرة على عكس ما تقرره النظرية مسبقا فأن هذا يكون مبررا لرفض هذه المعلمات المقدرة ما لم يوجد من المبررات المنطقية القوية ما يؤدى للتسليم بصحة التقديرات ورفض ما تقرره النظرية ، وفى هذه الحالة يجب عرض هذه المبررات بوضوح ، وبالرغم من ذلك فإنه فى بعض الحالات يأتى اختلاف المعلمات المقدرة عما تقرره النظرية مسبقا نتيجة لقصور فى البيانات المستخدمة فى تقدير النموذج .

- **المعايير الإحصائية**[3]:

تعتبر هذه المعايير من المعايير المهمة في دراسة قياس العلاقات الاقتصادية وذلك للتعرف على معنوية التقديرات ومدى مطابقتها مع منطوق النظرية الاقتصادية وتمثيلها للمجتمع الذي تنتمي اليه ، ويطلق عليها اختبارات الدرجة الاولى تهدف الى اختبار جودة التوفيق و مدى الثقة الإحصائية في التقديرات الخاصة بالمعلمات.وتنقسم المعايير الاحصائية الي نوعين من الاختبارات :

-اختبارات جودة التوفيق.

1مجيد حسين، عفاف سعيد، مرجع سابق، ص 32.

2عبد القادر محمد عبد القادر عطية ، القتصاد القياسى بين النظريو والتطبيق ، مرجع سبق ذكره ، ص40.

3 طارق محمد الرشيد ، المرشد فى الاقتصاد القياسى التطبيقى ، مرجع سبق ذكره ، ص 68-73.

-اختبارات المعنوية

أ/اختبار جودة التوفيق

اختبار جودة التوفيق هو مقياس للمقدرة التفسيرية للنموذج حيث يعكس هذا الاختبار درجة الانحرافات بين القيم المقدرة والقيم المشاهدة، ويوضح انه كلما زادت انحرافات القيم المقدرة عن القيم المشاهدة للمتغير التابع كلما قلت جودة التوفيق وبالتالي انخفاض المقدرة التفسيرية للنموذج اى زادت النسبة غير المفسرة والعكس صحيح ، ويتم ذلك باستخدام معامل التحديد R^2 وكلما ارتفعت قيمة معامل التحديد كلما كان ذلك دليل على قوة العلاقة والعكس هو الصحيح.

ولكن نجد دائما من عيوب معامل التحديد انه يبالغ في حقيقة تأثير المتغيرات المستقلة على المتغير التابع ، ولذلك تم استخدام معامل التحديد المعدل Adjusted R^2 لعلاج ذلك وهو مرجحا فقط بدرجات الحرية للخطأ ولذلك عادة مايكون معامل التحديد المعدل اقل من أو يساوى معامل التحديد .

ب/اختبارات المعنوية

– بعد تقدير قيم المعالم من بيانات العينة لابد من اختبار الى اي مدى يمكن الاعتماد عليها كأساس جيد للوصول لمعلمات المجتمع وسوف يتم ذلك من خلال اختبار مدى ملاءمتها الإحصائية باستخدام اختبارات المعنوية ويوجد هناك ثلاثة اختبارات يمكن استخدامها لهذا الغرض وهي :

1*اختبار ستودنت-*T-test t*

2* اختبارالتوزيع الطبيعي -*Z-test z*

3* اختبار فيشر -*F-test F*

عندما نختبر المعلمات المقدرة بصورة مستقلة باستخدام اختبار t او Z ويتضح أنها معنوية ففي الغالب عند اختبار معنويتها مجتمعة باستخدام اختبار F سوف تكون معنوية إحصائيا ، وقد يثبت كذلك اختبار معنوية المعلمات المقدرة بصفة مستقلة من خلال اختبار Z أو t إن كل واحدة منهما غير معنوية ولكن عند اختبار معنوية الانحدار ككل من خلال اختبار F يثبت انه معنوي إحصائيا ويحدث ذلك غالبا عندما تكون المتغيرات التفسيرية مرتبطة ارتباطا قويا فيما بينهما ، قد يحدث في بعض الحالات أن تكون كل معلمة مقدرة لها معنوية إحصائية عند اختبارهما بصفة مستقلة ولكن يثبت من اختبار معادلة الانحدار ككل أنها ليست لها معنوية إحصائيا .

- **المعايير القياسية:**

كما يطلق عليها كذلك باختبارات التشخيص في الدراسات القياسية الاخرى حيث تهدف هذه المعايير إلى التأكد من أن الافتراضات التي تقوم عليها المعايير الإحصائية منطبقة مع الواقع، ومنها: اختبارات الارتباط الذاتي، اختبارات التعدد الخطي واختبارات ثبات تباين الخطأ.

يعتمد التوقع على النموذج الناتج عن عملية التقدير، وهو يعني الحصول على المستويات المستقبلية للظاهرة المدروسة، وذلك يتم بإحلال قيم مفترضة محل المتغيرات التفسيرية في النموذج، ثم حساب قيمة الظاهرة في الفترة المستقبلية وعادة ماتعطى هذه القيمة المستقبلية في شكل قيمة وسطى ضمن مجال معين .وتقوم عملية التوقع على الفروض التالية:

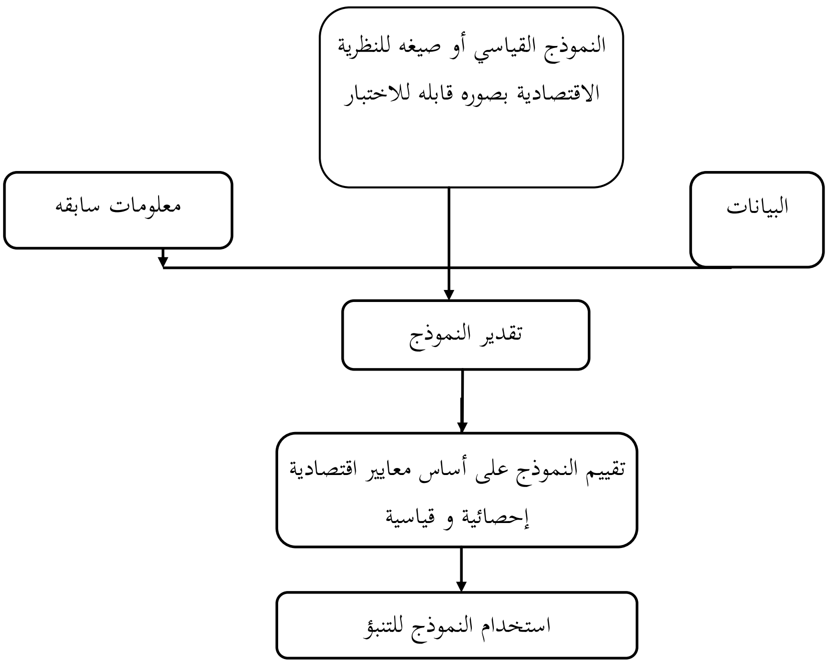
- النموذج المعتمد يطابق الواقع إلى حد كبير.
- الظروف والشروط العامة المحيطة بالظاهرة المدروسة تبقى على حالها في الفترة المستقبلية .

3-4 مرحلة التطبيق والتنبؤ للنموذج[1]:

وتمثل هذه الملحة الاخيرة من مراحل النهجية البحث في الاقتصاد القياسي ويتم التنبؤ بالقيم المستقبلية للمتغير التابع على اساس القيم المستقبيلة للمتغير (او المتغيرات) المستقلة.

ولكن قبل استخدام النموذج المقدر في التنبؤ يجب التأكد من جودة الاداء العام للنموذج المقدر وبعدئذ يتم التطبيق النتائج التي تم التوصل اليها على على الواقع واستخدامها في عملية التنبؤ، لغرض رسم السياسات واتخاذ القرار. وفي الاخير يمكن تلخيص هذه المراحل في الشكل الآتي:

الشكل رقم 02: يوضح مراحل بناء النموذج الاقتصادي القياسي



المصدر : من اعداد الباحث اعتمادا على الشرح السابق

[1] مجيد حسين، عفاف سعيد، مرجع سابق، ص 33.

4- تقديم النماذج الاقتصادية:

إن العلاقات الاقتصادية التي تحددها النظرية الاقتصادية والتي يمكن قياسها هي في الغالب علاقات سببية مضافا اليها مجموعة من معادلات و نماذج الاقتصادية لا فائدة من تقديرها،كالمعادلات التعريفية ،السلوكية، التوزانية والنماذج التطابقية [1]:

أ-المعادلات التعريفية: وهي معادلات لا تصف ولا تحدد سلوك اقتصادي معين بل تعرض علاقة معينة بين متغيرات اقتصادية مثل: $Y= C + I$

حيث:Y يمثل الدخل، C : يمثل الاستهلاك ، I : يمثل الاستثمار.

ب- النماذج الاقتصادية السلوكية: التي تهدف الى تفسير وتوصيف بالاضافة الى تحليل الظواهر الاقتصادية وفقا للنظرية الاقتصادية في الماضي، الحاضر والمستقبل مثل :.

$$Q = \alpha + \beta P + u$$

حيث Q الكميه المطلوبة، P يمثل السعر، وهي تمثل المتغيرات المشاهدة ، u متغير عشوائي. وα ، β معا لم النموذج.

ج-النماذج التوازنية :وهي نماذج مبنية على اساس شروط معينة لتوازن ظاهرة او ظواهر معينة كتساوي الاستثمار والادخار، او العرض يساوي الطلب:

$$I = S$$

$$D = O$$

د-المعادلات التطابقية: وهي نماذج تسير الى تطابق الجانبين مثل تطابق الكميات المطلوبة مع الكميات المعروضة وعرض النقد مع الطلب عليه كما تسمى هذه النماذج بالمعادلات الهيكلية لأنها تربط المتغيرات ضمن هيكل اقتصادي معين .

وماسنركز عليه في هذا البحث هو دراسة النماذج ذات العلاقات السببية وهي ابراز ظاهرة اقتصادية تكون سببا في وجود ظاهرة اقتصادية اخرى، حيث تكون هي محور الاهتمام في عملية القياس الاقتصادي، ومن أنواع النماذج الاقتصادية :نموذج الانحدار الخطي البسيط، ونموذج الانحدار الخطي المتعدد[2].

---

1 وليد اسماعيل السيفو، فيصل مفتاح شلوف، صائب جواد ابراهيم، مصدر سابق، ص 45.

2 BERNARD PAULRE, "La Causalité en économie, signification et portée de la modélisation structurelle" (Lyon : Presse universitaire, 1985).P118.

الفصل الثاني:
الانحدار الخطي البسيط

الفصل الثاني: الانحدار الخطي البسيط

يعتبر الانحدار الخطي البسيط أبسط أنواع نماذج الانحدار، بحيث يوجد الكثير من العلاقات الاقتصادية التي يمكن قياسها باستخدام هذا الأسلوبلتحليل تأثير بعض السياسات التي تتضمن تغير قيم لفرد معين. كأن يتم تحليل تأثير النفقات الاعلانية على كمية المبيعات، وعلاقة الكمية المطلوبة من السلعة وسعرها، وأيضا مستوى الأسعار مع معدل التضخم [1].

هناك عدة أسباب لدراسة هذه العلاقات:

- التنبؤ بقيم Y من قيمX
- اختبار مدى معنوية العلاقة بين كل من X وY

1 صيغة النموذج الانحدار الخطي البسيط:

العلاقة بينY وX تمثل بالتالي: $Y = f(X)$

وهي علاقة رياضية محدده *Deterministic* يمكن كتابتها بشكل انحداري كمايلي :

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i$$

$$i=1..........n$$

حيث Yiمتغير تابع و Xiمتغير مستقل،

اما ε_i فهو المتغير العشوائي حيث يرجع وجوده إلى عدة أسباب منها:

- إهمال بعض المتغيرات المستقلة التي يمكن أن تؤثر على المتغير التابع في النموذج عن طريق تحديد خاطئ للمتغيرات المستقلة: ويتمثل ذلك في إغفال متغيرات مستقلة هامة في نموذج الانحدار المراد تقديره او احتواء هذا النموذج على متغيرات مستقلة غير هامة.
- الصياغة غير السليمة للنموذج.
- حدوث خطأ في كل من تجميع البيانات وقياس المتغيرات الاقتصادية.
- تغير معاملات الانحدار: إن معاملات الانحدار قد لا تظل ثابتة أثناء الفترة الزمنية التي تم تجميع البيانات عنها.

تحديد نوع العلاقة : فالعلاقة الحقيقية بين المتغير التابع والمستقل قد تكون غير خطية لوغاريتمية او نصف لوغاريتمية في حين يتم ادراجها على اساس انها خطية.

ويترتب على إسقاط هذا الافتراض حدوث أخطاء تحديد تتمثل فيما يلي:

1عبد القادر محمد عبد القادر،" **طرق قياس العلاقات الاقتصادية مع تطبيقات على الحاسوب الالكتروني** ،الإسكندرية :دار الجامعات .المصرية، 1990 ، ص08.

أ-تحديد خاطئ للمتغيرات المستقلة :ويتمثل ذلك في إغفال متغيرات مستقلة هامة في نموذج الانحدار المراد تقديره، أو احتواء هذا النموذج على متغيرات مستقلة غير هامة.

ب- تغير معاملات الانحدار :إن معاملات الانحدار قد لا تظل ثابتة أثناء الفترة الزمنية التي تم تجميع البيانات عنها.

العلاقة الحقيقية بين المتغير التابع والمستقل قد تكون غير خطية[1] .

2.فرضيات النموذج الخطي البسيط [2]:

الفرضية 01:إن وســط التوزيع الاحتمالي الخاص بالمتغير العشوائي = الصفر. $E(u_i)=0$ إي أن قيم u تتمركز حول الصفر.

وتعني هذه الفرضية أن الأخطاء لا تدخل في تفسيرالمتغسير التابع Y، اذ انها تعبر عن حدود عشوائية تأخذ قيما سالبة، موجبة أو معدومة لا يمكن قياس ها أو تحديدها بدقة، وتخضع لقوانين الاحتمال.

الفرضية 02: -ثبات وتساوي التباين: $V(\varepsilon_i)= E(\varepsilon_i^2)= \delta^2$

تباين التوزيع الاحتمالي الخاص بالعناصر العشوائية ε_i يساوي قيمه ثابتة وموجبة. وهو مايسمى ب تجانس (ثبات) تباين الأخطاء *Homoscedasticity.*

الفرضية 03: استقلالية الخطأ العشوائي:

اي عدم وجود ارتباط ذاتي بين الأخطاء :بمعنى أن التباينات المشتركة لأخطاء الملاحظات المختلفة تكون معدومة، وهذا على مختلف مشاهدات مكونات العينة، ونعبر عنها رياضيا كما يلي: $COV(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=0$

أي **أن التغاير، درجة الارتباط بين قيم العشوائي = الصفر**، حيث تكون مستقلة عن بعضها.

الفرضية 04: التوزيع الطبيعي للخطأ العشوائي. $\varepsilon_i \sim N$

ونستطيع تلخيص الفرضيات الثلاثة السابقة كمايلي: $\varepsilon_i \sim N(0,\sigma^2)$

الفرضية 04: استقلالية قيم المتغير المستقل عن المتغير العشوائي

iتتمثل في أن المعطيات ، التي جمعت بالنسبة لهذا المتغير قادرة على إظهار تأثيرها في تغير المتغير التابع Y_i، بحيث تكون قيمة واحدة على الأقل مختلفة عن بقية القيم[3] .

أي مهما يكن حجم العينة n، فإن المقدر يكون:

$$(1/n)\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2 \neq 0$$

ومنه فالاخطاء نتيجة لذلك تكون مستقلة عن X_i :

1شيخي محمد، طرق الاقتصاد القياسي، محاضرات وتطبيقات،الجزائر، دار الحامد، الطبعة الاولى 2011، ص 04.

2عبد الحميد عبد المجيد البلداوي،الإحصاء للعلوم الإدارية والتطبيقية، (عمان: دار الشروق للنشر والتوزيع، 1997)، ص506.

3عبد الحميد عبد المجيد البلداوي، 1997، ص 106.

$$Cov(X_i,\varepsilon_i)= E(X_i,\varepsilon_i)= X_i E(\varepsilon_i) =0$$

3- تقدير معاملات النموذج الخطي البسيط

عند وجودة متغيرين حول دراسة ضاهرة اقتصادية معينة فانه يمكن تشكيل مجموعة n من الثنائيات : (X_1,Y_1) ,........, (X_n,Y_n) ومنه فنحن نحاول ايجاد افضل خط يعبر عن مجموعة التوليفات التي تكون ممثلة في المعادلة: $Y_i=\alpha+\beta X_i+u_i$ ، ولذلك يجب تقدير قيم للمعلمتين α و β التي تكون قيمتيهما الحقيقيتين مجهولتين،فعند تمثيل ثنائيات المشاهدات في بيان يظهر لنا تشتت هذه المشاهدات الشكل رقم2 ، يكون هدفنا هو البحث عن تصحيح يعبر تعبيرا جيدا عن العلاقة أعلاه . وهناك عدة طرق لتقدير معاملات معادلة الانحدار أهمها: طريقة المربعات الصغرى و طريقة الإمكانية العظمى .وقبل ذلك نقوم بادراج بعض الخصائص التي يتضمنها المقدر الجيد.

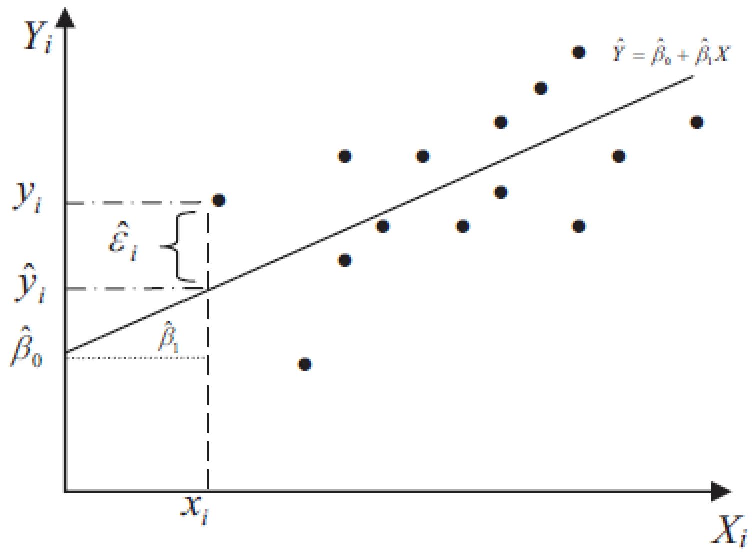
3-1 طريقة المربعات الصغرى العادية

تعتبر هذه الطريقة هي الاحسن والاكثر نجاعة مقارنة بمثيلتها حيث انها تعتمد على الحصول على مقدرات الخاصة للانحدار التالي: $Y_i=\alpha+\beta X_i+u_i$

حيث تمثل α معلمة القاطع، β معلمة الميل. وتهدف هذه الطريقة الى تصغير وتدنئة مجموع مربعات البواقي إلى آدني قيمه لها. بحيث يجري تعريف مكون يطلق علية مجموع المربعات البواقي: $\sum\varepsilon_i^2$ والتي تمثل انحرافات القيم المقدرة عن القيم الحقيقية للمتغير التابع : $\sum\varepsilon_i^2=\sum(Y_i-\hat{Y})^2$ وبعد ذلك يشرع في الحصول على $\hat{\beta}$ ،$\hat{\alpha}$ بحيث يتم تصغير هذا المكون إلى أدنى قيمه له.

والشكل التالي يوضح قيم البواقي وكيفية تحصيل قيمها:

الشكل رقم 03 يوضح :هدف طريقة المربعات الضغرى العادية



ولكن طريقة المربعات الصغرى تعطينا مقدرات الانحدار α ، β ولكن لا تعطينا مقدرة التباين وهذا يعتبر من نقاط ضعف طريقة المربعات الصغرى.

النموذج المقدر معطى بالشكل التالي: $\hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X$

للحصول على مقدرات المربعات الصغرى العادية يجب أن نحصل أولا على البواقي:

$$\varepsilon_t^2 = (\hat{Y} - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}X))^2$$

مجموع مربعات البواقي هو $\sum \varepsilon_i^2$ أي:

$$\sum \varepsilon_i^2 = \sum (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X)^2$$

والشرط اللازم لتدنئة هذه العلاقة هو أن تكون المشتقات الجزئية بالنسبة ل $\hat{\alpha}$ ، $\hat{\beta}$ هو الصفر أي:

$$\frac{\partial\left(\sum \varepsilon_i^2\right)}{\partial \hat{\alpha}} = (2)\sum (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X)(-1) = 0$$

$$= (-2)\sum (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X) = 0$$

نساوي بالصفر :

$$\sum (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X) = 0$$

بادخال المجموع Σ وحيث ان α عدد ثابت فأن $\Sigma\hat{\alpha} = n\hat{\alpha}$ ثم بقسمة المعادلة على n نحصل على مايلي[1]:

$$\sum Y_i - \sum {}_i\hat{\alpha} - \hat{\beta}\sum {}_i X = 0$$

$$\sum {}_i\hat{\alpha} = \sum Y_i - \hat{\beta}\sum {}_i X$$

$$n\hat{\alpha} = \sum Y_i - \hat{\beta}\sum {}_i X$$

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum Y_i}{n} - \hat{\beta}\frac{\sum {}_i X}{n}$$

$$\hat{\alpha} = \overline{Y} - \hat{\beta}\overline{X}$$

بنفس الطريقة نقوم بتقدير المعلمة $\hat{\beta}$:

1مجيد حسين، عفاف سعيد، مرجع سابق، ص 118.

$$\frac{\partial\left(\sum u_i^2\right)}{\partial\hat{\beta}}=(2)(\sum(Y_i-\hat{\alpha}-\hat{\beta}X)(-X)=0$$

$$\frac{\partial\left(\sum u_i^2\right)}{\partial\hat{\beta}}=-2\sum X(Y_i-\hat{\alpha}-\hat{\beta}X)=0$$

ومع المساواة بالصفر نجد:

$$(\sum X(Y_i-\hat{\alpha}-\hat{\beta}X)=0$$

$$-\sum XY+\sum X\hat{\alpha}+\sum\hat{\beta}X^2=0$$

$$\sum XY=\hat{\alpha}\sum X+\hat{\beta}\sum X^2$$

بالتعويض بقيمة $\hat{\alpha}$ نحصل على :

$$\sum XY=\sum X\left(\frac{\sum Y}{n}-\hat{\beta}\frac{\sum X}{n}\right)+\hat{\beta}\sum X^2$$

بالضرب في n:

$$n\sum XY=\sum X\sum Y-\hat{\beta}(\sum X)^2+\hat{\beta}n\sum X^2$$

$$n\sum XY-\sum X\sum Y=-\hat{\beta}(\sum X)^2+\hat{\beta}\ n\sum X^2$$

$$=\hat{\beta}\ n\sum X^2-\hat{\beta}(\sum X)^2$$

$$=\hat{\beta}\left(n\sum X^2-(\sum X)^2\right)$$

بالتعويض نحصل على قيمة مقدر β كمايلي[1]:

$$\boxed{\hat{\beta}=\frac{n\sum_{i=1}^{n}X_iY_i-\sum^{n}X_i\sum Y_t}{n\sum X_i^2-\left(\sum X\right)^2}=}$$

3-2خصائص طريقة المربعات الصغرى

كما تمت الاشارة فان المقدر يتضمن عدة خصائص ، وهذه الخصائص نجد اغلبها في طريقة المربعات الضغرى العادية OLS.

أ-عدم التحيز

وإذا عدنا إلى مقدرتي المربعات الصغرى فإن $\hat{\alpha}$ مقدرة غير متحيزة للمعلمة α . عدم التحيز يتطلب بأن القيمه المتوقعة لـ $\hat{\alpha}$ و التي هي قيمة المعلومة الحقيقية بمعنى آخر متوسط $E(\hat{\alpha})=\alpha$. و $E(\hat{\beta})=\beta$

[1]مجيد حسين، عفاف سعيد، مرجع سابق، ص 119.

إذا جمعت عينات كثيرة وفي كل عينه نحسب $\hat{\alpha}$ او $\hat{\beta}$ يتم أخذ المتوسط. ذلك المتوسط نظريا يجب أن يتساوى مع المعلمة الحقيقية α و β على التوالي.

*** البرهان:**

❶ $E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$

اذا كان لدينا: $y_i = Y_i - \bar{Y}$ و $x_i = X_i - \bar{X}$

فأن : $\hat{\beta} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$ و اذا وضعنا $w_i = \frac{xi}{\sum xi\ 2}$ فيكون لدينا المقدر كمايلي: $\hat{B} = \sum wi\ yi$

حيث تمثل w_i الأوزان ومن خصائصها:

- $\sum_{i=1}^{n} w_i = 0$
- $\sum_{i=1}^{n} w_i x_i = 1$
- $\sum_{i=1}^{n} w_i^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

وبالتالي فهو مقدر خطي لأن:

$$\hat{\beta} = \sum_{i=1}^{n} w_i y_i = w_1 y_1 + w_2 y_2 + ... + w_n y_n$$

فنستطيع كتابة العلاقة السابقة بالشكل:

$$\hat{\beta} = \sum_{i=1}^{n} w_i [Y_i - \bar{Y}]$$

حيث: $Y_i = \alpha + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$ فنجد: $\bar{Y} = \alpha + \beta_1 \bar{X} + \bar{\varepsilon}$

نحصل على :

$$\hat{\beta} = \sum_{i=1}^{n} w_i [\beta X_i + \varepsilon_i - \beta \bar{X} - \bar{\varepsilon}] = \sum_{i=1}^{n} w_i [\beta (X_i - \bar{X}) + (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})]$$

وبما ان المقدار $\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}$ يؤول الى ε_i لان $\bar{\varepsilon} = 0$ بالامل الرياضي وكذلك :

$\sum_{i=1}^{n} w_i x_i = 1$ ومنه $\hat{\beta} = \beta + \sum_{i=1}^{n} w_i \varepsilon_i$ وبادخال الامل الرياضي على الطرفين نجد:

$E(\hat{\beta}) = E(\beta) + \sum_{i=1}^{n} w_i E(\varepsilon_i)$ وبحيث ان $E(\beta)=\beta$ لان β معلمة نظرية غير عشوائية .

و $E(\varepsilon_i)=0$ ومنه فإن: $E(\hat{\beta})=\beta$ فهو مقدر غير متحيز .

ملاحظة: اذا كان هناك تحيزا فإن مقدار التحيز هو β -$\hat{\beta}$ وكذلك يساوي $\sum_{i=1}^{n} w_i \varepsilon_i$.

❷ $E(\hat{\beta}_0) = \beta_0$

لدينا: $\hat{\beta}_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1 \overline{X}$ حيث: $\overline{Y} = \beta_0 + \beta_1 \overline{X} + \overline{\varepsilon}$

وبتعويض قيمة $\overline{Y}$ بما يساويها نجد: $\hat{\beta}_0 = \beta_0 + \beta_1 \overline{X} + \overline{\varepsilon} - \hat{\beta}_1 \overline{X}$

بإدخال التوقع الرياضي على الطرفين، نحصل على :

$$E(\hat{\beta}_0) = \beta_0 + \beta_1 \overline{X} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(\varepsilon_i) - E(\hat{\beta}_1)\overline{X}$$

وحيث: $E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$ فنجد ان: $E(\hat{\beta}_0) = \beta_0$. ومنه فالمقدر $\hat{\beta}_0$ هو الآخر غير متحيز.

ب- خاصية الخطية

وباستعمال خصائص طريقة الاوزان السابقة نبين كذلك خاصية الخطية للمقدرات حيث يمكن كتابة المعلمة الثابتة كمايلي:

$$\hat{\beta}_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i - \sum_{i=1}^{n} w_i y_i \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i - \overline{X}\sum_{i=1}^{n} w_i (Y_i - \overline{Y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i - \overline{X}\sum_{i=1}^{n} w_i Y_i$$

وبالتالي فإن: $\hat{\beta}_0 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n} - w_i \overline{X}\right)Y_i$ فنضع: $w_i^* = \frac{1}{n} - w_i \overline{X}$

فيصبح لدينا العلاقة التالية: $\hat{\beta}_0 = \sum_{i=1}^{n} w_i^* Y_i = w_1^* Y_1 + w_2^* Y_2 + ... + w_n^* Y_n$ والتي توضح خاصية الخطية لهذا المقدر.

ج- نظرية غوص ماركوف Gauss-Markov

تنص هذه النظرية على انه من بين المقدرات غير المتحيزة، تكون مقدرات المربعات الصغرى العادية $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ افضل مقدرات خطية وغير متحيزة، حيث أن لها أصغر تباين ممكن مقارنة مع بقية المقدرات الخطية وغير المتحيزة الأخرى[1].

إذا واجهنا مشكلة فإننا ننظر إلى الخاصية التقاربية لذلك المقدر، ويحدث ذلك لما يكون المتغير المستقل X_i عبارة عن متغير تابع ومبطأ بفترة زمنية ما، فنقول عن $\hat{\beta}$ انه مقدر متسق اذا كان كلما $n \longrightarrow \infty$ فان توزيع المعاينة لـ $\hat{\beta}$ يقترب من المعلمة الحقيقية β. ونقول ان النهاية الحقيقية ل $\hat{\beta}$ هي β ونكتب :

1 محمد شيخي، طرق الاقتصاد القياسي، محاضرات وتطبيقات،ص 25.

$$\underset{n\to\infty}{p\lim}(\hat{\beta}_1) = \beta_1$$

.

لكن هذا الشرط غير كاف للحصول على مقدر متسق، بل يجب أن تكون قيمة التحيز والتباين تقتربان أو تساويان الصفر كلما $n \longrightarrow \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} E(\hat{\beta}_1) = \underset{n\to\infty}{p\lim}(\hat{\beta}_1) = \beta_1$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{var}(\hat{\beta}_1) = \underset{n\to\infty}{p\lim}\, \mathrm{var}(\hat{\beta}_1) = 0$$

وبتحقق هذين الشرطين، نقول عن المقدر $\hat{\beta}_1$ بأنه مقدر متسق للمعلمة الحقيقية

وبالتالي مقدرات المربعات الصغرى العادية هي الأفضل بين جميع المقدرات الخطية غير المتحيزة، وهذه تسمى نظرية جاوس وماركوف .أحياناً، يريد الباحث مقايضة بعض التحيز بأصغر تباين والتقليل من خطأ مربع الوسط :MSE

حيث ان المقدرات الحقيقية لكل $\hat{\beta}_0$ ، $\hat{\beta}_1$ و σ^2 من والمحصل عليها سواء بطريقة المربعات الصغرى أو غيرها هي تقديرات نقطية، ولكن من المهم أن يكون لدى الاقتصادي أكثر من اختيار، ولذلك يجب أن نبني مجالا لهذه المقدرات وذلك بقبول مستوى ثقة معين وهو ما نسميه بالتق دير المجالي للمعا لم.

مثال:

من خلال معطيات الجدول الموالي ل: 10 مشاهدات، نقوم بتقدير المعلمتين $\hat{\beta}_0$ و $\hat{\beta}_1$ بواسطة طريقة المربعات الصغرى العادية *OLS:*

الجدول رقم 02

(1) t	(2) y_t	(3) x_t	(4) $y_t - \bar{y}$	(5) $x_t - \bar{x}$	(6) (5)* (5)	(7) (4)* (5)
1	7 389,99	8 000	– 2 595,59	– 3 280	10 758 400	8 513 518
2	8 169,65	9 000	– 1 815,93	– 2 280	5 198 400	4 140 300
3	8 831,71	9 500	– 1 153,87	– 1 780	3 168 400	2 053 879
4	8 652,84	9 500	– 1 332,74	– 1 780	3 168 400	2 372 268
5	8 788,08	9 800	– 1 197,50	– 1 480	2 190 400	1 772 292
6	9 616,21	11 000	– 369,37	– 280	78 400	103 422
7	10 593,45	12 000	607,88	720	518 400	437 670
8	11 186,11	13 000	1 200,54	1 720	2 958 400	2 064 920
9	12 758,09	15 000	2 772,52	3 720	13 838 400	10 313 755
10	13 869,62	16 000	3 884,05	4 720	22 278 400	18 332 692
Somme	99 855,75	112 800	0	0	64 156 000	50 104 729
Moyenne	9 985,57	11 280	0	0	6 415 600	5 010 472

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}(X_i - \bar{X})^2} = \frac{50\,104\,729}{64\,156\,000} = 0{,}78$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} = 9\,985{,}57 - 0{,}78 \times 11\,280 = 1\,176{,}08$$

ومنه فإن النموذج المقدر يكتب بالشكل التالي : $\hat{Y}=1176.08+0.78\,X$

3-3 طريقة طريقة الإمكانية العظمى *Maximum Likelihood Method (ML)*

هي طريقة احصائيه اخرى تستعمل في مجال التقدير أول من قدمها الإحصائي المشهور *Fisher*.

أ-الإمكانية : مفهوم احتمال حدوث عمل ما. وهي طريقة للتقدير الإحصائي مثلها مثل طريقة المربعات الصغرى تستخدم في تقدير قيم المعالم المجهولة ويمكن أن تطبق على نماذج الانحدار كما يمكن تطبيقها على أي علاقة مجتمع تحتوي على معالم مجهولة، إلا ان طريقة الإمكانية العظمى تتطلب أجراء حسابات معقدة عكس طريقة المربعات الصغرى وتشترك معها في الحصول على المقدرات الخاصة بالنموذج البسيط أي نتحصل على مقدرات الإمكانية العظمى تتطابق مع مقدرات المربعات الصغرى العادية ، لكن في نماذج أخرى اكثر تعقيدا نرى أن مقدرات الإمكانية العظمى تختلف عن مقدرات المربعات الصغرى العادية.

ب-مقدرات الإمكانية العظمى: هي تلك القيم التي تعظم إمكانية (الاحتمال) الحصول على العينة المشاهدة والمستخدمة في التقدير. حيث يصاحب هذه القيمة عند التعويض عن قيمة المعلمة في الدالة الاحتمالية الاكبر احتمال لوقوع قيم العينة، اي انه عند هذه القيمة نحصل على نهاية عظمي لدالة الكاثة الاحتمالية المشتركة للعينة[1] .

ج- منهجية الإمكانية العظمى: نبدأ بنموذج الانحدار البسيط: $Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i$

الخطوة الأولى : افترضنا أن المتغير العشوائي يتوزع توزيع طبيعيا.

الخطوة الثانية: تحديد دالة الاحتمال أو دالة الكثافة الاحتمالية *Probability Density Function* الخاصة بالعناصر العشوائية.

الخطوة الثالثة: انطلاقا من دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي يتم الحصول على دالة الاحتمال الخاصة بالمتغير التابع، ثم يعمم على العينة.

الخطوة الرابعة: تعظم تلك الدالة بالنسبة لقيم المعالم فنتحصل على مقدرات الإمكانية العظمى.

ويمكن تتبع الخطوات السابقة كمايلي :

1وليد اسماعيل السيفو، فيصل مفتاح شلوف، صائب جواد ابراهيم، مشاكل الاقتصاد القياسي التحليلي، مصدر سابق، ص 323.

1- دالة الكثافة الاحتمالية للعنصر العشوائي u_i هي دالة توزيع طبيعي معروفه تكتب على النحو التالي[1] :

$$\int(c_t)=\frac{1}{(2\pi\sigma^2)_{1/2}}e^{-1/2\left\{\frac{u-0}{\sigma^2}\right\}}:$$

حيث أن $\pi= -3.14$ و $e=2.718$

الجزء الثاني من المعادلة هو مربع $u^{1/2}$ مضروب في المتغير العشوائي مطروح من الوسط ومقسوم على الانحراف المعياري ، وبالتعويض بالمتوسط الصفري يمكن كتابتها كما يلي:

$$\int(c_t)=\frac{1}{(2\pi\sigma^2)_{1/2}}e^{-1/2\left\{\frac{u_t^2}{\sigma^2}\right\}}$$

2- تحدد دالة الاحتمال المشتركة *join Density Function* أي دالة العناصر العشوائية والتي تكون عادة بعدد n : $e_1, e_2, \ldots\ldots e_n$،وحيث أن العنصر العشوائية غير مرتبطة مع بعض يمكن كتابة دالة الاحتمال المشتركة كما يلي:

$$\int(u_i\ldots\ldots\ldots u_n)=\int(u_1)\int(u_1)\ldots\ldots\int(u_n)$$

تعوض الدوال بقيمتها من معادلة دالة الكثافة الاحتمالية للعشوائي

$$\int(u_t)=\frac{1}{(2\pi\sigma^2)_{1/2}}e^{-1/2\left\{\frac{u_t^2}{\sigma^2}\right\}}\times\frac{1}{(2\pi\sigma^2)_{1/2}}e^{-1/2\left\{\frac{u_t^2}{\sigma^2}\right\}}\ldots\ldots\frac{1}{(2\pi\sigma^2)_{1/2}}e^{-1/2\left\{\frac{u_t^2}{\sigma^2}\right\}}$$

$$=\left\{(2\pi\sigma^2)_{1/2}\right\}^n e^{-1/2\left\{\frac{\sum u_t^2}{\sigma^2}\right\}}$$

3-استخلاص دالة الاحتمال الخاصة بالمتغير التابع Y، حيث أن المتغير التابع يعتمد على المتغير العشوائي. ثم يعمم على العينة.

حيث أن : $u_i=Y-\{\alpha+\beta_i X\}$

نعوض بقيمة u من دالة الإمكانية العظمى: $$=\left\{(2\pi\sigma^2)_{1/2}\right\}^n e^{-1/2\left\{\frac{\sum (y-\alpha-\beta X)_t^2}{\sigma^2}\right\}}$$

تعتبر هذه المعادلة دالة الاحتمال المشتركة وتسمى بدالة الإمكانية العظمى ويرمز لها بالرمز ℓ

$$\ell=f(Y_1).f(Y_2)\ldots.f(Y_{ni})$$

1وليد اسماعيل السيفو، فيصل مفتاح شلوف، مصدر سابق، ص 324.

