

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE DE BOUIRA



FACULTE DES SCIENCES ET DES SCIENCES APPLIQUEES

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES

MEMOIRE POUR L'OBTENTION DU DIPLOME

DE MASTER EN MATHEMATIQUES

OPTION

Recherche opérationnelle

THEME

**Autour des problèmes des oscillations des membranes**

Présenté par : Mlle. OUAAD Amel

Mlle. LAKEHAL Kahina

Soutiendra-le: 08/07/2021

Devant le jury:

Président: Mme. MELOUANE N.

MAA.

UAMO Bouira

Examineur: Mr. DEMMOUCHE N.

MCB.

UAMO Bouira

Examineur: Mr. KHALDI L.

MAA.

UAMO Bouira

Promoteur: Mr. BOUDREF M.A.

MCA.

UAMO Bouira

Année universitaire: 2020/2021

# Remerciements

*En premier lieu, nous remercions **Allah** qui nous avoir donné le courage et la volonté afin d'accomplir ce modeste travail.*

*Nos plus vifs remerciements vont aussi à l'encadreur en ce travail **Dr. BOUDREF MOHAMED AHMED** pour son aide continue, ses précieux conseils et être patient avec nous.*

*Nous remercions les membres du jury pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de siéger à notre défense et de revoir notre travail.*

*Nous remercions à tous les enseignants du département mathématique pour toute l'aide apportée à nous durant notre trajets scolaire.*

*Nous remercions les parents généreux pour leur soutient leur en couragement à atteindre les plus hauts rangs.  
Et nous remercions les frères et sœurs chère.*

*Enfin, nous adressons nos remerciements à tous ceux qui nous ont aidés de près ou de loin.*

***Merci à Tous***

# *Dédicace*

*Au terme de ce très modeste travail, je tiens à exprimer ma gratitude aux Personnes qui m'ont soutenue durant ces années.*

*Ma mère et Mon père*

*Vous avez toute ma gratitude, car c'est grâce à vous que j'ai atteint mon but...*

*Je vous remercie pour votre soutien de moral, vos encouragements et vos conseils qui m'ont guidés durant mes années d'étude ...*

*A mon frère **NABIL**, ainsi qu'à mes chères sœurs **WAHIBA et LINDA**, pour leurs complicités et leurs présence depuis tous le temps.*

*A ma famille mes intimes et à toute personne qui me connaît, sans oublier **LOUAIE, AKSEL, ALAA***

*Je ne manquerais pas de souligner l'assistance sans faille de mon binôme **LAKEHAL KAHINA** et à toute sa famille*

*Et à ceux qui ont oublié mon stylo et n'ont pas oublié mon cœur ...*

***AMEL***

# *Dédicace*

*Avec un énorme plaisir, un cœur ouvert, et une immense joie, que je dédie ce modeste travail à :*

*A mes parents qui n'a jamais cessé de m'encourager et me motiver dans mes études et leurs amours, leurs confiances.*

*Qu'ils trouvent ici le témoignage de ma profonde gratitude et reconnaissance.*

*A mes chères frères **WALID** et mon petit **ABD ESLAM***

*Mon binôme **OUAAD AMEL** et sa famille.*

*Et finalement à mes ami(e)s et tous les membres de famille.*

**KAHINA**

# Table des matières

<b>Introduction Générale</b>	<b>2</b>
<b>1 Fonctions de Bessel et leurs propriétés</b>	<b>4</b>
1.1 Présentation de l'équation de Bessel	4
1.1.1 Résolution de l'équation de Bessel	4
1.2 Equations se ramenant à l'équation de Bessel	10
1.3 Présentations graphiques des fonctions de Bessel	12
1.4 Relations de récurrence entre les fonctions de Bessel	14
1.5 Orthogonalité des fonctions de Bessel est leurs racines	16
1.6 Fonction génératrice de la fonction de Bessel	20
1.7 Forme intégrale des fonctions de Bessel	21
1.8 Formule de Fourier-Bessel	22
1.9 Autres types de fonctions de Bessel	23
1.9.1 Fonction de Henkel	23
1.9.2 Fonction de Kelvin	23
<b>2 Résolutions des problèmes des oscillations des membranes</b>	<b>25</b>
2.1 Oscillations Transversales des Membranes	25
2.2 Membrane Circulaire	26
2.3 Explication physique sur les vibrations des membranes circulaires	26
2.4 Modélisation des oscillations d'une membrane circulaire	28
2.5 Résolution de l'équation de la membrane circulaire	29
2.6 Membrane Rectangulaire	35
2.7 Mécanisme de déformation membranaire (Terme biologique)	37
<b>Conclusion et Prespectives</b>	<b>38</b>
<b>Annexe</b>	<b>39</b>
<b>A Programme informatique Matlab de la membrane rectangulaire</b>	<b>39</b>
<b>Annexe</b>	<b>40</b>
<b>B Programme informatique Matlab de déformation de la membrane rectangulaire</b>	<b>41</b>
<b>Annexe</b>	<b>42</b>
<b>C Programme informatique Matlab de la membrane circulaire</b>	<b>43</b>

