



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



# جامعة أكلو محمد أولحاج - البويرة - Université Akli Mohand Oulhadj - Bouira -

Faculté des Sciences et des Sciences Appliquées  
Département de Mathématiques

## Mémoire de Master

Filière : Mathématiques

*Spécialité : Recherche Opérationnelle*

## Thème

---

Études probabilistes des équations aux récurrences  
Markoviennes homogènes

---

Présenté par :

- BELKACEMI Farouk
- ADJOU Redhouane

Devant le jury composé de :

Président	HAMID Karim	MAA	U.A.M.O Bouira.
Encadreur	DEMMOUCHE Nacer	MCB	U.A.M.O Bouira.
Examineur	BOUDREF Mohamed Ahmed	MCA	U.A.M.O Bouira.
Examineur	BIROUCHE Madjid	MAA	U.A.M.O Bouira.

---

Nous dédions ce travail :

- À nos parents qui nous ont donné le sens de la vie.
- À toutes nos familles BELKACEMI et ADJOU.
- À Tous nos chers amis en particulier Boussada Hafid et Walid Djouabi et Rahmoni Abd elhak et Mouain Djouabi et sans oublions Taldjone Rabeh et Benselam Lougmari et Metidji Islem et Saoudi Moussa.

## *Remerciements*

Tout d'abord, nous remercions ALLAH le clément et le miséricordieux de nous avoir donné la force et le courage de mener à bien ce travail.

Puis nous tenons à exprimer notre profonde gratitude envers Monsieur le Dr.Demmouche Nacer pour son encadrement et pour ses orientations, ses encouragements, sa disponibilité et ses précieux conseils. Nous avons grandement bénéficié de lui au cours de notre parcours académique. Nous avons bénéficié de ses connaissances abondantes, et de sa méthodologie d'enseignement exceptionnelle en son genre et il a eu le grand mérite après ALLAH à ce quoi nous avons obtenu des connaissances et des clés pour comprendre cette science et découvrir ses secrets.

Aussi nous tenons à remercier les membres du jury qui ont bien voulu accepter de juger notre travail.

Nous remercions également nos enseignant Monsieur Hamid Tikobaine pour la qualité de ses cours et pour son empressement à communiquer les concepts par toutes les manières possibles et nous avons grandement bénéficié à lui et ses compétences, et il nous beaucoup aidé au travers des ses précieux conseils au cours de notre parcours Académique, également nous remercions Monsieur Hamid Karim et Monsieur Lhadi boughani et le Dr.Mohamed Boudref et le Dr.Akkouche Abderahmane et Monsieur Bedek Said et tout les enseignants de la Faculté de Mathématique qui ont pris soin de notre éducation.

Enfin, nous remercions nos familles pour leurs encouragement et leurs soutiens continue et tous les personnes ayant contribué pour la réalisation de ce projet.

# Table des matières

<b>1 Outils préliminaires</b>	<b>4</b>
1.1 Indépendance stochastique	4
1.1.1 Indépendance stochastique de variables aléatoires	5
1.1.2 Sommes de variables aléatoires indépendantes	6
1.2 Convergences stochastiques	6
1.3 Loi des grands nombres	9
1.4 Espace de probabilité associé à un phénomène évolutif	10
1.4.1 Processus aléatoire	10
1.4.2 Distribution de probabilité d'un processus aléatoire	12
1.4.3 Caractéristiques de la distribution d'un processus aléatoire	13
1.5 Processus aléatoires strictement stationnaires	14
1.6 Processus stationnaire et théorème ergodique	15
1.6.1 Transformations préservant la mesure	17
1.6.2 Ergodicité et Mélange	18
1.6.3 Théorème ergodique	20
1.6.4 Théorème ergodique pour les processus stationnaires	20
<b>2 Équations aux récurrences stochastiques</b>	<b>22</b>
<b>3 Comportement des queues de la solution stationnaire</b>	<b>40</b>
3.1 Théorème de renouvellement	40
3.1.1 Théorème de renouvellement à support positif	41
3.1.2 Théorème de renouvellement à support dans $\mathbb{R}$	43
3.2 Variation régulière	44
3.2.1 Variation lente	44
3.2.2 Variation régulière	45
3.3 Variation régulière des queues de distributions	47
3.4 Queues de la solution stationnaire	48
<b>Bibliographie</b>	<b>63</b>

# Introduction générale

Au cours de ces dernières années, des études approfondies sont accordées aux équations aux récurrences stochastiques de type  $X_t = A_t X_{t-1} + B_t$  avec  $t \in \mathbb{N}^*$  et dont la suite des coefficients  $\{(A_t, B_t)\}_{t \in \mathbb{N}}$  est indépendante et identiquement distribuée (i.i.d). L'étude de cette équation consiste en la recherche des conditions suffisantes assurant l'existence et l'unicité d'une solution strictement stationnaire et ergodique (voir Vervaat [24], Babillot et al [1], Goldie et Maller [11], Brandt [4]). Plusieurs propriétés de cette solution ont été étudiées, à savoir l'existence des moments d'ordres supérieurs (voir Vervaat [24]), la variation régulière de la distribution marginale (voir Kesten [15]), la variation régulière des distribution fini-dimensionnelles, la variation régulière des sommes finies des variables de la solution strictement stationnaire, le théorème central limite, l'ergodicité géométrique et la propriété du mélange, la convergence des processus ponctuels générés par la solution strictement stationnaire, la théorie limite pour la fonction d'autocovariance empirique, les larges déviations et les probabilités de ruines (voir Davis et Mikosch [6], Hult et al [13], Konstantinides et Mikosch [17]). L'intérêt de cette équation réside en sa capacité de représenter la quasi totalité des modèles de séries chronologiques, à savoir les modèles ARCH et GARCH (voir Bougerol et Picard [3]), les modèles bilinéaires (voir Quinn [21]), les modèles autoregressifs à coefficients aléatoires (RCA) (voir Quinn et Nicholls [22]). Brandt [4] a étudié cette équation dans le cas où la suite des coefficients  $\{(A_t, B_t)\}_{t \in \mathbb{N}^*}$  est strictement stationnaire et ergodique, il a montré que les conditions suffisantes de Vervaat pour l'existence et l'unicité d'une solution strictement stationnaire pour le cas où  $\{(A_t, B_t)\}_{t \in \mathbb{N}^*}$  est iid restent valides pour le cas où  $\{(A_t, B_t)\}_{t \in \mathbb{N}^*}$  est strictement stationnaire et ergodique. Une autre généralisation a été faite par Benoite de Saporta [7] en supposant que la suite  $(A_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$  est une chaîne de Markov à espace d'états fini et  $(B_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de variables aléatoires i.i.d et indépendante de la suite  $(A_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$ .

Le travail de notre mémoire est réparti en trois chapitres :

- Dans le premier chapitre, on donne quelques rappels dont on aura besoin dans les prochains chapitres, à savoir, les différents modes de convergence stochastique de la suite de variables aléatoires, la stationnarité au sens stricte et au sens faible des processus aléatoire et le théorème ergodique.
- Dans le deuxième chapitre, on présente l'équation aux récurrences stochastique à coefficients iid. On donne les conditions suffisantes sur la suite  $\{(A_t, B_t)\}_{t \in \mathbb{N}^*}$  assurant la convergence de la suite  $(X_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$  générée par l'équation aux récurrences stochastique vers une certaine variable aléatoire  $X$  indépendamment de la variable initiale  $X_0$  et cette variable limite  $X$  vérifie une certaine identité en distribution et admet des moments d'ordres supérieurs finis.
- Dans le troisième chapitre, on développe le théorème de renouvellement proposé et démontré par Goldie [10] afin de l'appliquer pour étudier le comportement des queues de la solution strictement stationnaire de l'équation aux récurrences stochastique et pour montrer que la distribution marginale de la solution strictement stationnaire est à variation régulière avec un indice de variation qui vérifie une certaine équation.
- Le dernier chapitre présente la conclusion et certaines perspectives des travaux de recherches futurs concernant les coefficients  $\{(A_t, B_t)\}_{t \in \mathbb{N}^*}$  et certaines propriétés de la solution strictement stationnaire.

# Chapitre 1

## Outils préliminaires

### 1.1 Indépendance stochastique

Le concept d'indépendance stochastique a été adapté à partir de la propriété d'indépendance déterministe (fonctionnelle) entre deux grandeurs déterministes d'après un principe selon lequel : Tout ce qui concerne les valeurs dans le déterminisme sera, dans l'optique du stochastiquisme, adapté aux probabilités des valeurs. Dans le cadre du déterminisme, deux grandeurs (variables) déterministes sont dites indépendantes si la connaissance de la valeur de l'une ne modifie pas notre connaissance de la valeur de l'autre. Par exemple, la connaissance de l'âge d'une personne ne modifie pas notre connaissance de son poids. En revanche, dans l'optique stochastique, deux événements aléatoires seront dits stochastiquement indépendants si la connaissance de la réalisation de l'un ne modifie pas la probabilité de réalisation de l'autre. Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace de probabilité, deux événements aléatoires  $A, B \in \mathcal{F}$  sont dits stochastiquement indépendants si la réalisation de l'un n'apporte aucune modification à la probabilité de l'autre, c'est-à-dire  $P(A|B) = P(A)$  pourvu que  $P(B) > 0$ . Une définition plus générale qui est valable même quand l'un au moins des deux événements est de probabilité nulle est la suivante.

**Définition 1.1.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace de probabilité. Deux événements aléatoires  $A, B \in \mathcal{F}$  sont dits indépendants si  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ .

La définition précédente peut être généralisée au cas d'une famille finie d'événements aléatoires, mais là on distingue deux cas, à savoir l'indépendance deux-à-deux et l'indépendance mutuelle.

**Définition 1.2.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace de probabilité. Les événements  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$  sont dits deux-à-deux indépendants si pour tous  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  avec  $i \neq j$ ,  $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$ .

**Définition 1.3.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace de probabilité. Les événements aléatoires  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$  sont dits mutuellement indépendants si pour tout  $2 \leq r \leq n$  et tous  $i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r}) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_r}).$$

Notons que la notion d'indépendance mutuelle est plus forte que l'indépendance deux-à-deux. Parfois on parle juste d'indépendance d'événements, mais par défaut il s'agit d'indépendance mutuelle. De même la notion d'indépendance mutuelle peut être encore généralisée au cas d'une famille infinie d'événements comme suit.

**Définition 1.1.1.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace de probabilité. Une famille infinie d'événements aléatoires  $(A_i, i \in I)$  dans  $\mathcal{F}$  est dite indépendante si toute sous-famille finie est indépendante.

Le concept d'indépendance d'événements aléatoires peut être encore généralisée au cas d'une famille finie ou infinie de tribus d'événements comme suit.

**Définition 1.1.2.** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace de probabilité. La famille finie ou infinie  $(\mathcal{F}_i, i \in I)$  de sous-tribus de  $\mathcal{F}$  est dite indépendante si toute famille d'événements  $(A_i, i \in I)$  de  $(\mathcal{F}_i, i \in I)$ , i.e.,  $A_i \in \mathcal{F}_i, i \in I$ , est indépendante.

### 1.1.1 Indépendance stochastique de variables aléatoires

En utilisant les définitions précédentes, en particulier la définition d'indépendance des tribus d'événements, on définit l'indépendance de variables aléatoires.

**Définition 1.1.3.** Deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  définies sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  sont dites indépendantes, si pour tout  $B_1 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  et tout  $B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,

$$P(X \in B_1, Y \in B_2) = P(X \in B_1)P(Y \in B_2)$$

C'est clair que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes si et seulement si les  $\sigma$ -algèbres  $\mathcal{F}(X)$  et  $\mathcal{F}(Y)$  sont indépendantes.

L'indépendance d'une suite finie de variables aléatoires est donnée comme suit.

**Définition 1.1.4.** Les variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_n$  définies sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  sont dites indépendantes si pour tous boréliens  $B_1, B_2, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,

$$P(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, \dots, X_n \in B_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i \in B_i). \quad (1.1)$$

On déduit immédiatement que les variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont indépendantes si et seulement si les  $\sigma$ -algèbres  $\mathcal{F}(X_1), \mathcal{F}(X_2), \dots, \mathcal{F}(X_n)$  sont indépendantes.

L'indépendance de variables aléatoires est préservée sous des transformations mesurables.

**Théorème 1.1.** Si  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont indépendantes, alors pour toutes fonctions Borel mesurables  $f_1, f_2, \dots, f_n$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , les variables aléatoires  $f_1(X_1), f_2(X_2), \dots, f_n(X_n)$  sont également indépendantes.

L'indépendance d'une suite finie de variables aléatoires se généralise au cas d'une suite infini comme suit.

**Définition 1.1.5.** Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires définies sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On dit que  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de variables aléatoires indépendantes, si pour tout  $n \geq 2$ , les variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes, i.e., pour tous  $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , on a

$$P(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) = P(X_1 \in B_1) \dots P(X_n \in B_n)$$

On déduit immédiatement que  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de variables aléatoires indépendantes si et seulement si  $(\mathcal{F}(X_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de  $\sigma$ -algèbres indépendantes.

**Proposition 1.1.1.** Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite dans  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ , alors

$$P(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2, \dots) = \prod_{i=1}^{\infty} P(X_i \in B_i)$$

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite de variables aléatoires soit indépendante est donnée par le résultat suivant.

**Théorème 1.1.1.** La suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de variables aléatoires est indépendante si et seulement si pour tout  $n \geq 2$  et tout  $n$ -uplet  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,

$$F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2) \dots F_{X_n}(x_n)$$

### 1.1.2 Sommes de variables aléatoires indépendantes

La densité de la somme de deux variables absolument continues est définie comme suit.

**Théorème 1.2.** *Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes et absolument continues, alors  $X + Y$  est absolument continue de densité*

$$f_{X+Y}(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(v-s)f_Y(s)ds, v \in \mathbb{R}.$$

La densité donnée dans le théorème 1.2 est appelée convolution.

**Définition 1.4.** *La convolution de deux densité  $f$  et  $g$  est la densité  $f * g$  définie par*

$$f * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s)ds, t \in \mathbb{R}.$$

La fonction de distribution de la somme de deux variables indépendantes est donnée comme suit.

**Théorème 1.1.2.** *Si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires indépendantes définies sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , alors*

$$F_{X+Y}(t) = \int_{\mathbb{R}} F_X(t-y)dF_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} F_Y(t-x)dF_X(x), t \in \mathbb{R}.$$

L'opération définie dans le théorème 1.2 est appelée convolution.

**Définition 1.1.6.** *La convolution de deux fonctions de distribution  $F$  et  $G$  sur  $\mathbb{R}$  est la fonction de distribution*

$$F * G(t) = \int_{\mathbb{R}} F(t-y)dG(y) = \int_{\mathbb{R}} G(t-x)dF(x).$$

## 1.2 Convergences stochastiques

Rappelons qu'une suite de variables aléatoires  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots)$  (notée aussi  $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$ ) définies sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  peut être définie comme une application mesurable de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}^\infty$  qui pour tout issu  $\omega$  associe une suite de nombres réels  $\mathbf{X}(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \dots)$ . Comme pour le cas de suites réelles, il est donc très important de connaître le comportement des suites  $\mathbf{X}(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \dots)$  lorsque  $n$  croit indéfiniment. Cependant la question n'est pas aussi simple que pour les suites réelles, puisque dans le cas de suite de variables aléatoires il existe plusieurs façons (ou modes) selon lesquelles une suite de variables aléatoires  $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$  peut s'approcher ou tendre vers une limite  $X$ . Un premier critère est celui de convergence d'une suite  $\mathbf{X}(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \dots)$  pour tout  $\omega \in \Omega$ .

**Définition 1.5. (Convergence en une issue)** *Une suite de variables aléatoires  $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$  définies sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  est dite avoir une limite (ou convergente) en un point  $\omega \in \Omega$  si la suite de nombres réels  $(X_n(\omega), n \in \mathbb{N}^*)$  converge vers une limite  $X(\omega)$ .*

Cette définition n'est pas utile en soi puisqu'on ne s'intéresse pas au comportement d'une suite en un résultat spécifique  $\omega \in \Omega$  de l'expérience. Cependant elle peut servir pour d'autres concepts de limite plus importants. Il est utile de noter qu'une suite de variables aléatoires étant une suite de fonctions définies sur  $\Omega$ , on peut en définir le concept de convergence simple.

**Définition 1.6. (Convergence simple)** *Une suite de variables aléatoires  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots)$  définie sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  converge simplement vers la variable aléatoire  $X$  définie sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  si pour tout  $\omega \in \Omega$ ,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega).$$

Autrement dit,

$$\forall \omega \in \Omega, \forall \epsilon > 0, \exists n_{\epsilon, \omega} > 0, n > n_{\epsilon, \omega} \Rightarrow |X_n(\omega) - X(\omega)| < \epsilon$$

La définition (1.6) trop forte puisqu'elle exige la convergence pour tout  $\omega \in \Omega$ . En pratique, il existe rarement des suites de variables aléatoires convergentes simplement vers une variable aléatoire. C'est pourquoi, une telle définition est allégée en exigeant la convergence seulement sur un sous-ensemble particulier de  $\Omega$ .

**Définition 1.7.** Soit une suite de variables aléatoires  $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$  et une variable aléatoire  $X$  définies sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . L'ensemble  $\{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\} \in \mathcal{F}$  est dit ensemble de convergence de la suite  $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$ .

On peut parler de la probabilité de convergence d'une suite  $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$  en faisant référence à la probabilité de son ensemble de convergence. Une définition de convergence moins forte que la convergence simple mais qui reste quand même assez forte est le concept de convergence presque sûre (p.s) (dite aussi convergence avec probabilité un).

**Définition 1.8. (Convergence p.s)** Une suite de variables aléatoires  $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$  définie sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  converge presque sûrement (avec une probabilité un) vers la variable aléatoire  $X$  définie sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  et on écrit  $X_n \xrightarrow{p.s} X$ , s'il existe un ensemble nul  $A$  dans  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  tel que la suite  $(X_n(\omega), n \in \mathbb{N}^*)$  converge vers  $X(\omega)$  pour tout  $\omega \in \Omega - A$ . Autrement dit, si son ensemble de convergence est de probabilité 1, i.e.,

$$P\{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\} = 1.$$

On peut exhiber des exemples dans lesquels pour tout  $\omega \in \Omega$ , la suite  $(X_n(\omega), n \in \mathbb{N}^*)$  ne converge pas vers  $X(\omega)$ , mais  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\} = 0$  pour tout  $\varepsilon > 0$ .

**Définition 1.9. (Convergence en probabilité)** Une suite de variables aléatoires  $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$  définie sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  converge en probabilité vers la variable aléatoire  $X$  définie sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  et on écrit  $X_n \xrightarrow{P} X$ , si pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\} = 0.$$

Si  $X_n \xrightarrow{P} X$ ,  $E|X| < \infty$  et  $E|X_n| < \infty$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , il n'en résulte pas que la suite  $(E|X_n|)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $E|X|$ . Si la suite  $(E|X_n|)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge, sa limite peut être différente de  $E|X|$ .

**Définition 1.10.** On dit qu'une suite de variables aléatoires  $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$  définie sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  est bornée en probabilité si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall n \in \mathbb{N}, P(\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega)| \geq \delta_\varepsilon\}) < \varepsilon$$

On note par  $L^1 = L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$  l'espace vectoriel de variables aléatoires intégrables, i.e., l'espace des variables aléatoires  $X$  définies sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  telles que  $E|X| < \infty$ . De même pour  $p \in ]0, \infty[$ ,  $L^p = L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$  est la classe de toutes les variables aléatoires  $X$  définies sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  pour lesquelles  $E(|X|^p) < \infty$ .

**Définition 1.11. (Convergence en moyenne d'ordre  $p > 0$ )** Soit  $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$  une suite de variables aléatoires sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  et  $X$  une variable sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Supposons qu'il existe  $p > 0$  tel que  $E(|X_n|^p) < \infty$  pour tout  $n \geq 1$ . On dit que la suite  $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$  converge en moyenne d'ordre  $p$  (ou converge dans  $L^p$ ) vers  $X$  et on écrit  $X_n \xrightarrow{p} X$  ou  $X_n \xrightarrow{L^p} X$ , si  $\lim_{n \rightarrow \infty} E(|X_n - X|^p) = 0$ .

Un autre mode de convergence très répandu et qui n'implique pas directement les valeurs de  $X_n$  mais plutôt leurs distributions est connu sous le nom convergence en distribution.

**Définition 1.12. (Convergence en distribution)** Une suite de variables aléatoires  $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$  définie sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  converge en distribution (ou en loi) vers la variable aléatoire  $X$  définie sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  et on écrit  $X_n \xrightarrow{d} X$ , si  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$  pour tout  $x$  où  $F_X$  est continue, i.e.  $P(X = x) = 0 \Rightarrow F_{X_n}(x) \rightarrow F_X(x)$

Notons que la convergence d'une suite de variables aléatoires  $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$  vers une variable aléatoire  $X$  n'implique pas toujours que  $(E(X_n), n \in \mathbb{N}^*)$  converge vers  $E(X)$ , mais sous une hypothèse supplémentaire la dernière convergence est vérifiée.

**Théorème 1.3. (Théorème de convergence dominée)** Soit  $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$  une suite de variables aléatoires telle que  $X_n \xrightarrow{p.s} X$  et  $|X_n| < Y$  avec  $E(Y) < \infty$ , alors  $E(X_n) \rightarrow E(X)$ .

Le résultat suivant illustre les implications qui sont toujours valables.

**Théorème 1.4.** On a les implications suivantes :

- (1)  $X_n \xrightarrow{p.s} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$ .
- (2)  $X_n \xrightarrow{L^2} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{L^1} X$ .
- (3)  $X_n \xrightarrow{L^1} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$ .
- (4)  $X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X$ .
- (5)  $p \geq 1, X_n \xrightarrow{L^p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$ .

La convergence en distribution vers une constante implique une convergence en probabilité.

**Proposition 1.2.1.** Soit  $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$  une suite de variables aléatoires. Si  $X_n \xrightarrow{d} c$  alors  $X_n \xrightarrow{P} c$ .

La convergence presque sûre, la convergence en probabilité, la convergence en moyenne quadratique et la convergence en moyenne sont conservées sous l'addition.

**Théorème 1.5.** Soit  $X, Y, X_n, Y_n, n \in \mathbb{N}$  des variables aléatoires.

- 1) Si  $X_n \xrightarrow{p.s} X$  et  $Y_n \xrightarrow{p.s} Y$ , alors  $X_n + Y_n \xrightarrow{p.s} X + Y$
- 2) Si  $X_n \xrightarrow{P} X$  et  $Y_n \xrightarrow{P} Y$ , alors  $X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$
- 3) Si  $X_n \xrightarrow{m.q} X$  et  $Y_n \xrightarrow{m.q} Y$ , alors  $X_n + Y_n \xrightarrow{m.q} X + Y$
- 4) Si  $X_n \xrightarrow{L^1} X$  et  $Y_n \xrightarrow{L^1} Y$ , alors  $X_n + Y_n \xrightarrow{L^1} X + Y$

Soit  $X, X_n, Y_n, n \in \mathbb{N}$  des variables aléatoires. Si  $X_n \xrightarrow{d} X$  et  $Y_n \xrightarrow{d} Y$ , ce là n'implique pas que  $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + Y$ , mais ceci est vrai lorsque une des limites  $X$  ou  $Y$  est constante.

**Théorème 1.6. (Théorème de Slutsky)** Soit  $X, X_n, Y_n, n \in \mathbb{N}$  des variables aléatoires. Si  $X_n \xrightarrow{d} X$  et  $Y_n \xrightarrow{d} c \in \mathbb{R}$ , alors  $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c$

La convergence presque sûrement et en probabilité sont conservées sous la multiplication. La convergence en moyenne quadratique des produits ne tient pas en générale, car  $XY$  peut ne pas être dans  $L^2$  quand  $X$  et  $Y$  sont dans  $L^2$ . Cependant, le produit des variables aléatoires dans  $L^2$  appartient à  $L^1$  et la convergence des facteurs dans  $L^2$  implique la convergence des produits dans  $L^1$ .

**Théorème 1.7.** Soit  $X, Y, X_n, Y_n, n \in \mathbb{N}$  des variables aléatoires.

- 1) Si  $X_n \xrightarrow{p.s} X$  et  $Y_n \xrightarrow{p.s} Y$ , alors  $X_n Y_n \xrightarrow{p.s} XY$
- 2) Si  $X_n \xrightarrow{P} X$  et  $Y_n \xrightarrow{P} Y$ , alors  $X_n Y_n \xrightarrow{P} XY$
- 3) Si  $X_n \xrightarrow{m.q} X$  et  $Y_n \xrightarrow{m.q} Y$ , alors  $X_n Y_n \xrightarrow{L^1} XY$

Le théorème de Slutsky pour la multiplication est donnée comme suit.

**Théorème 1.8. (Théorème de Slutsky)** Soit  $X, X_n, Y_n, n \in \mathbb{N}$  des variables aléatoires. Si  $X_n \xrightarrow{d} X$  et  $Y_n \xrightarrow{d} c \in \mathbb{R}$ , alors  $X_n Y_n \xrightarrow{d} cX$ .

La convergence presque sûrement, en probabilité et en distribution sont préservée sous des applications continues.

**Théorème 1.9.** Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue.

- 1) Si  $X_n \xrightarrow{p.s} X$ , alors  $g(X_n) \xrightarrow{p.s} g(X)$ .
- 2)  $X_n \xrightarrow{P} X$ , alors  $g(X_n) \xrightarrow{P} g(X)$ .
- 3)  $X_n \xrightarrow{d} X$ , alors  $g(X_n) \xrightarrow{d} g(X)$ .

### 1.3 Loi des grands nombres

On commence par rappeler l'énoncé de la loi des grands nombres pour le schéma de Bernoulli. Rappelons qu'une épreuve de Bernoulli de paramètre  $p$  compris entre 0 et 1 est une expérience aléatoire comportant deux issues, le succès ou l'échec. On appelle schéma de Bernoulli de paramètres  $n$  et  $p$  toute expérience aléatoire consistant à répéter  $n$  fois de façon indépendante une épreuve de Bernoulli de paramètre  $p$ .

Soit  $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$  une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées avec  $P(X_1 = 1) = p$  et  $P(X_1 = 0) = 1 - p$ . En terme de concept de convergence en probabilité, la loi des grand nombres de Bernoulli peut être énoncée comme suit :

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} p, n \rightarrow \infty, \text{ où } S_n = X_1 + \dots + X_n. \quad (1.2)$$

Maintenant soit  $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$  une suite de variables indépendantes avec  $E|X_n| < \infty, n \in \mathbb{N}^*$  et soit  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . Si  $(Var(X_n), n \in \mathbb{N}^*)$  est uniformément bornées, i.e.,  $\sup_n Var(X_n) \leq \alpha < \infty$ , alors par l'inégalité de Chebyshev on a la loi faible des grands nombres

$$\frac{S_n - E(S_n)}{n} \xrightarrow{P} 0, n \rightarrow \infty, \quad (1.3)$$

Une loi forte des grands nombres est une proposition dans laquelle la convergence en probabilité est remplacée par la convergence presque sûrement. L'un des premiers résultats dans cette direction est le théorème suivant.

**Théorème 1.10. (Cantelli)** Soit  $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$  une suite de variables aléatoires indépendantes avec  $E(X_n^4) < \infty, n \in \mathbb{N}^*$  et  $E|X_n - E(X_n)|^4 \leq C, n \in \mathbb{N}^*$  pour une certaine constante  $C$ , alors

$$\frac{S_n - E(S_n)}{n} \xrightarrow{p.s} 0, n \rightarrow \infty. \quad (1.4)$$

L'hypothèse du théorème 1.10 peut être affaiblie par l'utilisation de méthodes plus précises.

**Théorème 1.11. (Kolmogorov)** Soit  $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$  une suite de variables aléatoires indépendantes avec  $E(X_n^2) < \infty, n \in \mathbb{N}^*$ , soit  $b_n > 0, n \in \mathbb{N}^*$  tels que  $b_n \uparrow \infty$  et  $\sum_{n=1}^{\infty} Var(X_n)/b_n^2 < \infty$ , alors

$$\frac{S_n - E(S_n)}{b_n} \xrightarrow{p.s} 0, n \rightarrow \infty. \quad (1.5)$$

Dans le cas où  $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$  est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, on peut obtenir une loi forte des grands nombres sans supposer l'existence de second moment, on suppose juste l'existence de premier moment absolu.

