REPUPLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMNT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE BOUIRA

FACULTE DES SCIENCES ET DES SCIENCES APPLIQUEES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MEMOIRE POUR L'OBTENTION DU DIPLOME

DE MASTER EN MATHEMATIQUES

OPTION

Recherche opérationnelle

THEME

Existence des solutions presque périodiques des équations différentielles stochastiques

Présenté par : Difel Ibtissam   Guellil Rebiha

Soutiendra le: 06/07/2021

Devant le jury:

Mr BOUGHANI L'Hadi	Président	MAA	UAMO Bouira
Mr BEDDEK Said	Examinateur	MAA	UAMO Bouira
Mme RAFAA Souad	Examinatrice	MAA	UAMO Bouira
Mr BOUDREF Mohamed Ahmed	Promoteur	MCA	UAMO Bouira

Année universitaire: 2020/2021

Table des matières

Liste des Notations

EDO : Les Èquations Différentielles Ordinaires
EDS : Les Èquations Différentielles Stochastiques
V : Variance
cov : covariance
P : Probabilité
E : Espérance
APD : Almost Periodic Distribution
APFD : Almost Periodic Finite dimentional Distribution

Remerciements

Nos remerciements avant tout ***"Allah"*** notre créateur, de nous avoir donné la force, la volonté et le courage afin d'accomplir ce modeste travail.

Nous adressons un remerciement particulier à notre promoteur **Boudref Mohamed Ahmed** pour son soutien et la confiance qu'il nous a accordé en proposant ce sujet de diriger ce travail ainsi que pour ses conseils avec beaucoup de patience et d'encouragements.

Nous exprimons nos remerciements à nos enseignants, membres du jury. qui ont accepté d'évaluer ce travail.

Nous remercions tous nos enseignants de département des mathématiques, ainsi que tous ceux qui nous ont donnés des conseils pour la rédaction de ce mémoire.

Enfin, nous n'oublions pas de remercier ceux qui m'ont aidé d'une manière ou d'une autre à élaborer ce travail.

Merci à Tous

Dédicaces

Je dédie ce travail

A ma mère,pour son amour, ses encouragements et ses sacrifiees

A mon père, pour son soutien, son affection

et la confiance qu'il m'a accordé

A mes chères grand-mère et grand-père

A mes soeur wahiba chaima khouloud et mon frère badrou

A mes ancles hocine khaled mourad

A ma sœur et ma collègue de travail Difel Ibtissam

A tous mes amis

Et touts ceux qui m'aiment...

G.Rebiha

Dédicaces

A chaque fois qu'on achève une étape importante dans notre vie, on fait une pose pour regarder en arrière et se rappeler toutes ces personnes qui ont partagé avec nous tout les bons moments de notre existence. Ces personnes qui nous ont aidés, soutenus sans réserve, aimé sans compter, ces personnes à qui notre bonheur devient directement le leur. Je dédie ce modeste travail en signe de respect et de reconnaissance à :

A MES CHERS PARENTS
Aucun mot, aucune dédicace ne pourrait exprimer mon respect, ma considération, et mon amour pour les sacrifices qu'ils ont consentis pour mon instruction et mon bien-être. Puisse Dieu, vous accorde santé, bonheur et longue vie et faire en sorte que jamais je ne vous déçoive.

A MES CHERS ET ADORABLE FRÈRES ET SŒURS
En témoignage de mon affection fraternelle, de ma profonde tendresse et reconnaissance, je vous souhaite une vie pleine de bonheur et de succès et que Dieu, le tout puissant, vous protége et vous garde.

Ma sœur et ma collègue de travail GUELLIL REBIHA.

A tous mes amis que j'aime tant.
A mes collègues de promotion .
Veuillez trouver dans ce travail l'expression de mon respect le plus profond et mon affection la plus sincère.

D.Ibtissam

Abstract

This work is dedicated to the study of nonlinear stochastic differential equations. In this work it was interested in the problem of existence and uniqueness of periodic and almost periodic solutions of a class of nonlinear stochastic differential equations with periodic coefficients. The main results in this work is to show that the existence of a bounded solution implies the existence of periodic solution (respectively almost periodic), this is a generalization of the Massera theorem.

One of the results of this work shows that under some conditions the existence of a mean square bounded solutions implies the existence of a L_2-almost-periodic solution for nonlinear stochastic differential equations with periodic coefficients. The idea of this work is to use the H. Doss theorem concerning the relation between SDE and ODEs

Key-Words

Nonlinear stochastic differential equations, Massera theorem, Periodic and almost periodic solutions in mean-square

Résumé

Ce travail de mémoire est dédié à l'étude des équations différentielles stochastiques non linéaires. Dans ce travail on s'est intéressé au problème d'existence et d'unicité de solutions périodiques ou presque périodiques d'une classe d'équations différentielles stochastiques non linéaires à coefficients dépendant périodiquement du temps. L'essentiel des résultats dans ce travail est de montrer que l'existence d'une solution bornée implique l'existence de solutions périodiques (respectivement : presque périodiques), il s'agit d'une généralisation du théorème de Massera sur l'existence de solutions périodiques dans le cas des équations différentielles ordinaires.
L'un des résultats de ce mémoire, montre sous certaines conditions que l'existence d'une solution bornée en moyenne quadratique implique l'existence d'une solution L_2-presque périodique pour les équations différentielles stochastiques non linéaires à coefficients périodiques. L'idée de ce travail est d'utiliser le principe de H. Doss concernant le lien entre les EDS et les EDO.

Introduction générale

Les équations différentielles servent à décrire des phénomènes physiques très variés. Cependant, dans de nombreuses situations les phénomènes observés ne suivent que grossièrement les trajectoires des équations qui semblent devoir leur correspondre. Les causes possibles d'un tel comportement peuvent être variées : erreur de modélisation, fluctuation au cours du temps des paramètres de l'équation, présence de bruit d'observation, ... Dans ces situations, les approches probabilistes trouvent naturellement leur place et il peut alors être intéressant d'incorporer des termes aléatoires dans les équations différentielles afin de prendre en compte les incertitudes précédentes. Toute fois, l'introduction de ces termes aléatoires conduit à une intégration des équations qui ne correspondent pas, en général, à une adaptation immédiate de la théorie classique des équations différentielles.

Les équations que l'on rencontre en physique, sont des équations différentielles qui, soit comportent un bruit, soit ont des coefficients qui sont eux mêmes des processus aléatoires. Dans le cas où le bruit est un bruit blanc, on peut modéliser l'équation par un mouvement brownien, et la traiter comme une équation d'Itô. Dans le cas où le processus est markovien, on a ce qu'on appelle une diffusion.

A chaque équation d'Itô est associée une équation de Foker-Planck qui décrit lévolution dynamique de la densité du processus considéré.

Le concept d'une équation différentielle stochastique généralise celui de l'équation différentielle ordinaire aux processus aléatoires. La formalisation théorique de cette équation, à elle seule a posée problème aux mathématiciens et il a fallu attendre les années 1940 et les travaux du mathématicien japonais Itô Kiyoshi pour la définition de l'intégrale stochastique. Il s'agit d'étendre la notion de l'intégrale de Lebesgue aux processus stochastiques selon un mouvement brownien et à partir de la théorie de l'intégrale stochastique on construit la théorie des équations différentielles stochastiques.

Les équations différentielles stochastiques jouent un rôle important dans les applications mathématiques, principalement, dans la modélisation des phénomènes réels physiques, biologiques,...dont l'aspect aléatoire est un élément essentiel dirigeant. Autant de livres, d'articles et de monographies ont étudié cette option de mathématiques, i.e. la théorie des équations différentielles stochastiques connues (abréviation EDS), en faisant le lien avec les connaissances et notions connues sur les équations différentielles ordinaires qui ont été développés depuis plusieurs années.

Les équations différentielles stochastiques servent de modèles mathématique à des systémes faisant intervenir deux types de forces, l'une déterministe et l'autre aléatoire ou stochastique.

La question d'existence de solutions périodiques ou presque périodiques pour les EDO fût une importante direction de recherche développée depuis plusieurs années. Citons par exemple les travaux de **N. Rouche et J. Mawhin** , **G.R. Sell** , **T. Yoshizawa** et les fameux résultats de **J. L. Massera**, ce dernier démontra que pour une EDO

$$dx = f(t,x)dt$$

où $f(t+T,x) = f(t,x)$, $\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, l'existence d'une solution bornée au future implique l'existence d'une solution T-périodique. Ce résultat a fait une révolution en mathématiques, d'autant plus qu'il a précisé dans un autre résultat similaire le lien existant entre la solution bornée et celle périodique, en confirmant que sous les conditions précédentes, toute solution bornée au future est asymptotiquement T-périodique. Massera montra que ces deux résultats ne sont plus valables aux cas des dimensions supérieures ou égales à deux, aussi ce théorème de Massera est en défaut dans le cas où la fonction $f(t,x)$ est presque périodique en t .Le résultat de Massera fût l'objet de plusieurs travaux de recherches généralisant ce résultat aux différentes formes d'équations différentielles. On trouve autant d'articles généralisant le théorème de Massera aux différentes formes d'équations différentielles étudiant le cas d'é'équations périodiques et presque périodiques citons á titre d'exemlpe l'article [22].

D'une part, on distingue plusieurs travaux étudiant l'existence de solutions périodiques ou presque périodiques pour des équations différentielles stochastiques en dimensions finie et infinie, entre autre :

T. Morozan étudiant l'existence de solutions presque périodiques pour les EDS affines.

C. Vârsan donnant quelques résultats relatifs à l'existence de solutions presque-périodiques.

A. Dorogovtsev avec son fameux article sur l'existence de solutions périodiques pour les EDS

Sans oublier les travaux de **G. Da Prato** sur le sujet en question dans des espaces de dimensions infinies.
On pourra consulter le livre de Has'minskii exposant en détail le problème d'existence de solutions périodiques pour des équations différentielles dont le second membre est perturbé par un processus aléatoire.
Cette thèse présentera une contribution à l'étude des EDS non linéaires, le but essentiel sera d'étudier la question d'existence de solutions périodiques ou presque périodiques des équations différentielles stochastiques sur la base de l'existence de solutions bornées, c'est une généralisation du théorème de Massera pour ce type d'équations.
Le présent mémoire est organisé comme suit :

- le chapitre premier, a pour objectif donner le Calcul stochastique et équations différentielles stochastiques
- le second chapitre, est réservé aux Notions sur les concepts de périodicité et presque périodicité
- le chapitre trois, traite le problème d'existence de solutions presque-périodiques pour une classe d'équations différentielles stochastiques non linéaires à coefficients périodiques.

Nous terminons par une conclusion et perspectives.

Chapitre 1

Calcul stochastique et équations différentielles stochastiques

Le calcul différentiel donne un cadre à la notion d'équations différentielles ordinaires, qui sert de modèle pour des phénomènes variables dans le temps. Quand on a voulu ajouter à ces équations des perturbations aléatoires, on a été gêné par la non différentiabilité du mouvement brownien. Nous avons commencé par construire une intégrale par rapport au mouvement brownien, pour qu'en suite définir la notion d'équation différentielle stochastique. Et il a fallu donner un sens à l'intégrale

$$\int_0^t H_s dB_s$$

Dans ce chapitre on se propose de rappeler certaines notions de base de l'analyse stochastique qui seront utilisées dans toute la suite de cette mémoire. Nous commençons par introduire les notions de mouvement brownien, d'intégrale d'Itô, puis les équations différentielles stochastiques.

1.1 Notions sur les processus aléatoires

Dans cette section, nous allons donner les définitions relatives aux processus aléatoires.

Définition 1.1.1. En règle générale, il s'agit d'un processus aléatoire lorsqu'une certaine grandeur aléatoire $x(t)$ varie dans le temps t. On appellera donc processus aléatoire $x = x(t)$ toute fonction du paramètre réel $t \in T$ dont les valeurs $x(t)$ pour chaque t sont des variables aléatoires. Les lois que suit un processus aléatoire $x(t)$, $t \in T$ (lorsque T est un ensemble dénombrable le processus est dit à temps discret), se déterminent par les distributions simultanées des probabilités de ses valeurs $x(t_1), x(t_2), ..., x(t_n)$ pour différents $t_{1,}t_2, ...t_n$ (elles sont appelées distributions finidimensionnelles du processus aléatoire envisagé). Un processus aléatoire est caractérisé par deux paramètres, le temps t et l'événement aléatoire ω, on le note dans ce cas $x(t, \omega), t \in T \subset \mathbb{R}, \omega \in \Omega$. Si on fixe $\omega = \omega_0$, on obtient $x(t, \omega_0)$ une trajectoire parcourue suivant les valeurs de $t \in T$, on peut l'appeler aussi réalisation. Maintenant, si on fixe d'autre part, le temps t, on obtient une variable aléatoire.

Chaque variable $x(t)$ du processus aléatoire, en tant que variable aléatoire, dépend formellement de l'issue élémentaire ω : $x(t) = x(t, \omega)$. Considérons le processus aléatoire $x(t), t \in T$, nous avons affaire pour chacune des issues aléatoires ω à une fonction correspondante $x(\omega, .) = x(\omega, t)$ du paramètre $t \in T$, appelée *trajectoire* ou *réalisation* du processus aléatoire étudié. Observer réellement un processus aléatoire c'est observer en fait l'une de ses trajectoires éventuelles $x = x(t), t \in T$.

On peut imaginer un certain ensemble X de toutes les trajectoires possibles $x = x(t), t \in T$, et un certain "mécanisme du hasard" susceptible de choisir l'une de ces fonctions $x \in X$. Le choix aléatoire de telle ou telle trajectoire $x = x(t)$, $t \in T$, de X peut être considéré comme une issue élémentaire.

Les notions de continuité, mesurabilité et autres ne s'appliquent pas directement aux processus aléatoires au sens large. En principe il est possible de leur trouver des notions équivalentes en termes de répartitions finidimensionnelles du processus aléatoire.

1.1.1 Continuité stochastique

Définition 1.1.2. On dit qu'un processus aléatoire $X(t)$ défini sur un intervalle T est stochastiquement continu en un point $t_0 \in T$ si pour tout $\varepsilon > 0$

$$\lim_{t \to t_0} P\{|X(t) - X(t_0)| > \varepsilon\} = 0$$

Si un processus est stochastiquement continu en chaque point d'un intervalle T, on dit qu'il est stochastiquement continu sur l'intervalle T.(Cette définition est valable pour les processus aléatoires numériques et vectoriels, dans le dernier cas, le symbole $|.|$ désignera la norme du vecteur).

Il est clair que la continuité stochastique d'un processus aléatoire sur l'ensemble T n'implique pas nécessairement la continuité de ses réalisations sur cet ensemble.

1.1.2 Continuité stochastique uniforme

Définition 1.1.3. Un processus aléatoire $X(t)$ est uniformément stochastiquement continu, pour $t \in T$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : P\{\omega : |X(t) - X(s)| > \varepsilon\} < \varepsilon$$

dès que

$$0 < |t - s| < \delta.$$

1.1.3 Continuité en moyenne L_p

Définition 1.1.4. Un processus aléatoire $X(t)$ est dit continu en moyenne L_p si

$$\lim_{s\to t} E\,|X(s) - X(t)|^p = 0.$$

Si $p = 1, 2$, on dit qu'on a une continuité en moyenne et en moyenne quadratique (respectivement).

Proposition 1.1.1. *Si un processus aléatoire $X(t)$ est stochastiquement continu sur T (fermé borné), il est borné stochastiquement.*

Définition 1.1.5. On dit que le processus aléatoire $X(t) : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ est borné en moyenne $L_p(p \geq 1)$ s'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\sup_{t\geq 0} E|X(t)|^p \leq M$$

1.2 Processus wienerien. Mouvement brownien

Si un mathématicien regarde de loin l'histoire du mouvement brownien au cours de ce siècle, il y verra sans doute deux périodes : entre 1900 et 1950, une évolution lente et linéaire, repérable par les pères fondateurs que furent Albert Einstein, Norbert Wiener, Paul Lévy, et depuis 1950, une efflorescence difficile à maîtriser, avec la poursuite des propriétés fines qui font du mouvement brownien l'un des prototypes de la fractalité, le mouvement brownien sur les variétés, le mouvement brownien à plusieurs paramètres, le mouvement brownien à la source ou au carrefour des études sur les processus gaussiens, les processus à accroissements indépendants, les processus de Markov avec leur lien avec la théorie du potentiel, les martingales, les équations différentielles stochastiques, les intégrales de chemins, les superprocessus qui décrivent des particules qui se scindent au cours du temps, etc. La littérature sur le mouvement brownien est facile à inventorier et même à lire dans la première période, et difficile à maîtriser dans la seconde ; Daniel Revuz et Marc Yor, dans leur livre *Continuous martingales and Brownian motion* [47] font état d'une littérature énorme, dont la bibliographie qu'ils donnent, avec 500 titres, ne fournit qu'une faible idée. Il y a heureusement, sur différents aspects, beaucoup de livres qui permettent d'accéder à cette forêt.

La théorie mathématique du mouvement brownien, mise en place par *Norbert Wiene*r, est à la fois si simple au départ, si belle et si riche qu'elle a conquis une large audience chez les mathématiciens et aussi chez les physiciens. Mais il faut préciser dès maintenant que ce n'est qu'une des idéalisations mathématiques du mouvement réel de particules en suspension dans un liquide, tel qu'il fut observé et décrit par le botaniste anglais *Richard Brown* en 1828, et, à sa suite, par plusieurs physiciens expérimentateurs au XIX^e siècle. Ce n'est même pas la meilleure idéalisation pour l'application de la théorie d'*Einstein* à la détermination du nombre d'*Avogadro. Wiener*, d'ailleurs, fut toujours prudent à cet égard.