# Table des figures

1.1	fonction de Bessel de première espèce . . . . .	13
1.2	fonction de Bessel de deuxième espèce . . . . .	13
1.3	fonction de Bessel d'indice fractionnaire . . . . .	13
2.1	Membrane circulaire . . . . .	26
2.2	Photo d'installation de la membrane . . . . .	27
2.3	Schéma du montage de la membrane . . . . .	27
2.4	Photo du Tonoscope . . . . .	27
2.5	Schéma du montage de la membrane . . . . .	27
2.6	Les modes propres de la membrane . . . . .	28
2.7	Membrane rectangulaire . . . . .	35
A.1	Membrane rectangulaire mode (30,30) . . . . .	40
B.1	Membrane rectangulaire fondamentale . . . . .	42
B.2	Membrane rectangulaire mode (1,1) . . . . .	42
B.3	Membrane rectangulaire mode (2,2) . . . . .	42

# Résumé

Ce mémoire est consacré à l'étude des problèmes des oscillations des membranes circulaires et rectangulaires.

En premier lieu, nous avons étudié les fonctions de Bessel et leurs propriétés essentielles intervenant dans notre travail.

Nous avons présenté l'application de ces fonctions dans les vibrations des membranes circulaires et aussi que la présentation des solutions des équations des membranes par la méthode de séparation de variable, nous illustrer par certaines expériences physiques montrant les phénomènes en question, nous avons ajouté des programmes Matlab, donnent des simulations numériques aux solutions trouvés.

Enfin, grâce à la modélisations des vibrations des membranes nous illustré dans le logicielle Matlab comment les modes de vibration d'une membrane circulaire et rectangulaire évoluent dans le temps.

**Mots-clés :** Fonctions de Bessel, Oscillations transversales, membranes circulaires et rectangulaires.

# Abstract

This thesis is devoted to the study of the problems of oscillations of circular membranes and rectangular.

First, we studied Bessel functions and their essential properties involved in our work.

We have presented the application of these functions in the vibrations of circular membranes, and also that the presentation of the solutions of the equations of the membranes by the method of separation of variable, we illustrate by some physical experiments showing the phenomena in question, we have added Matlab programs, give simulations digital to the solutions found.

Finally, thanks to the modeling of membrane vibrations illustrated in the software Matlab how the modes of vibration of a circular and rectangular membrane evolve in time.

**Keywords :** Bessel functions, transversal oscillations, circulars and rectangulars membranes

# Introduction Générale

Les fonctions de Bessel sont connues depuis le 18<sup>ème</sup> siècle, quand les mathématiciens et les scientifiques ont commencé à décrire les processus physiques par des équations différentielles et ont joué un rôle important dans les applications, principalement dans les problèmes concernant les corps circulaires ou cylindriques.

En effet, la solution des équations de la physique mathématique contenant l'opérateur de Laplace en coordonnées cylindriques conduit par la méthode classique de la séparation des variables à l'équation

$$x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x \frac{\partial y}{\partial x} + (x^2 - p^2)y = 0 \quad (0.1)$$

qui sert l'équation de Bessel [6].