**Théorème 1.12. (Kolmogorov)** *Soit  $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$  une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées avec  $E|X_1| < \infty$ , alors*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p.s} E(X_1), n \rightarrow \infty. \tag{1.6}$$

## 1.4 Espace de probabilité associé à un phénomène évolutif

Pour représenter mathématiquement un phénomène aléatoire évolutif donné, la première étape consiste à lui associer un espace de probabilités  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  où  $\Omega$  désigne l'ensemble de ses réalisations possibles,  $\mathcal{F}$  est une tribu de parties de  $\Omega$  représentant les événements que l'on puisse formuler, a priori, à propos des réalisations possibles de ce phénomène et  $P$  est une mesure de probabilité sur  $\mathcal{F}$ , mesurant les chances de réalisation des événements de  $\mathcal{F}$  associés. L'espace fondamental  $\Omega$  est supposé dépendre implicitement d'un ensemble  $T$  représentant le domaine d'évolution du phénomène. A chaque moment  $t \in T$  de l'évolution, on peut associer un ensemble  $\Omega_t$  représentant les résultats possibles du phénomène à l'instant  $t$ . Sur tout le domaine  $T$ , l'ensemble des réalisations possibles  $\Omega$  sera le produit cartésien des ensembles  $\Omega_t$ , i.e.  $\Omega = \prod_{t \in T} \Omega_t$ . La tribu  $\mathcal{F}$  dépend également implicitement du domaine d'évolution  $T$ . A tout moment  $t \in T$  de l'évolution, on peut associer une tribu élémentaire  $\mathcal{F}_t$  représentant les événements liés au phénomène à l'instant  $t$ . Sur tout le domaine  $T$ , la tribu  $\mathcal{F}$  des événements liés au phénomène est le produit  $\mathcal{F} = \bigotimes_{t \in T} \mathcal{F}_t$  qui est la plus petite tribu contenant tous les ensembles de la forme  $\prod_{t \in T} A_t$  avec  $A_t \in \mathcal{F}_t$  et pour éviter des situations de dégénérescence, cette tribu est telle qu'elle doit renfermer les événements élémentaires associés à tout moment de l'évolution (e.g.  $\{\omega_t\} \in \mathcal{F}$ , pour tout  $t$ ). De tels événements sont dits projections des événements élémentaires  $\{\omega = (\omega_t, t \in T)\}$ . Puisque  $\Omega$  représente un produit d'espaces élémentaires  $\omega_t$ , les événements élémentaires projections peuvent s'exprimer à travers des ensembles cylindriques que la tribu  $\mathcal{F}$  doit contenir. La représentation d'expériences finement répétées est un cas particulier. Par exemple, dans le cas par exemple où  $T = \mathbb{N}$ , les ensembles cylindriques sont de la forme

$$\prod_{k=0}^{j-1} \Omega_k \times A_j \times \prod_{k=j+1}^{\infty} \Omega_k, A_j \in \mathcal{F}_j, j \in \mathbb{N}.$$

L'espace probabilisable  $(\Omega, \mathcal{F})$  est donc le produit d'espaces élémentaires  $(\Omega_t, \mathcal{F}_t)$ , i.e.,

$$(\Omega, \mathcal{F}) = \prod_{t \in T} (\Omega_t, \mathcal{F}_t).$$

La mesure de probabilité  $P$  définie sur  $\mathcal{F}$  dépend également de  $T$ . Pour tout  $t$ , soit  $P_t$  une mesure de probabilité sur l'espace  $(\Omega_t, \mathcal{F}_t)$ , alors sur tout le domaine d'évolution  $T$ , la mesure de probabilité  $P$  est fonction des  $(P_t, t \in T)$ . Dans le cas où le phénomène est soumis à l'indépendance mutuelle, on a  $P = \prod_{t \in T} P_t$ . L'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  est le produit d'espaces élémentaires  $(\Omega_t, \mathcal{F}_t, P_t)$ , i.e.,  $(\Omega, \mathcal{F}, P) = \prod_{t \in T} (\Omega_t, \mathcal{F}_t, P_t)$ .

### 1.4.1 Processus aléatoire

L'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  étant complètement spécifié, on peut en associer une application qui permet de numériser l'ensemble  $\Omega$  des réalisations possibles, lequel peut être quelconque. Par

numériser on entend associer à chaque réalisation du phénomène, à tout moment  $t \in T$  de l'évolution, un nombre ou un vecteur de nombres réels. Lorsque  $\Omega$  est d'emblée numérique dans le sens où les composantes de  $\omega \in \Omega$  sont des nombres ou des vecteurs de réels, on peut prendre pour application l'identité et l'espace  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  est alors dit canonique. Une telle application qui numérise  $\Omega$ , dite processus aléatoire, et qui doit vérifier certaines conditions de mesurabilité, peut être définie de plusieurs manières. On réservera ici trois définitions dont chacune se base sur un angle de vue différent.

- 1) **Vision verticale**, regarde un processus du point de vue de ses membres, i.e. de variables aléatoires le constituant.
- 2) **Vision horizontale**, définit un processus par rapport à ses réalisations.
- 3) **Vision croisée**, définit le processus du point de vu de croisement d'un membre du processus et d'une réalisation possible.

**Définition 1.13.** *Un processus aléatoire de domaine d'évolution  $T$ , défini sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  et à valeurs dans un espace d'état  $E$  qui est muni d'une tribu  $\mathcal{E}$  est une famille de variables aléatoires  $(X_t, t \in T)$  chacune définie sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  à valeur dans  $(E, \mathcal{E})$ . Autrement dit,  $(X_t, t \in T)$  est une application qui associe pour tout  $t$  dans  $T$  une variable aléatoire  $X_t$  dans  $\mathcal{D}((\Omega, \mathcal{F}), (E, \mathcal{E}))$ , ensemble des fonctions  $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ -mesurables de  $\Omega$  dans  $E$ . Autrement dit,*

$$\begin{aligned} (X_t, t \in T) : T &\rightarrow \mathcal{D}((\Omega, \mathcal{F}), (E, \mathcal{E})) \\ t &\mapsto X_t \end{aligned}$$

**Remarque 1.1.** Cette définition, d'essence récursive, ne se préoccupe pas a priori de la condition de mesurabilité qui est déjà garantie par le fait d'avoir défini un processus en tant que famille de variables aléatoires, donc d'applications déjà mesurables. Les variables aléatoires  $X_t, t \in T$  peuvent être discrètes ou continues, réelles, complexes ou vectorielles, finies ou infinies. Le domaine d'évolution  $T$  peut être fini, infini dénombrable, ou non dénombrable. Lorsque  $E \subset \mathbb{R}$ , on associe à  $\mathbb{R}$  sa tribu Borélienne.

Dans la définition précédente, on peut permettre le cas où pour tout élément  $t$  de l'évolution, l'ensemble des états associé à la variable  $X_t$  correspondante dépend de  $t$ , soit  $E_t$ . Dans ce cas, la définition devient comme suit.

**Définition 1.14.** *Un processus aléatoire de domaine d'évolution  $T$ , défini sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  et à valeurs dans un espace d'état  $E$  muni d'une tribu  $\mathcal{E}$  est une application qui associe pour tout  $t$  dans  $T$  une variable aléatoire  $X_t$  dans  $\mathcal{D}((\Omega, \mathcal{F}), (E_t, \mathcal{E}_t))$ , ensemble des fonctions  $\mathcal{F}/\mathcal{E}_t$ -mesurables de  $\Omega$  dans  $E_t$  avec  $E = \bigcup_{t \in T} E_t$ .*

La définition suivante définit un processus en terme de ses réalisations (dites aussi trajectoires), i.e., définit un processus comme fonction aléatoire (élément aléatoire à valeurs dans  $E^T$ ). Soit  $\mathcal{E}^{\otimes T}$  la plus petite tribu de parties de  $E^T = \prod_{t \in T} E$  contenant tous les ensembles cylindriques.

**Définition 1.15.** *Un processus aléatoire  $\mathbf{X} = (X_t, t \in T)$  de domaine d'évolution  $T$ , défini sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  et à valeurs dans un espace d'état  $(E, \mathcal{E})$  est une application mesurable de  $(\Omega, \mathcal{F})$  dans  $(E^T, \mathcal{E}^{\otimes T})$ . Autrement dit, c'est une application qui pour toute réalisation possible  $\omega$  du phénomène, associe une famille de nombres  $\mathbf{X}(\omega) = (X_t(\omega), t \in T)$  et est telle que l'image réciproque de tout  $B$  de  $\mathcal{E}^{\otimes T}$  de la forme  $B = \prod_{t \in T} B_t, B_t \in \mathcal{E}_t$  est un membre de  $\mathcal{F}$ , i.e.*

$$\begin{aligned} \mathbf{X} : \Omega &\rightarrow E^T \\ \omega &\mapsto \mathbf{X}(\omega) = (X_t(\omega), t \in T) \end{aligned}$$

$$\text{où pour tout } B = \prod_{t \in T} B_t \in \mathcal{E}^{\otimes T}, \{\omega \in \Omega : X_t(\omega) \in B_t, t \in T\} \in \mathcal{F}$$

ou encore pour tout  $B \in \mathcal{E}^{\otimes T}, \{\omega \in \Omega : \mathbf{X}(\omega) \in B\} = \{\omega \in \Omega : (X_t(\omega), t \in T) \in B\} \in \mathcal{F}$  puisque  $\mathcal{E}^{\otimes T}$  est générée par tous les ensembles  $\prod_{t \in T} B_t, B_t \in \mathcal{E}_t$ .

Une troisième définition mais qui n'est pas tout à fait équivalente aux deux premières dans le sens où elle exige des conditions supplémentaires, regarde un processus du point de vue de ses membres et de ses réalisations.

**Définition 1.16.** *Un processus aléatoire  $\mathbf{X} = (X_t, t \in T)$  de domaine d'évolution  $T$  défini sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  et à valeurs dans un espace d'état  $(E, \mathcal{E})$  est une application mesurable de  $(\Omega \times T, \mathcal{F} \otimes \mathcal{T})$  dans  $(E, \mathcal{E})$  où  $\mathcal{T}$  est une tribu associée à  $T$  et  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{T}$  la tribu générée par tous les ensembles  $A \times B$ ,  $A \in \mathcal{F}$ ,  $B \in \mathcal{T}$ . Ceci se traduit symboliquement par*

$$\begin{aligned} \mathbf{X} : (\Omega \times T, \mathcal{F} \otimes \mathcal{T}) &\rightarrow (E, \mathcal{E}) \\ (\omega, t) &\mapsto \mathbf{X}(\omega, t) = X_t(\omega) \end{aligned}$$

où pour tout  $C \in \mathcal{E}$ ,  $\{(\omega, t) \in \Omega \times T : X_t(\omega) \in C\} \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{T}$ .

### 1.4.2 Distribution de probabilité d'un processus aléatoire

Soit  $\mathbf{X} = (X_t, t \in T)$  un processus aléatoire défini sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  à valeurs dans  $(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et de domaine d'évolution  $T \subset \mathbb{R}$ , sa structure de probabilité est caractérisée par la distribution infini-dimensionnelle  $P_{\mathbf{X}}(\cdot)$  définie sur  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$  à valeurs dans  $[0, 1]$  comme suit :

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{X}}(\cdot) : \mathcal{B}(\mathbb{R}^T) &\rightarrow [0, 1] \\ B &\mapsto P_{\mathbf{X}}(B) = P\{\omega \in \Omega : \mathbf{X}(\omega) \in B\}. \end{aligned}$$

Si  $B = \prod_{t \in T} B_t \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$ ,  $B_t \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,  $t \in T$ , alors

$$P_{\mathbf{X}}(B) = P\{\omega \in \Omega : X_t(\omega) \in B_t, t \in T\} = P\left(\bigcap_{t \in T} \{\omega \in \Omega : X_t(\omega) \in B_t\}\right).$$

Cette distribution infini-dimensionnelle est difficile à manipuler et qu'il existe un outil simple, la distribution fini-dimensionnelle, permettant de simplifier son analyse. L'introduction de cette distribution est justifiée par le théorème d'extension de Kolmogorov qui stipule que la mesure de probabilité  $P$  sur  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$  est uniquement déterminée par les probabilités  $P_{t_1, \dots, t_n}$ ,  $t_1, \dots, t_n \in T$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  définies sur  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ . La définition suivante est valable pour tout type de processus.

**Définition 1.17.** *La distribution fini-dimensionnelle de  $\mathbf{X} = (X_t, t \in T)$  est la distribution de toute sous-suite finie  $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ ,  $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  de  $\mathbf{X}$ . Autrement dit, c'est la fonction ensembliste  $P_{X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}}(\cdot)$  définie sur  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  à valeurs dans  $[0, 1]$  par*

$$\begin{aligned} P_{X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}}(\cdot) : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) &\rightarrow [0, 1] \\ B &\mapsto P_{X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}}(B) = P\{\omega \in \Omega : (X_{t_1}(\omega), X_{t_2}(\omega), \dots, X_{t_n}(\omega)) \in B\}. \end{aligned}$$

Si  $B = B_1 \times \dots \times B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ,  $B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ,  $k = 1, \dots, n$ , alors

$$P_{X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}}(B) = P\{\omega \in \Omega : (X_{t_1}(\omega), X_{t_2}(\omega), \dots, X_{t_n}(\omega)) \in B\} = P\left(\bigcap_{k=1}^n \{\omega \in \Omega : X_{t_k}(\omega) \in B_k\}\right).$$

Afin d'éviter la manipulation de Boréliens, on peut de manière équivalente caractériser la structure probabiliste du processus au moyen de la fonction de répartition fini-dimensionnelle.

**Définition 1.18.** *La fonction de répartition fini-dimensionnelle de  $\mathbf{X} = (X_t, t \in T)$  est la fonction de répartition de toute sous-suite finie  $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ ,  $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  de  $\mathbf{X}$ . Autrement dit, c'est la fonction  $F_{X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}}(\cdot)$  définie sur  $\mathbb{R}^n$  à valeurs dans  $[0, 1]$  par*

$$\begin{aligned} F_{X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}}(\cdot) : \mathbb{R}^n &\rightarrow [0, 1] \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) &\mapsto F_{X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\left(\bigcap_{j=1}^n \{\omega \in \Omega : X_{t_j}(\omega) \leq x_j\}\right) \end{aligned}$$

Pour un processus aléatoire  $\mathbf{X} = (X_t, t \in T)$  défini sur l'espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  à valeurs dans  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  avec  $T \subset \mathbb{R}$ , on a l'ensemble de ses fonctions de répartitions fini-dimensionnelles  $\{F_{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}}, n \in \mathbb{N}^*, t_1, \dots, t_n \in T\}$  définies par

$$F_{X_{t_1}, \dots, X_{t_n}}(x_1, \dots, x_n) = P\{\omega \in \Omega : X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n\}, \quad (1.7)$$

qui satisfait la propriété suivante dite de consistance

$$F_{X_{t_1}, \dots, X_{t_k}, \dots, X_{t_n}}(x_1, \dots, \infty, \dots, x_n) = F_{X_{t_1}, \dots, X_{t_{k-1}}, X_{t_{k+1}}, \dots, X_{t_n}}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n). \quad (1.8)$$

Cependant, le problème inverse n'est pas tout à fait évident. En effet, étant donnée une famille  $\{F_{t_1, \dots, t_n}, n \in \mathbb{N}^*, t_1, \dots, t_n \in T\}$  de fonctions de distributions, existe-t-il un processus aléatoire ayant comme fonctions de distributions fini-dimensionnelles cette même famille? Ce problème a été résolu par Kolmogorov en 1933.

**Théorème 1.4.1. (Théorème de Kolmogorov sur l'existence d'un processus)**

Soit  $\{F_{t_1, \dots, t_n}, n \in \mathbb{N}^*, t_1, \dots, t_n \in T\}$  une famille de fonctions de distributions fini-dimensionnelles qui satisfait la condition de consistance (1.8), alors il existe un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  et un processus aléatoire  $\mathbf{X} = (X_t, t \in T)$  tel que

$$P\{\omega \in \Omega : X_{t_1}(\omega) \leq x_1, \dots, X_{t_n}(\omega) \leq x_n\} = F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n).$$

**Corollaire 1.1.** Soit  $F_1(x), F_2(x), \dots$  une suite de fonctions de distributions unidimensionnelles, alors il existe un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  et une suite de variables aléatoires indépendantes  $X_1, X_2, \dots$  telle que

$$P\{\omega \in \Omega : X_i(\omega) \leq x\} = F_i(x).$$

### 1.4.3 Caractéristiques de la distribution d'un processus aléatoire

Soit  $\mathbf{X} = (X_t, t \in T)$  un processus aléatoire  $(X_t, t \in T)$  défini sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  à valeurs dans un espace d'état  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  et de domaine d'évolution  $T$ . Comme pour les variable aléatoire, la distribution infini-dimensionnelle d'un processus aléatoire  $\mathbf{X} = (X_t, t \in T)$  est aussi caractérisée par certaines familles particulières définies sur  $T$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , à savoir : la fonction moyenne, la fonction variance, la fonction d'autocovariance...

**Définition 1.4.1.** La fonction moyenne  $\mu(\cdot)$  est une fonction de  $T$  dans  $\mathbb{R}$  qui pour tout  $t \in T$  associe l'espérance mathématique du membre  $X_t$  et ayant comme domaine de définition l'ensemble  $D_\mu = \{t \in T : E(X_t) \text{ existe}\}$ .

**Définition 1.4.2.** La fonction variance  $\sigma^2(\cdot)$  est une fonction de  $T$  dans  $\mathbb{R}^+$  qui pour tout  $t \in T$  associe la variance du membre  $X_t$  et ayant comme domaine de définition l'ensemble  $D_{\sigma^2} = D_\mu$ .

**Définition 1.4.3.** La fonction d'autocovariance  $\gamma(\cdot, \cdot)$  est une fonction de  $T \times T$  dans  $\mathbb{R}$  qui pour tout couple  $(t, s) \in T \times T$  associe la covariance entre les membres  $X_t$  et  $X_s$  et ayant comme domaine de définition  $D_\gamma = \{(t, s) \in T \times T : E(X_t X_s) < \infty\}$ .

**Définition 1.4.4.** La fonction d'autocorrélation  $\rho(\cdot, \cdot)$  est une fonction de  $T \times T$  dans  $[-1, 1]$  qui pour tout couple  $(t, s) \in T \times T$  associe la corrélation entre les membres  $X_t$  et  $X_s$ , ayant comme domaine de définition  $D_\rho = \{(t, s) \in T \times T : 0 < \sigma(t) \cdot \sigma(s) < \infty\}$ .

## 1.5 Processus aléatoires strictement stationnaires

La propriété de stationnarité (stochastique), qui caractérise plutôt une certaine régularité stochastique dans l'évolution, joue un rôle crucial dans la théorie des processus aléatoires. Dans plusieurs problèmes du monde réel, on rencontre des phénomènes aléatoires qui évoluent dans un régime "d'équilibre stochastique" dans le sens où les caractéristiques fréquentistes du phénomènes ne changent pas dans le domaine d'évolution. De tels phénomènes peuvent être représentés par lesdits processus stationnaires dont la définition a été empruntée et adaptée (selon le principe d'adaptation du déterminisme au stochastiquisme) à partir du concept de stationnarité des suites et des fonctions numériques. Pour rappel, une suite numérique  $(u_t, t \in \mathbb{N})$  est dite stationnaire si la valeur des termes est invariante dans le temps, i.e., si

$$u_{t+1} = u_t, t \in \mathbb{N} \text{ ou de manière équivalente si } u_{t+h} = u_t, t, h \in \mathbb{N}. \quad (1.9)$$

Pour adapter cette propriété à un suite aléatoire  $(X_t, t \in \mathbb{N})$ , c'est-à-dire un processus aléatoire défini sur un certain espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  à valeurs dans  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , il est clair qu'il est peu convenable de considérer une définition analogue à (1.9) du style

$$X_{t+1} = X_t, t \in \mathbb{N} \text{ ou encore } X_{t+1}(\omega) = X_t(\omega), t \in \mathbb{N}, \omega \in \Omega \quad (1.10)$$

puisque de tels processus seraient inadéquats à représenter des situations réelles où règne l'aléa. Au lieu d'opérer directement sur les valeurs via (1.10), il parait plus judicieux, en vertu du principe d'adaptation du déterminisme au stochastiquisme, d'adapter (1.9) aux probabilités des événements attachés aux valeurs plutôt qu'aux valeurs elles-mêmes. Ainsi, on dira dans un premier temps qu'un processus processus aléatoire est stationnaire si la probabilité qu'un terme  $X_t$  se trouve dans une région quelconque  $B$  est invariante dans le domaine d'évolution, i.e., si

$$P(X_{t+1} \in B) = P(X_t \in B), t \in \mathbb{N}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad (1.11)$$

ou de manière équivalente si

$$P(X_{t+h} \in B) = P(X_t \in B), t, h \in \mathbb{N}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}). \quad (1.12)$$

Bien que la relation (1.12) semble adaptée au cas stochastique, elle ne traduit en fait qu'une stationnarité marginale. Il n'est pas clair si c'en est le cas pour les distributions conjointes de deux, trois membres et plus... On peut ainsi généraliser la relation (1.12) au cas de distribution conjointe à deux termes comme suit

$$P((X_{t_1+h}, X_{t_2+h}) \in B) = P((X_{t_1}, X_{t_2}) \in B), t_1, t_2, h \in \mathbb{N}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2). \quad (1.13)$$

On peut généraliser la relation (1.12) au cas de distribution conjointe à trois termes comme suit

$$P((X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, X_{t_3+h}) \in B) = P((X_{t_1}, X_{t_2}, X_{t_3}) \in B), t_1, t_2, t_3, h \in \mathbb{N}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^3). \quad (1.14)$$

On peut ainsi généraliser la relation (1.12) de manière générale au cas de distribution conjointe à  $n$  termes

$$P((X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h}) \in B) = P((X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in B), t_1, \dots, t_n, h \in \mathbb{N}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \quad (1.15)$$

traduisant ainsi la stationnarité en termes des distributions fini-dimensionnelles et donc (dans ce cas à temps discret) en terme de la distribution de probabilité du processus entier. C'est donc la définition de stationnarité qu'on retient de façon générale. Elle a été introduite par Khintchine (1931) pour le cas d'un domaine d'évolution  $T$  quelconque et est dite stationnarité stricte.

Soit  $\mathbf{X} = (X_t, T \in T)$  un processus aléatoire de domaine d'évolution  $T$  défini sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  et à valeurs dans  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  avec le domaine d'évolution  $T$  a la propriété que la somme de deux points de  $T$  est également dans  $T$ . Souvent on prend  $T = \mathbb{N}$ , mais peut être  $\mathbb{Z}, \mathbb{R}^+$  ou  $\mathbb{R}$ .

**Définition 1.19.** *Le processus  $\mathbf{X} = (X_t, t \in T)$  est strictement stationnaire si pour tout  $n \geq 1$  et tous points  $t_1, \dots, t_n, h$  dans  $T$ , la distribution de  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  est la même que la distribution de  $(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h})$ , i.e.,*

$$P((X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in B) = P((X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h}) \in B), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Par la suite on se concentre principalement sur le cas le plus simple d'un processus aléatoire  $\mathbf{X} = (X_t, t \in \mathbb{N})$  à valeurs dans  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , i.e., la suite de variables aléatoires. Soit  $\mathbf{X} = (X_t, T \in T)$  un processus aléatoires strictement stationnaire. Si  $\mu_t = E(X_t)$  existe et finie, il s'en suit que  $\mu_t$  est constante pour tout  $t \in T$ , i.e.,  $\mu_t = \mu$ . De même si  $E(X_t^2) < \infty$ , alors la variance  $\sigma_t^2 = E[(X_t - E(X_t))^2]$  est constante indépendante de  $t$ . Soit  $t, s \in T$  et supposons que  $t > s$ . En utilisant la propriété de stationnarité stricte, on calcule la covariance

$$\text{cov}(X_t, X_s) = E[(X_t - \mu)(X_s - \mu)] = E[(X_{t-s} - \mu)(X_0 - \mu)],$$

i.e.,  $\text{cov}(X_t, X_s)$  ne dépend que de différence  $t - s$ . Si on définit la fonction de covariance

$$\gamma_{\mathbf{X}}(h) = \text{cov}(X_h, X_0) = E[(X_h - \mu)(X_0 - \mu)], \quad h \in T,$$

alors pour  $t, s \in T$ ,  $\text{cov}(X_t, X_s) = E[(X_t - m)(X_s - m)] = \gamma_{\mathbf{X}}(|t - s|)$ . Notons que  $\sigma^2 = \gamma_{\mathbf{X}}(0)$ . Parfois il est pratique de standardiser la fonction covariance en produisant ce qu'on appelle fonction d'autocorrélation ou bien fonction de corrélation de processus  $\mathbf{X} = (X_t, t \in T)$  définie par

$$\rho_{\mathbf{X}}(t) = \frac{\gamma_{\mathbf{X}}(t)}{\gamma_{\mathbf{X}}(0)}.$$

C'est clair que  $\rho_{\mathbf{X}}(0) = 1$  et on peut vérifier que  $-1 \leq \rho_{\mathbf{X}}(t) \leq 1$  pour tout  $t \in T$ .

## 1.6 Processus stationnaire et théorème ergodique

Soit  $\mathbf{X} = (X_n, n \in \mathbb{N}^*)$  un processus aléatoire défini sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  à valeurs dans  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , i.e., une suite de variables aléatoires. Si  $\mathbf{X} = (X_n, n \in \mathbb{N}^*)$  est une suite de variables aléatoires indépendante identiquement distribuées avec  $E|X_1| < \infty$ , alors par la loi forte des grands nombres

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{p.s.} E|X_1|. \tag{1.16}$$

Au lieu d'exiger que les variables  $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$  sont indépendantes identiquement distribuées, Birkhoff a prouvé la convergence presque sûre de la moyenne empirique dans (1.16) en exigeant seulement que la distribution du processus  $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$  ne dépend pas du placement de l'origine. Rappelons qu'on note par  $\mathbb{R}^\infty$  l'ensemble de toutes les suites infinies de nombres réels  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$ . Un rectangle de dimension  $n$  dans  $\mathbb{R}^\infty$  est l'ensemble  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\infty : x_1 \in I_1, \dots, x_n \in I_n\}$ , où  $I_1, \dots, I_n$  sont des intervalles finis ou infinis. Un cylindre de dimension  $n$  dans  $\mathbb{R}^\infty$  est tout ensemble de la forme  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\infty : (x_1, \dots, x_n) \in B_n\}$ , où  $B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ . La  $\sigma$ -algèbre de Borel  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$  est la plus petite  $\sigma$ -algèbre des sous-ensembles de  $\mathbb{R}^\infty$  contenant tous les rectangles de dimensions finis. On note par  $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$  l'ensemble de toutes les suites infinies de nombres réels  $\mathbf{x} = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$ . La  $\sigma$ -algèbre de Borel  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}})$  est la plus petite  $\sigma$ -algèbre des sous-ensembles de  $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$  contenant tous les cylindres de dimensions finis de la forme  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : (x_k, \dots, x_{k+n-1}) \in B_n\}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  et  $B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ .

**Définition 1.20.** *Une probabilité  $P$  sur  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$  est stationnaire si pour tout  $k \geq 1$  et tout  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$ ,*

$$P\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\infty : (x_1, x_2, \dots) \in B\} = P\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\infty : (x_{k+1}, x_{k+2}, \dots) \in B\}. \tag{1.17}$$

Puisque  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$  est la  $\sigma$ -algèbre générée par les cylindres  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\infty : (x_k, \dots, x_{k+n-1}) \in B_n\}$ ,  $n \geq 1$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ , alors la condition (1.17) est équivalente à : pour tout  $n, k = 1, 2, \dots$  et tout  $B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ,

$$P\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\infty : (x_1, x_2, \dots, x_n) \in B_n\} = P\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\infty : (x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{k+n}) \in B_n\}. \quad (1.18)$$

Dans le cas où  $P$  est définie sur  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\mathbb{Z})$ , on prend  $k \in \mathbb{Z}$  dans (1.18).

**Définition 1.21.** *Un processus aléatoire  $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$  est strictement stationnaire si pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , le processus aléatoire  $(X_{n+k}, n \in \mathbb{N}^*)$  a la même distribution que  $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$ , i.e., pour tout  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$ ,*

$$P((X_1, X_2, \dots) \in B) = P((X_{k+1}, X_{k+2}, \dots) \in B). \quad (1.19)$$

Puisque la distribution du processus est entièrement déterminée par les fonctions de distributions fini-dimensionnelles, alors la condition (1.19) de stationnarité stricte est équivalente à la condition suivante : pour tous  $x_1, x_2, \dots, x_n$  et tout  $k > 0$ ,

$$P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n) = P(X_{k+1} \leq x_1, X_{k+2} \leq x_2, \dots, X_{k+n} \leq x_n). \quad (1.20)$$

En particulier, si le processus  $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$  est strictement stationnaire, alors toutes les fonctions de distributions unidimensionnelles (les fonctions de distributions marginales) sont les mêmes, i.e.,

$$P(X_1 \leq x) = P(X_k \leq x), \quad k = 1, 2, \dots$$

On peut réduire les conditions (1.20) et (1.19) comme suit.

**Proposition 1.1.** *Le processus aléatoire  $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$  est strictement stationnaire si le processus  $(X_{n+1}, n \in \mathbb{N}^*)$  a la même distribution que le processus  $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$ .*

Notons que la distribution d'un processus contient toute l'information pertinente pour la théorie des probabilités. Tous les théorèmes qu'on démontrera ne dépendent que de la distribution du processus et par conséquent il sont valables pour tous les processus ayant cette distribution. Parmi tous les processus aléatoires ayant la même distribution donnée  $\tilde{P}$  sur  $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty), \tilde{P})$ , il y'en a un qui est le plus simple.

**Définition 1.22.** *Pour toute distribution  $\tilde{P}$  sur  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$ , on définit un processus  $(\tilde{X}_n, n \in \mathbb{N}^*)$  sur  $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty), \tilde{P})$  par*

$$\tilde{X}_n(x_1, x_2, \dots) = x_n.$$

*Ce processus est dit processus de représentation en coordonnées (i.e., la représentation d'un processus sur  $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty), \tilde{P})$ ) et il a la même distribution que le processus original parce que pour  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$ ,*

$$\tilde{P}\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\infty : (\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots) \in B\} = \tilde{P}\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\infty : \mathbf{x} \in B\} = \tilde{P}(B).$$

Cette définition nous conduit aussi à remarquer que pour toute probabilité  $\tilde{P}$  sur  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$ , il existe un processus aléatoire  $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$  tel que

$$P((X_1, X_2, \dots) \in B) = \tilde{P}(B).$$

Parfois, il est plus pratique de regarder les processus stationnaire qui consistent en une suite à double extrémités, i.e., les suites  $(X_n, n \in \mathbb{Z})$ . Un tel processus est strictement stationnaire si sa distribution ne dépend pas du choix d'un origine, i.e., en termes de distributions fini-dimensionnelles : pour tous  $x_1, x_2, \dots, x_n$  et tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,

$$P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n) = P(X_{k+1} \leq x_1, X_{k+2} \leq x_2, \dots, X_{k+n} \leq x_n).$$

Un résultat important qu'on peut démontrer par le théorème d'extension est le suivant.