Le botaniste *Robert Brown* qui donna son nom au mouvement brownien en observant en 1827 les mouvements erratiques de particules de pollen en suspension dans un liquide. Des années plus tard en 1905, *Albert Einstein a* mis en évidence les étranges relations que le processus entretenait avec l'équation de la chaleur. Vers 1909, *Jean Perrin,* entreprit son étude expérimentale et *Paul Langevin* posa la première équation. Mais il faudra attendre 1925 et les travaux de *Nobert Wiener* pour que le mouvement brownien ait véritablement un sens comme un modèle mathématique d'un bruit blanc. A partir des années 1950, *Kiyoschi Itô* l'utilisa pour définir l'intégrale qui porte son nom et jeta les bases du calcul stochastique.

On sait que si l'on observe dans un puissant microscope une particule plongée dans un liquide, on constate qu'elle est animée d'un mouvement chaotique et qu'elle se déplace suivant une ligne polygonale de forme très compliquée par suite de chocs avec les molécules du liquide. Comme la particule est relativement plus grosse que les molécules, elle subit un nombre considérable de chocs en une seconde à telle enseigne qu'il est impossible d'en suivre la trajectoire. Le mouvement apparent de la particule est dit mouvement brownien. En première approximation on peut admettre que les déplacements de la particule sont indépendants et considérer le mouvement brownien comme processus à accroissements indépendants. Comme les déplacements sont petits, on peut admettre que leur somme obéit au théorème limite central de la théorie des probabilités et que le mouvement brownien est un processus gaussien.

Le mouvement brownien est caractérisé de la façon suivante (environs année 1900) :

1. Le mouvement brownien est très irrégulier composé de la translation et de la rotation, la trajectoire ne semble pas avoir de tangentes.
2. Deux trajectoires semblent bouger de façon indépendante même si elles sont très proches.
3. Le mouvement brownien est d'autant plus actif que les particules sont petites.
4. Les compositions de la densité des particules n'ont pas d'influence.
5. Le mouvement brownien est plus actif en température haute.
6. Le mouvement brownien est sans fin.

En 1905, *Bachelier*, en vue d'étudier les cours de la Bourse met en évidence le caractère 'markovien' du mouvement brownien : la position d'une particule à l'instant $t + s$ dépend de sa position en t, et ne dépend pas de sa position avant t. Il convient d'insister sur le caractère précurseur de Bachelier et le fait que la théorie du mouvement brownien a été développée pour la Bourse, avant de l'être pour la Physique.

En 1905, *Einstein* détermine la densité de transition du mouvement brownien par l'intermédiaire de l'équation de la chaleur et relie ainsi le mouvement brownien et les équations aux dérivées partielles de type parabolique. La même année,

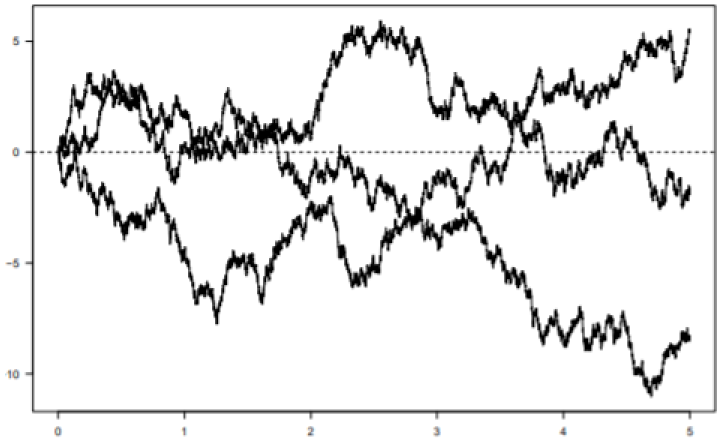

FIGURE 1.1 – Mouvement Brownien

Smoluchowski décrit le mouvement brownien comme une limite de promenades aléatoires [24, page 23].

Définition 1.2.1. Soit $B(t)$, $t \geq 0$, une famille de variables aléatoires, on dit que cette famille forme un mouvement brownien standard si

1-$\forall t \geq 0 : B_t \hookrightarrow N(0,t)$.

2-si $1 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n$ *les variables* $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, ...B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ *sont indépendantes.*

3-$P(B_0 = 0) = 1$.

Remarque 1.2.1. Remarquons que

$$Cov(B_t, B_s) = \min(t, s).$$

Proposition 1.2.1. *La fonction* $t \mapsto B(t)$ *n'est différentiable en aucun point.*

Remarque 1.2.2. Il faut comprendre les conséquences de la définition du mouvement brownien, dire que $B(t) - B(s)$ suit une loi normale $N(0, t-s)$, entraîne que $\delta B = B(t+\delta t) - B(t)$ *est d'ordre* $\sqrt{\delta t}$ (son écart type). En fait, δB est compris entre $-3\sqrt{\delta t}$ et $3\sqrt{\delta t}$ avec une forte probabilité. On voit que $B(t)$ comme étant une fonction höldérienne d'ordre $\frac{1}{2}$, ceci implique que les trajectoires du mouvement brownien sont continues mais nulles part différentiables ($\frac{\delta B}{\delta t}$ ne converge pas). En particulier, sur tout intervalle, la fonction $B(t)$ n'est ni monotone ni à variation bornée.

Définition 1.2.2. Soit (Ω, F, P) un espace de probabilité filtr´e et $X = \{X_t, t \geq 0\}$ unprocessus (F_t)-adapté. On dit que X est une (F_t)-martingale si

— $E[|X_t|] < +\infty$, *autrement dit* $X_t \in L^1(\Omega)$) *pour tout* $t \geq 0$ *de Markov.*
— $E[X_t|F_s] = X_s$ *pour tout* $s \leq t$.

Théorème 1.2.2. *Soit donné un mouvement brownien* $B(t), t \geq 0$, *alors*

1. $\{B_t,\ t \geq 0\}$, *est une martingale, et est un processus de Markov.*
2. $\{B^2(t) - t,\ t \geq 0\}$ *est une martingale.*
3. $\left\{e^{\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}t},\ t \geq 0\right\}$, *où* σ *est une constante, est une martingal*e.

Proposition 1.2.3. *Un processus* $(B(t))_{t\geq 0}$ *est un mouvement brownien, si et seulement si, il est un processus gaussien, continu, centré et de fonction de covariance* $\Gamma(s,t) = \inf(s,t)$.

1.2.1 Comportement des trajectoires d'un mouvement brownien

Proposition 1.2.4. *Soit* $(B_t)_{t\geq 0}$ *un mouvement brownien sur* $\mathbb{R}_+$, *les propriétés suivantes sont vraies*

1. $\forall \varepsilon > 0$ *on a presque-sûrement*

$$\sup_{t\in[0,\varepsilon]} B_t > 0, \inf_{t\in[0,\varepsilon]} B_t < 0.$$

2. $\forall \varepsilon > 0$, *le mouvement brownien a un zéro presque-sûrement sur l'intervalle* $(0, \varepsilon)$.
3. *Notons* T_x le premier temps de passage en $x \in \mathbb{R}_*$ *i.e.*

$$T_x = \{t \geq 0, B_t = x\}$$

avec $inf \emptyset = \infty$, *alors on a pour tout* $x \in \mathbb{R}_*$

$$P(T_x < \infty) = 1.$$

4. *On a presque-sûrement*

$$\lim_{t\to\infty} \sup B_t = +\infty$$

et

$$\lim_{t\to\infty} \inf B_t = -\infty.$$

5. *On a presque-sûrement*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{B_t}{t} = 0.$$

1.2.2 Continuité au sens de *Hölder*

Définition 1.2.3. Une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est dite *continue au sens de Hölder d'exposant* $\alpha \in (0,1]$ (ou encore $\alpha-$*höldérienne) s'il existe une constante* $c > 0$ telle que

$$|f(s) - f(t)| \leq c|s-t|^{\alpha}, 0 < s < t < \infty.$$

Théorème 1.2.5. *Pour tout* $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ *les trajectoires du mouvement brownien sont presque-sûrement* $\alpha-$*höldériennes.*

Remarque 1.2.3. Pour plus de propriétés sur le mouvement brownien, on pourra consulter les livres suivants [19, 18, 27, 28, 30, 32, 38, 44, 47, 48, 49, 50, 18].

1.3 Intégrale stochastique

Le but essentiel de cette section est d'introduire la notion d'intégrale des processus stochastiques par rapport au mouvement brownien . En se référant à un cours sur le calcul stochastique appliqué à la finance, on peut justifier ainsi l'intégrale stochastique : étudions un instant un modèle où le prix d'une action serait donné par une martingale M_t à l'instant t. Si l'on possède $X(t)$ de ces actions au même instant et que l'on effectue des transactions aux instants t_k, la richesse se sera finalement accrue de

$$\sum_k X(t_{k-1})(M_{t_k} - M_{t_{k-1}}).$$

Mais si l'on veut effectuer des transactions en temps continu, à tout instant t, il faut pouvoir définir un outil mathématique permettant de passer à la limite dans l'expression ci-dessus avec le problème que, en particulier si $M = W$, la dérivée $\frac{dW}{dt}$ n'existe pas ! ! cette expression est une somme qui a vocation à converger vers une intégrale de Stieltjes, mais comme la variation $V(W)$ est infinie, cela ne saurait converger dans un sens "déterministe" : l'intégrale stochastique "naïve" est impossible [25, page 40].

Il faut donc trouver d'autres outils. L'idée d'Itô a été de restreindre les intégrands aux processus qui ne peuvent pas "voir" les accroissements du futur, c'est à dire les processus adaptés, en sorte que, du moins pour le brownien, $X(t_{k-1})$ et $(W_{t_k} - W_{t_{k-1}})$ soient indépendants ; ainsi, par trajectoire on ne peut rien faire, mais l'on travaille en probabilité, en espérance.

Le concept des équations différentielles stochastiques généralise celui des équations différentielles ordinaires aux processus aléatoires. La formalisation théorique de ces équations est dû à *Itô Kiyoshi*, pour la définition de l'intégrale stochastique. Il s'agit d'étendre la notion d'intégrale de Lebesgue aux processus stochastiques selon un mouvement brownien, (ou plus général selon un processus aléatoire quelconque).

A partir de la théorie des EDO on peut construire des équations différentielles, de la forme

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + b(t, X(t))dW(t) \tag{1.1}$$

Pour donner un sens à cette équation mettons-la sous forme intégrale

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s, X(s))ds + \int_0^t b(s, X(s))dW(s) \tag{1.2}$$

Le problème est de donner un sens à la deuxième intégrale du second membre de cette équation. Les intégrales de ce type, appelées intégrales stochastiques ou d'Itô, on remarque que le processus wienérien est presque sûrement à variation indéfinie sur tout intervalle, donc cette intégrale ne peut pas s'exprimer à l'aide de l'intégrale de Stieltjes.

Définissons l'intégrale stochastique

$$\int_0^t f(u)dW(u)$$

dans le cas où $W(t)$ est un processus wienérien de dimension un. Soient donnés sur un espace probabilisé (Ω, F, P), une filtration $\{F_t, t \in [0, \infty)\}$ et un mouvement brownien $W(t)$, $t \in [0, \infty)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, tel que $W(0) = 0$, $W(t)$ est F_t-mesurable pour $t \in [0, \infty)$ et les accroissements $W(t+s) - W(t)$ ne dépendent pas de la filtration F_s pour $s > 0$.

Appelons $H_2([0, \infty))$ l'espace des fonctions aléatoires $f(t) = f(t, \omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, définies sur $[0, \infty)$ et telles que la variable aléatoire $f(t)$ est F_t-mesurable pour tout $t \in [0, \infty)$ et l'intégrale

$$\int_0^t f^2(u)du$$

est presque sûrement finie.

Théorème 1.3.1. *[27, pages : 442-449] A tout processus $\{f(t), t \in [0, \infty)\}$ de l'espace $H_2([0, \infty))$ on peut associer une variable aléatoire $I(f)$ définie sur l'espace (Ω, F, P) et jouissant des propriétés suivantes :*

1. *Si $f_1, f_2 \in H_2([0, \infty))$ et α_1, α_2 sont des constantes arbitraires, alors*

$$I(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 I(f_1) + \alpha_2 I(f_2)$$

(distributivité et homogénéité)

2. *Si $\chi_{[t_1,t_2]}(t)$ est l'indicateur de l'intervalle $[t_1, t_2]$, alors*

$$I(\chi_{[t_1,t_2]}(t)) = W(t_1) - W(t_2).$$

3. *Si* $f \in H_2([0,\infty))$ *et* $E\left(\int_0^t f^2(u)du\right) < \infty$, *alors*

$$E(I(f)) = 0, \qquad E(I(f))^2 = E\int_0^t f^2(u)du$$

4. *Pour tout* $f \in H_2([0,\infty))$ *et toutes constantes* $C > 0$, *et* $N > 0$, *on a*

$$P\{|I(f)| > C\} \leq P\left\{\int_0^t f^2(u)du > N\right\} + \frac{N}{C^2}$$

Définition 1.3.1. La variable aléatoire $I(f)$ s'appelle intégrale stochastique de la fonction $f(t)$ par rapport à un processus de Wiener et se note

$$I(f) = \int_0^t f(u)dW(u) \tag{1.3}$$

1.4 Estimation des moments

Pour estimer les moments des intégrales stochastiques, on aura besoin du théorème suivant.

Théorème 1.4.1. *Si* $f \in H_2([0,\infty))$ *et pour un* $p > 0$

$$E\left(\int_0^t |f(u)|^2 du\right)^{\frac{p}{2}} < \infty$$

alors

$$E\left|\int_0^t f(u)dW(u)\right|^p \geq A_p\left(\int_0^t |f(u)|^2 du\right)^{\frac{p}{2}}$$

pour $p > 1$, *et*

$$E\left|\int_0^t f(u)dW(u)\right|^p \leq B_p\left(\int_0^t |f(u)|^2 du\right)^{\frac{p}{2}}$$

pour $p > 0$, A_p *et* B_p *étant des constantes ne dépendant que de p. Pour* $p = 2$, *il est claire que les deux inégalités deviennent égalités, et de plus* $A_p = B_p = 1$.

Signalons une égalité pour les intégrales stochastiques qui découle directement de la définition : si $f_1, f_2 \in H_2([0,\infty))$ et

$$E\left(\int_0^t f_1^2(u)du\right) < \infty,$$
$$E\left(\int_0^t f_2^2(u)du\right) < \infty$$

alors

$$E\left(\int_0^t f_1(u)dW(u)\int_0^t f_2(u)dW(u)\right) = E\left(\int_0^t f_1(u)f_2(u)du\right).$$

Définition 1.4.1 (Formule d'Isométrie)**.** Nous avons la formule d'isométrie pour $t \in [0,\infty)$

$$E\left(\int_0^t f(s)dW_s\right)^2 = \int_0^t E[f(s)]^2 ds$$

Remarque 1.4.1. On peut généraliser cette formule, pour $t, s \in [0,\infty)$ et pour $f_1(t), f_2(t) \in H_2([0,\infty))$ on a

$$E\left(\int_0^t f_1(r)dW(r)\int_0^s f_2(r)dW(r)\right) = E\left(\int_0^{t\wedge s} f_1(r)f_2(r)dr\right),$$

où $t \wedge s = \min(t,s)$.

Remarque 1.4.2. Pour le cas multidimensionnel de la formule d'Isométrie, on considère l'intégrale

$$\int_0^t A(u)dW(u) \tag{1.4}$$

où $A(t)$ est une fonction matricielle $A(t) = \|a_{ij}(t)\|_{i=1,\dots,n}^{j=1,\dots,m}$, $a_{ij}(t) \in H_2([0,\infty))$. L'intégrale (1.4) est une fonction vectorielle à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ dont les composantes sont

$$\left(\int_0^t A(u)dW(u)\right)_i = \sum_{j=1}^m \int_0^t a_{ij}(u)dW_i(u), i = 1, ..., n$$

La formule d'Isométrie sera

$$E\left(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m \int_0^t a_{ij}(u)dW_j(u)\sum_{k=1}^m\int_0^t b_{ik}(u)dW_k(u)\right)$$
$$= E\left(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m \int_0^t a_{ij}(u)b_{ij}(u)du\right)$$

D'une façon matricielle on a

$$E\left(\int_0^t A(u)dW_u \int_0^t B(u)dW_u\right) = E\left(\int_0^t A(u)B(u)du\right)$$

à condition que le produit matriciel $A(u)B(u)$ soit possible et justifié.

Remarque 1.4.3 (Historique)**.** La définition de l'intégrale stochastique remonte à Itô [31] (1942 – 1944) qui a introduit l'intégrale stochastique avec un intégrand aléatoire. Doob [18] (1953) a réalisé la relation entre l'intégrale d'Itô et la théorie des martingales. L'intégrale d'Itô représente maintenant le cadre des manuels avancés sur la théorie des probabilités et processus aléatoires. Les références types sont : Ikeda et Watanabe [30] (1989), Karatzas et Shreve [33] (1988), Øksandal [44] (1985) et Protter [25] (1992). Certains de ces livres définissent l'intégrale d'Itô par rapport à des processus plus généraux que le mouvement brownien y compris les processus avec sauts. En outre, l'hypothèse

$$\int_0^t E(f_s)^2 ds < \infty$$

pour l'existence de l'intégrale

$$\int_0^t f_s dB_s$$

peut être considérablement assouplie.

Remarque 1.4.4. On peut suivre la construction classique pour définir l'intégrale stochastique :

1. nous définissons l'intégrale pour les fonctions en escalier,
2. passons en suite aux fonctions qui sont limites de suites de fonctions en escalier,
3. nous généralisons à la fin, aux fonctions intégrables.