L'équation de Bessel a été pour la première fois étudiée par Daniel BERNOULLI dans un travail consacré aux vibrations des chaînes pesantes (Pétersbourg, 1732). BERNOULLI est arrivé au cas particulier de l'équation (0.1) correspondant à  $p = 0$ , et en la résolvant, il a trouvé l'expression de  $J_0(x)$  sous la forme d'une série entière ; en outre, il a remarqué, sans donner de démonstration, que l'équation  $J_0(x) = 0$  a un ensemble infini de solutions réelles.

Le travail suivant dans lequel on trouve des fonctions cylindriques est celui de Leonhard EULER (Pétersbourg, 1738). Considérant le problème des vibrations d'une membrane circulaire, Euler est arrivé à l'équation (0.1) pour des valeurs entières  $p = n$ . Résolvant cette équation, il a trouvé pour les  $n$  entiers l'expression de  $J_n(x)$  sous la forme d'une série suivant les puissances de  $x$  et dans les travaux suivant, il a étendu cette expression au cas des valeurs arbitraires de l'indice  $p$ . En outre, Euler a démontré que, pour les  $p$  égaux à un entier augmenté de  $\frac{1}{2}$ , les fonctions  $J_p(x)$  s'expriment à l'aide des fonctions élémentaires, il a remarquer, sans donner de démonstration, que pour  $p$  réel la fonction  $J_p(x)$  admet un ensemble infini de zéro réels et donné une représentation intégrale de  $J_p(x)$ .

Enfin, dans un travail datant de 1769 EULER a donné pour les cas  $p = 0$  et  $p = 1$  l'expression sous forme de série de la seconde solution de l'équation (0.1) linéairement indépendante de  $J_p(x)$ .

Ainsi, Euler a obtenu les principaux résultats se rapportant aux fonctions cylindriques et à leurs applications en physique mathématique.



L'astronome allemand Friedrich BESSEL, qui étudiait en l'occurrence le mouvement des planètes autour du Soleil, a donné en 1824 des relations de récurrence des fonctions  $J_p(x)$ . Il a obtenu pour les entières  $n$  une nouvelle représentation intégrale de  $J_n(x)$ , démontré que  $J_0(x)$  admet un ensemble infini et établi les premières tables pour  $J_0(x)$ ,  $J_1(x)$ ,  $J_2(x)$ .

Le travail présenté dans ce mémoire les fonctions de Bessel et leur propriétés notamment leurs applications dans le domaine de la physique mathématique, pour résoudre le problème des oscillations libres des membranes.

Dans ce travail nous allons étudier le problème des vibrations des membranes circulaires et rectangulaires, dont les solutions de leurs équations différentielles seront présentées par des fonctions de Bessel.

Dans chaque problème des vibrations, nous allons exposer la méthode de résolution, ainsi que la présentation des solutions, et l'implémentation informatique par l'usage du langage Matlab. Le présent mémoire est organisé comme suit :

Le première chapitre, nous allons présenter les fonctions de base de Bessel et leurs propriétés à savoir l'orthogonalité, relation de récurrence, la forme intégrale et la formule de fourier Bessel.

Dans le deuxième chapitre, nous allons étudier les problèmes de vibration des membranes.

\* Deux problèmes seront étudier :

- Les oscillations des membranes circulaires.
- Les oscillations des membranes rectangulaires

\* Pour chaque type de ces problèmes, nous allons présenter la méthode de résolution analytique, ainsi que l'implémentation en Matlab des solutions obtenus.

Enfin, nous allons terminer par une conclusion et perspective.

# Chapitre 1

## Fonctions de Bessel et leurs propriétés

En mathématiques, et plus précisément en analyse, les fonctions de Bessel découvertes par le mathématicien suisse Daniel BERNOULLI, portent le nom du mathématicien allemand Friedrich BESSEL, qui développa l'analyse de ces fonctions en 1817 dans le cadre de ses études du mouvement des planètes induit par l'interaction gravitationnelle, généralisant les découvertes antérieures de BERNOULLI. Ces fonctions sont des solutions canoniques  $y(x)$  de l'équation différentielle de Bessel voir [3].

Les fonctions de Bessel sont très utiles dans nombreux domaines de pointe de la physique faisant intervenir des équations différentielles délicates à résoudre. Les domaines dans lesquelles nous les trouvons le plus souvent sont la calorimétrie (conduction de la chaleur), la physique nucléaire (physique de réacteurs), et la mécanique des fluides voir [9].