ومن دالة الاحتمال المشتركة يمكن الحصول مقدرات الإمكانية العظمى بهذه المعادلة. المطلوب هو أيجاد القيم للمقدرات التي تعظم احتمال العثور على القيم الخاصة بـ Y، أي أن المعيار في دالة الإمكانية العظمى يتطلب تعظيم دالة الامكانية العظمى.

ويكون الاحتمال المشترك(جالة احتمالية) لكل n قين عينة هي ناتج احتمالات المنفردة حيث ان قيم Y مستقلة حاحداها عن الاخرى[1].

لتعظيم أي دالة من الدوال يجب أجراء التفاضل حسب متطلبات شرط الدرجة الأولى لكل من α، β ومساواته بالصفر:

للتبسيط نأخذ لوغاريتم الدالة : $\ell = f(Y_1).f(Y_2)....f(Y_{ni})$

$$L\ell = \sum lnf(Y_1)$$

$$\ell = \left\{(2\pi\sigma^2)_{1/2}\right\}^n e^{-1/2\left\{\frac{\sum (y-\alpha-\beta X)_t^2}{\sigma^2}\right\}}$$

$$ln\,\ell = -\frac{n}{2}ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum (y-\alpha-\beta X)^2$$

$$ln\,\ell = -\frac{n}{2}ln(2\pi) - \frac{n}{2}ln\,\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma}\sum (y-\alpha-\beta X)^2$$

الغرض من كتابة المعادلة على الصورة المختلفة هو عزل التباين σ^2 عن الثابت (2π). ومن ذلك يمكن التوصل إلى مقدرة معلمة التباين لهذا تعتبر طريقة الإمكانية افضل من طريقة المربعات الصغرى لأنها تعطينا بالأضافه إلى مقدرة β،α تعطينا مقدرة σ^2.

و يتم أجراء التفاضل الذي يعظم دالة الإمكانية اختيار المقدرات التي تعظم الدالة كمايلي

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = -\frac{1}{2\sigma}\sum 2(y-\alpha-\beta X)(-1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = -\frac{1}{2\sigma}\sum 2(y-\alpha-\beta X)(-X_t)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma} = -\frac{1}{2\sigma} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum (y-\alpha-\beta X)^2$$

للحصول على المجاهيل نحل المعادلات الثلاث ومساواتها بالصفر. يمكن الحصول على المعادلات التالية[2] :

1وليد اسماعيل السيفو، فيصل مفتاح شلوف، صائب جواد ابراهيم، مشاكل الاقتصاد القياسي التحليلي، مصدر سابق، ص 332.

2وليد اسماعيل السيفو، فيصل مفتاح شلوف، صائب جواد ابراهيم، مشاكل الاقتصاد القياسي التحليلي، مصدر سابق، ص 333.

$$\sum Y_i = -\tilde{\alpha} n + \tilde{\beta}(\sum X_i)$$
$$\sum X_i Y_i = \tilde{\alpha}(\sum X_i) + \tilde{\beta}(\sum X_i^2)$$

هذه المعادلتين هي نفس المعادلتين التي تم الحصول عليها في طريقة المربعات الصغرى العادية أي إن الإمكانية العظمى تقود إلي نفس المعادلات الطبيعية التي تم الحصول عليها في طريقة م ص ع ولكن استخدمنا رموز جديده لمقدرات الإمكانية العظمي أي المقدرات التي تعظم دالة الإمكانية: $\tilde{\beta}, \tilde{\alpha},$

وبحل المعادلتين أما بطريقة المصفوفات أو بالمعادلات الآنية أو بطريقة *Cramer* وباتباع أي من هذه الطرق نتحصل على صيغة خاصة ب مقدرات الإمكانية العظمى:

$$\boxed{\tilde{\beta}_0 = \bar{Y} - \tilde{\beta}_1 \bar{X}} \qquad \boxed{\tilde{\beta}_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}}$$

وهي نفس صيغة مقدرة المربعات الصغرى العادية. في حالة النموذج الخطي البسيط. أما في النماذج المتعددة فلا تكون المقدرات متطابقة .

4– توزيع المعاينة للمقدرات والتقدير بالمجال للمقدرات:

4–1 تباين المقدرات $var(\hat{\beta}_i)$

تباين اي قيمة تتوزع حول وسط معين هو معدل تشتت هذه القيم عن الوسط ويكون القانون الخاص بتباين

أ–تباين المعلمة (الثابت) $\hat{\beta}_0$

انطلاقا من خاصية الاوزان وخاصية عدم التحيز لدينا:

$$\hat{\beta}_0 - \beta_0 = \beta_1 \bar{X} + \bar{\varepsilon} - \hat{\beta}_1 \bar{X} = \bar{\varepsilon} - (\hat{\beta}_1 - \beta_1)\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n} - w_i \bar{X}\right)\varepsilon_i = \sum_{i=1}^{n} w_i^* \varepsilon_i$$

ونقوم بتربيع المقدار السابق فنجد: $\left(\hat{\beta}_0 - \beta_0\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i^{*2} \varepsilon_i^2 + 2\sum_i \sum_j w_i^* w_j^* \varepsilon_i \varepsilon_j$

بإدخال التوقع الرياضي على الطرفين:

$$E\left(\left(\hat{\beta}_0 - \beta_0\right)^2\right) = \sum_{i=1}^{n} w_i^{*2} E(\varepsilon_i^2) + 2\sum_i \sum_j w_i^* w_j^* E(\varepsilon_i \varepsilon_j)$$

وحيث ان: $E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0$ ، $E(\varepsilon_i^2) = \sigma_\varepsilon^2$ و كذلك : $w_i^* = \frac{1}{n} - w_i \bar{X}$

اي: $\sum_{i=1}^{n} w_i^{*2} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n^2} + w_i^2 \bar{X}^2 - \frac{2}{n} w_i \bar{X}\right) = \frac{1}{n} + \sum_{i=1}^{n} w_i^2 \bar{X}^2$ ومنه نجد ان تباين المعلمة $\hat{\beta}_0$ هو :

$$\operatorname{var}(\hat{\beta}_0)=\left(\frac{1}{n}+\frac{\overline{X}^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}\right)\sigma_\varepsilon^2=\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}\right)\sigma_\varepsilon^2$$

ب–تباين المعلمة: $\hat{\beta}_1$

لدينا : $\hat{\beta}_1-\beta_1=\sum_{i=1}^{n}w_i\varepsilon_i$ نقوم بتربيع المقدار فنجد :

و بإدخال الامل الرياضي نجد:

$$\operatorname{var}(\hat{\beta}_0)=\frac{\sigma_\varepsilon^2}{n}+\overline{X}^2\operatorname{var}(\hat{\beta}_1)$$

$$E(\varepsilon_i^2)+2\sum_i\sum_j w_iw_jE(\varepsilon_i\varepsilon_j)$$

بمأن $E(\varepsilon_i\varepsilon_j)=0$ و $(\varepsilon_i^2)=\sigma_\varepsilon^2$

$$)=\sigma_\varepsilon^2\sum_{i=1}^{n}w_i^2=\frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$$

- هناك علاقة بين تباين المقدرتين وهي تعطى بالشكل التالي:

- التباين المشترك لـ $\hat{\beta}_0$ و $\hat{\beta}_1$ هو :

$$cov(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1)=-\overline{X}\,var(\hat{\beta}_1)$$

من خلال العلاقات الاخير نلاحظ انه كلما كانت عدد المشاهدات كبيرا $n\to\infty$ وكذلك $\sum(x_t-x)^2$ فإن $var(\hat{\beta}_1)$ تؤوول قيمته الى الصفر(0)، لان σ_ε^2 قيمة ثابتة:

في ميدان الاحصاء نعلم ان الانحرافات المعيارية هي الجذور التربيعية للتباينات وبالتالي فان الاخطاء المعيارية هي كذلك الجذور التربيعية لتباين المقدرات:

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}=\sqrt{\operatorname{var}(\hat{\beta}_0)}=\sigma_\varepsilon\sqrt{\frac{\sum X_i^2}{n\sum(X_i-\overline{X})^2}}$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}=\sqrt{\operatorname{var}(\hat{\beta}_1)}=\frac{\sigma_\varepsilon}{\sqrt{\sum(X_i-\overline{X})^2}}$$

بمان الاخطاء المعيارية للمقدرات تكون مجهولة لانها مرتبطة باخطاء التقدير (او حد الخطأ)، فينبغي تقدير قيم تباين الاخطاء او تباين البواقي كمايلي :

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i, \quad i = 1.........n$$
$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$$
$$\overline{Y} = \beta_0 + \beta_1 \overline{X} + \overline{\varepsilon}$$

$$\hat{\varepsilon}_i = Y_i - \hat{Y}_i = (\beta_0 - \hat{\beta}_0) + (\beta_1 - \hat{\beta}_1) X_i + \varepsilon_i$$

نقوم بتعويض قيمة المقدار $\beta_0 - \hat{\beta}_0$ بمايساويه كذلك قيمة المعلمة $\hat{\beta}_0$ بمايساويها فنتحصل:

$$\beta_0 - \hat{\beta}_0 = \beta_0 - \overline{Y} + \hat{\beta}_1 \overline{X} = \beta_0 - (\beta_0 + \beta_1 \overline{X} + \overline{\varepsilon}) + \hat{\beta}_1 \overline{X} = (\hat{\beta}_1 - \beta_1)\overline{X} - \overline{\varepsilon}$$

فتصير المعادلة كمايلي:

$$\hat{\varepsilon}_i = (\beta_1 - \hat{\beta}_1) X_i + (\hat{\beta}_1 - \beta_1)\overline{X} + (\varepsilon_i - \overline{\varepsilon}) = (\beta_1 - \hat{\beta}_1)(X_i - \overline{X}) + (\varepsilon_i - \overline{\varepsilon})$$

ومع التربيع لطرفي المعادلة تصبح:

$$\hat{\varepsilon}_i^2 = (\beta_1 - \hat{\beta}_1)^2 (X_i - \overline{X})^2 + (\varepsilon_i - \overline{\varepsilon})^2 + 2(\beta_1 - \hat{\beta}_1)(X_i - \overline{X})(\varepsilon_i - \overline{\varepsilon})$$

ولدينا سابقا: $\hat{\beta}_1 - \beta_1 = \sum_{i=1}^{n} w_i \varepsilon_i \Rightarrow \left(\hat{\beta}_1 - \beta_1\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i \varepsilon_i\right)^2$

وباستخدام الانحرافات نضع: $(X_i - \overline{X})^2 = x_i^2$

فتصير المعادلة بالشكل التالي: $\hat{\varepsilon}_i^2 = (\sum_{i=1}^{n} w_i \varepsilon_i)^2 x_i^2 + (\varepsilon_i - \overline{\varepsilon})^2 - 2(\sum_{i=1}^{n} w_i \varepsilon_i) x_i (\varepsilon_i - \overline{\varepsilon})$

مقدرة القاطع: $V(\hat{\alpha}) = E\{\hat{\alpha} - E(\hat{\alpha})\}^2$

بإجراء بعض الخطوات يمكن إن نبرهن إن تباين $\hat{\alpha}$ يساوي: $V(\hat{\alpha}) = \dfrac{\sigma^2 \sum X^2}{n \sum x^2}$

اما القانون الخاص بتباين $\hat{\beta}$: $V(\hat{\beta}) = \{\hat{\beta} - E(\hat{\beta})\}^2$

كما ان التباين الخاص بـ $\hat{\beta}$ يساوي $V(\hat{\beta}) = \dfrac{\sigma^2}{\sum x^2}$

4-2مجالات الثقة للمعلمات

بمعرفة توزريع ي $\hat{\beta}_0$، $\hat{\beta}_1$ مكن تكوين مجالات ثقة وإجراء اختبار الفرضيات الموضوعة حو معالم الانحدار لـβ_0 وβ_1 على التوالي، نعطي مجالا للقيم التي يمكن أن تحتوي عليه معالم الانحدار الحقيقية، مع كل مجال ثقة نضع مستوى إحصائيا للمعنوية، حيث أن احتمال احتواء المجال المذكور على معلمة الانحدار الحقيقية يكون واحد مطروحا منه مستوى المعنوية اي $(1-\alpha)$ولتكوين مجال الثقة من التوزيع t بالنسبة معالم الانحدار لـβ_0 وβ_1 نكتب القانون الخاص لكل معلمة.

- اذا كان $n \leq 30$ و σ^2 غير معروف:

$\frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}}$: يتبع توزيع ستودنت بدرجة حرية n-2: $t(n-2)$ $\sim$ $\frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}}$

$\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}$: كذلك يتبع توزيع ستودنت بدرجة حرية n-2: $t(n-2)$ $\sim$ $\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}$

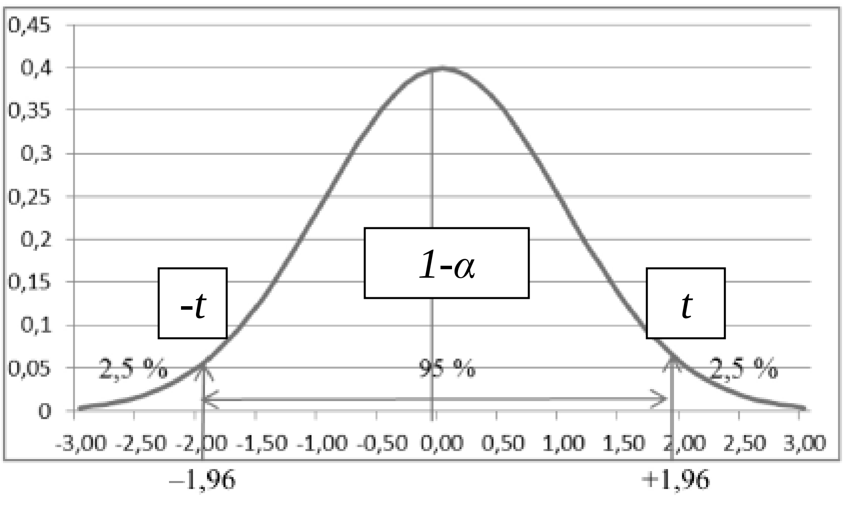
عند مستوى معنوية α% يكون مجال الثقة للمعلمتين:

$$\Pr\left[-t_{n-2,\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}} \leq +t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha$$

$$\Pr\left[-t_{n-2,\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} \leq +t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha$$

فيكون توزيع المعاينة ثنائي الطرف كمايلي :

الشكل رقم :(04) توزيع المعاينة ثنائي الطرف لـ $\hat{\beta}_1$



المصدر: **Bourbonnais R, Econométrie, 9emeEdition, Dunod, Paris, 2015, p28 .**

إذا ضربنا(داخل الاحتمال) كل الأطراف بواسطة $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}$ ($\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}$) ثم اضفنا لذات المتراجحة β_0 (β_1) نجد

$$\beta_0 \in \left[\hat{\beta}_0 - t_{n-2,\frac{\alpha}{2}} \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}, \hat{\beta}_0 + t_{n-2,\frac{\alpha}{2}} \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}\right]$$

$$\beta_1 \in \left[\hat{\beta}_1 - t_{n-2,\frac{\alpha}{2}} \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}, \hat{\beta}_1 + t_{n-2,\frac{\alpha}{2}} \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}\right]$$

- اذا كان $n \geq 30$ و σ^2 معروف:

$$\hat{\beta}_0 \sim N\left(\beta_0 \,،\, \hat{\sigma}_\varepsilon \sqrt{\frac{\sum X_i^2}{n\sum x_i^2}}\right)$$

$$\hat{\beta}_1 \sim N\left(\beta_1 \,،\, \hat{\sigma}_\varepsilon^2 \frac{1}{\sum x_i^2}\right)$$

وعند تحويله الى التوزيع الطبيعي المعياري يصبح بالشكل التالي:

$$\frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}} \rightsquigarrow N(0,1)$$

$$\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} \rightsquigarrow N(0,1)$$

عند مستوى معنوية α% يكون مجال الثلة لكلا المعلمتين هو :

$$\Pr\left[-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}} \leq +z_{\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha$$

$$\Pr\left[-z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} \leq +z_{\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha$$

بنفس الطريقة نقوم بضرب(داخل الاحتمال)كل الأطراف بواسطة $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}$ $(\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1})$ ثم نضيف β_0 (β_1) نجد

$$\beta_0 \in \left[\hat{\beta}_0 - z_{\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0} \,,\, \hat{\beta}_0 + z_{\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}\right]$$

$$\beta_1 \in \left[\hat{\beta}_1 - z_{\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} \,,\, \hat{\beta}_1 + z_{\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}\right]$$

$z_{\frac{\alpha}{2}}$: القيمة الحرجة للتوزيع الطبيعي بنسبة معنوية $(\%\alpha)$ ونجد من جدول التوزيع القيمة المحسوبة .كلما

كان مجال الثقة ضيقا كلما كان المقدر أحسن، لأن الأخطاء المعيارية تكون أصغر.

4-3مجال الثقة لتباين الاخطاء

نبني أيضا مجال الثقة لـ σ^2 :

$$\chi^2_\alpha(n-2) \sim \frac{(n-2)\hat{\sigma}^2_\varepsilon}{\sigma^2_\varepsilon}$$

حيث : $\chi^2_\alpha(n-2)$ القيمة الحرجة χ^2 لتوزيع بدرجة حرية n-2 نجد:

$$\Pr\left[\chi^2_{\alpha/2} \le \frac{(n-2)\hat{\sigma}^2_\varepsilon}{\sigma^2_\varepsilon} \le \chi^2_{1-\alpha/2}\right] = 1-\alpha \Rightarrow \Pr\left[\frac{(n-2)\hat{\sigma}^2_\varepsilon}{\chi^2_{1-\alpha/2}} \le \sigma^2_\varepsilon \le \frac{(n-2)\hat{\sigma}^2_\varepsilon}{\chi^2_{\alpha/2}}\right] = 1-\alpha$$

ومنه يكون مجال الثقة لتباين حد الخطأ:

$$\sigma^2_\varepsilon \in \left[\frac{(n-2)\hat{\sigma}^2_\varepsilon}{\chi^2_{1-\alpha/2}}, \frac{(n-2)\hat{\sigma}^2_\varepsilon}{\chi^2_{\alpha/2}}\right]$$

مثال:

تبين النتائج التالية تقديرا لاحدى النماذج :

$$\hat{Y}_i = 0.21X_i + 10.89$$

حيث نقوم بحساب تباين المعلمات $\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_1}$ و $\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_0}$ و الاخطاء المعيارية لها وهذا انطلاقا من تباين الاخطاء $\hat{\sigma}^2_\varepsilon$

جدول رقم 03

$\hat{\varepsilon}_i^2$	$\hat{\varepsilon}_i$	$\hat{Y}_i$	Y_i	i
0.42	-0.65	19.12	18.47	1
0.04	0.22	19.66	19.89	2
0.005	0.07	21.18	21.26	3
0.61	0.78	22.92	23.71	4
0.002	-0.04	25.57	25.53	5
0.21	-0.46	27.41	26.95	6
0.008	0.09	29.38	29.48	7
1.32	0			المجموع

نقوم اولا بحساب البوقي انطلاقا من العبارة : $\hat{\varepsilon}_i = Y_i - \hat{Y}_i$

تباين البواقي :

$$\hat{\sigma}^2_\varepsilon = \frac{\sum_{i=1}^{7}\hat{\varepsilon}_i^2}{n-2} = \frac{1.32}{7-2} = 0.26$$

نقوم باستنتاج تباين المعلمات :

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}^2 = \text{var}(\hat{\beta}_1) = \frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{\sum_{i=1}^{7}(X_i - \overline{X})^2} = \frac{0.26}{2114.25} = 0.000124$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}^2 = \text{var}(\hat{\beta}_0) = \frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{n} + \overline{X}^2 \text{var}(\hat{\beta}_1) = \frac{0.26}{7} + (60.57)^2(0.000124) = 0.49$$

تكون الاخطاء المعيارية هي الجذر التربيعي للتباينات كمايلي :

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} = \sqrt{\text{var}(\hat{\beta}_1)} = \sqrt{0.000124} = 0.011$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0} = \sqrt{\text{var}(\hat{\beta}_0)} = \sqrt{0.49} = 0.7$$

مجالات الثقة :

$$\beta_0 \in \left[\hat{\beta}_0 - t_{0.025}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}, \hat{\beta}_0 + t_{0.025}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}\right]$$

$$\beta_1 \in \left[\hat{\beta}_1 - t_{0.025}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}, \hat{\beta}_1 + t_{0.025}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}\right]$$

حيث ان $t_{0.025}$ هي القيمة الحرجة لتوزيع ستيودنت بنسبة معنوية 5%، ودرجة حرية $n-2$ التي تعادل القيمة 2.750 في جدول توزيع ستيودنت .بالتطبيق العددي لدينا:

$$\beta_0 \in [10.89 - 2.570 \times 0.7,\ 10.89 + 2.570 \times 0.7]$$

أي:

$$\beta_0 \in [9.09\ ,\ 12.68]$$

و:

$$\beta_1 \in [0.21 - 2.570 \times 0.011\ ,\ 0.21 + 2.57 \times 0.011]$$

هذا يعني:

$$\beta_1 \in [0.18, 0.23]$$

5- اختبار الفرضيات

يمكن إجراء اختبار الفرضيات الموضوعة حول معا لم النموذج

ولاختبار الفرضية الخاصة بمعنوية المعلمات α ، β وتسمى فرضية العدم H_0 فإننا نختبر هل $\hat{\beta}$ تساوي 0 أم تختلف عنها مادام ان العلاقة بين X وY مبينة على اساس الخطية، فإن انعدام هذه العلاقة يعني بأن خط انحدار المجتمع هو عبارة عن خط أفقي، أي $(H_0 : \beta_1 = 0)$ ونرفض فرضية انهما متساويان اي يكون على الشكل : $H_1 : \beta_1 \neq 0$. وحسب اشارة المقدرة β_1 فقد نستطيع كتابة الفرض البديل بالشكل التالي

$H_1 : \beta_1 > 0$ (أو $H_1 : \beta_1 < 0$).

ومنه يقوم هذا الاختبار على فرضيتين عموما الفرضية الصفرية H_0 والتي تنص على عدم يوجد أثر على النموذج من قبل متغير مستقل ما،

$$\begin{cases} H_0 : \beta_1 = 0 \\ H_1 : \beta_1 \neq 0 \end{cases}$$

ولاختبار صحة إحدى الفرضيتين H_1،H_0 نستخدم الاختبارين ستودنت T واختبار فيشر F ونظرا إلى أن الباحثين يتمنون قبول النموذج، فإن فرضية العدم توضع عادة لإثبات رفضها إذا أمكن ذلك . ونأمل رفض الفرضية الصفرية H_0 بإيجاد القيمة التقديرية والتي تكون تختلف عن الصفر، حتى نقبل النموذج.

1-5 اختبار ستودنت T [1] :

ويتم هذا الاختبار بحساب الإحصائية التالية:
$$T_c = \left| \frac{\hat{\beta} - \beta}{\delta_{\hat{\beta}}} \right|$$

حيث $\hat{\beta}$ القيمة المقدرة ل β و :$\delta_{\hat{\beta}}$. الانحراف المعياري لـ $\hat{\beta}$، ، وبما أن الفرضية H_0 تنص على انعدام β معناه قيمة T تصبح :
$$T_c = \left| \frac{\hat{\beta}}{\delta_{\hat{\beta}}} \right|$$

نتيجة الاختبار: يتم قبول او رفض الفرضية H_0 : بمقارنة قيمة (T) المحسوبة المحصل عليها مع القيمة المجدولة عند درجة الحرية $(n - k)$، حيث:

k هو عدد المتغيرات في هذه الحالة ، وn هو عدد المشاهدات.

ويتم رفض الفرضية H_0 اذا كان $T_t < T_c$ اي ان $\hat{\beta} \neq 0$ معناه ان المتغير له تأثير في النموذج وذات معنوية ويتم قبول الفرضية H_0 اذا كان $T_t > T_c$ اي ان $\hat{\beta} = 0$ معناه ان المتغير ليس له تأثير في النموذج . حيث ان T_t هي قيمة ستودنت المجدولة لدرجة حرية $n\text{-}k$ عند مستوى معنوية : $\alpha = 5\%$.

توجد عدة تساؤلات لدى باحثي الاقتصاد القياسي عن افضلية معامل التحديد R^2 (مربع معا لم الارتباط r^2) او الانحارافات المعيارية للمقدرات $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}$ حيث ايهما افضل:قيمة عالية لمعامل التحديد ام قيم متدنية للانحرافات المعيارية؟

1بن أحمد أحمد، النمذجة القياسية للاستهلاك الوطني للطاقة الكهربائية في الجزائر خلال الفترة (1988:10-2007:03)،رسالة ماجستير،فرع اقتصاد كمي، جامعة الجزائر 03، 2007-2008،ص 63.

تكون الاجابة واضحة واتفاق حول الاجابة اذا كانت هناك قيمة عالية لمعامل التحديد وفي نفس الوقت قيم منخفضة للاخطاء الامعيارية للمعلمات ولكن في الواقع الخاص بالدراسات الاقتصادية نجد ان هذا الامر نادر الحدوث فكثيرا مانجد قيما مرتفعة لمعامل الاتحديد مع قيم كبيرة ايضا للاخطاء المعيارية

ويرى في هذا السياق بعض منظري النظرية الاقتصادية ان تعطى الاهمية لمعامل التحديد العالية ثم يقبلون قيم مقدرات المعلمات دون مراعاة جدية معنويتها[1].

مثال:

باستعمال معطيات المثال الأول، نقوم باختبار المعنوية الإحصائية للمعالم ندرس أولا إمكانية قبول المقدرات كتقديرات جيدة للمتغيرات فمثلا هل يختلف الميل الحدي للاستهلاك معنويا عن الصفر؟

باستعمال اختبار ستودنت t لدينا الفرضيتين:

$$H_0 : \beta_1 = 0$$
$$H_1 : \beta_1 \neq 0$$

لدينا : $\dfrac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}$ وهي تتبع توزيع ستيودنت بدرجة حرية $(n - 2)$ وبتعويض قيمة بالقيمة صفر $\beta_1 = 0$

تصبح قيمة ستودنت المحسوبة كمايلي : $t_c = \dfrac{\hat{\beta}_1 - 0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} = \dfrac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}$ اي $t_c = \dfrac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} = \dfrac{0.21}{0.011} = 18.81$

بعد نتيجة قيمة المحسوبة t_c نقوم بمقارنتها مع قيمة ستودنت الجدولية t_t بدرجة حرية $(n\text{–}2\text{=}5)$ ومستوى معنوية 5% ، $|t_c| = 18.81 > t_{0.025} = 2.57$

ومنه فاننا نرفض الفرضية H_O ونقبل الفرضية البدلية H_1 أي أن الميل الحدي للاستهلاك يختلف معنويا عن الصفر

2–5 اختبار فيشر F

يوضح لنا هذا النموذج دلالة النموذج بصورة عامة، ويأخذ الشكل التالي:

*فرضية العدم H_0: نموذج الانحدار غير معنوي (جميع معاملات الانحدار لا تختلف عن الصفر).

* الفرضية البديلةH_1: نموذج الانحدار معنوي (واحد على الأقل من معاملات الانحدار يختلف عن الصفر)

ويمكن كتابة ذلك اختصارا:

$$H_0 : \beta_0 = \beta_1 = 0$$
$$H_1 : \beta_1 \neq 0$$

1 تومي صالح، مرجع سابق، ص 59.

وتتم التحقق من صحة احدى الفرضيات إذا كانت قيمة الاحتمال P. Value أقل من مستوى المعنوية 5%فإننا نرفض الفرض العدمي، والعكس صحيح.

او عن طريق مقارنة بين احصائيتين لفيشر فالاحصائية المحسوبة لفيشر معطاة بالعلاقة التالية :

$$F=\frac{\hat{\beta}_1^2\sum x_i^2}{RSS/(n-2)}=\frac{ESS/1}{RSS/(n-2)}\sim F_{1,n-2}$$ او $$Fc=\frac{SSR}{SSE/n-2}$$

$$F^*=\frac{\frac{SCE}{ddl_{SCE}}}{\frac{SCR}{ddl_{SCR}}}=\frac{\frac{\sum_t(\widehat{y}_t-\overline{y})^2}{1}}{\frac{\sum_t e_t^2}{(n-2)}}=\frac{\frac{R^2}{1}}{\frac{(1-R^2)}{(n-2)}}$$

وتتم مقارنتها بالاحصائية الجدولية لدرجتي حرية *1*و *n-2* عند مستوى معنوية دائما $\alpha\%$. ويتم رفض فرضية العدم اذا كان $F_c > F_t$ اي:

$$F_{1,n-2}=\frac{\hat{\beta}_1^2\sum x_i^2}{RSS/(n-2)}=\frac{ESS/1}{RSS/(n-2)}>F_{\alpha,(1,n-2)}$$

والعكس صحيح بمعنى :

$$F_{1,n-2}=\frac{\hat{\beta}_1^2\sum x_i^2}{RSS/(n-2)}=\frac{ESS/1}{RSS/(n-2)}\leq F_{\alpha,(1,n-2)}$$

3-5 العلاقة بين معامل التحديد R^2، F و t

$$\begin{aligned}
F &= \frac{SCE/1}{SCR/(n-2)}\\
&= \frac{\sum_i(\hat{y}_i-\bar{y})^2}{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}\\
&= \frac{\sum_i(\hat{a}x_i+\hat{b}-\bar{y})^2}{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}\\
&= \frac{\sum_i[\hat{a}x_i+(\bar{y}-\hat{a}\bar{x})-\bar{y}]^2}{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}\\
&= \frac{\hat{a}^2\sum_i(x_i-\bar{x})^2}{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}=\frac{\hat{a}^2}{\frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{\sum_i(x_i-\bar{x})^2}}\\
&= \frac{\hat{a}^2}{\hat{\sigma}_{\hat{a}}^2}=\left(\frac{\hat{a}}{\hat{\sigma}_{\hat{a}}}\right)^2\\
&= t_{\hat{a}}^2
\end{aligned}$$

من جانب اخر ونعلم ان قيمة فيشر هي : $F=\frac{R^2/1}{(1-R^2)/(n-2)}=\frac{R^2}{(1-R^2)}.(n-2)\sim F_{1,n-2}$

وبتجذير الطرفين نجد: $t=\frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}\sim t_{n-2}$

مثال :

ومتابعة للمثال السابق نقوم باختبار الآن المعنوية الكلية لنموذج الاستهلاك معتمدا على إحصائية فيشر .

لدينا الفرضيتان:

$$H_0:\beta_0=\beta_1=0$$

$$H_1:\beta_1\neq 0$$

نقوم بحساب قيمة فيشر المحسوبة Fc

$$F=\frac{R^2/1}{(1-R^2)/(n-2)}=\frac{0.9861/1}{(1-0.9861)/(7-2)}=354.02$$

يتم اتخاذ الفرار بمقارنة القيمة المحسوبة بالقيمة الحرجة لتوزيع فيشر بدرجتي حرية الاولى 1 والثانية 8 ونسبة معنوية 5% فنجد ان : $F=354.02>F_{0.05}(1,5)=6.60$

ومنه نرفض الفرضيةH_0 ونقبل الفرضية البديلةH_1 ومنه فالنموذج له معنوية احصائية اجمالا .

6 اختبار جودة النموذج (القوة التفسيرية) وتحليل التباين[1]

وتعني جودة التوفيق هو الوصول بواسطة طريقة المربعات الصغرى الى افضل صيغة للعلاقة بين والتي تعكس حقيقة العلاقة بين المتغيرين التابع والمستقل لاقرب دقة مع تبيان قوة هذه العلاقة وافضل مقياس لقوة هذه العلاقة هو معامل الارتباط الذي تتراوح قيمته بين الصفر والواحد صحيح بالاضافة الى معامل التحديد الذي يحدد قوة التأثير العامل المعني او المتغير المستقل على سلوك المتغير التابع وقوة التأثير تعكس قوة العلاقة بين المتغيرين x و y الذي يعني وجود رابطة او تأثير حقيقي للمتغير المستقل على التابع.

6–1 معامل الارتباط البسيط

إن الهدف من حساب معامل الارتباط الخطي r ، هو معرفة درجة الارتباط بين المتغيرات $Y . X$ وهو محصور بين $[+1;-1]$.

وتعطى عبارة معامل الارتباط r على الشكل التالي[2]:

[1]وليد اسماعيل السيفو، فيصل مفتاح شلوف، صائب جواد ابراهيم، اساسيات الاقتصاد القياسي مرجع سابق، ص 152.

2 Bourbonnais R., Econométrie , 3 éme édition, Dunod, Paris, 2003, p 21.

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}=\frac{COV(x_i,y_i)}{\sqrt{V(x)V(y)}}$$

-اذا كان $r=1$: معناه ان هناك ارتباط كلي (تام)موجب بين (y)و(x).

– اذا كان $r=-1$: معناه ان هناك ارتباط كلي (تام) سالب بين (y)و(x).

– اذا كان r=0 ، معناه لا يوجد ارتباط بين (y)و(x)

2-6 معامل التحديد R^2 وجدول تحليل التباين

أن المشكلة في استعمال البواقي كمقياس لجودة التوفيق هو أن قيمة البواقي تعتمد على المتغير التابع الذي نعرفه حول وسطه كما يلي[1]:

$$SST=\sum y_i=\sum(Y-\bar{Y})^2$$
$$SSR=\sum\hat{y}^2=\beta\sum x_i^2=\sum(\hat{Y}-\bar{Y})^2$$
$$SSE=\sum u_i^2=\sum(\hat{Y}-Y)^2$$
$$SST=SSR+SSE$$

SST *Total Sum of Squares*	مجموع المربعات الإجمالي للتغيرات التي تحدث في المتغير التابعY
SSR *Regression Sum of Squares*	يسمى بمجموع مربعات الانحدار يعني جزء من تباين Y الذي تم تفسيره بواسطة الانحدار. إي الجزء من المتغيرات التي تحدث في المتغير التابع والذي تم تفسيرها بواسطة النموذج المقدر
SSE *Error*	مجموع مربعات البواقي، $\sum u^2$, وهذا مؤشر للجزء الذي لم يفسر بواسطة نموذج الانحدار، إي الجزء الذي فشل النموذج في تفسيره

ويمثل معامل التحديد نسبة مجموع مربعات الانحدار إلي مجموع المربعات الإجمالي:

$$R^2_{xy}=\frac{SSR}{SST}=\frac{SST-SSE}{SST}=\frac{\hat{\beta}\sum xy}{\sum y_i^2}$$

R^2 : يقيس ويشرح نسبة الانحرافات الكلية أو التغيرات التي تحدث في المتغير التابعYوالمشروحة بواسطة تغيرات المتغير المستقل X ،حيث تتراوح قيمته بين صفر وواحد، فهو إذن مقياس للقدرة التفسيرية للنموذج

1 المرسي السيد الحجازي، عبد القادر محمد عطية" **مقدمة في الاقتصاد القياسي:المبادئ والتطبيقات**، الرياض، النشر العلمي والمطابع، 2001 .ص 112.

أي يختبر جودةالتوفيق و الارتباط.

ويعتبر R^2 من أهم المعاملات التي تقيس علاقة الارتباط بين متغيرين ووجود مثل هذه العلاقة يعني ضمنيا أن أحد هذين المتغيرين يعتمد في تغيره أو في حدوثه على المتغير الآخر.

$$0 \le R^2 \le 1$$

$$\sum(\hat{Y}_i - \overline{Y})^2 \le \sum(Y_i - \overline{Y})^2 \Rightarrow \frac{\sum(\hat{Y}_i - \overline{Y})^2}{\sum(Y_i - \overline{Y})^2} \le 1 \Rightarrow R^2 \le 1$$

$$\left.\begin{array}{l}\sum(\hat{Y}_i - \overline{Y})^2 \ge 0 \\ \sum(Y_i - \overline{Y})^2 > 0\end{array}\right\} \Rightarrow R^2 \ge 0$$

– إذا كانت مرتفعه أي قريبه من الواحد تعتبر X جيده في تفسير التغيرات في Y.

إذا كانت قريبه من الصفر، فان المتغير لا يشرح إلا القليل من التغير في Y. أي ان الارتباط بين المتغير التابع و المستقل أي ليس للنموذج قدرة تفسيرية على الإطلاق ويعود ذلك إلى سببين، إما العلاقة الموجودة بين المتغيرين هي غير خطية أو غياب السببية بينهما[1].

نذكر أن الفرق الجوهري بين معامل التحديد و معامل الارتباط يكمن في السببية حيث يقيس معامل الارتباط العلاقة بين متغيرين بغض النظر عن الدور الذي يلعبه كل متغير، أما معامل التحديد فيقيس أيضا الارتباط ولكن يأخذ بعين الاعتبار السببية حيث المتغير X هو الذي يشرح التغيرات في Y.

ان العلاقة بين معامل الارتباط ومعامل والانحدار تتفق وتختلف حيث ان الارتباط يوضح علاقة الاقتران بين متغيرين دون تحديد نوع ووجود العلاقة السببية بينهما ، كما انه معطى بقيمة واحدة فهو لا يبين القيم التنبئية لاحدهما بواسطة الاخر.