1.5 Formules d'Itô

Comme pour les équations différentielles ordinaires, il n'est pas possible, en général, d'obtenir une forme analytique pour les solutions d' une équation différentielle stochastique. Cependant, un certain nombre d'EDS admettent une solution analytique (i.e. une différentielle d'un processus stochastique) que l'on peut souvent obtenir grâce à **la formule d'Itô**. Cette section est consacrée à sa présentation et à sa manipulation à travers quelques exemples.

La définition de l'intégrale d'Itô n'est pas maniable dans la pratique ; et comme pour l'intégrale de Lebesgue, il est crucial de faire appel à des résultats puissants, sans chercher à approximer les fonctions considérées par des fonctions élémentaires.

Définition 1.5.1. On appelle un processus d'Itô ou semi-martingale un processus stochastique $(X_t, t \geq 0)$ adapté à une filtration $\{F_t\}$ s'écrivant sous la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t K(s)ds + \int_0^t H(s)dW_s \tag{1.5}$$

où $H(t) \in H_2([0, \infty))$ et $K(t)$ adapté à la filtration $\{F_t\}$, et

$$P\left\{\int_0^t |K(u)|\, du < \infty\right\} = 1$$

On dira que le processus $(X_t, t \geq 0)$ admet une différentielle stochastique unique

$$dX_t = K_t dt + H_t dW_t \tag{1.6}$$

Il est évident que l'opérateur différentiel "d " est linéaire.

Indiquons maintenant les formules de différentiation du produit de deux processus d'Itô et d'une fonction composée.

Théorème 1.5.1. *[formule d'intégration par partie]*

Si les processus $X_1(t)$ et $X_2(t)$ admettent des différentielles stochastiques

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= K_1(t)dt + H_1(t)dW_t \\ dX_2(t) &= K_2(t)dt + H_2(t)dW_t \end{aligned}$$

alors le processus $X_1(t)X_2(t)$ admet aussi une différentielle stochastique et

$$d\left(X_1(t)X_2(t)\right) = X_1(t)dX_2(t) + X_2(t)dX_1(t) + d < X_1(t), X_2(t) > \tag{1.7}$$

où

$$d < X_1(t), X_2(t) >= H_1(t)H_2(t)dt.$$

En particulier, pour une fonction continûment différentiable dans $[0, T]$ on a la relation suivante

$$\int_0^t f(u)dW_u = f(t)W_t - \int_0^t f'(u)W_u du.$$

Remarque 1.5.1. On peut avoir la table de multiplication suivante

$$\begin{cases} (dt)^2 = 0 \\ dW_t^i dW_t^j = \delta_{ij}dt \\ dW dt = dtdW = 0 \end{cases}$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

Donnons maintenant un théorème définissant le crochet $< .,. >$.

Théorème 1.5.2. *Si $X_1(t)$, et $X_2(t)$ sont deux processus d'Itô tels que*

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= K(t)dt + H(t)dW_t \\ dX_2(t) &= K^{'}(t)dt + H^{'}(t)dW_t \end{aligned} \tag{1.8}$$

alors on définit $< X_1, X_2 >$, de la façon suivante :

1. $< X_1, X_2 >_t$ *est une forme bilinéaire symétrique.*
2. $< \int_0^* K_s ds, X_* >_t = 0$, *si $X(t)$ est un processus d'Itô, i.e*

$$dX(t) = K_t dt + H_t dW_t.$$

3. $< \int_0^* H_s dw_s^i, \int_0^* H_s^{'} dw_s^l >_t = 0$, *si $i \neq l$.*
4. $< \int_0^* H_s dw_s^*, \int_0^* H_s^{'} dw_s^* >_t = \int_0^t H_s H_s^{'} ds.$

($*$: signifiée que nous avons les mêmes paramètres)

1.5.1 Formules d'Itô unidimensionnelles

Théorème 1.5.3. *[Première formule d'Itô]*

Soit un processus d'Itô $X(t), t \geq 0$, i.e

$$dX(t) = K_t dt + H_t dW_t$$

et soit $f(t)$ une fonction 2-fois continûment dérivable, alors on a la première formule d'Itô

$$df(X_t) = f^{'}(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f^{''}(X_t)d < X; X >_t$$

avec $d < X; X >_t = H_t^2 dt$.

On peut écrire tout simplement

$$df(X_t) = \left(f^{'}(X_t)K_t + \frac{1}{2}f^{''}(X_t)H_t^2 \right) dt + f^{'}(X_t)H_t dW_t.$$

Théorème 1.5.4. *[Deuxième formule d'Itô]*

Si un processus $X(t)$ admet une différentielle stochastique et

$$dX(t) = a(t)dt + b(t)dW_t,$$

et si une fonction $f(t, x)$, $t \in [0, T], x \in \mathbb{R}$, à valeurs réelles, est continue ainsi que ses dérivées partielles $f_t^{'}(t, x), f_x^{'}(t, x)$ et $f_{xx}^{''}(t, x)$, alors le processus $f(t, X(t))$ admet aussi une différentielle stochastique et

$$df(t, X(t)) = f_t^{'}(t, X(t))dt + f_x^{'}(t, X(t))dX_t + \frac{1}{2}f_{xx}^{''}(t, X(t))d < X, X >_t$$

ou bien

$$df(t,X(t)) = \left[f_t^{'}(t,X(t)) + f_x^{'}(t,X(t))a(t) + \frac{1}{2}f_{xx}^{''}(t,X(t))b^2(t)\right]dt$$

$$+ f_x^{'}(t,X(t))b(t)dW(t) \tag{1.9}$$

Remarque 1.5.2. (formule d'Itô pour un mouvement brownien) *Soit un mouvement brownien $B(t)$, pour une fonction $f(x)$ deux fois différentiable*

$$df(B(t)) = f^{'}(B(t))dB(t) + \frac{1}{2}f^{''}(B(t))d < B,B >_t$$

avec

$$d < B,B >_t = dt,$$

on aura

$$df(B(t)) = f^{'}(B(t))dB(t) + \frac{1}{2}f^{''}(B(t))dt \tag{1.10}$$

Théorème 1.5.5. *[Troisième formule d'Itô]*

Soient X^1 et X^2 deux processus d'Itô issus de $x_{1,}$(respectivement x_2) de coefficients de dérive a^1(respectivement a^2), de coefficients de diffusion b^1(respectivement b^2) et portés respectivement par deux mouvements browniens B^1 et B^2 corrélés avec coefficient ρ. *On suppose que a^i, b^i* sont adaptés à la filtration $F_t^{B^i}, (i = 1, 2)$.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2 à dérivées bornées. On a

$$f(X_t^1, X_t^2) = f(x_1, x_2) + \int_0^t f_1^{'}(X_s^1, X_s^2)dX_s^1 + \int_0^t f_2^{'}(X_s^1, X_s^2)dX_s^2$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^t \left\{f_{11}^{''}(X_s^1, X_s^2)(b_s^1)^2 + 2\rho f_{12}^{''}(X_s^1, X_s^2)b_s^1b_s^2 + f_{22}^{''}(X_s^1, X_s^2)(b_s^2)^2\right\}ds \tag{1.11}$$

où $f_i^{'}$ désigne la dérivée par rapport à x_i et $f_{ij}^{''}$ la dérivée seconde par rapport à x_j puis $x_i, (i, j = 1, 2)$.

1.5.2 Formule d'Itô multidimensionnelle

Supposons maintenant que des processus $X_1(t), X_2(t), ..., X_m(t)$ possèdent des différentielles stochastiques

$$dX_i(t) = a_i(t)dt + b_i(t)dW_t, \qquad (i = 1, ..., m)$$

Soit $f(t, x_1, x_2, ...x_m), t \in [0, T], x_1, x_2, ...x_m \in \mathbb{R}$ une fonction réelle continue ainsi que ses dérivées partielles

$$f_t^{'}, f_{x_i}^{'}, f_{x_ix_k}^{''}, \quad (i, k = 1, ..., m)$$

Le processus $f(t, X_1(t), X_2(t), ..., X_m(t))$ admet aussi une différentielle stochastique, de plus, on a la formule d'Itô suivante

$$df(t, X_1(t), X_2(t), ..., X_m(t)) = \left[\frac{\partial f}{\partial t}(t, X_1(t), X_2(t), ..., X_m(t))\right.$$

$$+\sum_{i=1}^{m} f'_{x_i}(t, X_1(t), X_2(t), ..., X_m(t))a_i(t) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} f''_{x_i x_j}(t, X_1(t), X_2(t), ..., X_m(t))b_i(t)b_j(t)\Bigg] dt$$

$$+\sum_{i=1}^{m} f'_{x_i}(t, X_1(t), X_2(t), ..., X_m(t))b_i(t)dW_t. \tag{1.12}$$

Remarque 1.5.3. Une formule analogue à (1.12) est la suivante : si des processus $X_1(t), ..., X_n(t)$ possèdent des différentielles stochastiques dans $[0, T]$

$$dX_k(t) = a_k(t)dt + \sum_{j=1}^{m} b_{kj}(t)dW_j(t), \quad (k = 1, ..., n)$$

et si $U(t, x_1, ..., x_n)$ est une fonction continue possédant des dérivées partielles continues

$$\frac{\partial U}{\partial t}, \frac{\partial U}{\partial x_k}, \quad (k = 1, ..., n), \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (i, j = 1, ...n)$$

alors la fonction $\eta(t) = U(t, X_1(t), ..., X_n(t))$ possède aussi une différentielle stochastique (voir [27, page 456])

$$\begin{aligned} d\eta(t) \quad = \quad & \left[\frac{\partial U}{\partial t}(t, X_1(t), ..., X_n(t)) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_k}(t, X_1(t), ..., X_n(t))a_k(t)\right. \\ & \left. +\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_k}(t, X_1(t), ..., X_n(t)) \sum_{j=1}^{m} b_{ij}(t)b_{kj}(t)\right] dt \\ & +\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_k}(t, X_1(t), ..., X_n(t))b_{kj}(t)\right) dW_j(t) \end{aligned}$$

Remarque 1.5.4. La formule d'Itô permet de montrer que si B est un Brownien standard unidimensionnel et si X est un processus F_t^B-adapté, $p \in [1, \infty)$, et $T > 0$ sont tels que

$$E\left(\int_0^T |X_s|^{2p}\, ds\right) < \infty$$

alors

$$E\left(\left|\int_0^T X_s dB_s\right|^{2p}\right) \leq [p(2p-1)]^p\, T^{p-1} E\left(\int_0^T |X_s|^{2p}\, ds\right)$$

1.6 Equations différentielles stochastiques

De très nombreux phénomènes naturels, au moins en première approximation, peuvent être décrits par des équations différentielles. Cependant, ces mêmes phénomènes sont souvent sujets à d'infimes perturbations aléatoires qui peuvent avoir à plus ou moins long terme, une influence notable. On peut penser par exemple à la trajectoire d'une fusée, soumise aux aléas de la traversée de l'atmosphère terrestre. Dans la section 1.2, nous avons introduit la notion du mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}$. Comme nous l'avons déjà mentionné, le mouvement brownien est une fonction aléatoire universelle, une sorte de bruit universel, tout comme les variables gaussiennes jouent le rôle de variables aléatoires universelles via le théorème limite central.

Les équations différentielles stochastiques sont des équations différentielles dans lesquelles on fait intervenir un terme aléatoire : un "bruit" brownien. Elle permettent de prendre en compte, dans la description des phénomènes naturels, les perturbations évoquées plus haut. L'objet de cette section est d'introduire ce type d'équations. Nous donnerons en suite quelques propriétés élémentaires de leurs solutions.

Soit dans l'espace probabilisé complet (Ω, F, P) l'équation différentielle stochastique

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + b(t, X(t))dW(t)$$

dont on suppose que la solution est un processus de diffusion de coefficient de diffusion $b(t, x)$, et de coefficient de transfert $a(t, x)$. On admet que $a(t, x)$ et $b(t, x)$ sont des fonctions boréliennes.

Dans toute la suite de cet exposé, on supposera que la solution $X(t)$ est indépendante du processus $W(t)$ et que $F_t = \{F_t, t \geq 0\}$ est une famille croissante de sous tribus contenant les ensembles négligeables de F et est continue à droite, telle que $F_\infty = \sigma\{\cup_{t\geq 0} F_t\}$ est la plus petite tribu par rapport à laquelle sont mesurables $X(0) = x_0$ et $W(t)$, pour $s \leq t$. Il y a deux types d'équations différentielles stochastiques, les EDS linéaires et les EDS non linéaires (voir [34]).

Dans cette partie, on s'intéressera à l'équation différentielle stochastique non linéaire

$$\begin{cases} dX(t) = a(t, X(t))dt + b(t, X(t))dW(t) \\ X(0) = x_0 \end{cases} \tag{1.13}$$

où $a(t, x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $b(t, x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$ sont deux fonctions mesurables et x_0 est une variable aléatoire quelconque.

Posons

$$X(t) = x_0 + \int_0^t a(s, X_s)ds + \int_0^t b(s, X_s)dW_s \tag{1.14}$$

On peut écrire l'équation (1.13) par composantes

$$dX_t^{(i)} = a_i(t, X_t)dt + \sum_{j=1}^{m} b_{ij}(t, X_t)dW_t^{(j)}, (i = 1...n) \tag{1.15}$$

Définition 1.6.1. On appelle solution de l'EDS (1.13), un processus $X(t)$ continu F_t-adapté à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ tel que

$$p.s. \int_0^t \left[|a(s,X_s)| + |b(s,X_s)|^2\right] ds < \infty$$

$$p.s.\forall t \in \mathbb{R}_+ : X_t = x_0 + \int_0^t a(s,X_s)ds + \int_0^t b(s,X_s)dW(s)$$

Remarque 1.6.1. Il est bien de noter que deux processus $X_1(t)$ et $X_2(t)$ stochastiquement équivalents possèdent des intégrales stochastiques

$$\int_0^t X_1(r)dW_r, \qquad \int_0^t X_2(r)dW_r$$

presque sûrement égales, d'où il vient que, tout processus stochastiquement équivalent à la solution de l'EDS (1.13) est lui même solution de cette équation.

1.6.1 Unicité trajectorielle

Définition 1.6.2. On dit qu'on a unicité trajectorielle pour l'EDS (1.13) si dans tout espace filtré $(\Omega; F; P)$ supportant un F_t-mouvement brownien W_t, deux solutions X_t et X_t^* relativement à W_t sur cet espace sont P-indistinguables.

1.6.2 Solutions fortes

Définition 1.6.3. Une solution forte de l'EDS (1.13) définie dans l'espace probabilisé (Ω, F, P) où $\{F_t\}$ est une filtration complète, et avec le mouvement brownien $W(t)$ qui est fixé, et la condition initiale x_0, est un processus

$$X = \{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$$

jouissant des propriétés suivantes :

1. *X est adapté à la filtration $\{F_t \vee \sigma(x_0)\}$.*
2. $$P\left[\int_0^t \left\{|a_i(s,X_s)| + b_{ij}^2(s,X_s)\right\} ds < \infty\right] = 1$$
   vraie pour tout
   $$1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m \text{ et } t \in \mathbb{R}_+$$
3. *la forme intégrale de* (1.13)
   $$X_t = x_0 + \int_0^t a(s,X_s)ds + \int_0^t b(s,X_s)dW_s, t \in \mathbb{R}_+ \qquad (1.16)$$

ou équivalente à

$$X_t^{(i)} = x_0^{(i)} + \int_0^t a_i(s, X_s)ds + \sum_{j=1}^{m} \int_0^t b_{ij}(s, X_s)dW_s^{(j)}, (t \in \mathbb{R}_+, 1 \leq i \leq n) \quad (1.17)$$

est *vraie presque-sûrement.*

Définition 1.6.4. *On dira qu'il y a unicité forte pour l'équation* (1.13) *si, pour toutes solutions* X_t^1, X_t^2 *on a*

$$P(X_t^1 = X_t^2, \forall t \geq 0) = 1$$

On peut donner la définition suivante de la solution forte

Définition 1.6.5. On dit que la solution X_t de (1.13) est forte, si elle se trouve dans le même espace filtré avec W_t.

Remarque 1.6.2. Une solution forte X_t, se construit par les itérations de Picard. Soit $X_t^{(0)}$ un processus identiquement égal à x_0. On définit par récurrence

$$X_t^{(n+1)} = x_0 + \int_0^t a(s, X_s^{(n)})ds + \int_0^t b(s, X_s^{(n)})dW_s$$

et l'on examine sous quelles conditions cette suite converge presque-sûrement vers un processus continu. Le processus $X_t^{(n)}$ est F_t-mesurable pour tout $t \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$.

1.6.3 Existence et unicité forte

Théorème 1.6.1. *On suppose que les fonctions a et b sont localement lipschitziennes par rapport à la deuxième variable , c'est à dire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe K_n tel que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et pour tout (x, y) vérifiant $|x| \leq n$ et $|y| \leq n$, on a :*

$$|a(t, x) - a(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)| \leq K_n|x - y|$$

Alors, si l'EDS (1.13) *admet une solution continue par rapport à la variable t, elle est unique.*

Donnons maintenant un résultat d'existence et d'unicité de solutions globales des EDS, il est à noter que les hypothèses ne sont pas optimales, mais la très forte analogie entre ce théorème et celui de Cauchy-Lipschitz global tant au niveau des hypothèses qu'au niveau de la démonstration est intéressante.