**Théorème 1.13.** *Soit  $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$  un processus aléatoire strictement stationnaire, alors il existe un processus strictement stationnaire  $(\tilde{X}_n, n \in \mathbb{Z})$  tel que  $(\tilde{X}_n, n \in \mathbb{N}^*)$  a la même distribution que  $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$ .*

À partir de tout processus strictement stationnaire, on peut construire une infinité de processus strictement stationnaires.

**Théorème 1.14.** *Soit  $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$  un processus aléatoire strictement stationnaire et  $f : \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction Borel mesurable, alors le processus aléatoire  $(Y_n, n \in \mathbb{N}^*)$  défini par  $Y_n = f(X_n, X_{n+1} \dots)$  est strictement stationnaire.*

Un cas particulier des processus strictement stationnaire est la suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.

**Corollaire 1.2.** *Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite indépendante et identiquement distribuée et  $f : \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction Borel mesurable, alors le processus aléatoire  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  défini par  $Y_n = f(X_n, X_{n+1} \dots)$  est strictement stationnaire.*

### 1.6.1 Transformations préservant la mesure

Soit un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  et  $T : \Omega \rightarrow \Omega$ . Rappelons que  $T$  est une application mesurable de  $(\Omega, \mathcal{F})$  dans  $(\Omega, \mathcal{F})$  si  $T^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega : T(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}$  pour tout  $A \in \mathcal{F}$ .

**Définition 1.23.** *Une transformation mesurable  $T : \Omega \rightarrow \Omega$  est dite préservant la mesure  $P$ , si  $P(T^{-1}A) = P(A)$ ,  $A \in \mathcal{F}$ .*

De la définition (1.23) on remarque immédiatement que  $P(T^{-k}A) = P(A)$  pour tout  $A \in \mathcal{F}$  et tout  $k = 1, 2, \dots$ , où  $T^{-k}A = \{\omega \in \Omega : T^k\omega \in A\}$  et  $T^k = T \circ \dots \circ T$ . A partir des transformations préservant la mesure  $P$ , un grand nombre de processus stationnaires peuvent être générés. Soit  $X(\omega)$  une variable aléatoire définie sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Soit  $T$  une transformation préservant la mesure  $P$  et on définit le processus  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  par  $X_1(\omega) = X(\omega)$ ,  $X_2(\omega) = X(T\omega)$ ,  $X_3(\omega) = X(T^2\omega)$ ,  $\dots$ . Notons par  $T^\circ$  la transformation identité et on a le résultat suivant.

**Proposition 1.2.** *Soit  $T : \Omega \rightarrow \Omega$  une transformation préservant la mesure sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  et  $X(\omega)$  une variable aléatoire définie sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , alors la suite  $X_n(\omega) = X(T^{n-1}\omega)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  est strictement stationnaire.*

Le processus stationnaire construit dans la proposition 1.2 est dit processus généré par la transformation préservant la mesure  $T$ . En termes de distribution, tout processus strictement stationnaire peut être généré par une transformation préservant la mesure. Considérons un processus aléatoire strictement stationnaire  $\mathbf{X} = (X_n, n \in \mathbb{N}^*)$  défini sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  et  $\tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{X}_n, n \in \mathbb{N}^*)$  le processus de représentation des coordonnées sur  $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty), P_{\mathbf{X}})$ . Par définition  $\tilde{X}_n(\mathbf{x}) = x_n$ .

**Définition 1.24.** *Sur l'espace mesurable  $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty))$ , on définit la transformation du décalage  $S : \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}^\infty$  par*

$$S\mathbf{x} = S(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots).$$

On remarque immédiatement que  $\tilde{X}_n(\mathbf{x}) = \tilde{X}_1(S^{n-1}\mathbf{x})$ ,  $n \geq 2$ . On peut montrer que  $S(\mathbf{x})$  est une fonction Borel mesurable préservant la mesure  $P_{\mathbf{X}}$  et par conséquent, on justifie le fait que tout processus strictement stationnaire peut être généré par une mesure préservant la mesure.

**Proposition 1.3.** *La transformation du décalage  $S : \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}^\infty$  est Borel mesurable et si le processus  $\mathbf{X} = (X_n, n \in \mathbb{N}^*)$  est strictement stationnaire, alors  $S$  préserve la mesure  $P_{\mathbf{X}}$ .*

L'un des premiers résultats sur les transformations préservant la mesure est le théorème de récurrence de Poincaré.

**Théorème 1.15. (Poincaré)** *Soit  $T$  une transformation préservant la mesure sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  et soit  $A \in \mathcal{F}$ , alors pour presque tout  $\omega \in A$ ,  $T^n \omega \in A$  pour une infinité de  $n \geq 1$ .*

**Corollaire 1.3.** *Soit  $X$  une variable aléatoire positive sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  et soit  $A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) > 0\}$ , alors pour presque tout  $\omega \in A$ ,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} X(T^n \omega) = \infty.$$

**Proposition 1.4.** *Soit  $T$  une transformation préservant la mesure sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  et  $X$  une variable aléatoire avec  $E(X)$  existe, alors  $E(X(\omega)) = E(X(T\omega))$ .*

On a vu dans le théorème 1.13 qu'à partir d'un processus stationnaire  $\mathbf{X} = (X_n, n \in \mathbb{N}^*)$ , on peut construire un processus stationnaire  $\mathbf{X} = (X_n, n \in \mathbb{Z})$  et par la proposition 1.2 on peut construire un processus stationnaire  $\mathbf{X} = (X_n, n \in \mathbb{N}^*)$  à partir d'une variable aléatoire et une transformation préservant la mesure. Pour pouvoir construire un processus stationnaire  $\mathbf{X} = (X_n, n \in \mathbb{Z})$  à partir d'une variable aléatoire  $X$  et une transformation préservant la mesure  $T$ , il faut que  $T$  agisse à la fois dans la direction positive et négative.

**Définition 1.25.** *Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace de probabilité. Une transformation  $T : \Omega \rightarrow \Omega$  est dite préservant la mesure bidirectionnelle si*

- (1)  $T$  est bijective.
- (2) Les transformations  $T$  et  $T^{-1}$  sont mesurables, i.e., pour tout  $A \in \mathcal{F}$ ,

$$T^{-1}A = \{\omega \in \Omega : T\omega \in A\} \in \mathcal{F} \quad \text{et} \quad TA = \{T\omega \in \Omega : \omega \in A\} \in \mathcal{F}.$$

- (3)  $T$  préserve la mesure :  $P(T^{-1}A) = P(A)$  et par conséquent  $P(TA) = P(A)$  pour tout  $A \in \mathcal{F}$ .

Par une transformation préservant la mesure bidirectionnelle et une variable aléatoire sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  on construit un processus stationnaire  $\mathbf{X} = (X_n, n \in \mathbb{Z})$  par  $X_n(\omega) = X(T^n \omega)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

## 1.6.2 Ergodicité et Mélange

**Définition 1.26.** *Soit  $T$  une transformation préservant la mesure sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Un événement  $A \in \mathcal{F}$  est dit invariant si  $A = T^{-1}A$ , i.e.,  $\omega \in A$  si et seulement si  $T\omega \in A$ ; presque invariant si  $A$  et  $T^{-1}A$  se différencient sur un événement de probabilité nulle; en d'autres termes si  $P(A \Delta T^{-1}A) = 0$ .*

Si  $A \in \mathcal{F}$  est invariant, l'événement  $A^c$  est aussi invariant et pour tout  $n$ ,  $T^{-n}A = A$  et  $T^{-n}A^c = A^c$ . Il est facile de vérifier que les événements invariants forment une  $\sigma$ -algèbre sur  $\Omega$ , comme pour les événements presque invariants.

**Proposition 1.5.**

- (1) La collection  $\mathcal{G}$  des événements invariants est une  $\sigma$ -algèbre.
- (2) La collection  $\mathcal{G}^*$  des événements presque invariants est une  $\sigma$ -algèbre.

Avec les événements invariants, on définit les variables aléatoires invariantes.

**Définition 1.27.** *Soit  $X(\omega)$  une variable aléatoire sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  et  $T$  une transformation préservant la mesure, alors  $X(\omega)$  est dite invariante si  $X(\omega) = X(T\omega)$  pour tout  $\omega \in \Omega$ ;  $X(\omega)$  est dite presque invariante si  $X(T\omega) = X(\omega)$  pour presque tout  $\omega$ .*

Notons qu'un événement est invariant (presque invariant) si et seulement si sa fonction indicatrice est invariante (presque invariante).

**Proposition 1.6.** *La variable aléatoire  $X$  sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  est invariante si et seulement si  $X$  est  $\mathcal{G}$ -mesurable.*

**Définition 1.28.** *Soit  $T$  une transformation préservant la mesure sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .  $T$  est dite ergodique si pour tout  $A \in \mathcal{G}$ ,  $P(A) = 0$  ou  $1$ .*

Un processus stationnaire généré par une transformation préservant la mesure et ergodique  $T$  est aussi dit ergodique. De même un processus stationnaire qui génère une transformation préservant la mesure et ergodique  $S$  est aussi dit ergodique. L'invariance peut être remplacée par l'invariance presque sûre dans la définition 1.28 de l'ergodicité comme le montre le résultat suivant.

**Proposition 1.7.** *Soit  $T$  une transformation préservant la mesure sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .*

- (1) *Si  $A \in \mathcal{F}$  est presque invariant, alors il existe un événement invariant  $B \in \mathcal{F}$  tel que  $P(A \Delta B) = 0$ .*
- (2)  *$T$  est ergodique ssi pour tout événement  $A$  presque invariant  $P(A) = 0$  ou  $P(A) = 1$ .*

La condition d'ergodicité peut être mise en termes de variables aléatoires invariantes.

**Proposition 1.8.** *Soit  $T$  une transformation préservant la mesure sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1)  *$T$  est ergodique.*
- (2) *Toute variable aléatoire presque invariante  $X(\omega)$  est constante presque sûrement.*
- (3) *Toute variable aléatoire invariante  $X(\omega)$  est constante presque sûrement.*

La condition de la proposition précédente peut être affaiblie comme suit.

**Proposition 1.9.** *Soit  $T$  une transformation préservant la mesure sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .  $T$  est ergodique si et seulement si toute variable aléatoire invariante bornée  $X(\omega)$  est constante presque sûrement.*

La propriété du mélange est définie comme suit.

**Définition 1.29.** *Soit  $T$  une transformation préservant la mesure sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ;  $T$  est dite mélange si pour tous  $A, B \in \mathcal{F}$ ,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A \cap T^{-n}B) = P(A)P(B).$$

*Le mélange est une propriété plus forte que l'ergodicité comme indiqué dans le théorème suivant.*

**Théorème 1.16.** *Soit  $T$  une transformation mélange sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , alors  $T$  est ergodique.*

Il est utile de noter qu'il n'est pas nécessaire de vérifier la condition du mélange pour tous les événements  $A, B \in \mathcal{F}$ , mais seulement pour  $A, B$  dans l'algèbre  $\mathcal{F}_0$  dont  $\sigma(\mathcal{F}_0) = \mathcal{F}$ .

**Théorème 1.17.** *Soit  $T$  une transformation préservant la mesure sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Soit  $\mathcal{F}_0$  une algèbre sur  $\Omega$  telle que  $\sigma(\mathcal{F}_0) = \mathcal{F}$ . Si la condition du mélange est vérifiée pour tous  $A, B \in \mathcal{F}_0$ , alors elle est vérifiée pour tous  $A, B \in \mathcal{F}$  et par conséquent  $T$  est mélange.*

Soit  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots)$  un processus strictement stationnaire généré par la transformation préservant la mesure  $T$  sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , i.e.,  $X_n(\omega) = X_1(T^{n-1}\omega)$ ,  $n \geq 1$ .

**Définition 1.30.** *Le processus stationnaire  $\mathbf{X}$  est dit faiblement dépendant si  $X_k$  et  $X_{k+n}$  sont asymptotiquement indépendantes lorsque  $n \rightarrow \infty$ , i.e., pour tous  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*

$$P(X_k \in B_1, X_{k+n} \in B_2) \rightarrow P(X_1 \in B_1)P(X_1 \in B_2). \quad (1.21)$$

**Théorème 1.18.** *Une transformation  $T$  préservant la mesure sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  est mélange si et seulement si tout processus stationnaire  $\mathbf{X} = (X_n, n \in \mathbb{N}^*)$  généré par  $T$  est faiblement dépendant.*

### 1.6.3 Théorème ergodique

L'un des résultats des théorèmes limites est le théorème ergodique qui stipule que la moyenne empirique d'une suite de variables aléatoires strictement stationnaire de moyenne finie converge presque sûrement vers une variable aléatoire.

**Théorème 1.19. (*Birkhoff and Khinchin*)** *Soit  $T$  une transformation préservant la mesure sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  et  $X$  une variable aléatoire telle que  $E|X| < \infty$ , alors*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X(T^k \omega) = E(X|\mathcal{G}) \quad p.s.$$

Une conséquence directe du théorème 1.19 précédent est que si  $T$  est ergodique, alors la variable limite est constante presque sûrement et égale à la moyenne théorique.

**Corollaire 1.4.** *Soit  $T$  une transformation préservant la mesure et ergodique sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  et  $X$  une variable aléatoire telle que  $E|X| < \infty$ , alors*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X(T^k \omega) = E(X) \quad p.s. \quad (1.22)$$

**Corollaire 1.5.** *Une transformation préservant la mesure  $T$  sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  est ergodique si et seulement si*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P(A \cap T^{-k} B) = P(A)P(B), \quad A, B \in \mathcal{F}. \quad (1.23)$$

Un autre résultat intéressant est le suivant.

**Corollaire 1.6.** *Soit  $T : \Omega \rightarrow \Omega$  une transformation préservant la mesure et ergodique sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P_1)$  et  $(\Omega, \mathcal{F}, P_2)$ , alors ou bien  $P_1 = P_2$  ou bien  $P_1$  et  $P_2$  sont orthogonales dans le sens qu'il existe  $A \in \mathcal{G}$  tel que  $P_1(A) = 1$  et  $P_2(A^c) = 1$ .*

Enfin, on se demande si la moyenne empirique converge en moyenne vers la moyenne théorique, i.e., vers  $E(X)$ .

**Corollaire 1.7.** *Soit  $T : \Omega \rightarrow \Omega$  une transformation préservant la mesure sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  et  $X$  une variable aléatoire telle que  $E|X| < \infty$ , alors*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X(T^k \omega) - E(X|\mathcal{G}) \right| = 0.$$

*Si  $T$  est ergodique, alors*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X(T^k \omega) - E(X) \right| = 0.$$

### 1.6.4 Théorème ergodique pour les processus stationnaires

Soit  $\mathbf{X} = (X_n, n \in \mathbb{N}^*)$  un processus strictement stationnaire. On a vu que la transformation de décalage  $S : \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}^\infty$  qui est mesurable préserve la mesure  $P_{\mathbf{X}}$ . Un ensemble  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$  est invariant sous  $S$  si  $S^{-1}B = B$ . Lorsque  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$  est invariant, alors  $S^{-k}(B) = B$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . La transformation  $S$  préservant la mesure  $P_{\mathbf{X}}$  est ergodique si pour tout  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$  invariant,  $P_{\mathbf{X}}(B) = 0$  ou 1.

Par le théorème ergodique (1.19) et le corollaire (1.4), si la transformation de décalage  $S$  préservant la mesure sur  $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty), P_{\mathbf{X}})$  est ergodique, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tilde{X}_k = E(X_1) \quad p.s. \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} E \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tilde{X}_k - E(X_1) \right| = 0.$$

Si  $S$  est ergodique, alors on obtient les mêmes conclusions pour le processus original  $\mathbf{X} = (X_n, n \in \mathbb{N}^*)$  parce que la convergence presque sûrement et la convergence en moyenne dépend seulement de la distribution du processus. Presque toutes les définitions concernant l'invariance et l'ergodicité peuvent être formulées en termes du processus original  $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$  au lieu du processus  $\tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{X}_n, n \in \mathbb{N}^*)$  défini sur  $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty), P_{\mathbf{X}})$ .

Soit  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$ ,  $A = \{(X_1, X_2, \dots) \in B\}$  et  $S^{-1}B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^\infty : (x_2, x_3, \dots) \in B\}$ , alors

$$\{\omega \in \Omega : (X_1, X_2, \dots) \in S^{-1}B\} = \{\omega \in \Omega : (X_2, X_3, \dots) \in B\}.$$

Notons que si  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$  est invariant, alors  $\{\mathbf{X} \in B\} = \{\mathbf{X} \in S^{-1}B\} = \{\mathbf{X} \in S^{-k}B\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Ainsi pour tout  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$  invariant, on lui associe un événement invariant  $A = \{\mathbf{X} \in B\} \in \mathcal{F}$ . Autrement dit, un événement  $A \in \mathcal{F}$  est invariant s'il existe  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$  invariant sous  $S$  tel que  $A = \{\mathbf{X} \in B\}$ . Par conséquent, on définit les événements invariants comme suit.

**Définition 1.31.** *Un événement  $A \in \mathcal{F}$  est invariant par rapport à  $\mathbf{X} = (X_n, n \in \mathbb{N}^*)$  s'il existe  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty)$  tel que pour tout  $n \geq 1$*

$$A = \{\omega \in \Omega : (X_n, X_{n+1}, \dots) \in B\}.$$

La classe des événements invariants forme une  $\sigma$ -algèbre  $\mathcal{G}$ . Une variable aléatoire  $Y$  est invariante s'il existe une fonction  $f$  mesurable sur  $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty))$  (i.e. Borel mesurable de  $\mathbb{R}^\infty$  dans  $\mathbb{R}$ ) telle que

$$Y = f(X_n, X_{n+1}, \dots), \quad \forall n \geq 1.$$

Le théorème ergodique se traduit comme suit.

**Théorème 1.20.** *Si  $\mathbf{X} = (X_n, n \in \mathbb{N}^*)$  est un processus strictement stationnaire,  $\mathcal{G}$  la  $\sigma$ -algèbre des événements invariants et  $E|X_1| < \infty$ , alors*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{p.s.} E(X_1 | \mathcal{G}).$$

**Définition 1.32.** *Un processus strictement stationnaire  $\mathbf{X} = (X_n, n \in \mathbb{N}^*)$  est ergodique si tout événement invariant est de probabilité égale à zéro ou un.*

**Proposition 1.10.** *Un processus strictement stationnaire  $\mathbf{X} = (X_n, n \in \mathbb{N}^*)$  est ergodique ssi pour tout  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_B(X_i, \dots, X_{i+k-1}) \rightarrow P\{(X_1, \dots, X_k) \in B\} \quad p.s. \quad (1.24)$$

Si les événements de la  $\sigma$ -algèbre  $\mathcal{G}$  sont de probabilités égales à zéro ou un, i.e., le processus  $\mathbf{X} = (X_n, n \in \mathbb{N}^*)$  est ergodique, alors la moyenne empirique converge presque sûrement vers  $E(X_1)$ .

L'ergodicité, comme la stationnarité, est préservée sous des fonctions mesurables.

**Proposition 1.11.** *Soit  $\mathbf{X} = (X_n, n \in \mathbb{N}^*)$  un processus strictement stationnaire ergodique et  $f : \mathbb{R}^\infty \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction Borel mesurable, alors le processus  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  défini par  $Y_n = f(X_n, X_{n+1}, \dots)$  est ergodique.*

**Théorème 1.21.** *Soit  $\mathbf{X} = (X_n, n \in \mathbb{N}^*)$  une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, alors la transformation de décalage associée  $S$  préservant la mesure  $P_{\mathbf{X}}$  est ergodique et mélangeante, en particulier  $\mathbf{X} = (X_n, n \in \mathbb{N}^*)$  est un processus ergodique.*

# Chapitre 2

## Équations aux récurrences stochastiques

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de l'équation aux récurrences stochastique  $X_n = A_n X_{n-1} + B_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  dont les coefficients  $\{(A_n, B_n), n \in \mathbb{N}^*\}$  sont indépendants et identiquement distribués (*iid*). Vervaat [24] a étudié cette équation et il a montré que sous la condition que l'exposant de Lyapounov associé à la suite  $(A_n, n \in \mathbb{N}^*)$  est strictement négatif, la suite de variables aléatoires  $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$  construite par l'équation aux récurrences stochastique converge en distribution vers une certaine variable aléatoire  $X$  indépendamment de la variable aléatoire initiale  $X_0$ . Lorsqu'on fixe la variable initiale  $X_0$  égale en distribution à la variable limite  $X$ , la suite  $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$  construite par l'équation aux récurrences stochastique est strictement stationnaire et ergodique.

Considérons l'équation aux récurrences stochastique

$$X_n = A_n X_{n-1} + B_n, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad (2.1)$$

où  $\{(A_n, B_n), n \in \mathbb{N}^*\}$  est une suite indépendante et identiquement distribuée (*iid*) définie sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  à valeur dans  $\mathbb{R}^2$ . Pour une variable aléatoire initiale  $X_0$  définie sur le même espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  et indépendante de la suite  $\{(A_n, B_n), n \in \mathbb{N}^*\}$ , on a

$$\begin{aligned} X_1 &= A_1 X_0 + B_1, \\ X_2 &= A_2 A_1 X_0 + A_2 B_1 + B_2, \\ X_3 &= A_3 A_2 A_1 X_0 + A_3 A_2 B_1 + A_3 B_2 + B_3, \\ &\vdots \end{aligned}$$

On écrit  $X_n$  comme  $X_n(X_0)$  parce que  $X_n$  dépend de la variable initiale  $X_0$ . Après  $n$  itération dans l'équation (2.1), avec la convention  $\prod_{j=1}^0 A_j = 1$  et  $\sum_{j=1}^0 A_j = 0$ , on trouve

$$X_n(X_0) = \sum_{k=1}^n B_k \prod_{i=k+1}^n A_i + X_0 \prod_{j=1}^n A_j, \quad n \in \mathbb{N}^*. \quad (2.2)$$

On remarque que  $(X_n(X_0), n \in \mathbb{N}^*)$  est une suite de Markov parce que la distribution conditionnelle de  $X_n$  sachant le passé, i.e.,  $(X_{0 \leq k \leq n-1})$  est une fonction de  $X_{n-1}$  seul. Pour une variable aléatoire initiale  $Y_0$  indépendant de la suite  $\{(A_n, B_n), n \in \mathbb{N}^*\}$ , soit la suite de variables aléatoires  $(Y_n, n \in \mathbb{N}^*)$  définies par

$$Y_n(Y_0) = \sum_{k=1}^n B_k \prod_{i=1}^{k-1} A_i + Y_0 \prod_{j=1}^n A_j, \quad n \in \mathbb{N}^*. \quad (2.3)$$

La suites  $(Y_n(Y_0), n \in \mathbb{N}^*)$  n'est pas une suite de Markov. Puisque la suite  $((A_n, B_n), n \in \mathbb{N}^*)$  est *iid*, on remarque que

$$(X_0, \{(A_k, B_k)\}_{1 \leq k \leq n}) \stackrel{d}{=} (X_0, \{(A_{n-k+1}, B_{n-k+1})\}_{1 \leq k \leq n}),$$

où  $\stackrel{d}{=}$  désigne l'égalité en distribution. Ceci implique que si  $X_0 \stackrel{d}{=} Y_0$ , alors

$$X_n(X_0) = \sum_{k=1}^n B_k \prod_{i=k+1}^n A_i + X_0 \prod_{j=1}^n A_j \stackrel{d}{=} \sum_{k=1}^n B_k \prod_{i=1}^{k-1} A_i + X_0 \prod_{j=1}^n A_j = Y_n(X_0).$$

Par convention on pose  $(A, B) = (A_1, B_1)$ . Le théorème suivant de Vervaat [24] donne des conditions sur  $(A, B)$  assurant la convergence de la suite  $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$  en distribution et la convergence presque sûre de la suite  $(Y_n, n \in \mathbb{N}^*)$  vers une certaine variable  $Y$ . Il donne aussi les propriétés de la distribution limite.

**Théorème 2.1.** *Soit  $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$  un processus stochastique défini par (2.2) et supposons que*

$$E(\log^+ |B|) < \infty \quad \text{et} \quad -\infty \leq (E \log |A|) < 0, \quad (2.4)$$

alors

(1)  $Y_n \xrightarrow{p.s.} Y$  et  $X_n \xrightarrow{d} Y$  pour une certaine variable  $Y$  qui satisfait l'identité en loi

$$Y \stackrel{d}{=} AY + B, \quad \text{où } Y \text{ et } (A, B) \text{ sont indépendantes.} \quad (2.5)$$

(2) L'équation (2.5) a une solution unique en distribution qui est donnée par

$$Y \stackrel{d}{=} \sum_{m=1}^{\infty} B_m \prod_{j=1}^{m-1} A_j, \quad (2.6)$$

où la série dans (2.6) converge absolument presque sûrement.

(3) Si on pose  $X_0 \stackrel{d}{=} Y$ , alors le processus  $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$  construit par la relation (2.2) est strictement stationnaire et ergodique.

Maintenant supposons les conditions suivantes sur les moments de  $A$  et  $B$ . S'il existe un certain  $p \in [1, +\infty[$  tel que

$$E|B|^p < \infty \quad \text{et} \quad E|A|^p < 1, \quad (2.7)$$

alors

(4)  $E|Y|^p < \infty$  et la série en (2.6) converge en moyenne d'ordre  $p$ .

(5) Si  $E|X_0|^p < \infty$ , alors  $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$  converge en moyenne d'ordre  $p$  vers la variable  $Y$  et en particulier,  $E|X_n|^p \rightarrow E|Y|^p$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

(6) Les moments  $E(Y^m)$  sont déterminés de manière unique par les équations

$$E(Y^m) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} E(A_1^k B_1^{m-k}) E(Y^k), \quad m = 1, \dots, [p], \quad (2.8)$$

où  $[p]$  est la partie entière de  $p$ .

**Preuve.**

(1) L'existence de la limite en distribution de  $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$  sera montrée dans la partie (2) de cette démonstration. Si on suppose que  $X_n \xrightarrow{d} Y$ ,  $n \rightarrow \infty$ , alors

$$(A_n, B_n, X_{n-1}) \xrightarrow{d} (A_1, B_1, Y), \quad n \rightarrow \infty.$$

Ceci et le fait que la fonction  $f(x) = ax + b$  est continue impliquent que

$$Y \stackrel{d}{=} AY + B, \quad \text{où } Y \text{ et } (A, B) \text{ sont indépendantes.}$$

(2) D'après l'équation (2.2), pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$X_n(X_0) = X_0 \prod_{j=1}^n A_j + \sum_{m=1}^n B_m \prod_{j=m+1}^n A_j, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.9)$$

où  $X_0$  est une variable aléatoire initiale indépendante de  $((A_n, B_n), n \in \mathbb{N})$ . Pour deux variables aléatoires initiales différentes  $X'_0$  et  $X''_0$ , on obtient

$$X_n(X'_0) - X_n(X''_0) = (X'_0 - X''_0) \prod_{j=1}^n A_j, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.10)$$

Par la condition (2.4) et la loi forte des grands de nombres, on déduit que

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \log |A_j| \xrightarrow{p.s.} E(\log |A|) < 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (2.11)$$

Par conséquent

$$\left| \prod_{j=1}^n A_j \right| = \exp \left\{ \sum_{j=1}^n \log |A_j| \right\} \xrightarrow{p.s.} 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

En utilisant cette dernière convergence et (2.10) on déduit que si  $X_t(X_0) \xrightarrow{d} Y$  pour une certaine variable  $X_0$ , alors  $X_t(X_0) \xrightarrow{d} Y$  pour toute variable aléatoire  $X_0$ . En particulier, s'il existe une variable aléatoire  $Y$  telle que  $X_n \xrightarrow{d} Y$  et  $X_0 \stackrel{d}{=} Y$  est indépendante de la suite  $((A_n, B_n), n \in \mathbb{N}^*)$ , alors  $X_n(X_0) \stackrel{d}{=} Y$  et par conséquent  $Y$  dans l'équation (2.5) est unique. Il nous reste donc à montrer que  $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$  converge en distribution vers  $Y$  donnée par (2.6), i.e., on montre que la suite  $(Y_n, n \in \mathbb{N}^*)$  définie par (2.3) converge presque sûrement vers  $Y$ . Soit  $Y_0^* = 0$  et

$$Y_n^* = \sum_{m=1}^n A_m \prod_{j=1}^{m-1} B_j, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad (2.12)$$

alors par l'équation (2.2) on a

$$X_n(X_0) \stackrel{d}{=} Y_n^* + X_0 \prod_{j=1}^n A_j, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Notons que  $Y_n^*$  est la somme partielle de la série dans (2.6). Ainsi la condition suffisante pour que  $(Y_n^*, n \in \mathbb{N}^*)$  converge presque sûrement et donc en distribution est que la série (2.6) converge presque sûrement. Par la relation (2.11), le fait que  $m^{-1} \log^+ |B_m| \xrightarrow{p.s.} 0$  et la condition (2.4), on déduit que

$$\left| B_m \prod_{j=1}^{m-1} A_j \right|^{1/m} \leq \exp \left\{ \frac{1}{m} \log^+ |B_m| + \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m-1} \log |A_j| \right\} \xrightarrow{p.s.} \exp \{ E(\log |A|) \} < 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Par conséquent, par le critère de Cauchy pour la convergence des séries à termes positifs, la série dans (2.6) converge presque sûrement.