### 1.1 Présentation de l'équation de Bessel

Soit une équation différentielle de second ordre à coefficients variables suivante :

$$z^2 y'' + zy' + (z^2 - p^2)y = 0 \quad (1.1)$$

Où  $p \in \mathbb{R}$  [9].

Cette équation s'appelle équation de Bessel, que l'on rencontre dans le nombreux problème de physique, particulièrement ceux présentant une symétrie cylindrique : problèmes de membranes, oscillations électro-magnétiques dans une cavité cylindrique (comme un fil électrique...).

#### 1.1.1 Résolution de l'équation de Bessel

On peut récrire l'équation (1.1) sous la forme :

$$z \left( \frac{\partial(zy')}{\partial z} \right) + (z^2 - p^2)y = 0 \quad (1.2)$$

L'équation différentielle de Bessel est une équation linéaire d'ordre deux. La solution générale est sous la forme suivante :

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

Où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes ;  $y_1$  et  $y_2$  sont des solutions linéaires indépendantes de l'équation (1.2).

On va chercher la solution de l'équation sous la forme de la série :

$$y = z^p(a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n + \dots) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nz^{n+r} \tag{1.3}$$

Où  $r$  est un paramètre définissant l'ordre de fonction de Bessel .

En posant  $a_0 \neq 0$ , le problème sera de trouver les coefficients  $a_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  et  $p \in \mathbb{R}$ , la fonction  $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_nz^{n+r}$ , sera introduite dans l'équation (1.2). Cherchons ses dérivées :

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)a_nz^{r+n-1}$$

$$\frac{\partial(z y')}{\partial z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)^2z^{n+r-1}$$

En les remplaçant dans l'équation (1.2), on trouve :

$$z \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)^2z^{n+r-1} + (z^2 - p^2)z \sum_{n=0}^{\infty} a_nz^{n+r} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)^2z^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_nz^{n+r+2} - p^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_nz^{n+r} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r)^2z^{n+r} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}z^{n+r} - p^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_nz^{n+r} = 0$$

$$\Leftrightarrow a_0z^r(r^2 - p^2) + a_1z^{1+r}((1+r)^2 - p^2) + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n(n+r)^2 + a_{n-2} - p^2a_n)z^{n+r} = 0$$

En égalant les coefficients de différentes puissances de  $z$  voir [1] , on obtient :

$$z^r : [r^2 - p^2]a_0 = 0$$

$$z^{r+1} : [(r+1)^2 - p^2]a_1 = 0$$

$$z^{r+2} : [(r+2)^2 - p^2]a_2 + a_0 = 0$$

.....

$$z^{r+n} : [(n+r)^2 - p^2]a_n + a_{n-2} = 0$$

Considérons la première égalité :  $[r^2 - p^2]a_0 = 0$ , en faisant  $a_0 \neq 0$  en outre  $a_0 = 1$ , par conséquent  $r^2 - p^2 = 0$ , donc  $r_1 = p$ ,  $r_2 = -p$ .

- Si  $r = p$  :

La deuxième égalité devient :  $a_1(2p+1) = 0$  ce qui implique que :  $a_1 = 0$ , et il vient que tous les coefficients impairs de la série sont nuls.

En effet :

$$((n+p)^2 - p^2)a_n + a_{n-2} = 0, \forall n \geq 2 \implies a_n = \frac{-a_{n-2}}{(n+p)^2 - p^2}, \forall n \geq 2$$

En tenant compte que :  $a_1 = 0, a_1 = a_3 = a_5 = \dots = a_{2k+1} = 0$  c'est-à-dire que les coefficients ayant des indices impairs sont nuls . Sur la base de la formule de récurrence, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
 a_2 &= \frac{a_0}{2(2+2p)} = -\frac{a_0}{2^2(1+p)}; \\
 a_4 &= -\frac{a_2}{4(4+2p)} = (-1)^2 \frac{a_0}{2^4(1+p)(2+p)}; \\
 a_6 &= -\frac{a_4}{6(6+2p)} = (-1)^3 \frac{a_0}{2^6 3!(1+p)(2+p)(3+p)}; \\
 &\dots\dots\dots \\
 a_{2k} &= (-1)^k \frac{a_0}{2^{2k} k!(1+p)(2+p)(k+p)}. \tag{1.4}
 \end{aligned}$$

On remarque que tous les coefficients pairs sont exprimés en fonction de  $a_0$ , on peut prendre alors

$$a_0 = \frac{1}{2^p \Gamma(p+1)} \tag{1.5}$$

La fonction gamma (notée par la lettre grecque  $\Gamma$ ) est une fonction complexe, considérée également comme une fonction spéciale.