Théorème 1.6.2. *On suppose qu'il existe deux constantes M_1, M_2 telles que les fonctions a et b satisfont*

$$|a(t, x)| + |b(t, x)| \leq M_1(1 + |x|), \forall x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0 \quad (1.18)$$

et

$$|a(t,x)-a(t,y)|+|b(t,x)-b(t,y)|\leq M_2|x-y|,\forall(x,y)\in\mathbb{R}^n,t\geq 0 \qquad (1.19)$$

Alors, il existe une unique solution (X_t) *continue par rapport à la variable* $t\in[0,\infty)$ *qui vérifie :*

$$E\left[\int_0^s |X_t|^2 dt\right]<\infty,\forall s\in[0,\infty)$$

Théorème 1.6.3. *[33, pages 287-288] Supposons que les coefficients* $a(t,x)$ *et* $b(t,x)$ *sont localement lipschitziens dans un espace variable, i.e. pour tout* $n\geq 1$ *il existe une constante* $K_n>0$ *telle que pour tout* $t\geq 0$, $\|x\|\leq n$ *et* $\|y\|\leq n$ *:*

$$\|a(t,x)-a(t,y)\|+\|b(t,x)-b(t,y)\|\leq K_n\|x-y\| \qquad (1.20)$$

Alors l'unicité forte est assurée pour l'équation (1.13).

Remarque 1.6.3. Il est important de noter que pour les équations différentielles ordinaires, la condition locale de Lipschitz n'est pas suffisante pour garantir l'existence d'une solution globale. Par exemple l'unique solution de l'équation

$$X_t=1+\int_0^t X_s^2 ds,$$

est

$$X_t=\frac{1}{1-t},$$

qui "explose" lorsque $t\uparrow 1$.

On doit donc imposer d'autres conditions plus fortes, on obtiendra le résultat suivant.

Théorème 1.6.4. *Supposons que les coefficients* $a(t,x)$ *et* $b(t,x)$ *vérifient les conditions de Lipschitz globales et la croissance linéaire suivantes*

$$\|a(t,x)-a(t,y)\|+\|b(t,x)-b(t,y)\|\leq K\|x-y\|, \qquad (1.21)$$

$$\|a(t,x)\|^2+\|b(t,x)\|^2\leq K^2(1+\|x\|^2), \qquad (1.22)$$

pour tout $0\leq t<\infty$, $x\in\mathbb{R}^n, y\in\mathbb{R}^n$, *où* K *est une constante positive. Dans un certain espace probabilisé* (Ω,F,P), *soit* $\xi\in\mathbb{R}^n$ *un vecteur aléatoire indépendant du mouvement brownien* $n-$*dimensionnel* $W=\{W_t,0\leq t<\infty\}$, *et dont le moment d'ordre deux est fini*

$$E\|\xi\|^2<\infty. \qquad (1.23)$$

Soit $\{F_t\}$ *une tribu complète. Alors il existe un processus continu, adapté* $X=\{X_t,F_t,0\leq t<\infty\}$ *qui est une solution forte de l'équation* (1.13) *relative à* W *dont la condition initiale est* ξ. *D'où il vient que, ce processus est* L_2-*intégrable : pour chaque* $T>0$, *il existe une constante* C *dépendante toujours de* K *et* T, *telle que*

$$E\|X_t\|^2\leq C(1+E\|\xi\|^2)e^{Ct}, \qquad 0\leq t\leq T. \qquad (1.24)$$

Remarque 1.6.4. La démonstration basée sur l'utilisation d'une suite d'approximations successives est donnée dans [33, page 289].

Remarque 1.6.5. La démonstration du théorème d'existence et d'unicité est basée sur l'utilisation du lemme de Gronwall. Dans l'article [9] on peut trouver de nouvelles formes stochastiques de l'inégalité de Gronwall utilisées pour redémontrer le théorème d'existence.

Remarque 1.6.6. La notion de solution forte est parfois trop restrictive. Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} dX_t = sign(X_t)dW_t \\ X_0 = 0 \end{cases} \tag{1.25}$$

Cette équation n'admet pas de solution forte. Cependant, il est possible de trouver un espace de probabilité, un mouvement brownien W sur cet espace et une filtration F tels qu'il y ait une solution au problème. Cela correspond à la filtration de solution faible.

1.6.4 Solutions faibles

Quant à l'unicité faible, ou "en loi", cela semble a priori bien difficile à obtenir puisque s'il existe une solution, il en existe en général une infinité, chacune étant définie sur un espace arbitraire. Il existe toutefois plusieurs critères d'unicité faible, le plus utile est sans doute le suivant

Théorème 1.6.5. *(Yamada-Watanabe) [1] Supposons que les coefficients a et b soient boréliens et localement bornées. L'unicité trajectorielle implique l'unicité faible, et aussi que toute solution X_t sur un espace probabilisé quelconque $(\Omega; F; P)$ relativement à un mouvement brownien W_t , F_t-mesurable, est en fait adaptée à la filtration F_t engendrée par ce mouvement brownien W_t (solution " forte").*

Définition 1.6.6. Une solution faible de l'équation différentielle stochastique (1.13) est un triplet $(X, W), (\Omega, F, P)$ *et* $\{F_t\}$ telles que

1. *(Ω, F, P) est un espace probabilisé, et $\{F_t\}$ est une filtration des sous-tribus de F satisfaisant les conditions usuelles.*
2. *$X = \{X_t, F_t, 0 \leq t < \infty\}$ est un processus continu adapté à valeurs dans $\mathbb{R}^n, \{W_t, F_t, 0 \leq t < \infty\}$ est un mouvement brownien de dimension m.*
3. $$P\left[\int_0^t \left\{|a_i(s, X_s)| + b_{ij}^2(s, X_s)\right\} ds < \infty\right] = 1$$
   vraie pour tout $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$ et $0 \leq t < \infty$, et
4. *la forme intégrale de* (1.13)
   $$X_t = x_0 + \int_0^t a(s, X_s)ds + \int_0^t b(s, X_s)dW_s, 0 \leq t < \infty$$

ou équivalente à

$$X_t^{(i)} = x_0^{(i)} + \int_0^t a_i(s, X_s)ds + \sum_{j=1}^{m} \int_0^t b_{ij}(s, X_s)dW_s^{(j)}, (0 \leq t < \infty, 1 \leq i \leq n)$$

est *vraie presque sûrement.*

Définition 1.6.7. On dit qu'il y a unicité faible en loi pour l'équation (1.13) *si deux solutions faibles ont toujours la même loi.*

Remarque 1.6.7. Il existe une autre forme d'unicité faible dite "pathwise" en anglais, qui consiste à comparer les solutions définies sur un même espace de probabilités et à voir si elles se correspondent presque sûrement.

Remarque 1.6.8. Une solution $\tilde{X}_t$ est dite faible, si on peut construire un espace probabilisé $(\tilde{\Omega}, \tilde{F}, \tilde{P})$ et un mouvement brownien $\tilde{W}$ tels que $\tilde{X}_t$ satisfait l'équation (1.13).

Remarque 1.6.9. Il est possible d'avoir plusieurs solutions fortes de (1.13), si la solution forte est unique, alors la solution faible l'est aussi, par contre, si la solution faible est unique il se peut qu'il y ait plusieurs solutions fortes.

1.6.5 Equations différentielles d'ordres supérieurs à un

La relation entre les EDS vectorielles et scalaires est analogue à celle entre les différentielles stochastiques vectorielles et scalaires. Dans ce qui suit, on interprète un vecteur comme un vecteur colonne et son transposé comme un vecteur ligne. On considère un mouvement brownien $W = \{W_t, t \geq 0\}$ $m-$dimensionnel, où les composantes $W_t^1, W_t^2, ..., W_t^m$ sont des mouvement brownien scalaires indépendants (c'est à dire $Cov(W^i, W^j) = 0, i \neq j$). Il est claire que les composantes W_t^i sont F_t-adaptées.

On prend une fonction vectorielle de dimension n,

$$a(t, x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

et une fonction matricielle $(n \times m)-$dimensionnelle

$$b(t, x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times m}$$

et on construit l'équation différentielle stochastique de dimension n

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t \tag{1.26}$$

ou sous forme intégrale

$$X_t = x_0 + \int_0^t a(s, X_s)ds + \int_0^t b(s, X_s)dW_s \tag{1.27}$$

où les intégrales de Lebesgue et d'Itô sont données composante par composante comme suit

$$X_t^i = x_0^i + \int_0^t a^i(s, X_s)ds + \sum_{j=1}^{m} \int_0^t b^{i,j}(s, X_s)dW_s^j \tag{1.28}$$

pour $i = 1, .., n$.

On peut donner la forme matricielle de cette équation comme suit

$$d\begin{pmatrix} X_t^1 \\ X_t^2 \\ . \\ . \\ X_t^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1(t, X_t) \\ a^2(t, X_t) \\ . \\ . \\ a^n(t, X_t) \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} b^{1,1}(t, X_t) & .. & b^{1,m}(t, X_t) \\ b^{2,1}(t, X_t) & .. & b^{2,m}(t, X_t) \\ . & .. & . \\ . & .. & . \\ b^{n,1}(t, X_t) & .. & b^{n,m}(t, X_t) \end{pmatrix} d\begin{pmatrix} W_t^1 \\ W_t^2 \\ . \\ . \\ W_t^m \end{pmatrix} \tag{1.29}$$

Toutes les définitions introduites avant pour les solutions faibles et fortes sont vraies pour ce cas vectoriel. Le théorème d'existence et d'unicité de la solution forte s'applique sans aucune difficulté, pourvu que les valeurs absolues dans les hypothèses des théorèmes précédents soient remplacées par des normes de vecteurs.

Chapitre 2

Notions sur les concepts de périodicité et presque périodicité

De nombreux phénomènes pysiques, chimiques, biologiques, économiques, épidémiologiques peuvent avoir un comportement plus ou moins périodiques Différents types déquations permettent de modéliser ces phénomènes : il s'agit entre autres des équations intégrales, des équations opérationnelles abstraites, des équations aux dérivées partielles, des équations aux différences, des équations foctionnelles, des équations différentielles à arguments constants par morceau, des équations différentielles stochastiques pour ne citer que celles-là. Létude de ces phénomènes nécessite des notions quidépassent le concept de la périodicité, qui tiennent compte du fait que ces phénomènes ne sont pas tout à fait périodiques.

Durant ces dernières décennies plusieurs auteurs se sont ponchés sur le concept de périodicité et ses diverses généralisations.Les fonctions presque périodiques introduites par *Bohr* de la périodicié [8] est l'une des généralisation de la périodicité. La presque-périodicité, comme propriété structurelle, est une généralisation de la périodicité pure et les méthodes originales de *H. Bohr* pour itablir les résultats fondamontaux de cette théorie ont toujours été basées sur la réduction du problème en un problème lié aux fonctions purement périodique. Mais quoique l'dée sous-jacente de la méthode de Bohr soit claire et simple, les démonstrations des résultats principaux étaient difficiles et compliquées.

Par ailleurs, d'autres méthodes ont été fournies par *Nobert Wiener* et *Hemann Weyl*, par qui les résultas étaient obtenus d'une manière plus courte. Mais ces méthodes n'ont pas gardé les propriété élémentaires des méthodes de *Bohr*.

Le problème déxistance de solutions presque-périodiques pour les équations différentielles stochastiques occupent une place importante dans le domaine des mathématiques, et cela a pour but de généraliser les divers résultats classiques connues dans le cas des équations différentielles ordinaires.

La notion de prèsque périodicité connue pour les fonctions ordinaires trouve sa place dans le domaine des processus aléatoire avec diverses formes, vu l'importance que porte cette notion pour les applications en physique mathématique et en statistique. Les premières notions introduites sur les procesus aléatoires presque périodiques sont données par *Slutsky* en introduisant de suffisantes conditions pour qu'une fonction aléatoire d'un processus stationnaire soit un processus presque périodique au sens de *Besicovitch* [5].

Ce chapitre est introductif, il a pour objectif de présenter certaines notions sur les fonctions et les processus périodiques et presque périodiques, ses principales propriétés et de donner certains résultats sur ce type de fonctions.

Pour plus de détails concernant les résultats cités dans ce chapitre, on peut ce référer aux livres (*Bohr*[8],1947), (*Amerio et prouse*[2],1971), (*Corduneanu*[11],1989) et à (*Blot*[6],1996). Ces ouvrages sont trés importants dans l'étude de la presque périodicité et les équations différentielles et les équations aux dérivées partielles.

2.1 Notions sur les fonctions périodiques

Définition 2.1.1. Nous dirons qu'une fonctions $f(t)$ est T-périodique pour tout $t \geq 0$ si

$$\exists T \geq 0, \forall t \geq 0 : f(t+T) = f(t)$$

Proposition 2.1.1. *Toute fonction périodique et continue sur $\mathbb{R}_+$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.*

Proposition 2.1.2. *soit $f(t)$ une fonction périodique et continue sur $\mathbb{R}_+$. Si $f(t)$ est non- constante sur $\mathbb{R}_+$ alors, $f(t)$ admet une plus petitte période τ définie par*

$$min\{T > 0, \forall t \in \mathbb{R}_+ : f(t+T) = f(t)\}$$

Théorème 2.1.3. *Toute fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$ est bornée*

Théorème 2.1.4. *Soit $f(t)$ une fonction T-périodique et intégrable sur $[0, T]$ alors,nous avons les deux résultats suivants*

1. *f est intégrable sur tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$*
2. *$\forall t_0 \in \mathbb{R}$.*

$$\int_0^T f(t)dt = \int_0^{t_0+T} f(t)dt$$

La notion de périodicité est étroitement liée aux sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$. Rappelons qu'un sous-groupe additif G de $\mathbb{R}$ non réduit à zéro, est, soit dense dans $\mathbb{R}$, soit monogène, i.e. de la forme $T\mathbb{Z}$ où T est un réel strictement positif, (dans ce cas, nous appelerons T le générateur de G). En particulier, un sous-groupe non réduit à zéro d'un groupe monogène est monogène, et un sous-groupe contenant un sous-groupe dense est dense.

Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes, alors l'ensemble des réels T, noté $G(f)$, tels que, pour réel t

$$f(t+T) = T$$

est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$

Définition 2.1.2. On dira qu'une fonction f est périodique si $G(f)$ n'est pas réduit à 0. Un élément T non nul de $G(f)$ est une période de f, et l'on dira que f est de période T ou encore qu'elle est T-périodique. L'ensemble $G(f)$ est alors appelé groupe des période de f.

Remarque 2.1.1. Le groupe $G(f)$ est égale à $\mathbb{R}$ si, et seulement si, la fonction f est constante.

Définition 2.1.3. Soit une fonctions $f(t,x) : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$,on dit que cette fonction est T-périodique en t uniformement pour tout $x \in \mathbb{R}$ si

$$\exists T > 0, \forall \geq t0 : f(t+T,x) = f(t,x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Définition 2.1.4. Soit $f(x,y)$ une fonction définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, on dit que cette fonction est doublement périodique en x et en y de périodes T et S (respectivement), si

$$f(x+T, y+S) = f(x,y)$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Dans le cas où $S = T$ cette fonction est T-périodique en x en y.

2.2 Quelques notions de périodicité pour les processus aléatoires

Définition 2.2.1. On dit qu'un processus aléatoire $x(t,\omega)(0 \leq t < \infty)$ est asymptotiquement, stochastiquement périodique de période T si

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P\left(|X(t+T,\omega) - X(t,\omega)| = \frac{1}{n}\right) = 1$$

pour $\omega \in \Omega$.

Définition 2.2.2. Un processus aléatoire $x(t,\omega), (-\infty \leq t < \infty)$ est dit faiblement T-périodique en $t(T > 0)$ si $m(t) = E(x(t)), D(t) = Var(x(t))$ sont des fonctions T-périodiques, c'est à dire

$$m(t+T) = m(t)$$

$$D(t+T) = D(t).$$

$x(t,\omega)$ est dit d'autre part, T-périodique (tout court) s'il admet une distribution T-périodique.

Définition 2.2.3. Considérons un processus $X(t,\omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$,définie dans un espace probabilisé complet (Ω, F, P). On dit que $X(t,\omega)$ est T-périodique en moyenne L_p si

$$E|X(t+T,\omega) - X(t,\omega)|^p = 0$$

pour $t \in \mathbb{R}$. pour $p = 1$ le processus $X(t,\omega)$ est dit T-périodique en moyenne, si $p = 2$ il est dit T-périodique en moyenne quadratique.

Proposition 2.2.1. *(Composition) Soit $f(t,x)$ une fonction mesurable, T-périodique en t, et $\xi(t)$ un processus alèatoire T-périodique, il est facile de vérifier que le processus $f(t,\xi(t))$ est aussi T-périodique.*

Définition 2.2.4. On dit que le processus aléatoire $X(t,\omega)$ est asymptotyquement T-périodique en moyenne L_p si

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} E|X(t+nT,\omega) - X(t,\omega)|^p = 0$$

2.3 Rappels sur les fonctions presque périodiques

La théorie des fonctions presques périodiques a été développée avec vigueur depuis quatre-vingts environ ; dans le cadre d'étudier les problèmes des équations différentielles, théorie de la stabilité, systèmes dynamiques, et ainsi le suite. Les applications comprennent non seulement les équations différentielles ordinaires mais aussi des équations aux dérivée partielles, ou des équations dans les espace de *Banach*.

Dans trois Notes des Comptes rendus et des trois Mémoires des Acta Mathéémathica, *M. H. Bohr* [8] a donné la théorie des fonctions presque périodiques.

Cette théorie a été dévloppée par d'autres, notamment *Bochner*[7] vers 1933, qui a donné deux autres versions de la définition des fonctions presque périodiques équivalentes à celle donné par *Bohr*, mais plus maniables.

Les ouvrages classiques de *Amério* et *Prouse*[2], C. Corduneanu [11], *Youshizawa*[53]etc, donnent une belle présentation des méthodes et des résultats sur ce sujet. Depuis, un grand nombre de travaux classiques ont porté des intérêts aux mathématiciens pour les généraliser aux différentes classes d'équations différentielles, surtout les équations différentielles stochastiques.

Dans cette section nous allons donner quelques rappels sur les fonctions et processus presque périodiques.