- (3) Si on fixe  $X_0 \stackrel{d}{=} Y$ , on peut vérifier que  $(X_0, X_1, \dots, X_n) \stackrel{d}{=} (X_k, X_{k+1}, \dots, X_{k+n})$  pour tous  $n, k \in \mathbb{N}^*$  qui généralise l'égalité en distribution  $(X_0, X_1) \stackrel{d}{=} (X_k, X_{k+1})$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Par la relation (2.5), pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned} (X_k, X_{k+1}) &= (X_k, A_{k+1}X_k + B_{k+1}) \\ &\stackrel{d}{=} (X_0, A_1X_0 + B_1) \\ &= (X_0, X_1). \end{aligned}$$

On sait que toute suite de variables aléatoires iid est un processus ergodique. Puisque  $X_n$  est fonction mesurable de la suite  $((A_k, B_k), k \in \mathbb{N}^*)$ , le processus  $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$  est ergodique.

- (4) Pour toute variable aléatoire  $Z$ , soit  $\|Z\|_p = (E|Z|^p)^{\frac{1}{p}}$ . Puisque la fonction  $-\log x$  est convexe,  $\|B\|_p < \infty$  et  $\|A\|_p < 1$ , par l'inégalité de Jensen on déduit que les conditions (2.4) sont vérifiées. Par conséquent les conclusions (1), (2) et (3) de théorème sont vérifiées. De plus,

$$\|Y\|_p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left\| B_n \prod_{j=1}^{n-1} A_j \right\|_p = \|B\|_p \sum_{n=1}^{\infty} \|A\|_p^{n-1} < \infty$$

Donc  $E|Y|^p < \infty$  et la série dans (2.6) converge en moyenne d'ordre  $p$ .

- (5) La suite  $(Y_n^*, n \in \mathbb{N}^*)$  converge presque sûrement vers la série dans (2.6). Par (1), (2) et (3) de théorème 2.1 et le théorème de convergence dominée on déduit que

$$E|Y_n^*|^p \longrightarrow E|Y|^p, \quad n \longrightarrow \infty.$$

Ainsi pour  $X_0 = 0$  p.s.,  $E|X_n(0)|^p \longrightarrow E|Y|^p$ ,  $n \longrightarrow \infty$ , ceci vient de fait que  $X_n(0) \stackrel{d}{=} Y_n^*$ . Pour une variable initiale quelconque  $X_0$ , on déduit de la relation (2.10) que

$$E|X_n(X_0) - X_n(0)|^p \leq (E|A|^p)^n E|X_0|^p \longrightarrow 0, \quad n \longrightarrow \infty.$$

- (6) De la relation (2.5), on déduit que (2.8) est vérifiée à chaque fois que les espérances existent. Les équations (2.8) déterminent  $E(Y^m)$  successivement pour  $m = 1, \dots, [p]$ . Le coefficient  $E(A^k)$  de  $E(X^k)$  satisfait

$$|EA^k| \leq E|A|^k < 1,$$

parce que la fonction  $f(x) = x^{-1} \log E|A|^x$  est une fonction convexe en  $x$  dans  $]0, p]$ . En effet  $f(x) \longrightarrow 0$  si  $x \longrightarrow 0$  et  $f(p) = 0$ ,  $f'(0) < 0$  et  $f'(p) > 0$ . Autrement dit  $h(x) = E(|A|^x)$  convexe sur  $]0, p]$  parce que  $h''(x) > 0$  sur  $]0, p]$ .

Dans le théorème 2.1, on a vu que si les conditions (2.4) sont satisfaites, alors la suite  $(Y_n, n \in \mathbb{N}^*)$  définie par (2.3) converge presque sûrement vers une variable aléatoire  $Y$  donnée par

$$Y = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \prod_{j=1}^{m-1} A_j, \tag{2.13}$$

où la série précédente converge presque sûrement.

Sous l'hypothèse que l'équation (2.5) n'admet pas de solution dégénérée et la variable  $A$  n'est pas dégénérée en zéro, Goldie et Maller [11] ont trouvé une condition nécessaire et suffisante pour que  $Y_n(Y_0) \xrightarrow{p.s.} Y$  où  $Y$  est donnée par (2.13), tandis que  $|Y_n(Y_0)| \xrightarrow{P} \infty$  lorsque cette condition n'est pas satisfaite.

Soient les variables aléatoires suivantes :

$$Z = -\log |A|, Z_n = -\log |A_n|, T = \log |B|, T_n = \log |B_n|, n \in \mathbb{N}^*. \quad (2.14)$$

Les variables aléatoires  $Z_n, n = 1, 2, \dots$  forment les pas de la marche aléatoire  $(S_n, n \in \mathbb{N})$ , où

$$S_n = \sum_{j=1}^n Z_j = -\log \left| \prod_{j=1}^n A_j \right|, n \in \mathbb{N}. \quad (2.15)$$

On définit la moyenne tronquée de la variable  $Z$  comme suite

$$M_A(y) = E(Z^+ \wedge y) = \int_0^y P(Z > z) dz, y > 0, \quad (2.16)$$

où  $x^+ = x \vee 0 = \max(x, 0)$  et  $x^- = -(x \wedge 0) = -\min(x, 0)$ .

La théorème suivant de Goldie et Maller [11] donne la condition nécessaire et suffisante pour la convergence presque sûre de la suite  $(Y_n, n \in \mathbb{N}^*)$  définie par (2.3).

**Théorème 2.2.** *Supposons que  $P(B = 0) < 1$  et  $P(A = 0) = 0$ , alors les conditions suivantes sont équivalentes*

$$\prod_{k=1}^n A_k \xrightarrow{p.s.} 0, n \rightarrow \infty \quad \text{et} \quad \int_{]1, \infty[} \left( \frac{\log q}{M_A(\log q)} \right) dP(|B| \leq q) < \infty, \quad (2.17)$$

$$P(|A| = 1) < 1 \quad \text{et} \quad \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \left| \prod_{k=1}^{n-1} A_k B_n \right| < \infty \quad p.s., \quad (2.18)$$

$$\prod_{k=1}^{n-1} A_k B_n \xrightarrow{p.s.} 0, n \rightarrow \infty, \quad (2.19)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \prod_{k=1}^{n-1} A_k B_n \right| < \infty \quad p.s., \quad (2.20)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P \left( \min_{1 \leq j \leq n-1} \left| \prod_{k=1}^j A_k \right| |B_n| \geq e^{-x} \right) < \infty, x > 0, \quad (2.21)$$

Chacune des conditions précédentes implique que

$$Y_n(Y_0) \xrightarrow{p.s.} Y, n \rightarrow \infty, \quad (2.22)$$

où  $Y$  est donnée par (2.13) et la série dans (2.13) converge absolument p.s.

Inversement, supposons que

$$P(Ac + B = c) < 1 \quad \text{pour tout } c \in \mathbb{R}, \quad (2.23)$$

si la condition (2.17) n'est pas satisfaite, i.e., si  $\prod_{k=1}^n A_k$  ne converge pas vers zéro p.s. ou si l'intégrale dans (2.17) diverge, alors  $|Y_n(Y_0)| \xrightarrow{P} \infty, n \rightarrow \infty$ .

**Remarque 2.1.** Les propriétés de la fonction  $M_A(y)$  définie dans (2.16) et dans (2.17) sont qu'elle n'est pas décroissante et concave, avec  $M_A(0) = 0$  et  $M_A(\infty) = E(Z^+) \leq \infty$ . De même,  $M_A(y) > 0$  pour un certain  $y > 0$  si et seulement si  $P(Z > 0) = P(|A| < 1) > 0$ . Pour déduire d'autres propriétés de l'intégrande dans (2.17), on écrit

$$\frac{M_A(y)}{y} = E \left( \frac{Z^+}{y} \wedge 1 \right) = \int_0^1 P(Z > ty) dt, \quad (2.24)$$

qui montre que  $M_A(y)/y$  est non croissante avec limites  $P(Z > 0) = P(|A| < 1)$  en  $0^+$  et  $P(A = 0)$  en  $\infty$ . Notons que si  $\prod_{k=1}^n A_k \xrightarrow{p.s.} 0$ , alors  $P(|A| < 1) > 0$  et que l'intégrande dans (2.17) est bornée au voisinage de  $q = 1$ . D'autres parts, si  $|A| \geq 1$  p.s, alors  $\prod_{k=1}^n A_k$  ne converge pas vers zéro presque sûrement et donc on a pas besoin d'évaluer l'intégrale dans laquelle l'intégrande est égale à  $+\infty$ . On prends  $M_A(y)/y$  égale à  $P(|A| < 1)$  pour  $y = 0$  et avec cette convention on pourra intégrer sur  $[1, \infty[$  plutôt sur  $]1, \infty[$  dans (2.17).

**Remarque 2.2.** Noton que l'équation (2.23) est une condition de non dégénérescence de la solution de l'équation (2.5). Remarquons que lorsque  $B_n = c - A_n c$ , la relation (2.3) se réduit à

$$Y_n(Y_0) = c + (Y_0 - c) \prod_{k=1}^n A_k, \quad n \in \mathbb{N}^*. \quad (2.25)$$

Lorsque  $Y_0$  est dégénérée en  $c$ , on a  $Y_n(c) = c$  p.s., alors que sinon la comportement asymptotique de  $Y_n(Y_0)$  se réduit à celui de  $\prod_{k=1}^n A_k$ . L'échec de (2.17) n'implique pas donc que  $|Y_n(Y_0)| \xrightarrow{P} \infty$ , ainsi (2.23) est nécessaire pour la proposition inverse dans le théorème 2.2.

**Remarque 2.3.** On a exclu le cas où  $P(A = 0) > 0$  qui est trivial dans le sens suivant. Lorsque ceci se produit, l'intégrande dans (2.17) est bornée par  $1/P(A = 0)$  (voir la remarque 2.1), ainsi l'intégrale est finie indépendamment de  $B$ . On a aussi,  $N = \min\{n : A_n = 0\} < \infty$  p.s et  $\prod_{k=1}^n A_k = 0$  pour tout  $n \geq N$ , par conséquent les relations (2.17)-(2.22) sont vérifiées où dans (2.22),  $Y_n(Y_0) = \sum_{k=1}^N \prod_{i=1}^{k-1} A_i B_k$  pour tout  $n \geq N$ . Il n'y a en particulier aucun contenu dans la proposition inverse de théorème 2.2 parce que (2.17) est vérifiée dans ce cas.

On a également exclu le cas où  $B = 0$  p.s dans le théorème 2.2. Lorsque ceci est vérifié, la relation (2.3) donne  $Y_n(Y_0) = \prod_{k=1}^n A_k Y_0$  p.s et  $Y_n(Y_0)$  converge p.s. si et seulement si  $\prod_{k=1}^n A_k$  converge presque sûrement tant que  $Y_0$  n'est pas dégénérée en zéro. Maintenant  $\prod_{k=1}^n A_k$  converge p.s. si et seulement si  $\prod_{k=1}^n A_k$  converge p.s. vers zéro parce que  $S_n$  ne peut diverger que vers  $+\infty$  ou  $-\infty$  et seulement  $S_n \rightarrow +\infty$  correspond à la convergence de  $\prod_{k=1}^n A_k$ . Ainsi le comportement de  $Y_n(Y_0)$  est bien défini. L'inverse dans le théorème 2.2 que  $|Y_n(Y_0)| \xrightarrow{P} \infty$  si (2.17) n'est pas vérifiée n'est pas juste lorsque  $B = 0$  p.s., mais ceci est exclu par (2.23) (avec  $c = 0$ ) dans tous les cas.

**Remarque 2.4.** On a vus dans la remarque précédente que lorsque  $P(A = 0) = 0$ ,  $\prod_{k=1}^n A_k \xrightarrow{p.s.} 0$  si et seulement si  $S_n \xrightarrow{p.s.} \infty$ . Une condition nécessaire et suffisant pour que  $\prod_{k=1}^n A_k \xrightarrow{p.s.} 0$  est démontrée par Kesten et Maller [16] en termes de

$$J_- = \int_{[0, \infty[} \left( \frac{y}{M_A(y)} \right) dP(Z \geq -y). \quad (2.26)$$

**Proposition 2.1.** Lorsque  $P(A = 0) = 0$ ,  $\prod_{k=1}^n A_k \xrightarrow{p.s.} 0$  si et seulement si

$$J_- < E(Z^+) = \infty \quad \text{où} \quad 0 < E(Z) \leq E|Z| < \infty. \quad (2.27)$$

On peut même considérer le cas  $P(A = 0) > 0$  qui est inclu dans  $J_- < E(Z^+) = \infty$  parce qu'il correspond au cas  $Z = -\log |A| = +\infty$  avec une probabilité positive, par conséquent  $E(Z^+) = +\infty$  et l'intégrale  $J_-$  est finie parce que l'intégrande est bornée par  $1/P(A = 0)$  (voir la remarque 2.3). Cette proposition 2.1 reste vrai lorsque  $P(A = 0) > 0$  comme pour les conditions (2.17)-(2.21) de théorème 2.2.

**Remarque 2.5.** Par la suite dans le lemme 2.5, on va montrer que la finitude de l'intégrale est nécessaire. D'autres parts, le théorème 2.2 montre que  $\prod_{k=1}^n A_k \xrightarrow{p.s.} 0$  est nécessaire pour que les autres hypothèses du théorème 2.2 soient vérifiées et  $\prod_{k=1}^n A_k \xrightarrow{p.s.} 0$  n'est pas impliquée par la finitude de l'intégrale dans (2.17) même si  $B$  a un support non borné, i.e., l'ensemble des valeurs prises par  $B$  n'est pas borné.

**Remarque 2.6.** Sous la condition de non dégénérescence (2.23), le théorème 2.2 montre que  $Y_n(Y_0)$  a une des deux formes opposées de comportement asymptotique : soit  $Y_n(Y_0) \xrightarrow{p.s} Y$ , soit  $|Y_n(Y_0)| \xrightarrow{p} \infty$ . Dans le théorème 2.2, la distribution conjointe de  $A$  et  $B$  ne joue aucun rôle sauf dans la condition de non dégénérescence (2.23), ainsi (2.17) n'impliquant que les lois marginales de  $A$  et  $B$ . En prenant les lois marginales de  $A$  et  $B$  à la place de la loi conjointe, ceci n'a aucun effet sur le comportement de la convergente de  $Y_n(Y_0)$ . Il est même possible d'affaiblir la condition de l'indépendance de la suite  $((A_n, B_n), n \in \mathbb{N}^*)$ . On peut supposer que les variables  $(A_n, n \in \mathbb{N}^*)$  sont i.i.d et les variables  $(B_n, n \in \mathbb{N}^*)$  ont la même distribution,  $B_n$  peut être dépendante de  $A_n$  dans la première partie de théorème 2.2, mais pas dans la deuxième partie de théorème 2.2.

**Remarque 2.7.** On peut remplacer  $M_A(y)$  dans (2.17) par

$$\widehat{M}_A(y) = \int_0^y P(|Z| > z) dz = \int_0^y P(Z > z) + P(Z < -z) dz. \quad (2.28)$$

C'est à dire on a le résultat suivant.

**Proposition 2.2.** *Supposons que  $P(B = 0) < 1$  et  $P(A = 0) = 0$ , alors (2.17) est équivalent à*

$$\prod_{k=1}^n A_k \xrightarrow{p.s} 0 \quad \text{et} \quad \int_{]1, +\infty[} \left( \frac{\log q}{\widehat{M}_A(\log q)} \right) dP(|B| \leq q) < \infty. \quad (2.29)$$

On peut encore remplacer  $]1, \infty[$  par  $[1, \infty[$  dans l'intégrale de la proposition 2.2 en prenant que la limite de  $\widehat{M}_A(y)/y$  en  $y = 0$  est égale à  $P(|A| < 1)$  qui est supérieur strictement à zéro si  $\prod_{k=1}^n A_k \xrightarrow{p.s} 0$ .

On a vu dans le théorème 2.1 que  $X_n(X_0) \xrightarrow{d} Y$  indépendamment de  $X_0$  avec  $Y$  est l'unique solution de l'équation  $Y \stackrel{d}{=} AY + B$  où  $Y$  et  $(A, B)$  sont indépendantes. Dans le résultat suivant dû à Goldie et Maller [11], on donne des différentes situations dans lesquelles la suite  $(Y_n(Y_0), n \in \mathbb{N}^*)$  converge presque sûrement, i.e.,  $(X_n(X_0), n \in \mathbb{N}^*)$  converge en distribution et des situations dans lesquelles la suite  $(Y_n(Y_0), n \in \mathbb{N}^*)$  diverge.

### Théorème 2.3.

- (a) Si  $P(A = 0) > 0$ , alors il existe une variable aléatoire  $N$  à valeur dans  $\mathbb{N}$  telle que  $Y_n(Y_0) = Y_N$  pour tout  $n \geq N$ ,  $Y_N$  est l'unique solution de l'équation (2.5) et  $X_n(X_0) \xrightarrow{d} Y_N$  pour toute variable initiale  $X_0$ .
- (b) Si  $P(A = 0) = 0$  et  $P(Ac + B = c) = 1$  pour une certaine constante  $c \in \mathbb{R}$ , alors

$$X_n(X_0) = c + (X_0 - c) \prod_{k=1}^n A_k \text{ p.s.}, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

et la relation de (2.25) est vérifiée, ainsi que  $Y_n(Y_0)$  se réduit à  $X_n(Y_0)$ . En particulier, on a

(i)  $A = 1$  p.s. Dans ce cas  $X_n(X_0) = X_0$  p.s., ainsi toute variable aléatoire initiale  $X_0$  est une solution de l'équation (2.5).

(ii)  $A = -1$  p.s, alors

$$X_n(X_0) = c + (-1)^n (X_0 - c), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Les solutions de l'équation (2.5) sont les variables  $X$  pour lesquelles  $X - c \stackrel{d}{=} -(X - c)$  et  $X_n(X_0) \xrightarrow{d} X$  si et seulement si  $X_0 \stackrel{d}{=} X$ , dans ce cas  $X_n(X_0) \stackrel{d}{=} X$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

(iii)  $|A| = 1$  p.s, mais  $0 < P(A = 1) < 1$ , alors les solutions de l'équation (2.5) sont les variables  $X$  pour lesquelles  $X - c \stackrel{d}{=} -(X - c)$  et  $X_n(X_0) \xrightarrow{d} X$  pour toute variable  $X_0$ . La variable limite  $X$  vérifie

$$X \stackrel{d}{=} c + (X_0 - c)U \quad \text{où } U = \pm 1 \quad \text{avec des probabilités } \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \text{ et indépendante de } X_0.$$

(iv)  $\prod_{k=1}^n A_k \xrightarrow{P} 0$ , alors  $X = c$  p.s. est l'unique solution de l'équation (2.5) et  $X_n(X_0) \xrightarrow{P} c$  pour toute variable initiale  $X_0$ .

(v)  $P(|A| = 1) < 1$  et  $\prod_{k=1}^n A_k$  ne tend pas vers zéro en probabilité, alors  $X = c$  p.s. est l'unique solution de l'équation (2.5) et  $X_n(X_0) \xrightarrow{P} c$  si et seulement si  $X_0 = c$  p.s.

(c)  $P(A = 0) = 0$  et  $P(Ac + B = c) < 1$  pour tout  $c \in \mathbb{R}$ .

(i) Si (2.17) est vérifié, alors  $Y$  donnée par (2.13) est non dégénérée et c'est l'unique solution de l'équation (2.5) et  $X_n(X_0) \xrightarrow{d} Y$  pour toute variable aléatoire initiale  $X_0$ .

(ii) Si (2.17) n'est pas vérifié, l'équation (2.5) n'admet pas de solution et  $|X_n(X_0)| \xrightarrow{P} \infty$  pour tout variable initiale  $X_0$ .

On relie les résultats de théorème 2.3 aux conditions sur les moments de  $A$  et  $B$ . Pour avoir des moments bien définis de  $-\log |A|$ , on suppose que  $P(A = 0) = 0$ . Supposons que la condition de non dégénérescence (2.23) est vérifiée qui exclu le cas  $P(B = 0) = 1$ . Supposons que  $Y_n(Y_0) \xrightarrow{p.s} Y$  avec  $Y$  donnée par (2.13) et supposons que les conditions (2.17)-(2.20) sont satisfaites. On a vu dans le théorème 2.2 que lorsque  $Y_n(Y_0)$  ne converge pas p.s., on a la divergence dans le sens que  $|Y_n(Y_0)| \xrightarrow{P} \infty$ . De plus, d'après le théorème 2.3 (c) (i), il existe une solution de l'équation (2.5), à savoir  $Y$  qui est donnée par (2.13) lorsqu'on a la convergence  $Y_n(Y_0) \xrightarrow{p.s} Y$ . Rappelons que  $\log^+ = \log(x \vee 1)$  et  $\log^- x = -\log(x \wedge 1)$  pour  $x > 0$ , alors  $J_-$  donnée par (2.26) peut être écrite comme suit :

$$J_- = E\left(\frac{\log^+ |A|}{M_A(\log^+ |A|)}\right). \quad (2.30)$$

**Corollaire 2.1.** *Supposons que  $P(A = 0) = 0$  et la condition de la non dégénérescence (2.23) est vérifiée.*

- (a) *Si  $0 \leq E(\log |A|) \leq \infty$ , alors  $Y_n(Y_0)$  ne converge pas.*
- (b) *Si  $-\infty < E(\log |A|) < 0$ , alors  $Y_n(Y_0)$  converge p.s. si et seulement si  $E(\log^+ |B|) < \infty$ .*
- (c) *Si  $E(\log |A|) = -\infty$ , alors  $Y_n(Y_0)$  converge p.s. si et seulement si l'intégrale dans (2.17) est finie, en particulier si  $E(\log^+ |B|) < \infty$ .*
- (d) *Si  $E(\log |A|)$  n'existe pas, i.e.,  $E(\log^+ |A|) = \infty$  et  $E(\log^- |A|) = \infty$ .*
  - (i) *Si  $j_- < \infty$ , alors  $Y_n(Y_0)$  converge p.s. si et seulement si l'intégrale dans (2.17) est finie, en particulier si  $E(\log^+ |B|) < \infty$ .*
  - (ii) *Si  $J_- = \infty$ , alors  $Y_n(Y_0)$  ne converge pas.*

Un autre cas particulier est lorsque  $A$  est dégénérée en  $m \neq 0$ . Si  $|m| \geq 1$ , les deux parties de (2.17) ne sont pas vérifiées, la fonction  $M_A$  est égale à zéro. Lorsque  $0 < |m| < 1$ , la première partie de (2.17) est vérifiée et pour la deuxième on a  $M_A(y) = x \wedge y$  où  $x = -\log |m| > 0$ , ainsi la finitude de l'intégrale dans (2.17) est équivalente à  $E(\log^+ |B|) < \infty$ . On en déduit donc le résultat suivant.

**Corollaire 2.2.** *Soit  $Y_n = \sum_{k=1}^n m^{k-1} B_k$  la somme partielle de la série  $Y$  donnée par (2.13) avec  $A_k = m$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite iid où  $P(B = 0) < 1$ . Si*

$$|m| < 1 \quad \text{et} \quad E(\log^+ |B|) < \infty, \quad (2.31)$$

alors  $\sum_{k=1}^{\infty} |m|^{k-1} |B_k| < \infty$  p.s. et  $Y_n(Y_0) \xrightarrow{p.s.} Y = \sum_{k=1}^{\infty} m^{k-1} B_k$ . Si au moins une des conditions de (2.31) n'est pas vérifiée, alors  $|Y_n(Y_0)| \xrightarrow{P} \infty$ . Dans le premier cas, la variable limite  $Y$  est l'unique solution de l'équation

$$Y \stackrel{d}{=} AY + B, \quad Y \text{ indépendante de } (A, B). \quad (2.32)$$

Dans le deuxième cas, l'équation (2.32) n'a pas de solutions.

**Remarque 2.8.** De corollaire 2.2, on déduit un résultat correspondant à  $Y_n = \prod_{k=1}^n A^{k-1} B_k$  où les variables  $B_k$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$  sont conditionnellement indépendantes sachant  $A$ , avec  $P(A = 0) = 0$  et  $P(B = 0|A) < 1$  p.s. Si

$$P(|A_0| < 1) < 1 \quad \text{et} \quad E(\log^+ |B||A) < \infty, \quad p.s., \quad (2.33)$$

alors  $\sum_{k=1}^{\infty} |A|^{k-1} |B_k| < \infty$  p.s. et  $Y_n(Y_0) \xrightarrow{p.s.} Y = \sum_{k=1}^{\infty} A^{k-1} B_k$ .

Un dernier cas particulier des théorèmes 2.3 et 2.3 est lorsque  $B$  est dégénérée en une valeur non nulle qu'on suppose égale à 1 sans aucune perte de généralité. On peut satisfaire la condition de non dégénérescence (2.23) en supposant que  $A$  est non dégénérée. A partir des des théorèmes 2.2 et 2.3, on a le résultat suivant.

**Corollaire 2.3.** *Supposons que  $A$  est non dégénérée. Si  $\prod_{k=1}^n A_k \xrightarrow{p.s.} 0$ , la série  $Y$  donnée par (2.13) avec  $B_k = 1$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ , i.e.,  $Y = \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{k-1} A_j$ , converge absolument presque sûrement. De plus,  $Y$  n'est pas dégénérée et c'est l'unique solution de l'équation*

$$Y \stackrel{d}{=} AY + 1, \quad Y \text{ indépendante de } A \quad (2.34)$$

et la suite défini par  $X_n(X_0) = A_n X_{n-1}(X_0) + 1$  converge en distribution vers  $Y$  pour toute variable initiale  $X_0$ .

Inversement, si  $\prod_{k=1}^n A_k$  ne converge pas vers zéro p.s., alors

$$Y_n(Y_0) = \sum_{k=1}^n \prod_{i=1}^{k-1} A_i + \prod_{j=1}^n A_j Y_0$$

satisfait  $|Y_n(Y_0)| \xrightarrow{P} \infty$ . De plus, il n'existe pas de solutions pour l'équation (2.34) et  $|X_n(X_0)| \xrightarrow{P} \infty$  pour toute variable initiale  $X_0$ .

Pour montrer les théorèmes 2.2 et 2.3, on utilise les lemmes suivants (voir Goldie et Maller [11]).

**Lemme 2.1.** *Soit  $(V_k, k \in \mathbb{N}^*)$  une suite de variables aléatoires iid non dégénérées en zéro et supposons que  $V_1 + \dots + V_n \xrightarrow{p.s.} \infty$ , alors il existe une constante  $c_+ > 0$  qui dépend de la distribution de  $V_1$  telle que pour tout  $y > 0$ ,*

$$\frac{y}{E(V_1^+ \wedge y)} \leq \sum_{n=0}^{\infty} P\left(\max_{1 \leq j \leq n} (V_1 + \dots + V_j) \leq y\right) \leq \frac{c_+ y}{E(V_1^+ \wedge y)}, \quad (2.35)$$

où  $y/E(V_1^+ \wedge y)$  prend la valeur  $1/P(V_1 > 0) < \infty$  pour  $y = 0$ .

**Lemme 2.2.** *Supposon que  $P(B = 0) < 1$  et  $P(A = 0) = 0$ . Si la condition (2.17) est vérifiée, alors pour un certain  $c > 0$ ,*

$$\prod_{k=1}^{n-1} A_k B_n = o(e^{-cn}), \quad n \rightarrow \infty, \quad p.s. \quad (2.36)$$

Par conséquent, (2.17) implique (2.20) et (2.22), i.e., la série dans (2.13) converge absolument p.s. et  $Y(Y_0)_n \xrightarrow{p.s.} Y$ ,  $n \rightarrow \infty$  où  $Y$  est donnée par (2.13).

**Preuve.** Notons d'abord que si  $P(B = 0) < 1$  et  $P(A = 0) = 0$ , alors pour les variables  $Z_j$  et  $T_j$  définies dans (2.14),

$$P(|Z_j| < \infty) = 1 \quad \text{et} \quad P(T_j^+ < \infty) = 1, \quad j \in \mathbb{N}^*.$$

L'intégrale dans (2.17) peut s'écrire comme suit

$$\begin{aligned} \int_{]1, \infty[} \left( \frac{\log q}{M_A(\log q)} \right) dP(|B| \leq q) &= E \left( \frac{\log^+ |B|}{M_A(\log^+ |B|)} \right) \\ &= \int_{]0, \infty[} \left( \frac{t}{M_A(t)} \right) dP(\log^+ |B| \leq t) \\ &= \int_{]0, \infty[} \left( \frac{t}{E(Z^+ \wedge t)} \right) dP(T^+ \leq t) < \infty. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Si  $\prod_{k=1}^n A_k \xrightarrow{p.s.} 0$ , alors  $P(|A| < 1) = P(Z > 0) > 0$  et la fonction  $t/E(Z^+ \wedge t)$  prend la valeur  $1/P(Z > 0)$  en  $t = 0$ . Par conséquent, on peut prendre l'intégrale en (2.37) dans un intervalle  $[0, \infty[$ . Notons que la condition (2.36) est équivalente à

$$S_n - T_n - cn \xrightarrow{p.s.} \infty \quad \text{pour un certain } c > 0. \quad (2.38)$$

Si  $P(A = 0) = 0$  et  $\prod_{k=1}^n A_k \xrightarrow{p.s.} 0$ , alors  $S_n \xrightarrow{p.s.} \infty$ . Pour montrer (2.38), on distingue deux cas.