اما اوجه الاتفاق بينهما فهو يتمثل في الاشارة فادا كان معامل الانحدار موجبا $\beta i>0$ فان معامل الارتباط يكون كذلك موجبا

* **العلاقة بين المعلمة** R^2 و $\hat{\beta}_1$.

$$R^2 = r^2 = \frac{(\mathrm{cov}(X_i, Y_i))^2}{(\sigma_{X_i}\sigma_{Y_i})^2} = \frac{\left(\frac{1}{n}\sum_i (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{1}{n}\sum_i (X_i - \overline{X})^2}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_i (Y_i - \overline{Y})^2}\right)^2}$$

فنتحصل على:

[1] محمد شيخي ، مرجع سابق، ص 40.

$$R^2=\frac{\frac{1}{n^2}\left[\sum_i (X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})\right]\left[\sum_i (X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})\right]}{\frac{1}{n^2}\sum_i (X_i-\bar{X})^2\sum_i (Y_i-\bar{Y})^2}$$

$$R^2=\frac{\hat{\beta}_1\sum (X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})}{\sum (Y_i-\bar{Y})^2}$$

بضرب المعادلة الاخيرة في $\sum (X_i-\bar{X})^2$ نحصل على :

$$R^2=\frac{\hat{\beta}_1\sum (X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})\sum (X_i-\bar{X})^2}{\sum (Y_i-\bar{Y})^2\sum (X_i-\bar{X})^2}=\frac{\hat{\beta}_1^2\sum (X_i-\bar{X})^2}{\sum (Y_i-\bar{Y})^2}$$

ومنه نقول :

$$\frac{\hat{\beta}_1^2\sum (X_i-\bar{X})^2}{\sum (Y_i-\bar{Y})^2}\quad R^2=\frac{ESS}{TSS}=\frac{\hat{\beta}_1\sum (X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})}{\sum (Y_i-\bar{Y})^2}$$

الانحدار يفترص وجود علاقة سببية بين المتغيرين محل البحث ويبين ايهما التبع وايهما المستقل وبالتالي يمكن

مثال:

باستعمال معطيات المثال السابق، نقوم بتحليل التباين ثم حساب معامل التحديد .نتساءل ما إذا كان لنموذج الاستهلاك قدرة تفسيرية عالية أم لا.

نقوم بحساب قيمة ESS انطلاقا من قيمتي TSSو RSS:

$$TSS=\sum_i (Y_i-\bar{Y})^2=95.05$$

$$RSS=\sum_{i=1}^{7}\hat{\varepsilon}_i^2=1.32$$

$$ESS=TSS-RSS=95.05-1.32=93.73$$

6-3 جدول تحليل التباين لمعادلة الانحدار ANOVA *(Analysis Of Variance)*:

هو تحليل مجموع المربعات الصغرى إلي مجموع مربعات البواقي ومجموع مربعات الانحدار، و الغرض من هذا التحليل هو اختبار معنوية مجموع مربعات الانحدار وهذا أيضا يدخل في اختبار معنوية المعامل β. ونمثل هذا التحليل في جدول تحليل التباين[1]:

1 أسامة ربيع أمين، "التحليل الإحصائي باستخدام برنامجSPSS مصر، المكتبة الأكاديمية، بدون سنة، ص 114 .

جدول رقم (04) : تحليل التباين *ANOVA*

التباين	مجموع المربعات	درجة الحرية	متوسط المربعات
مجموع مربعات الانحدار	$SSR=\sum\hat{y}^2=\hat{\beta}\sum xy=\hat{\beta}^2\sum x^2$	*k-1=2-1*	*SSR/1*
مجموع مربعات البواقي	$SSE=\sum u^2=\sum y^2-\sum\hat{y}^2$	*n-k=n-2*	*SSE/(n-2)*
مجموع مربعات الإجمالي	$SST=\sum y^2=\sum\hat{y}^2+\sum u^2$	*n-2=3*	$F=\frac{SSR}{SSE/n-k}$

مثال: يمكن تحليل تباين الاستهلاك كما هو مبين في الجدول التالي:

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجة الحرية	المربعات المتوسطة
المتغير المستقل	$ESS=93.73$	1	$ESS/1=93.73$
البواقي	$RSS=1.32$	$n-2=7-2=5$	$RSS/5=0.26$
المجموع	$TSS=95.05$	$n-1=7-1=6$	

وانطلاقا من الجدول السابق نقوم بحساب معامل التحديد R^2:

$$R^2=1-\frac{\sum\hat{\varepsilon}_i^2}{\sum(Y_i-\bar{Y})^2}=1-\frac{RSS}{TSS}=1-\frac{1.32}{95.05}=0.9861$$

من خلال نتيجة معامل التحديد، نلاحظ أن الدخل المتاح يفسر الاستهلاك بنسبة 98.61 %فالنموذج لديه قدرة تفسيرية عالية.

7.التنبؤ في الانحدار الخطي البسيط[1]

تتم عملية التنبؤ بواسطة طريقتين ، طريقة معادلة الانحدار و طريقة التقدير بواسطة قيمة معينة ضمن مجال وتسمى القيمة المتوقعة.

7–1التنبؤ باستخدام معادلة الانحدار:

معادلة الانحدار المقدرة $\hat{Y}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}X+u_t$ تستخدم في عملية التنبؤ لقيم Y لقيم محدده من X .

إذا كانت X_0 تمثل القيمة المحددة من X تستخدم في التنبؤ بقيمة Y_0 من قيم Y.

1 نور عبد الرحمن اليوسف، محاضرات في الاقتصاد القياسين جامعة الملك سعود، كلية العلوم الادارية، قسم الاقتصاد، غير منشورة ص 32.

$$\hat{Y}_0 = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X_0 + u_0$$

حيث u تمثل حد الخطأ.

حيث يمثل خطأ التنبؤ : $\hat{Y}_0 - Y_0 = (\hat{\alpha} - \alpha) + (\hat{\beta} - \beta)X_0 + u_0$

حيث إن $E(\hat{\alpha} - \alpha) = 0, E(\hat{\beta} - \beta) = 0, E(u_0) = 0$

إذا تكون $E(\hat{y}_0 - y_0) = 0$

هذه تعني إن قيمة Y هي قيمه غير متحيزة ويكون تباين يساوي:

$$V(\hat{y}_0 - y_0) = V(\hat{\alpha} - \alpha) + X_0^2 V(\beta - \beta) + 2X_0 COV(\hat{\alpha} - \alpha, \hat{\beta} - \beta) + V(u)$$

$$= \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum x_i^2} \right] + \sigma^2 \frac{X_0^2}{\sum x_i^2} - 2X_0 \sigma^2 \frac{\overline{X}}{\sum x_i^2} + \sigma^2$$

2-7التنبؤ للقيمة المتوقعة[1]:

قد يتم التنبؤ بالقيمة المتوقعة لY بدلا من Y_0 اي قيمة $E(Y_0)$ وهي القيمة المتوسطة ل$E(Y_0)$ وليس Y_0، فعند التنبؤ بالقيمة **المتوقعة فان** $E(Y_0) = Y_0$ **حيث أن** $E(Y_0) = \alpha + \beta X_0 + u_0$ فان القيمة المتنبأ بها تساوي: $\hat{E}(Y_0) = \hat{\alpha} + \hat{\beta}X_0 + u_0$ أي يساوي Y_0 ولكن الخطأ المعياري والتباين سيكون مختلفا وله اصغر قيمة:

$$\hat{E}(y_0) - E(y_0) = (\hat{\alpha} - \alpha) + (\hat{\beta} - \beta)X_0$$

التباين يساوي: $Var[E(y_0) - E(y_0)] = \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \overline{X})^2}{\sum x^2} \right]$

والخطأ المعياري يساوي الجذر التربيعي للتباين وفترة الثقة تساوي $\hat{E}(y_0) \pm t_T SE$

مثال

في المثال الاول تم تسجيل البيانات الخاصة بمتغيري الاستلاك x_t والدخل المتاحy_t :

$$\begin{aligned} y_t &= 1\,176{,}08 + 0{,}78\, x_t + e_t \\ &\quad\;\; (0{,}21) \qquad\quad (43{,}53) \\ n &= 10 \\ (\cdot) &= t \text{ de Student} \end{aligned}$$

ماهو الاثر على الاستهلاك اذا ارتفع الدخل بمقدار 8%

نقوم بقياس المرونة في حالة ثبات باقي المتغيرات الاخرى فنجد :

$$\Delta \hat{y}_t = \widehat{a}_1\, \Delta x_t \quad \text{soit} \quad \Delta \hat{y}_t = 0{,}78 \times \Delta x_t = 0{,}78 \times 0{,}08 = 0{,}062\,4$$

1نور عبد الرحمن اليوسف، مرجع سابق، ص33.

ان الاستهلاك ارتفع بمقدار6.24% وهي تعتبر اقل نسبيا مقارنة بالزيادة في الدخل

نستعمل دائما معطيات المثال والممتدة لعشر سنوات $n=10$ الأول للتنبؤ بالاستهلاك لسنة المقبلة 11 حيث:

التوقع النقطي للسنة 11 هو:

$$\begin{aligned}\widehat{y}_{11} &= 1\,176{,}08 + 0{,}78\, x_{11} = 1\,176{,}08 + 0{,}78 \times 16\,800 \\ &= 14\,280{,}08\end{aligned}$$

ومنه فمجال الثقة للسنة 11 :

$$y_{11} = \widehat{y}_{11} \pm t_{n-2}^{\alpha/2}\, \widehat{\sigma}_\varepsilon \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_{11}-\overline{x})^2}{\sum_t (x_t - \overline{x})^2} + 1}$$

بالتعويض العددي :

$$\begin{aligned} n &= 10 \\ \widehat{\sigma}_\varepsilon &= 143{,}69 \\ \sum_t (x_t-\overline{x})^2 &= 64\,156\,000 \\ \overline{x} &= 11\,280 \\ t_{n-2}^{\alpha/2} &= 2{,}306 \\ x_{11} &= 16\,800 \\ y_{11} &= 14\,280{,}08 \pm 2{,}306 \times 180{,}32 \\ IC &= [13\,864{,}24\,;\ 14\,695{,}91] \end{aligned}$$

اذن بمستوى ثقة 95% نجد ان الدخل المتاح سيكون ضمن هذا المجال[1].

تمارين مقترحة

①-اجب على الاسئلة التالية ؟

1- كيف يتم التعامل مع المتغيرات الإسمية أو الترتيبية في النماذج القياسية بشكل عام كمتغيرات تابعة أو مستقلة؟

2- بين مراحل البحث القياسي، ثم اذكر المقصود بما يلي:

مرحلة تقدير النموذج.

التقييم الاقتصادي للمقدرات.

التقييم الاحصائي للمقدرات

التقييم القياسي للمقدرات.

طرق تقدير القدرة التنبؤية للمعالم.

3- بين مفهوم وأهمية تحليل الارتباط في قياس العلاقات الاقتصادية، وكيف يستخدم معامل الارتباط كمؤشر للقياس والمدى الذي يسير فيه.

1 Bourbonnais R, Econométrie, 9emeEdition, Dunod, Paris, 2015, p42.

4- ما مفهوم مصفوفة الارتباط وعمَّ تعبر؟ وما الفرق بين مؤشر معامل ارتباط بيرسون ومعامل ارتباط سيبرمان ومتى يتم استخدام كل منهما.

متى يتم استخدام الانحدار البسيط وما علاقة الانحدار أو الارتباط مع مسألة السببية في الاقتصاد.

5- ما هي شروط النموذج الكلاسيك في طريقة "OLS" وما أهمية هذه الطريقة في تقدير معالم النموذج.

6- بين كيف يتم استخدام اختبار F، T، R2، B في اختبار الفرضيات كل على حدة.

②-

إذا كانت لدينا المعطيات الاحصائية عن عينة مكونة من 5 مشاهدات كالتالي:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)\left(Y_i-\overline{Y}\right)=70 \quad RSS=\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\hat{Y}\right)^2=1.5 \quad \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\overline{Y}\right)^2=124 \quad \sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2=40$$

$$\overline{X}=4 \qquad \overline{Y}=8$$

1- قدّر معلمات معادلة الانحدار $\hat{Y}_i=\hat{\alpha}+\hat{b}X_i$

2-احسب ESS ومعامل التحديد R^2 مع تفسير النتيجة.

3-احسب تباين المعلمات $\hat{\sigma}_b^{\,2}$ ، $\hat{\sigma}_{ai}^{\,2}$ والأخطاء المعيارية لها.

4- اختبر الفرضية: $\begin{cases} H_0: \beta_1=1 \\ H1: \beta_1\neq 1 \end{cases}$ عند مستوى معنوية $\alpha=5\%$.

5-اوجد مجال الثقة للمعلمتين .

ملاحظة: $t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{n-2}=t_{0.025}^{3}=3.182$

③

من خلال دراسة قياسية تم تقدير النموذج القياسي التالي : $Y_i=10.0+0.90\ X_i$

$$\hat{\sigma}_{ei}^{\,2}=0.01, \overline{X}=200, \sum x_i^2\,400 \qquad n=12$$

اذا كانت $m=(Y_f-\hat{Y}_f)$ تعبر عن خطأ التنبؤ ،

1- أوجد العلاقة بين تباين خطأ التنبؤ $\hat{\sigma}_m^{\,2}$ وتباين الخطأ العشوائي : $\hat{\sigma}_{ei}^{\,2}$.

2- أحسب القيمة التنبؤية $\hat{Y}_f$ عند مستوى $X_f=250$ ؟

3-قدر مجال الثقة لـ: Y_f و $E(Y_f)$ عند $X_f=250$ و مستوى معنوية $\alpha=5\%$.

④

يبين التوزيع التالي العلاقة بين استهلاك مادة معينة و الدخل خلال 11سنة:

السنة	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
الاستهلاك	15.8	14.45	15.1	12.9	12.5	11.8	12.15	11.2	10.65	10	10.2
الدخل	5	6	5.5	7.5	8	9	8.5	10	11	12.5	12

المطلوب مايلي :

1-ما هو نوع العلاقة بين الاستهلاك و الدخل ؟.

2- قدر معلمات النموذج الخطي البسيط علما أن:

$\bar{x} = 8,63$ ، $\bar{y} = 12,43$ ، $\sum x_i y_i = 1131,52$ ، $\sum x_i^2 = 886$ ، $\sum y_i^2 = 1738,87$ ، $\sum \varepsilon_i^2 = 1,45$

3-ادرس صلاحية النموذج عند مستوى المعنوية 5% علما أن :

$t_{T(5,7ddl)} = 2,365$ ، $t_{T(5,8ddl)} = 2,306$ ، $t_{T(5,9ddl)} = 2,262$

4-ما هو التفسير الذي يمكن إعطاؤه لكل من معامل الانحدار،التحديد و الارتباط ؟

5-قدر قيمة الاستهلاك عند 15 $x_t =$ ؟.

6- ضع جدول تحليل التباين ؟ ماذا تلاحظ ؟ احسب قيمة فيشر $(Fisher)$ ؟

الفصل الثالث :
تحليل الانحدار الخطي العام

الفصل الثاني : تحليل الانحدار الخطي العام

من خلال الانحدار الخطي العام او المتعدد والذي يبين العلاقة بين اكثر من متغير مستقل ومتغير تابع حيث ان سلوك الضاهرة المدروسة لا يرتبط بواحد من مالتغيرات فقد يتغير بفعل تأثير اكر من عامل ويؤثرون في وقت واحد وبدرجات متفاوتة من القوة في سلوك هذه الضاهرة[1]، نهدف الى توضيح أهم افتراضات النموذج، ثم تحديد كيفية تقدير معلمات نموذج الانحدار الخطي المتعدد يضاف الى ذلك تقدير التباين والتباين المشترك والانحراف المعياري لها للوصول إلى اختبار معاملات النموذج. والتطرق في الاخير الى التوقع من خلال هذا النموذج بالاضافة الى مشكلة عدم ثبات تجانس تباين الاخطاء.

1 مفهوم الانحدار الخطي العام

نموذج الانحدار المتعدد ويسمى أحيانا النموذج الخطي العام هو امتداد للنموذج البسيط حيث انه يتضمن اكثر من متغير مستقل واحد، في حالة النموذج البسيط كان الأمر يعتمد على متغيرين متغير تابع والآخر متغير مستقل، لكن في حالة النموذج العام قد يتضمن عدد من المتغيرات تمثل انحدار للمتغير التابع(Y) على العديد من المتغيرات *المستقلة* $X_1 , X_2 , ...X_K$

2 فرضيات نموذج الانحدار الخطي العام

في تقدير نموذج الانحدار الخطي المتعدد ، فانه عند استخدام طريقة OLS يجب توافر نفس الفروض التي يستند عليها النموذج البسيط لكي نتحصل على النموذج المقدر حيث يمكن ان نقسمها اى جزئين وهما الفرضيات الهيكلية، التصادفية

1.**المنغير العشوائي** U_i يتوزع توزيعا طبيعيا، متعدد المتغيرات لمتجه وسطه صفري، صفري (0) ومصفوفة تباين وتباين مشترك عددية هي δ^2 In . $\qquad U_i \sim N (0 , \delta^2 In)$

2. **القيمة المتوقعة** لمتجه حد الخطا تساوي صفرا أي أن وسط المتغيرات العشوائية يكون مساو للصفر. أي انه ليس هناك خطأ تحديد، وبالتالي نتوقع أن تكون المقدرات غير متحيزة.

$$E(U_i) = E\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ . \\ U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(U_1) \\ E(U_2) \\ . \\ E(U_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$$

1وليد اسماعيل السيفو، فيصل مفتاح شلوف،اساسيات الاقتصاد التحليلي القياسي، مرجع سابق، ص 195.

3. يضاف الى افتراضين السابقين، افتراض ثبات التباين فرض يشمل ثبات التباين وانعدام التغاير أي ان التباين المشترك بينها يساوي صفرا ، أي[1] :

$$\mathrm{Cov}\,(\mathrm{U}) = \mathrm{E}\,(\,\mathrm{U}U'\,) = \sigma^2\,\mathrm{In}$$

$$\mathrm{E}\,(\,\mathrm{U}U'\,) = \mathrm{E}\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ . \\ U_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_1 & U2 & \dots & U_n \end{bmatrix}$$

$$= \mathrm{E}\begin{bmatrix} U_1^2 & U_1U_2 & \dots & U_1U_n \\ U_2U_1 & U_2^2 & \dots & U_2U_n \\ . & . & . & . \\ U_nU_1 & U_nU_2 & \dots & U_n^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathrm{var}(U_1) & Cov(U_1U_2) & \dots. & Cov(U_1U_n0 \\ Cov(U_2U_1) & Var(U_2) & \dots. & Cov(U_2U_n) \\ . & . & \dots. & . \\ Cov(U_nU_1) & Cov(U_nU_2) & \dots. & Var(U_n) \end{bmatrix}$$

$$\because\ \mathrm{var}\,(\mathrm{Ui}) = \mathrm{E}(U_i^2\ \ ) = \sigma^2$$

$$\because \mathrm{Cov}\,(U_iU_j) = E(U_iU_j) = 0\,,\ \mathrm{I}\ \#\ \mathrm{j}$$

$$\mathrm{E}(UU') = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots\dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots\dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots\dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

حيث أن: $\sigma_1^2 \ = \ \sigma_2^2 \ = \ \dots\dots\dots \ = \sigma_n^2$

$$= \sigma^2\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots\dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots\dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots\dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \sigma^2 In$$

وتسمى المصفوفة العددية أعلاه بمصفوفة التباين والتباين المشترك .

3– ليس هناك علاقة خطية تامة بين المتغيرات المستقلة كما وان عدد المشاهدات يجب أن يزيد على عدد

1نورة عبد الرحمن اليوسف، مرجع سابق، ص46.

المعلمات المطلوب تقديرها ، أي أن: $R(x) = k + 1 < n$

حيث ان :(k) عدد المتغيرات المستقلة (X)، (r) رتبة مصفوفة البيانات

4. المتغيرات المستقلة غير عشوائية إي ثابتة في المعاينات المتكررة.

5. عدد المشاهدات n يفوق عدد المتغيرات k أي أن n>k ويؤدي هذا إلى درجات حرية في حالة نموذج المتغيرين: يكون التباين : $V(u_i) = \dfrac{\sigma^2}{n-2}$ اما في الحالة العامة يكون التباين: $V(u_i) = \dfrac{\sigma^2}{n-k}$ بحيث تقيس k عدد المتغيرات المتضمنة في النموذج كافة، وكلما كانت n>k يؤدي إلى المزيد من درجات الحرية وبالتالي إلى المزيد من دقة القياس[1].

6.لا توجد علاقة خطيه بين المتغيرات المستقلة، على سبيل المثال لا توجد علاقة بين X_1 , X_2 كالتالي:

$X_1 = X_2 + X_3$ أو $X_1 = 2X_2$ مثلا.

3 تقديرمعلمات النموذج الخطي العام (المتعدد)

في ضوء الفرضيات المذكورة أعلاه يمكن استخدام طريقة (*OLS*) في تقدير معلمات النموذج الخطي المتعدد ، ولهذا الغرض يمكن كتابة المعادلة كآلاتي

$$Y_i = B_0 + B_1X_{i1} + B_2X_{i1} + \ldots + B_KX_{ik} + U_i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

وفي واقع الآمر فان هذه المعادلة هي واحدة من جملة معادلات يبلغ عددها n معادلة تكون نظام المعادلات آلاتي:

$$\begin{array}{c}
Y_1 = B_0 + B_0X_{11} + {}_B2X_{12} + \ldots + BKX_{1K} + U_1 \\
Y_2 = B_0 + B_1X_{21} + B_2X_{22} + \ldots B_KX_{2K} + U_2 \\
.. \quad \ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
.. \quad \ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
.. \quad \ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
Y_n = B_0 + {}_B1X_{n1} + B_2X_{n2} + \ldots + B_KX_nK + U_n
\end{array}$$

هذه المعادلة تتضمن k من المعلومات المطلوب تقديرها علما بان الحد الأول يمثل الحد الثابت B_0، الأمر الذي يتطلب اللجوء إلى المصفوفات منها والمتجهات لتقدير تلك المعلمات. عليه يمكن صياغة هذه المعادلات في صورة مصفوفات كالاتي :

1تورة عبد الرحمن اليوسف، مرجع سابق، ص 46.

$$Y=\begin{pmatrix}Y_1\\Y_2\\\vdots\\\vdots\\Y_n\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}1 & X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1k}\\1 & X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2k}\\\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\1 & X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nk}\end{pmatrix},\quad \beta=\begin{pmatrix}\beta_0\\\beta_1\\\beta_2\\\vdots\\\beta_k\end{pmatrix},\quad \varepsilon=\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\\\vdots\\\vdots\\\varepsilon_n\end{pmatrix}$$

$Y(n\times 1)$: المتغير التابع أو المفسَّر،

$X(n\times(k+1))$: مصفوفة المتغيرات المُفَسِّرة أو المستقلة،

$\beta((k+1)\times 1)$: شعاع المعالم،

$\varepsilon(n\times 1)$: شعاع الأخطاء.

وبما أن المعادلة (1) هي العلاقة الحقيقية المجهولة والمراد تقديرها عن المتغير التابع Y ، والمتغيرات المستقلة التالية $X_1,X_2,..X_K$ باستخدام الإحصاءات المتوفرة فانه يستوجب تحقق الفروض الأساسية الخاصة ب e_i :

إيجاد تقدير للشعاع β الذي يصغِّر مجموع مربعات الانحرافات εi بين القيم المقدرة $\hat{Y}$ والقيم الحقيقية Y

$$\Rightarrow \quad \hat{\varepsilon}=Y-\hat{Y}=\begin{pmatrix}\hat{\varepsilon}_1\\\hat{\varepsilon}_2\\\vdots\\\vdots\\\hat{\varepsilon}_n\end{pmatrix}$$

$$Min\sum_{i=1}^{n}\hat{\varepsilon}_i^2=Min\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\hat{Y}_i\right)^2$$

$$\hat{\varepsilon}_i=Y_i-\hat{Y}_i \qquad i=1......n$$

$$Min\sum^{n}\left(Y_i-\hat{Y}_i\right)^2=Min\left(Y-\hat{Y}\right)'\left(Y-\hat{Y}\right)=Min\,\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}$$

نرمز للمقدار الاخير $Min\,\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}$ بــ $\Gamma\left(Y,X,\hat{\beta}\right)$ حيث:

$$\Gamma\left(Y,X,\hat{\beta}\right)=\left(Y-\hat{Y}\right)'\left(Y-\hat{Y}\right)=\hat{Y}'\hat{Y}-2\hat{Y}'Y+Y'Y$$

$$=\hat{\beta}'X'X\hat{\beta}-2\hat{\beta}'X'Y+Y'Y$$

حيث ان $\hat{Y}=X\hat{\beta}$ ، ومنه فان الهدف هو تصغير المقدار: $\min_{\beta}\Gamma\left(Y,X,\hat{\beta}\right)$

تحت الشرط التالي:

$$\frac{\partial\Gamma\left(Y,X,\hat{\beta}\right)}{\partial\hat{\beta}'}=0\Leftrightarrow 2(X'X)\hat{\beta}-2X'Y=0$$

وبما أن رتبة X هي $k+1$ فإن: $(X'X)$مصفوفة مربعة $((k+1)\times(k+1))$ رتبتها $k+1$ وتقبل معكوس $(X'X)^{-1}$.

فنجد : $2(X'X)\hat{\beta}-2X'Y=0 \quad \Rightarrow (X'X)\hat{\beta}-X'Y=0$

نظرب طرفي المعادلة في $(X'X)^{-1}$ فنحصل مباشرة على تقدير معلمات β:

$$\hat{\beta}=(X'X)^{-1}X'Y$$

ومن اجل ان تكون $\hat{\beta}$ قيمة دنيا لـ : $\Gamma(Y,X,\hat{\beta})$. يجب توفر الشرط الثاني:

$$\frac{\partial^2\Gamma(Y,X,\hat{\beta})}{\partial\hat{\beta}'\partial\hat{\beta}}=(X'X)>0$$

ونقول عنها انها مصفوفة شبه معرفة موجبة ومنه فان $\hat{\beta}$ هو نهاية صغرى.

او باختصار:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}e_1^2=e^te&=(y-\hat{y})^t(y-\hat{y})\\&=(y-x\hat{B})^t(y-x\hat{B})\\&=y^ty-y^tx\hat{B}-\hat{B}^tx^ty+\hat{B}^tx^tx\hat{B}\\&=y^ty-2\hat{B}^tx^ty+\hat{B}^t(x^tx)\hat{B}\end{aligned}$$

وباشتقاق المعادلة بالنسبة ل β، نحصل على قيمة هذه الأخيرة:

$$\hat{B}=(x^tx)^{-1}x^ty$$

4خصائص المقدرات $\hat{\beta}$

أ–الخطية

لتكون المصفوفة A ترميز للمصفوفة $(X'X)^{-1}X'$ حيث:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{k1}&a_{k2}&\cdots&a_{kn}\end{pmatrix}\Rightarrow\hat{\beta}=A.Y\quad\therefore\hat{\beta}_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}Y_j\quad,i=1......k$$

ومنه نجد ان المعلمات $(\hat{\beta}_k........\hat{\beta}_2,\hat{\beta}_1)$ تمثل دالة خطية مع المتغير التابع Y.

ب–عدم التحيز

لدينا: $\hat{\beta}=(X'X)^{-1}X'Y$ و $Y=X\beta+\varepsilon$ اي:

$$\hat{\beta}=(X'X)^{-1}X'[X\beta+\varepsilon]=(X'X)^{-1}X'X\beta+(X'X)^{-1}X'\varepsilon \Rightarrow \hat{\beta}=\beta+(X'X)^{-1}X'\varepsilon$$

ومع ادخال التوقع الرياضي: $E(\varepsilon)=0 \quad / \quad E(\hat{\beta})=\beta+(X'X)^{-1}X'E(\varepsilon)$ نجد:

$$E(\hat{\beta})=\beta$$

نستطيع القول في الاخير ان

يعتبر المقدر $\hat{\beta}$ لـ β هو مقدر خطي و غير متحيز وهو يعتبر الافضل من بين كل المقدرات بالطرق الاخرى: $(BLUE)$

5–تقدير تباين الاخطاء $\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}$ ومصفوفة التباين والتباين المشترك للمعلمات المقدرة $\Omega_{\hat{\beta}}$:

5–1 تباين الاخطاء $\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}$

تتضمن احدى فرضيات النموذج الخطي العام هي ثبات تباين الخطأ اي $E(\varepsilon\varepsilon')=\Omega_{\varepsilon}=\sigma^{2}I_{n}$ وحيث ان δ^2 مجهولة فيمكن تقديرها بالشكل التالي:

$$\hat{\varepsilon}=Y-X\hat{\beta}=X\beta+\varepsilon-X\hat{\beta}=\varepsilon-X(\hat{\beta}-\beta)=\varepsilon-X(X'X)^{-1}X'\varepsilon=(I_{n}-X(X'X)^{-1}X')\varepsilon$$

5–2 نظرية *Frisch, Waugh et Lovell (FWL)*

نفترض ان المتغيرات التفسيرية هي مقسمة بين مجموعتين من المصفوفات هي X_1 و X_2 ضمن نموذج واحد فالنموذج يكتب بالشكل: $Y= X_1\beta_1+ X_2\beta_2+ \varepsilon$

تنص هذه النظرية *(FWL)* على ان مقدرات طريقة المربعات الصغرى للمعلمة β_2 وكذا البواقي هي نفسها المقدرات في النموذج التالي: $M_X Y= M_X X_2\beta_2+ \varepsilon$ حيث ان M_X هي المصفوفة الدورية التي تحقق الشروط التالية[1]:

$$M_{X}=M'_{X}M_{X}=M_{X}^{2}=M'$$

$$M_{X}X=0$$

اذا كان لدينا: $M_{X}=(I_{n}-X(X'X)^{-1}X')$

أي: $\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}=\varepsilon'M'_{X}M_{X}\varepsilon \qquad \hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}=\varepsilon'M_{X}\varepsilon$

وباذخال الامل الرياضي على المعادلة السابقة نجد: $E(\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon})=E(\varepsilon'M_{X}\varepsilon)$ ويجب ملاحظة:

أن أثر $\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}$ يساوي أثر $\varepsilon'M\varepsilon$، ونعلم أيضا أن أثر (AB)=أثر (BA) فيكون لدينا كذلك:

[1] 1 Bourbonnais R, Econométrie, 9emeEdition, Dunod, Paris, 2015, p53.

أثر ($\varepsilon' M\varepsilon$)=أثر ($\varepsilon\varepsilon' M$) كما

$$E(\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}) = E(\varepsilon'\varepsilon)Tr(M_X)$$

نعلم أن: $E(\varepsilon'\varepsilon) = \sigma^2$ وعليه: $E(\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}) = \sigma^2\{Tr(I_n) - Tr(X(X'X)^{-1}X')\}$

ومنه: $E(\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}) = \sigma^2(n-k-1)$

حيث: $Tr(X(X'X)^{-1}X') = k+1$ ؛ $Tr(I_n) = n$

لكي نحصل على تقدير غير متحيز لـ σ^2 . يكفي قسمة العبارة على $(n-k-1)$:

$$E\left(\frac{\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}}{n-k-1}\right) = \sigma^2$$

وفي الانحدار الخطي العام (المتعدد) يكون لدينا $k+1$ معلمة للتقدير (بالاضافة الى القاطع) وn عدد المشاهدات او حجم العينة ، وهو مايعطي درجة الحرية: $n-k-1$ ومنه[1] :

$$\boxed{\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}}{n-k-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\hat{\varepsilon}_i^2}{n-k-1}}$$

5-3- مصفوفة التباين- تباين مشترك للمعلمات المقدرة $\hat{\Omega}_{\hat{\beta}}$.

من خلال ماسبق وجدنا ان هي : $\hat{\beta} - \beta = (X'X)^{-1}X'\varepsilon$ اي:

$$(\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)' = (X'X)^{-1}X'\varepsilon\varepsilon'X(X'X)^{-1}$$

وبمان تباين حد الخطأ معطى بالشكل : $E(\varepsilon\varepsilon') = \Omega_\varepsilon = \sigma^2 I_n$

بإدخال التوقع الرياضي على الطرفين، نتحصل على مصفوفة التباين المشترك للمقدرات:

$$\Omega_{\hat{\beta}} = E((\hat{\beta} - \beta)(\hat{\beta} - \beta)') = (X'X)^{-1}X'E(\varepsilon\varepsilon')X(X'X)^{-1} = (X'X)^{-1}X'\Omega_\varepsilon X(X'X)^{-1}$$

إذن: $\Omega_{\hat{\beta}} = \sigma_\varepsilon^2(X'X)^{-1}$

6.تقييم واختبار معنوية المقدرات والنموذج

6-1 اختبار جودة النموذج:

عند دراسة نموذج الانحدار الخطي البسيط استعملنا معامل التحديد أي مربع معامل الارتباط البسيط، ولكن في هذه الحالة يختلف المعامل حيث نعتمد على معامل التحديد المتعدد، والذي بالإضافة إلى انه يدرس العلاقة

1محمد شيخي، مرجع سابق، ص 63.

بين المتغير التابع والمتغير المفسر،فانه يدرس العلاقة الموجودة ما بين متغير تابع وعدة متغيرات مستقلة مرة واحدة ،كما انه يمكن ان يقيس جودة العلاقة بين متغير مستقل وعدة متغيرات مستقلة[1].

يشير هذا المعامل الى النسبة من المتغير التابع Y التي يمكن تفسيرها بدلالة المتغيرات المستقلة ولحسابه يستعمل نفس الطريقة المتبعة في الانحدار الخطي البسيط[2].

من خلال النموذج العام:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \beta_3 X_{i3} + \dots + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i \quad i = 1,\dots,n$$

تكون عبارة معامل التحديد R^2:

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{RSS}{TSS} = 1 - \frac{\sum \hat{\varepsilon}_i^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \overline{Y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2}$$

في حالة نموذج لا يتضمن قاطع (ثابت) فان يمكن كتابتها بدون تركيز المتغيرات (اوساط معدومة) اي بالشكل التالي:

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{RSS}{TSS} = 1 - \frac{\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}}{Y'Y} = \frac{\hat{Y}'\hat{Y}}{Y'Y}$$

يمكن كتابة عبارة معامل التحديد R^2 بواسطة شعاع المعلمات المقدرة كمايلي:

$$R^2 = \frac{\hat{Y}'\hat{Y}}{Y'Y} = \frac{\hat{\beta}'X'X\hat{\beta}}{Y'Y}$$

وباستخدام البيانات المركزة يمكن كتابته بالشكل التالي :

$$R^2 = \frac{\hat{\beta}_1 \sum x_{i1} y_i + \hat{\beta}_2 \sum x_{i2} y_i + \dots\dots\dots\dots + \hat{\beta}_k \sum x_{ik} y_i}{\sum y_i^2}$$

حيث: $y_i = Y_i - \overline{Y} \quad , \quad x_{ij} = X_{ij} - \overline{X}_j \qquad \forall j = 1\dots\dots k \, , \quad \forall i = 1\dots\dots n$

إذا كان النموذج لا يحتوي على ثابتة، فإننا نعوض شعاع المقدرات بما يساويه، أي:

$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$ ، إذن:

$$R^2 = \frac{\hat{\beta}'X'X\hat{\beta}}{Y'Y} = \frac{\hat{\beta}'X'Y}{Y'Y}$$

1حليدة دلهوم،اساليب التنبؤ بالمبيعات –دراسة حالة– مذكرة مقدمة لنيل شهادة الماجستير في العلوم التجارية ،تخصص: تسويق، جامعة الحاج لخظر باتنة، 2009/2008، ص 59.

2عبد العزيز شرابي، طرق إحصائية للتوقع الاقتصادي، الجزائر:ديوان المطبوعات الجامعية،(2000 ص 138.

6-2معامل التحديد المعدل $\overline{R}^2$

ففي الغالب فأن معامل التحديد العادي غير حساس R^2لعدد المتغيرات في النموذج حيث ان إضافة متغيرات مستقلة أخرى لمعادلة الانحدار لا يمكن أبدا أن تقلل من قيمة R^2 بل على العكس فانه يمكن أن تزيد من قيمته (لأن إضافة متغير مستقل جديد لا يؤثر في التغيرات الكلية للنموذج TSSبينما يزيد في قيمة الانحرافات المشروحة ESS).

- صعوبة تفسير واستعمال معامل التحديد العاديR^2 في حالة نموذج لا يتضمن الحد الثابت (القاطع) لانه يصبح ياخذ قيما سالبة (اي لا يكون محصورا بين 0 و 1)

- ان هذه الصعوبات وغيرها في استخدام R^2 كمقياس لجودة التوفيق راجعة لأن هذا المعامل يعتمد على التغيرات الحاصلة في Y (المشروحة وغير المشروحة)، وبالتالي فإنه لا يأخذ بعين الاعتبار عدد درجات الحرية في أي مشكل إحصائي .ولتفادي قصور هذا المعامل يتم تصحيحه وذلك بالأخذ في الحسبان عدد درجات الحرية n-k ويصبح المعامل المعتمد هو معامل التحديد المعدل $\overline{R}^2$.

$$\overline{R}^2 = 1 - \frac{RSS/(n-k-1)}{TSS/(n-1)}$$

وكذلك:

$$\boxed{\overline{R}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-k-1}(1-R^2)}$$

ومن العلاقة الاخيرة تضهر العلاقة بين معاملي التحديد كمايلي :

$R^2 \geq \overline{R}^2$ إذا كانت $k>1$

$R^2 = \overline{R}^2$ إذا كانت $k=1$

$\overline{R}^2$ يمكن أن يأخذ قيما سالبة.

اذا كانت n تأخذ قيما كبيرة فان $\overline{R}^2 \simeq R^2$ لكن في المقابل اذا كان حجم العينة صغيرا و كان عدد المتغيرات المستقلة كبيرا بالمقارنة مع حجم العينة، فإن $\overline{R}^2$ يقل بكثير عن R^2 ويمكن أن يأخذ قيما سالبة، في هذه الحالة يجب شرحه على أساس أنه يأخذ القيمة 0.