Définition 2.3.1. Une fonction $f(t)$ définie dans $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite presque périodique si pour tout $\varepsilon > 0$, on peut faire correspondre une longueur $l(\varepsilon) > 0$ telle que tout intervalle de longueur l contient un nombre $\delta > 0$ tel que

$$|f(t+\delta) - f(t)| < \varepsilon \qquad\qquad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Théorème 2.3.1. *[11, th. 1.5, p.p. 11]Soit $f(t)$ et $g(t)$ deux fonctions numériques, presque périodiques alors $f(t)+g(t)$ et $f(t)g(t)$ sont presque périodiques.*

Corollaire 2.3.2. *[11, 16, corollary, p.p. 12] Considérons un polynôme $P(z_1, z_2, ..., z_n)$ et des fonctions numériques, presque périodiques $f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t)$, alors la fonction*

$$F(t) = P(f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t))$$

est presque périodique.

Théorème 2.3.3. *[11, th. 1.7, p.p. 13]Soit $\phi(z_1, z_2, ..., z_n)$ une fonction uniformément continue dans A où A est un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$. Si $f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t)$ sont des fonctions numériques, presque périodiques telles que $f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t) \in A$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors $F(t) = \phi(f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t))$ est une fonction presque périodique.*

Corollaire 2.3.4. *[11, th. 1.5, p.p. 11] Soient $f(t), g(t)$ deux fonctions numériques, presque périodiques telles que $0 < m < |g(t)|$. Alors $\frac{f(t)}{g(t)}$ est une fonction presque périodique.*

Théorème 2.3.5. *[11, th. 1.8, p.p. 13] Si $f(t)$ est une fonction numérique, presque périodique et $f'(t)$ est une fonction uniformément continue dans toute la droite réelle $\mathbb{R}$, alors $f'(t)$ est une fonction presque périodique.*

Définition 2.3.2. une fonction $f(t, x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite (*bohr*)presque périodique en moyenne L_2 si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $l(\varepsilon) > 0$, tel que chaque intervalle de longueur $l(\varepsilon)$ contient un nombre $\delta > 0$ vérifiant

$$\sup_{t \geq 0} \|f(t+\delta, x) - f(t, x)\|^2 < \varepsilon$$

Théorème 2.3.6. *[7]Une fonction $f(t, x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite presque périodique si, et seulement si, pour toute suite de nombres $(s_n)_{n\geq 0}$ il existe une sous-suite $(\sigma_n)_{n\geq 0}$ de $(s_n)_{n\geq 0}$ telle que la suite de fonction $\{f(t+\sigma_n, x)\}_{n\geq 0}$ converge uniformément pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et tout $x \in \mathbb{R}$.*

Théorème 2.3.7. *[11, th. 1.2, th. 1.3, p.p. 10-11] Toute fonction presque périodique est bornée, si de plus elle est continue alors elle est uniformément continue dans $\mathbb{R}$.*

Proposition 2.3.8. *[11, th. 1.5, p.p. 11]Si $f(t) = u(t) + iv(t)$ est une fonction presque périodique à valeurs complexes, alors les fonctions*

$$|f(t)|, u(t) et v(t)$$

où h, $c \in \mathbb{R}$, sont aussi presque périodiques.

2.3.1 Quelques propriétés

1. Principe de reconstitution (à ∞ et$-\infty$) :si$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, est une fonction presque périodique, il existe alors une suite $\{t_n\}, t_n \longrightarrow \infty$ pour $n \longrightarrow \infty$ telle que $f(t + t_n) - f(t) \longrightarrow 0$ pour $n \longrightarrow \infty$ uniformément pour tout $t \in \mathbb{R}$. (on a un résultat similaire pour $n \longrightarrow -\infty$)
2. L'ensemble de fonctions presque périodiques est invariant par translations, il l'est également par convolution, par des fonctions de L_1.
3. L'espace des fonctions presque périodiques est complet pour la norme sup.
4. Toute fonction continue, périodique est presque périodique, sa période et ses multiples sont les presque-périodes.
5. La limite uniforme d'une suite de fonctions presque périodiques est presque périodique.

2.3.2 Exemples de fonctions presque périodiques

1. Toute somme finie de fonctions périodiques à périodes aléatoires dont les rapports sont irrationnels.
2. La fonction $f(t) = a\ sin\ t + a\ sin\sqrt{2}t, a\ \in \mathbb{R}^*$, est presque périodique mais n'est pas périodique (voir[11]).
3. Courbes paramétrées par des fonctions périodiques, par exemple
$$\begin{cases} x_t = sin\ t \\ y(t) = cos\ t \end{cases}$$
4. $$\begin{cases} x_t = sin\ t + sin\ \sqrt{2}t \\ y(t) = cos\ t + cos\ \sqrt{2}t \end{cases}$$

2.4 Processus presque périodiques

Dans cette section, nous donnerons les principales définitions portant sur la presque périodicité des processus aléatoires. En ce qui concerne l'existance de solutions presque périodiques des équations différentielles stochastiques, on trouve pas mal de contributions dans le cas de dimensions finies et infinie. Les travaux de *Paul H.Bezandry* et *Tauka Diagana*[12, 13, 14] présentent une référence de base et une importante contribution dans ce domaine. Nous allons donner certaines notions sur les processus aléatoires presque périodiques à partir des notions vues sur les fonctions presques et caractérisées par l'évaluation de l'écart

$$|f(t + \delta) - f(t)|$$

par rapport à une valeur ε aussi petite que l'on veut.

Pour définir les processus aléatoires presques périodiques en moyenne L_p, nous allons utiliser des définitions caractérisées par l'écart d'ordre $p(p \geq 1)$

$$|x(t+\delta) - x(t)|^p.$$

Pour $p = 1$, on aura la presque périodicité en moyenne L_1.
Pour $p = 2$, on aura la presque périodicité en moyenne L_2.
Pour $p \geq 2$, on aura la presque périodicité en moyenne L_p.

Définition 2.4.1. Un processus continu $X(t,\omega) : \mathbb{R}_+ \times \Omega \longrightarrow L_2(\mathbb{R},\Omega)$ est dit presque périodique en moyenne quadratique si $\forall \varepsilon > 0, \exists l(\varepsilon) > 0$ tel que chaque intervalle de longueur $l(\varepsilon)$ contient un nombre positif δ vérifiant

$$\sup_{t \geq 0} E|X(t+\delta,\omega) - X(t,\omega)|^2 < \varepsilon$$

Il existe pas mal de notions de la presque périodicité pour les processus aléatoires, à savoir la presque périodicité corrélée et la presque périodicité unitaire, aussi que la presque périodicité en loi, et celle en probabilité. On notera aussi que pour la presque périodicité en loi, plusieurs concepts ont été introduits notament, la presque périodicité en loi (APD), la presque périodicité unidimentionnelle (APFD) (voir[52]).

On peut se référer à [4] pour une étude comparative entre ces diverses notions.

2.4.1 Composition de deux processus presque périodiques en moyenne L_p

Théorème 2.4.1. *[13, 7, th. 4.4, page 125] Soit $F(t,y) : \mathbb{R} \times L_p(\Omega, B_1) \longrightarrow L_p(\Omega, B_2)$ un processus aléatoire presque périodique en $t \in \mathbb{R}$ uniformément pour tout $y \in K$ où $K \subset L_p(\Omega, B_1)$ est compact. Supposons que F est lipchitzienne comme suit*

$$E\|F(t,y) - F(t,z)\|_2^p \leq ME\|y - z\|_1^p,$$

pour tout $y, z \in L_p(\Omega, B_1)$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$ avec $M > 0$. Alors pour un processus presque périodique en moyenne $L_p \phi : \mathbb{R} \longrightarrow L_p(\Omega, B_1)$ le processus stochastique $F(t,\phi(t))$ est L_p-presque périodique.

Théorème 2.4.2. *[13, 7, th. 4.4, page 125] Soit $F : \mathbb{R} \times L_p(\Omega, B_1) \longrightarrow L_p(\Omega, B_2)$ un processus aléatoire presque périodique en $t \in \mathbb{R}$ uniformément pour tout $y \in K$ où $K \subset L_p(\Omega, B_1)$ est compact. Supposons que $F(t,.)$ est uniformément continue dans un sous ensemble borné $\tilde{K} \subset L_p(\Omega, B_1)$ comme suit $\forall \varepsilon > 0, \exists\ \delta_\varepsilon > 0$ tel que $\forall x, y \in \tilde{K}$ et vérifiant $E\|x - y\|_p < \delta_\varepsilon$:*

$$E\|F(t,x) - F(t,y)\|_2^p < \varepsilon, \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Alors pour un processus $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow L_p$-presque périodique, le processus stochastique $F(t,\phi(t))$ est L_p-presque périodique.

Chapitre 3

Solutions presque périodiques d'une classe d'EDS

Pour une équation différentielle ordinaire, en dimension un ou deux,

$$dx = f(t, x)dt$$

dont le second membre est périodique en t, *Massera [39] montre que l'existence d'une solution bornée implique l'existence d'une solution périodique de même période que* f pour cette même équation. Ce résultat est évidement faux dans le cas où la fonction f(t,x) est presque périodique [53, page 181].

Ce théorème de Massera est généralisé pour plusieurs types d'équations différentielles et fonctionnelle [22, 23, 35, 36, 42, 43, 45, 46, 51, 40, 54, 55].

L'existence de solutions presque périodiques pour les équations différentielles stochastique représente l'une des questions importantes examinées par les mathématiciens, plusieurs travaux ont été faits sur la presque périodicité de ce types d'équations, citons par exemple, T. *Diagana*, P.H. *Bezandry* [15, 16, 12], A.Y. *Dorogovtsev* [17], C. *Vârsan* [30]

et autres.

La notion de presque périodicité pour les processus aléatoires et en pérticulier, pour les équations différentielles stochastiques a connu un développement considérable vu le nombre important de travaux rééalisés dans ce domaine depuis le travail de C. *Tuder* et ses collaborateurs [52, 41, 3]. Dans son travail C. *Tuder* [52] a montré la presque périodicité en loi des solution pour certaines équations différentielles stochastiques avec coefficients presque périodiques.

Plus récemment, *Bezandry et Diagana* [15, 16] ont montré que certaines équations différentielles stochastiques avec coefficients presque périodicité admettent des solutions satisfaisant la propriété forte de la presque périodicité en moyenne quadratique.

Une question importante qu'on va éclaircir dans ce chapitre, est la suivante :

D'une part, soit une équation différentielle stochastique

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dB_t \tag{3.1}$$

où les coefficients $a(t, x)$ et $b(t, x)$ sont périodiques en t, il est clair que la solution de cette équation ne peut présenter de trajectoires périodiques puisque son second membre n'est pas périodique en t, (ceci car B_t n'est pas une fonction périodique), mais admet-elle une solution presque périodique ?

D'autre part, soit l'EDS

$$dX_t = (-1 + \cos t)X_t dt + \sqrt{1 - \cos t}dB_t$$

dont les coefficients sont périodiques, cette équation n'admet pas de solutions presque périodiques [4].

dans cette contribution, nous allons établir l'existence de solutions presque périodiques pour l'EDS (3.1) en utilisant le lien entre ce type d'EDS et les équations différentielles ordinaires, lien établi par *H.Doss* [19]. Dans son travail, *Doss* a montré que la résolution d'EDS du type (3.1) est équivalente à la résolution d'une équation différentielle ordinaire de la forme

$$dy = F(t, y, B_t(w))dt \tag{3.2}$$

où ω ne joue que le rôle d'un paramètre.

Has'minskii [37, page 64] a examiné l'EDO

$$dx = G(t, x, \xi_t)dt$$

où ξ_t est un processus périodique, il a montré que si $G(t, x, y)$ est périodique en t et satisfait certaines conditions, alors cette EDO admet une unique solution périodique qui est presque sûrement stable.

En combinant ces résultats et en utilisant l'EDO (3.2). nous allons montrer que l'existence d'une solution L_2-bornée implique l'existence d'une solution presque périodique pour l'EDS (3.1).

Dans se chapitre nous allons développer les résultats de l'article M. A. Boudref [10] publié en 2017.

3.1 Rappels sur les théorèmes de convergence de Massera

3.1.1 Les théorèmes de Massera

Considérons le système différentiel suivant :

$$dx = f(t, x)dt \tag{3.3}$$

où $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est continue et satisfait la condition locale de Lipschitz en x.
Supposons en outre qu'il existe $T > 0$, tel que

$$f(t+T, x) = f(t, x) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Théorème 3.1.1. ***(Premier théorème de Massera)*** *Soit l'équation (3.3) avec $n = 1$, s'il existe une solution bornée pour tout $t \geqslant 0$, alors il existe une solution périodique de période T, pour cette équation.*

Pour la démonstration de ce théorème, on a besoin du théorème d'Ascoli.

Théorème 3.1.2. ***(Ascoli)*** *Soit $\{f_n(x)\}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle borné I à valeurs dans $\mathbb{R}$, supposons que cette suite soit équicontinue et uniformément bornée. Alors la suite $\{f_n(x)\}$ contient une sous-suite uniformément convergente vers une fonction continue.*

Démonstration du théorème 3.1.1 Soit $\phi(t)$ une solution de l'équation (3.3), bornée, définie sur $I = [0, \infty[$. Soit $\phi_k(t) = \phi(t + kT)$ où $k \in \mathbb{N}^*$, alors ϕ_k est une solution de l'équation (3.3).

En effet,

$$\begin{aligned}
\frac{d\phi_k(t)}{dt} &= \frac{\phi(t+kT)}{dt} \\
&= f(t+kT, \phi(t+kT)) \\
&= f(t, \phi(t+kT)) \\
&\Longrightarrow \frac{d\phi_k(t)}{dt} = f(t, \phi_k(t))
\end{aligned}$$

Montrons que la limite $\lim_{k \longrightarrow \infty} \phi_k(t)$ est une solution T-périodique de l'équation (3.3).

Si

$$\phi(0) = \phi_1(0)$$

on a

$$\phi_1(0) = \phi(T) \Longrightarrow \phi(0) = \phi(T)$$

Ce qui revient à dire que ϕ est une solution T-périodique.

Maintenant, si

$$\phi(0) \neq \phi_1(0)$$

alors la suite $\{\phi_k(t)\}$ est monotone sur $[0, T]$, et comme $\{\phi_k(t)\}$ est bornée, donc il existe une fonction u telle que $\phi_k(t) \longrightarrow u(t)$, lorsque $k \longrightarrow \infty$, sur $[0, T]$.

On montre que $u(t)$ est T-périodique.

On a

$$\phi_k(0) \longrightarrow u(0)$$

$$\phi_k(T) \longrightarrow u(T)$$

Mais on a

$$\phi_k(T) = \phi_{k+1}(0) \longrightarrow u(0).$$

Donc,

$$u(T) = u(0)$$

ce qui montre que $u(t)$ est T-périodique.

Comme ϕ est bornée sur $[0, \infty[$, il existe une constante A telle que

$$\sup_{t\in[0,T]} |\phi_k(t)| \leq A, \qquad \forall k \geqslant 1$$

d'où il vient que $\{\phi_k(t)\}$ est une suite uniformément bornée sur $[0, T]$, Ce qui implique qu'il existe une fonction continue u telle que

$$\phi_k(t) \longrightarrow u(t) < \infty \quad \textit{quand} \;\; k \longrightarrow \infty \quad \textit{sur}[0, T]$$

Montrons que u est une solution de l'équation (3.3), c'est à dire, u est continue et vérifie

$$u(t) - u(0) - \int_0^t f(s, u(s))ds = 0$$

En effet,

$$\left|u(t) - u(0) - \int_0^t f(s, u(s))ds\right| =$$

$$\left|u(t) - \phi_k(t) + \phi_k(t) - u(0) - \int_0^t f(s, \phi_k(s))ds + \int_0^t f(s, \phi_k(s)ds - \int_0^t f(s, u(s))ds\right|$$

$$\leq |u(t) - \phi_k(t)| + \left|\phi_k(t) - u(0) - \int_0^t f(s, \phi_k(s))ds\right| + \left|\int_0^t [f(s, \phi_k(s) - f(s, u(s))]ds\right|$$

$u(t)$ est une solution de l'équation si, et seulement si, $\phi_k(t) \longrightarrow u(t)$ uniformément en t.

Mais comme $\{\phi_k(t)\}$ est une suite uniformément bornée sur $[0, T]$, et que ϕ est uniformément continue sur $[0, (k + 1)T]$ pour tout $k \geqslant 1$, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall t_1, t_0 : |\, t_1 - t_0 \,| \leq \eta \Longrightarrow |\phi_k(t_1) - \phi_k(t_0)| \leq \varepsilon, \quad \forall k \geqslant 1.$$

D'après le théorème d'Ascoli, la suite $\{\phi_k(t)\}$ contient une sous-suite uniformément convergente vers une fonction continue, cette limite ne peut être que u.

Comme la convergence de $\{\phi_k(t)\}$ vers u est monotone donc $\{\phi_k(t)\}$ converge uniformément vers u et que u est une solution de l'équation (3.3).

■

Remarque 3.1.1. *Le théorème de Massera peut être démontré d'une autre façon différente à celle utilidée ici, et qui ne peut être élémentaire, cette nouvelle méthode est basée sur le théorème de Poincaré-Bendixson.*

Théorème 3.1.3. ***(Deuxième théorème de Massera)*** *On considère l'équation (3.3) avec $n = 2$, et supposons que toutes les solutions de cette équation existent pour tout $t \geqslant 0$ et que l'une d'elles est bornée, alors cette équation admet une solution T-périodique.*

Pour la démonstration de ce théorème, on doit utiliser le théorème de Brouwer.

Théorème 3.1.4. ***(Brouwer)*** *Toute application H continue, d'inverse continue, d'un ouvert connexe G dans lui même telle qu'il existe une suite $x_0, x_1 = Hx_0, x_2 = Hx_1 = H^2x_0, ...x_n = H^n x_0$, qui converge dans G, admet un point fixe dans G.*

Démonstration du deuxième théorème de Massera.