**Cas 1 :** Si  $E(Z^+) = \infty$ , alors  $\sum_{j=1}^{n-1} Z_j^+ / n \xrightarrow{p.s.} \infty$ . Puisque l'intégrale en (2.37) est finie, on a

$$\frac{T_n^+}{\sum_{j=1}^{n-1} Z_j^+} \xrightarrow{p.s.} 0. \quad (2.39)$$

En effet, puisque  $T_n$  est indépendante de  $Z_1, \dots, Z_{n-1}$ , pour  $\varepsilon \in ]0, 1[$ , on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} P\{\varepsilon(Z_1^+ + \dots + Z_{n-1}^+) \leq T^+\} &= \int_{]0, \infty[} \sum_{n=1}^{\infty} P\{\varepsilon(Z_1^+ + \dots + Z_{n-1}^+) \leq t/\varepsilon\} dP(T^+ \leq t) \\ &\leq \int_{]0, \infty[} \left( \frac{c_+ t/\varepsilon}{E(Z^+ \wedge (t/\varepsilon))} \right) dP(T^+ \leq t) \\ &\leq \frac{c_+}{\varepsilon} \int_{]0, \infty[} \left( \frac{t}{E(Z^+ \wedge t)} \right) dP(T^+ \leq t) < \infty. \end{aligned}$$

Par le lemme de Borel-Catelli, on déduit que  $P(\limsup_n \{T^+ / (Z_1^+ + \dots + Z_{n-1}^+) \geq \varepsilon\}) = 0$  et par conséquent (2.39) est vérifiée. Par la proposition 2.1,  $S_n \xrightarrow{p.s.} \infty$  et  $E(Z^+) = \infty$  implique  $J_- < \infty$  et par conséquent

$$\sum_{j=1}^{n-1} Z_j^- = o\left(\sum_{j=1}^{n-1} Z_j^+\right) \text{ p.s.} \quad (2.40)$$

Puisque  $n = o(\sum_{j=1}^{n-1} Z_j^+) \text{ p.s.}$ , par les relations (2.39) et (2.40) on déduit

$$\sum_{j=1}^{n-1} Z_j^+ - n - T_n^+ - \sum_{j=1}^{n-1} Z_j^- = \left(\sum_{j=1}^{n-1} Z_j^+\right)(1 - o(1)) \xrightarrow{p.s.} \infty,$$

qui implique (2.38) avec  $c = 1$ .

**Cas 2 :** Si  $E(Z^+) < \infty$ , alors par (2.37) on déduit que  $E(T^+) < \infty$ . Puisque  $S_n \xrightarrow{p.s.} \infty$ , par (2.27)

on a  $E(Z^-) < \infty$  et  $\mu = E(Z) > 0$ . Maintenant,  $T_n^+ = o(n)$  et  $(S_{n-1} - n\mu/2)/n \xrightarrow{p.s.} \mu/2$ . Par conséquent

$$\frac{T_n^+}{S_{n-1} - n\mu/2} \xrightarrow{p.s.} 0, \quad (2.41)$$

qui implique

$$S_{n-1} - n\mu/2 - T_n^+ = (S_{n-1} - n\mu/2)(1 - o(1)) \xrightarrow{p.s.} \infty,$$

i.e., la relation (2.38) est vérifiée avec  $c = \mu/2$ . Finalement, on a montré que (2.36) est vérifiée qui est une condition suffisante pour la convergence p.s. de la série (2.13), i.e., (2.20) est vérifiée. La variable aléatoire  $Y$  définie en (2.13) est la limite p.s. de la somme partielle  $\sum_{k=1}^n \prod_{j=1}^{k-1} A_j B_k$ .

Si  $\prod_{j=1}^n A_j \xrightarrow{p.s.} 0$ , alors  $Y_n(Y_0) = \sum_{k=1}^n \prod_{j=1}^{k-1} A_j B_k + \prod_{j=1}^n A_j Y_0 \xrightarrow{p.s.} Y$  pour toute variable initiale  $Y_0$ , i.e., (2.22) est vérifiée.

**Lemme 2.3.** *Supposons que  $P(A = 0) = 0$  et  $\prod_{k=1}^n A_k \xrightarrow{p.s.} 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Soit  $a_n = \sum_{j=1}^n Z_j^- / \sum_{j=1}^n Z_j^+$  et  $\tilde{A}_j = e^{-Z_j^+}$ , alors  $|\prod_{k=1}^n A_k| = \left(\prod_{j=1}^n \tilde{A}_j\right)^{1-a_n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , De plus il existe une constante  $a < 1$  telle que*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n < a < 1 \text{ p.s.}, \quad (2.42)$$

de sorte que dès que  $a_n < a$  p.s.,

$$\prod_{j=1}^n \tilde{A}_j \leq \left| \prod_{k=1}^n A_k \right| \leq \left( \prod_{j=1}^n \tilde{A}_j \right)^{1-a}. \quad (2.43)$$

**Preuve.** Notons que  $\prod_{j=1}^n A_j \xrightarrow{p.s.} 0$ , i.e.,  $S_n \xrightarrow{p.s.} \infty$  est équivalente à  $J_- < E(Z^+) = \infty$  ou à  $0 < E(Z) \leq E|Z| < \infty$ , d'après la proposition 2.1. Si  $J_- < \infty = E(Z^+)$ , alors  $a_n \xrightarrow{p.s.} 0$ . Si  $0 < E(Z) \leq E|Z| < \infty$ , alors  $a_n \xrightarrow{p.s.} E(Z^-)/E(Z^+) < 1$ . Dans les deux cas, il existe  $a < 1$  telle que la relation (2.42) est vérifiée. Maintenant, on a

$$S_n = \sum_{j=1}^n (Z_j^+ - Z_j^-) = (1 - a_n) \sum_{j=1}^n Z_j^+$$

et par conséquent,

$$\left| \prod_{j=1}^n A_j \right| = e^{-S_n} = e^{(1-a_n)\sum_{j=1}^n -Z_j^+} = \left( \prod_{k=1}^n e^{-Z_j^+} \right)^{1-a_n}.$$

Finalement, la première inégalité dans (2.43) est vérifiée dès que  $a_n < 1$  et la deuxième inégalité dans (2.43) est vérifiée dès que  $a_n < a$ .

**Lemme 2.4.** *Si  $P(A = 0) = 0$ ,  $P(0 \leq A \leq 1) = 1$ ,  $P(0 < A < 1) > 0$ ,  $P(B = 0) < 1 = P(B \geq 0)$  et  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^{n-1} A_k B_n < \infty$  p.s., alors l'intégrale dans (2.17) converge.*

**Lemme 2.5.** *Supposons que  $P(B = 0) < 1$ ,  $P(A = 0) = 0$ . Si  $\prod_{k=1}^n A_k \xrightarrow{p.s.} 0$  et  $|Y_n(Y_0)|$  ne converge pas en probabilité vers  $\infty$ , alors  $Y_n(Y_0)$  converge en distribution vers une variable aléatoire  $Y$  et l'intégrale dans (2.17) est finie.*

**Preuve.** Puisque  $\prod_{j=1}^n A_j Y_0 \xrightarrow{p.s.} 0$  et  $Y_n(Y_0) = Y_n + \prod_{j=1}^n A_j Y_0$  où  $Y_n = Y(0) = \sum_{k=1}^n \prod_{j=1}^{k-1} A_j B_k$ , on peut supposer que  $Y_0 = 0$  p.s. Puisque  $|Y_n|$  ne converge pas en probabilité vers  $\infty$ , on peut trouver une sous suite  $(n_k)$  de  $\mathbb{N}$  telle que lorsque  $k \rightarrow \infty$ ,  $n_k \rightarrow \infty$  et  $Y_{n_k}$  converge en distribution vers une certaine variable  $Y^*$  telle que  $P(Y^* \in \mathbb{R}) > 0$ , i.e., si  $F$  est la fonction de répartition de  $Y^*$  avec  $F(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$  et  $F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$ , on a  $F(\infty) - F(-\infty) > 0$ .

Maintenant,  $Y_{n_k+1} = Y_{n_k} + B_{n_k+1} \prod_{j=1}^{n_k} A_j$  et  $B_{n_k+1} \prod_{j=1}^{n_k} A_j \xrightarrow{p.s.} 0$  qui implique que  $Y_{n_k+1} \xrightarrow{p.s.} Y^*$ . Pour  $1 \leq m < n$ , on a

$$Y_n = Y_m + \prod_{i=1}^m A_i \sum_{j=1}^{n-m} \prod_{l=1}^{j-1} A_{l+m} B_{j+m} = Y_m + \prod_{i=1}^m A_i (Y_{n-m} \circ \theta^m), \quad (2.44)$$

où  $\theta$  est l'opérateur de décalage qui ajoute 1 à l'indice de  $B_j$  et l'indice de  $A_i$ . Pour  $n = n_k + 1$  et  $m = 1$ , on obtient

$$Y_{n_k+1} = A_1 \tilde{Y}_{n_k} + B_1, \quad \tilde{Y}_{n_k} \text{ indépendante de } (A_1, B_1), \tilde{Y}_{n_k} \stackrel{d}{=} Y_{n_k}.$$

Si  $Y'$  est une variable aléatoire qui peut prendre les valeurs  $\infty$  et  $-\infty$  avec des probabilités supérieures à zéro et de fonction de répartition  $F$ , alors sur l'événement  $\{|Y'| < \infty\}$ , on a

$$Y' \stackrel{d}{=} A_1 Y' + B_1, \quad Y' \text{ indépendante de } (A_1, B_1).$$

Maintenant soit  $\hat{Y}$  une variable aléatoire qui a comme distribution la distribution conditionnelle de  $Y'$  sachant l'événement  $\{|Y'| < \infty\}$ , i.e.,  $\hat{Y}$  prend ses valeurs dans  $\mathbb{R}$  et sa fonction de répartition  $F_{\hat{Y}}$  satisfait

$$F_{\hat{Y}}(x) = \frac{F(x) - F(-\infty)}{F(\infty) - F(-\infty)} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Puisque  $\{|Y'| < \infty\} = \{|A_1 Y' + B_1| < \infty\}$ , on a

$$\hat{Y} \stackrel{d}{=} A \hat{Y} + B, \quad \hat{Y} \text{ indépendante de } (A, B). \quad (2.45)$$

Par itérations sur 2.45, on obtient

$$\begin{aligned} \hat{Y} &\stackrel{d}{=} \sum_{k=1}^n B_k \prod_{i=1}^{k-1} A_i + \prod_{i=1}^n A_i \hat{Y} \\ &= Y_n + \prod_{i=1}^n A_i \hat{Y}, \quad \hat{Y} \text{ indépendante de } (A_k, B_k), k = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Puisque  $\prod_{i=1}^n A_i \xrightarrow{p.s.} 0$  et  $\hat{Y}$  est finie, alors  $\prod_{i=1}^n A_i \hat{Y} \xrightarrow{P} 0$ . Par conséquent,  $Y_n \xrightarrow{d} \hat{Y}$ .

Maintenant, on montre que l'intégrale dans (2.17) est finie. On utilise l'inégalité maximale de Grincevicius (voir Goldie [10]). Soit la variable aléatoire  $Y_{j,n} = \sum_{k=j+1}^n \prod_{i=j+1}^{k-1} A_i B_k$ , l'inégalité maximale de Grincevicius est

$$P \left\{ \max_{j=1, \dots, n} \left( Y_j + \prod_{i=1}^j A_i \text{med} \left( Y_{j,n} + \prod_{k=j+1}^n A_k y \right) \right) > x \right\} \leq 2P \left( Y_n + \prod_{k=1}^n A_k y > x \right) \quad x, y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*, \quad (2.47)$$

où  $\text{med}$  désigne la médiane d'une variable aléatoire. Considérons l'inégalité 2.47 pour  $y = 0$  et notons que  $Y_{j,n} \stackrel{d}{=} Y_{n-j}$ , on obtient

$$P \left\{ \max_{j=1, \dots, n} \left( Y_j + \prod_{i=1}^j A_i \text{med} Y_{n-j} \right) > x \right\} \leq 2P(Y_n > x) \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.48)$$

Pour la suite  $(A_1, -B_1), \dots, (A_n, -B_n)$ , on trouve une inégalité similaire à (2.48) en prenant  $-Y_n$  à la place de  $Y_n$ . Par conséquent, on a l'inégalité suivante

$$P \left\{ \max_{j=1, \dots, n} \left| Y_j + \prod_{i=1}^j A_i \text{med} Y_{n-j} \right| > x \right\} \leq 2P(|Y_n| > x), \quad x \geq 0. \quad (2.49)$$

Soit  $m_n = \text{med } Y_n$ , alors pour  $n \geq k \geq 1$ ,

$$P \left\{ \max_{j=1, \dots, k} |Y_j + \prod_{i=1}^j A_i m_{n-j}| > x \right\} \leq 2P(|Y_n| > x), \quad x \geq 0. \quad (2.50)$$

Maintenant,  $P(|Y_n| > x) \rightarrow P(|\hat{Y}| > x)$  pour tout  $x \in [0, \infty[ \cap C_{\hat{Y}}$ , où  $C_{\hat{Y}}$  est l'ensemble de continuité de  $\hat{Y}$ . Puisque  $Y_n \xrightarrow{d} \hat{Y}$ , on peut supposer que  $m_n \rightarrow m_0$  où  $m_0$  est la médiane de  $\hat{Y}$ . Donc, de la relation (2.50), on obtient

$$P \left\{ \max_{j=1, \dots, k} |Y_j + \prod_{i=1}^j A_i m_0| > x \right\} \leq 2P(|\hat{Y}| > x), \quad x \in [0, \infty[ \cap C_{\hat{Y}}. \quad (2.51)$$

Lorsque  $k \rightarrow \infty$ , on déduit que  $\sup_{j \in \mathbb{N}} |Y_j + \prod_{i=1}^j A_i m_0| < \infty$  p.s. Maintenant, la finitude presque sûrement de  $\sup_{j \in \mathbb{N}} |Y_j + \prod_{i=1}^j A_i m_0|$  et le fait que  $\prod_{k=1}^n A_k \xrightarrow{p.s.} 0$  impliquent que  $\limsup_{n \rightarrow \infty} |Y_n| < \infty$  p.s. Par conséquent,  $\limsup_{n \rightarrow \infty} |\prod_{k=1}^{n-1} A_k| \cdot |B_n| < \infty$  p.s. parce que  $\prod_{k=1}^{n-1} A_k B_n = Y_n - Y_{n-1}$ . Par l'inégalité (2.43), on déduit que  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^{n-1} \tilde{A}_k \cdot |B_n| < \infty$  p.s. La convergence p.s. de  $\prod_{k=1}^n A_k \xrightarrow{p.s.} 0$  vers zéro implique que la variable  $\tilde{A} = \min(|A|, 1)$  vérifie  $P(\tilde{A} = 1) < \infty$ . Les hypothèses de lemme 2.4 sont vérifiées par  $(\tilde{A}, |B|)$ , i.e., par la suite  $(\tilde{A}_n, |B_n|)$  et donc

$$\int_{]1, \infty[} \left( \frac{\log q}{\tilde{M}_A(\log q)} \right) dP(|B| \leq q) < \infty,$$

où

$$\tilde{M}_A(y) = \int_0^y P(-\log \tilde{A} > x) dx = \int_0^y P(Z^+ > x) dx = \int_0^y P(Z > x) dx = M_A(y).$$

Donc l'intégrale dans (2.17) est finie.

**Lemme 2.6.** *Supposons que  $P(B = 0) < 1$  et  $P(A = 0) = 0$ , alors (2.17) est vérifiée si et seulement si (2.21) est vérifiée.*

**Preuve.** Notons que la condition (2.17) est équivalente à

$$\prod_{k=1}^n A_k \xrightarrow{p.s.} 0 \quad \text{et} \quad \int_{]0, \infty[} \left( \frac{y}{\int_0^y P(Z > z) dz} \right) dP(T^+ \leq y) < \infty. \quad (2.52)$$

La condition (2.21) est équivalente à

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P \left( \max_{1 \leq j \leq n-1} S_j \leq x + T_n \right) < \infty \quad \text{pour tout } x > 0. \quad (2.53)$$

Supposons que (2.52) est vérifié. On a

$$\begin{aligned} S(x) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} P \left( \max_{1 \leq j \leq n-1} S_j \leq x \right) P(T \leq 0) \\ &\quad + \int_{]0, \infty[} \sum_{n=1}^{\infty} P \left( \max_{1 \leq j \leq n-1} S_j \leq x + y \right) dP(T^+ \leq y). \end{aligned} \quad (2.54)$$

Puisque  $\prod_{k=1}^n A_k \xrightarrow{p.s} 0$  implique que  $P(|A| < 1) > 0$  et que  $S_n \xrightarrow{p.s} \infty$ . Par le lemme 2.1, on obtient pour tout  $x \geq 0$ ,

$$\frac{x}{E(Z^+ \wedge x)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\max_{1 \leq j \leq n-1} S_j \leq x\right) \leq \frac{c_+ x}{E(Z^+ \wedge x)}. \quad (2.55)$$

Par (2.54), on a

$$S(x) \leq \frac{c_+ x}{E(Z^+ \wedge x)} + \int_{]0, \infty[} \left( \frac{c_+(x+y)}{\int_0^{x+y} P(Z > z) dz} \right) dP(T^+ \leq y) \quad (2.56)$$

et par(2.52), on déduit que (2.53) est vérifiée.

Inversement supposons (2.53) est vérifiée, alors pour tout  $x > 0$  et  $y_0 > 0$ , on a

$$\infty > \int_{[-y_0, y_0]} \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\max_{1 \leq j \leq n-1} S_j \leq x+y\right) dP(T \leq y) \quad (2.57)$$

$$\geq P(|T| \leq y_0) \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\max_{1 \leq j \leq n-1} S_j \leq x-y_0\right). \quad (2.58)$$

Puisque  $P(B = 0) < 1$  implique  $P(|T| < \infty) > 0$ , on peut choisir  $y_0$  très grand de sorte que  $P(|T| \leq y_0) > 0$  et pour  $x_0 = y$  on déduit de (2.57) que

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\max_{1 \leq j \leq n-1} S_j \leq 0\right) < \infty. \quad (2.59)$$

Par conséquent,  $S_n \xrightarrow{p.s} \infty$ , i.e.,  $\prod_{k=1}^n A_k \xrightarrow{p.s} 0$  et (2.55) est vérifiée.

Maintenant, puisque la fonction  $x / \int_0^x P(Z > z) dz$  est croissante en  $x$ , par (2.54) et (2.55), on a

$$\infty > \int_{]0, \infty[} \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\max_{1 \leq j \leq n-1} S_j \leq x+y\right) dP(T^+ \leq y) \quad (2.60)$$

$$\geq \int_{]0, \infty[} \left( \frac{x+y}{\int_0^{x+y} P(Z > z) dz} \right) dP(T^+ \leq y) \quad (2.61)$$

$$\geq \int_{]0, \infty[} \left( \frac{y}{\int_0^y P(Z > z) dz} \right) dP(T^+ \leq y), \quad (2.62)$$

c'est-à-dire l'intégrale dans (2.17) est finie.

On définit la fonction concentration de Lévy d'une variable aléatoire  $Y$  comme suit

$$Q(Y, \lambda) = \sup_{-\infty < y < \infty} P(y \leq Y \leq y + \lambda) \quad \text{pour tout } \lambda \geq 0.$$

C'est clair que  $Q(Y, \lambda)$  est non décroissante en fonction de  $\lambda$  qui satisfait  $0 \leq Q(Y, \lambda) \leq 1$  pour tout  $\lambda \geq 0$ . La proposition suivante donne la propriété de la fonction de concentration de Lévy (voir Petrov [20]).

**Proposition 2.3.** *Si  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes, alors*

$$Q(X + Y) \leq \min\{Q(X, \lambda), Q(Y, \lambda)\}.$$

La symétrisation d'une variable aléatoire est définie comme suit.

**Définition 2.1.** *Pour une variable aléatoire  $X$ , on définit la variable aléatoire symétrisée  $X^s = X - Y$  où  $Y$  est indépendante de  $X$  et de même loi que  $X$ .*

Le résultat suivant de Petrov [20] nous donne une propriété importante de la fonction de concentration de Lévy.

**Proposition 2.4.** *Soit  $Y_1, \dots, Y_n$  des variables aléatoires i.i.d et  $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ . Soit  $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda$  des nombres positifs tels que  $\lambda_i \leq \lambda, i = 1, \dots, n$ , alors*

$$Q(S_n, \lambda) \leq \frac{\beta \lambda}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 P(|Y_i^s| \geq \frac{\lambda_i}{2})}},$$

où  $\beta$  est une constante positive.

De la proposition 2.3, on déduit que

$$Q(S_n^s, \lambda) \leq \frac{\beta \lambda}{\sqrt{\sum_{j=1}^n \lambda_j^2 P(|Y_j^s| \geq \frac{\lambda_j}{2})}}.$$

Pour  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 2x$ , on déduit que

$$P(|S_n^s| \leq x) \leq \frac{\beta}{\sqrt{\sum_{j=1}^n P(|Y_j^s| \geq x)}}. \tag{2.63}$$

**Lemme 2.7.** *Supposons que (2.23),  $P(A = 0) = 0$  et  $\prod_{k=1}^n A_k$  ne converge pas vers zéro p.s., alors  $|Y_n(Y_0)| \xrightarrow{P} \infty$ .*

**Preuve.** Notons que (2.23) implique que  $P(B = 0) < 1$ . Supposons que  $\prod_{k=1}^n A_k$  ne converge pas vers zéro p.s. Puisque  $A$  et  $B$  sont deux variables réelles, il existe une distribution conditionnelle régulière pour  $B$  sachant  $A$ . Soit  $F_m(q) = P(B \leq q | A = m)$  telle que pour chaque  $q \in \mathbb{R}, m \mapsto F_m(q) = P(B \leq q | A = m)$  est une version de la probabilité conditionnelle  $P(B \leq q | A)$ , tandis que pour tout  $q \in \mathbb{R}$ , la fonction  $q \mapsto F_m(q) = P(B \leq q | A = m)$  est une fonction de distribution. Pour tout  $m \in \mathbb{R}$ , soit  $F_m^{-1}(\cdot)$  la fonction quantile de  $q \mapsto F_m(q)$  avec  $F_m^{-1}(\cdot)$  est continue à gauche. Soit  $(U_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$  une suite i.i.d uniformément distribuée sur  $]0, 1[$  indépendantes de la suite i.i.d  $(A_n, B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ . La suite  $B'_j = F_A^{-1}(U_j), j \in \mathbb{N}^*$  est i.i.d telle que  $(A_j, B'_j)$  a la même distribution que  $(A_j, B_j)$  et que  $B'_j$  est conditionnellement indépendante de  $B_j$  sachant  $A_j$ . Soient les variables aléatoires conditionnellement symétrisées suivantes

$$B_j^s = B_j - B'_j, \quad Y_n^s = \sum_{j=1}^n \prod_{i=1}^{j-1} A_i B_j^s.$$

Soit  $\mathcal{F}_n = \sigma(A_1, \dots, A_n)$ , la tribu généralisée par  $A_1, \dots, A_n$ . En appliquant la relation (2.63) à la distribution conditionnelle de  $Y_n^s$  sachant  $\mathcal{F}_{n-1}$ , on obtient pour tout  $x > 0$ ,

$$P(|Y_n^s| \leq x | \mathcal{F}_{n-1}) \leq \frac{\beta}{\sqrt{\sum_{j=1}^n P(|\prod_{i=1}^{j-1} A_i B_j^s| \geq x | \mathcal{F}_{n-1})}}. \tag{2.64}$$

Notons que le dénominateur dans (2.64) est strictement supérieur à zéro pour  $x > 0$  assez petit. En effet, conditionnellement sur  $\mathcal{F}_{n-1}$ , le produit  $|\prod_{i=1}^{j-1} A_i|$  est considérée comme une constante  $m > 0$ .

Puisque  $B_n^s$  est indépendante de  $\mathcal{F}_{n-1}$  et  $P(|B_n^s| > x_0) > 0$  pour un certain  $x_0 > 0$ , on déduit que  $P(|\prod_{i=1}^{j-1} A_i B_j^s| \geq x | \mathcal{F}_{n-1}) > 0$  pour  $0 < x < x_0/m$ . Par (2.64) et l'inégalité de Jensen on déduit que

$$\begin{aligned} P^2(|Y_n^s| \leq x | \mathcal{F}_{n-1}) &\leq \frac{\beta^2}{E\left(\sum_{j=1}^n 1(|\prod_{k=1}^{j-1} A_k B_j^s| > x) | \mathcal{F}_{n-1}\right)} \\ &\leq \beta^2 E\left(\frac{1}{\sum_{j=1}^n 1(|\prod_{k=1}^{j-1} A_k B_j^s| > x)} \middle| \mathcal{F}_{n-1}\right) \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} P^2(|Y_n^s| \leq x) &= E^2(P(|Y_n^s| \leq x | \mathcal{F}_{n-1})) \leq E(P^2(|Y_n^s| \leq x | \mathcal{F}_{n-1})) \\ &\leq \beta^2 E\left(\frac{1}{\sum_{j=1}^n 1(|\prod_{k=1}^{j-1} A_k B_j^s| > x)}\right). \end{aligned} \quad (2.65)$$

Supposons que pour un certaine  $x > 0$ , la série dans le dénominateur de la relation (2.65) converge p.s., alors  $P(|\prod_{i=1}^{n-1} A_i B_n^s| > x) = 0$  qui implique que  $\prod_{i=1}^n A_i \rightarrow 0$  p.s. En effet, puisqu'on a supposé que  $B^s$  n'est pas dégénérée en zéro, on peut choisir  $\sigma > 0$  de sorte que  $P(|B_n^s| > \sigma) > 0$ , soit les événements suivants  $M_n = \{|\prod_{i=1}^{n-1} A_i| > \frac{x}{\sigma}\}$  et  $Q_n = \{|B_n^s| > \sigma\}$ . Notons que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'événement  $Q_n$  est indépendant de  $M_n, M_{n-1}, \dots, M_1$ , alors on déduit que

$$P\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} M_n \cap Q_n\right) \geq P\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} M_n\right) \int_{n \geq m} P(Q_n) = P(|B_1^s| > \sigma) P\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} M_n\right), \quad (2.66)$$

où la dernière inégalité est vérifiée grâce au de Loève que que les événements aléatoires (voir Loève [18] page 258). Maintenant, si  $P(M_n \text{ i.o.}) > 0$ , alors  $P(M_n \cap Q_n \text{ i.o.}) > 0$  et par conséquent  $P(|\prod_{i=1}^{n-1} A_i B_n^s| > x \text{ i.o.}) > 0$ , d'où la contradiction. Ainsi on a  $P\left(|\prod_{j=1}^{n-1} A_j B_n^s| > x, \text{ i.o.}\right) > 0$  et  $\prod_{i=1}^n A_i$  converge vers zéro presque sûrement, mais ceci ... le fait qu'on a supposé dans le lemme 2.7 que  $\prod_{i=1}^n A_i$  ne converge pas vers zéro presque sûrement. Donc la convergence qu'on a supposé pour la série de dénominateur dans (2.42) juste, c'est-à-dire la série diverge presque sûrement pour tout  $x > 0$ . Maintenant, pour le théorème de convergence monotone on déduit que  $|Y_n^s| \xrightarrow{p} \infty$   $n \rightarrow \infty$ . Mais, on a

$$\begin{aligned} P(|Y_n^s| \leq x) &= E(P(|Y_n^s| \leq x | \mathcal{F}_n, Y_0)) \\ &\geq E\left(P\left(|Y_n^s| \leq x, \left|\sum_{k=1}^n \prod_{i=1}^{k-1} A_i B'_k + \prod_{i=1}^n A_i Y_0\right| \leq \frac{x}{2} \middle| \mathcal{F}_n, Y_0\right)\right) \\ &\vdots \end{aligned}$$

qui montre que  $|Y_n(Y_0)| \xrightarrow{p} \infty$ . Maintenant on considère le cas où  $B_n = f(A_n)$  où est une fonction Borel mesurable, alors

$$\begin{aligned} Y_{2n}(Y_0) &= \sum_{j=1}^{2n} \prod_{i=1}^{j-1} A_i B_j + \prod_{j=1}^{2n} A_j Y_0 \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\prod_{i=1}^{j-1} \tilde{A}_i\right) B_j + \left(\prod_{i=1}^n \tilde{A}_i\right) Y_0, \end{aligned}$$

où  $(\tilde{A}_i, \tilde{b}_i) = (A_{2i-1}A_{2i}, B_{2i1} + A_{2i-1} + B_{2i})$  sont i.i.d. Notons que si  $\prod_{i=1}^{2n} A_i = \prod_{i=1}^n \tilde{A}_i \rightarrow 0$  p.s., alors  $\prod_{i=1}^{2n+1} A_i = A_1 (\prod_{i=1}^{2n} A_i \circ \theta) \rightarrow 0$  p.s., où  $\theta$  est l'opérateur de décalage qui ajoute 1 à l'indice

de  $A_i$ . par conséquent  $\prod_{i=1}^n A_i \rightarrow 0$  p.s. puisque on a supposé que  $\prod_{i=1}^n A_i$  ne converge pas p.s. vers zéro, alors  $\prod_{i=1}^n \tilde{A}_i$  ne converge pas p.s. vers zéro. Si  $\tilde{B}_n$  est une fonction Borel mesurable de  $\tilde{A}_n$  i.e.,  $\tilde{B}_n = g(\tilde{A}_n)$  qui inclut le cas  $\tilde{B}_n = c(1 - \tilde{A}_n)$  pour une certaine constante  $c \in \mathbb{R}$ ; alors  $B_1 + A_1 B_2 = g(A_1 A_2)$  et on peut montrer que soit  $B_1 = c(1 - A_1)$  p.s. pour une certaine constante  $c \in \mathbb{R}$ , soit  $(A_1, B_1) = (1, c_1)$  pour une certaine constante  $c_1 \in \mathbb{R}$ . Maintenant, le premier cas n'est pas possible parce que par hypothèse  $P(B_1 = c(1 - A_1)) < 1$  pour tout  $c \in \mathbb{R}$ . Si  $(A_1; B_1) = (1, c_1)$ , alors  $c_1 \neq 0$  parce que  $P(B_1 = 0) < 1$ . pour la relation (3.20), on déduit que  $|Y_n(Y_0)| = |nc_1 + Y_0| \xrightarrow{p} \infty$  pour toute variable initiale  $Y_0$ . Si  $\tilde{B}_n$  n'est pas une fonction Borel mesurable de  $\tilde{A}_n$ , alors avec le même raisonnement, on peut montrer que

$$|Y_{2n}(Y_0)| = \left| \sum_{j=1}^n \prod_{i=1}^{j-1} \tilde{A}_i \tilde{B}_j + \prod_{j=1}^n \tilde{A}_j Y_0 \right| \xrightarrow{p} \infty, \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.67)$$

pour toute variable initiale  $Y_0$ . Par la relation (2.44) on déduit que

$$Y_{2n+1}(Y_0) = B_1 + A_1 (Y_{2n} \circ \theta)(Y_0)$$

et puisque  $P(A_1 = 0) = 0$ , on déduit que  $|Y_{2n+1}(Y_0)| \xrightarrow{p} \infty, n \rightarrow \infty$ . Par conséquent  $|Y_n(Y_0)| \xrightarrow{p} \infty, n \rightarrow \infty$ .