مثال

من خلال البيانات في الجدول رقم 05 الخاصة باربع متغيرات الخاصة بالنموذج العام التالي:

$$y_t = a_0 + a_1 x_{1t} + a_2 x_{2t} + a_3 x_{3t} + \varepsilon_t$$

الجدول رقم 05

y	x_1	x_2	x_3
12	2	45	121
14	1	43	132
10	3	43	154
16	6	47	145
14	7	42	129
19	8	41	156
21	8	32	132
19	5	33	147
21	5	41	128
16	8	38	163
19	4	32	161
21	9	31	172
25	12	35	174
21	7	29	180

نقوم بكتابة بيانات اجدول السابق بالشكل المصفوفي مع توضيح ابعاد كل مصفوفة

$$Y = Xa + \varepsilon$$

$$Y = \begin{pmatrix} 12 \\ 14 \\ 10 \\ \vdots \\ 21 \end{pmatrix} ; \; X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 45 & 121 \\ 1 & 1 & 43 & 132 \\ 1 & 3 & 43 & 154 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 7 & 29 & 180 \end{pmatrix} ; \; a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} ; \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_t \\ \vdots \\ \varepsilon_{14} \end{pmatrix}$$

(14,1) (14,4) (4,1) (14,1)

2- تقدير معلمات النموذج:

لدينا: $\widehat{a} = (X'\,X)^{-1}\,X'\,Y$ اي نقوم بحساب كل من : $X'X$ و $(X'X)^{-1}$ ثم $X'Y$

$$\overset{X'}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 1 & 3 & \dots & 7 \\ 45 & 43 & 43 & \dots & 29 \\ 121 & 132 & 154 & \dots & 180 \end{pmatrix}} \overset{X}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 45 & 121 \\ 1 & 1 & 43 & 132 \\ 1 & 3 & 43 & 154 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 7 & 29 & 180 \end{pmatrix}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 14 & 85 & 532 & 2\,094 \\ 85 & 631 & 3\,126 & 13\,132 \\ 532 & 3\,126 & 20\,666 & 78\,683 \\ 2\,094 & 13\,132 & 78\,683 & 317\,950 \end{pmatrix}$$

ثم نستنتج المصفوفة $(X'\ X)^{-1}$

$$(X'\ X)^{-1} = \begin{pmatrix} 20,16864 & 0,015065 & -0,23145 & -0,07617 \\ 0,015065 & 0,013204 & 0,001194 & -0,00094 \\ -0,23145 & 0,001194 & 0,003635 & 0,000575 \\ -0,07617 & -0,00094 & 0,000575 & 0,000401 \end{pmatrix}$$

حساب المصفوفة $X'Y$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 1 & 3 & \dots & 7 \\ 45 & 43 & 43 & \dots & 29 \\ 121 & 132 & 154 & \dots & 180 \end{pmatrix}}_{X'} \underbrace{\begin{pmatrix} 12 \\ 14 \\ 10 \\ \vdots \\ 21 \end{pmatrix}}_{Y} = \begin{pmatrix} 248 \\ 1\,622 \\ 9\,202 \\ 37\,592 \end{pmatrix}$$

ومنه:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 20,16864 & 0,015065 & -0,23145 & -0,07617 \\ 0,015065 & 0,013204 & 0,001194 & -0,00094 \\ -0,23145 & 0,001194 & 0,003635 & 0,000575 \\ -0,07617 & -0,00094 & 0,000575 & 0,000401 \end{pmatrix}}_{(X'\ X)^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 248 \\ 1\,622 \\ 9\,202 \\ 37\,592 \end{pmatrix}}_{X'\ Y} = \widehat{a}$$

$$= \begin{pmatrix} 32,89132 \\ 0,801900 \\ -\ 0,38136 \\ -\ 0,03713 \end{pmatrix}$$

فالنموذج المقدر يكتب على الشكل: $Y_t = 32,89 + 0,80\ X_{1t} - 0,38\ X_{2t} - 0,03\ X_{3t} + e_t$

مصفوفة التباين – التباين المتشرك

لإيجاد مصفوفة التباين -التباين المشترك للمقدرات، ينبغي أولا حساب تباين البواقي حيث يتم حساب بواقي التقدير من المعادلة : $e\ = Y - \widehat{Y} = Y - X\widehat{a}$ بهذا الشكل

$$e_t\ = y_t - (\widehat{a}_0 + \widehat{a}_1 x_{1t} + \widehat{a}_2 x_{2t} + \widehat{a}_3 x_{3t})$$
$$e_t\ = y_t - 32,89 - 0,80\,x_{1t} + 0,38\,x_{2t} + 0,03\,x_{3t}$$

فمثلا البواقي للشماهدة الاولي يكون كمايلي:

$$e_1 = y_1 - 32,89 - 0,80\,x_{11} + 0,38\,x_{21} + 0,03\,x_{31}$$
$$e_1 = 12 - 32,89 - 0,80 \times 2 + 0,38 \times 45 + 0,03 \times 121 = -0,84$$

وهكذا لباقي المشاهدات فنتحصل على الجدول رقم 06 التالي:

الجدول رقم 06

y_t	$\widehat{y}_t$	e_t	e_t^2
12	12,84	– 0,84	0,71
14	12,39	1,61	2,58
10	13,18	– 3,18	10,11
16	13,39	1,61	2,58
14	17,70	– 3,70	13,67
19	17,88	1,12	1,26
21	22,20	– 1,20	1,44
19	18,86	0,14	0,02
21	16,51	4,49	20,14
16	18,76	– 2,76	7,63
19	17,92	1,08	1,17
21	21,90	– 0,90	0,81
25	22,71	2,29	5,27
21	20,76	0,24	0,06
	Somme	0	67,45

فيكون لدينا مجموع مربع البواقي هو 67.45 اما تباين الاخطاء $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ فهو كمايلي:

$$\widehat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{e'\,e}{n-k-1} = \frac{\sum_{t=1}^{t=14} e_t^2}{14-3-1} = \frac{67,45}{10} = 6,745$$

نقوم بتحديد مصفوفة التباين-التباين المشترك للمقدرات : $\widehat{\Omega}_{\hat{a}} = \widehat{\sigma}_\varepsilon^2 (X'\,X)^{-1}$

$$\widehat{\Omega}_{\hat{a}} = 6,745 \times \begin{pmatrix} 20,16864 & 0,015065 & -0,23145 & -0,07617 \\ 0,015065 & 0,013204 & 0,001194 & -0,00094 \\ -0,23145 & 0,001194 & 0,003635 & 0,000575 \\ -0,07617 & -0,00094 & -0,000575 & 0,000401 \end{pmatrix}$$

ومنه فان تباينات المعلمات المقدرة تقع على قطر المصفوفة السابقة اي:

$$\begin{aligned}
\widehat{\sigma}_{\hat{a}_0}^2 &= 6,745 \times 20,17 = 136,04 \rightarrow \widehat{\sigma}_{\hat{a}_0} = 11,66 \\
\widehat{\sigma}_{\hat{a}_1}^2 &= 6,745 \times 0,013 = 0,087 \rightarrow \widehat{\sigma}_{\hat{a}1} = 0,29 \\
\widehat{\sigma}_{\hat{a}2}^2 &= 6,745 \times 0,0036 = 0,024 \rightarrow \widehat{\sigma}_{\hat{a}2} = 0,15 \\
\widehat{\sigma}_{\hat{a}3}^2 &= 6,745 \times 0,0004 = 0,0026 \rightarrow \widehat{\sigma}_{\hat{a}3} = 0,05
\end{aligned}$$

<u>حساب كل من معامل التحديد R^2 ومعامل التحديد المصحح $\overline{R^2}$</u>

لدينا: $\sum_t e_t^2 = 67.45$ ومع حساب كذلك : $\sum_t (y_t - \overline{y})^2 = 226,86$ فنتحصل على

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_t e_t^2}{\sum_t (y_t - \overline{y})^2} = 1 - \frac{67,45}{226,86} = 0,702$$

اما معامل التحديد المصحح او المعدل $\overline{R^2}$

$$\overline{R}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-k-1}(1-R^2) = 1 - \frac{14-1}{14-4}\,(1-0,702) = 0,613$$

نلاحظ ان هناك انخفاض في قيمة معامل التحديد وهذا راجع الى درجة الحرية و من خلال نتائج معامل التحديد، نستنتج أن للنموذج قدرة تفسيرية عالية جدا أي أن المتغيرات المستقلة تشرح المتغير التابع بنسبة %70.2.

3-6 معامل الارتباط الجزئي[1]

معامل الارتباط r^2_{yx1} و r^2_{yx2} يقيس الجزء من التباين في Y الذي يمكن شرحه بالمتغير X_1 و المتغير X_2

أما معاملات الارتباط الجزئي الارتباط بين المتغير التابع Y واحد المتغيرات المستقلة X_1, X_2 حيث أن r^2_{yx1} تمثل الارتباط بين Y المتغير التابع والمتغير X_1 بافتراض ابتعاد تأثير X_2، أما R^2 فهي تشرح التغير في Y والذي يتم شرحه بالمتغيرات X_1, X_2 معا.

معامل الارتباط الخطي هو الجذر التربيعي لمعامل التحديد (R^2) الذي يتم حسابه كما رأينا في الشكل البسيط.

7 اختبارات المعنوية والدلالة[2]:

1-7 اختبار ستودنت *t*

بإدخال قانون التوزيع الطبيعي المتعدد ونظرا إلى أن $\hat{\beta}$ هو دالة خطية لشعاع الأخطاء العشوائية، فإن هذا المتغير له صفة المتغير العشوائي ويتبع كذلك قانون التوزيع الطبيعي المتعدد: $\hat{\beta} \sim N\left(\beta, \sigma_\varepsilon^2 (X'X)^{-1}\right)$

ويعطى النموذج الخطي المتعدد بالعلاقة التالية:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{2t} + \beta_3 x_{3t} + \dots\dots\dots + \beta_k x_{kt} + \varepsilon_t$$

بما ان : $\hat{\beta}_j \sim N\left(\beta_j, \sigma_\varepsilon^2 a_{jj}\right), \quad j = 0,1,\dots,k$

حيث ان a_{jj} هو العنصر الموجود بقطر المصفوفة AA' (أو $(X'X)^{-1}$) والمصفوفة A معرفة كمايلي:

1تورة عبد الرحمن اليوسف، مرجع سابق، ص 51.

2تورة عبد الرحمن اليوسف، مرجع سابق، ص 49.

$A = (X'X)^{-1} X'$.

ولدينا كذلك: $\left(\hat{\beta}_j - \beta_j\right) \sim N\left(0, \sigma_\varepsilon^2 a_{jj}\right), \quad j = 0,1,\dots,k$

ومنه: $\left(\dfrac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sigma_\varepsilon \sqrt{a_{jj}}}\right) \sim N(0,1), \quad j = 0,1,\dots,k$

وليصبح قانون التوزيع t على الشكل:

$$t = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sigma^2 \sqrt{a_{jj}}} = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sigma_{\hat{\beta}_j}} \sim t_{n-k-1}$$

تساعدنا اختبار t هذه المعادلة إذن على تكوين مجالات الثقة لمعالم النموذج بنفس الطريقة المذكورة في حالة النموذج البسيط: يستخدم اختبار T لتقييم معنوية تأثير المتغيرات المستقلة $X_1, X_2, \dots X_K$ في التغير التابع Y في نموذج الانحدار المتعدد يعتمد على نوعين من الفروض: فرضية العدم H_0 و الفرضية البديلة H_1 بحيث:

$H_0 : \beta_j = 0$ (فرضية العدم)

$H_1 : \beta_j \neq 0$ (الفرضية البديلة)

ولتحديد قبول او رفض فرضية العدم ومن ثم تقييم معنوية معلمات النموذج المقدر،يتم حساب t_c ثم مقارنتها بالقيمة الجدولية $t_{n-k-1,\frac{\alpha}{2}}$ بمستوى معنوية $a\%$ ، ويتم قبول الفرضية الصفرية (فرضية العدم H_0) اذا كان :

$$\left|\frac{\hat{\beta}_j}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}}\right| \leq t_{n-k-1,\frac{\alpha}{2}}$$

ونقول في هذه الحالة ان المعلمة β_j ليس لها دلالة احصائية ولا تختلف معنويا عن الصفر ويتت رفض الفرضية الصفرية وقبول الفرضية البديلة في حالة العكس اي: $\left|\dfrac{\hat{\beta}_j}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_j}}\right| > t_{n-k-1,\frac{\alpha}{2}}$ ، وفي حالة كانت عدد المشاهدات كبيرا $n>30$ فانه يستخدم في هذه الحالة التوزيع الطبيعي كبديل وتؤخذ القيمة الحرجة $Z_{a/2}$ وذلك بحساب المساحة المظلة للتوزيع[1] .

1محمد شيخي ، مرجع سابق، ص 73.

2-7اختبار المعنوية الكلية للانحدار العام (احصاءة فيشر F)

يمكن اختبار المعنوية الإجمالية للمعالم آنيا باستخدام، إحصائية فيشر حيث يهدف إلى اختبار مدى مساهمة المتغيرات المستقلة X_1 , X_2 , ...X_K على المتغير التابع Y مجتمعة في تفسير النموذج اي باستخدام نسبة التباين المفسر، إلى التباين غير المفسر وستبع توزيع فيشر بدرجتي حرية k وn-k-1 حيث n عدد المشاهدات اما $k+1$ تمثل عدد المعلمات الخاضعة للاختبار.

وصيغة فرضيات الاختبار هي كالتالي[1]:

$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_j = ... = \beta_k = 0$

$H_1 : \exists \beta_j \neq 0 \quad j = 1....k$ (يوجد على الأقل معامل انحدار واحد غير معدوم)

والصيغة الرياضية لهذا الاختبار هي:

$$F_c = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 \Big/ k}{\sum_{i=1}^{n}\hat{\varepsilon}_i^2 \Big/ (n-k-1)} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\hat{y}_i^{\,2} \Big/ k}{\sum_{i=1}^{n}\hat{\varepsilon}_i^2 \Big/ (n-k-1)} = \frac{R^2 / k}{(1-R^2)/(n-k-1)} \sim F_\alpha(k, n-k-1)$$

وبعد احتساب قيمة F_c تقارن مع قيمتها الجدولية عند مستوى معنوية 5%= α

- فإذا كانت القيمة المحتسبة اكبر من القيمة المجدولة ($F_C > F_t$) فاننا نرفض H_0 معناه ان أن العلاقة المدروسة معنوية (R^2يختلف معنويا عن الصفر)، وهناك على الأقل متغير مستقل واحد من المتغيرات X_k ذو تأثير علىY وانها ليس جميعها مساوية للصفر.

- اما إذا كانت القيمة المحتسبة اقل من القيمة المجدولة ($F_C < F_t$) فاننا نقبل H_0 اي:

فالعلاقة المدروسة غير معنوية أي انه ليس ثمة أي تأثير من أي متغير من المتغيرات المستقلةX_k على المتغير التابعY

مثال

من خلال المعطيات الخاصة بالمثال السابق نقوم باختبار المعنوية الإحصائية لمعالم النموذج.

1-نتساءل ما إذا كان يمكن قبول هذه المقدرات كأساس للوصول إلى معالم المجتمع الإحصائي.

2- نختبر المعنوية الكلية للنموذج

3- نحدد مجال الثقة الخاص بالمعلمات المعنوية احصائيا. الحل

1- معنوية المعلمات المقدرة

1حليدة دلهوم،اساليب التنبؤ بالمبيعات –دراسة حالة-، مرجع سابق ، ص 60.

بما يخص المعلمة a_1 نعلم ان الاحصائية: $\left|\frac{\hat{a}_i}{\hat{\sigma}_{\hat{a}i}}\right| = t^*_{\hat{a}i}$ تتبع توزيع ستودنت بدرجة حرية 10 ومستوى معنوية $\alpha = \%5$ اي:

$$\frac{\hat{a}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{a}1}} = \frac{0,80}{0,29} = t^*_{\hat{a}1} = 2,75 > t^{0,05}_{10} = 2,228 \rightarrow a_1 \neq 0$$

نقبل الفرضية البديلة H_1 ونقول ان المتغير X_1 يساهم في تفسير المتغير التابع Y. وهذا يعني أنه يمكن قبول المقدر كأساس للوصول إلى معلمه النظري في المجتمع الإحصائي.

-المعلمتين a_2 و a_3 لدينا:

$$\frac{\hat{a}_2}{\hat{\sigma}_{\hat{a}2}} = \left|\frac{-0,38}{0,15}\right| = t^*_{\hat{a}2} = 2,53 > t^{0,05}_{10} = 2,228 \rightarrow a_2 \neq 0$$

$$\frac{\hat{a}_3}{\hat{\sigma}_{\hat{a}3}} = \left|\frac{-0,03}{0,05}\right| = t^*_{\hat{a}3} = 0,60 < t^{0,05}_{10} = 2,228 \rightarrow a_3 = 0$$

بالنسبة للمعلمة a_2 نقبل الفرضية البديلة H_1 كذلك ونقول ان المتغير X_2 يساهم في تفسير المتغير التابع Y. و يمكن قبول المقدر كأساس للوصول إلى معلمه النظري في المجتمع الإحصائي.

اما المعلمة a_3 نقبل الفرضية الصفرية H_0 ونقول ان المتغير X_3 لايساهم في تفسير المتغير التابع Y. ولا يمكن قبول المقدر كأساس للوصول إلى معلمه النظري في المجتمع الإحصائي.

2- المعنوية الكلية للنموذج

نختبر الآن المعنوية الكلية للنموذج معتمدا على إحصائية فيشر .حسب الفرضيتين:

$$H0 : a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0$$

$H1 : a_1 \neq a_2 \neq \ldots\ldots a_k \neq 0$ يوجد على الاقل معلمة a_j تختلف عن الصفر

نقوم بحساب قيمة فيشر المحسوبة التي تتبع توزيع فيشر بدرجتي حرية 3 و10

$$F^* = \frac{R^2/k}{(1-R^2)/(n-k-1)} = \frac{0,702/3}{(1-0,702)/10} = 7,878 > F^{0,05}_{3,10} = 3,71$$

ومنه نرفض الفرضية الصفرية ونقبل البديلة اي ان النموذج له معنوية احصائية كلية عند مستوى معنوية $\alpha = \%5$

3- مجالات الثقة للمعلمات

بان المعلمتين a_1 و a_2 هما معنويتين فان مجال الثقة لهما كمايلي :

مجال الثقة للمعلمة a_1 :

$$IC_{a1} = \hat{a}_1 \pm t^{0,05}_{n-k-1} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{a}1} = 0,80 \pm 2,228 \times 0,29 = [0,14\,;\ 1,45]$$

مجال الثقة لللمعلة a_2 :

$$IC_{a2} = [-0{,}71\,;\ -0{,}04] \quad \text{et} \quad IC_{a3} = [-0{,}14\,;\ 0{,}08]$$

8 اختبار استقرار معاملات النموذج (Chow)

يدرس هذا الاختبار مدى استقرار النموذج على طول الفترة الزمنية (دراسة التغيير الهيكلي للنموذج) أي صياغة النموذج هي نفسها ولكن تختلف القيم المقدرة للمعاملات في العينتين الجزئيتين .ليكن النموذج المقدر ذو k متغير مستقل على فترة واحدة كمايلي [1] :

النموذج الكلي : $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{i1} + \hat{\beta}_2 X_{i2} + \ldots + \hat{\beta}_k X_{ik}$ على عينة حجمها n

نقوم بتقدير نموذجين والخاصين بعينتين جزئيتين n_1 و n_2 حيث $n=n_1+n_2$

النموذج الاول: $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0^{(1)} + \hat{\beta}_1^{(1)} X_{i1} + \hat{\beta}_2^{(1)} X_{i2} + \ldots + \hat{\beta}_k^{(1)} X_{ik}$

النموذج الثاني: $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0^{(2)} + \hat{\beta}_1^{(2)} X_{i1} + \hat{\beta}_2^{(2)} X_{i2} + \ldots + \hat{\beta}_k^{(2)} X_{ik}$

نقوم باختبار الفرضية H_0 الخاصة بتساوي معلمات النماذج الثلاثة اي:

$$H_0 : \begin{pmatrix} \beta_0 = \beta_0^{(1)} = \beta_0^{(2)} \\ \beta_1 = \beta_1^{(1)} = \beta_1^{(2)} \\ \beta_2 = \beta_2^{(1)} = \beta_2^{(2)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \beta_k = \beta_k^{(1)} = \beta_k^{(2)} \end{pmatrix}$$

إن اختبار استقرار المعاملات يقودنا الى التساؤل حول وجود فرق معنوي بين مجموع مربعات البواقي في كامل الفترة n (RSS) وجمع مجموع مربعات البواقي المحسوبة للنموذجين الجزئيين : $RSS^1 + RSS^2$ فاذا كانت الاجبة لا فمعناه النموذج مستقر في كامل العينة.

نستخدم في هذا الاختبار احصائية فيشر والمعرفة كمايلي:

$$F_c = \frac{\left[RSS - \left(RSS^1 + RSS^2\right)\right]/df_1}{\left(RSS^1 + RSS^2\right)/df_2}$$

حيث ان:

$$df_1 = (n-k-1) - \left[(n_1-k-1) + (n_2-k-1)\right] = k+1$$
$$df_2 = (n_1-k-1) + (n_2-k-1) = n - 2(k+1)$$

[1] محمد شيخي مرجع سابق، ص 79.

فاذا كانت: $F_c \leq F_\alpha\left(k+1, n-2(k+1)\right)$ فاننا نقبل الفرضية $H0$ وبالتالي المعاملات مستقرة معنويا في كامل الفترة الزمنية.

مثال:

لنعتبر النموذج المقدر في المثال السابق والذي كان على عينة حجمها $n=14$

$$\begin{aligned} y_t &= 32{,}89 + 0{,}80\, x_{1t} - 0{,}38\, x_{2t} - 0{,}03\, x_{3t} + e_t \\ &\quad\ (11{,}66) \quad\ (0{,}29) \qquad (0{,}15) \qquad (0{,}05) \\ R^2 &= 0{,}702 \\ n &= 14 \end{aligned}$$

* القيم التي بين قوسين هي قيم الأخطاء المعيارية

ولدينا النموذجين الجزئيين والخاص بفترتين[1]

النموذج الاول للفترة $n=1......7$

$$\begin{aligned} y_t &= 0{,}774x_{1,t} - 0{,}293x_{2,t} - 0{,}012x_{3,t} + 25{,}27 + e_t \\ &\quad (0{,}53) \qquad (0{,}31) \qquad (0{,}10) \\ n &= 7 \\ R^2 &= 0{,}692 \end{aligned}$$

$$SCT^1 = 88{,}85\,;\ SCE^1 = 61{,}54\,;\ SCR^1 = 27{,}31$$

النموذج الثاني: $n=8....14$

$$\begin{aligned} y_t &= 1{,}228x_{1,t} - 0{,}620x_{2,t} - 0{,}184x_{3,t} + 62{,}63 + e_t \\ &\quad (0{,}69) \qquad (0{,}52) \qquad (0{,}15) \\ n &= 7 \\ R^2 &= 0{,}543 \end{aligned}$$

$$SCT^2 = 45{,}43\,;\ SCE^2 = 24{,}70\,;\ SCR^2 = 20{,}73.$$

نقوم بحساب إحصائية فيشر:

$$F^* = \frac{[SCR - (SCR^1 + SCR^2)]/ddl_n}{(SCR^1 + SCR^2)/ddl_d}$$

$$ddl_n = (n-k-1) - [(n_1-k-1) + (n_2-k-1)] = k+1 = 4$$

$$ddl_d = (n_1-k-1) + (n_2-k-1) = n - 2(k+1) = 6$$

ومنه

$$F^* = \frac{[(67{,}45 - (27{,}31 + 20{,}73))]/4}{(27{,}31 + 20{,}73)/6} = \frac{4{,}852}{8{,}00} = 0{,}606 < F^{0{,}05}_{4\,;\,6} = 4{,}53$$

نقبل الفرضية ونقول أن معاملات النموذج مستقرة معنويا على كامل الفترة الزمنية .

1يمكن ان تكون الفترتين متباينتين وليستا متساوتين في عدد المشاهدات.

يبقى ان نشير انه في حالة وجود مشكلة عدم تجانس تباين الخطأ (*hétéroscédasticité*) فان هذا الاختبار يصبح متحيزا ولا يعطي نتائجا صحيحة حيث تصير في الغالب الفرضية الصفرية مرفوضة [1] .

9–استخدام المتغيرات الصورية[2]

في كثير من الأحيان، نعتقد بوجود متغيرات معينة ذات أهمية عظمى ولكن من طبيعةنوعية لا يأخذ إلا القيمتين 0 او 1

نستعمل هذا النوع من المتغيرات عندما نريد دمج عامل مستقل ثنائي" :الظاهرة حدثت أو لم تحدث "أو أيضا عندما يكون العامل المستقل ذا طابع نوعي" :ذكر أو أنثى ..."اواجابات من النوع موافق وغير موافق .

فيكون النموذج الكلي كمايلي :

$$Y_i = \beta_0 + (\alpha_0 - \beta_0)D_i + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \ldots + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i$$

فاذا قلنا ان الظاهرة محققة معناه *Di=0* فيكون النموذج :

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \ldots + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i$$

الظاهرة غير محققة*Di=1* النموذج على الشكل :

$$Y_i = \alpha_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \ldots + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i$$

في هذه الحالة نقوم بإدماج متغير مفسر إضافي للنموذج المحدد الأصلي و تطبيق الطرق الكلاسيكية للتقدير ويطلق على المتغير*Di* الذي يظهر في المعادلة المتغير الصوري Dummy variable وهو كما ذكرنا يأخذ قيمة الواحد الصحيح إذا تحققت بعض الشروط و قيمة الصفر إذا لم تتحقق وعليه فإن استخدام المتغيرات الصورية تعميم قوي لتحليل الانحدار، فإنه يسمح لنا تعميم مجال تحليلنا للانحدار ليشمل متغيرات مهمة لا يمكننا وصفها في وحدات كمية .فباستخدام هذا النوع من المتغيرات يمكن الأخذ في الحسبان تأثير العوامل النوعية المهمة التي تؤثر على المتغير التابع.

تستعمل المتغيرات الصورية على نطاق واسع جدا وميادين مختلفة كمعالجة القيم الشاذة في المشاهدات والتي تكون بسبب حالات استثنائية كالاضرابات او الحروب او التقلبات المناخية والذي يتطلب الكشف عن هذه القيم الشاذة ثم تصحيحها لتفادي تاثيرها والتشويش على المتغيرات الاخرى في التقدير.

او حالات التعديلات الهيكلية التي تمس الفترة الزمنية اثناء التقدير فنشير الى القيمة *Di=0* قبل حصول اضطراب او تتغير هيكلي والقيمة *Di=1* بعد حصوله.

وفي حالات الدمج الموسمية ونقصد بها هل تاثير اختلاف المواسم يضهر على المتغير التابع ام لا (اربع مواسم في السنة)

1 Bourbonnais R, Econométrie, 9emeEdition, Dunod, Paris, 2015, p72.

2محمد شيخي مرجع سابق، ص 80.

وكذلك تضمين وضم المتغيرات النوعية كنوع الجنس (ذكر او انثى)، الانتماء السياسي واثر ذلك في الدراسة

مثال[1]

سنأخذ مثالا يتضمن نوعا من المشاكل يتمثل في التقلبات الناتجة عن تأثير حرب الخليج .بعد ما تأكدنا من أهمية القيمة المضافة للقطاع السياحي X_{t1} وعدد السكان X_{t2} نتسأل ما إذا كان لحرب الخليج الثانية تأثير على الإنتاج السياحي Y_t

والطريقة هي إدخال متغير صوري بقيمة الواحد إذا كنا في حالة الحرب أو قيمة الصفر في حالة السلم، حيث:

$Di=0$ إذا كانت عدد المشاهدات يتراوح بين 1975 الى غاية 1990 ثم سنة 1992.

$Di=1$ خلال سنة 1991.

النموذج المقدر يكون على الشكل التالي:

$$\hat{Y}_t = 2.340.4 + 23.5X_{t1} + 0.3X_{t2} - 120.56D_i$$
$$(4.5) \qquad (2.2) \qquad (2.9) \qquad (5.8)$$
$$n = 18$$
$$R^2 = 0.65$$

- حيث تمثل القيم بين قوسين قيم ستودنت المحسوبة .

من خلال نتائج تقدير النموذج نجد ان $|t_c| = 5.8 > t_{0.025} = 2.14$ عليه نقبل الفرضية البديلة H_1 المتغير الصوري يختلف معنويا عن الصفر بنسبة معنوية $\alpha=5\%$ وهذا يعني ان الانتاج السياحي في سنة 1991 منخفض جدا (120.56) بسبب حرب الخليج .

10 استخدام نموذج الإنحدار المتعدد في التنبؤ(التوقع):

بعد تقدير النموذج والتأكد من جودته، يتم إستخدامه في التنبؤ حيث يعطى مجال ثقة التوقع بالقيمة مشاهدة (نقطة) من مشاهدات خط الانحدار او بعبارة اخرى لحساب القيمة المتوسطة الحقيقية Y عند مستوى معنوية معين:% $(1-\alpha)$ للمتغير المستقل في النموذج .حيث ان النقطة المراد تقديرها في مجال ضمن عينة من المتغيرات المستقلة :(k):

فليكن النموذج الخطي العام خلال العينة n من الشكل : $\hat{Y} = X\hat{\beta}$

ومقدر المربعات الصغرى العادية $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y = AY$ حيث يكون المقدر بملاحظة واحدة في المستقبل كمايلي :

$$\hat{Y}_{n+1} = \hat{\beta}_0 + X_{1n+1}\hat{\beta}_1 + X_{2n+1}\hat{\beta}_2 + X_{3n+1}\hat{\beta}_3 + ... + X_{kn+1}\hat{\beta}_k$$

و التنبؤ بمشاهدتين مستقبلا:

$$\hat{Y}_{n+2} = \hat{\beta}_0 + X_{1n+2}\hat{\beta}_1 + X_{2n+2}\hat{\beta}_2 + X_{3n+2}\hat{\beta}_3 + ... + X_{kn+2}\hat{\beta}_k$$

[1] محمد شيخي، مرجع سابق، ص 81.

اما التنبؤ بعد الفترة m فيكون كمايلي :

$$\hat{Y}_{n+m}=\hat{\beta}_0+X_{1n+m}\hat{\beta}_1+X_{2n+m}\hat{\beta}_2+X_{3n+m}\hat{\beta}_3+..........+X_{kn+m}\hat{\beta}_k$$

إذن إذا أردنا التنبؤ بمجموعة من الملاحظات المستقبلية بفترة تساوي m ملاحظة مرة واحدة يكون شعاع القيم التقديرية[1] :

$$\hat{Y}_n^m=\begin{pmatrix}\hat{Y}_{n+1}\\ \hat{Y}_{n+2}\\ \vdots\\ \vdots\\ \hat{Y}_{n+m}\end{pmatrix}$$
$$(m\times 1)$$

وبكون نتيجة لذلك مصفوفة ملاحظة المتغيرات المستقلة المستقبلية:

$$X_n^m=\begin{pmatrix}1 & X_{1,n+1} & X_{2,n+1} & \cdots & X_{k,n+1}\\ 1 & X_{1,n+2} & X_{2,n+2} & \cdots & X_{k,n+2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & X_{1,n+m} & X_{2,n+m} & \cdots & X_{k,n+m}\end{pmatrix}$$
$$(m\times k+1)$$

ومنه يمكن كتابة النموذج الخطي العام المتنبأ به على الشكل: $Y_n^m=X_n^m\beta+\varepsilon_n^m$ كما يكون المنموذج المقدر من الشكل: $\hat{Y}_n^m=X_n^m\hat{\beta}$ ويكون متوسط مقدر التنبؤ هو:

$$E\left(\hat{Y}_n^m\right)=X_n^mE\left(\hat{\beta}\right)=X_n^m\beta=E\left(Y_n^m\right)$$

هو تنبؤ خطي غير متحيز للعبارة: $X_n^m\beta=E\left(Y_n^m\right)$

ويكون التباين :

$$Var\left(\hat{Y}_n^m\right)=\left\lfloor\left(\hat{Y}_n^m-X_n^m\beta\right)\left(\hat{Y}_n^m-X_n^m\beta\right)'\right\rfloor$$
$$=\sigma_\varepsilon^2X_n^m\left(X'X\right)^{-1}X_n'^m$$

لنعرف شعاع أخطاء التنبؤ:

1شيخي محمد، مرجع سابق، ص 85.

$$d = Y_n^m - \hat{Y}_n^m$$
$$E(d) = E\left(Y_n^m - \hat{Y}_n^m\right) = 0$$

ويكون تباين شعاع اخطاء التنبؤ كمايلي :

$$Var(d) = Var\left(Y_n^m - \hat{Y}_n^m\right) = E\left[\left(-X_n^m\left(\hat{\beta}-\beta\right)+\varepsilon_n^m\right)\left(-X_n^m\left(\hat{\beta}-\beta\right)+\varepsilon_n^m\right)'\right]$$

ومنه:

$$\boxed{Var(d) = \sigma_\varepsilon^2 X_n^m (X'X)^{-1} X_n'^m + \sigma_\varepsilon^2 I_m}$$

ونقول عن هذا التنبؤ انه أحسن تنبؤ خطي غير متحيز *(BLUP)* يمكن الحصول عليه حيث إذا عرفنا $\tilde{Y}_n^m$ تنبؤ

آخر خطي لعينة ملاحظات المتغير التابع مع متوسط خطأ التنبؤ مساو للصفر :

$E\left(\tilde{d}\right) = E\left(Y_n^m - \tilde{Y}_n^m\right) = 0$ تكون لدينا المتراجحة :

$$Var\left(Y_n^m - \tilde{Y}_n^m\right) - Var\left(Y_n^m - \hat{Y}_n^m\right) \geq 0$$

وبالتالي يمكن القول ان $\hat{Y}_n^m = X_n^m \hat{\beta}$ هو حسن تنبؤ خطي غير متحيز.

وتكون اختبارات التنبؤ عن طريق إيجاد التوزيع الذي يعتبر فرضية العدم، والقائلة بأن النموذج الخطي العام يبقى محافظا على شكله من الملاحظة الأولى إلى الملاحظة $n+m$ في المستقبل، أي نفترض عدم تغير البناء الهيكلي للنموذج، ويكتب: $H_0: \quad \hat{Y} = X\hat{\beta} \quad i = 1,2,3,\ldots\ldots n, n+1,\ldots\ldots n+m$

وذلك ضد الفرضية البديلة، والتي تقول أن نموذج العينة الأولى n يختلف عن نموذج التنبؤ للفترة m

$$F = \frac{\left(Y_n^m - \hat{Y}_n^m\right)'\left[X_n^m (X'X)^{-1} X_n'^m + I_m\right]^{-1}\left(Y_n^m - \hat{Y}_n^m\right)/m}{\hat{\sigma}_\varepsilon^2} \quad \sim \quad F_{m,n-k}$$

اما اذا كانت $m=1$ يصبح التوزيع أعلاه على الشكل:

$$F = \frac{\left(Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1}\right)'\left[X_{n+1}(X'X)^{-1} X_{n+1}' + 1\right]^{-1}\left(Y_{n+1} - \hat{Y}_{n+1}\right)}{\hat{\sigma}_\varepsilon^2} \quad \sim \quad F_{1,n-k} = t_{n-k}^2$$

مثال[1]:

نستعمل دائما معطيات المثال الأول للتنبؤ بالمتغير Y للفترة 15 ثم بناء فترات ثقة بنسبة معنوية $\alpha=5\%$

إذا علمنا أن القيمة المستقبلية لكل من $X_1=3$ و $X_2=24$

فانه يمكن التنبؤ بالضاهرة Y انطلاقا من النموذج المقدر:

1 Bourbonnais R, Econométrie, 9emeEdition, Dunod, Paris, 2015, p83.

$$\begin{aligned} y_t &= 25,84 + 0,715x_{1,t} - 0,328x_{2,t} + e_t \\ & \qquad\quad (0,26) \qquad\quad (0,13) \\ n &= 14 \\ R^2 &= 0,687 \\ \widehat{\sigma}_{\varepsilon} &= 2,538 \end{aligned}$$

– والقيم بين قوسين هي الاخطاء المعيارية للمقدرات

$$\widehat{y}_{15} = 25,84 + 0,71\ x_{1\,15} - 0,33\ x_{2\,15} = 25,84 + 0,71 \times 3 - 0,33 \times 24$$

$$\widehat{y}_{15} = 20,25$$

لإيجاد مجال الثقة للتنبؤ، فلا بد من حساب الانحراف المعياري لخطأ التنبؤ .لدينا:

$$\widehat{\sigma}^2_{e15} = \widehat{\sigma}^2_{\varepsilon}[X'_{15}(X'\ X)^{-1}\ X_{15} + 1]$$ اي: $$\overline{\sigma^2_{\varepsilon} X^m_n (X'X)^{-1} X'^m_n + \sigma^2_{\varepsilon} I_m}$$

$$\widehat{\sigma}^2_{e15} = (2,538)^2 \left[(1\ 3\ 24) \begin{bmatrix} 5,707687 & -0,16341 & -0,1222 \\ -0,16341 & 0,011001 & 0,002542 \\ -0,12221 & 0,002542 & 0,0022809 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 24 \end{bmatrix} + 1 \right]$$

ومنه فان تباين خطا التنبؤ هو : $\widehat{\sigma}^2_{e15} = 6,44 \cdot [0,94 + 1] = 12,53$

وبالتالي فالانحراف المعياري لخطأ التنبؤ هو : $\widehat{\sigma}_{e16} = 2,62$

إذن مجال الثقة يكون كما يلي: $y_{15} = \widehat{y}_{15} \pm t^{0,025}_{14-2-1} \cdot \widehat{\sigma}_{e15} = 20,05 \pm 2,201 \times 3,54$

$$IC^{0,05}_{15} = [12,26\,;\ 27,84]$$

ومنه فالتنبؤ بمجال للفترة *15* بمستوى ثقة *%95* يقع ضمن المجال التالي : $[12,26\,;\ 27,84]$

تمارين مقترحة

1- اذكر الفرضيات الهيكلية والتصادفية في نموذج الانحدار الخطي العام.