Soit H une application

$$H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$x_0 \longmapsto Hx_0 = x(T, 0, x_0)$$

Montrons que H est bijective.

H injective, en effet, soit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} Hx_1 &= Hx_2 \\ &\Longrightarrow x(T,0,x_1) = x(T,0,x_2) \\ &\Longrightarrow x(t,0,x_1) = x(t,0,x_2), \quad \forall t, \text{ (grâce à l'unicité).} \\ &\Longrightarrow x(0,0,x_1) = x(0,0,x_2) \\ &\Longrightarrow x_1 = x_2. \end{aligned}$$

H est surjective, ceci est donné par l'existence des solutions pour toute condition initiale, d'où il vient que, H est bijective.

La continuité de H découle de la continuité des solutions par rapport aux conditions initiales. Alors H est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans lui même, de plus, H conserve l'orientation.

Si x_0 est un point de départ d'une solution bornée ϕ, alors la suite $\{H^n x_0\}$ où $H^n x_0 = \phi(nT)$ est une suite bornée. Par conséquent, on peut extraire une sous-suite $\{\phi(kT)\}$ convergente.

D'après le théorème de *Brouwer*, H admet un point fixe x^* tel que

$$Hx^* = x^* \Longrightarrow x^* = x(T, 0, x^*)$$

Ainsi, la solution $x(T, 0, x^*)$ est une solution T-périodique, car

$$x(0, 0, x^*) = x(T, 0, x^*)$$

■

Corollaire 3.1.5. *Si $n = 2$, dans l'équation (3.3), et toutes les solutions sont bornées sur un intervalle $[0, \infty[$, alors l'équation (3.3) admet une solution T-périodique.*

Il y a un autre résultat important pour le cas $n > 2$.

Théorème 3.1.6. *[39] Si le système (3.2) a une solution qui est bornée pour tout $t \geqslant 0$ et $n-1$ de ses composantes sont périodiques de période T alors il existe une solution T-périodique.*

Remarque 3.1.2. *Dans l'article de R. A. Smith [51], on trouve une généralisation du théorème de Massera à une grande classe d'équation différentielles de dimensions $n \geqslant 3$*

Pour le cas des équations différentielles linéaires, on a le théorème suivant similaire au théorème 4.1.1.

Théorème 3.1.7. *[39] Pour $n = 1$ si le système (3.2) est linéaire, l'existence d'une solution bornée pour $t \geqslant 0$ implique l'existence d'une solution T-périodique.*

3.2 Problème d'existence de solutions presque périodiques pour les EDS

Soient donnés

1. Un espace probabilisé (Ω, F, P) un espace de probabilité complet.
2. $\{F_t, t \geqslant 0\}$ est une famille croissante de sous tribus contenant les ensembles négligeables de F et est continues à droite, il est claire que $F_\infty = \sigma\{U_{t\geqslant 0} F_t\}$.
3. Une variable aléatoire x_0, F_0-mesurable.
4. Un mouvement brownien $B(t)$, adapté au flot de tribus $\{F_t, t \geqslant 0\}$ c'est à dir, $B(t) = 0$, $\forall t \geqslant 0$, $B(t)$ est F_t-mesurable et les accroissements $B(t+s) - B(t)$ ne dépendent pas des tribus F_t pour $s \geqslant 0$.
5. Des fonctions $a(t,x)$ et $b(t,x)$, $t \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et on admet que $a(t,x)$ et $b(t,x)$ sont mesurables par rapport à l'ensemble des variables.

On considère l'équation différentielle stochastique unidimensionnelle

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dB_t \tag{3.4}$$

avec la condition initiale

$$X(0) = x_0$$

Cette équation peut être mise sous la forme intégrale

$$X(t) = x_0 + \int_0^t a(u, X_u)du + \int_0^t b(u, X_u)dB_u \quad t \geqslant 0.$$

$X(t)$ étant le processus cherché, l'existence et l'unicité sont assurées (voir[29, 30])

La deuxième intégrale de la partie droite est bornée et est bien définie comme une intégrale stochastique [26], [38], [28, page 66] .

3.2.1 Notations et préliminaires

Avec les mêmes considérations données ci-dessus, soit l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dB_t$$

où B_t est un mouvement brownien

supposons que les fonctions $a(t, x)$ et $b(t, x)$ sont définies comme suit $a(t, x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $b(t, x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ elles sont K-lipschitziennes de la façon suivante

$$\exists k > 0, \forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x, y \in \mathbb{R} : |a(t, x) - a(t, y)| \leq k|x - y| \tag{3.5}$$

et

$$\forall t, t_1 \in \mathbb{R}_+, \forall x, x_1 \in \mathbb{R} :$$
$$|b(t, x) - b(t_1, x_1)| \leq k(|t - t_1| + |x - x_1|) \tag{3.6}$$

Notons par B l'espace des fonctions aléatoires $x(t)$, F_t-mesurables pour tout t, vérifiant la relation $\sup_{t\geqslant 0} E|x(t)|^2 < \infty$. On munit Bde la norme

$$\|x\|_B = \sup_{t\geqslant 0}(E|x|^2)^{\frac{1}{2}}$$

3.2.2 Outils d'analyse stochastique

Formule d'Itô

Soit g(t,x,y) : $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,une fonction admettant des dérivées partielles d'ordre un et deux, continues, et considérons la martingale continue S_t. Si X_t est une solution de l'EDS

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dS_t$$

alors le processus $Y_t = g(t, X_t, S_t)$ admet la différentielle stochastique suivante

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t, S_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t, S_t)dX_t + \frac{\partial g}{\partial y}(t, X_t, S_t)dS_t +$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t, S_t)d < X >_t + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(t, X_t, S_t)d < X, S >_t +$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(t, X_t, S_t)d < S >_t \tag{3.7}$$

Définition 3.2.1. *On dit qu'un processus stochastique $X(t) : \mathbb{R} \longrightarrow L^2(P, B)$ est L^2-borné si $\exists M > 0$ tel que*

$$\|X(t)\|_B^2 \leq M < \infty$$

Définition 3.2.2. *On dit qu'un processus stochastique* $X(t) : \mathbb{R} \longrightarrow L^2(P, B)$ *est presque-périodique en moyenne* L_2 *si* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists l_\varepsilon > 0$ *et pour tout intervalle* I *de longueur* l_ε, *il existe* $\delta \in I$ *:*

$$\|X(t + \delta, w) - X(t, w)\|_B^2 < \varepsilon, \qquad \forall t \geqslant 0$$

La collection de tous les processus $X(t) : \mathbb{R} \longrightarrow L^2(P, B)$ presque-périodique en moyenne L_2 est notée par $PPer(\mathbb{R}, L^2(P, B))$.

On notera aussi par $Bor(\mathbb{R}, L^2(P, B))$ la collection des processus $X(t) : \mathbb{R} \longrightarrow L^2(P, B)$ L_2-bornés.

Remarque 3.2.1. $PPer(\mathbb{R}, L^2(P, B)) \subset Bor(\mathbb{R}, L^2(P, B))$.

les deux espaces $PPer(\mathbb{R}, L^2(P, B))$ et $Bor(\mathbb{R}, L^2(P, B))$ munis de la norme

$$\|x\|_B = \sup_{t \geqslant 0} (E|x|^2)^{\frac{1}{2}}$$

sont des espaces de Banach

Hypothèse. Supposons avoir les deux hypothèses suivantes

(H_1) $a(t, x)$ et $b(t, x)$ sont T-périodiques en t uniformément pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(T > 0)$.

(H_2) il existe une application $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $(t, x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ on ait :

$$g(t, x, y) = x + \int_0^y b(t, g(t, x, u))du \tag{3.8}$$

Remarque 3.2.2. L'application g donnée dans l'hypothèse (H_2) a été introduite par H. Doss dans pas mal de travaux, voir par exemple [20, 21]

On donne à présent quelques lemmes liés à l'application g.

lemme 3.2.1. *L'application* $g(t, x, y)$ *définie dans l'hypothèse* (H_2) *est solution de l'equation différentielle ordinaire*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y}(t, x, y) = b(t, u(t, x, y)) \\ u(t, x, 0) = x \end{cases} \tag{3.9}$$

Démonstration. On peut facilement dériver $g(t, x, y)$ par rapport à y et on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial y}(t, x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(x + \int_0^y b(t, g(t, x, r))dr \right) \\ &= 0 + b(t, g(t, x, y)). \\ g(t, x, 0) &= x. \end{aligned}$$

□

lemme 3.2.2. *[19] L'application $g(t,x,y)$ jouit des propriétés suivantes*

1. $\forall t, x, y, y_1 \in \mathbb{R} : g(t,x,y) = g(t, g(t,x,y_1), y - y_1)$
2. $\forall t, x, y \in \mathbb{R} : x = g(t, g(t,x,y), -y)$
3. Si $x_1 < x_2 : g(t,x_1,y) < g(t,x_2,y)$, $\forall t, y \in \mathbb{R}$
4. Lorsque b est de plus de classe C^2 l'application h est de classe C^2 et pour tout $(t,\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^3$ on a

I
$$\frac{\partial g}{\partial x}(t,x,y) = \exp\left(\int_0^y b'_x(t, g(t,x,s))ds\right)$$
et
$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(t,x,y) = b'b(t, g(t,x,y))$$

II
$$1 = \frac{\partial g}{\partial x}(t, g(t,x,y), -y).\frac{\partial g}{\partial x}(t,x,y)$$

III
$$0 = \frac{\partial g}{\partial x}(t, g(t,x,y), -y).\frac{\partial g}{\partial x}(t,x,y) - \frac{\partial g}{\partial y}(t, g(t,x,y), -y)$$

IV
$$\frac{\partial g}{\partial y}(t,x,-y) = b(t,x)\frac{\partial g}{\partial x}(t,x,-y)$$

V
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t,x,-y)b^2(t,x) - 2\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(t,x,-y)b(t,x)+$$
$$+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(t, g(t,x,-y), y)\frac{\partial g}{\partial x}(t,x,-y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(t,x,-y) = 0.$$

Si l'application $g(t,x,y)$ est restreintes à un borné quelconque $O_1 \times O_2$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on peut énoncer les lemmes suivants

lemme 3.2.3. *[10] L'application g est k_1-lipschitzienne en x dans le borné $O_1 \times O_2$.*

Démonstration. On a pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et pour tout x_1, $x_2 \in O_1$,$y \in O_2$.

$$\|g(t,x_1,y) - g(t,x_2,y)\| =$$
$$\left\|x_1 - x_2 + \int_0^y b(t, g(t,x_1,r))dr - \int_0^y b(t, g(t,x_2,r))dr\right\|$$
$$\leq \|x_1 - x_2\| + \left\|\int_0^y b(t, g(t,x_1,r))dr - \int_0^y b(t, g(t,x_2,r))dr\right\|$$
$$= \|x_1 - x_2\| + \left\|\int_0^y (b(t, g(t,x_1,r)) - b(t, g(t,x_2,r)))dr\right\|$$

$$\leq \|x_1 - x_2\| + \int_0^y \|b(t, g(t, x_1, r)) - b(t, g(t, x_2, r))\|dr$$

puisque b est k-lipschitzienne en x on obtient

$$\|g(t, x_1, y) - g(t, x_2, y)\| \leq \|x_1 - x_2\| + k \int_0^y \|g(t, x_1, r) - g(t, x_2, r)\|dr$$

D'après le lemme de Gronwall on obtient

$$\|g(t, x_1, y) - g(t, x_2, y)\| \leq \|x_1 - x_2\| e^{ky}$$

Puisque O_1,O_2 sont deux bornés de $\mathbb{R}$, d'où, il existe $d \in \mathbb{R}$: $|y| \leq d$, d'où

$$\begin{aligned}\|g(t, x_1, y) - g(t, x_2, y)\| &\leq \|x_1 - x_2\| e^{ky} \\ &\leq \|x_1 - x_2\| e^{kd}.\end{aligned}$$

Donc g est $k_1 = e^{kd}$- lipschitzienne en x. □

lemme 3.2.4. *[10] L'application $\frac{\partial g}{\partial y}(t, x, y)$ est bornée $O_1 \times O_2$.*

Démonstration. Pour tout $(x, y) \in O_1 \times O_2$ l'application $g(t, x, y)$ est lipschitzienne en y. On a pour tout y_1,$y_2 \in O_2$. et en suppososant, sans perte de généralité, que $y_2 < y_1$.

$$\begin{aligned}|g(t, x, y_1) - g(t, x, y_2)| &= \left| \int_0^{y_1} b(t, g(t, x, u))du - \int_0^{y_2} b(t, g(t, x, u))du \right| \\ &= \left| \int_{y_2}^{y_1} b(t, g(t, x, u))du \right| \\ &\leq |y_1 - y_2| \max_u |b(t, g(t, x, u))|.\end{aligned}$$

Posons $A = |b(t, g(t, x, u))|$, on sait que l'application b satisfait la croissance linéaire exprimée par

$$|b(t, x)| \leq k(1 + | x |).$$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\forall (x, u) \in O_1 \times O_2$

$$\begin{aligned}A &= |b(t, g(t, x, u))| \\ &\leq k(1 + |g(t, x, u)|),\end{aligned}$$

avec

$$g(t, x, u) = x + \int_0^u b(t, g(t, x, v))dv$$

d'où

$$A = |b(t, g(t, x, u))| \leq k \left(1 + |x| + \int_0^u |b(t, g(t, x, v))|dv \right)$$

$$= k(1+|x|) + k\int_0^u |b(t, g(t, x, v))|dv$$

Avec le lemme de Gronwall on obtient

$$A = |b(t, g(t, x, u))| \leq k(1+|x|)e^{ku}.$$

Puisque $(x, u) \in O_1 \times O_2$, il existe c,$d \in \mathbb{R}$: $|x| \leq c$, $|y| \leq d$ et donc

$$A = |b(t, g(t, x, u))| \leq k(1 + c)e^{kd}.$$

Ce qui nous donne

$$\max_u |b(t, g(t, x, u))| \leq k(1 + c)e^{kd} = k_2.$$

D'où il vient que

$$|g(t, x, y_1) - g(t, x, y_2)| \leq k_2|y_1 - y_2|$$

pour tout y_1,$y_2 \in O_2$.

Ceci nous permet de dire que $\frac{\partial g}{\partial y}(t, x, y)$ est bornée $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\forall(x, y) \in O_1 \times O_2$. □

lemme 3.2.5. *[10] Sous l'hypothèse (H_2) l'application $g(t, x, y)$ est périodique en t.*

Démonstration. Tenant compte de la propriété (I) du lemme 3.9

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(t, x, y) = b'b(t, g(t, x, y)) \tag{3.10}$$

et de la propriété (IV) du même lemme

$$\frac{\partial g}{\partial y}(t, x, -y) = b(t, x)\frac{\partial g}{\partial x}(t, x, -y) \tag{3.11}$$

D'autre part, nous obtenons de (3.11)

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(t, x, -y) = b(t, x)\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(t, x, -y) \tag{3.12}$$

Et de (3.10)

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(t, x, -y) = -b'b(t, g(t, x, -y)) \tag{3.13}$$

On combine (3.12) et (3.13) on obtient

$$b(t, x)\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(t, x, -y) = -b'b(t, g(t, x, -y)) \tag{3.14}$$

Posons $y^* = -y \in \mathbb{R}$, d'où

$$b(t,x)\frac{\partial^2 g}{\partial y^* \partial x}(t,x,y^*) = b'b(t,g(t,x,y^*)) \tag{3.15}$$

pour tout $t \geq 0$, x, $y^* \in \mathbb{R}$.

d'où, pour

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^* \partial x}(t,x,y^*) \neq 0$$

on obtient

$$b(t,x) = \frac{b'b(t,g(t,x,y^*))}{\frac{\partial^2 g}{\partial y^* \partial x}(t,x,y^*)} \tag{3.16}$$

Nous savons que si $f(t)$ et $g(t)$ sont deux fonctions continues dans $\mathbb{R}_+$ et si $f(g(t))$ est périodique en t, alors il en est de même pour $g(t)$, ceci implique que $g(t,x,y^*)$ est T-périodique en t, $T > 0$. □

3.3 Une méthode effective de résolution des EDS

Dans cette section nous allons donner un résultat dû à H. Doss [19] montrant que la résolution d'une EDS revient à la résolution d'une EDO paramétrée par l'éléement aléatoire ω. Nous allons indique la méthode de H. Doss, montrant que si les coefficients de l'équation différentielle stochastique (3.4) sont suffisamment réguliers, l'équation différentielle stochastique peut se résoudre au moyen de deux équations différentielles ordinaires dans les quelles ω ne joue effectivement que le rôle d'un paramètre.

On suppose que $a(t,x)$ et $b(t,x)$ sont définies comme ci-dessus, et on considère encore l'application $g(t,x,y)$ définie dans (H_2).