**Preuve de théorème 2.2.** Par hypothèse,  $P(B = 0) < 1$  et  $P(A = 0) = 0$ . Dans le lemme 2.2, on a montré que (2.17) implique (2.20) et (2.22). La condition (2.20) implique (2.19) qui implique (2.18). Maintenant, supposons que (2.18) est satisfaite, donc on a aussi  $\limsup_{n \rightarrow \infty} |\prod_{k=1}^{n-1} A_k B_n| < \infty$  p.s. Par conséquent,  $P(|\prod_{k=1}^{n-1} A_k B_n| > x \text{ i.o.}) = 0$  pour un certain  $x > 0$ . Par le lemme 2.7, on déduit que  $\prod_{k=1}^n A_k \xrightarrow{p.s.} 0$ . En utilisant l'inégalité (2.43) de lemme 2.3, on déduit que  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \prod_{k=1}^{n-1} \tilde{A}_k |B_n| < \infty$  p.s. On a vu dans la preuve de lemme 2.5 que si  $\prod_{k=1}^n A_k \xrightarrow{p.s.} 0$ , alors la variable  $\tilde{A} = \min(|A|, 1)$  vérifie  $P(\tilde{A} = 1) < 1$  et donc les hypothèses de lemme 2.4 sont satisfaites par la suite  $(\tilde{A}_n, |B_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  qui impliquent que l'intégrale dans (2.17) est finie (voir la preuve de lemme 2.5). Donc on a montré que (2.18) implique (2.17). Finalement, les conditions (2.17), (2.18), (2.19) et (2.20) sont équivalentes qui à leur tour implique (2.22).

Pour la preuve de la deuxième partie du théorème 2.2, supposons que la condition (2.23) est satisfaite et la condition (2.17) n'est pas vérifiée qu'on divise en deux cas, à savoir : premièrement lorsque  $\prod_{k=1}^n A_k \xrightarrow{p.s.} 0$  et l'intégrale dans (2.17) diverge, deuxièmement lorsque  $\prod_{k=1}^n A_k$  ne converge pas vers zéro p.s. Dans les deux cas, on a montré dans le lemme 2.5 et le lemme 2.7 que  $|Y_n(Y_0)| \xrightarrow{p} \infty$  pour toute variable aléatoire initiale  $Y_0$ .

**Preuve de théorème 2.3. (a)** On a vu dans la remarque 2.3 que si  $P(A = 0) > 0$ ,  $N = \min\{n : A_n = 0\} < \infty$  p.s. où  $N$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . Dans ce cas on a  $\prod_{k=1}^n A_k = 0$  pour tout  $n \geq N$  et  $Y_n(Y_0) = \sum_{k=1}^N \prod_{i=1}^{k-1} A_i B_k$ . Par conséquent,  $Y_n(Y_0) \xrightarrow{p.s.} Y_N$  pour toute variable initiale  $Y_0$  où  $Y_N = \sum_{k=1}^N \prod_{i=1}^{k-1} A_i B_k$  et  $X_n(X_0) \xrightarrow{p.s.} Y_N$  pour toute variable initiale  $X_0$ .

**(b)** La condition  $P(Ac + B) = 1$  est équivalente à  $B = c(1 - A)$  p.s. pour une certaine constante  $c \in \mathbb{R}$ . L'équation aux récurrences stochastique devient comme suit :

$$X_n = A_n(X_{n-1} - c) + c, \quad p.s. \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

et après  $n$  itérations on trouve

$$X_n = \prod_{k=1}^n A_k (X_0 - c) + c, \quad p.s. \quad n \in \mathbb{N}^*. \quad (2.68)$$

En particulier,

(i) Si  $A = 1$  p.s., alors  $B = 0$  p.s. et par conséquent l'équation aux récurrence stochastique devient  $X_n = X_{n-1}$  p.s., c'est-à-dire,  $X_n(X_0) = X_{n-1}$  p.s. et toute variable aléatoire initiale  $X_0$  est une solution de l'équation  $X \stackrel{d}{=} AX + B$ .

(ii) Si  $A = -1$  p.s., alors  $B = 2c$  p.s. et l'équation aux récurrences stochastique devient  $X_n - c = -(X_{n-1} - c)$ , p.s.,  $n \in \mathbb{N}^*$ . Après  $n$  itérations, on trouve

$$X_n(X_0) - c = (-1)^n(X_0 - c), \text{ p.s., } n \in \mathbb{N}^*.$$

L'équation  $X \stackrel{d}{=} AX + B$  devient  $X - c \stackrel{d}{=} -(X - c)$ . La suite  $X_n(X_0)$  converge en distribution vers  $X$  si et seulement si  $X_0 \stackrel{d}{=} X$ . Dans ce cas, on a  $X_n(X_0) - c = (-1)^n(X_0 - c) \stackrel{d}{=} X - c$ , i.e.,  $X_n(X_0) \stackrel{d}{=} X$ .

(iii) Si  $|A| = 1$  p.s. et  $0 < P(A = 1) < 1$ , alors les solutions de l'équation  $X \stackrel{d}{=} AX + B$  sont les variables  $X$  qui vérifient  $X - c \stackrel{d}{=} -(X - c)$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $X_n(X_0) - c = \prod_{k=1}^n A_k(X_0 - c)$  p.s. et donc  $X_n(X_0) - c \xrightarrow{d} V(X_0 - c)$ . Par conséquent, la suite  $X_n(X_0)$  converge en distribution vers une variable aléatoire  $X$  pour toute variable initiale  $X_0$  telle que  $X \stackrel{d}{=} V(X_0 - c) + c$  où  $V$  est une variable aléatoire qui prend les valeurs 1 ou  $-1$  avec des probabilités  $1/2$  et  $1/2$ .

(iv) Si  $\prod_{k=1}^n A_k \xrightarrow{P} 0$ , alors par la relation (2.68) on déduit que  $X_n(X_0) \xrightarrow{P} c$  pour toute variable aléatoire initiale  $X_0$  et  $X = c$  p.s. est l'unique solution de l'équation  $X \stackrel{d}{=} AX + B$ .

(v) Si  $P(|A| = 1) < 1$  et  $\prod_{k=1}^n A_k$  ne tend pas vers zéro en probabilité, par  $P(Ac + B = c) = 1$  on a  $X - c \stackrel{d}{=} A(X - c)$ , donc la seule solution est  $X - c = 0$  p.s., et si  $X_n(X_0) \xrightarrow{P} c$  alors  $(X_0 - c) \prod_{k=1}^n A_k \xrightarrow{P} 0$  et avec  $\prod_{k=1}^n A_k$  ne tend pas vers zéro en probabilité, donc  $X_0 = c$  p.s.

(c)(i) Puisque  $X_n(X_0) \stackrel{d}{=} X_n(X_0)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , par le théorème 2.2, on déduit que  $Y_n(X_0) \xrightarrow{P} Y$  où  $Y$  est donnée par (2.13) pour toute variable initiale  $X_0$  et  $Y$  est l'unique solution de l'équation (2.5), i.e., l'unique solution de  $Y \stackrel{d}{=} AY + B$ . La condition (2.23) empêche la dégénérescence de la variable aléatoire limite  $Y$ .

(ii) Supposons que l'équation (2.5) admet une solution en distribution, i.e., il existe une variable aléatoire  $Y$  qui vérifie  $Y \stackrel{d}{=} AY + B$ . Pour  $X_0 \stackrel{d}{=} Y$ , on trouve  $X_n(X_0) \stackrel{d}{=} Y$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Or d'après le théorème 2.2, on a  $|Y_n(X_0)| \xrightarrow{P} \infty$ . Puisque  $X_n(X_0) \stackrel{d}{=} X_n(X_0)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , on arrive alors à une contradiction. Donc l'équation (2.5) n'admet pas de solution. Finalement, par le théorème 2.2 et le fait que  $X_n(X_0) \stackrel{d}{=} Y$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , on déduit que  $|X_n(X_0)| \xrightarrow{P} \infty$  pour toute variable initiale  $X_0$ .

# Chapitre 3

## Comportement des queues de la solution stationnaire

Le comportement asymptotique des queues de la distribution marginale de la solution strictement stationnaire et ergodique de l'équation aux récurrences stochastique  $X_n = A_n X_{n-1} + B_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  à coefficients indépendants et identiquement distribués  $((A_n, B_n))_{n \in \mathbb{N}}$  a été étudié par Kesten [16], Goldie [10] et Grey [12]. Dans le cas de l'équation aux récurrences stochastique multidimensionnelle, Kesten [16] a démontré un théorème de renouvellement qu'il a utilisé pour démontrer que dans le cas où  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de matrices aléatoires iid et positives, la distribution marginale de la distribution de la solution strictement stationnaire est à variation régulière d'indice de variation  $\alpha > 0$ . Dans le cas d'équation aux récurrences stochastique univarriée, Goldie [10] a établi un théorème de renouvellement implicite qu'il a utilisé pour montrer que la distribution stationnaire et à variation régulière d'indice de variation  $\alpha > 0$ . Dans cette section on donne quelque définition et quelques résultats sur la théorie de renouvellement.

### 3.1 Théorème de renouvellement

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires positives iid de même distribution de probabilité  $F$  avec  $F(0) = 0$ . Les variables  $X_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  représentent les durées de vie d'une certaine pièce de rechange dans une machine. La durée de fonctionnement de la machine après  $n$  renouvellement de la pièce est représentée par le processus de renouvellement,  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  défini par

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k \quad (3.1)$$

Par convention,  $S_0 = 0$  est l'indice zéro est considéré comme le renouvellement numéro zéro. Soit  $(N_t)_{t \geq 0}$  le processus de comptage qui représente le nombre de renouvellements de la pièce dans l'intervalle de temps  $[0, t]$  et est défini par

$$N_t = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{S_n \leq t\}}.$$

On associe au processus de comptage  $(N_t)_{t \geq 0}$  une fonction de renouvellement qu'on note par  $U(t)$ ,  $t \geq 0$  définie par

$$U(t) = E(N_t), \quad t \geq 0.$$

La fonction de renouvellement précédente  $U(t)$  peut être écrite sur la forme

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)}(t), \quad t \geq 0,$$

où  $F^{(n)}$  est la distribution de probabilité de  $S_n$ , avec  $F^{(0)} = S_0$  (mesure de dirac en zéro) et  $F^{(n)} = F * F^{(n-1)}$ ,  $n \geq 1$  sont les itérées successives de  $F$  pour le produit de convolution  $*$ .

### 3.1.1 Théorème de renouvellement à support positif

L'objectif de théorème de renouvellement est d'étudier le comportement asymptotique de la fonction de renouvellement  $U(t)$  lorsque  $t$  tend vers l'infini, le problème est lié au comportement asymptotique de la solution  $Z$  de l'équation de renouvellement

$$Z(t) = z(t) + \int_0^t Z(t-x)F(dx), \quad t > 0, \quad (3.2)$$

où  $z$  est une fonction mesurable et bornée sur les intervalles finies,  $Z$  est une fonction inconnue et  $F$  est une mesure de probabilité à support dans  $\mathbb{R}^+$  avec  $F(0) = 0$  d'espérance

$$m = \int_0^\infty xF(dx) = \int_0^\infty (1-F(x))dx \leq \infty.$$

L'équation (3.2) peut être écrite dans la forme d'équation de convolution suivante

$$Z = z + F * Z. \quad (3.3)$$

Le théorème suivant de Feller [9] donne la solution de l'équation de renouvellement (3.2) qui s'écrit en fonction de la fonction de renouvellement  $U(t)$ .

#### **Théorème 3.1.** *Si*

- (1)  $U(t) < \infty, \forall t \geq 0$ .
- (2) *Si  $z$  est bornée, alors la fonction*

$$Z(t) = \int_0^t z(t-x)U(dx), \quad t > 0. \quad (3.4)$$

*est l'unique solution de l'équation de renouvellement (3.2) qui est bornée sur des intervalles finis.*

Avec la convention que  $Z(t) = z(t) = 0$  pour  $t < 0$ , on peut écrire la solution de l'équation de renouvellement (3.2) dans la forme

$$Z = U * z$$

Le comportement asymptotique de la fonction de renouvellement  $U(t)$  dépend de la nature de la distribution de probabilité  $F$ , c'est-à-dire selon que  $F$  soit arithmétique ou non-arithmétique.

**Définition 3.1.** *Une distribution de probabilité  $F$  sur  $\mathbb{R}$  est dite arithmétique si elle est concentrée sur un ensemble de type  $\{\lambda k, k \in \mathbb{Z}\}$  où  $\lambda > 0$ . Autrement dit, si son support est contenu dans  $\lambda\mathbb{Z}$ .*

Le pas de la distribution  $F$  est la plus grande valeur de  $\lambda$  telle que  $F$  soit concentrée sur  $\lambda\mathbb{Z}$ . Le théorème suivant de Feller [9] donne la première forme du théorème de renouvellement qui traite le comportement asymptotique de la fonction de renouvellement pour des mesures de probabilité  $F$  quelconques à support dans  $\mathbb{R}^+$ .

#### **Théorème 3.2.** :

- (1) *Si  $F$  n'est pas arithmétique, alors pour tout  $h > 0$ ,*

$$U(t) - U(t-h) \longrightarrow \frac{h}{m}, \quad t \longrightarrow \infty$$

(2) Si  $F$  est arithmétique, alors on a la même limite seulement lorsque  $h$  est multiple de pas  $\lambda$ .

Avant de donner la deuxième forme généralisée du théorème de renouvellement qui traite le comportement asymptotique de la solution  $Z$  de l'équation de renouvellement (3.2), on donne quelques cas particuliers. On suppose que la mesure de probabilité  $F$  n'est pas arithmétique et d'espérance  $m < \infty$ . Si  $z(t) = 1$  pour  $t \in [a, b[$ ,  $0 \leq a \leq b \leq \infty$  et  $z(t) = 0$  pour  $t \notin [a, b[$ , alors le comportement asymptotique de la solution  $Z$  est donné par

$$Z(t) = U(t - a) - U(t - b) \longrightarrow \frac{b - a}{m}, \quad t \longrightarrow \infty. \quad (3.5)$$

Si la fonction  $z$  est étagée (en escalier) sur  $[0, \infty[$ , soit  $I_1, \dots, I_n$  des intervalles dans  $[0, \infty[$  deux-à-deux disjoints de longueurs finies  $l_1, \dots, l_n$  avec  $z$  prend les valeurs  $a_1, \dots, a_n$  sur  $I_1, \dots, I_n$  et nulle en dehors de ces intervalles, alors

$$Z(t) \longrightarrow \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n a_k l_k = \frac{1}{m} \int_0^\infty z(x) dx \quad (3.6)$$

L'intégrale de Riemann d'une fonction bornée  $z$  est définie en termes d'approximation de fonctions en escaliers et par conséquent la relation (3.6) sera vérifiée à chaque fois que  $z$  est Riemann intégrable.

**Définition 3.2.** Soit  $z$  une fonction définie de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , pour  $h > 0$  et  $k \in \mathbb{Z}$ , soient  $\underline{m}_k$  et  $\overline{m}_k$  le plus grand nombre et le plus petit nombre qui vérifient  $\underline{m}_k \leq z(t) \leq \overline{m}_k$ ,  $t \in [(k-1)h, kh[$ . La fonction  $z$  est dite directement Riemann intégrable (D.R.I) si les deux séries de Riemann suivantes

$$\underline{\sigma} = h \sum_{k \in \mathbb{Z}} \underline{m}_k, \quad \overline{\sigma} = h \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{m}_k \quad (3.7)$$

sont finies et tendent vers la même limite quand  $h$  tend vers zéro. Pour  $h > 0$ , soit  $z_k(t) = 1$  si  $t \in [(k-1)h, kh[$  et  $z_k(t) = 0$  sinon. Soient les deux séries

$$\underline{z} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \underline{m}_k z_k, \quad \overline{z} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{m}_k z_k,$$

alors l'intégrale de la fonction  $z$  est la limite commune quand  $h$  tend vers zéro des intégrales de  $\overline{z}$  et  $\underline{z}$ . Soit  $Z_k$  la solution de l'équation de renouvellement (3.2) correspondante à  $z_k$ , alors les solutions de (3.2) correspondantes aux fonctions  $\overline{z}$  et  $\underline{z}$  sont

$$\underline{Z} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \underline{m}_k Z_k; \quad \overline{Z} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{m}_k Z_k$$

Par le théorème de renouvellement, on a  $Z_k(t) \longrightarrow \frac{h}{m}$ ,  $t \longrightarrow \infty$  pour tout  $k$  et par conséquent,

$$\underline{Z}(t) \longrightarrow \frac{\underline{\sigma}}{m} \quad \text{et} \quad \overline{Z}(t) \longrightarrow \frac{\overline{\sigma}}{m}, \quad t \longrightarrow \infty.$$

Si  $z$  est directement Riemann intégrable, alors

$$Z(t) \longrightarrow \frac{1}{m} \int_0^\infty z(x) dx, \quad t \longrightarrow \infty \quad (3.8)$$

Si  $F$  est arithmétique avec un pas  $\lambda$ , la solution de l'équation de renouvellement (3.2) est de la forme

$$Z(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} z(t - \lambda k) u_k,$$

où  $u_k \rightarrow \frac{\lambda}{m}$ , on peut vérifier que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$Z(t + n\lambda) \rightarrow \frac{\lambda}{m} \sum_{i=0}^{\infty} z(t + i\lambda), \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.9)$$

pourvu que la série converge qui est le cas lorsque la fonction  $z$  est directement Riemann intégrable. On a ainsi la deuxième forme du théorème de renouvellement qui traite le comportement asymptotique de la solution  $Z$  de l'équation de renouvellement (3.2) (voir Feller [9]).

**Théorème 3.3.** *Supposon que  $z$  une fonction directement Riemann intégrable, alors la solution  $Z$  de l'équation de renouvellement (3.2) satisfait (3.8) si  $F$  n'est pas arithmétique et satisfait (3.9) si  $F$  est arithmétique.*

### 3.1.2 Théorème de renouvellement à support dans $\mathbb{R}$

Supposon maintenant que la mesure de probabilité  $F$  vérifie  $F(]-\infty, 0]) > 0$  et  $F(]0, \infty[) > 0$  et  $F$  n'est pas arithmétique. La définition d'une mesure de probabilité transiente est la suivante (voir Feller [9]).

**Définition 3.3.** *La mesure de probabilité  $F$  est dite transiente si  $U(I) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)}(I)$  est finie pour chaque intervalle fini. Dans ce cas, l'équation de renouvellement est définie par*

$$Z(t) = z(t) + F * Z(t) = z(t) + \int_{-\infty}^{\infty} Z(t-x)F(dx) \quad (3.10)$$

Le théorème de renouvellement dans ce cas est donné commune suivant (voir Feller [9]).

#### Théorème 3.4.

(1) *Si  $F$  est d'espérance  $m > 0$ , alors pour tout intervalle fini  $I$  de longueur  $h > 0$ , on a*

$$U(t+I) \rightarrow \frac{h}{m}, \quad t \rightarrow \infty, \quad (3.11)$$

$$U(I+t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow -\infty. \quad (3.12)$$

(2) *Si  $F$  est transiente sans espérance, alors  $U(t+I) \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow \pm\infty$  pour tout intervalle fini.*

La convolution  $U * z$  n'est pas toujours définie et même si elle définie ce n'est pas la seule solution de l'équation de renouvellement (3.10). Le théorème suivant donne une solution particulière de l'équation de renouvellement (3.10) (voir Feller [9]).

**Théorème 3.5.** *Soit  $z$  une fonction contenue et  $0 \leq z(t) \leq \alpha$  pour  $t \in I_h = ]-h, h[$  et  $z(t) = 0$  en dehors de  $I_h$ . Si  $F$  est transiente, alors*

$$Z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t-x)U(dx)$$

*est une solution absolument continue de l'équation de renouvellement (3.2) avec*

$$0 \leq Z(t) \leq \alpha.U(I_{2h})$$

*La fonction  $Z$  atteint son maximum dans un point dans  $I_h$ . Lorsque du solution particulier  $Z$  de l'équation de renouvellement (3.2) est bien défini, alors cette solution particulière vérifie le résultat du théorème 3.3 ,i.e.,*

$$Z(t) \rightarrow \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{\infty} z(x)dx, \quad t \rightarrow \infty.$$

## 3.2 Variation régulière

La notion de variation régulière précise dans un certain sens, la façon dont une fonction varie asymptotiquement ou à l'infini. On commence par le rappel de quelques définitions et propriétés générales sur les fonctions à variation lente et les fonctions à variation régulière dans le cas général, puis on s'intéresse à la partie la plus intéressante pour l'étude de l'équation aux récurrences stochastique et qui concerne la variation régulière des queues de la distribution stationnaire de la solution strictement stationnaire. C'est à Joran Karamata que doit le développement de la théorie de la variation régulière depuis la publication de son article sur un mode de croissance régulière des fonctions en 1930. La théorie de la variation régulière est connue comme un outil indispensable dans la théorie des probabilités et ses applications. Un nouvel élan au sujet a été fourni en 1970 par Luarense De Hann dans sa thèse.

### 3.2.1 Variation lente

**Définition 3.2.1.** Une fonction mesurable  $L : ]0, +\infty[ \rightarrow ]0, +\infty[$  est dite à variation lente à l'infini si

$$\forall x > 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L(tx)}{L(t)} = 1.$$

Beaucoup de résultats concernant les fonction à variation lente sont dûs à Jovan Kamrta et l'un des résultats le plus importants est le théorème de représentation suivante (vois Bingham et al [2]).

**Théorème 3.6.** Une fonction  $L$  est dite à variation lente à l'infini si et seulement si elle peut être représentée de la façon suivante

$$\forall x \geq b > 0, \quad L(x) = c(x) \exp \left\{ \int_b^x \frac{\delta(v)}{v} dv \right\}, \quad (3.13)$$

où  $c$  et  $\delta$  sont des fonction définies mesurables sur  $]0, +\infty[$  telles que  $\lim_{x \rightarrow \infty} c(x) = c_0 \in ]0, \infty[$  et  $\lim_{x \rightarrow \infty} \delta(x) = 0$ .

L'expressision (3.13) est appelée représentation de Karamata de la fonction à variation lente  $L$ . Par exemple, soit  $L \in ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction défini par  $L(x) = (1 + x^{-1}) \ln x$ ,  $x \in ]0, \infty[$ , alors  $L$  est une fonction à variation lente à l'infini. En effet, par la définition, on a

$$\forall x > 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L(tx)}{L(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(1 + (tx)^{-1}) \ln(tx)}{(1 + t^{-1}) \ln t} = 1.$$

En utilisant la relation (3.13), on a

$$\forall x \geq e > 1, \quad L(x) = (1 + x^{-1}) \exp \left\{ \int_e^x \frac{\ln(v)^{-1}}{v} dv \right\}.$$

Le théorème suivant de Bingham et al [2] nous donne quelques propriétés élémentaires des fonctions à variations lente.

**Théorème 3.7.** Soient  $L, L_1, L_2, \dots, L_n$  des fonctions mesurables et positives

- (1) Si  $L$  est à variation lente au voisinage de l'infini, alors

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln L(x)}{\ln x} = 0.$$

(2) Si  $L$  est à variation lente à l'infini et  $\alpha > 0$ , alors

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha L(x) = \infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-\alpha} L(x) = 0.$$

(3) Si  $L$  est à variation lente à l'infini, alors  $L^\alpha : x \mapsto (L(x))^\alpha$  est une fonction à variation lente pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

(4) Si  $L_1$  et  $L_2$  sont à variation lente à l'infini, alors  $L_1 + L_2 : x \mapsto L_1(x) + L_2(x)$  et  $L_1 L_2 : x \mapsto L_1(x)L_2(x)$  sont à variation lente à l'infini et si de plus  $\lim_{x \rightarrow \infty} L_2 = \infty$ , alors  $L_1 \circ L_2 : x \mapsto L_1(L_2(x))$  est aussi une fonction à variation lente à l'infini.

(5) Si  $L_1, L_2, \dots, L_n$  sont à variation lente à l'infini et  $R$  une fonction rationnelle définie sur  $\mathbb{R}_+^n$  à coefficients positifs, alors  $R(L_1, L_2, \dots, L_n) : x \mapsto R(L_1(x), \dots, L_n(x))$  est une fonction à variation lente à l'infini.

### 3.2.2 Variation régulière

**Définition 3.4.** Une fonction mesurable  $h : ]0, \infty[ \rightarrow ]0, \infty[$  est dite à variation régulière à l'infini d'indice  $\rho \in \mathbb{R}$ , si

$$\forall x > 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h(tx)}{h(t)} = x^\rho. \quad (3.14)$$

On note l'ensemble des fonctions mesurables à variations régulières d'indice de variation  $\rho \in \mathbb{R}$  par  $RV_\rho$ .

**Remarque 3.1.**

1. Si  $h \in RV_0$ , alors  $h$  est à variation lente à l'infini. Une fonction à variation lente à l'infini est donc une fonction à variation régulière à l'infini d'indice  $\rho = 0$ .
2. De la relation (3.14), on déduit immédiatement que une fonction à variation régulière d'indice  $\rho$  peut être écrite dans la forme  $f(x) = x^\rho L(x)$  pour une certaine fonction à variation lente à l'infini  $L$ . Par conséquent, une fonction à variation régulière se comporte asymptotiquement comme une fonction de puissance.

La notion de variation régulière peut aussi se définir à l'origine.

**Définition 3.5.** Une fonction mesurable  $h : ]0, a[ \rightarrow \mathbb{R}_+$  ( $a > 0$ ) est dite à variation régulière à l'origine (à droite de l'origine) d'indice  $\rho \in \mathbb{R}$  et on note  $h \in RV_\rho^0$ , si

$$\forall x > 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{h(tx)}{h(t)} = x^\rho.$$

**Remarque 3.2.** Dire que  $h \in RV_\rho^0$  est équivalent à dire que la fonction  $t \mapsto h(\frac{1}{t})$  est à variation régulière à l'infini d'indice  $-\rho$ .

Le théorème suivant de Bingham et al [2] donne une caractérisation d'une fonction à variation régulière.

**Théorème 3.2.1. (Théorème de caractérisation)** Soit  $h : ]0, \infty[ \rightarrow ]0, \infty[$  une fonction mesurable et  $\rho \in \mathbb{R}$ , alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1)  $h \in RV_\rho$ .
- (2) Il existe  $L \in RV_0$  telle que  $\forall x > 0, h(x) = x^\rho L(x)$ .

(3) Il existe une fonction  $g$  positive telle que

$$\forall y > 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h(ty)}{h(t)} = g(y).$$

Dans l'étude de comportement des queues de la solution strictement stationnaire de l'équation aux récurrences stochastique, on aura besoin de résultat suivant de Maric [19].

**Proposition 3.1.** *Soient  $f$  et  $g$  deux fonction mesurable et positives et soit  $\rho \in \mathbb{R}$ . On a alors*

$$(g \in RV_\rho \text{ et } f \sim g \text{ à l'infini}) \Rightarrow f \in RV_\rho. \quad (3.15)$$

Comme dans le cas de la notion de variation lente à l'infini, grâce à (3.13) et (3.14), on donne une représentation des fonctions qui varient régulièrement à l'infini.

**Théorème 3.2.2.** *Une fonction  $h$  est à variation régulière à l'infini d'indice  $\rho \in \mathbb{R}$  si et seulement si elle peut être représentée de la façon suivante*

$$\forall x \geq b > 0, \quad h(x) = c(x) \exp \left\{ \int_b^x \frac{\delta(v)}{v} dv \right\} \quad (3.16)$$

où  $c$  et  $\delta$  sont des fonctions définies mesurable sur  $]0, \infty[$  telles que  $\lim_{x \rightarrow \infty} c(x) = c_0 \in ]0, \infty[$  et  $\lim_{x \rightarrow \infty} \delta(x) = \rho$ .

L'expression (3.16) est appelée représentation de Karamata de la fonction  $h \in RV_\rho$ .

**Exemple 3.2.1.** On peut vérifier facilement que à l'aide de la définition d'une fonction à variation régulière que pour tout  $\rho$  et  $\eta \in \mathbb{R}$ , les fonction  $x \mapsto x^\rho$ ,  $x \mapsto x^\rho \ln(1+x)$ ,  $x \mapsto (n \ln(1+x))^\rho$  et  $x \mapsto x^\rho (\ln x)^\eta$  sont à variation régulière à l'infini d'indice  $\rho$ .