3- ماهو الفرق بين معامل التحديد R^2 ومعامل التحديد المعدل $\overline{R}^2$ ؟

3- اذا كانت لدينا قيمة $R^2 = 0.60$ و $n=10$ و $k=2$، فماهي القيمة التي يأخذها $\overline{R}^2$ ؟

4- برهن على مايلي :

أ- اذا كان لدينا $\widehat{a} = (X'\ X)^{-1}\ X'\ Y$ فان : $E(\hat{a}) = a$;

ب -بين ان : $\Omega_{\hat{a}} = \sigma^2_{\varepsilon}(X'\ X)^{-1}$

II- ليكن لدينا النموذج الخطي المتعدد : $Y_i=\beta_0+ \beta_1X_{i1}+ \beta_2X_{i2}+U_i$ حسب المعطيات التالية.

$$(X'X)\begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 \\ ? & 9 & 6 \\ ? & ? & 12. \end{pmatrix}$$

1- اكمل عناصر المصفوفة: $(X'X)$

2- احسب حجم العينة في هذا النموذج n .

3-استخرج من المصفوفة مايلي: $\sum_{t=1} X_1X_2$ ، $\sum_{t=1} X_1^2$ ،$\sum_{t=1} X_2^2$

3- احسب معامل الارتباط البسيط $r_{x1.x2}$ بين X_1 و X_2 .

III-لتكن لدينا دالة الانتاج ممثلة لـ:33 مؤسسة كمايلي : $Y_i=\beta_1 X_1^{\beta 2} X_2^{\beta 3} e^u$ ولتقدير بواسطة mco

قمنا بإدخال اللوغاريتم: $\log Y_i = \beta_1 + \beta_2 \log X_{1i} + \beta_3 \log X_{2i} + u_i$ فكانت النتائج: $\log Y_i = -2+0.4 \log X_1+0.56 \log X_2$

1- علق اقتصاديا على هذا النموذج مبرزا ماهية المتغيرين المستقلين..

2-احسب مجال الثقة لـ: β_1 عند مستوى 95% .

$$V(\beta) = \begin{pmatrix} 0.25 & -0.54 & -0.004 \\ & 0.01 & 0.0014 \\ & & 0.144 \end{pmatrix}$$

3-اختبر عند مستوى $\alpha = 5\%$ الفرضية: $H_O : \beta_1+\beta_2=1$

الفصل الرابع :
مشكلة الارتباط الذاتي للاخطاء

هناك عدة من مشاكل قياسية يمكن للباحث الاقتصادي ان يواجهها ومن ابرزها مشكلة الارتباط الذاتي للاخطاء ومشكلة عدم تجانس التباين، سنحاول التعرض الى مشكلة الارتباط الذاتي للاخطاء ثم مشكلة عدم تجانس تباين الاخطاء في النموذج الخطي المتعدد

1- مشكلة الارتباط الذاتي للاخطاء

لتطبيق طريقة المربعات الصغرى يجب مراعاة الفرضيات الأساسية التي رأيناها سابقا ومن بينها فرضية انعدام الارتباط الذاتي بين الأخطاء في فترات مختلفة، حيث تنص فرضية العدم في النموذج على انعدام الارتباط الذاتي بين الأخطاء: أي استقلال القيمة المقدرة لحد الخطأ في فترة زمنية معينة عن القيمة المقدرة لحد الخطأ في فترة زمنية سابقة لها[1]:

$$Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, \quad \forall i \neq j$$

كما ان تحت هذه الفرضية تكون مصفوفة التباين-التباين المشترك كمايلي :

$$\Omega_\varepsilon = E(\varepsilon\varepsilon') = \begin{bmatrix} E(\varepsilon_1\,\varepsilon_1) & E(\varepsilon_1\,\varepsilon_2) & \dots & E(\varepsilon_1\,\varepsilon_n) \\ E(\varepsilon_2\,\varepsilon_1) & E(\varepsilon_2\,\varepsilon_2) & \dots & E(\varepsilon_2\,\varepsilon_n) \\ \dots & & & \\ E(\varepsilon_n\,\varepsilon_1) & E(\varepsilon_n\,\varepsilon_2) & \dots & E(\varepsilon_n\,\varepsilon_n) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_\varepsilon^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_\varepsilon^2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma_\varepsilon^2 \end{bmatrix}$$

وبإسقاط هذا الافتراض فإن ذلك يدل على وجود ما يسمى بالارتباط الذاتي حيث أن مصفوفة التباين-التباين المشترك لا تحتوي على الصفر خارج القطر الأول لانه : $\mathrm{Cov}\,(\varepsilon_t, \varepsilon_{t'}) \neq 0$:

$$\Omega_{\hat{\beta}} = E((\hat{\beta}-\beta)(\hat{\beta}-\beta)') = (X'X)^{-1}X'E(\varepsilon\varepsilon')X(X'X)^{-1}$$

$$= (X'X)^{-1}(X'\Omega_\varepsilon X)(X'X)^{-1} \neq \sigma_\varepsilon^2(X'X)^{-1}$$

بتكون التقديرا بواسطة طريقة المربعات الصغرى لا تحافظ على خاصية اقل تباين رغم عدم التحيز منه،

لان المعلمات $\hat{\beta}$ من مصفوفة التباين والتباين المشترك تكون اكبر منها في حالة المصفوفة[2] $\sigma_\varepsilon^2(X'X)^{-1}$

فيتم استعمال طريقة المربعات الصغرى المعممة GLS وتقدير شعاع المعالم β ينبغي أن يكون لديه نفس الخصائص الإحصائية لأي مقدر:

عندما تكون الفرضيات الأساسية للنموذج محققة، فإن:

$$\hat{\beta}_{GLS} = (X'\Omega_\varepsilon^{-1}X)^{-1}(X'\Omega_\varepsilon^{-1}Y) = \left(X'(\sigma_\varepsilon^2 I)^{-1}X\right)^{-1}\left(X'(\sigma_\varepsilon^2 I)^{-1}Y\right) = (X'X)^{-1}(X'Y) = \hat{\beta}_{OLS}$$

1محمد شيخي ، مرجع سابق، ص 97

2 Bourbonnais R, Econométrie, 9emeEdition, Dunod, Paris, 2015, p126.

هذه الحالة، المقدر المتحصل عليه بطريقة المربعات الصغرى المعممة هي نفسه المقدر بطريقة المربعات الصغرى العادية.

2– اسباب وجود مشكلة الارتباط الذاتي للاخطاء

يمكن تلخيص أهم أسباب الارتباط الذاتي فيما يلي:

أ–**حذف بعض المتغيرات التفسيرية ذات القيم المرتبطة ذاتيا:** فمن المعروف أن حذف بعض المتغيّرات من نموذج الانحدار يترتب عليه ما يسمى بخطأ الحذف، و هذا ينعكس بدوره في قيم الحدّ العشوائي.

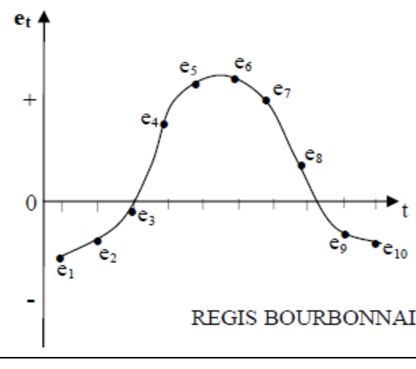
ب– **سوء تعيين الشكل الرياضي للنموذج:**فاختلاف الصيغة المستعملة في التقدير عن الصيغة الحقيقية يتولد عنه ارتباطا ذاتيا لقيم الحد العشوائي كاستعمال الباحث للعلاقة الخطية بين المتغير التابع والمتغيرات المفسرة او المستقلة ينطوي على نوع معيّن من الخطأ و ينعكس على الحدّ العشوائي.

ج– عدم دقة بيانات السلاسل الزمنية. فقد تكون البيانات المتاحة شهرية في حين ان الباحث يحتاج الى بيانات موسمية او ربع سنوية فيقوم بتجميعها والحصول على متوسط لها فتكون البيانات الديدة بها نوع من التقلب فبينتج عن ذلك نوع من حد الخطأ الذي سيتكرر مشاهدة بعد اخرى نتيجة عملية التقريب المستمرة مما يكون هناك ارتباط ذاتي للاخطاء.

حيث يمكن ان نميز بين نوعين من الارتباط الذاتي للاخطاء:

الارتباط الذاتي من الدرجة الاولى الموجب($\rho > 0$): عندما تكون معظم القيم المقدر المتتابعة لحد الخطأ لها نفس الاشارة الجبرية ، يكون تمثيله البياني كمايلي:

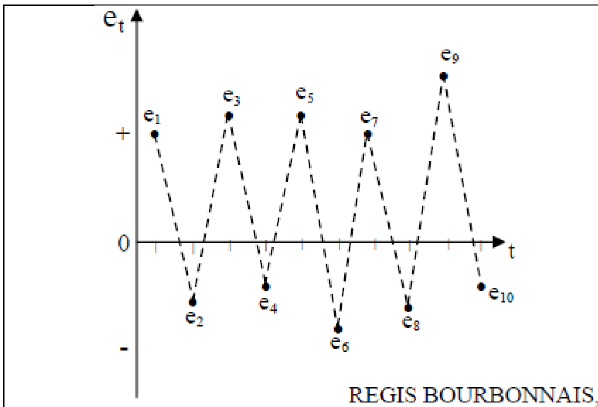
الشكل رقم **05** : الارتباط الذاتي من الدرجة الاولى الموجب($\rho > 0$)



المصدر : REGIS BOURBONNAIS, Op-cit, p221.

الارتباط الذاتي من الدرجة الاولى السالب($\rho < 0$): عندما تكون معظم القيم المقدر المتتابعة لحد الخطأ تختلف اشارتها بين الموجب والسالب فيكون تمثيله البياني كمايلي:

الشكل رقم **06** : الارتباط الذاتي من الدرجة الاولى السالب($\rho\leq 0$)



المصدر: REGIS BOURBONNAIS, Op-cit, p222.

أما وجوده فيؤثر سلبا على نتائج المربعات الصغرى العادية حيث انه إذا كان عشوائي الانحدار مرتبطا ذاتيا فأن مقدرات *OLS* غير متحيزة وتتميز بالاتساق لكنها ليست افضل مقدرات لان تباينها سوف لا يكون أقل ما يمكن .و في حالة OLS فأن تباين β متحيز وعليه إذا استعملنا هذا التباين في بناء فترات الثقة وأجراء اختبارات المعنوية فان النتائج خاطئة.

3-اختبارات الكشف عن الارتباط الذاتي للاخطاء

قد يتم الكشف عن مشكلة الارتباط الذاتيس للاخطاء بواسطة التمثيل البياني الذي بوره يحدد لنا نوع الارتباط ساء كان موجبا كما يبينه الشكل او سالب كما يبينه الشكل الموالي له، ولكن كذلك في المقابل تستعمل عدة اختبارات للكشف على هذا الاختلال منها ما يلي:

3-1- اختبار دربن واتسون *Durbin –Watson*[1]

يعتبر اختبار دربن(*Durbin –Watson*) واتسون من أهم الاختبارات الشائعة المستخدمة في كشف الارتباط الذاتي من الدرجة الاولى ويستخدم هذا النوع من الاختبارات لسهولته نسبيا ولامكانية استخدامه عندما يكون عدد المشاهدات صغيرا، شريطة الا يقل عن 15 مشاهدة.

تكون معادلة الارتباط حسب الشكل[2]: $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + \nu_t$ حيث $\nu_t \to N\left(0,\delta_\nu^2\right)$

حيث يتم الحكم على مدى وجود استقلال ذاتي بين البواقي من خلال اختبار دربن واتسون(D.W) وفقا للخطوات التالية[3]:

*الفرضيات

*فرضية العدم $H_0: \rho = 0$: يوجد استقلال (عدم ارتباط) بين البواقي

1مجيد حسين، عفاف سعيد، مرجع سابق، ص 448.

2 Bourbonnais R, Econométrie, 5emeEdition, Dunod, Paris, 2003, p223.

3بن أحمد أحمد، النمذجة القياسية للاستهلاك الوطني للطاقة الكهربائية في الجزائر خلال الفترة (10:1988-03:2007)،مرجع سابق، ص67.

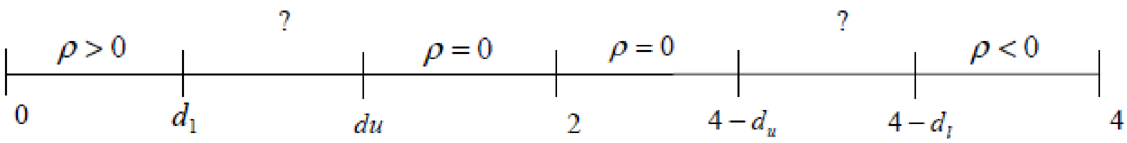
* الفرضية البديلة H_1: $\rho\neq 0$: لا يوجد استقلال بين البواقي (هناك ارتباط بين الاخطاء)

* للتحقق من وجود الارتباط الذاتي او عدمه يتم تحدد قيمة دربن واتسون التي تاخذ القيمة بين 0 و 4، تعطى علاقتة بالشكل التالي:

$$DW = \frac{\sum_{t=1}^{n}\hat{\varepsilon}_t^2 + \sum_{t=2}^{n}\hat{\varepsilon}_{t-1}^2 - 2\sum_{t=1}^{n}\hat{\varepsilon}_t\hat{\varepsilon}_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n}\hat{\varepsilon}_{t-1}^2}$$

ويوضح الشكل التالي قيم d (القيم الجدولية للإختبار)، التي تشير إلى وجود أو عدم وجود الإرتباط الذاتي من الدرجة الأولى الموجب أو السالب، أو التي تجعل نتيجة الإختبار غير محددة، وتوجد قيم كل من الحدين الأعلى والأدنى لـ:d (d_l, d_u)

الشكل رقم 07 يوضح اختبار دربن واتسون



***اتخاذ القرار**

بشأن رفض أو قبول الفرض العدمي حول الارتباط الذاتي للبواقي، يتم اتخاذ القرار وفقا للقواعد التالية:

- نرفض الفرض العدمي: H_0 :$\rho = 0$ في حالتين :

الحالة الأولى :إذا كان $(4-d_l<DW<4)$.

الحالة الثانية :إذا كان $(0<DW<d_l)$.

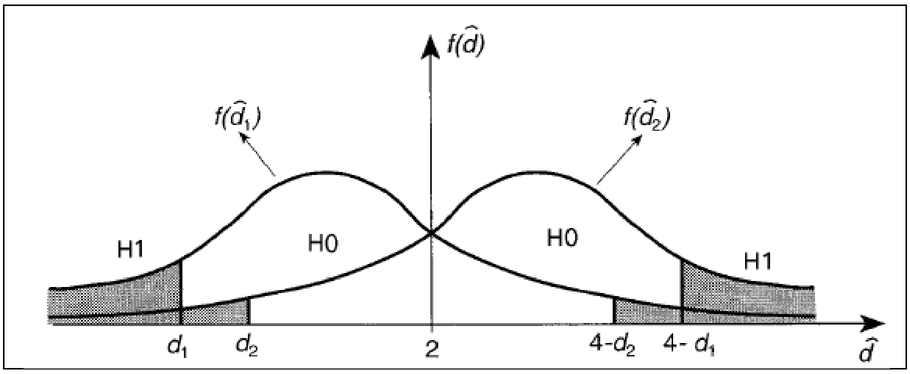
- ونقبل الفرض العدمي H_0 :$\rho = 0$ في حالتين :

الحالة الأولى :إذا كان $(2<DW<4-d_u)$

الحالة الثانية :إذا كان $(d_u<DW<2)$

إذا كانت $d_l \leq DW \leq d_u$ أو : $4- d_u \leq DW \leq 4 - d_l$ فالنتيجة الخاصة بالاختبار غير محددة و يجب إضافة بيانات أكثر.

الشكل البياني رقم08 يوضح اختبار الفرضيات بواسطة اختبار دربن واتسون



Source :.Bourbonnais R, Econométrie, 9eme Edition, Dunod, Paris, 2015, p130

- ويتطلب استخدام هذا الاختبار ان يتضمن النموذج المقدر الثابت $\widehat{\alpha}$
- كما ان النموذج لا يتضمن تباطؤ زمني للمتغير التابع Y_{t-1} ضمن المتغيرات المستقلة وهو مايتطلب استعمال اختبارات اخرى كاختبار دربن h او اختبار *Breusch-Godfrey* .

يمكن كتابة الإحصائية أيضا بدلالة مقدر معامل الارتباط ρ [1]:

$$DW \cong \frac{2\sum_{t=2}^{n}\hat{\varepsilon}_{t-1}^{2}}{\sum_{t=1}^{n}\hat{\varepsilon}_{t-1}^{2}} - \frac{2\sum_{t=1}^{n}\hat{\varepsilon}_{t}\hat{\varepsilon}_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n}\hat{\varepsilon}_{t-1}^{2}}$$

نلاحظ أن: $\sum_{t=1}^{n}\hat{\varepsilon}_{t}^{2} \cong \sum_{t=2}^{n}\hat{\varepsilon}_{t-1}^{2}$ إذن:

$$DW = \frac{\sum_{t=1}^{n}\hat{\varepsilon}_{t}^{2} + \sum_{t=2}^{n}\hat{\varepsilon}_{t-1}^{2} - 2\sum_{t=1}^{n}\hat{\varepsilon}_{t}\hat{\varepsilon}_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n}\hat{\varepsilon}_{t-1}^{2}}$$

وحيث ان قيمة ρ هي :

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=1}^{n}\hat{\varepsilon}_{t}\hat{\varepsilon}_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n}\hat{\varepsilon}_{t-1}^{2}}$$

ومنه : $DW \cong 2(1-\hat{\rho})$

ويتحدد من العلاقة السابقة انه اذاكان $\rho=0$ فإن $DW \cong 2$

1 محمد شيخي ، مرجع سابق، ص 99.

2–3– إختبار داربين آش Durbin h [1]

في حالة وجود متغير متباطئ للمتغير التابع ونتيجة لأسباب إحصائية لوحظ إن إحصاء ديربن واتسون لا يمكن تطبيقه في هذه الحالة وهو من بين الإنتقادات الموجهة إلى هذا الاختبار، ولهذا قام الباحث داربين باقتراح اختبار هو دربن آش *Durbin h* الذي يفضل استعماله للعينات التي اكبر من(n>30) مشاهده. حيث تقل قوة الاختبار عند العينات التي اقل من 30مشاهدة. و تعطى صيغته بالعلاقة:

$$h = \hat{\rho}\sqrt{\frac{n}{1 - nV(\hat{\gamma}_1)}}$$

حيث : n عدد المشاهدات و $V(\gamma)$ تباين مقدرة معلمة Y_{t-1}. للنموذج التالي:

$$Y_t = \gamma_0 + \gamma_1 Y_{t-1} + \gamma_2 X_t + u_t$$

القيمة الجدوليه h يمكن إيجادها من جدول التوزيع الطبيعي Z أي انها موزعة طبيعيا $h \to N(0,1)$

- **شكل الاختبار**:يتم الاختبار من جانب واحد،حسب الفرضيات التالية:

$$H_0 : \rho \leq 0$$
$$H_A : \rho \succ 0$$

- **نتيجة الاختبار**: اذا كانت h>Z نرفض H_0 ونقول ان هناك ارتباط ذاتي من الدرجة الاولى، والعكس صحيح.

ومن عيوب هذه الإحصاءة لا يتم استخدام هذا الاختبار إذا كانت $nV(\gamma) > 1$ آي لا يستخدم عندما تكون $nV(\gamma) > 1$ يكون $\sqrt{-}$ بالسالب أي يكون الجذر التربيعي رقم تخيلي.

– مثال:

بعد تقدير دالة الاستهلاك والذي يكون الاستهلاك الجاري دالة في التخلف الزمني للاستهلاك في فصل واحد c_{t-i} مع الدخل المتاح y_{dt}

وتم التقدير بواسطة طريقة المربعات الصغرى كانت النتائج كمايلي :

$$Ct = 2.6911 + 0.0985\, Yt + 0.8974\, Ct_{-1}$$
$$se \quad (0.364) \quad (0.0399) \quad (0.0433) \qquad DW = 1.559 \quad ; \quad R^2 = 0.99$$

نقوم باستعمال اختبار دربن لاختبار وجود ارتباط ذاتي من الدرجة الاولى: $h = \hat{\rho}\sqrt{\frac{n}{1 - nV(\hat{\gamma}_1)}}$

1مجدي الشوربجي، الاقتصاد القياسي (النظرية والتطبيق)، ديوان المصرية اللبنانية، الطبعة الأولى، سنة 1994، ص 85.

حيث : $h = 1 - \frac{D^*}{2}\sqrt{\frac{117}{1-117.0.433}} = 2.7$

بما ان $h>Z=1.6545$ نرفض فرضية العدم اي لا يوجد ارتباط ذاتي من الدرجة الاولى.

3-3اختبار Breusch-Godfrey[1].

يرتكز هذا الاختبار على مضاعف لاغرانج و الذي يسمح باختبار وجود ارتباط ذاتي يكتب على ρ من درجة أكبر من الواحد .نموذج الانحدار الذاتي للأخطاء من الدرجة

الشكل التالي: $\varepsilon_t = \rho_1\varepsilon_{t-1} + \rho_2\varepsilon_{t-2} + \dots + \rho_p\varepsilon_{t-p} + u_t$

فيكون النموذج العام حيث أن الأخطاء مرتبطة ذاتيا:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + \dots + \beta_k X_{tk} + \rho_1\varepsilon_{t-1} + \rho_2\varepsilon_{t-2} + \dots + \rho_p\varepsilon_{t-p} + u_t$$

هناك ثلاث خطوات لإجراء هذا الاختبار:

1- تقدير النموذج العام بطريقة المربعات الصغرى ثم حساب البواقي $\hat{\varepsilon_t}$

2-تقدير المعادلة الوسيطية التالية:

$$\hat{\varepsilon}_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + \dots + \beta_k X_{tk} + \rho_1\hat{\varepsilon}_{t-1} + \rho_2\hat{\varepsilon}_{t-2} + \dots + \rho_p\hat{\varepsilon}_{t-p} + u_t$$

ثم حساب معامل التحديد الخاص بهذه المعادلة R^2' حيث نذكر بانه بهذه الطريقة فاننا نفقد مشاهدة من باقي المشاهدات، ثم نقوم باختبار فرضية استقلال الاخطاء كمايلي :

فرضية العدم: $H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_p = 0$ يوجد استقلال (عدم ارتباط) بين البواقي

حساب الاحصائية LM حيث $LM = (n-p)\times R^2$ تتبع التوزيع كاي مربع χ^2 بدرجة حرية p.

اذا كان : $(n-p)\times R^2 > \chi^2(p)$ فاننا نرفض نرفض الفرضية الصفرية :فرضية استقلال الاخطاء.

مثال1[2]:

ليكون لدينا نموذج خطي متعدد متضمن المتغيرات المستقلة التالية:

$$y_t = a_0 + a_1 x_{1t} + a_2 x_{2t} + a_3 x_{3t} + \varepsilon_t$$

[1] Breusch (1978) et Godfrey (1978).

2 Bourbonnais R, Econométrie, 9[eme]Edition, Dunod, Paris, 2015, p132.

الجدول رقم 07

Année	y	x_1	x_2	x_3
1	87,40	98,60	99,10	108,5
2	97,60	101,20	99,10	110,1
…	…	…	…	…
19	110,70	105,30	93,00	108,5
20	127,10	107,60	106,60	111,3

من خلال البيانات البقة نحاول تحديد مشكلة الارتباط الذاتي من الدرجة الاولى :

- تقدير معلمات النموذج والتمثيل البياني للبواقي
- حساب احصائية دربن واتسون واستعمال ذات الاختبار للتحقق من المشكلة
- استخدم اختبار Breusch-Godfrey.للتحقق من ذلك.

الحل

من خلال مخرجات برنامج Eviews ضهرت النتائج التالية:

1- تقدير المعلمات

تشير البينات التالية الى ان المعلمات كلها تختلف معنويا عن الصفر عند مستوى معنوية 5% حيث كانت قيم ستودنت المحسوبة تفوق قيمة ستودنت المجدولة وهي بقيمة $(t_{16}^{0,05} = 2,12)$ ونفس الملاحظة تنطبق على اختبار فيشر

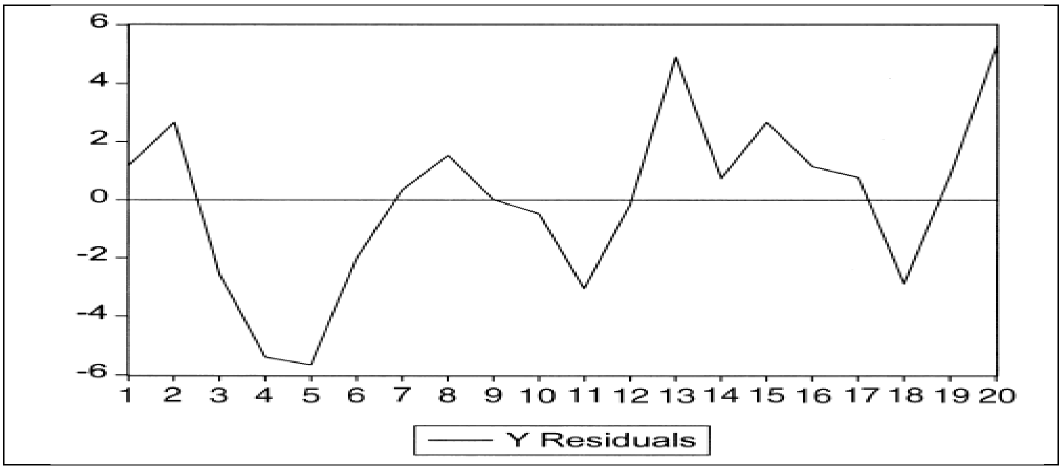
الي يبين صلاحية النموذج الاجمالية.

Dependent Variable : Y
Included observations : 20

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	–242.7951	26.79995	–9.059538	0.0000
X1	3.897408	0.400325	9.735616	0.0000
X2	0.404365	0.061351	6.590977	0.0000
X3	–0.878886	0.240216	–3.658727	0.0021

R-squared	0.938895	Mean dependent var	97.53500
Adjusted R-squared	0.927438	S.D. dependent var	11.83048
S.E. of regression	3.186826	Akaike info criterion	5.332784
Sum squared resid	162.4937	Schwarz criterion	5.531931
Log likelihood	–49.32784	F-statistic	81.94784
Durbin-Watson stat	1.053794	Prob(F-statistic)	0.000000

2- التمثيل الباين للبواقي من مخرجات برنامج Eviews كاالآتي:



- يبين الشكل السابق الى ظهور البواقي بشكل دوري وهو مايبين وجود ارتباط ذاتي موجب.
- شروط استعمال اختبار دربن واتسون محققة حيث:

عدد المشاهدات هو $n=20$ وهو يفوق 15 مشاهدة. كما ان النموذج يتضمن حد الثابت.

- يتم الحصول على قيمة احصائية دربن واتسون كمايلي :

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} = \frac{171,23}{162,49} = 1,053$$

وبمقارنة هذه القيمة مع القيمة الموجودة في جدول دربن وتسون لـ 20 مشاهدة(n=20) وثلاث متغيرات مستقلة (k=3) مع $d_l= 1.00$ و $d_u= 1.68$ نجد ان قيمة دربن وتسون المحسوبة تقع بين القمتين العليا والدنيا $d_1 < DW < d_2$ ومنه نرفض الفرضية H_0ونقول ان هناك ارتباط ذاتي للاخطاء موجب

- بما ان البيانات سنوية فنقوم باختبار وجود ارتباط ذاتي من الدرجة الثانية ويتم ذلك بواسطة النموذج التالي:

$$e_t = a_1 x_{1t} + a_2 x_{2t} + a_3 x_{3t} + a_0 + \rho_1 e_{t-1} + \rho_2 e_{t-2} + v_t$$

$$\hat{e}_t = -17,26 + 0,5287x_{1t} - 0,0369x_{2t} - 0,3149x_{3t} + 0,589\, e_{t-1} - 0,497e_{t-2}$$

ومع $R^2=0.33$ و n=18 (لانه تم فقدان مشاهدتين)

وبحساب LM ومقارنتها مع χ^2 نجد: $LM = nR^2 = 18 \times 0,33 = 5,94 < \chi^2_{0,05}(2) = 5,99$

هنا نقبل الفرضية الصفرية H_0 عند مستوى معنوية 5%

ننتقل الى النموذج الموالي لدراسة وجود مشكلة ارتباط ذاتي من درجة اقل وهي الدرجة الاولى:

$$\hat{e}_t = -11,82 + 0,087\, x_{1t} - 0,0158\, x_{2t} - 0,044\, x_{3t} + 0,507\, e_{t-1}$$

: $R^2 = 0,196$ et $n = 19$, $LM = 19 \times 0,196 = 3,72 < \chi^2_{0,05}(1) = 3,84$

مرة اخرى نقبل الفرضية الصفرية H_0 عند مستوى معنوية 5%وبالنظر الى نتائج الاختبارين (اختبار دربن واتسون *DW* و Breusch-Godfrey) نقول انه هناك ارتباط ذاتي للاخطاء في النموذج[1] .

4–تقدير المعلمات في وجود الارتباط الذاتي للاخطاء

إذا أخذنا بعين الاعتبار الارتباط الذاتي بين الأخطاء، النموذج الخطي العام يكتب على الشكل التالي:

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

مع:

$$\varepsilon_t = \rho\, \varepsilon_{t-1} + u_t,\ |\rho| < 1$$

تعبر هذه المعادلة عن سيرورة الانحدار الذاتي من الدرجة الأولى *AR(1)* الذي يحقق الفرضيات التالية.

$$E(u_t) = 0$$
$$E(u_t^2) = \sigma_u^2, \forall t$$
$$\text{cov}(u_t, u_{t'}) = 0, \forall t \neq t'$$
$$\text{cov}(u_t, \varepsilon_{t-1}) = 0, \forall t$$

من نموذج الانحدار الذاتي، نعوض قيمة ε_{t-1} بمايساويها فنحصل على:

$$\varepsilon_t = \rho(\rho\varepsilon_{t-2} + u_{t-1}) + u_t = \rho^2\varepsilon_{t-2} + \rho u_{t-1} + u_t$$

نعوض ε_{t-2} بما يساويها، نحصل أيضا:

$$\varepsilon_t = \rho^2(\rho\varepsilon_{t-3} + u_{t-2}) + \rho u_{t-1} + u_t = \rho^3\varepsilon_{t-3} + \rho^2 u_{t-2} + \rho u_{t-1} + u_t$$

وبترتيب الحدود تصبح لدينا المعادلة:

$$\varepsilon_t = u_t + \rho u_{t-1} + \rho^2 u_{t-2} + \rho^3 u_{t-3} + \dots$$

تؤول هذه السيرورة إلى الصفر لأن: $|\rho| < 1$

ونقوم بدراسة خصائص εt ، وتربيع حد الخطأ نجد:

$$\varepsilon_t^2 = u_t^2 + \rho^2 u_{t-1}^2 + \rho^4 u_{t-2}^2 + \rho^6 u_{t-3}^2 + \dots$$

وبادخال الامل الرياضي على طرفي المعادلة:

$$E(\varepsilon_t^2) = E(u_t^2) + \rho^2 E(u_{t-1}^2) + \rho^4 E(u_{t-2}^2) + \rho^6 E(u_{t-3}^2) + \dots$$

نعلم أن:

$$E(u_t^2) = E(u_{t-1}^2) = E(u_{t-2}^2) = E(u_{t-3}^2) = \dots = \sigma_u^2, \forall t$$

ومنه:

$$\text{var}(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = (1 + \rho^2 + \rho^4 + \rho^6 + \dots)\sigma_u^2$$

إذن:

$$\text{var}(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = \frac{\sigma_u^2}{1 - \rho^2}$$

[1] Bourbonnais R, Econométrie, 9emeEdition, Dunod, Paris, 2015, p134.

وباستعمال خصائص u_iنقوم بحساب التباين المشترك للخطأ ε_i ، لدينا[1]:

$$\varepsilon_t\varepsilon_{t-1} = \left(u_t + \rho u_{t-1} + \rho^2 u_{t-2} + \rho^3 u_{t-3} + \ldots\right)\left(u_{t-1} + \rho u_{t-2} + \rho^2 u_{t-3} + \rho^3 u_{t-4} + \ldots\right)$$
$$= \rho u_{t-1}^2 + \rho^3 u_{t-2}^2 + \rho^5 u_{t-3}^2 + \ldots$$

بإدخال التوقع الرياضي على الطرفين، نحصل في الأخير على: $E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}) = \dfrac{\rho\sigma_u^2}{1-\rho^2}$

لان[2]:

$$\mathrm{Cov}(\varepsilon_t,\varepsilon_{t+2}) = E(\varepsilon_t,\varepsilon_{t+2}) = E(\varepsilon_t,(\rho\varepsilon_{t+1} + v_{t+2})) = \rho E(\varepsilon_t,\varepsilon_{t+1}) = \rho^2\sigma_\varepsilon^2$$

اي: $\mathrm{Cov}(\varepsilon_t,\varepsilon_{t+i}) = E(\varepsilon_t,\varepsilon_{t+i}) = \rho^i\sigma_\varepsilon^2 = \dfrac{\rho^i\sigma_v^2}{(1-\rho^2)}$

نفس الشيء مع: $E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-2})$

$$E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-2}) = \frac{\rho^2\sigma_u^2}{1-\rho^2}$$

في الحالة العامة، سيكون لدينا: $E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-i}) = \dfrac{\rho^i\sigma_u^2}{1-\rho^2}$

– مصفوفة التباين والتباين المشترك للاخطاء

مصفوفة التباين-التباين المشترك للأخطاء في حالة وجود ارتباط ذاتي من الدرجة الأولى تكتب على الشكل التالي:

$$\Omega_\varepsilon = E(\varepsilon\varepsilon') = \frac{\sigma_u^2}{1-\rho^2}\begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \ldots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \ldots & \rho^{n-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \ldots & \rho^{n-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \ldots & 1 \end{pmatrix} \text{ مع } |\rho| < 1$$

حيث أن مقدر طريقة المربعات الصغرى يكتب على الصيغة التالية:

$$\hat{\beta} = (X'\Omega_\varepsilon^{-1}X)^{-1}(X'\Omega_\varepsilon^{-1}Y)$$

ونتحصل على مقلوب المصفوفة الخاصة بالتباين والتباين المتشرك:

1محمد شيخي ، مرجع سابق، ص 102.

2 2 *Bourbonnais R, Econométrie, 9^eme Edition, Dunod, Paris, 2015, p135.*

$$\Omega_{\varepsilon}^{-1} = \frac{1}{\sigma_u^2}\begin{pmatrix} 1 & -\rho & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -\rho & 1 \end{pmatrix}$$

وحيث ان قيمتيρ و δ_u^2 مجهولتين فنحتاج الى مقدرين لهما من خلال ايجاد المصفوفة M والمعرفة كمايلي :

$MY = MX\beta + M\varepsilon$ ويحقق جميع الفرضيات الاساسية، لدينا مايلي :

$$E((M\varepsilon)(M\varepsilon)') = E(M\varepsilon\varepsilon'M') = ME(\varepsilon\varepsilon')M' = M\Omega_{\varepsilon}M' = \sigma_{\varepsilon}^2 I$$

تكون لدينا المقدرات كمايلي: $\hat{\beta} = \left(X'M'MX\right)^{-1} X'M'MY$

نحصل على المصفوفة التالية:

$$\underset{(n-1,n)}{M} = \begin{pmatrix} -\rho & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\rho & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\rho & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\rho & 1 \end{pmatrix}$$

التي تعتبر كاستنتاج للمصفوفة:

$$M'M = \begin{pmatrix} \rho^2 & -\rho & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1+\rho^2 & -\rho \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -\rho & 1 \end{pmatrix}$$

وهده الاخير تعبر عن ذات المصفوفة $\sigma_u^2\Omega_{\varepsilon}^{-1}$ وعليه تؤول طريقة المربعات الصغرى المعممة GLSإلى طريقة المربعات الصغرى العادية OLS ، حيث يتم تقدير النموذج العام المصحح من الارتباط الذاتي عن طريق تحويل المتغيرات عن طريق شبه الفروقات من الدرجة الأولى، لدينا[1]:

1محمد شيخي،طرق الاقتصاد القياسي: محاضرات وتطبيقات، مرجع سابق ، ص 104.

$$MY = \begin{pmatrix} Y_2 - \rho Y_1 \\ Y_3 - \rho Y_2 \\ \dots \\ Y_n - \rho Y_{n-1} \end{pmatrix} \quad و \quad MX_j = \begin{pmatrix} X_{2,j} - \rho X_{1,j} \\ X_{3,j} - \rho X_{2,j} \\ \dots \\ X_{n,j} - \rho X_{n-1,j} \end{pmatrix}$$

عند استخدام شبه الفروقات، نفقد المشاهدة الأولى لكل متغير ولتجنب ضياعها، نقوم بـ:

$$Y_1^* = Y_1\sqrt{1-\rho^2}$$
$$X_{1,j}^* = X_{1,j}\sqrt{1-\rho^2}$$

ويكون النموذج المصحح كمايلي:

$$Y_t - \hat{\rho}Y_{t-1} = \beta_0(1-\hat{\rho}) + \beta_1(X_{t1} - \hat{\rho}X_{t-1,1}) + \beta_2(X_{t2} - \hat{\rho}X_{t-1,2}) + \dots + \beta_k(X_{tk} - \hat{\rho}X_{t-1,k}) + u_t$$
$$dy_t = b_0 + a_1\, dx_{1t} + a_2\, dx_{2t} + v_t$$

حيث يخضع الحد v_t الى فرضيات الحد العشوائي لطريقة المربعات الصغرى العادية ، يتم تقدير النموذج الأخير بطريقة المربعات الصغرى العادية .ولكن يجب اولا تقدير معامل الارتباط الذاتي بين الأخطاء من الدرجة الأولى .