Théorème 3.3.1. *[19] Soient a et b deux fonctions vérifiant la condition de Lipschitz (3.5), (3.6), et supposons de plus, que b soit de class C^2 et supposons qu'on a l'hypothèse (H_2). Alors il existe un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ continu, F_t-adapté, presque sûrement localement lipschitzien en t, unique à une indistingabilité près, tel que $(X_t)_{t\geq 0}$ soit une solution de l'EDS*

$$dX_t = a(t,X_t)dt + b(t,X_t)dB_t. \tag{3.17}$$

La résolution de l'EDS (3.17) est équivalente à la résolution pour presque tout $\omega \in \Omega$ de l'EDO

$$\frac{dY_t(w)}{dt} = F_w(t,Y_t(w),B_t(w)) \tag{3.18}$$

$$Y_0(w) = y_0$$

$$F_w(t,Y_t(w),B_t(w)) = e^{-\int_0^{B_t(w)} \frac{\partial b}{\partial x}(t,g(t,Y_t(w),r))dr}\left(-\frac{\partial g}{\partial t}(t,Y_t(w),B_t(w))\right. \tag{3.19}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial b}{\partial x}b(t, g(t, Y_t(w), B_t(w))) + a(t, g(t, Y_t(w), B_t(w)))\Big)$$

Le processus Y_t obtenu comme solution est adapté et est à variations finies. Les équations différentielles (3.17) et (3.18) sont liées par la relation : X est la solution de (3.17) si, et seulement si,

$$X_t = Y_t + \int_0^{B_t} b(t, g(t, Y_t, r))dr$$

Y étant la solution de l'EDO (3.18). Y est la solution de (3.18) si, et seulement si,

$$Y_t = X_t + \int_0^{-B_t} b(t, g(t, X_t, r))dr$$

X étant la solution de l'EDS (3.17). L'équation (3.18) peut se résoudre trajectoire par trajectoire. Cette méthode fournit donc un moyen de résoudre l'équation (3.17) trajectoire par trajectoire.

Remarque 3.3.1. La démonstration de (3.18) est basée sur l'utilisation de la formule d'Itô (3.7) pour la fonction $Y_t(w) = g(t, X_t(w), -B_t(w))$, en utilisant les propriétés de l'application g données dans le lemme 3.2.2.

3.4 Résultat principal

Théorème 3.4.1. *Sous les hypothèses (H_1) et (H_2), l'existence d'une solution bornée en moyenne L_2 pour l'équation (3.4) implique l'existence d'une solution presque-périodique en moyenne L_2 pour cette même équation, c'est à dire, si l'équation différentielle stochastique (3.4) admet une solution $X(t) \in Bor(\mathbb{R}, L^2(P, B))$ alors elle admet une solution $Z^1(t) \in PPer(\mathbb{R}, L^2(P, B))$.*

3.4.1 Idée générale, motivation

Considérons l'EDS suivante

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dB_t \tag{3.20}$$

pour tout $t \geq 0$. Les fonctions $a(t, x)$ et $b(t, x)$ sont T-périodique en t uniformément pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Pour tout $\varepsilon > 0$ donné, posons pour $T > 0$

$$R = \varepsilon T$$

L'idée générale est d'utiliser le changement de variable

$$t = \frac{T}{R}u, \quad R > 0. \tag{3.21}$$

En portant ce changement de variables (3.21) dans l'équation (3.20) on obtient

$$
\begin{aligned}
dX_{\frac{T}{R}u} &= a\left(\frac{T}{R}u, X_{\frac{T}{R}u}\right) d\left(\frac{T}{R}u\right) + b\left(\frac{T}{R}u, X_{\frac{T}{R}u}\right) d\left(B_{\frac{T}{R}u}\right) \\
&= \frac{T}{R}a\left(\frac{T}{R}u, X_{\frac{T}{R}u}\right) du + \sqrt{\frac{T}{R}}b\left(\frac{T}{R}u, X_{\frac{T}{R}u}\right) d\left(\sqrt{\frac{T}{R}}B_{\frac{T}{R}u}\right)
\end{aligned}
$$

Posons

$$
\begin{aligned}
X_u^* &= X_{\frac{T}{R}u} \\
a^*(u,x) &= \frac{T}{R}a\left(\frac{T}{R}u, x\right) \\
b^*(u,x) &= \sqrt{\frac{T}{R}}b\left(\frac{T}{R}u, x\right) \\
B_u^* &= \sqrt{\frac{R}{T}}B_{\frac{T}{R}u}
\end{aligned}
$$

on obtient l'équation différentielle stochastique suivante

$$dX_u^* = a^*(u, X_u^*)du + b^*(u, X_u^*)dB_u^* \tag{3.22}$$

Les fonction $a^*(u,x)$ et $b^*(u,x)$ sont R-périodiques en u uniformément pour tout $x \in \mathbb{R}$. $(B_u^*)_{u\geq 0}$ est un mouvement brownien standard.

Si on note (Ω, F, F_u^*, P) l'espace probabilisé complet, avec

$$F_u^* = \sigma\left\{B_{\frac{T}{R}u}, u \geq 0\right\} = \sigma\{B_u^*, u \geq 0\}$$

la filtration du brownien B_u^* relativement à la nouvelle variable u, alors la solution de l'EDS (3.22) qu'on note X_u^* sera F_u^*-adaptée.

lemme 3.4.2. *[10] Si l'EDS (3.22) admet une solution presque-périodique en moyenne quadratique alors l'EDS (3.20) admet aussi une solution presque-périodique en moyenne quadratique.*

Démonstration. On a

$$
\begin{aligned}
|X_{t+T} - X_t|^2 &= \left|X_{\frac{T}{R}u+T} - X_{\frac{T}{R}u}\right|^2 = \left|X_{\frac{T}{R}u+\frac{R}{R}T} - X_{\frac{T}{R}u}\right|^2 \\
&= \left|X_{\frac{T}{R}(u+R)} - X_{\frac{T}{R}u}\right|^2 = |X_{u+R}^* - X_R^*|^2
\end{aligned}
$$

Donc

$$\sup_{t\geq 0} E|X_{t+T} - X_t|^2 = \sup_{u\geq 0} E|X_{u+R}^* - X_R^*|^2 < \varepsilon$$

ce qu'il fallait à montrer. □

Donc, au lieu d'étudier l'EDS (3.20) nous allons nous intéresser à l'EDS (3.22) pour tout $u \geq 0$.

L'EDS (3.22) satisfait les conditions du théorème 3.3.1 de H. Doss, donc la résolution de l'équation (3.22) revient à la résolution de l'équation différentielle ordinaire suivante

$$dY_u^* = F^*(u, Y^*, B_u^*)du \tag{3.23}$$

où

$$F^*(u, y, B_u^*) = e^{-\int_0^{B_u^*(w)} \frac{\partial b^*}{\partial x}(u, g(u,y,r))dr} \left(-\frac{\partial g}{\partial u}(u, y, B_u^*(w)) \right. \tag{3.24}$$

$$\left. -\frac{1}{2}\frac{\partial b^*}{\partial x} b^*(u, g(u, y, B_u^*(w))) + a^*(u, g(u, y, B_u^*(w))) \right)$$

Remarque 3.4.1. *Il est facile de voir que l'application $F^*(u, y, z)$ vérifie les propriétés suivante :*

1. *$F^*(u, y, z)$ est localement lipschitzienne en y et en z pour tout $u \geq 0$ (voir [19]).*
2. *$F^*(u + R, y, z) = F^*(u, y, z)$ uniformément pour tout $y, z \in \mathbb{R}$.*

Avant de donner la démonstration du théorème 3.4.1, nous présentons d'abord quelques ésultats.

Théorème 3.4.3. *[10] Sous les hypothèses (H_1) et (H_2), l'existence d'une solution L_2-bornée $X^*(u, w)$ pour l'EDS (3.21) implique l'existence d'une solution L_2-bornée $Y^*(u, w)$ pour l'EDO (3.22).*

Démonstration. Supposons que l'équation différentielle stochastique (3.21) admet une solution $X^*(u, w)$ bornée en moyenne quadratique i.e. $\exists M > 0$ tel que

$$\|X^*(u, w)\|_B^2 \leq M < \infty \tag{3.25}$$

Grâce à (H_2) et d'après le théorème 3.3.1 $X^*(u, w)$ est mise sous la forme suivante

$$X^*(u, w) = Y^*(u, w) + \int_0^{B_u^*(w)} b^*(u, g(u, Y^*(u, w), r))dr, \forall u \geq 0, p.s.$$

où $Y^*(u, w)$ est une solution de l'EDO (3.22).

Montrons que $Y^*(u, w)$ est L_2-bornée. On a

$$Y^*(u, w) = X^*(u, w) + \int_0^{-B_u^*(w)} b^*(u, g(u, X^*(u, w), r))dr$$

$$|Y^*(u, w)|^2 = \left| X^*(u, w) + \int_0^{-B_u^*(w)} b^*(u, g(u, X^*(u, w), r))dr \right|^2$$

$$|Y^*(u,w)|^2 \leq 2|X^*(u,w)|^2 + 2\left|\int_0^{-B_u^*(w)} b^*(u,g(u,X^*(u,w),r))dr\right|^2 \tag{3.26}$$

Posons

$$I = \left|\int_0^{-B_u^*(w)} b^*(u,g(u,X^*(u,w),r))dr\right|^2$$

Il est claire que $I > 0$. On combine les propriétés III et IV et en tenant compte de la propriété 2 du lemme 3.2.2 on a

$$\frac{\partial g}{\partial x}(u,g(u,x,y),-y)b^*(u,g(u,x,y)) = b^*(u,x) \tag{3.27}$$

Or

$$x^{\sim} = g(u,x,y) \Longleftrightarrow x = g(u,x^{\sim},-y),$$

donc (3.27) entraîne

$$\frac{\partial g}{\partial x}(u,x^{\sim},-y)b^*(u,x^{\sim}) = b^*(u,g(u,x^{\sim},-y)),$$

on en déduit que pour tout $u \geq 0$, x, $y \in \mathbb{R}$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(u,x,y)b^*(u,x) = b^*(u,g(u,x,y)) \tag{3.28}$$

D'où

$$\begin{aligned} I &= \left|\int_0^{-B_u^*(w)} \frac{\partial g}{\partial x}(u,X^*(u,w),r)b^*(u,X^*(u,w))dr\right|^2 \\ &= |b^*(u,X^*(u,w))|^2\left|\int_0^{-B_u^*(w)} \frac{\partial g}{\partial x}(u,X^*(u,w),r)dr\right|^2 \end{aligned}$$

Puisque la fonction b vérifie la condition de la croissance linéaire (cette condition est imposée à a et b pour assurer l'existence des solution pour l'EDS (3.17))

$$|b^*(u,x)| \leq k(1+|x|)$$

d'où

$$|b^*(u,x)|^2 \leq 2k^2(1+|x|^2).$$

Donc

$$\begin{aligned} I &= |b^*(u,X^*(u,w))|^2\left|\int_0^{-B_u^*(w)} \frac{\partial g}{\partial x}(u,X^*(u,w),r)dr\right|^2 \\ &\leq 2k^2(1+|X^*(u,w))|^2)\left|\int_0^{-B_u^*(w)} \frac{\partial g}{\partial x}(u,X^*(u,w),r)dr\right|^2 \end{aligned}$$

$$= 2k^2 \left| \int_0^{-B_u^*(w)} \frac{\partial g}{\partial x}(u, X^*(u,w), r) dr \right|^2 + 2k^2 |X^*(u,w)|^2 \left| \int_0^{-B_u^*(w)} \frac{\partial g}{\partial x}(u, X^*(u,w), r) dr \right|^2$$

*) Posons

$$\begin{aligned} I_1 &= E \left| \int_0^{-B_u^*(w)} \frac{\partial g}{\partial x}(u, X_u^*, r) dr \right|^2 \\ &= E \left| \int_0^{B_u^*(w)} \frac{\partial g}{\partial x}(u, X_u^*, -r) dr \right|^2 \\ &\leq e^{E \left| \int_0^{B_u^*(w)} \frac{\partial g}{\partial x}(u, X_u^*, -r) dr \right|^2} \end{aligned}$$

Puisque nous savons que pour un mouvement brownien B_u^* on a

$$\forall u \geq 0, B_u^* \leq \sup_{u \geq 0} B_u^*$$

avec

$$\sup_{u \geq 0} B_u^* > 0 \quad et \lim_{u \longrightarrow \infty} \sup_u B_u^* = +\infty.$$

Donc

$$\begin{aligned} I_1 &\leq e^{E \int_0^{B_u^*} |\frac{\partial g}{\partial x}(u, X_u^*, -r)|^2 dr} \\ &\leq e^{E \left(\int_0^{\sup_u B_u^*} |\frac{\partial g}{\partial x}(u, X_u^*, -r)|^2 dr \right)} \\ &\leq e^{E \left(\int_0^{\sup_u B_u^*} e^{-2kr} dr \right)} \\ &= e^{\frac{-1}{2k} E(e^{-2k \sup_u B_u^*} - 1)}, u \geq 0 \end{aligned}$$

Il est claire en passant à la limite lorsque $u \longrightarrow \infty$ que

$$\lim_{u \longrightarrow \infty} E(e^{-2k \sup_u B_u^*} - 1) = -1$$

donc

$$e^{\frac{-1}{2k} E(e^{-2k \sup_u B_u^*} - 1)} \longrightarrow_{u \longrightarrow \infty} e^{\frac{1}{2k}}$$

Finalement

$$I_1 \leq e^{\frac{1}{2k}} < \infty.$$

**) Posons

$$I_1 = E \left(|X_u^*|^2 \left| \int_0^{-B_u^*} \frac{\partial g}{\partial x}(u, X^*, r) dr \right|^2 \right)$$

On a

$$I_2 = E \left(|X_u^*|^2 \left| \int_0^{-B_u^*} \frac{\partial g}{\partial x}(u, X_u^*, r) dr \right|^2 \right)$$

$$\begin{aligned}
&\leq e^{E\left(|X_u^*|^2\left|\int_0^{-B_u^*}\frac{\partial g}{\partial x}(u,X_u^*,r)dr\right|^2\right)}\\
&\leq e^{E\left(|X_u^*|^2\left|\int_0^{B_u^*}\frac{\partial g}{\partial x}(u,X_u^*,-r)dr\right|^2\right)}\\
&\leq e^{E\left(|X_u^*|^2\int_0^{B_u^*}|\frac{\partial g}{\partial x}(u,X_u^*,-r)|^2dr\right)}\\
&\leq e^{E\left(|X_u^*|^2\int_0^{\sup_u B_u^*}|\frac{\partial g}{\partial x}(u,X_u^*,-r)|^2dr\right)}\\
&\leq e^{E\left(|X_u^*|^2\int_0^{\sup_u B_u^*}e^{-2kr}dr\right)}\\
&= e^{\frac{-1}{2k}E(|X_u^*|^2(e^{-2k\sup_u B_u^*}-1))}\\
&= e^{\frac{-1}{2k}E(|X_u^*|^2e^{-2k\sup_u B_u^*})}e^{\frac{1}{2k}E|X_u^*|^2}
\end{aligned}$$

puisque pour $M>0$: $E|X_u^*|^2\leq M$, et $|X_u^*|^2e^{-2k\sup_u B_u^*}\geq 0$ ce qui implique $E(|X_u^*|^2e^{-2k\sup_u B_u^*})\geq 0$ donc

$$e^{\frac{1}{2k}E|X_u^*|^2}\leq e^{\frac{M}{2k}}$$

et

$$e^{\frac{-1}{2k}E(|X_u^*|^2e^{-2k\sup_u B_u^*})}\leq 1$$

pour tout $u\geq 0$. ce qui implique

$$I_2\leq e^{\frac{M}{2k}}<\infty.$$

D'où il vient que

$$\sup_u E(I)\leq 2k^2e^{\frac{1}{2k}}+2k^2e^{\frac{M}{2k}}<\infty.$$

D'où il suit que

$$\sup_{t\geq 0}\sqrt{E|Y^*(u,w)|^2}\leq 2\sup_{t\geq 0}\sqrt{E|X^*(u,w)|^2}+2\sup_{t\geq 0}\sqrt{E\left|\int_0^{-B_u^*(w)}b^*(u,g(u,X^*(u,w),r))dr\right|^2}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\|Y^*(u,w)\|_B^2 &\leq 2\|X^*(u,w)\|_B^2+2\sqrt{2k^2e^{\frac{1}{2k}}+2k^2e^{\frac{M}{2k}}}\\
&\leq 2M+2\sqrt{2k^2e^{\frac{1}{2k}}+2k^2e^{\frac{M}{2k}}}\\
&<\infty
\end{aligned}$$

ce qui monter que $Y^*(u,w)$ est L_2-bornée. □

Théorème 3.4.4. *[10] Si l'EDO (3.24) admet une solution L_2-bornée alors elle est asymptotiquement presque périodique en moyenne L_2.*

Démonstration. Considérons une solution L_2-bornée de l'EDO (3.24) notée $Y^*(u)$. Construisons la suite $Y_u^{*n} = Y^*(u+nR)$ vérifiantn l'équation

$$\frac{dY_u^{*n}}{du} = F(u, Y_u^{*n}, B_{u+nR}^*)$$

de plus Y_u^{*n} est aussi L_2-bornée. Montrons que Y_u^* est asymptotiquement presque-périodique en moyenne quadratique.

Notons

$$\Delta_u^n = Y_u^{*n+1} - Y_u^{*n} \tag{3.29}$$

Si on a pour $n = 0$

$$\Delta_u^0 = 0$$

alors

$$\|\Delta_u^0\|_B = \sup_{u\geq 0} \sqrt{E|Y_{u+R}^* - Y_u^*|^2} = 0$$

et donc

$$E|Y_{u+R}^* - Y_u^*|^2 < \varepsilon.$$

ce qui entraîne que Y_u^* est une solution presque périodique en moyenne quadratique.

Mais si on a

$$\Delta_u^0 \neq 0$$

alors, tenant compte de l'unicité de la solution pour l'EDO (3.23) (voir [19, ,th. 1page101]), on a pour tout $n \geq 1$ ou bien

$$Y_u^{*n+1} < Y_u^{*n}$$

ou bien

$$Y_u^{*n+1} > Y_u^{*n}$$

ce qui convient de dire que $(Y_u^{*n})_n$ est monotone.