Motivés par les notions qu'on a déjà définies, on définit la variation régulière à l'infini d'une fonction de distribution d'une variable aléatoire  $X$  comme suit.

**Définition 3.2.2.** *On dit que la fonction de distribution  $F$  de la variable aléatoire  $X$  est à variation régulière à l'infini (ou dans la queue à droite) d'indice  $\alpha \geq 0$ , si*

$$\forall x > 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P(X > tx)}{P(X > t)} = x^{-\alpha}. \quad (3.17)$$

**Remarque 3.2.1.** L'indice de variation régulière de la fonction de distribution d'une variable aléatoire est différent de l'indice de variation régulière d'une fonction réelle mesurable, i.e;  $\alpha = -\rho$

**Définition 3.2.3.** *On dit qu'une variable aléatoire et en distribution est à variation régulière si la fonction de distribution est à variation régulière de manière équilibrée dans les deux queue, i.e., si pour un certain  $p \in [0, 1]$ , les deux limite*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P(X > tx)}{P(|X| > t)} = px^{-\alpha} \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P(X < -tx)}{P(|X| > t)} = qx^{-\alpha} \quad (3.18)$$

pour tout  $x > 0$  et  $q = 1 - p$ . Par conséquent,  $|X|$  est à variation régulière à l'infini. C'est clair qu'il existe encore  $\alpha \geq 0$  telle que pour tout  $x > 0$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P(|X| > tx)}{P(|X| > t)} = x^{-\alpha}$$

qu'on appelle l'indice de variation régulière de la variable aléatoire  $X$  et sa distribution

### 3.3 Variation régulière des queues de distributions

Soit  $(E, \xi)$  un espace localement compact. On désigne par

$$M_+(E) = \{\text{Toutes les mesures de radon sur } E\},$$

c'est à dire pour tout mesure  $\mu \in M_+(E)$ ,  $\mu$  est une mesure sur  $\xi$  et  $\mu(K) < \infty$  pour tout compact  $K \in \xi$ . Désignons par

$$C_K^+ : \{f : E \longrightarrow \mathbb{R}_+, f \text{ est continue à support compact}\}$$

**Définition 3.3.1.** Soit  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M_+(E)$  une suite de mesures définies dans  $M_+(E)$  et soit  $\mu \in M_+(E)$ . On dit que  $\mu_n$  convergent vaguement vers  $\mu$  et on note  $\mu_n \xrightarrow{v} \mu$  si pour tout  $f \in C_K^+(E)$ ,

$$\mu_n(f) = \int_E f d\mu_n \longrightarrow \int_E f d\mu.$$

**Définition 3.6. (Fonction quantile)** Soit  $X$  une variable aléatoire et  $F$  sa fonction de distribution, la fonction quantile associée à  $F$  est définie par

$$F^{-1}(q) = \inf \{x \mid F(x) > q\}$$

pour tout valeur de  $q \in [0, 1]$ . Si  $F$  est une fonction strictement croissante et continue, alors  $F^{-1}(q)$  est l'unique valeur de  $x$  telle que  $F(x) = q$  et la fonction quantile est la fonction inverse de la fonction de distribution.

Le résultat suivant de Resnick [23] donne les conditions nécessaires et suffisantes pour la variation régulière de la queue d'une fonction de distribution.

**Théorème 3.8. (Variation régulière de queue de fonction de distribution)** Soit  $X$  une variable aléatoire de fonction de distribution  $F$  et Soit  $\bar{F}(x) = 1 - F(x) = P(X > x)$  sa fonction de queue (dite aussi fonction de survie), alors les assertions suivantes sont équivalentes

- (1)  $F \in RV_{-\alpha}, \quad \alpha > 0.$
- (2) Il existe une suite  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant  $b_n \longrightarrow \infty$  telle que

$$n \text{dequeue de distribution}(b_n x) \longrightarrow x^{-\alpha}, \quad x > 0.$$

- (3) Il existe une suite  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant  $b_n \longrightarrow \infty$  telle que

$$\mu_n(\cdot) = nP\left(\frac{X}{b_n} \in \cdot\right) \xrightarrow{v} v_\alpha(\cdot),$$

dans  $M_+([0, \infty])$  où  $v_\alpha \in M_+([0, \infty])$  qui vérifie  $v_\alpha([x, \infty]) = x^{-\alpha}, x > 0.$

**Définition 3.7. (Distribution à queue lourde)** Une loi de probabilité de fonction de distribution  $F$  est dite à queue lourde ou épaisse si sa fonction de survie  $\bar{F}$  est à variation régulière.

Une loi à queue lourde peut être définie autrement.

**Définition 3.8.** Une loi de probabilité est dite à queue lourde si sa fonction de distribution vérifie :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} F(x) dx = \infty \quad \text{pour tout } \lambda > 0,$$

autrement dite le distribution à queue lourde sont des distribution de probabilité dont les queue ne sont pas exponentiellement bornée. Dans le cas contraire la loi est dite à queue légère ou finie.

Par exemple, soit  $X$  une variable aléatoire à valeur dans  $\mathbb{R}$  qui suit une loi de paréto de fonction de distribution  $F$  définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(X \leq x) = F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1, \\ 1 - x^{-\alpha}, & x > 1. \end{cases}$$

avec  $\alpha > 0$ , alors  $\forall x \geq 1, P(X > x) = 1 - F(x) = x^{-\alpha}$ . Donc  $(1 - F) \in RV_{-\alpha}$  et la loi de probabilité est une loi à queue lourde. Soit  $X$  une variables aléatoire à valeur dans  $\mathbb{R}$  qui suit une loi Fréchet de fonction de distribution  $\phi_\alpha$  ( $\alpha > 0$ ) défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(X \leq x) = \phi(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \exp(-x^{-\alpha}), & x > 0. \end{cases}$$

alors  $\forall x > 0, P(X > x) = 1 - \phi_\alpha(x) = 1 - \exp(-x^{-\alpha})$  où  $1 - \exp(-x^{-\alpha}) \sim x^{-\alpha}$  quand  $x \rightarrow \infty$ , donc  $1 - \phi_\alpha \in RV_{-\alpha}$  et la loi de distribution des valeurs extrêmes de type Fréchet est une loi à queue lourde.

### 3.4 Queues de la solution stationnaire

Dans cette partie, on étudie les queues de la distribution marginale de la solution strictement stationnaire de l'équation aux récurrences stochastique

$$X_n = A_n X_{n-1} + B_n, \quad n \in \mathbb{N}^* \tag{3.19}$$

à coefficient  $(A_n, B_n)$  i.i.d, on étudie le comportement asymptotique des fonctions  $P(X_1 > t)$  et  $P(X_1 < -t)$  lorsque  $t$  tend vers l'infini.

Le lemme suivant de Goldie [10] donne quelque condition sur la suite i.i.d.  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

**Lemme 3.1.** *Soit  $A_1$  une variable aléatoire telle que, pour certain  $\alpha > 0$ ,*

$$E|A_1|^\alpha = 1 \tag{3.20}$$

et

$$E|A_1|^\alpha \log^+ |A_1| < \infty \tag{3.21}$$

et

$$\text{La loi conditionnelle de } \log |A_1|, \text{ sachant que } A_1 \neq 0, \text{ est non-arithmétique,} \tag{3.22}$$

alors

$$-\infty \leq E \log |A_1| < 0 \tag{3.23}$$

et

$$m = E(|A_1|^\alpha \log |A_1|) \in (0, \infty). \tag{3.24}$$

Le théorème de renouvellement implicite de Goldie [10] stipule que lorsque les fonctions  $P(X < -t)$  et  $P(X > t)$  vérifient certaines conditions d'intégrabilité, alors  $P(X < -t)$  et  $P(X > t)$  sont asymptotiquement équivalentes à la fonction  $x^\alpha$  avec  $\alpha > 0$ .

**Théorème 3.9. (Le théorème de renouvellement implicite)** *Supposons que la suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  satisfait les conditions de Lemme 3.1 et supposons que l'équation aux récurrences stochastique (3.19) admet une solution strictement stationnaire  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$*

**Cas 1.** *Supposons que  $A_1 \geq 0$  p.s. Si*

$$\int_0^\infty |P(X_1 > t) - P(A_1 X_1 > t)| t^{\alpha-1} dt < \infty, \tag{3.25}$$

ou respectivement

$$\int_0^\infty |P(X_1 < -t) - P(A_1 X_1 < -t)| t^{\alpha-1} dt < \infty, \quad (3.26)$$

alors il existe deux constantes  $C_-, C_+ \geq 0$  telles que

$$P(X_1 > t) \sim C_+ t^{-\alpha}, \quad t \longrightarrow \infty, \quad (3.27)$$

respectivement

$$P(X_1 < -t) \sim C_- t^{-\alpha}, \quad t \longrightarrow \infty, \quad (3.28)$$

où

$$C_+ = \frac{1}{m} \int_0^\infty (P(X_1 > t) - P(A_1 X_1 > t)) t^{\alpha-1} dt, \quad (3.29)$$

$$C_- = \frac{1}{m} \int_0^\infty (P(X_1 < -t) - P(A_1 X_1 < -t)) t^{\alpha-1} dt, \quad (3.30)$$

**Cas 2.** Supposons que  $P(A < 0) > 0$ . Si (3.25) et (3.26) sont satisfaites, alors (3.27) et (3.28) vérifiées, avec

$$C_+ = C_- = \frac{1}{2m} \int_0^\infty (P(|X_1| > t) - P(|A_1 X_1| > t)) t^{\alpha-1} dt. \quad (3.31)$$

Notons que dans les deux cas, on a

$$C = C_+ + C_- = \frac{1}{m} \int_0^\infty (P(|X_1| > t) - P(|A_1 X_1| > t)) t^{\alpha-1} dt. \quad (3.32)$$

Dans le théorème 3.9, on a montré que lorsque la suite des coefficients  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  i.i.d. vérifie les conditions de lemme 3.1 et l'équation aux récurrences stochastique admet une solution strictement stationnaire, alors sous les conditions (3.25) et (3.26), la distribution marginale varie régulièrement dans les deux queues avec un indice de variation  $\alpha > 0$ . Le théorème suivante de Goldie [10] montre que lorsque la suite i.i.d.  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  vérifie les conditions de lemme 3.1 et que la suite i.i.d.  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  vérifie une certaine conditions d'intégrabilité, alors l'équation (3.19) admet une unique solution strictement stationnaire telle que sa distribution marginale est à variation régulière dans les deux queues avec un indice de variation  $\alpha > 0$ .

**Théorème 3.10.** *Supposons que la suite i.i.d.  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  satisfait les conditions de lemme 3.1 et la suite  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  satisfait la condition*

$$E|B_1|^\alpha < \infty, \quad (3.33)$$

alors l'équation aux récurrences stochastique (3.19) admet une unique solution strictement stationnaire telle que sa distribution marginale vérifie les propriétés (3.27) et (3.28).

(1) Si  $A_1 \geq 0$  p.s., alors

$$C_+ = \frac{E [((A_1 X_1 + B_1)^+)^{\alpha} - ((A_1 X_1)^+)^{\alpha}]}{\alpha m}, \quad (3.34)$$

$$C_- = \frac{E [((A_1 X_1 + B_1)^-)^{\alpha} - ((A_1 X_1)^-)^{\alpha}]}{\alpha m}, \quad (3.35)$$

(2) Si  $P(A_1 < 0) > 0$ , alors

$$C_+ = C_- = \frac{1}{2m\alpha} E (|A_1 X_1 + B_1|^\alpha - |A_1 X_1|^\alpha). \quad (3.36)$$

**Corollaire 3.4.1.** *Lorsque  $0 < \alpha < 1$ , on a*

$$C_+ + C_- \leq \frac{1}{\alpha m} E|B_1|^\alpha. \quad (3.37)$$

*Tandis que lorsque  $\alpha \geq 1$ , on a*

$$C_+ + C_- \leq \frac{2^{\alpha-1}}{m} (E|B_1|^\alpha + E(|B_1||A_1|^{\alpha-1}) E|X_1|^{\alpha-1}). \quad (3.38)$$

Notons que la borne dans (3.38) est finie parce que  $E(|B||A|^{\alpha-1}) < \infty$  par les hypothèses de théorème 3.10 et l'inégalité de Holder et  $E|X_1|^{\alpha-1} < \infty$  par la relation (3.36) ou par le théorème 2.1 dans le deuxième chapitre. Lorsque  $P(A_1 < 0) > 0$ , les constantes  $C_-$  et  $C_+$  sont individuellement bornées par la quantité définie dans (3.32). Pour rendre la borne (3.38) explicite on utilise le fait que la solution strictement stationnaire  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie l'identité en distribution  $X_1 \stackrel{d}{=} A_1 X_1 + B_1$  (vois le théorème 2.1 de deuxième chapitre). Ainsi, on a

$$\|X_1\|_{\alpha-1} \leq \frac{\|B_1\|_\alpha}{1 - \|A\|_{\alpha-1}} < \infty. \quad (3.39)$$

Donc la borne dans (3.38) n'impliquant que les variables  $A_1$  et  $B_1$ .

**Preuve de Lemme 2.2.** Soit  $Y = \log |A_1| \in [-\infty, \infty)$ . Par convention  $0^\alpha \log 0 = 0$ ,  $\forall \alpha \geq 0$ , alors

$$E(|A_1|^u \log^- |A_1|) = E(|Y| e^{uY} \mathbf{1}_{Y < 0}) < \infty, \quad \forall u > 0. \quad (3.40)$$

La transformation Laplace-Stieltjes de  $Y$  est

$$f(u) = E \mathbf{1}_{M \neq 0} |A|^u = E \mathbf{1}_{Y > -\infty} e^{uY}.$$

Sous la condition (3.20) i.e.,  $E|A|^\alpha = 1$  pour certain  $\alpha > 0$ ,  $f(x)$  est finie et continue dans  $[0, \alpha]$ , par la condition (3.40), on déduit que  $f'(u) = E[|A|^u \log |A|] < \infty$ ,  $\forall u \in ]0, \alpha[$ . De même,  $f'(u) = E[|A|^u \log |A|]$ ,  $u \in ]0, \alpha[$ . La condition (3.20) implique que  $P(A \neq 0) > 0$ . Ainsi (3.22) a un sens et implique que  $P(|A| \in \{0, 1\}) < 1$  qui implique à son tour que  $f'(u) > 0$ ,  $u \in ]0, \alpha[$ . Donc  $f$  est strictement convexe dans  $[0, \alpha]$ . Si  $P(|A| = 0) = 0$ , alors  $f(0) = 1 = f(\alpha)$ , et par la convexité de  $f$  sur  $]0, \alpha[$  en déduit que  $f'(0) = E(\log |A|) = -\infty$  parce que  $E(\log^+ |A|) < \infty$  grâce à la condition (3.21). Par conséquent, dans les deux cas la relation (3.23) est vérifiée. Par les relation (3.21) et (3.40) et la convexité de  $f$  sur  $]0, \alpha[$ , on déduit que (3.24) est vérifiée.

**Preuve de théorème 3.9 .** Soit les variables aléatoires suivantes :  $A$  indépendante de  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  avec  $A \stackrel{d}{=} A_n$

$$Y_k = \log |A_k|, \quad V_n = \log \left| \prod_{j=1}^k A_j \right| = \sum_{j=1}^k Y_j, \quad n \in \mathbb{N}^*. \quad (3.41)$$

$$r(t) = e^{\alpha t} P(> e^t), \quad S_n(t) = e^{\alpha t} P\left(\prod_{j=1}^n X_j > e^t\right), \quad t \in \mathbb{R} \quad (3.42)$$

**Cas 1** Si  $A_1 \geq 0$  p.s., Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , on a

$$P(X_1 > e^t) = \sum_{k=1}^n (P(\prod_{j=1}^{k-1} A_j X_1 > e^t) - P(\prod_{j=1}^k A_j X_1 > e^t)) + P(\prod_{j=1}^n A_j X_1 > e^t) \quad (3.43)$$

$$= \sum_{k=1}^n (P(e^{V_{k-1}} X_1 > e^t) - P(e^{V_{k-1}} A X_1 > e^t)) + P(e^{V_n} X_1 > e^t) \quad (3.44)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\mathbb{R}} (P(X_1 > e^{t-u}) - P(A X_1 > e^{t-u})) P(V_k \in du) \quad (3.45)$$

$$+ P(e^{V_n} X_1 > e^t). \quad (3.46)$$

Notons que dans l'intégrale précédente, on intègre sur  $\mathbb{R}$  même si  $P(V_k = -\infty)$  peut être strictement supérieur à zéro.

$$v_n(dt) = e^{\alpha t} \sum_{k=0}^n P(V_k \in dt). \quad (3.47)$$

Soit

$$g_1(t) = e^{\alpha t} (P(X_1 > e^t) - P(A_1 X_1 > e^t)). \quad (3.48)$$

On peut écrire  $r(t)$  en fonction de  $g_1$  et  $\nu_n(t)$  comme suit :

$$r(t) = g_1 * \nu_{n-1}(t) + \delta_n(t), \quad t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

On applique à la fonction  $r(t)$  l'opérateur  $\check{\cdot}$  défini par

$$\check{f} = \int_{-\infty}^t e^{-(t-x)} f(x) dx. \quad (3.49)$$

Donc on a

$$\begin{aligned} (g_1 + \nu_{n-1})\check{\cdot}(t) &= \int_{-\infty}^t e^{-(t-x)} g_1 * \nu_{n-1}(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^t e^{-(t-x)} \left( \int_{\mathbb{R}} g_1(xy) \nu_{n-1}(dy) \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \nu_{n-1}(dy) \int_{-\infty}^t e^{-(t-x)} g_1(x-y) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \nu_{n-1}(dy) \int_{-\infty}^{t-y} e^{-(t-y-x)} g_1(x) dx = \check{g} * \nu_{n-1}(t) \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\check{r}(t) = \check{g}_1 * \nu_{n-1}(t) + \check{\delta}_n(t), \quad t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}. \quad (3.50)$$

Maintenant, soit

$$\eta(du) = e^{\alpha u} P(Y_1 \in du). \quad (3.51)$$

Notons que  $\eta(-\infty) = 0$  et par les relations (3.20), (3.22) et (3.24), on déduit que  $\eta(dx)$  est une distribution de probabilité non-arithmétique sur  $\mathbb{R}$  avec une espérance égale à  $m$ . En effet,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} x \eta(dx) &= \int_{\mathbb{R}} x e^{\alpha x} P(Y_1 \in dx) = \int_0^{\infty} t^\alpha \log t P(|A_1| \in dt) \\ &= E(|A_1|^\alpha \log |A_1|) = m < \infty. \end{aligned}$$

(Vois la relation (3.24)). La fonction de renouvellement associée à la loi  $\eta(dx)$  est donnée par

$$\nu(dt) = \sum_{n=0}^{\infty} \nu^{(n)}(dt) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\alpha t} P(V_n \in dt).$$

En utilisant le fait que la mesure de renouvellement  $\nu = \sum_{n=0}^{\infty} \eta^{(n)}$  a la propriété

$$\nu(t) < \infty, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

ou déduit que pour toute fonction directement Riemann intégrable sur  $\mathbb{R}$ , on a pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} |f| * \nu(t) &= \int_{\mathbb{R}} |f(t-x)| \nu(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(t-x)| \sum_{k=0}^{\infty} e^{\alpha x} P(V_k \in dx) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |f(t-x)| e^{\alpha x} P(V_k \in dx) < \infty. \end{aligned}$$

Pour monter que  $\check{g}_1$  est directement Riemann intégrable, on utilise le lemme suivant de Goldie [10].

**Lemme 3.2.** *Si  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , alors  $\check{f}$  est directement Riemann intégrable.*

Par la relation (3.25) et le lemme précédent, on a

$$\int_{\mathbb{R}} |\check{g}_1(t)| dt = \int_{\mathbb{R}} e^{\alpha t} |P(X_1 > e^t) - P(A_1 X_1 > e^t)| dt \quad (3.52)$$

$$= \int_0^{\infty} |P(X_1 > y) - P(A_1 X_1 > y)| y^{\alpha-1} dy < \infty, \quad (3.53)$$

c'est-à-dire  $g_1 \in L_1(\mathbb{R})$  et par conséquent  $\check{g}_1$  est directement Riemann intégrable. Puisque la mesure de renouvellement  $\nu$  vérifie la propriété que  $\nu(t) < \infty$  et que  $\check{g}_1$  est directement Riemann intégrable alors pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a

$$\begin{aligned} |\check{g}_1| * \nu(t) &= \int_{\mathbb{R}} |\check{g}_1(t-x)| \nu(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}} |\check{g}_1(t-x)| \sum_{k=0}^{\infty} e^{\alpha x} P(V_k \in dx) < \infty. \end{aligned}$$

Comme on intègre par rapport à la mesure  $P(V_k \in dx)$ , on a

$$|\check{g}_1| * \nu(t) = E \left( \sum_{k=0}^{\infty} e^{\alpha \nu_k} |\check{g}_1(t - \nu_k)| \right) < \infty.$$

Par le théorème de Fubini-Tonelli, l'espérance  $E \left( \sum_{k=0}^{\infty} e^{\alpha \nu_k} \check{g}_1(t - \nu_k) \right)$  existe et on peut interchanger l'espérance et la somme. Ainsi pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a

$$\begin{aligned} E \left( \sum_{k=0}^{\infty} e^{\alpha \nu_k} \check{g}_1(t - \nu_k) \right) &= \sum_{k=0}^{\infty} E \left( e^{\alpha \nu_k} \check{g}_1(t - \nu_k) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n E \left( e^{\alpha \nu_k} \check{g}_1(t - \nu_k) \right), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\check{g}_1 * \nu(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \check{g}_1 * \nu_n(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.54)$$

Donc, en utilisant la relation (3.51), on obtient  $\check{r} = \check{g}_1 * \nu$  parce que  $\check{S}_n \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ , qui est vérifiée par le théorème de convergence dominée et le fait que  $S_n(t) \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

En effet, on a

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\alpha t} P\left(\prod_{k=1}^n A_k X_1 > e^t\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\alpha t} P(e^{V_n} > e^t) \\ &= e^{\alpha t} P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} e^{V_n} > e^t\right) \\ &= e^{\alpha t} P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\sum_{k=1}^n Y_k} X_1 > e^t\right) = 0, \end{aligned}$$

parce que les variables  $Y_i$  sont i.i.d. avec  $E|Y_i| = \log|A_i| < 0$  i.e.,  $V_n = \sum_{k=1}^n Y_k \xrightarrow{p.s.} 0$ . Maintenant, on a

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \check{S}_n(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^t e^{-(t-x)} S_n(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^t e^{-(t-x)} e^{\alpha x} P(e^{V_n} X_1 > e^x) dx \\ &= \int_{-\infty}^t \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-(t-x)+\alpha x} P(e^{V_n} X_1 > e^x) dx \\ &= 0 \quad (\text{parce que } \nu_n \xrightarrow{p.s.} \infty, \text{ lorsque } n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Par définition l'unique solution de l'équation de renouvellement,

$$\check{r} = \eta * \check{r} + \check{g}_1 \tag{3.55}$$

est  $\check{r} = \check{g}_1 * \nu$ . Par le théorème de renouvellement, on déduit que

$$\check{r}(t) \longrightarrow \frac{1}{m} \int_{\mathbb{R}} \check{g}_1(x) dx, \quad t \longrightarrow \infty. \tag{3.56}$$

Pour vérifier la relation (3.27) du théorème 3.9, on utilise le lemme suivant (Voir le lemme 9.3 dans Goldie [10]).

**Lemme 3.4.1.** *Si*

$$\int_0^t x^\alpha P(X_1 > x) dx \sim C_+ t, \quad t \longrightarrow \infty, \tag{3.57}$$

*alors*

$$P(X_1 > t) \sim C_+ t^{-\alpha}, \quad t \longrightarrow \infty. \tag{3.58}$$

Maintenant, on a

$$\check{r}(t) = \int_{-\infty}^t e^{-(t-x)} r(x) dx = \int_{-\infty}^t e^{-(t-x)} e^{\alpha x} P(X_1 > e^x) dx \tag{3.59}$$

$$= \int_0^{e^t} y e^{-t} y^\alpha P(X_1 > y) y^{-1} dy \tag{3.60}$$

$$= \int_0^{e^t} y^\alpha P(X_1 > y) dy \tag{3.61}$$

$$= e^{-t} \int_0^{e^t} y^\alpha P(X_1 > y) dy \longrightarrow C_+ \tag{3.62}$$

où  $C_+ = \frac{1}{m} \int_{\mathbb{R}} \check{g}_1(x) dx$ ,  $t \longrightarrow \infty$ . (Ceci pour la relation (3.56)). C'est-à-dire  $\int_0^{e^t} y^\alpha P(X_1 > y) dy \sim C_+ t^{-\alpha}$ ,  $t \longrightarrow \infty$ . Par le lemme 3.4.1, on déduit que  $P(X_1 > t) \sim C_+ t^{-\alpha}$ ,  $t \longrightarrow \infty$ .

De la relation 3.59, on a

$$\int_0^{e^t} y^\alpha P(X_1 > y) dy \sim e^t \frac{1}{m} \int_{\mathbb{R}} \check{g}_1(x) dx. \tag{3.63}$$

Maintenant,

$$\begin{aligned}
 C_+ &= \frac{1}{m} \int_{\mathbb{R}} \check{g}_1(x) dx = \frac{1}{m} \int_{\mathbb{R}} g_1(x) dx \\
 &= \frac{1}{m} \int_{\mathbb{R}} e^{\alpha x} (P(X_1 > e^x) - P(A_1 X_1 > e^x)) dx \\
 &= \frac{1}{m} \int_0^{\infty} y^{\alpha} (P(X_1 > y) - P(A_1 X_1 > y)) y^{-1} dy \\
 &= \frac{1}{m} \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} ((X_1 > y) - P(A_1 X_1 > y)) dy,
 \end{aligned} \tag{3.64}$$

d'où la relation (3.29) est vérifiée.