اما الحد الثابت فيتم تقديره كمايلي[1]: $a_0 = b_0/(1-\rho)$

5–طرق تقدير معامل الارتباط

هناك إذن عدة طرق للتقدير منها ما يلي:

5–1احصائية دربن واتسون DW للتقدير:

نقوم بتقدير معامل الارتباط الذاتي من الدرجة الاولى اعتمادا على احصائية دربن واستون عاى خطوتين :

الخطوة 1: تقدير قيمة اما بواسطة انحدار البواقي او بواسطة قانون ردبن واتسون :

البواقي : $\hat{\rho} = \dfrac{\sum_{t=2}^{n} e_t\, e_{t-1}}{\sum_t e_t^2} \quad (\overline{e} = 0)$ قانون دربن واتسون : $\hat{\rho} \cong 1 - DW/2$

الخطوة الثانية :

تقدير النموذج التالي بعد إجراء التعديلات على المشاهدات بحساب شبه الفروقات

$$Y_t - \hat{\rho}Y_{t-1} = \beta_0(1-\hat{\rho}) + \beta_1(X_{t1} - \hat{\rho}X_{t-1,1}) + \beta_2(X_{t2} - \hat{\rho}X_{t-1,2}) + \dots + \beta_k(X_{tk} - \hat{\rho}X_{t-1,k}) + u_t$$

وللتبسيط نكتب المعادلة السابقة كمايلي:

$$Y_t^* = \beta_0^* + \beta_1 X_{t1}^* + \beta_2 X_{t2}^* + \dots + \beta_k X_{tk}^* + u_t$$

[1] Bourbonnais R, Econométrie, 9emeEdition, Dunod, Paris, 2015, p137.

وتكون المعلمات المقدرة بطريقة المربعات الصغرى العادية هي: $\hat{\beta}_1,\dots,\hat{\beta}_k$ و $\hat{\beta}_0^* = \hat{\beta}_0(1-\hat{\rho})$

5-2طريقة *Cochrane-Orcutt*

قام العالمان باقتراح طريقة لتقدير معامل الارتباط الذاتي للاخطاء ρ، وذلك باعطاء قيمة ابتدائية له :

الخطوة 01: إعطاء قيمة ابتدائية لمعامل الارتباط وذلك بتقنية تقدير مباشرة:

$$\hat{\rho} = \frac{\sum \hat{\varepsilon}_t \hat{\varepsilon}_{t-1}}{\sum \hat{\varepsilon}_{t-1}^2}$$ ، فيكون لدينا: $\widehat{\rho_0} = \widehat{\rho}$

الخطوة 02: تقدير النموذج التالي بطريقة المربعات الصغرى العادية:

$$Y_t - \hat{\rho}_0 Y_{t-1} = \beta_0(1-\hat{\rho}_0) + \beta_1(X_{t1} - \hat{\rho}_0 X_{t-1,1}) + \beta_2(X_{t2} - \hat{\rho}_0 X_{t-1,2}) + \dots + \beta_k(X_{tk} - \hat{\rho}_0 X_{t-1,k}) + u_t$$

وتكون المعلمات المقدرة هي: $\hat{\beta}_1,\dots,\hat{\beta}_k$ و $\hat{\beta}_0^* = \hat{\beta}_0(1-\hat{\rho})$

الخطوة03: اعادة تقدير من جديد لمعامل الارتباط ρ بواسطة البواقي $\hat{\varepsilon}_t^{(1)}$ للنموذج السابق:

$$\hat{\varepsilon}_t^{(1)} = Y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{t1} - \dots - \hat{\beta}_k X_{tk}$$

$$\hat{\rho}_1 = \frac{\sum \hat{\varepsilon}_t^{(1)} \hat{\varepsilon}_{t-1}^{(1)}}{\sum (\hat{\varepsilon}_t^{(1)})^2}$$

الخطوة 04: تقدير النموذج التالي على المتغيرات ذات شبه الفروقات:

$$Y_t - \hat{\rho}_1 Y_{t-1} = \beta_0(1-\hat{\rho}_1) + \beta_1(X_{t1} - \hat{\rho}_1 X_{t-1,1}) + \beta_2(X_{t2} - \hat{\rho}_1 X_{t-1,2}) + \dots + \beta_k(X_{tk} - \hat{\rho}_1 X_{t-1,k}) + u_t$$

نقوم باعادة تقدير معامل الارتباط مرة اخرى ρ ببواقي تقدير $\hat{\varepsilon}_t^{(2)}$ نموذج شبه الفروقات من جديد وهو $\hat{\rho}_2$ ثم

نكرر العملية مرات أخرى إلى غاية سكون مقدرات النموذج وخلوها من المشكلة عادة نكرر العملية ثلاث او اربع مرات[1].

5-3 طريقة **Theil-Nagar** لتقدير ρ

قام الباحثان **Theil** و **Nagar** بطريقة تقدير معامل الارتباطρ من خلال العلاقة التالية :

$$\hat{\rho} = \frac{n^2\left[1-(DW/2)\right] + (k+1)^2}{n^2 - (k+1)^2}$$

حيث k تمثل عدد المتغيرات المستقلة ونستخدم نفس خطوات طريقة المربعات الصغرى في تقدير المعلمات.

1محمد شيخي،طرق الاقتصاد القياسي: محاضرات وتطبيقات، مرجع سابق ، ص 106.

4-5طريقة *Hildreth-Lu*: طريقة المسح و الفحص

الخطوة الأولى :تحديد نوع الارتباط (موجب أو سالب) $(\rho < 0 \quad \cdot \quad \rho > 0)$. بواسطة إحصائية دربن واتسون

الخطوة الثانية :نحدد مجالا للقيم الممكنة لمعامل الارتباط ρ فاذا كان موجبا نختار قيما من المجال[0.1]واذا كان سالبا نختار قيما من المجال :[-1.0]

إذا اعتبرنا أن معامل الارتباط موجب فنختار مثلا القيم : $\rho = \{0.1; 0.2; ...; 0.9; 1\}$

فيتم اختيار درجة سلم 0.1 أو 0.01 ومع كل قيمة يتم تقدير النموذج:

$$Y_t - \hat{\rho}_i Y_{t-1} = \beta_0(1-\hat{\rho}_i) + \beta_1(X_{t1} - \hat{\rho}_i X_{t-1,1}) + \beta_2(X_{t2} - \hat{\rho}_i X_{t-1,2}) + ... + \beta_k(X_{tk} - \hat{\rho}_i X_{t-1,k}) + u_t$$

ويتم اخذ قيمة معامل الارتباطρ الذي يكون فيه مجموع مربعات البواقي الاقل $\sum_t \hat{u}_t^2$.

مثال: من اجل التقدير في ظل وجود مشكلة ارتباط ذاتي للاخطاء من الدرجة الاولى،بالرجوع الى المثال السابق والذي اكتشفنا بدرونا وجود مشكلة ارتباط ذاتي من الدرجة الاولى، نحاول معالجة هذه المشكلة بواسطة مختلف الطرق والمقارنة بينها:

1- باستخدام البرنامج*Eviews* نقوم بتقدير معامل الارتباط ρ والتي قمنا بتقدير قيمته بواسطة القيام بانحدار للبواقي e_t على e_{t-1} ، النتائج لهذا التقدير كمايلي:

Dependent Variable : e Included observations : 19 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.065400	0.643073	0.101700	0.9202
e(– 1)	0.464845	0.241301	1.926413	0.0709

$$\widehat{\rho}_1 = 0,46$$

2- في الخطوة الموالية نقوم بتحويل المتغيرات الاصلية الى متغيرات شبه الفروقات والقيام بالتقدير

حساب شبه الفروقات

$$Y_t^* = Y_t - \hat{\rho} Y_{t-1}$$
$$X_t^* = X_t - \hat{\rho} X_{t-1}$$

المشاهدة الأولى لكل منهما يتم حسابها كما يلي:

$$Y_1^* = Y_1 \sqrt{1 - \hat{\rho}^2}$$
$$X_1^* = X_1 \sqrt{1 - \hat{\rho}^2}$$

نقوم الآن بتقدير النموذج الجديد المحول $Y_t^* = \beta_0^* + \beta_1 X_t^* + u_t$ بطريقة المربعات الصغرى حيث:

$\beta_0^* = \beta_0(1-\hat{\rho})$ و $u_t = \varepsilon_t - \hat{\rho}\varepsilon_{t-1}$ فنتحصل على النتائج التالية:

Dependent Variable : Y*				
Included observations : 19 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	– 135.5132	18.38346	– 7.371473	0.0000
X1*	3.593675	0.583072	6.163342	0.0000
X2*	0.439019	0.071365	6.151765	0.0000
X3*	– 0.514596	0.337097	– 1.526550	0.1477

الثابتة المقدرة تحسب كما يلي:

$$\hat{\beta}_0^* = \hat{\beta}_0(1-\hat{\rho}) \Rightarrow \hat{\beta}_0 = \frac{\hat{\beta}_0^*}{(1-\hat{\rho})} = -135{,}51/(1-0{,}46) = -253{,}22$$

نقوم بتقدير ثاني لمعامل الارتباط ρ بواسطة اختبار دربن واستون *Durbin et Watson* حيث:

$$\widehat{\rho_2} = 1 - \frac{DW}{2} = 1 - \frac{1{,}053}{2} = 0{,}473$$

نقوم بتقدير متغيرات شبه الفروقات من جديد باستعمال القيمة المقدرة الجديدة لمعامل الارتباط $\widehat{\rho_2}$:

Dependent Variable : Y*				
Included observations : 19 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	– 133.4095	18.14245	– 7.353445	0.0000
X1*	3.580221	0.583673	6.133954	0.0000
X2*	0.440490	0.071400	6.169361	0.0000
X3*	– 0.503033	0.336991	– 1.492721	0.1562

نستخرج قيمة المعلمة الثابت:

$$\hat{\beta}_0 = -133{,}40/(1-0{,}47) = -253{,}20$$

<u>نقوم الان باستخدام طريقة التكرارات الخاصة بـ *Cochrane-Orcutt*</u>

نقوم الان بتقدير نموذج الانحدار الذاتي من الدرجة الاولى *AR(1)* :

Dependent Variable : Y				
Included observations : 19 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	– 250.3442	38.62520	– 6.481369	0.0000
X1	3.142385	0.573681	5.477582	0.0001
X2	0.497558	0.069854	7.122783	0.0000
X3	– 0.144028	0.306106	– 0.470517	0.6452
AR(1)	0.811373	0.336991	5.048921	0.0002
Durbin-Watson stat = 2.149				

$$\widehat{\rho_3} = 0,81$$

من مخرجات برنامج تعطي لنا معلمة *AR(1)* قيمة مباشرة ρ وهي :0.81

3- طريقة المسح والفحص Hildreth-Lu

هذه الطريقة اعطت النتائج متطابقة مع طريقة كوكرين اوركت *Cochrane-Orcutt*.

كلا الطريقتين الخاصة بالتقدير المباشر للبواقي اعطت نتائج تقريبا متطابقة التي وضحت ان هناك ارتباط ذاتي للاخطاء.اما طريقتي التكرار Cochrane-Orcutt وHidreth-Lu الخاصة بتقدير قيمة معامل الارتباط فكانت متطابقة الى حد بعيد،

في حالة الاختيار بين الطرق في التقدير فليس هناك اجابة قطعية على افضلية الطرق دون الاخرى ولكن نسبيا يمكن القول ان طريقة التكرار الخاصة بـ Cochrane-Orcutt لها ميزات محددة عن الطرق الاخرى التكراري الأسلوب على أساسا المبنيين الطريقتين هاتين أن إلى الأخير في الإشارة تجدر تعطيان أحسن النتائج بالمقارنة مع الطريقة المباشرة لدربين–واتسون

تمارين مقترحة:

1- بافتراض اننا حصلنا على قيم للمتغير العشوائي *ui* من خلال الجدول التالي:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
u_i	4	5	6	4	3	3	-2	-2	-3	-5	-7	-7	-8	-9	-10

انطلاقا من العلاقة التالية : $u_t = \rho u_{t-1} + v_t$

1-بين انه اذا كان $d = \frac{\sum (u_t - u_{t-1})^2}{\sum u^2}$ و $\ell = \frac{\sum u_t u_{t-1}^2}{\sum u_t^2}$ فإن: $\boxed{d = 2(1 - \hat{\rho})}$

2- استخرج قيمة معامل الانحدار ρ.

3- استخرج قيمة دربن واتسون المحسوبة d^*.

التمرين الثاني:

برهن مايلي:

1 التوقع الرياضي لـ (u_i) : $E(ui)=0$

2- تباين u_i يساوي $Var(ui)= \sigma_u^2 = \frac{\sigma_e^2}{1-\rho^2}$

3- التباين المشترك (التغاير) $Cov(u_t , u_{t-s}) = \rho^s \sigma^2$

التمرين الثالث:

من خلال بيانات $n=25$ مشاهدة لبينات السلسلة زمنية من 1980-1956 وباستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية تم تقدير نموذج للاستهلاك Y_i والدخل المتاح X_i فكان كمايلي:

$$Y_i = 330 + 0.122\, X_i \qquad \mathbf{R^2=0.69}$$

$$s.e \quad (98.4) \quad (0.03)$$

$$t_{0.05,23}=2.069،\sum \boldsymbol{e_t e_{t-1}} = \mathbf{1620}، \sum e_t^2 = 1930$$

المطلوب:

-كون فترة ثقة لكل من $\hat{\alpha}$، $\hat{\beta}$ عند مستوى معنوية $\alpha=0.05\%$

-اختبر وجود الارتباط الذاتي من الدرجة الاولى في هذه الحالة بواسطة دربن h. مع العلم ان $Z_{0.05}=1.645$.

التمرين الرابع

من خلال بيانات $n=25$ مشاهدة لبيانات السلسلة زمنية من 2000-1976 وباستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية تم تقدير نموذج للاستهلاك Ci والدخل المتاح للإنفاق الاستهلاكي Yi فكان كمايلي:

$$C_i=0.568 +0.907\, Y_i \qquad R^2=0.977 \qquad D=1.8 \qquad V(\hat{b})=0.004$$

1- استخدم اختبار دربن h لاختبار وجود ارتباط ذاتي من الدرجة الاولى عند مستوى معنوية (α=5%) $Z_{0.05}=1.64$.

2- بعد تقدير دالة الاستهلاك حيث يكون الاستهلاك الجاري دالة في التخلف الزمني للاستهلاك C_{i-1} في فصل واحد مع الدخل المتاح Y_i حيث تم تقدير النموذج للسلسلة الزمنية ذات بيانات فصلية فكانت كمايلي :

$$C_i=1.747 + 0.988\, Y_i + 0.8974 C_{i-1} \qquad R2=0.99 \qquad D=1.559$$

$$s.e \quad (0.364) \quad (0.0399) \quad (0.04335) \qquad n=117$$

-اختبر وجود الارتباط الذاتي من الدرجة الاولى في هذه الحالة بواسطة دربن h. مع العلم ان $Z_{0.05}=1.645$.

الفصل الرابع :
عدم تجانس تباين الخطأ

لقد سبق وذكرنا، أن تحليل الانحدار يعتمد على فروض خاصة يقوم عليها إدخال المتغير العشوائي في التحليل .

هي ثبات تباين الحد العشوائي*homoscédasticité* او تساوي نحراف المشاهدات عن خط الانحدار:

$$Var(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2$$

وفي حالة اختلال هذا الافتراض وأصبح التباين بينها متغير نكون أمام مشكلة عدم ثبات التباين *L'hétéroscédasticité*

ونظراً لأن الانحدار يقوم أساساً على افتراض ثبات تباين المتغير العشوائي، وعلى افتراض انعدام العلاقة بين القيم المتتالية للمتغير العشوائي أي أن تباين المتغير العشوائي يرجع إلى التباين الثابت للمجتمع الإحصائي مضروباً بالمصفوفة المتطابقة I ولتوضيح ذلك، دعنا في الخطوة الأولى نعرِّف مصفوفة التباين والتغاير المشترك *The Variance-Covariance Matrix – La matrice des variances et covariances*

للمتغير X، فمن المعلوم أن تباين المتغير X هو:

$$Var(X) = E[X - E(X)]^2$$

وإذا كان لدينا الموجه (الشعاع) العشوائي*(Random vector – Vecteur aléatoire)* ويتضمن متغيرين X_1 و X_2 مثلا يكون كمايلي :

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ \\ X_2 \end{bmatrix}$$

فيكون تباين هذا الشعاع هو:

$$Var(X) = E[X - E(X)]^2 = E[X - E(X)][X - E(X)]'$$

أي:

$$Var(X) = E\begin{bmatrix} X_1 - E(X_1) \\ \\ X_2 - E(X_2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 - E(X_1) & & X_2 - E(X_2) \end{bmatrix}$$

ومنه:

$$Var(X)=\begin{bmatrix} E[X_1-E(X_1)]^2 & E[X_1-E(X_1)][X_2-E(X_2)] \\ E[X_1-E(X_1)][X_2-E(X_2)] & E[X_2-E(X_2)]^2 \end{bmatrix}$$

$$Var(X)=\begin{bmatrix} Var(X_1) & Cov(X_1,X_2) \\ Cov(X_1,X_2) & Var(X_2) \end{bmatrix}$$

علماً أن المصفوفة أعلاه تضمنت متغيرين X_1 و X_2 و للتبسيط، ويمكن توسيع المصفوفة أعلاه لتشمل على k من المتغيرات المستقلة .ويمكننا بنفس المنطق تعريف مصفوفة التباين والتغاير للمتغير العشوائي U فإذا فرضنا للتبسيط أنه لدينا ثلاثة مشاهدات، فباستطاعتنا حينئذٍ وضع المتغير العشوائي في صيغة موجه عشوائي كالآتي:

$$U=\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}$$

فيكون تباين شعاع المتغير العشوائي:

$$Var(U)=E(UU')$$

$$Var(U)=E\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \end{bmatrix}$$

$$Var(U)=\begin{bmatrix} Var(U_1) & Cov(U_1,U_2) & Cov(U_1,U_3) \\ Cov(U_1,U_2) & Var(U_2) & Cov(U_2,U_3) \\ Cov(U_1,U_3) & Cov(U_2,U_3) & Var(U_3) \end{bmatrix}$$

وحيث ان التحليل يقوم اساسا على ثبات تباين المتغير العشوائي مع افتراض انعدام العلاقة بين القيم المتتالية للمتغير العشوائي: $Var(U_1)=Var(U_2)=Var(U_3)=\sigma^2$:

$$Cov(U_iU_j)=0$$

فتصبح المصفوفة السابقة كمايلي:

$$Var(U)=\begin{bmatrix}\sigma^2 & 0 & 0\\ 0 & \sigma^2 & 0\\ 0 & 0 & \sigma^2\end{bmatrix} = \sigma^2\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \sigma^2 I$$

أي أن تباين المتغير العشوائي يساوي إلى حاصل ضرب تباين الثابت للمتغير التابع المجتمع الإحصائي بالمصفوفة المتطابقة.

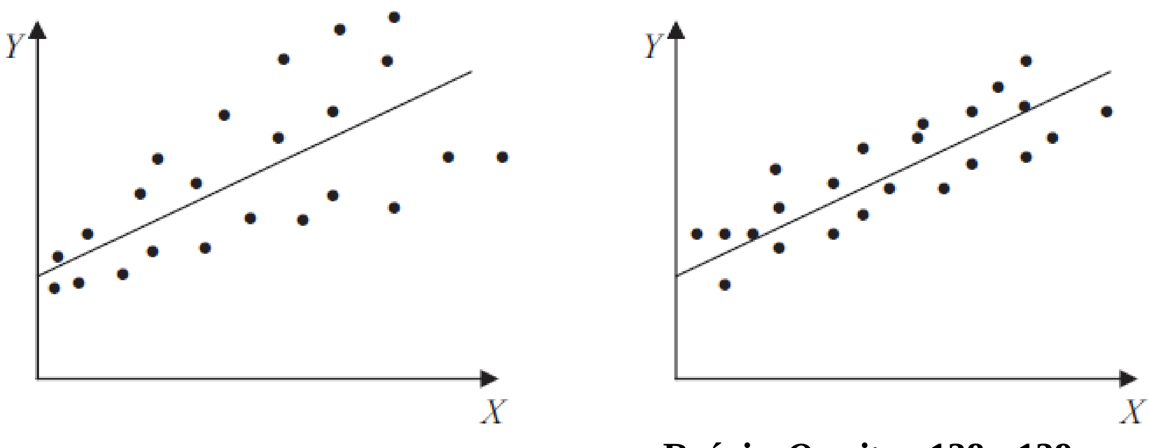
ان ذلك الفرض لا يتم في حالة وجود مشكلة عذم ثبات تباين الخطاءمن بين الفرضيات التي تم وضعها بالنسبة للنموذج القياسي الاقتصادي سواء البسيط أو العام، فرضية ثبات التباين من مشاهدة إلى أخرى.غير أن هذه الفرضية قد لا تتحقق في الواقع خاصة لدذاا يتعلق الأمر بالبيانات المقطعية فإن مصفوفة التباين–التباين المشترك للأخطاء تعرف كما يلي:

$$\Omega_{\varepsilon}=E(\varepsilon\varepsilon')=\begin{pmatrix}\sigma^2_{\varepsilon,1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \sigma^2_{\varepsilon,2} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \sigma^2_{\varepsilon,n}\end{pmatrix}\neq\sigma^2_{\varepsilon}I_n$$

من الملاحظ أن تباينات الأخطاء ليست ثابتة على القطر الأول وبالتالي تباين الأخطاء مرتبط بقيم المتغير المستقل وفي هذه الحالة يأخذ شكل الانتشار إحدى الحالتين[1]:

الشكل رقم (08):ثبات وعدمثبات تباين الخطأ في نموذج الانحدار البسيط

ثبات تباين الخطأ في نموذج الانحدار البسيط **عدم ثبات تباين الخطأ في نموذج الانحدار البسيط**



المصدر: **Rrégis, *Op.cit.*pp138-: 139**

1عطية عبد القادر، نفس المرجع، ص 435.

الشكل رقم 07 يبين ثبات التباين الخطأ،وان العلاقة بين المتغير التفسيري والتابع ثابتة، اما الشكل الثاني رقم فيبين عدم ثبات هذا التباين حيث كل ما زادت قيم n كلما زاد حجم التباين[1].

يوضح الشكل السابق العلاقة المتوقعة بين المتغيرين التابع YوالمستقلX حيث ان في هذه الحالة أن تباين حد الخطأ لا يعتمد على قيم المتغير المستقلX وهو على عكس الشكل في اليسار الذي يبين حالة عدم ثبات التباين لحد الخطأ $E(\varepsilon_i^2) \neq \sigma^2, \forall i$ حيث في هذه الحلة نميز زيادة في عدم ثبات التباين لحد الخطأ مع كل زيادة في المتغير المستقل وكما تمت الاشارة فين هذه المشكلة تكون اكثر بروزا في البيانات المقطع العرضي*Cross-section date* اكثر من بينانت السلسة الزمنية *Cross-series date* حيث أن الأولى عبارة عن بيانات يتم تجميعها عن متغير ما في لحظة زمنية معينة(مثال :بيانات الاستثمار عند مستويات مختلفة لمجموعة من المؤسسات لسنة *2005* ، امابيانات السلسلة الزمنية فيتم تجميعها عن متغير ما عبر فترة زمنية معينة

1- اثار مشكلة عدم تجانس تباين الخطأ

.وهناك ويترتب على مشكلة عدم ثبات التباين عددا من الآثار تتمثل في:

1- تبقى المعالم المقدرة باستخدام المربعات الصغرى *OLS* متصفة بعدم التحيز والاتساق، ولكنها تفقد ميزة الكفاءة.

2- التباينات والتباينات المشتركة للمعلمات المقدرة تصبح متحيزة وغير متسقة، ولذا فإن اختبارات الفرضيات لا تصبح دقيقة أو ملائمة.

3- بالرغم من أن التنبؤات القائمة على أساس المعالم المقدرة باستخدام المربعات الصغرى العادية*OLS* تظل غير متحيزة، إلا أنها تفقد صفة الكفاءة، وهو ما يعني أنها تكون أقل مصداقية من التنبؤات الأخرى.

4-في حالة عدم تجانس تباين الأخطاء، مقدر *BLUE* بطريقة المربعات الصغرى المعممة يكتب مايلي:

$$\hat{\beta} = (X'\Omega_\varepsilon^{-1}X)^{-1}(X'\Omega_\varepsilon^{-1}Y)$$
$$\Omega_{\hat{\beta}} = (X'\Omega_\varepsilon^{-1}X)^{-1}$$

عكس تصحيح النموذج من مشكلة الارتباط الذاتي، لا توجد منهجية موحدة للتصحيح من عدم ثبات تباين الأخطاء، فالطرق مختلفة مرتبطة بسبب وجود هذا المشكل[2].

1خليدة دلهوم، اساليب التنبؤ بالمبيعات –دراسة حالة-، مرجع سابق ، ص 61.
2 محمد شيخي ، مرجع سابق ص 113.

2- اسباب عدم ثبات تباين حد الخطأ

من اسباب عدم ثبات تباين حد الخطأ نجد:

- كما ذكرنا سابقا، فعندما تكون المشاهدات ممثلة لمجموع متوسطات مجموعة من العينات المختلفة كأخذ متوسط لمشاهدات شهرية واستخدامها كمشاهدات فصلية .

- حالة اخرى وتكون نتيجة تكرار نفس القيمة لمتغير مستقل لمجموعة من القيم المختلفة لمتغير مستقل على سبيل المثال عندما التجميع في فئات (الرواتب والموظفين ...)[1]؛

عدة أسباب لعدم تجانس تباين حد الخطأ منها تحسن أساليب تجميع البيانات ، وهذا يقلل من الأخطاء المرتكبة في القياس، ومن ثم سوف يقل تباين حد الخطأ، وذلك لان جمع البينات الدقيقة والواقعية تقلل من الاخطاء فمثلا الاخطاء التي تقع في الملفات داخل المؤسسات الحكومية التي تستخدم الحاسب اللي لتحليل البيانات تكون اقل منها مقارنة بمثيلاتها من المؤسسات التي لا تستخدم الحاسب الآلي[2].

3- اختبارات الكشف عن مشكلة عدم ثبات تباين حد الخطأ

للكشف عن مشكلة عدم ثبات تباين حد الخطأ هناك عدة اختبارات نذكر من بينها:

3-1اختبار بارك *Park*

اذا كان لدينا النموذج التالي: $Y_{1i} = a + bX_{1i} + \varepsilon_{1i}$ يتم استخدام اختبار***Park*** للكشف عن مشكلة عدم تجانس تباين حد الخطأ بواسطة الخطوات التالية :

- نقوم بتقدير النموذج بطريقة المربعات المصغرى العادية *OLS* فنتحصل على نموذج المقدر التالي: $\hat{Y}_{1i} = \hat{a} + \hat{b}X_{1i}$ وبهذا يتم الحصول على البواقي من التقدير السابق حيث: $e_i = Y_i - \hat{Y}_i$.

- استخدم طريقة المربعات الصغرى للقيام بانحدار لـ $Ln\ e^2_i$ على $Ln\ X_i$ فينتج لنا :

$$Ln\ \hat{e}_i^2 = \hat{a} + \hat{b}LnX_i$$

- حساب قيمة سودنت المحسوبة Tc للمعلمة $\hat{b}$ كمايلي:

$$T(\hat{b}) = \frac{\hat{b}}{SE(\hat{b})} \qquad ,SE(\hat{b}) = \sqrt{Var(\hat{b})} \qquad ,Var(\hat{b}) = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum x_i^2}$$

- استخراج القيمة الجدولية لاختبار ستدونت T_t بدرجة حرية *n-2* وبمستوى ومعنوية معين α.

1 Rrégis, *Op.cit.*pp144.

2مجيد علي حسين، عفاف عبد الجبار سعيد، مرجع سابق، ص 516.

- مقارنة بين سودنت المحسوبة والجدولية فان كانت المحسوبة اكبر من الجدولية يتم قبول الفرضية البديلة والتي تنص على: $\hat{b} \neq 0$ ويدل على وجود مشكلة عدم ثبات تباين الخطأ.

3-3اختبار Goldfeld-Quandt

يقوم هذا الاختبار هو الاخر على عدة خطوات انطلاقا من النموذج التالي [1]:

$$\left(y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \quad ,=1.........n\right)$$

– ثم نقوم بترتيب المشاهدات الخاصة بالمتغير المستقل X ترتيبا تصاعديا.

– استبعاد المشاهدات الوسطى لكل منX وY ثم تكوين لكل منهما بحيث يكون لكل مجموعة على حدا معادلة خاصة بها كما يلي:

– المجموعة الأولى :وتتمثل في المشاهدات الخاصة بكل منX وY الواردة قبل المشاهدات التي تم استبعادها، والمعادلة الخاصة بهذه المجموعة هي: $Y_{1i} = a + bX_{1i} + \varepsilon_{1i}$

–المجموعة الثانية :وتتمثل في المشاهدات الخاصة بكل منX وY الواردة بعد المشاهدات التي تم استبعادها، والمعادلة الخاصةبهذه المجموعة هي : $Y_{2i} = c + dX_{2i} + \varepsilon_{2i}$.

– تقدير معاملات المعادلتين السابقتين باستعمال المربعات الصغرى:

$$\hat{Y}_{1i} = \hat{a} + \hat{b}X_{1i}$$

$$Y_{2i} = \hat{c} + \hat{d}X_{2i}$$

– الحصول على بواقي التقدير من المعادلتين السابقتين

$$\hat{\varepsilon}_{1i} = Y_{1i} - \hat{Y}_{1i}$$

$$\hat{\varepsilon}_{2i} = Y_{2i} - \hat{Y}_{2i}$$

– حساب قيمة فيشر المحسوبة F بالطريقة التالية :

$$F = \frac{\sum \hat{\varepsilon}_{2i}^2}{\sum \hat{\varepsilon}_{1i}^2}$$

بدرجة حرية DF : $DF = \dfrac{n - m - 2(k+1)}{2}$

في هذا الاختبار يتم استبعاد حوالي *20%* من المشاهدات في المنتصف، وفي هذه الحالة سيكون لدينا سلسلتين، وانطلاقا من الفرضيات التالية:

1 محمد شيخي مصدر سابق، ص 113.

الفرضية العدم $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$ هناك تجانس(ثبات) تباين الخطأ

الفرضية البديلة: $H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$ لا يوجد تجانس (ثبات) تجانس تباين الخطأ

ويتم مقارنة F_C مع القيمة المجدولة عند درجتي حرية: $n_{1\text{-}k}$، $n_{2\text{-}k}$ ومستوى معنوية 5%

– فإذا كانت القيمة المحتسبة اكبر من القيمة المجدولة ($F_C>F_t$) فاننا نرفض H_0 معناه ان لايوجد ثبات في تباين الخطأ

– اما إذا كانت القيمة المحتسبة اقل من القيمة المجدولة ($F_C<F_t$) فاننا نقبل H_0 اي: هناك تجانس(ثبات) تباين الخطأ

يجدر بنا القول ان اختبار ***Goldfeld-Quandt*** لا يمكن تطبيقه الا اذا كانت احدى المتغيرات المستقلة Xi هي المسببة في مشكلة عدم ثبات تباين الخطأ.

مثال: اجريت تجربة على 30مركبة تضم (06) سيارات ضمن خمس (05) ورشات والمطلوب من كل صاحب ورشة حساب الوقت الممضى في التحقيق من سلامة المركبات واكتشاف العيوب الموجودة ، الجدول التالي يوضح العيوب والوقت المستغرق لاكتشافها[1]:

الجدول رقم 09

الوقت المستغرق X	عدد العيوب Y				
	الورشات				
4	8	8	6	5	4
3.5	17	15	13	11	6
2	21	15	14	13	9
1.5	26	23	16	13	6
1	34	22	17	15	11
0.5	38	28	23	21	7

نقوم باستعمال اختبار ***Goldfeld-Quandt*** ونقوم بالتقدير بواسطة المربعات الصغرى

الخطوة الأولى :يتم ترتيب المشاهدات ترتيبا تصاعديا حسب قيم المتغير المسبب لمشكلة عدم ثبات تباين الخطأ سوا كان المتغير التابعY او المستقلX ونختار المتغير التابعY لترتيب المشاهدات كونه يتضمن اعدادا غير مكررة على خلاف المتغير المستقل، وفي الجدول التالي المشاهدات مرتبة ترتيبا تصاعديا:

[1] 1 Rrégis, *Op.cit.*pp150.

الجدول رقم 10

j	Y_j	X_j
1	4	4
2	5	4
...	...	...
29	28	0,5
30	38	0,5

الخطوة الثانية : :بما أن عدد المشاهدات هو 30 ، فإنه يتم اختيار عدد المشاهدات المستبعدة C والتي تتوسط المشاهدات الكلية ، عد المشهدات التي يتم اقصاؤها يكون بالتقريب $n/4$ من مجمل المشاهدات:

$$C=(30/4)=8$$

الخطوة الثالثة: :نقوم بتقدير النموذج على الجزء ين الاول والثاني من المشاهدات بعد اسبعاد المشاهدات C فنتحصل على النموذجين التاليين:

نموذج العينة الاولى: $j = 1,11$

$$Y_j = 16{,}93 - 2{,}13\ X_j + e_j$$
$$(2{,}31)$$
$$n = 11$$
$$R^2 = 0{,}08$$
$$SCR_1 = \sum_j e_j^2 = 164{,}66$$
$$(.) = t \text{ de Student}$$
$$ddl_1 = n - 2 = 9$$

نموذج العينة الثانية: $j = 20,30$

$$Y_j = 9{,}84 - 1{,}32\ X_j + e_j$$
$$(9{,}23)$$
$$n = 11$$
$$R^2 = 0{,}002$$
$$SCR_2 = \sum_j e_j^2 = 872{,}02$$
$$(.) = t \text{ de Student}$$
$$ddl_2 = n - 2 = 9$$

الخطوة الخامسة :لاتخاذ القرار، يكفي حساب إحصائية فيشر، حيث:

$$F^* = \frac{SCR_2/ddl_2}{SCR_1/ddl_1} = \frac{872{,}02/9}{164{,}66/9} = 5{,}29$$

$F^* = 5{,}29 > F_{9,9}^{0,05} = 3{,}18,$ نلاحظ أن القيمة المحسوبة أكبر تماما من القيمة المجدولة لتوزيع فيشر بنسبة معنوية $\alpha=5\%$ ودرجتي حرية $ddl_1=ddl_2=9$ ، ومنه نرفض الفرضية ونقول أن تباين الأخطاء غير متجانس.

3-3اختبار وايت white[1]

هذا الاختبار يعتبر الاقرب في فعاليته الى اختبار *Goldfeld-Quandt* والاختبارات الاخرى حيث يعتمد على العلاقة المعنوية بين مربعات البواقي و جميع المتغيرات المستقلة و كذا مربعاتها حيث يمكن إبراز خطوات

1 White, 1980.

هدا الاختبار كما يلي:

1- تقوم اول خطوة على تقدير النموذج العام بطريقة المربعات الصغرى OLS

$\left(y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \quad ,=1.........n\right)$ ثم حساب مربعات البواقي لهذا النموذج $\hat{\varepsilon}_t^2$

2- تقدير المعادلة الوسيطية التالية :

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + \alpha_1 X_{t1}^2 + \ldots + \beta_k X_{tk} + \alpha_k X_{tk}^2 + u_t$$

3-ثم حساب معامل التحديد الخاص بهذه المعادلة R^2 ثم اختبار الفرضية الصفرية التي تنص على وجود او عدم وجود ثبات تباين الخطأ: (تساوي معاملات المعادلة الوسيطية للقيمة صفر)

$$H_0 : \beta_0 = \alpha_1 = \beta_1 = \ldots = \alpha_k = \beta_k = 0$$

حساب احصائية معامل لاغرانج التي تعتمد على معامل التحديد وحجم العينة حيث: $LM = n \times R^2$

والذي يتبع توزيع χ^2بدرجة حرية $2k$، فاذا كان $n \times R^2 > \chi^2(2k)$ عند مستوى معنوية α، فاننا نرفض الفرضية الصفرية H_0 ومعناه هناك على الأقل معامل واحد من معاملات المعادلة الوسيطية يختلف معنويا عن الصفر فإن تباين الأخطاء غير متجانس.

مثال

بالعودة الى المثال السابق قمنا بتقدير المعادلة الوسيطية التالية :

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + \alpha_1 X_{t1}^2 + \ldots + \beta_k X_{tk} + \alpha_k X_{tk}^2 + u_t$$

كانت نتائج التقدير كمايلي : $e_i^2 = -78{,}58\, x_i + 11{,}98\, x_i^2 + 136{,}02 + \widehat{v}_i$

وبتقدير معامل التحديد واحصائية فيشر المحسوبة وجدنا: $n = 30;\ \ R^2 = 0{,}226;\ \ F^* = 3{,}956$

نقوم بحساب معامل لاغرانج: $LM\ n\ R^2 = 30 \times 0{,}22 = 6{,}78 > \chi^2_{0{,}05}(2) = 5{,}99\,.$

من خلال النتائج الخاصة بقيمة معامل لاغرانج LM ومقارنتها بمستوى معنوية α=5%،نجد اننا نرفض الفرضية الصفرية اي ان تباين الأخطاء غير متجانس.

3-4اختبار معامل الارتباط لـ Spearman

يقيس معامل الرتب لسبيرمان درجة الارتباط بين مجموعتين من الرتب، حيث يبين نوع وقوة العلاقة بين متغيرين X وY، رغم اختلاف نوع البيانات كمية غير مبوبة او وصفية[1]:

انطلاقا من النموذج: $\left(y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \quad ,=1.........n\right)$

نقوم باستخدام هذا المعامل في اكتشاف مشكلة عدم ثبات تجانس الخطأ بالخطوات التالية:

1مصطفى الخواجة، مقدمة في الاحصاء، الاسكندرية ، الدار الجامعية ،مصر 2002، ص222 .