En tenant compte de :

$$\Gamma(p+1)(p+1) = \Gamma(p+2); \Gamma(p+2)(p+2) = \Gamma(p+3), \text{ etc...}$$

$$\Gamma(p+1)(p+1)(p+2)\dots(p+k) = \Gamma(p+k+1),$$

On peut écrire pour simplifier (1.4) que :

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{2^{2k+p} k! \Gamma(p+k+1)}$$

En injectant (1.4) dans (1.3), on obtient la première solution de l'équation pour  $p = r$  est notée par  $J_p(z)$  et elle est appelée fonction de Bessel de première espèce d'ordre  $p$  sous la forme suivante :

$$J_p(z) = z^p \left\{ 1 - \frac{z^2}{2(2p+2)} + \frac{z^4}{2.4(2p+2)(2p+4)} - \frac{z^6}{2.4.6(2p+2)(2p+4)(2p+6)} + \dots \right\} \tag{1.6}$$

• Si  $r = -p$

En remplace  $p$  par  $-p$  on note la deuxième solution par  $J_{-p}(z)$  et elle appelée fonction de Bessel de deuxième espèce d'ordre  $-p$

$$J_{-p}(z) = z^{-p} \left\{ 1 - \frac{z^2}{2(-2p+2)} + \frac{z^4}{2.4(-2p+2)(-2p+4)} - \dots \right\} \tag{1.7}$$

**Etude des cas :**

• **Cas 1 :** Si  $p \notin \mathbb{N}$

La solution (1.6) donne à un facteur près la fonction de Bessel d'ordre  $p$ , qu'on note  $J_p(z)$  et qu'on appelle fonction de Bessel de 1 ère espèce.

**Remarque 1.1.**

Pour  $p$  non entier  $J_p(z), J_{-p}(z)$  sont des fonctions linéairement indépendantes.

Et par conséquent :  $y = C_1 J_p(z) + C_2 J_{-p}(z)$  c'est la solution générale de l'équation de Bessel .

↪ Problème de convergence : la suite (1.6) est convergente, pour n'importe quelle valeur de  $z$  (fini), en appliquant le critère de D'Alembert pour les séries entières, on obtient le résultat.

• **Cas 2** : Si  $p \in \mathbb{N}$

Soit  $p = n > 0$ , la solution (1.6) reste valable, mais la solution (1.7) ne l'est pas, car le dénominateur d'un certain facteur du développement (1.7) est nulle. Avec  $p = n \in \mathbb{N}$  la fonction de Bessel est déterminée à l'aide du développement (1.6), en ajoutant le facteur constant  $\frac{1}{2^n n!}$ .

$$\text{i.e : } J_n(z) = \frac{z^n}{2^n n!} \left\{ 1 - \frac{z^2}{2(2n+2)} + \frac{z^4}{2.4(2n+2)(2n+4)} - \frac{z^6}{2.4.6(2n+2)(2n+4)(2n+6)} + \dots \right\} \quad (*)$$

Le terme général de ce développement est :

$$a_n = (-1)^k \frac{z^{n+2k}}{2^n n! 2.4 \dots 2k(2n+2)(2n+4) \dots (2n+2k)} ;$$

$$\text{Ou bien } a_n = \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k} ;$$

Aussi bien que la formule (\*) peut être sous la forme :

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{n!(k+n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k} \quad (1.8)$$

En particulier, pour  $n = 0$

$$J_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \quad (1.9)$$

En particulier, pour  $n = 1$  :  $J_1(z) = \frac{z}{2} - \frac{z^3}{2^4} + \frac{z^5}{2^7} + \dots$

Si en dérivant la fonction  $J_0$  et en comparant le résultat avec la série  $J_1$ , nous voyons sans trop de peine que :  $\frac{d}{dz} J_1(z) = J_0(z)$

Nous trouvons également sans trop de difficulté, la relation suivante :

$$\frac{d}{dz} (J_0(z)) = -J_1(z)$$

### Remarque 1.2.

$J_n(z)$  et  $J_{-n}(z)$  seront linéairement dépendantes.