**Cas 2(a).**  $P(A_1 > 0) > 0$  et  $P(A_1 < 0) > 0$ . Soit  $S_n$  désigne le signe  $\prod_{k=1}^n A_k$ . On a

$$\begin{aligned}
 P(X_1 > e^t) &= \sum_{k=1}^n \left( P\left(\prod_{j=1}^{k-1} A_j X_1 > e^t\right) - P\left(\prod_{j=1}^k A_j X_1 > e^t\right) \right) \\
 &\quad + P\left(\prod_{j=1}^n A_j X_1 > e^t\right) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \left( P\left(\prod_{j=1}^k A_j X_1 > e^t\right) - P\left(\prod_{j=1}^k A_j A_1 X_1 > e^t\right) \right) \\
 &\quad + P\left(\prod_{j=1}^n A_j X_1 > e^t\right) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} (P(S_k = 1, e^{V_k} > e^t) - P(S_k = 1, e^{V_k} A_1 X_1 > e^t)) \\
 &\quad + \sum_{k=0}^{n-1} (P(S_k = -1, -e^{V_k} X_1 > e^t) \\
 &\quad - P(S_k = -1, -e^{V_k} A_1 X_1 > e^t)) + P\left(\prod_{j=1}^n A_j X_1 > e^t\right). \tag{3.65}
 \end{aligned}$$

Dans la relation précédente, on a utilisé les relations suivantes

$$\prod_{j=1}^k A_j = e^{V_k} \quad \text{si} \quad \prod_{j=1}^k A_j > 0 \quad \text{et} \quad \prod_{j=1}^k A_j = -e^{V_k} \quad \text{si} \quad \prod_{j=1}^k A_j < 0.$$

Donc, on a

$$\begin{aligned}
 P(X_1 > e^t) &= \sum_{k=0}^{n-1} (P(S_k = 1, X_1 > e^{t-V_k}) - P(S_k = 1, A_1 X_1 > e^{t-V_k})) \\
 &\quad + \sum_{k=0}^{n-1} (P(S_k = -1, X_1 < -e^{t-V_k}) \\
 &\quad - P(S_k = -1, A_1 X_1 < -e^{t-V_k})) + P\left(\prod_{j=1}^n A_j X_1 > e^t\right).
 \end{aligned}$$

Soit la fonction  $g_{-1}(t) = e^{\alpha t} (P(X_1 < -e^t) - P(A_1 X_1 < -e^t))$  En terme de  $g_{-1}$  et  $g_1$ , on peut écrire

$$\begin{aligned}
 r(t) &= e^{\alpha t} P(X_1 > e^t) = 0 & (3.66) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} e^{\alpha t} \int_{\mathbb{R}} (P(S_k = 1 > e^{t-x}) - P(S_k = -1, A_1 X_1 > e^{t-x})) P(V_k \in dx) \\
 &+ \sum_{k=0}^{n-1} e^{\alpha t} \int_{\mathbb{R}} (P(S_k = -1, X_1 < e^{t-x}) - P(S_k = -1, A_1 X_1 < -e^{t-x})) P(V_k \in dx) \\
 &\quad + e^{\alpha t} P\left(\prod_{j=1}^n A_j X_1 > e^t\right) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\mathbb{R}} e^{\alpha x} g_{S_k=1}(t-x) P(V_k \in dx) + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\mathbb{R}} e^{\alpha x} g_{S_k=-1}(t-x) P(V_k \in dx) \\
 &\quad + e^{\alpha t} P\left(\prod_{j=1}^n A_1 X_1 > e^t\right) \\
 &= \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\mathbb{R}} e^{\alpha x} g_{S_k}(t-x) P(V_k \in dx) + P\left(\prod_{j=1}^n A_j X_1 > e^t\right).
 \end{aligned}$$

On obtient finalement,

$$r(t) = \sum_{k=0}^{n-1} E(e^{\alpha V_k} g_{S_k}(t - V_k)) + S_n, \quad (3.67)$$

où  $S_n(t) = e^{\alpha t} P\left(\prod_{j=1}^n A_j X_1 > e^t\right) \leq e^{\alpha t} P\left(\prod_{j=0}^n A_j |X_1| > e^t\right) \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$  parce que  $|\prod_{j=1}^n A_j| = e^{V_n} \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Maintenant, on donne aux variables  $A_n$  une nouvelle loi de probabilité sous laquelle la probabilité et l'espérance seront notées par  $\tilde{P}$  et  $\tilde{E}$ . Sous la nouvelle probabilité  $\tilde{P}$ , les variables  $A_n$  restent i.i.d. avec

$$\tilde{P}(A_1 \in dy) = |y|^\alpha P(A_1 \in dy), \quad y \in \mathbb{R}.$$

La relation (3.67) devient comme suit :

$$r(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{E}(g_{S_k}(t - V_k)) + S_n(t), \quad t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N},$$

avec  $\sum_{k=0}^{n-1} \tilde{E}(g_{S_k}(t - V_k)) = g_1 * V_{n-1}(t) + g_{-1} * V_{n-1}(t)$ . En effet, on a

$$\begin{aligned}
 r(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\mathbb{R}} g_{S_k=1}(t-x) \tilde{P}(S_k = 1, V_k \in dx) \\
 &\quad + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\mathbb{R}} g_{S_k=-1}(t-x) \tilde{P}(S_k = -1, V_k \in dx) + S_n(t) \\
 &= g_1 * V_{n-1}(t) + g_{-1} * V_{n-1,-1}(t) + S_n(t), \quad t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N},
 \end{aligned}$$

avec  $V_{n-1,j}(dx) = \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{P}(S_n = j, V_k \in dx)$ ,  $j \in \{-1, 1\}$ . En utilisant la même méthode qu'on a utilisé pour trouver la relation (3.51), on obtient

$$\check{r}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{E}(\check{g}_{S_k}(t - V_k)) + S_n(t), \quad t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Maintenant, soit  $S = (S_n)_{n \geq 1}$  une chaîne de Markov à espace d'états  $\{-1, 1\}$  avec  $S_0 = 1$  et de matrice de transition  $\begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$  où

$$\begin{aligned} p = \tilde{P}(A_1 > 0) = \tilde{E}(\mathbf{1}_{\{A_1 > 0\}}) &= \int_0^\infty \tilde{P}(A_1 \in dy) \\ &= \int_0^\infty |y|^\alpha P(A_1 \in dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}} |y|^\alpha \mathbf{1}_{\{y > 0\}} P(A_1 \in dy) \\ &= E(|A_1|^\alpha \mathbf{1}_{\{A_1 > 0\}}). \end{aligned}$$

$q = P(A_1 < 0) = E(\mathbf{1}_{\{A_1 < 0\}} |A_1|^\alpha)$ . C'est claire que  $p > 0$  et que  $q + p = 1$ . Soient  $\eta_+$  et  $\eta_-$  les lois conditionnelles de  $\log |A_1|$  sachant  $A_1 > 0$  et  $A_1 < 0$ , sous la probabilité  $\tilde{P}$ , respectivement.

$$\eta_+(dy) = \tilde{P}(\log |A_1| \in dy / A_1 > 0) = \frac{P(\log |A_1| \in dy, A_1 > 0)}{p}. \quad (3.68)$$

$$\eta_-(dy) = \tilde{P}(\log |A_1| \in dy / A_1 < 0) = \frac{P(\log |A_1| \in dy, A_1 < 0)}{q}. \quad (3.69)$$

Rappelons que  $Y_k = \log |A_k|$  et  $S_k = \text{signe de } \prod_{i=1}^k A_j \in \{-1, 1\}$ . Conditionnellement sur  $S$ , les variables aléatoires  $Y_1, Y_2, \dots$  sont indépendantes avec des lois conditionnelles suivantes

$$\tilde{P}(Y_n \in \cdot / s) = \mathbf{1}_{S_n = S_{n-1}} \eta_+(\cdot) + \mathbf{1}_{S_n \neq S_{n-1}} \eta_-(\cdot).$$

Soient  $0 = N_0^{(+)} < N_1^{(+)} < N_2^{(+)} < \dots$  les valeurs de  $n$  pour lesquelles  $S_n = 1$  et soit  $0 = N_0^{(-)} < N_1^{(-)} < N_2^{(-)} < \dots$  les valeurs pour lesquelles  $S_n = -1$ , Soit  $N_i^{(+)} = \max\{i : N_i^{(+)} \leq n - 1\}$ ,  $I_n^{(-)} = \max\{i : N_i^{(-)} \leq n - 1\}$ , alors

$$\check{r}(t) = \tilde{E} \left( \sum_{k=0}^{I_n^{(+)}} \check{g}_1(t - w_k^+) \right) + \tilde{E} \left( \sum_{k=0}^{I_n^{(-)}} \check{g}_{-1}(t - w_k^{(-)}) \right) + \check{S}_n(t), \quad t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}. \quad (3.70)$$

où  $W_k^{(+)} = V_{N_k^{(+)}}$  et  $W_k^{(-)} = V_{N_k^{(-)}}$ . Notons que  $\check{S}_n(t) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ . Soit  $\eta$  la loi de  $Y_1 + \dots + Y_{N_1^{(+)}}$  avec  $N_1^{(+)}$  est la première valeur de  $n$  pour laquelle  $S_n = 1$ , alors  $(W_k^{(+)})_{k \geq 0}$  définie par

$$W_0^{(+)} = 0, W_1^{(+)} = \sum_{j=1}^{N_1^{(+)}} Y_j, W_2^{(+)} = \sum_{j=1}^{N_2^{(+)}} Y_j, \dots, W_k^{(+)} = \sum_{j=1}^{N_k^{(+)}} Y_j,$$

est une marche aléatoire avec la loi de pas  $\eta$  i.e.

$$W_k^{(+)} = \sum_{j=1}^{\infty} Z_j^{(+)} \quad \text{où } Z_j^{(+)} \text{ sont indépendantes de même la loi } \eta$$

On montre que

$$\eta = p\eta_+ + \sum_{n=1}^{\infty} q^n p^{n-1} \eta_-^{(2)} * \eta_+^{(n-2)}. \quad (3.71)$$

à partir de laquelle on déduit les probabilités suivantes qui sont nécessaires pour appliquer le théorème de renouvellement

$$\int_{\mathbb{R}} y\eta(dy) = 2m. \quad (3.72)$$

$$\eta \text{ est non arithmétique.} \quad (3.73)$$

Pour vérifie ceci, on note d'abord que  $\tilde{P}(N_1^{(+)} = 1) = p$ ,  $\tilde{P}(N_1^{(+)} = n) = q^2 p^{n-2}$ ,  $n \geq 1$ . Si  $N_1^{(+)} = 1$ , alors  $Y_1^{(+)}$  a la loi  $\eta_+$ . Si  $n \geq 2$ , alors  $Y_1$  et  $Y_{N_1^{(+)}}$  ont la loi  $\eta$  et  $Y_k$  a la loi  $\eta_+$  pour  $k$  dans l'intervalle  $]2, N_1^{(+)}[$ . Par conséquent on déduit la relation (3.71). Pour la relation (3.72), on note par  $m_+$  et  $m_-$  les espérances de  $\eta_+$  et  $\eta_-$ , alors  $\int_{\mathbb{R}} y\eta(dy) = pm_+ \sum_{n=1}^{\infty} q^2 p^{(n-2)} (2m_- + (n-2)m_+) = 2(pm_+ + qm_-) = 2m$ , parce que

$$m_+ = E(\mathbf{1}_{\{A_1 > 0\}} |A_1|^\alpha \log |A_1|) / p \text{ et } m_- = E(\mathbf{1}_{\{A_1 < 0\}} |A_1|^\alpha \log |A_1|) / q.$$

Puisque, sous  $\tilde{P}$ , la variable  $\log |A_1|$  est non-arithmétique, on peut trouver un sous ensemble  $B$  de support de cette loi telle que le groupe additif engendré par  $B$  est dense dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $B_+$  et  $B_-$  les intersections de  $B$  avec les supports de  $\mathbf{1}_{\{A_1 > 0\}} \log |A_1|$  et  $\mathbf{1}_{\{A_1 < 0\}} \log |A_1|$ , respectivement. Soit  $B^*$  constituée des éléments de  $B_+$  et le double de chaque élément de  $B_-$ , alors  $B^*$  génère un groupe additif dense dans  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $b \in B^*$  et tout  $\varepsilon > 0$ , si  $b \in B_+$ , on a

$$\tilde{P}(|Z_1^{(+)} - b| < \varepsilon) \geq p\eta_+(]b - \varepsilon, b + \varepsilon])^2 > 0,$$

et si  $\frac{1}{2}b \in B_-$ , on a

$$\tilde{P}(|Z_1^{(+)} - b| < \varepsilon) \geq p \left( \eta_- \left( ]\frac{1}{2}(b - \varepsilon), \frac{1}{2}(b + \varepsilon)[ \right) \right)^2 > 0.$$

Ainsi  $b$  est contenu dans le support de  $Z_1^{(+)}$ , i.e., de  $\eta$ . Par conséquent  $\eta$  est non-arithmétique. Soit  $\nu = \sum_{n=0}^{\infty} \eta^{(n)}$  la mesure de renouvellement générée par  $\eta$ . Par les propriétés (3.71), (3.72) et (3.73) de  $\eta$ , toute fonction directement Riemann intégrable est  $\nu$ -intégrable. En appliquant le lemme 3.4.1 à la relation (3.25), on déduit que  $\check{g}_1$  est Riemann intégrable et ainsi  $|\check{g}_1 * \nu(t)| < \infty$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , C'est-à-dire

$$\tilde{E} \left( \sum_{k=0}^{\infty} |\check{g}_1(t - W_k^{(+)})| \right) < \infty,$$

et ceci nous permet d'appliquer le théorème de convergence dominée pour montrer que pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\tilde{E} \left( \sum_{k=0}^{I_n^{(+)}} \check{g}_1(t - W_k^{(+)}) \right) \longrightarrow \tilde{E} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \check{g}_1(W_k^{(+)}) \right), \quad n \longrightarrow \infty,$$

parce que  $I_n^{(+)} \longrightarrow \infty$  p.s. Pour l'autre espérance dans (3.70), on définit  $W_k^{(-)} = \sum_{j=0}^k Z_j^{(-)}$  où les variables  $Z_j^{(-)}$  sont indépendantes avec  $Z_j^{(-)}$ ,  $j \geq 1$  ont la même loi  $\eta$  et  $Z_0^{(-)}$  a une loi  $\eta_0$  différente de  $\eta$  définie par  $\eta_0 = \sum_{n=1}^{\infty} qp^{n-1}\eta_- * \eta_+^{(n-1)}$ . Comme  $\check{g}_1, \check{g}_{-1}$  sont Riemann intégrables, alors par le théorème de convergence dominée on obtient

$$\tilde{E} \left( \sum_{k=1}^{I_n^{(-)}} \check{g}_1(t - W_k^{(-)}) \right) \longrightarrow \tilde{E} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \check{g}_{-1}(t - W_k^{(-)}) \right), \quad n \longrightarrow \infty$$

parce que  $I_n^{(-)} \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$ , Par conséquent la relation (3.70) devient

$$\tilde{r}(t) = \tilde{E} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \check{g}_1(t - W_k^{(+)}) \right) + \tilde{E} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \check{g}_{-1}(t - W_k^{(-)}) \right) \quad (3.74)$$

$$= \check{g}_1 + \nu(t)\check{g}_{-1} * \eta_0 * \nu(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.75)$$

En appliquant le théorème de renouvellement à chaque terme de (3.74) on obtient

$$\begin{aligned} \hat{r}(t) &\longrightarrow \frac{1}{2m} \int_{\mathbb{R}} \check{g}_1(x) dx + \frac{1}{2m} \int_{\mathbb{R}} (\check{g}_1 * \eta_0)(x) dx \\ &= \frac{1}{2m} \int_{\mathbb{R}} (g_1 + g_{-1})(x) dx \end{aligned}$$

qui est égale au terme dans (3.31) de théorème 3.9. Comme pour le **cas 1**, la relation (3.27) se déduit par le lemme 3.4.1.

**Cas 2(b).**  $A_1 \leq 0$  p.s. On montre que

$$\int_0^{+\infty} |P(X_1 > t) - P(A_1 A_2 X_1 > t)| t^{\alpha-1} dt < \infty. \quad (3.76)$$

On a

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} |P(X_1 > t) - P(A_1 A_2 X_1 > t)| t^{\alpha-1} dt &\leq \int_0^{\infty} |P(X_1 > t) - P(X_1 > t)| t^{\alpha-1} dt \\ &\quad + \int_0^{\infty} |P(A_1 X_1 > t) - P(A_1 A_2 X_1 > t)| t^{\alpha-1} dt. \end{aligned}$$

Maintenant on a :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} |P(A_1 X_1 > t) - P(A_1 A_2 X_1 > t)| t^{\alpha-1} dt &= \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^0 |P(v X_1 > t) - P(v A_2 X_1 > t)| P(A_2 \in dv) t^{\alpha-1} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 \int_0^{\infty} |P(X_1 < \frac{t}{v}) - P(A_2 X_1 < \frac{t}{v})| P(A_2 \in dv) t^{\alpha-1} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 \int_0^{\infty} |P(X_1 < -y) \\ &\quad - P(A_2 X_1 < -y)| P(A_2 \in dv) (-vy)^{\alpha-1} (-v) dy \\ &= \int_{-\infty}^0 \int_0^{\infty} |P(X_1 < -y) \\ &\quad - P(A_2 X_1 < -y)| y^{\alpha-1} dy (-v)^{\alpha} P(A_2 \in dv) \\ &= \int_0^{\infty} E|A_2|^{\alpha} |P(X_1 < -y) - P(A_2 X_1 < -y)| y^{\alpha-1} dy \\ &= E|A_2|^{\alpha} \int_0^{\infty} |P(X_1 < -y) - P(A_2 X_1 < -y)| y^{\alpha-1} dy, \end{aligned}$$

qui est finie grâce à la condition (3.20) de lemme 3.2 et la condition (3.26) de théorème 3.9. Donc la relation (3.76) est vérifiée. Maintenant, puisque  $A_1 A_2 \geq 0$  p.s. et (3.76) est vérifiée, comme pour le **cas 2**, la relation (3.27) est vérifiée avec

$$\begin{aligned}
 C_+ &= \frac{1}{m_2} \int_0^\infty (P(X_1 > t) - P(A_1 A_2 X_1 > t)) t^{\alpha-1} dt \\
 &= \frac{1}{m_2} \int_0^\infty (P(X_1 > t) - P(A_1 X_1 > t)) t^{\alpha-1} dt + \frac{1}{m_2} \int_0^\infty (P(A_1 X_1 > t) - P(A_1 A_2 X_1 > t)) t^{\alpha-1} dt \\
 &= \frac{1}{m_2} \int_0^\infty (P(X_1 > t) - P(A_1 X_1 > t)) t^{\alpha-1} dt + \frac{1}{m_2} \int_0^\infty (P(X_1 < -t) - P(A_1 X_1 < -t)) t^{\alpha-1} dt \\
 &= \frac{1}{m_2} \int_0^\infty (P(|X_1| > t) - P(|A_1 X_1| > t)) t^{\alpha-1} dt,
 \end{aligned}$$

qui est la relation (3.31) avec

$$\begin{aligned}
 m_2 &= E(|A_1 A_2|^\alpha \log |A_1 A_2|) \\
 &= E(|A_1 A_2|^\alpha \log(|A_1|)) + E(|A_1 A_2|^\alpha \log |A_2|) \\
 &= E(|A_2|^\alpha) E(|A_1|^\alpha \log |A_1|) + E|A_1|^\alpha E(|A_2|^\alpha \log |A_2|) \\
 &= m + m = 2m.
 \end{aligned}$$

**Preuve de théorème 3.10.** Notons que sous les conditions de lemme 3.1, on a  $-\infty \leq E \log |A_1| < 0$ . La fonction  $-\log x$  est convexe sur  $]0, \infty[$ , par l'inégalité de Jensen, on déduit que  $E(\log |B_1|) < \infty$ . Par le théorème 2.1, on a  $X_n \rightarrow Y$ ,  $n \rightarrow \infty$  où  $Y = \sum_{k=0}^\infty B_k \prod_{i=1}^{k-1} A_i$  et lorsque  $X_0 \stackrel{d}{=} Y$ , le processus défini par l'équation aux récurrences stochastique (3.19) est strictement stationnaire.

**Lemme 3.3.** Pour toutes variables aléatoires  $X$  et  $Y$ ,

$$\int_0^\infty |P(X > t) - P(Y > t)| t^{\alpha-1} dt = \frac{1}{\alpha} E|(X^+)^{\alpha} - (Y^+)^{\alpha}| \leq \infty. \quad (3.77)$$

Lorsque elle est fini, on a

$$\int_0^\infty (P(X > t) - P(Y > t)) t^{\alpha-1} dt = \frac{1}{\alpha} E((X^+)^{\alpha} - (Y^+)^{\alpha}). \quad (3.78)$$

**Preuve.** On sait que  $X^+(\omega) = \max(X(\omega), 0)$ . Puisque  $P(X > t) = P(X^+ > t)$  pour tout  $t > 0$ , pour montrer (3.77) il suffit de la vérifier pour des variables positives  $X$  et  $Y$ . La coté gauche dans (3.77) est égale à la somme des termes  $\int_0^\infty P(X \leq t < Y) t^{\alpha-1} dt$  et  $\int_0^\infty P(Y \leq t < X) t^{\alpha-1} dt$  tel que le première terme est égale à  $E(\mathbf{1}_{\{X > Y\}}(X^\alpha - Y^\alpha))$ .

Maintenant, on vérifie (3.25) de théorème 3.9 par le lemme 3.3, on a

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty |P(X_1 > t) - P(A_1 X_1 > t)| t^{\alpha-1} dt &= \int_0^\infty |P(A_1 X_1 + B_1 > t) - P(A_1 X_1 > t)| t^{\alpha-1} dt \\
 &= \frac{1}{\alpha} E |((A_1 X_1 + B_1)^+)^{\alpha} - ((A_1 X_1)^+)^{\alpha}| \\
 &= E(\mathbf{1}_{\{A_1 X_1 + B_1 > 0, A_1 X_1 \leq 0\}}(A_1 X_1 + B_1)^{\alpha}) \\
 &\quad + E(\mathbf{1}_{\{A_1 X_1 + B_1 \leq 0, A_1 X_1 > 0\}}(A_1 X_1)^{\alpha}) \\
 &\quad + E(\mathbf{1}_{\{A_1 X_1 + B_1 > A_1 X_1 > 0\}}((A_1 X_1 + B_1)^{\alpha} - (A_1 X_1)^{\alpha})) \\
 &\quad + E(\mathbf{1}_{\{A_1 X_1 > A_1 X_1 + B_1 > 0\}}((A_1 X_1)^{\alpha} - (A_1 X_1 + B_1)^{\alpha})) \\
 &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4.
 \end{aligned}$$

Pour montrer que  $I_1, I_2, I_3$  et  $I_4$  sont finis, on utilise le lemme suivant

**Lemme 3.4.**

$$|x + y|^r = c_r (|x|^r + |y|^r), \quad x, y \in \mathbb{R}, r > 0 \quad (3.79)$$

avec  $c_r = \max\{2^{r-1}, 1\}$ .

$$||x|^r - |y|^r| \leq \begin{cases} |x - y|^r & \text{si } 0 \leq r \leq 1 \\ r|x - y| (|x| \times |y|)^{r-1} & \text{si } 1 < r < \infty. \end{cases} \quad (3.80)$$

Dans  $I_1$ , on a  $0 < A_1X_1 + B_1 \leq B_1$ , alors

$$I_1 \leq E(\mathbf{1}_{\{B_1 > 0\}}(B_1)^\alpha) = E((B_1^+)^\alpha) < \infty.$$

Dans  $I_2$ , on a  $0 < A_1X_1 \leq -B_1$ , alors

$$I_2 \leq E(\mathbf{1}_{\{-B_1 > 0\}}(-B_1)^\alpha) = E((B_1^-)^\alpha) < \infty.$$

Si  $\alpha \leq 1$  par la relation (3.80), on a

$$I_3 \leq E(\mathbf{1}_{\{B_1 > 0\}}(B_1)^\alpha) = E((B_1^+)^\alpha) < \infty.$$

Si  $\alpha > 1$ , par les (3.79) et (3.80), on déduit que

$$I_3 \leq \alpha E(\mathbf{1}_{\{A_1X_1 + B_1 > A_1X_1 > 0\}} B_1 (A_1X_1 + B_1)^{\alpha-1}) \quad (3.81)$$

$$\leq \alpha c_{\alpha-1} E((B_1^+)^\alpha) + \alpha c_{\alpha-1} E(B_1^+ |A_1|^{\alpha-1}) E(|X_1|^{\alpha-1}). \quad (3.82)$$

Maintenant,  $E(B_1^+ |A_1|^{\alpha-1}) < \infty$ , ceci avec la première condition de lemme 3.1, la condition (3.33) et l'inégalité de Holder. Par le théorème 3.9, on a  $E|X_1^{\alpha-1}| < \infty$ . Dans  $I_4$ , on a  $0 < -B_1 < A_1X_1$  et pour  $\alpha \leq 1$ , on déduit par la relation (3.80) que

$$I_4 \leq E(\mathbf{1}_{\{0 < -B_1 < A_1X_1\}}(-B_1)^\alpha) \leq E(\mathbf{1}_{\{B_1 < 0\}}(-B_1)^\alpha) = E((B_1^-)^\alpha) < \infty.$$

Si  $\alpha > 1$ , par la relation (3.80) on obtient

$$I_4 \leq E(\mathbf{1}_{\{B_1 < 0\}}(-B_1)(A_1X_1)^{\alpha-1}) = E(B_1^- |A_1|^{\alpha-1}) E(|X_1|^{\alpha-1}).$$

Maintenant, par la première condition de lemme 3.1, la condition (3.33) et l'inégalité de Holder, on déduit que  $E(B_1^- |A_1|^{\alpha-1}) < \infty$ . Donc les termes  $I_1, I_2, I_3$  et  $I_4$  sont finis, alors la relation (3.25) de théorème 3.9 est vérifiée. Par conséquent la relation (3.27) est vérifiée. Avec la même méthode, on peut vérifier que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |P(X_1 < -t) - P(A_1X_1 < -t)| t^{\alpha-1} dt &= \int_0^\infty |P(A_1X_1 + B_1 < -t) - P(A_1X_1 < -t)| t^{\alpha-1} dt \\ &= \frac{1}{\alpha} E(|((A_1X_1 + B_1)^-)^{\alpha} - ((A_1X_1)^-)^{\alpha}|) < \infty \end{aligned}$$

c'est-à-dire la condition (3.20) de théorème 3.9 est satisfaite et par conséquent, la relations (3.28) est vérifiée. Par le théorème 3.9 et le lemme 3.3, on obtient les relation (3.79) et (3.80). En effet,

$$\begin{aligned} C_+ &= \frac{1}{m} \int_0^\infty (P(X_1 > t) - P(A_1X_1 > t)) t^{\alpha-1} dt \\ &= \frac{1}{m} \int_0^\infty (P(A_1X_1 + B_1 > t) - P(A_1X_1 > t)) t^{\alpha-1} dt \\ &= \frac{1}{m\alpha} E(((A_1X_1 + B_1)^+)^{\alpha} - ((A_1X_1)^+)^{\alpha}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_- &= \frac{1}{m} \int_0^\infty (P(X_1 < -t) - P(A_1 X_1 < -t)) t^{\alpha-1} dt \\ &= \frac{1}{m} \int_0^\infty (P(A_1 X_1 + B_1 < -t) - P(A_1 X_1 < -t)) t^{\alpha-1} dt \\ &= \frac{1}{m\alpha} E(((A_1 X_1 + B_1)^-)^{\alpha} - ((A_1 X_1)^-)^{\alpha}). \end{aligned}$$

Si  $P(A_1 < 0) > 0$ , alors par la relation (3.74) de lemme 3.3, on obtient

$$C_+ = C_- = \frac{1}{2m\alpha} E(|A_1 X_1 + B_1|^{\alpha} - |A_1 X_1|^{\alpha}).$$

# Conclusion générale

Dans ce mémoire, on a étudié l'équation aux récurrences stochastique  $X_{n+1} = A_{n+1}X_n + B_n$   $n \in \mathbb{N}^*$  où  $\{(A_n, B_n), n \in \mathbb{N}^*\}$  est une suite iid. On a montré que sous les conditions  $E \log |A_1| \in [-\infty, 0[$  et  $E \log |B_1| < \infty$  la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en distribution vers la variable aléatoire  $X$  pour n'importe quelle variable aléatoire initiale  $X_0$  et la variable limite  $X$  vérifie l'égalité en distribution  $X \stackrel{d}{=} A_1 X + B_1$  où  $X$  est indépendante de  $(A_1, B_1)$ . On a montré que lorsqu'on fixe la variable  $X_0$  égale en distribution à la variable limite  $X$ , la suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est strictement stationnaire et ergodique, c'est l'unique solution strictement stationnaire de l'équation aux récurrences stochastique. On a montré que sous les conditions  $E|A_1|^\alpha < 1$  et  $E|B_1|^\alpha < \infty$ , pour un certaine  $\alpha > 0$ , la variable limite  $X$  admet des moments d'ordres supérieurs finis. En suite, on a utilisé la théorème de renouvellement implicite pour montrer que la variable limite  $X$  est à variation régulière d'indice de variation  $\alpha > 0$  qui vérifie l'égalité  $E|A|^\alpha = 1$ . Il est très intéressant par exemple d'étudier l'équation aux récurrences stochastique dans le cas où  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sont des chaînes de Markov à espaces d'états finis ou infini-dimensionnelles. De même, c'est très intéressant d'étudier la variation régulière des distributions fini-dimensionnelles de la solution strictement stationnaire de l'équation aux récurrences stochastique qu'on a étudié dans notre mémoire.

# Bibliographie

- [1] Babillot, M., Bougerol, P., and Elie, L. (1997). The random difference equation  $X_n = A_n X_{n-1} + B_n$  in the critical case. *The annals of Probability*, **25**, 478-493.
- [2] Bingham, N. H., Goldie, C. M., and Teujels, J. L. (1987). *Regular variation*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [3] Bougerol, P., and Picard, N. (1992b). Stationnarity of GARCH processes and some nonnegative times series. *Journal of Econometrics*, **52**, 115–127.
- [4] Brandt, A. (1986). The stochastic equation  $X_{n+1} = A_n X_n + B_n$  with stationary coefficients. *Advances in Applied Probability*, **10**, 211-220.
- [5] Breiman, L. (1968). *Probability*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts.
- [6] Davis, R. A., and Mikosch, T. (1998). The sample autocorrelations of heavy-tailed processes with applications to ARCH. *The Annals of Statistics*, **26**, 2049-2080.
- [7] de Saporta, B. (2005). *Etude de la solution de l'équation  $Y_{n+1} = A_n Y_n + B_n$  à coefficients aléatoires*. PhD thesis, Université of Rennes 1.
- [8] Doob, J. L. (1953). *Stochastic Processes*. John Wiley, New York.
- [9] Feller, W. (1971). *An introduction to probability theory and its applications*, vol. II. John Wiley, New York.
- [10] Goldie, C. M. (2000). Implicit renewal theory and tails of solutions of random equations. *The Annals of Probability*, **1**, 126–166.
- [11] Goldie, C. M., and Maller, R. A. (2000). Stability of perpetuities. *The Annals of Probability*, **28**, 1195–1218.
- [12] Grey, D. R. (1994). Regular variation in the tail behavior of solutions of random difference equations. *The Annals of Applied Probability*, **4**, 169–183.
- [13] Hult, H., Lindskog, F., and Mikosch, T. (2005). Functional large deviations for multivariate regularly varying random walks. *The Annals of Applied Probability*, **15**, 2651–2680.
- [14] Karlin, S. (1975). *A First Course in Stochastic Processes*, 2nd ed. Academic Press, New York.
- [15] Kesten, H. (1973). Random difference equations and renewal theory for products of random matrices. *Acta Math*, **131**, 207-248.
- [16] Kesten, H., and Maller, R. A. (1996). Two renewal theorems for general random walks tending to infinity. *Probab. Theory Related Fields*, **106**, 1–38.
- [17] Konstantinides, D. G., and Mikosch, T. (2005). Large deviations and ruin probabilities for solutions to stochastic recurrence equations with heavy-tailed innovations. *The Annals of Probability*, **33**, 1992–2035.
- [18] Loeve, M. (1977). *Probability Theory I*, 4th ed. Springer-Verlag, New York.
- [19] Maric, V. (2000). *Regular Variation and Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin.
- [20] Petrov, V. V. (1995). *Limit Theorems of Probability Theory : Sequences of Independent Random Variables*. Oxford Univ Inc., New York.

- [21] Quinn, B. G. (1982). A note on the existence of strictly stationary solutions to bilinear equations. *Journal of Time Series Analysis*, **3**, 249–252.
- [22] Quinn, B. G., and Nicholls, D. F. (1981). The Stability of Random Coefficient Autoregressive Models. *International Economic Review*, **22**, 741–744.
- [23] Resnick, S. (2006). *Heavy-Tail Phenomena : Probabilistic and Statistical Modeling*, Springer, New York.
- [24] Vervaat, W. (1979). On a stochastic difference equation and a representation of non–negative infinitely divisible random variables. *Adv. Appl. Prob*, 11, 750-783.