1- تقدير النموذج باستعمال طريقة المربعات الصغرى OLS $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$ والحصول على البواقي او القيم المقدرة لحد الخطأ من العلاقة : $e_i = Y_i - \hat{Y}_i$.

2- اخذ البواقي بالقيم المطلقة واهمال اشاراتها أي $(|e_i|)$ واخذ القيم : $(|e_i|)$ وX حسب ترتيب تزايد او تناقص رتبها.

3- تقدير معامل الرتب لسبيرمان $Spearman$ (r_S)حسب العلاقة التالية: $r_s = 1 - \left[\frac{6\sum d_i^2}{N(N^2-1)} \right]$

4-حيث تمثل d_i الفرق بين كل رتبتين متناظرتين $(X_i - |e_i|)$ وN تمثل عدد المشاهدات.

5-حساب قيمة ستودنت المحسوبة T_C كمايلي : $T_c = \frac{r_s\sqrt{N-2}}{\sqrt{1-r_s^2}}$.

6- استخراج القيمة الجدولية لاختبار ستدونت T_t بدرجة حرية n-2 وبمستوى ومعنوية معين α.

7-تتم مقارنة T_C مع T_t:

فإذا كانت القيمة المحتسبة اكبر من القيمة المجدولة $(T_C > T_t)$ فاننا نرفض H_0 معناه ان لايوجد ثبات في تباين الخطأ

- اما إذا كانت القيمة المحتسبة اقل من القيمة المجدولة $(T_C < T_t)$ فاننا نقبل H_0 اي: هناك تجانس(ثبات) تباين الخطأ .

اذا كان النموذج يتضمن اكثر من متغير مستقل، فانه يتم تقدير معامل الرتب r_S بين e_i وكل متغير مستقل على حدى . ثم القيام باختبار المعنوية بواسطة اختبار ستودنتT كما تم توضيحة من قبل.

3-5اختبار ثبات التباين الشرطي للأخطاء ARCH-LM

تسمح نماذج $ARCH$ بنمذجة المتغيرات المالية التي تحتوي على تباين شرطي غير ثابت للأخطاء العشوائية حيث أن التطاير الشرطي الذي يعبر في الغالب عن المخاطرة غير ثابت .يعتمد إذن هدا الاختبار على مضاعف لاغرانج LM تتم خطوات الاختبار كمايلي:

- تقدير النموذج باستعمال طريقة المربعات الصغرى $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$ والحصول على مربعات البواقي $\hat{\varepsilon}_t^2$
- تقدير النموذج التالي: $\hat{\varepsilon}_t^2 = \theta_0 + \theta_1 \hat{\varepsilon}_{t-1}^2 + \ldots + \theta_q \hat{\varepsilon}_{t-q}^2 + u_t$.
- مع حساب معامل التحديد الخاص بهذه المعادلة R^2 ، نفقد في هذه الحالة q مشاهدة.

– اختبار فرضية ثبات التباين الشرطي للأخطاء وهي كمايلي: $H_0:\theta_0=\theta_1=...=\theta_q=0$

حساب احصائية معامل لاغرانج التي تعتمد على معامل التحديد وحجم العينة حيث: $LM=(n-q)\times R^2$ والذي يتبع توزيع χ^2 بدرجة حرية q، فاذا كان $(n-q)\times R^2>\chi^2(q)$ عند مستوى معنوية α، فاننا نرفض الفرضية الصفرية H_0 ومعناه هناك على الأقل معامل واحد من معادلة $ARCH$ يختلف معنويا عن الصفر ومنه فإن التباين الشرطي للأخطاء غير متجانس[1].

مثال :

باستعمال اختبار $ARCH\text{-}LM$ الذي يهدف إلى معرفة مدى تجانس التباين الشرطي للأخطاء، قمنا بتقدير المعادلة الوسيطية وتحصلنا على مايلي :

$$\hat{\varepsilon}_t^2=43402.09+0.27\hat{\varepsilon}_{t-1}^2$$
$$R^2=0.07711$$

حيث $\hat{\varepsilon}_t^2$ مربعات بواقي تقدير نموذج الادخار الكلي.

نقوم بحساب معامل لاغرانج وهذا مع العلم ان عدد المشاهدات كان 30 مشاهدة:

$$LM=(n-q)\times R^2=(30-1)\times 0.077=2.23$$

نجد أن إحصائية مضاعف لاغرانج أصغر تماما من القيمة المجدولة لتوزيع $\chi^2(1)$ عند مستوى معنوية $\alpha=5\%$ ومنه نقبل الفرضية H_0 ونقولهذا يعني أن التباين الشرطي للأخطاء متجانس نستنتج $LM<\chi^2_{0.05}(1)=3.84$

أن التباين الهامشي للأخطاء غير متجانس أما التباين الشرطي فيعتبر ثابت.

4–تصحيح عدم تجانس تباين ثبات الخطأ

من أبرز الطرق المستخدمة لتصحيح المشكلة هي طريقة المربعات الصغرى المرجحة، وتقوم هذه الفكرة على إعطاء القيم ذات الانحراف الأقل وزنا أكبر على خط الانحدار من القيم ذات الانحراف الأكبر في تقدير العلاقة محل الاعتبار[2]، حيث يتم استخدام هذه الاوزان في تحويل النموذج الى ضيغة اخرى ينتج عنها قيم متساوى في قطر المصفوفة $\sigma_\varepsilon^2 I$ ويتوقف شكل النموذج الأصلي المُحوَّل على نمط عدم ثبات التباين المكتشف في

النموذج الأصلي المقدر ولتحقيق هذا الغرض هناك هناك عدة افتراضات لعدم ثبات تباين الأخطاء، ويختلف النموذج أو المعادلة المحولة من افتراض الى اخر[3]:

الحالة الاولى: عندما يزداد تباين المتغير التابع Y بشكل تناسبي مع متوسط المتغير المستقل $\bar{X}$ وكان:

$$E(\varepsilon_i^2)=\sigma^2X_i^2$$

1شيخي محمد، مرجع سابق، ص 116.

2 عبد القادر محمد عبد القادر عطية،مرجع سابق، ص 452.

3 حسين علي بخيت وسحر عبد الله،الاقتصاد القياسي،دار اليازوري، عمان ، الاردن، ص 282.

وطبقا لهذا الافتراض يتم تحويل النموذج $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i, i = 1, ..., n$ بواسطة قسمة طرفي المعادلة على المتغير المستقل X فنجد: $\frac{Y_i}{X_i} = \frac{\beta_0}{X_i} + \beta_1 + \frac{\varepsilon_i}{X_i} = \beta_0 \frac{1}{X_i} + \beta_1 + \theta_i$

حيث: θ تمثل حد الخطأ المحول : $\frac{\varepsilon_i}{X_i}$

وبإجراء انحدار $\frac{Y_i}{X_i}$ على $\frac{1}{X_i}$ مستخدما طريقة المربعات الصغرى العادية نحصل على:

$$\left(\frac{\hat{Y}_i}{X_i}\right) = \hat{\beta}_0 \frac{1}{X_i} + \hat{\beta}_1$$

ثم نقوم بضرب المعادلة المحولة المقدرة السابقة في X_i يتم الحصول على النموذج الأصلي: $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$ بعد معالجة عدم ثبات التباين σ_ε^2 ويتضح مما سبق أن الحد الثابت في النموذج المحول β_1 هو عبارة عن ميل معامل الانحدار للنموذج الأصلي، وميل معامل الانحدار للنموذج المحول هو عبارة عن الحد الثابت في النموذج الأصلي.مما يؤدي الى اختلاف في معامل التحديد R^2 في النموذجين لان قيم المتغير التابع تختلف في الاول Y_i و $\frac{Y_i}{X_i}$ في الثاني .

<u>الحالة الثانية:</u> عندما يزداد تباين المتغير التابع Y بشكل تناسبي مع المتغير المستقل X_i اي: $E(\varepsilon_i^2) = \sigma^2 X_i$ وطبقا لهذا الافتراض يتم تحويل النموذج عن طريق قسمة طرفي المعادلة الاصلية على $\sqrt{X_i}$ فيصبح النموذج الجديد:

$$\boxed{\frac{Y_i}{\sqrt{X_i}} = \frac{\beta_0}{\sqrt{X_i}} + \beta_1\sqrt{X_i} + \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{X_i}} = \beta_0 \frac{1}{\sqrt{X_i}} + \beta_1\sqrt{X_i} + \omega_i}$$

حيث ω_i عبارة عن حد الخطأ المحول $\frac{\varepsilon_i}{\sqrt{X_i}}$، $X_i > 0$

ثم نقوم باجراء انحدار باستعمال طريقة المربعات الصغرىمتمضن ثلاث متغيرات هي: $\frac{1}{\sqrt{X_i}}$، $\sqrt{X_i}$، $\frac{Y_i}{\sqrt{X_i}}$

حيث تكون قيمة الثابت معدومة، كما ان قيمة تصبر اكبر R^2 مما يجعل قيمة التوقع للمتغير التابعY اقل

دقة[1].

الحالة الثالثة : $E\left(\varepsilon_i^2\right)=\sigma^2\ Y_i^2$

ومع هذه الحالة تكون المعادلة المحولة من الشكل:

$$\frac{Y_i}{Y_i}=\frac{\beta_0}{Y_i}+\beta_1\frac{X_i}{Y_i}+\frac{\varepsilon_i}{Y_i}=\beta_0\frac{1}{Y_i}+\beta_1\frac{X_i}{Y_i}+\varphi$$

الحالة الرابعة: $E\left(\varepsilon_i^2\right)=\sigma^2\left|\hat{\varepsilon}_i\right|$

ويتضمن هذا الافتراض أن تباين حد الخطأ دالة خطية لبواقي طريقة المربعات الصغرى العادية،فنقوم بقسمة المعادلة الاصلية على $\sqrt{\left|\hat{\varepsilon}_i\right|}$ وطبقا لهذا تكون المعادلة:

$$\frac{Y_i}{\sqrt{\left|\hat{\varepsilon}_i\right|}}=\beta_0\frac{1}{\sqrt{\left|\hat{\varepsilon}_i\right|}}+\beta_1\frac{X_i}{\sqrt{\left|\hat{\varepsilon}_i\right|}}+\frac{\varepsilon_i}{\sqrt{\left|\hat{\varepsilon}_i\right|}}$$

الحالة الخامسة :التحويلات اللوغاريتمية، إن تحويل النموذج الأصلي إلى الصيغة اللوغاريتمية المزدوجة سوف يؤدي غالبا إلى تقليل درجة عدم ثبات تباين حد الخطأ، ومن ثم طبقا لهذا الافتراض تكون المعادلة المحولة المناسبة للنموذج الاصلي[2]: $LnY_i=\beta_0+\beta_1 LnX_i+\varepsilon_i$.

تمارين مقترحة

I اجب بصحيح او خطأ

أ- في وجود اختلاف التباين تكون مقدرات م ص ع متحيزه وأ قل كفاءه.

ب–عند وجود اختاف التباين فان، اختبارات tوF غير صحيحه.

ج–في وجود اختلاف التباين فان طريقة م ص ع دائما يكون الخطأ المعياري للمقدرات متحيز.

د–اذا كان هناك اختلاف تباين فانه يكون هناك ارتباط بين التغيرات في المتغير العشوائي.

هـ–لايوجد اختبار لاختلاف التباين لايقوم بافتراضات عن علاقة التباين مع احد المتغيرات

II– تبين العلاقة التالية التي تربط بين كل من مستوى الاجورY وعدد العاملين X، في 30 شركة في احدى الصناعات، وباجراء انحدار للعينة كلها لـ Y على X وجدنا :

$$\hat{Y}_i=0.009X_i+7.5$$
$$t......(16.10)...(40.27)$$
$$R^2=0.90$$

[1]حسين علي بخيت وسحر عبد الله،مرجع سابق، ص 283.

2شيخي محمد، مرجع سابق، ص 118.

وباجراء انحدار ثاني ل 12 مشاهدة الاولى و12 الاخيرة ، حصلنا على نتائج التقدير التالية:

تقدير المشاهدات الاولى	تقدير المشاهدات الثانية
y_t 8,1 + 0,006 x_t + e_t (39.4) (4,36) t $R^2 = 0.66$ n_1=12 ESS_1= 0.507	y_t =6.1 + 0.013 x_t + e_t t (4.16) (3.89) $R^2 = 0.60$ n_2=12 ESS_2=3.095

المطلوب:

1- ماهي المشكلة التي نحاول معالجتها؟

2- باستخدام اختبار *Goldfeld-Quandt* اختبر وجود هذه المشكلة من عدمها عند مستوى 5% ،حيث $F_{10.10}= 2.97$

III-لتكن لدينا النماذج التالية الخاصة بالإنفاق الاستهلاكي C والدخل المتاح Y_d لعينة تشمل 30 مشاهدة :

حجم العينة	مجموع مربعات الاخطاء SCR	R^2	النموذج
$n=30$	SCR = 1.069	R^2=0.97	$\hat{C}=1.48 + 0.788\, Y_d$
$n_1=12$	SCR_1 =1.069	R^2=0.91	$\widehat{C_1}=7.846 + 0.837\, Y_{d1}$
$n_2=12$	SCR_2 =3.344	R^2=0.71	$\widehat{C_2}=2.306 + 0.747\, Y_{d2}$

1- باتباع خطوات احد الاختبارات للكشف عن مشكلة عدم ثبات التباين :

أ- حدد هذا الاختبار واستخرج عدد المشاهدات المستبعدة من العينة الكلية m.

ب -احسب قيمة فيشر المحسوبة F_c.

جـ - اختبر وجود مشكلة عدم ثبات التباين من عدمها اذا كانت قيمة فيشر المجدولة F_t=2.97

الفصل السادس:
التعدد (الازدواج) الخطي

1– مشكلة التعدد الخطي Multicollinearity:

يشير التعدد الخطي الى وجود علاقة خطية بين المتغيرات التفسرية في النموذج الانحداري[1]،ومن تم فإن هذا المشكل لا يوجد في حالة الانحدار البسيط، فاذا كان لدينا : $X = \left[X_1, X_2, ...X_j .....X_k\right]$

حيث يسمى X_j العمود رقم j لـ X.

فنقول ان رتبة X هي اقل k من معناه يوجد شعاع C حيث: $C' = \left[C_1, C_2, ...C_j .....C_k\right] \neq 0$

حيت يصبح لدينا العلاقة التالية $C_1X_1 + C_2X_2 + ...+ C_kX_k = 0$

التي توضح وجود علاقة خطية بين المتغيرات المستقلة X_i .حيث تكون هذه المشكلة في اوجها اذا كان الارتباط بين هذه المتغيرات تاما .

2–مسببات واثار مشكلة التعدد الخطي

ينشأ التعدد الخطي من عدة أسباب منها ما يلي:

– اتجاه المتغيرات الاقتصادية معا للتغير مع مرور الزمن :فبمرور الزمن سوف تتزايد المتغيرات الاقتصادية التالية معا :الدخل، الاستهلاك، الادخار، الاستثمار، المستوى العام للأسعار والعمالة، وحيث أن هناك ارتباط بين هذه المتغيرات فإن التعدد الخطي سوف يتحقق.

نفترض على سبيل المثال ننا نحاول ان نقدر دالة الطلب كمايلي $Q_i=\beta_0+ \beta_1P_i+ \beta_2Y_i+u_i$

وهي لمجموعة من السلع ولتكن الواردات حيث نفترض ان الكمية المطلوبة Q تعتمد على مستوى اسعار السلع المنتجة محليا P وعلى مستوى الدخل للمستهلكينY ،ومن المعروف اقتصاديا انه اذا كانت اسعار السلع المنتجة محليا مرتفعة فان المستهلكين يتجهون نحو المستوردة والتي تكون ارخص نسبيا، ولذلك نتوقع ان تكون β_1 موجبة،وبالمثل قانه ادا كانت الدخول للمتسهلكين اكبر كان الطلب اكبر على السلع (بما فيها المستوردة) ولذلك نتوقع ان تكون موجبة β_2 ايضا، ونلاحظ من خلال فحص البينات المتاحة انه على مدى زيادة الفترات الزمنية يزداد فيها معدل التضخم المحلي تزداد الواردات وتنمو ايضا بسبب زيادة الدخل والصعوبة هنا هي ان الفترات التي يتزايد فيها الدخل تكون متزامنة مع زيادة التضخم بمعنى اخر يوجب ارتباط قوي موجب (وان لم يكون تاما) بين وهذا الارتباط يجعل من الصعوبة عزل أثر فعندما يكون هناك تزايد سريع في الواردات مصاحبا لزيادة في الدخل والاسعار المحلية فانه من اصعب تحديد الاثار النسبية لكل من التضخم والدخول في تحفيز زيادة الواردات[2] .

---

[1]عبد القادر محمد عبد القادر عطية،مرجع سابق، ص 468.

2 هاري كلجيان، والاس اوتس، ترجمة: المرسي السيد حجازي، محمد عبد القادر عطية ،مقدمة في الاقتصاد القياسي: المبادئ والتطبيقات،النشر العلمي والمطابع، المملكة العربية السعودية،2001 ص 304.

– استخدام متغيرات مستقلة ذات فترة إبطاء في المعادلة المراد تقديرها :فالدخل في الفترة الزمنية الحالية يتحدد جزئيا بواسطة قيمته في الفترة الزمنية السابقة، وحيث أن هناك ارتباط بين القيم المتتالية لمتغير ما فإن التعدد الخطي سوف يتحقق.

وفي وجود التعدد الخطي فإنه سوف يترتب عنه:

– **زيادة التباين والتباين المشترك للمقدرات بدرجة كبيرة** دون التأثير على التنبؤات المستمدة من الانحدار القيم المقدرة لمعاملات الانحدار سوف تكون غير محددة وغير دقيقة .

– **الأخطاء المعيارية للقيم المقدرة لمعاملات الانحدار سوف تكون كبيرة جدا**:حيث تظهر مشكلة التعدد الخطي بوضوح في وجود تباينات كبيرة لمقدرات معالم الانحدار فحتي اذا كان هناك تأثير لمتغير مستقل على متغير تابع ففي ضل وجود هذه المشكلة قد يجعل من الصعب تقدير ذلك اللثر بدقة وتنخفض درجة الثقة في السياسات المقترحة بناءا على هذه المقدرات.

– تبرز هذه المشكلة بشكل كبير في العينة اكثر من المجتمع كما ينبغي التنبيه على انه في ظل وجود هذه المشكلة فان تقدير معلمات الانحدار تبقى غير متحيزة أي: $E(\widehat{bi}) = bi$

– وتشير بعض الدراسات ان مشكلة التعدد الخطي تكون غير مهمة اذا كان : $R^2 > r_{x1.x2}$

– في حالة التعدد الخطي التام فان محدد المصفوفة $X'X$ يصبح معدوما وهو مايجعل تقدير معلمات النموذج امرا مستحيلا مع تباينات لا نهائية[1] .

3–اختبارات الكشف عن التعدد الخطي:

تعتمد درجة الخطورة لأثر التعدد الخطي على درجة الارتباط الجزئي، ومعامل الارتباط الكلي (أو معامل التحديد المضاعف)، ومنه يمكن القول بأن كلا من الأخطاء المعيارية ، معامل التحديد المضاعف R^2 ومعاملات الارتباط الجزئية $r_{xi.xj}$ يمكنها ان تستعمل لاختبار التعدد الخطي، لكن كل معيار من هذه المعايير الثلاثة المذكورة ليس بمؤشر على وجود التعدد الخطي بمفرده، وذلك لأن القيم العالية للأخطاء المعيارية لا تظهر دائما،بسبب التعدد الخطي، وإنما يمكن أن تظهر لأسباب أخرى، كما أن الارتباطات العالية فيما بين المتغيرات المستقلة لا تؤثر بالضرورة على قيم المقدرات $\hat{\beta}_j$ ومنه ليست هذه هي الأخيرة بمعيار مناسب لقياس

واكتشاف التعدد الخطي بمفردها، وبالمقابل يمكن لقيمة معامل التحديد المضاعف R^2 ان تكون عالية بالمقارنة مع $r_{xi.xj}$. ورغم ذلك، من المحتمل أن تحتوي نتائجنا على إشارات خاطئة أو على أخطاء معيارية كبيرة، ومع كل هذا يمكن القول بأن توفيق المعايير الثلاثة، أعلاه يساعدنا على اكتشاف التعدد الخطي[2].

---

[1] 1 Rrégis, *Op.cit.*pp114.

2محمد شيخي ، مرجع سابق، ص 91.

3-1اختبار كلاين Klein[1]

يقوم هذا الاختبار على المقارنة بين معامل التحديد المضاعف الكلي R^2 للنموذج:

$$Y_i=\beta_0+\beta_1X_1+\beta_2X_{2+}\ldots\ldots\ldots\ldots\beta_kX_{k+}+U_i$$

ومعاملات الارتباط الجزئية $r_{xi.xj}$ بين المتغيرات التفسيرية من اجل: $i\neq j$.

اذا كان: $R_y^2 < r_{xi,\,xj}^2$ نقول ان هناك فرضية لوجود التعدد الخطي.

وهو لا يتعلق باختبار احصائي معين كاختبار ستودنت T او فيشر F او كاي مربع χ^2 لتاكد من صحة فرضية التعدد الخطي من عدمه وولكنه معيار لقرينة وجود التعدد الخطي.

مثال:

يقوم اقتصادتدي بدراسة علاقة انحدارية لمتغير تابع بواسطة اربعة متغرات تفسيرية

$$Y_i=\beta_0+\beta_1X_1+\beta_2X_2+\beta_3X_3+\beta_4X_4+U_i$$

ومحاولا الكشف عن وجود علاقة خطية بين المتغيرات المSتقلة، الجدول التالي يوضح السلاسل الزمنية للمتغيرا الخاصة بالنموذج:

الجدول رقم 11

y	x_1	x_2	x_3	x_4
8,40	82,90	17,10	92,00	94,00
9,60	88,00	21,30	93,00	96,00
10,40	99,90	25,10	96,00	97,00
11,40	105,30	29,00	94,00	97,00
12,20	117,70	34,00	100,00	100,00
14,20	131,00	40,00	101,00	101,00
15,80	148,20	44,00	105,00	104,00
17,90	161,80	49,00	112,00	109,00
19,30	174,20	51,00	112,00	111,00
20,80	184,70	53,00	112,00	111,00

نتائج التقدير الخاصة بالنموذج كانت كمايلي:

$$y=-13{,}53+0{,}096\,x_1+0{,}015\,x_2-0{,}199\,x_3+0{,}34\,x_4+e$$

$$(1{,}80)\quad(3{,}66)\quad(0{,}30)\quad(2{,}20)\quad(2{,}27)$$

$n=10$

$R^2=0{,}998$

$(.)=t$ de Student

وبحساب معاملات الارتباط البسيطة بين المتغيرات المستقلة وجدنا:

[1] Klein L.R., page 101, 1962.

$r^2_{x1,x2} = 0,976$ $r^2_{x1,x3} = 0,960$ $r^2_{x1,x4} = 0,974$

$r^2_{x2,x3} = 0,938$ $r^2_{x2,x4} = 0,938$ $r^2_{x3,x4} = 0,982$

من خلال نتائج معاملات الارتباط البسيطة لا يمكننا القول ان هناك مشكلة جدية للتعدد الخطي في هذا النموذج ، حيث رغم ان هذه المعاملات كانت قيمها كبيرة الا انها كانت اقل من معامل التحديد المضاعف $R^2 = 0,998$.

3-2طريقة التحليل الترافدي لـ Frisch

تتضمن هذه الطريقة القيام بانحدار المتغير التابع على كل متغير مستقل على حدا، ومنه نحصل على كل الانحدارات الأولية، ثم نختار الانحدار الأولي الذي يعطي النتائج الأكثر مصداقية، ثم نضيف تدريجيا متغيرات أخرى ونختبر آثارها على كل من المعالم الفردية (الاخطاء المعيارية، معامل التحديد المضاعف R^2)

ويكون المتغير المضاف للانحدار ذا معنوية إذا :

- اذا حسّن المتغير الجديد وزاد من قيمة R^2 بدون أن يجعل المعالم الفردية مرفوضة اقتصاديا وبطريقة خاطئة، نحتفظ بهذا المتغير ونعتبره كمتغير مستقل جيد.
- إذا لم يحسِّن المتغير الجديد من العلاقة ويؤثر على قيم المعالم الفردية، نعتبره مرفوضا ونحذفه من الانحدار.
- إذا أثر المتغير الجديد بشكل واضح على إشارات وقيم المعالم المقدرة، نعتبره متغيرا مفسِّرا، فإذا تأثرت المعالم الفردية بالطريقة التي تصبح فيها غير مقبولة على أساس الاعتبارات النظرية المعروفة مسبقا، فإنه يمكننا القول بأن هذا مؤشر على وجود التعدد الخطي بشكل معقد،

يكون هذا المتغير مهما، لكن بسبب الارتباطات الخطية مع المتغيرات المستقلة الأخرى، يكون أثره غير مقدر وغير معروف إحصائيا بواسطة المربعات الصغرى العادية.

ان طريقة التحليل الترافدي لـ **Frisch** تنص على تقدير كل الانحدارات الممكنة مابين المتغيرات الموجودة بالعلاقة المدروسة، آخذين كل متغير، بالترتيب، كمتغير تابع واعتبار كل الانحدارات الممكنة لكل متغير في بقية المتغيرات، والتي ندخلها تدريجيا في التحليل، ومن الواضح أن التحليل الترافدي يتطلب منا حسابات كثيرة، ومنه تكون المقارنات ما بين النتائج معقدة أكثر.

3-4طريقة Farrar-Glauber (*F-G*)

هذا الاختبار نشر لاول مرة سنة 1967 بعنوان الاشتراك الخطي في نموذج الانحدار بواسطة *Farrar-Glauber* حيث يشتمل هذه الاختبار اجمالا على[1]:

اختبار كاي مربع: χ^2

ولاكتشاف ظاهرة التعدد الخطي يتبع *Farrar-Glauber* الخطوات التالية:

1 مجيد علي حسين، عفاف سعيد، مرجع سابق، ص 495.

أولا :حساب محدد مصفوفة معاملات الارتباط بين المتغيرات المستقلة:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & r_{X_1X_2} & r_{X_1X_3} & \cdots & r_{X_1X_k} \\ r_{X_2X_1} & 1 & r_{X_2X_3} & \cdots & r_{X_2X_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{X_kX_k} & r_{X_kX_2} & r_{X_kX_3} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

عندما تكون قيمة المحدد تقترب من الصفر، فإن هناك دليل على وجود تعدد خطي

ثانيا: نستخدم اختبار كاي مربع: χ^2 لتحديد وجود او عدم وجود مشكلة التعدد الخطي في النموذج المقدر وذلك بوضع الفرضيات التالية:

$$H_0 : \mathrm{D}=1 \quad (\text{استقلال خطي})$$

$$H_1 : \mathrm{D}<1 \quad (\text{ارتباط خطي})$$

نقوم بحساب احصائية *Farrar-Glauber* (القيمة المحسوبة) تعرف كما يلي :

$$^*\chi^2 = -\left[n-1-\frac{1}{6}(2K+5)\right].\mathrm{Ln}\,D$$

حيث n عدد المشاهدات (حجم العينة)، kعدد المتغيرات المفسرة و ln هو الوغاريتم النيبري، فاذا كانت القيمة المحسوبة χ^{2*} ، اكبر من المجدولة لتوزيعχ^2 بدرجة حرية (($\frac{1}{2}(k(k+1)$ ومستوى معنوية α فنقبل حينئذ الفرضية H_1 ونقول انه توجد حالة من التعدد الخطي.

ملاحظة: كلما كبرت القيمة المحسوبة لـ χ^{2*} عن نظيرتها المجدولة كلما دل ذلك على شدة مشكلة التعدد الخطي للمتغيرات المستقلة[1].

مثال:

باستعمال طريقة *Farrar-Glauber* نقوم بحساب المحدد D،للمتغيرات الخاصة بالمثال السابق

$$D=\begin{vmatrix} 1 & r_{x1\,x2} & r_{x1\,x3} & r_{x1\,x4} \\ r_{x2\,x1} & 1 & r_{x2\,x3} & r_{x2\,x4} \\ r_{x3\,x1} & r_{x3\,x2} & 1 & r_{x3\,x4} \\ r_{x4\,x1} & r_{x4\,x2} & r_{x4\,x3} & 1 \end{vmatrix}=$$

1 مجيد علي حسين، عفاف سعيد، مرجع سابق، ص 498.

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0,988 & 0,980 & 0,987 \\ 0,988 & 1 & 0,969 & 0,969 \\ 0,980 & 0,969 & 1 & 0,991 \\ 0,987 & 0,969 & 0,991 & 1 \end{vmatrix} = 0,92198 \times 10^{-5}$$

نقوم بحساب القيمة المحسوبة χ^{2*} كمايلي:

$$^*\chi^2 = -\left[n - 1 - \frac{1}{6}(2\,K + 5)\right] \times \text{Ln}\, D$$

$$^*\chi^2 = -\left[10 - 1 - \frac{1}{6}(2 \times 5 + 5)\right] \times -11,59 = 75,33$$

هذه القيمة نقوم بمقارنتها بالقيمة من الجدولية لتوزيع χ^2 بدرجة حرية $½(k(k+1))=10$ ومستوى معنوية $\alpha=0.05$ ، ومنه $\chi^2= 18.31$

وحيث ان : $^*\chi^2 > \chi^2$ نقوم برفض الفرضية الصفرية H_0 اي توجد مشكلة التعدد الخطي

قد تختلف نتائج اكتشاف مشكلة التعدد الخطي بين الاختبارات الخاصة بكشفه ونخص بالذكر اختباري: *Farrar-Glauber* و *Klein* حيث يعتد على الاساس النظري وهو ما يمنحه الميزة في اكتشاف مشكلة التعدد الخطي.[1]

4–قياس التعدد الخطي أو شرط الأعداد Condition numbers

انطلاقا من النموذ التالي : $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \varepsilon_i :\quad i = 1.........n$ فيكون لدينا:

$$\begin{cases} Var\left(\hat{\beta}_1\right) = \dfrac{\sigma_\varepsilon^2}{\sum x_{1i}^2\left(1 - R_1^2\right)} \\ Var\left(\hat{\beta}_2\right) = \dfrac{\sigma_\varepsilon^2}{\sum x_{2i}^2\left(1 - R_2^2\right)} \\ Cov\left(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2\right) = \dfrac{\sigma_\varepsilon^2 R_1^2}{\sum x_{1i} x_{2i}\left(1 - R_1^2\right)} \end{cases}$$

حيث ان R_1^2 هو مربع معامل الارتباط المتعدد ما بين المتغيرين المستقلين X_1 و X_2 بينما R_2^2 هو مابين X_2 و X_1 وهما في الأخير متساويان، أما عند توسيع النموذج إلى k متغير مستقل $(2\,k>)$ يصبح R_j^2 على أنه مربع معامل الارتباط المتعدد ما بين المتغير المستقل X_{ij} وبقية المغيرات المستقلة الأخرى، ومنه يمكننا استنتاج قانون عام لتباين المقدرات الفردية لشعاع معالم النموذج كما يلي:

---

1 Rrégis, *Op.cit.*pp118.

$$Var\left(\hat{\beta}_j\right)=\frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sum x_{ji}^2\left(1-R_j^2\right)} \qquad j=1.......k$$

وتكون قيمة $Var\left(\hat{\beta}_j\right)$ كبيرة كلما كانت σ_ε^2 هي الاخرى كبيرة كما انه اذا كانت $\sum x_{ji}^2$ صغيرة : R_j^2 كبيرة.

ومنه نعرِّف مقياسا جديد يسمى " معامل تضخم التباين" ((Variance Inflation Factor (V.I.F)) ومقياسا آخر يسمى" شرط العدد " (Condition number) حيث ان هذين المقياسين يحددان درجة التعدد الخطي[1].

– ويعرف معامل تضخم التباين كما يلي:

$$V.I.F\left(\hat{\beta}_j\right)=\frac{1}{1-R_j^2}$$

– وبناءا على هذا التعريف نستطيع كتابة:

$$Var\left(\hat{\beta}_j\right)=\frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sum X_{ij}^2}\times V.I.F\left(\hat{\beta}_j\right), \quad j=1......k$$

أي أن:

$$V.I.F\left(\hat{\beta}_j\right)=\frac{\sum X_{ij}^2}{\sigma_\varepsilon^2}\times Var\left(\hat{\beta}_j\right) \qquad j=1......k$$

انطلاقا من الانتقادات الموجهة لمعامل الارتباط، يكون مقياس*(V.I.F)* غير كاف لتحديد التعدد الخطي، ومنه نذكر مقياس شرط الأعداد المذكور من طرف*Welsch (1980)* والذي يقيس حساسية مقدرات الانحدار للتغيرات الصغيرة في التباينات، ويعرف شرط الأعداد على أنه الجدر التربيعي لأكبر قيمة مقسمة على أصغر قيمة للقيم المميزة للمصفوفة: $(X'X)$ وهو على الشكل:

$$K(X)=\frac{\sqrt{\lambda_{\max}}}{\sqrt{\lambda_{\min}}}$$

فكلما كانت القيمة أعلاه أقرب إلى الواحد، كلما كان الشرط أفضل لعدم جدية التعدد الخطي، ومع هذا، فإن المقياسين المذكورين أعلاه ليسا كاملين، حيث القانون الخاص بـ*(V.I.F)* ينظر إلى الارتباطات من خلال المتغيرات المستقلة فقط، وهذا ليس بالعامل الوحيد، كما أن شرط العدد يمكن أن يتغير بإعادة تحويل المتغيرات

1محمد شيخي ، مرجع سابق، ص 93.

المستقلة، والتي ليست دائمة صحيحة، ويصلح المقياسان للاستعمال عند حذف بعض المتغيرات وفرض قيود على المعالم فقط في الحالات التي يكون فيها معامل التحديد مقاربة للواحد صحيح اي :($R_j^2 \approx 1$)

أو لما تكون القيمة المميزة الصغرى λ_{min} أقرب من الصفر .نقدر النموذج في هذه الحالة تبعا لبعض القيود المفروضة على معالمه، ويقترح *Theil* مقياسا أخر لقياس درجة الارتباط فيما بين المتغيرات ومنه درجة التعدد الخطي على الشكل: $m = R^2 - \sum_{j=1}^{k}\left(R^2 - R_{-j}^2\right)$

حيث: R_{-j}^2 يمثل الارتباط المتعدد من انحدار y (المركزة) في $x_1, x_2, \ldots\ldots x_k$. مع حذف x_j لكن

احدى عيوب هذه الطريقة هي ان m يمكن أن تكون سالبة مما يجعل التحليل أصعب، وهناك من يقترح طرقا معينة لحل مشكلة التعدد الخطي كإضافة حد ثابت لتباينات مقدرات المعالم قبل حل المعادلات الطبيعية للمربعات الصغرى[1].

5-الحلول المقترحة للتعدد الخطي

عند وجود التعدد الخطي، فإن الحلول تكون معتمدة على:

إمكانية إيجاد مصادر أخرى للبيانات وعلى أهمية العوامل التي تسببت في ظهورها، ثم على الهدف الذي من أجله نقوم بتقدير الدالة تحت الدراسة، فإذا لم يؤثر التعدد الخطي بشكل فعلي على مقدرات النموذج، يقترح بعض باحثي القياس الاقتصادي إهمال وجوده في النموذج.

حيث يمكن تجنب وتفادي التعدد الخطي بتوسيع حجم العينة، فمثلا يمكن تحويل البيانات السنوية إلى بيانات موسمية أو شهرية إن أمكن ذلك.

كما يمكن التخلص من التعدد الخطي بإسقاط (حذف) المتغير المسبب لهذا المشكل لكن هذه العملية يمكن أن تخلق مشاكل أخرى، وهناك من يقترح إدخال معلومات إضافية للنموذج، او بالاستعانة بالمتغيرات ذات التباطؤ الزمني *lagged variables*.

إن وجود التعدد الخطي يجعل من الصعب فصل آثار المتغيرات المختلفة، ومنه نحتاج إلى معلومات خاصة تساعدنا على فصل أثر كل متغير لوحده، ويكون ذلك عن طريق فرض قيود على بعض المعالم بناءا على المعلومات المسبقة للنظرية الاقتصادية[2].

لا حاجة في تعديل النموذج الذي يعاني من مشكلة التعدد الخطي اذا كان[3]:

1محمد شيخي مرجع سابق، ص 94.

2محمد شيخي، مرجع سابق، ص 96.

3 مجيد علي حسين، عفاف سعيد، مرجع سابق، ص 503.

-اذا كانت درجة التعدد الخطي ليست عالية

-عندما تكون درجة التعدد الخطي كبيرة ولكن تخص متغيرات او معلمات للتقدير لا تهم الباحث بشكل كبير.