D'autre part, $(\Delta_u^n)_{n\geq 1}$ est bornée suivant la norme $\|\|_B$, en effet, on a

$$\begin{aligned}
\|\Delta_u^n\|_B &= \sup_u \sqrt{E|Y_u^{*n+1} - Y_u^{*n}|^2} \\
&\leq \sup_u \sqrt{E|Y_u^{*n+1}|^2} + \sup_u \sqrt{E|Y_u^{*n}|^2} \\
&\leq \|Y_u^{*n+1}\|_B + \|Y_u^{*n}\|_B \\
&\leq M + M = 2M < \infty
\end{aligned}$$

Puisque $(\Delta_u^n)_{n\geq 1}$ est monotone et bornée donc elle est convergente.

D'autre part, on a

$$\frac{d}{du}\{\|\Delta_u^n\|_B^2\} = \frac{d}{du}\left\{\|Y_u^{*n+1} - Y_u^{*n}\|_B^2\right\}$$

$$= \|F^*(u, Y_u^{*n+1}, B^*_{u+(n+1)R}) - F^*(u, Y_u^{*n}, B^*_{u+nR})\|_B^2$$
$$\leq 2\|F^*(u, Y_u^{*n+1}, B^*_{u+(n+1)R}) - F^*(u, Y_u^{*n}, B^*_{u+(n+1)R})\|_B^2$$
$$+2\|F^*(u, Y_u^{*n}, B^*_{u+(n+1)R}) - F^*(u, Y_u^{*n}, B^*_{u+nR})\|_B^2$$

Puisque $F^*(u, y, z)$ est localement lipschitzienne en y et en z, alors il existe deux constantes k_1, k_2 strictement positives telles que

$$\frac{d}{du}\{\|\Delta_u^n\|_B^2\} \leq$$

$$\leq 2k_1\|Y_u^{*n+1} - Y_u^{*n}\|_B^2 + 2k_2\|B^*_{u+(n+1)R} - B^*_{u+nR}\|_B^2$$
$$\leq 2k_1\|\Delta_u^n\|_B^2 + 2k_2\|B^*_{u+(n+1)R} - B^*_{u+nR}\|_B^2$$

Nous savons que pour un mouvement brownien B_t on a [32, problème2.10 page 55]

$$E|B_t - B_s|^{2n} = C_n|t - s|^n, n \geq 1,$$

pour $0 < t < s$, et $C_n > 0$. Donc

$$\|B^*_{u+(n+1)R} - B^*_{u+nR}\|_B^2 = C_1 R.$$

D'où il vient que

$$\frac{d}{du}\{\|\Delta_u^n\|_B^2\} \leq 2k_1\|\Delta_u^n\|_B^2 + 2k_2 C_1 R$$

avec

$$R = T\varepsilon$$

on obtient donc,

$$\frac{d}{du}\{\|\Delta_u^n\|_B^2\} \leq 2k_1\|\Delta_u^n\|_B^2 + 2k_2 C_1 T\varepsilon.$$

Le lemme de Gronwall nous donne

$$\|\Delta_u^n\|_B^2 \leq 2k_2 C_1 T\varepsilon e^{2k_1 u}$$

On peut choisir $\varepsilon > 0$ tel que

$$\sqrt{\varepsilon} < \frac{e^{-2k_1 u}}{2k_2 C_1 T}$$

D'ou il suit que

$$\| \Delta_u^n\|_B^2 < \sqrt{\varepsilon}$$

Ce qui implique qu'il existe $\{\delta_{nk}\}_{k\geq 1} \subset \{nR\}_{k\geq 1}$ telle que la suite $\{Y^*_{u+\delta_{nk}}\}_{k\geq 1}$converge uniformément par rapport á la norme L_p pour tout $u \geq 0$, ceci montre que Y_u^* est asymptotiquement presque périodique en moyenne L_2. □

Théorème 3.4.5. *[10] L'existance d'une solution presque-périodique en moyenne L_2 pour l'EDO (3.23) implique l'existance d'une solution presque périodique en moyenne L_2 pour l'EDS (3.19).*

Démonstration. Notons par Z_u une solution presque périodique en moyenne L_2 pour l'EDO (3.23), c'est à dire pour $k_1 > 0$

$$\sup_{u\geq 0} E|Z_{u+R} - Z_u|^2 < \frac{\sqrt{\varepsilon}}{4k_1}$$

Montrons que la solution

$$Z_u^1 = g(u, Z_u, B_u^*)$$

est une solution presque périodique en moyenne L_2 pour l'EDS(3.19)

Tout d'abord, Z_u^1 est une solution de l'EDS(3.19), on peut facilement le vérifier au moyen de la formule d'Itô.

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} |Z_{u+R}^1 - Z_u^1|^2 &= |g(u+R, Z_{u+R}, B_{u+R}^*) - g(u, Z_u, B_u^*)|^2 \\ &= |g(u, Z_{u+R}, B_{u+R}^*) - g(u, Z_u, B_{u+R}^*) + g(u, Z_u, B_u^*)|^2 \\ &\leq 2|g(u, Z_{u+R}, B_{u+R}^*) - g(u, Z_u, B_{u+R}^*)|^2 + 2|g(u, Z_u, B_{u+R}^*) - g(u, Z_u, B_u^*)|^2 \\ &\leq 2k_1|Z_{u+R} - Z_u|^2 + 2k_2|B_{u+R}^* - B_u^* \end{aligned}$$

donc

$$\|Z_{u+R}^1 - Z_u^1\|_B^2 \leq 2k_1\|Z_{u+R} - Z_u\|_B^2 + 2k_2C_1R, \qquad C_1 > 0.$$

Avec $R = T\varepsilon$, on peut choisir$\varepsilon > 0$ vérifiant $\sqrt{\varepsilon} < \frac{1}{4k_2C_1T}$ pour $T > 0$, d'où il vient que

$$\|Z_{u+R}^1 - Z_u^1\|_B^2 < 2k_1\frac{\sqrt{\varepsilon}}{4k_1} + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} = \sqrt{\varepsilon}$$

Ce montre que l'EDS3.18 admet une solution presque- périodique en moyenne L_2. □

3.5 Démonstration du théorème 3.3.1

Démonstration. Etant donnée une solution $X_t$bornée en moyenne L_2 de l'EDS(3.19), il est facile de voir en utilisant le changement de variable pour $T > 0, R > 0 et \varepsilon > 0$

$$t = \frac{T}{R}u = \frac{T}{\varepsilon T}u = \frac{1}{\varepsilon}u \tag{3.30}$$

que $X_u^* = X_{\frac{T}{R}u}$ est une solution bornée en moyenne L_2 de l'EDS (3.20). D'aprés le théorème 3.3.2 et sous les hypothèses $(H_1)et(H_2)$ l'EDS (3.21) admet une solutionY_u^* bornée en moyenne L_2 telle que

$$Y_u^* = g(u, X_u^*, -B_u^*)$$

pour presque tout $u \geq 0$

Puique l'existance de solutions presque- périodiques en moyenne quadratique pour l'EDO (3.21) est assurée par le théorème 3.3.3 donc Y_u^* est asymptotiquement presque-périodique en moyenne L_2 ce qui revient à dire que, l'EDO(3.21) admet une solution presque- périodique en moyenne quadratique qu'on notera Z_u. Grâce à l'application g est d'aprés le résultat du théorème 3.3.4 l'EDS (3.20) admet une solutionZ_u^1 presque-périodique en moyenne quadratique telle que

$$Z_u^1 = g(u, Z_u, B_u^*)$$

Finalement, tenant compte du changement de la variable (3.30)et du lemme (3.3.1) l'EDS(3.19) admet une solution presque- périodique en moyenne quadratique. □

Remarque 3.5.1. On aurait pu tout au long de ce travail, étudier l'existance de solutions presque-périodiquesen moyenne L_p, $p \geq 2$, pour cela on

considère l'espace B muni de la norme

$$\|x\|_{p,B} = \sup_{t \geq 0} (E|x|^p)^{\frac{1}{p}}$$

et en définissons les solutions bornées en moyenne L_p. Dans ce cas on démontra le théoreme suivant

Théorème 3.5.1. *[10] Sous $(H_1), (H_2)$, l'existence d'une solution bornée en moyenne $L_p(p \geq 2)$pour l'equation (3.3) implique l'existence d'une solution presque-périodique en moyenne $L_p(p \geq 2)$ pour cette même équation, c'est à dire, si l'équation différentielle stochastique(3.3) admet une solution $X(t) \in Bor(\mathbb{R}, L^p(P, B))$ alors elle admet une solution $X^1(t) \in PPer(\mathbb{R}, L^p(P, B))$.*

Conclusion et perspectives

Ce mémoire a étudié le problème d'existence et d'unicité de solutions presque-périodiques pour les équations différentielles stochastiques .

La contribution principale de ce travail est de montrer que l'existence d'une solution bornée implique l'existence de solutions presque périodiques, il s'agit d'une généralisation du théorème de *Massera* sur l'existence de solutions presque périodiques dans le cas des équations différentielles ordinaires, et en utilisant l'idée du lien entre les EDS et les équations différentielles ordinaires, lien établi par *H.Doss*.
Le travail important de ce mémoire, montre sous certaines conditions que l'existence d'une solution bornée en moyenne quadratique implique l'existence d'une solution L_2-presque périodique pour les équations différentielles stochastiques non linéaires à coefficients périodiques.

Comme perspective on pourra généraliser le travail de ce mémoire aux EDS multidémontionelles $n \geq 2$

On se demande aussi, la possibilité d'étendre le théorème de*Massera* aux cas des équations aux dérivées partielles stochastiques.

Bibliographie

[1] A. Abdeldaim and M. Yakout, *On some new integral inequalities of Gronwall-Bellman-Pachpatte type*, Appl. Math. Comut., **217** (2011), 7887-7899.

[2] L. Amério and G. Prousse, *Almost periodic functions and functional equations.* Van Nostrand, N.Y. 1971.

[3] L. Arnold and C. Tudor, *Stationary and almost periodic solutions of almost periodic affine stochastic differential equations*, Stochastics Rep. 64, N°.**3-4**, (1998) 177-193.

[4] F. Bedouhane, O. Mellah , P. Raynaude De Fitte, *Bochner-Almost periodicity for stochastic process,* Stochastic analysis and application, **30 :2 (**2012) 322-342.

[5] A. S. Besicovitch, *Almost periodic functions.* Cambridge University Press, 1932.

[6] J. Blot, *Une approche variationnelle des orbites quasi-périodiques des systèmes Hamiltoniens,* Ann.sc. math. Quebec, **13(2)**, (1989) ,7-32.

[7] S. Bochner, *Almost periodic solutions of the inhomogeneous wave equations,* Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. **46** (1960), 1233-1236.

[8] H. Bohr, *Almost Periodic Functions,* Chelsea Publishing Company, New York, 1947.

[9] M.A. Boudref et A. Berboucha , *New inequalities of Gronwall type for the stochastic differential equations,* De Gruyter, Random Operators and Stochastic Equations. Volume **23**, Issue **3 (**2015) ,151-159.

[10] M. A.boudref and A.Berboucha. Existence of almost periodic solutions of stochastic differential equations with periodic coefficients. Random Operators and Stochastic Equations 25(1). March 2017.

[11] C. Corduneaunu, *Almost Periodic Functions,* Second Edition, Chelsea, New York, 1989.

[12] T. Diagana, P. Bezandry, *Existence of almost periodic solutions to some stochastic differential equations.* Appl. Anal. **68**,N°**7 (**2007) ,812-827.

[13] Paul H. Bezandry and Toka Diagana, *Existence of almost periodic solutions to some stochastic differential equations*, Appl. Anal. 86, N°.**7** (2007), 819-827.

[14] Paul H. Bezandry and Toka Diagana, *Almost periodic stochastic process,* Springer New York, 2011.

[15] Paul H. Bezandry and Toka Diagana, *Existence of almost periodic solutions to some stochastic differential equations*, Appl. Anal. 86, N°.**7** (2007), 819-827.

[16] Paul H. Bezandry and Toka Diagana, *Existence of mean quadratic almost periodic solutions to some stochastic hyperbolic differential equations*, Electron. J. Differential Equations N°**9** (2009), 111-114.

[17] A. Dorogovtsev, *Existence of periodic solutions of abstract stochastic equations. Asymptotic periodicity of the Cauchy problem (in Russsian),* Teoria Verojatn.i Matem. Statistica, **39** (1988) ,47-52 .

[18] J.L. Doob, *Stochastic Process*, J. Wiley & Sons, 1953.

[19] H. Doss, *Lien entre équations différentielles stochastiques et ordinaires*, Ann. Inst. Henri Poincaré **13** (1977), 99-125.

[20] H. Doss G. Postelnicu, *Sur une approche probabiliste d'un problème d'analyse semi-classique*, Journal of functional analysis **224 (**2005) ,352-370.

[21] H. Doss, *Sur l'existence, l'unicité et le comportement asymptotique des solutions d'équataions différentielles stochastiques*, Ann. Inst. Henri Poincaré, VOl. XIV,N°**2** ,(1978), 198-214.

[22] Ding Tougren, *An extention of the Massera theorem, Acta.Math. Sinca*, New Series, vol.**5**, N°**2** (1989),195-164.

[23] Khallil Ezzimbi, Gaston M. N'Guérékata, *Massera type theorem for almost automorphic solutions of functional differential equations of neutral type,* J. Math. Anal. Appl. **316 (**2006) ,707-721.

[24] M. jeanblanc, Thomas Simon, *Eléments de calcul stochastique,* IRBID, Septembre 2005.

[25] Ph. E. Protter, *Stochastic Integration And Differential Equations.* Springer Berlin NewYork, 2003.

[26] I. Guikhman, A. Skorokhod, *Introduction à la théorie des processus aléatoires*, éd. Mir Moscou, 1980.

[27] I. Guikhman, A. Skorokhod, *Introduction à la théorie des processus aléatoires*, éd. Mir Moscou, 1980.

[28] Nadine Guillotin-Plantard, *Introduction au calcul stochastique, Polycopié,* univérsité de lyon1, France, 13 Septembre 2009.

[29] R. Z. Has'minskii, *Stochastic Stability of Differential Equations*, Sijthoff and Noordhoff, USA, 1980.

[30] N. Ikeda, S. Watanabe, *Stochastic differential equations and diffusion process*, Kodanasha LTD, 1981.

[31] K. Itô, *Stochastic Integral*. Proc. Imperical Acad. Tokyo, **22** (1944), 32-35.

[32] I. Karatzas, S. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer Verlag, New York, 1988.

[33] I. Karatzas, S. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer Verlag, New York, 1988.

[34] P.E. Kloeden, E. Platen, *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1999.

[35] Li M.Y., Wang Ke, M. Fan, *A Massera theorem for quasi-linear partial differential equations of first order*, Rocky Mountain J. Math. Volume 36, Number **5** (2006), 1715-1727.

[36] Qinc Liu, Nguyan Van Minh*, G.* Nguerekata, R. Yuan, *Massera Type Theorems For abstract Functional Differential Equations,* arXiv :math/ 0612197v2, **20** (2007), 1-18.

[37] G. Makay, *Periodic solutions of linear differential and integral equations.* Differential Integral Equations, **8** (1995), 2177-2187.

[38] X. R. Mao, *Stochastic Differential Equations and Applications*, Horwood, Chichester, 1997.

[39] J. L. Massera, *The existence of periodic solutions of systems of differential equations*. Duk.Maths. (1950), 457-475.

[40] Nguyen Van Minh, Ha Binh Minh, *A Massera-type criterion for almost periodic solutions of higher-order delayor advance abstract functional differential equations*, Abstr. Appl. Anal., (2004), 881-896.

[41] T. Morozan and C. Tudor, *Almost periodic solutions of affine Itô equations*, Stochastic Anal. Appl. 7, N°**4** (1989), 451-474.

[42] S. Murakami, T. Naito, *Massera's for almost periodic solutions of functional differential equations.* J. Math. Soc. Japan, Volume 56, Number 1 (2004), 247-268.

[43] Yasunori Okada, *Massera Criterion For Linear Functional Equations in a Framework Of Hyperfunctions,* J. Math. Sci. Uni. Tokyo **15** (2008), 15-51.

[44] B. K. Øksandal, *Stochastic Differential Equations.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg NewYork, 2000.

[45] Z. Opial, *Sur les solutions presque-périodiques d'une classe d'équations différentielles*, Annales Pol. Math. **7** (1960), 157-181.

[46] Rafael Ortega, Massimo Tarallo, *Massera's theorem for quasi-periodic differential equations,* Topological Methods in Nonlinear Analysis, J. Juliusz Schauder Center V. **19** (2002), 39-61.

[47] D. Revuz, M. Yor, *Continuous Martingales and Borwnian Motion,* Springer Berlin Heidelberg NewYork, 1998.

[48] Y. Rozanov, *Processus aléatoires*, éd. Mir Moscou, 1975.

[49] F. Rouvières, *Petit Guide de Calcul différentiel* , Cassini, 1991.

[50] S. Shreve, *Stochastic Calculus and Finance*, Polycopié, Université Heinrich Heine de Düsseldorf, 1996.

[51] R. A. Smith, *Massera's convergence theorem for periodic non linear differential equations.* J.Math.Analysis and App. Vol.120, N°**2** (1986), 679-708.

[52] C. Tudor, *Almost periodic solutions of affine stochastic evolution equations*, Stochastics Rep. **38**, N°**4** (1992), 251-266.

[53] T. Yoshizawa, *Stability theory by Ljapounov's second method*, Publications of the Mathematical Society of Japan, N°**9**, M.S.J. Tokyo, 1966.

[54] Xia Zhinan, Fan Meng, *A Massera Type Criterion for Almost Automorphy of Nonautonomous Boundary Differential Equations,* Electronic Journal of Qualitative Theory Differential Equations, N°**73** (2011), 1-13.

[55] O. Zubelevich, *On note on theorem of Massera,* Regular and chaotic dynamics. Vol.11, N°**4** (2006), 475-781.