تمارين مقترحة

I- من خلال التقدير التالي الذي يربط العلاقة بين كل من مستوى الورادات Y، النتاج الاجمالي الوطني X1، والرقم القياسي لاسعار المستهلكين X2: في ال: و.م. ا خلال الفترة : 1980-1995 :

$$\hat{Y}_i = 0.08X_1 + 0.76X_2 - 101.49$$
$$t.........(1.40)....(1.00)$$
$$r_{12} = 0.997$$
$$R^2 = 0.97$$

1- هل المعلمتين β_1و β_2 معنويتين عند مستوى 5% حيث $t_{(15.0.05)}=2.131$

2- يشير التقدير الى وجود مشكلة قياسية ، ماهي؟

3- كيف تبين ذلك (برّر)؟

③لتكن لدينا المعطيات التالية

Y	X	Z	y	x	z	yx	yz	xz	x^2	z^2	y^2
3	4	10	-4	-9	5	36	-20	-45	81	25	16
4	5	8	-3	-8	3	24	-9	-24	64	9	9
5	8	6	-2	-5	1	10	-2	-5	25	1	4
6	9	7	-1	-4	2	4	-2	-8	16	4	1
7	12	5	0	-1	0	0	0	0	1	0	0
8	14	5	1	1	0	1	0	0	1	0	1
8	16	4	1	3	-1	3	-1	-3	9	1	1
9	18	2	2	5	-3	10	-6	-15	25	9	4
10	20	2	3	7	-3	21	-9	-21	49	9	9
10	24	1	3	11	-4	33	-12	-44	121	16	9
70	130	50				142	-61	-165	392	74	54

قدر النموذج التالي واحسب معامل الارتباط البسيط$r_{x1,x2}$

المطلوب اختبر وجود او عدم وجود مشكلة التعدد الخطي بواسطة :

ماهو دور كل من الاختبارات التالية للكشف عن مشكلة التعدد الخطي:

اختبار كاي مربع

اختبار فيشر

اختبار ستيودنت

استعمل الاختبارات السابقة للكشف عن التعدد الخطي في النموذج

الفصل السادس:
نماذج الاخطاء على النموذج
(اخطاء القياس)

نماذج الاخطاء على النموذج (اخطاء القياس)

تشير اخطاء المتغيرات الى تضمن متغيرات الانحدار اخطاء في قياس، حيث ان اخطاء القياس في المتغير التابع تدخل في حد التشويش او حد الخطأ ولا تخلق اي مشكلة، ولكن اخطاء القياس في المتغيرات المفسرة يؤدي الى وجود مقدرات للمعالم تكون متحيزة وغير متسقة، لكن للحصول على مقدرات متسقة هناك عدة طرق لذلك منها طريقة المتغيرات الوسيطية والتي تكون ذات ارتباط عالي مع المتغير التابع ومع استقلالية مع حد الخطأ، او طريقة المربعات الصغرى المعكوسة...

1- نتائج وجود المتغيرات معيبة

عند التطرق للنموذج الخطي، نفترض في الغالب ان المتغيرات الداخلية و الخارجية يتم مشاهدتها دون خطأ . لكن في الواقع ،نادرا ما يتم التحقق من هذه الفرضية .ومع ذلك، يمكننا القول أن الخطأ في قياس المشاهدات صغير مقارنة بالخطأ في التوصيف للنماذج[1].

ومع ذلك، في بعض النماذج، نجد ان المتغيرات تتضمن بعض الاخطاء وهذه الاخطاء تكون ذات اعتبار واهمية لا يمكن تجاهلها نسبيا، على سبيل المثال، عندما اخذ البيانات، وليس مع القياس او المسح المباشر،وانما بواسطة بيانات العينة .في هذه الحالة، يجب أن نميز بين بيانات ومعطيات حقيقية وهي مجهولة :

$$y^*, x^*_1, x^*_2, \ldots, {}^*xk$$

وبيانات اخرى تكون تقريبية او مقدرة لها

$$y, x1, x2, \ldots, xk$$

وكذا التقدير لهذه البيانات بواسطة طريقة المربعات الصغرى .

نفترض النموذج التالي:

$$Y^* = X^*a + \varepsilon$$

حيث يتضمن المتغير العشوائي ε الفرضيات المعتادة

نضع: $X = X^* + \mu$ و $Y = Y^* + \nu$

مع

$$E(\mu) = 0 ; E(\nu) = 0 ; E(X^{*\prime}\mu) = 0 ; E(Y^{*\prime}\nu) = 0 ; E(X^{*\prime}\nu) = 0 ; E(Y^{*\prime}\mu) = 0$$

فنجد:

$$E(\varepsilon'\mu) = E\{(Y^* - X^*a)'\mu\} = E(Y^*\mu) - a'E(X^{*\prime}\mu) = 0$$

$$E(\varepsilon'\nu) = E\{(Y^* - X^*a)'\nu\} = E(Y^*\nu) - a'E(X^{*\prime}\nu) = 0$$

ومنه فنجد هناك استقلالية (عدم ارتباط) بين الاخطاء على المتغيرات μ، ν وخطأ التوصيف في النموذج ε .

[1] Bourbonnais R, Econométrie, 9emeEdition, Dunod, Paris, 2015,p154.

والعلاقة بين المتغيرات الخاصة بالمشاهدات تكون على النحو التالي:

$$Y^* = X^*a + \varepsilon$$

$$Y^* = Y - v = (X - \mu)a + \varepsilon \rightarrow \qquad Y = Xa + v - \mu a + \varepsilon = Xa + \eta$$

مع

$$\eta = v - \mu a + \varepsilon$$

وبالخصائص الستوكاستيكية للمتغير η نجد :

$$\begin{aligned} E(\eta) &= E(\nu - \mu a + \varepsilon) = E(\nu) - E(\mu)a + E(\varepsilon) = 0 \\ E(X^{*\prime}\eta) &= E(X^{*\prime}\nu) - E(X^{*\prime}\mu)a + E(X^{*\prime}\varepsilon) = 0 \\ E(X'\eta) &= E\{(X^* + \mu)'\eta\} = E(\mu'\eta) \\ &= E(\mu'\nu) - E(\mu'\mu)\, a + E(\mu'\varepsilon) \\ &= -E(\mu'\mu)a \neq 0 \end{aligned}$$

ومن هنا يتبين لنا احد خصائص الانحدار الخطي غير متحققة و والتي بينت وجود ارتباط بين المتغير η والمتغير X

ومنه فطريقة المربعات الصغرى العادية تعطينا مقدرات متحيزة سلبيا.

2-طريقة المتغيرات الوسيطية في التقدير

عند وجود نموذج الاخطاء على المتغيرات: $Y = Xa + \varepsilon$ فان الفرضية رقم 6 تكون غير محققة ولا يتقارب المقدر$\hat{\alpha}$ نحو المعلمة a على خلاف باقي الفرضيات التي تكون محققة عادة.

والهدف من هذه الطريقة والخاصة بالمتغيرات الوسيطية هو ايجاد متغيرات جديدة (kمتغير) هي $z1, z2, \ldots, zk$

حيث:

$$E(Z'\eta) = 0 \quad \text{و} \quad Z = (z1, z2, \ldots, zk)$$

كما ان

$$Cov\,(Z' \; X) \neq 0$$

تركيبة خطية والمتغيرات Z ليست متعامدة **مع** المتغيراتX اي هناك ارتباط بين المتغيراتX والمتغيرات Z ،

ويكون لدينا كذلك:

$$E(Z'Y) = E\{Z'(Xa + \eta)\} = E(Z'X)a + E(Z'\eta) = E(Z'X)a$$

ولدينا:

$$\boxed{\hat{a} = (Z'X)^{-1}Z'Y}$$

ومن هنا نبرهن على ان المقدر $\hat{\alpha}$ يتقارب بالاحتمال (متسقة) نحو القيمة الحقيقية a ، كما نبين ان له

تباين اصغر من العلاقة القوية بين بين المتغيراتX والمتغيرات Z ، بالاضافة الى ان مصفوفة التباين والتباين المشترك تصبح :

$$\boxed{\widehat{\Omega}_{\hat{a}} = \widehat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}(Z'X)^{-1}(Z'Z)(X'Z)^{-1}}$$

ان تنفيذ هذه الطريقة يكمن في ايجاد واختيار المتغيرات الوسيطية التي يجب ان تكون غير مرتبطة مع المتغير η وفي نفس الوقت مرتبطة ارتباطا قويا مع المتغيراتX .

3-اختبار الاثر الخارجي لـHausman

ان هذا الاختبار *Hausman* 1978 يسمح بايجاد امكانية العلاقة الارتباطية بين حد الخطأ ε والمتغير او المتغيرات المفسرة x_{it} .وفي هذه الحالة لا نستطيع الاعتماد في التقدير على طريقة المربعات الصغرىMCO والتي تقديراتها غير متسقة ومنه فيجب استخدام الأسلوب المتغيرات المساعدة (VI) أو طريقة العزوم.

من خلال الفرضيات التالية : الفرضية الصفرية H_0: $Cov(xt ,\varepsilon t) = 0$

حيث يمثل x_{it} المتغير الخارجي او المستقل في مقابل الفرضية H_1: $Cov(xt ,\varepsilon t) \neq 0$.

تنص الفرضية الصفرية على الن المقدرات الخاصة بطريقة المربعات الصغرى والمتغيرات الوسيطية هي متسقة ومتقاربة اما الفرضية البديلة فتنص على ان التباين المشترك غير معدوم وان المقدرات الخاصة بطريقة المربعات الصغرى متحيزة وغير متسقة.

هدا الاختبار يمكن تقديمه بطريقتين اما بطريقة الفرق بين مقدراة طريقة المربعات الصغرى MCO او المتغيرات الوسيطية VI او طريقة الانحدار الموسع.

3-1- اختبار الفروق

نقوم بحساب الاحصائية:

$$H = (\widehat{a}_{VI} - \widehat{a}_{MCO})'[\mathrm{Var}(\widehat{a}_{VI}) - \mathrm{Var}(\widehat{a}_{MCO})]^{-1}(\widehat{a}_{VI} - \widehat{a}_{MCO})$$

حيث ان الاحصائية H تتبع التوزيع كاي مربع بدرجة حرية k، فاذا كان $H < \chi^2_{(k)}$ عند مستوى معنوية α% ثابتة فاننا نقبل الفرضية الصفرية ونقول ان المقدرات الخاصة ب *MCO* غير متحيزة ومتسقة.

3-2 الانحدار الموسع (المطور)

في هده الطريقة وضع Hausman اربع مراحل اساسية :

- تقدير نموذج بواسطة طريقة المربعات الصغرى مع تبيين وتوضيح المتغير الذى نرغب فى اختبار درجة تاثيره كمتغير خارجي والوسيطي، في غالب الاحيان المتغيرات التفسيرية بتغير او تحول لفترة زمنية.
- تقدير المتغيرات المعدلة $\widehat{xt}$ انطلاقا من التقديرات السابقة.
- تقدير النموذج الموسع (النموذج الاولي الذي تم اعادة اضافة المتغيرات المعدلة).
- اختبار المعنوية للمعلمات الخاصة بالمتغيرات المفسرة للنموذج مقارنة بالقيمة 0، بحيث نستخدم اختبار فيشر

او ستودنت للتحقق من معنويات المعلمات فاذا كان لا تختلف معنويا عن الصفر فنقبل الفرضية الصفرية:

$H_0 : Cov(xt ,\varepsilon t) = 0$.

4 طريقة العزوم المعممة

هذه الطريقة تستعمل تحت ان المتغيرات هي مفسرة او خارجية اي: $Cov(xt ,\varepsilon t) = 0$، وعلاوة على ذلك مصفوفة التباين والتباين المشترك لحد الخطأ

$$(E(\varepsilon_t ,\varepsilon '_t) =/ \sigma^2 I)$$

فالمقدرات بواسطة طريقة العزوم المعممة توفق بينها وبين طريقة المربعات الصغرى المعممة وطريقة المتغيرات الوسيطية. حيث ان المقدرات بطريقة العزوم المعممة GMM معطى بالشكل التالي:

$$\hat{a} = (X'Z(Z'\hat{\Omega}Z)^{-1}Z'X)^{-1}X'Z(Z'\hat{\Omega}Z)^{-1}Z'y$$

حيث:

y: المتغير التابع

X: المتغيرات المفسرة او المستقلة

Z: المتغيرات الوسيطية

Ω: مصفوفة التباين والتباين المشترك المقدرة في المرحلة الاولى بواسطة طريقة المتغيرات الوسيطية.

كما انه في حالة تحقق الفرضيات الكلاسيكية فان المقدر الخاص بطريقة العزوم المعممة يحد ويقلل من.

تأثير مقدرات المتغيرات الوسيطية(تحقق الفرضية التالية: $(E(\varepsilon_t ,\varepsilon '_t) = \sigma^2 I)$

تمارين محلولة [1]

مثال 01

يقوم مزارع بدراسة علاقة بين مردود المحاصيل الزراعية y_i والكميات المستهلكة من السماد x^*_i ولهذا الغرض نفترض ان الكميات من السماد المصرح بها من قبل المزارعين x_i والتي تضمنت اخطاءا في القياس، في هذه الاثناء نفترض وجود متغير الانفاق الفعلي لشراء الاسمدة z_i ، وهو مستقل عن اخطاء المشاهدة في كمية السمادة والمرتبطة ارتباطا جيدا مع استهلاك الحقيقي للسماد:

[1] Bourbonnais R, Econométrie, 9emeEdition, Dunod, Paris, 2015,p.158

جدول12: عائدات المحاصيل، كميات السماد المستعمل و نفقات شراء السماد

Observation	y_i	x_i	z_i
1	15,30	17,30	3,00
2	19,91	21,91	7,00
3	20,94	22,96	5,40
...	...	...	...
18	25,83	29,43	22,20
19	25,15	28,95	24,60
20	25,06	28,86	24,60

نقوم بالانحدار المطور (الموسع)

نقم باستخدام اختبار *Hausman* من خلال الخطوات الاربع:

من خلال التقدير بواسطة طريقة المربعات الصغرى ل x_i المتغير على المتغير المساعد z_i نجد:

Dependent Variable : X
Method : Least Squares
Included observations : 20

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	18.37253	0.622495	29.51436	0.0000
Z	0.440680	0.039908	11.04238	0.0000

النموذج المقدر : $\hat{x}_i = 18,37 + 0,44 z_i$

نقوم بتقدير نموذج موسع حيث يتضمن : $(XF = \hat{x}_i)$

Dependent Variable : Y
Method : Least Squares
Included observations : 20

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
X	1,010328	0,022324	45,25680	0.0000
XF	– 0,215107	0,023915	– 8,994504	0.0000
C	2,153561	0,212721	10,12386	0,0000

ان المعلمة الخاصة بالمتغير *XF* هي معنويا تختلف عن 0.

وبالتالي لا نقبل الفرضية الصفرية $H0$ اي ان : $\mathrm{Cov}(x_t, \varepsilon_t) \neq 0$

نقوم بتقدير للانحدار ل y_i المتغير على المتغير المساعد x_i نجد:

$$\hat{y}_i = 1{,}47 + 0{,}82\ X_i$$
$$(41)$$
$$R^2 = 0{,}99$$
$$n = 20$$
$$(.) = t \text{ de Student}$$

وحيث انه لا يمكن تطبيق طريقة المربعات الصغرى في التقدير بسبب ان: $E(x_i\ \eta) \neq 0$. ومع ذلك فان الفرضية $E(z_i\ \eta) = 0$ وكذلك $\mathrm{Cov}(x_i^*\ z_i) \neq 0$ نسطيع الحصول على مقدر $\hat{a}$ كمايلي:

$$\underset{(2,1)}{\hat{a}} = \underset{(2,20)}{(Z'}\ \underset{(20,2)}{X)^{-1}}\ \underset{(2,20)}{Z'}\ \underset{(20,1)}{Y}$$

وحيث ان المصفوفة Z مكونة من 1 في العمود الاول ومن القيم z_i في العمود الثاني ونفس الشيء بالنسبة للمصفوفة X فهي مكونة من 1 في العمود الاول ومن القيم x_i في العمود الثاني :

$$Z'X = \begin{bmatrix} 20{,}00 & 492{,}78 \\ 284{,}40 & 7\,369{,}53 \end{bmatrix}; \quad (Z'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 1{,}02 & -0{,}07 \\ -0{,}04 & 0{,}00 \end{bmatrix};$$

$$Z'Y = \begin{bmatrix} 434{,}94 \\ 6472{,}88 \end{bmatrix}$$

فيكون : $$\hat{a} = \begin{bmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}15 \\ 0{,}795 \end{bmatrix}$$

تتم مقارنة المقدرات الاخيرة بنظيرتها و الخاصة بطريقة المربعات الصغرى .

ونقوم بحساب تقدير تباين الأخطاء :

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{\sum_i e_i^2}{n-2} = \frac{1{,}29}{18} = 0{,}071$$

اما مصفوفة تباين – تباين مشترك للمقدرات $\hat{a}$ هي

$$\hat{\Omega}_{\hat{a}} = \hat{\sigma}_\varepsilon^2\ (Z'X)^{-1}\ (Z'Z)(X'Z)^{-1}$$

$$Z'Z = \begin{bmatrix} 20{,}00 & 284{,}40 \\ 284{,}40 & 4\,866{,}08 \end{bmatrix}; \qquad \hat{\Omega}_{\hat{a}} = 0{,}071 \begin{bmatrix} 3{,}85 & -0{,}15 \\ -0{,}15 & 0{,}00 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \hat{\sigma}_{\hat{a}1} = 0{,}0211$$

ومنه فالنموذج المقدر بواسطة طريقة المتغيرات المساعدة(الوسيطية) هو كمايلي:

$$\hat{y}_i = 2,15 + 0,795\ X_i$$
$$(37)$$
$$n = 20$$
$$(.) = t \text{ de Student}$$

مثال 2

يعطي الجدول التالي: قيما المخزون y، والمبيعات الفعليةX، والمتغير الافتراضي تشمل احطاْ القياس X'، كلها بالمليون دولار ، من 1963-1978، وبفرض ان المتغيرين X، Y خالي من الخطأ قمنا باجراء انحدار لـ Y_t على X_t فوجدنا:

الجدول رقم 13

1970	1969	1968	1967	1966	1965	1964	1963	السنة
43.9	42.5	38.9	35.3	38.1	34.4	31.1	29.4	Y_t
30.7	28.9	27.0	24.4	25.3	23.7	21.8	20.6	X_t
33.6	31.5	29.3	26.3	27.3	25.5	23.3	21.9	X'_t
1978	1977	1976	1975	1974	1973	1972	1971	السنة
100.8	90.1	79.3	71.1	71.1	63.2	55.1	50.1	Y_t
66.6	60.3	54.6	48.7	44.7	41.9	37.4	33.9	X_t
75.3	67.9	61.3	54.5	49.9	46.6	41.4	37.3	X'_t

$$\hat{Y}_i = -1.92 + 1.53 X_i \text{ ....} R^2 = 0.996$$
$$SE \quad (-1.79) \quad (56.34) \text{............} d = 1.86$$

باجراء انحدار لـ Yt على $X't$ (في حالة غياب X):

$$\hat{Y}_i = 0.74 + 1.32 X_i' \text{ ....} R^2 = 0.996$$
$$SE \quad (0.73) \quad (57.01) \text{............} d = 1.88$$

نلاحظ ان: $a' > a$

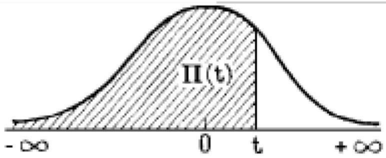
و$b' < b$ وباستخدام قيم X'_{t-1} لاذاكان هناك شك في وجدود علاقة بين X'_t و u_t.

$$\hat{Y}_i = -1.56 + 1.50 X'_{i-1} \text{ ....} R^2 = 0.993$$
$$SE \quad (-1.13) \quad (44.47) \text{............} d = 2.19 \text{.....} r_{x'.x'-1} = 0.998$$

ومنه المعالم جديدة اقرب الى المعالم الحقيقية كما انها متسقة.

الملاحق

1–جدول التوزيع الطبيعي Laplace-Gauss



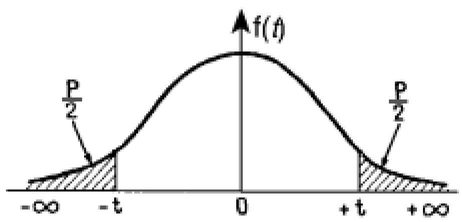
$$\pi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-t^2/2}\, \mathrm{d}t \ .$$

t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7290	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9779	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

من جل القيم الكبيرة لـ X

x	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$F(x)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

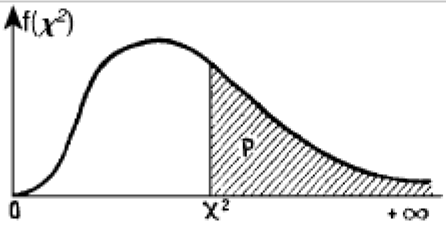
2–جدول توزيع ستودنت



ν	P = 0,90	0,80	0,70	0,60	0,50	0,40	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750

حيث νهي قيمة درجة الحرية

3- توزيع كاي تربيع χ^2



ν	$P = 0{,}90$	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01
1	0,0158	0,0642	0,148	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635
2	0,211	0,446	0,713	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210
3	0,584	1,005	1,424	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345
4	1,064	1,649	2,195	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277
5	1,610	2,343	3,000	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086
6	2,204	3,070	3,828	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812
7	2,833	3,822	4,671	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	16,662	18,475
8	3,490	4,594	5,527	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090
9	4,168	5,380	6,393	8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666
10	4,865	6,179	7,267	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209
11	5,578	6,989	8,148	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725
12	6,304	7,807	9,034	11,340	14,011	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217
13	7,042	8,634	9,926	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688
14	7,790	9,467	10,821	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141
15	8,547	10,307	11,721	14,339	17,322	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578
16	9,312	11,152	12,624	15,338	18,418	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000
17	10,085	12,002	13,531	16,338	19,511	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409
18	10,865	12,857	14,440	17,338	20,601	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805
19	11,651	13,716	15,352	18,338	21,689	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191
20	12,443	14,578	16,266	19,337	22,775	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566
21	13,240	15,445	17,182	20,337	23,858	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932
22	14,041	16,314	18,101	21,337	24,939	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289
23	14,848	17,187	19,021	22,337	26,018	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638
24	15,659	18,062	19,943	23,337	27,096	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980
25	16,473	18,940	20,867	24,337	28,172	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314
26	17,292	19,820	21,792	25,336	29,246	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642
27	18,114	20,703	22,719	26,336	30,319	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963
28	18,939	21,588	23,647	27,336	31,391	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278
29	19,768	22,475	24,577	28,336	32,461	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588
30	20,599	23,364	25,508	29,336	33,530	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892

Lorsque $\nu > 30$, on peut admettre que la quantité $\sqrt{2\,\chi^2} - \sqrt{2\,\nu - 1}$ suit la loi normale réduite.

4- الجدول الاحصائي لفيشر F

ν_2	$\nu_1 = 1$		$\nu_1 = 2$		$\nu_1 = 3$		$\nu_1 = 4$		$\nu_1 = 5$	
	$P = 0,05$	$P = 0,01$	$P = 0,05$	$P = 0,01$	$P = 0,05$	$P = 0,01$	$P = 0,05$	$P = 0,01$	$P = 0,05$	$P = 0,01$
1	161,4	4 052	199,5	4 999	215,7	5 403	224,6	5 625	230,2	5764
2	18,51	98,49	19,00	99,00	19,16	99,17	19,25	99,25	19,30	99,30
3	10,13	34,12	9,55	30,81	9,28	29,46	9,12	28,71	9,01	28,24
4	7,71	21,20	6,94	18,00	6,59	16,69	6,39	15,98	6,26	15,52
5	6,61	16,26	5,79	13,27	5,41	12,06	5,19	11,39	5,05	10,97
6	5,99	13,74	5,14	10,91	4,76	9,78	4,53	9,15	4,39	8,75
7	5,59	12,25	4,74	9,55	4,35	8,45	4,12	7,85	3,97	7,45
8	5,32	11,26	4,46	8,65	4,07	7,59	3,84	7,01	3,69	6,63
9	5,12	10,56	4,26	8,02	3,86	6,99	3,63	6,42	3,48	6,06
10	4,96	10,04	4,10	7,56	3,71	6,55	3,48	5,99	3,33	5,64
11	4,84	9,65	3,98	7,20	3,59	6,22	3,36	5,67	3,20	5,32
12	4,75	9,33	3,88	6,93	3,49	5,95	3,26	5,41	3,11	5,06
13	4,67	9,07	3,80	6,70	3,41	5,74	3,18	5,20	3,02	4,86
14	4,60	8,86	3,74	6,51	3,34	5,56	3,11	5,03	2,96	4,69
15	4,54	8,68	3,68	6,36	3,29	5,42	3,06	4,89	2,90	4,56
16	4,49	8,53	3,63	6,23	3,24	5,29	3,01	4,77	2,85	4,44
17	4,45	8,40	3,59	6,11	3,20	5,18	2,96	4,67	2,81	4,34
18	4,41	8,28	3,55	6,01	3,16	5,09	2,93	4,58	2,77	4,25
19	4,38	8,18	3,52	5,93	3,13	5,01	2,90	4,50	2,74	4,17
20	4,35	8,10	3,49	5,85	3,10	4,94	2,87	4,43	2,71	4,10
21	4,32	8,02	3,47	5,78	3,07	4,87	2,84	4,37	2,68	4,04
22	4,30	7,94	3,44	5,72	3,05	4,82	2,82	4,31	2,66	3,99
23	4,28	7,88	3,42	5,66	3,03	4,76	2,80	4,26	2,64	3,94
24	4,26	7,82	3,40	5,61	3,01	4,72	2,78	4,22	2,62	3,90
25	4,24	7,77	3,38	5,57	2,99	4,68	2,76	4,18	2,60	3,86
26	4,22	7,72	3,37	5,53	2,98	4,64	2,74	4,14	2,59	3,82
27	4,21	7,68	3,35	5,49	2,96	4,60	2,73	4,11	2,57	3,78
28	4,20	7,64	3,34	5,45	2,95	4,57	2,71	4,07	2,56	3,75
29	4,18	7,60	3,33	5,42	2,93	4,54	2,70	4,04	2,54	3,73
30	4,17	7,56	3,32	5,39	2,92	4,51	2,69	4,02	2,53	3,70
40	4,08	7,31	3,23	5,18	2,84	4,31	2,61	3,83	2,45	3,51
60	4,00	7,08	3,15	4,98	2,76	4,13	2,52	3,65	2,37	3,34
120	3,92	6,85	3,07	4,79	2,68	3,95	2,45	3,48	2,29	3,17
∞	3,84	6,64	2,99	4,60	2,60	3,78	2,37	3,32	2,21	3,02

Nota. — s_1^2 est la plus grande des deux variances estimées, avec ν_1 degrés de liberté.

2-4 الجدول الاحصائي لفيشر F (تابع)

ν_2	$\nu_1 = 6$		$\nu_1 = 8$		$\nu_1 = 12$		$\nu_1 = 24$		$\nu_1 = \infty$	
	$P = 0{,}05$	$P = 0{,}01$	$P = 0{,}05$	$P = 0{,}01$	$P = 0{,}05$	$P = 0{,}01$	$P = 0{,}05$	$P = 0{,}01$	$P = 0{,}05$	$P = 0{,}01$
1	234,0	5 859	238,9	5 981	243,9	6 106	249,0	6 234	254,3	6366
2	19,33	99,33	19,37	99,36	19,41	99,42	19,45	99,46	19,50	99,50
3	8,94	27,91	8,84	27,49	8,74	27,05	8,64	26,60	8,53	26,12
4	6,16	15,21	6,04	14,80	5,91	14,37	5,77	13,93	5,63	13,46
5	4,95	10,67	4,82	10,27	4,68	9,89	4,53	9,47	4,36	9,02
6	4,28	8,47	4,15	8,10	4,00	7,72	3,84	7,31	3,67	6,88
7	3,87	7,19	3,73	6,84	3,57	6,47	3,41	6,07	3,23	5,65
8	3,58	6,37	3,44	6,03	3,28	5,67	3,12	5,28	2,93	4,86
9	3,37	5,80	3,23	5,47	3,07	5,11	2,90	4,73	2,71	4,31
10	3,22	5,39	3,07	5,06	2,91	4,71	2,74	4,33	2,54	3,91
11	3,09	5,07	2,95	4,74	2,79	4,40	2,61	4,02	2,40	3,60
12	3,00	4,82	2,85	4,50	2,69	4,16	2,50	3,78	2,30	3,36
13	2,92	4,62	2,77	4,30	2,60	3,96	2,42	3,59	2,21	3,16
14	2,85	4,46	2,70	4,14	2,53	3,80	2,35	3,43	2,13	3,00
15	2,79	4,32	2,64	4,00	2,48	3,67	2,29	3,29	2,07	2,87
16	2,74	4,20	2,59	3,89	2,42	3,55	2,24	3,18	2,01	2,75
17	2,70	4,10	2,55	3,79	2,38	3,45	2,19	3,08	1,96	2,65
18	2,66	4,01	2,51	3,71	2,34	3,37	2,15	3,00	1,92	2,57
19	2,63	3,94	2,48	3,63	2,31	3,30	2,11	2,92	1,88	2,49
20	2,60	3,87	2,45	3,56	2,28	3,23	2,08	2,86	1,84	2,42
21	2,57	3,81	2,42	3,51	2,25	3,17	2,05	2,80	1,81	2,36
22	2,55	3,76	2,40	3,45	2,23	3,12	2,03	2,75	1,78	2,31
23	2,53	3,71	2,38	3,41	2,20	3,07	2,00	2,70	1,76	2,26
24	2,51	3,67	2,36	3,36	2,18	3,03	1,98	2,66	1,73	2,21
25	2,49	3,63	2,34	3,32	2,16	2,99	1,96	2,62	1,71	2,17
26	2,47	3,59	2,32	3,29	2,15	2,96	1,95	2,58	1,69	2,13
27	2,46	3,56	2,30	3,26	2,13	2,93	1,93	2,55	1,67	2,10
28	2,44	3,53	2,29	3,23	2,12	2,90	1,91	2,52	1,65	2,06
29	2,43	3,50	2,28	3,20	2,10	2,87	1,90	2,49	1,64	2,03
30	2,42	3,47	2,27	3,17	2,09	2,84	1,89	2,47	1,62	2,01
40	2,34	3,29	2,18	2,99	2,00	2,66	1,79	2,29	1,51	1,80
60	2,25	3,12	2,10	2,82	1,92	2,50	1,70	2,12	1,39	1,60
120	2,17	2,96	2,01	2,66	1,83	2,34	1,61	1,95	1,25	1,38
∞	2,09	2,80	1,94	2,51	1,75	2,18	1,52	1,79	1,00	1,00

Nota. — s_1^2 est la plus grande des deux variances estimées, avec ν_1 degrés de liberté.

5– الجدول الاحصائي لاختبار دربن واتسون مستوى معنوية (α =5%)

n	$k=1$		$k=2$		$k=3$		$k=4$		$k=5$	
	d_1	d_2	d_1	d_2	d_1	d_2	d_1	d_2	d_1	d_2
15	1,08	1,36	0,95	1,54	0,82	1,75	0,69	1,97	0,56	2,21
16	1,10	1,37	0,98	1,54	0,86	1,73	0,74	1,93	0,62	2,15
17	1,13	1,38	1,02	1,54	0,90	1,71	0,78	1,90	0,67	2,10
18	1,16	1,39	1,05	1,53	0,93	1,69	0,82	1,87	0,71	2,06
19	1,18	1,40	1,08	1,53	0,97	1,68	0,86	1,85	0,75	2,02
20	1,20	1,41	1,10	1,54	1,00	1,68	0,90	1,83	0,79	1,99
21	1,22	1,42	1,13	1,54	1,03	1,67	0,93	1,81	0,83	1,96
22	1,24	1,43	1,15	1,54	1,05	1,66	0,96	1,80	0,86	1,94
23	1,26	1,44	1,17	1,54	1,08	1,66	0,99	1,79	0,90	1,92
24	1,27	1,45	1,19	1,55	1,10	1,66	1,01	1,78	0,93	1,90
25	1,29	1,45	1,21	1,55	1,12	1,66	1,04	1,77	0,95	1,89
26	1,30	1,46	1,22	1,55	1,14	1,65	1,06	1,76	0,98	1,88
27	1,32	1,47	1,24	1,56	1,16	1,65	1,08	1,76	1,01	1,86
28	1,33	1,48	1,26	1,56	1,18	1,65	1,10	1,75	1,03	1,85
29	1,34	1,48	1,27	1,56	1,20	1,65	1,12	1,74	1,05	1,84
30	1,35	1,49	1,28	1,57	1,21	1,65	1,14	1,74	1,07	1,83
31	1,36	1,50	1,30	1,57	1,23	1,65	1,16	1,74	1,09	1,83
32	1,37	1,50	1,31	1,57	1,24	1,65	1,18	1,73	1,11	1,82
33	1,38	1,51	1,32	1,58	1,26	1,65	1,19	1,73	1,13	1,81
34	1,39	1,51	1,33	1,58	1,27	1,65	1,21	1,73	1,15	1,81
35	1,40	1,52	1,34	1,58	1,28	1,65	1,22	1,73	1,16	1,80
36	1,41	1,52	1,35	1,59	1,29	1,65	1,24	1,73	1,18	1,80
37	1,42	1,53	1,36	1,59	1,31	1,66	1,25	1,72	1,19	1,80
38	1,43	1,54	1,37	1,59	1,32	1,66	1,26	1,72	1,21	1,79
39	1,43	1,54	1,38	1,60	1,33	1,66	1,27	1,72	1,22	1,79
40	1,44	1,54	1,39	1,60	1,34	1,66	1,29	1,72	1,23	1,79
45	1,48	1,57	1,43	1,62	1,38	1,67	1,34	1,72	1,29	1,78
50	1,50	1,59	1,46	1,63	1,42	1,67	1,38	1,72	1,34	1,77
55	1,53	1,60	1,49	1,64	1,45	1,68	1,41	1,72	1,38	1,77
60	1,55	1,62	1,51	1,65	1,48	1,69	1,44	1,73	1,41	1,77
65	1,57	1,63	1,54	1,66	1,50	1,70	1,47	1,73	1,44	1,77
70	1,58	1,64	1,55	1,67	1,52	1,70	1,49	1,74	1,46	1,77
75	1,60	1,65	1,57	1,68	1,54	1,71	1,51	1,74	1,74	1,77
80	1,61	1,66	1,59	1,69	1,56	1,72	1,53	1,74	1,51	1,77
85	1,62	1,67	1,60	1,70	1,57	1,72	1,55	1,75	1,52	1,77
90	1,63	1,68	1,61	1,70	1,59	1,73	1,57	1,75	1,54	1,78
95	1,64	1,69	1,62	1,71	1,60	1,73	1,58	1,75	1,56	1,78
100	1,65	1,69	1,63	1,72	1,61	1,74	1,59	1,76	1,57	1,78

n: هي عدد المشاهدات

k : عدد المتغيرات المستقلة في النموذج (باستثناء الثابت)

المراجع

المراجع

1- المراجع باللغة العربية

- مجيد حسين، عفاف سعيد، الاقتصاد القياسي النظرية والتطبيق، دار وائل للنشر، عمان، الأردن 1998،ط1،

- المرسى السيد الحجازي، عبد القادر محمد عطية" مقدمة في الاقتصاد القياسي:المبادئ والتطبيقات، الرياض، النشر العلمي والمطابع، 2001 .ص 112.

- أموري هادي كاظم الحسناوي، طرق القياس الاقتصادي (عمان ، دار وائل للنشر، 2002)،

- شيخي محمد، طرق الاقتصاد القياسي، محارات وتطبيقات،الجزائر، دار الحامد، الطبعة الاولى 2011،

- صالح تومي، مدخل لنظرية القياس الاقتصادي (الجزء الأول)، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر،1999

- طارق محمد الرشيد، المرشد فى لاقتصاد القياسى التطبيقى ،الخرطوم ، جى تاون ،الطبعة الاولى، 2005.

- عبد الحميد عبد المجيد البلداوي،الإحصاء للعلوم الإدارية والتطبيقية، (عمان: دار الشروق للنشر والتوزيع، 1997)،

- عبد القادر محمد عبد القادر عطية، "الاقتصاد القياسي بين النظرية والتطبيق"، ط(2)، الإسكندرية: الدار الجامعية، 2000،

- عبد القادر محمد عبد القادر،" طرق قياس العلاقات الاقتصادية مع تطبيقات على الحاسوب الالكتروني ،الإسكندرية :دار الجامعات .المصرية،1990

- عصام عزيز شريف، مقدمة في القياس الاقتصادي،ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 1981.

- عزالدين مالك الطيب محمد ، المدخل الى القتصاد القياسى ، الجزء الاول ،نموذج المعادلة الواحدة ومشاكل القياس ،مطبعة جي تاون الخرطوم 2008. حسين، عفاف سعيد، مرجع سابق، ص 32.

- مولود حشمان، نماذج وتقنيات التنبؤ على المدى القصير OPU ،الجزائر؛ 2002

- هاري كلجيان، والاس اوتس، ترجمة: المرسي السيد حجارزي، محمد عبد القادر عطية ،مقدمة في الاقتصاد القياسي: المبادئ والتطبيقات،النشر العلمي والمطابع، المملكة العربية السعودية،2001 .

- وليد اسماعيل السيفو، فيصل مفتاح شلوف، صائب جواد ابراهيم، اساسيات الاقتصاد التحليلي،دار الاهلية للنشر والتوزيع، الاردن، 2006.

2- المراجع باللغات الاجنبية

A.Koutsyannis,The Theory Of Economitrics, Second Edition 1977,The Macmillan Press Ltd, London

BERNARD PAULRE, "La Causalité en économie, signification et portée de

la modélisation structurelle" (Lyon : Presse universitaire, 1985
Bourbonnais R, Econométrie, 9emeEdition, Dunod, Paris, 2015.

Bourbonnais R., Econométrie , 3 éme édition, Dunod, Paris, 2003

Engle, Robert F.and C.W.J Ganger , "Co integration and Error Correction:Representation Estimation and Testing " Econometrica ,1987.

Nelson C.and Pollser, Trends and Random Walkes in Macroeconomic Time Series:Some Evidens and Implication , Journal of money economics, 1989,vol,10.
P.A.Samualson .T.C.Copmans, « Report Of Evaluative Commitee For Econometrica , Econometric »,Vol 02, N 02,1954,

Stock,J.H and M.W.Watson, Interpreting the eviden Money Income Causality, Jorunal of .econometrics,1989,vol,40