Pour confirmer celui-ci, considérons la série pour  $J_{-n}(z)$ , et transformons la comme suit :

$$J_{-n}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k-n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}$$

En effet :

On connaît que la fonction gamma, pour les nombres entiers négatifs et nuls, est égale à l'infini. Par conséquent, pour  $k \leq n-1$ ,  $\Gamma(-n+k+1) = \infty$  et la série sera nulle. La sommation peut être débutée de  $k = n$

$$J_{-n}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k-n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}$$

On remplace dans  $J_{-n}(z)$  l'indice  $k$  par  $r = k - n$ , on aura :

$$\begin{aligned} J_{-n}(z) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r+n}}{(r+n)!\Gamma(r+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2r} \\ &= (-1)^n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\Gamma(r+n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2r} \end{aligned}$$

Ètant donné que  $\Gamma(r+1) = r!$

Alors

$$\Gamma(r+n+1) = (r+n)!$$

La dernière série détermine la fonction  $J_n(z)$ .

Par conséquent

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$$

Donc

$J_n(z)$  et  $J_{-n}(z)$  sont linéairement dépendantes.

### Remarque 1.3.

Voici quelques formules de Bessel d'indices :

i.  $J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin(z)$

ii.  $J_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos(z)$

iii.  $J_{\frac{1}{2}}^2 + J_{-\frac{1}{2}}^2 = \frac{2}{\pi z}$

- Pour  $p = n$ , admet une autre solution que  $J_n(z)$  de la forme :

$$K_n(z) = \beta J_n(z) \ln(z) + z^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k z^k \quad (1.10)$$

Telle que (1.10) c'est la fonction de Bessel d'indice  $n$  du deuxième espèce, cette solution devient  $(\infty)$  pour  $z = 0$ , alors l'intégrale générale de l'équation (1.1) pour  $p = n$  est :

$$Y = C_1 J_n(z) + C_2 k_n(z) \quad (1.11)$$

- Précisons la forme de la solution (1.10) pour  $p = n = 0$ , l'équation (1.1) devient :

$$z^2 y'' + z y' + z^2 y = 0 \quad (1.12)$$

D'après ce qu'on a dit l'équation (1.12), admet une des solutions est donnée par la formule (1.9), la deuxième doit être cherchée sous la forme :

$$k_0(z) = \beta J_0(z) \ln(z) + \beta_0 + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \dots$$

Prenant la combinaison linéaire de  $k_0(z)$ , on peut annuler le terme  $\beta_0$ , de plus, supposons que le terme  $\beta$  qui se trouve différent de zéro égal à 1, par la suite la solution doit être trouver sous la forme :

$$k_0(z) = J_0(z) \ln(z) + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \dots$$

En déterminant les coefficients  $\beta_i$ , ( $i \geq 1$ ), on aura :

$$k_0(z) = J_0(z) \ln(z) + \frac{z^2}{2^2} - \frac{z^4}{2^2 4^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{z^6}{2^2 4^2 6^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \dots \quad (1.13)$$

Cette fonction est la fonction de Bessel d'indice zéro de deuxième espèce.

• **Cas 3** : si  $p = \frac{2n+1}{2}$ ,  $n \in N$ ,  $r_1 - r_2 = 2n + 1$

Par suite les solutions (1.6) et (1.7) sont valables, et linéairement indépendantes, car chez l'une le facteur  $z^{\frac{2n+1}{2}}$ , chez l'autre le facteur  $z^{-\frac{2n+1}{2}}$ , par la suite le rapport des deux solutions est différent d'une constante.

En particulier pour  $p = \frac{1}{2}$ , on aura la solution suivante :

$$z^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{z^2}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4.5} - \frac{z^6}{2.4.6.3.5.7} + \dots\right) = \frac{1}{\sqrt{z}} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots\right) = \frac{\sin z}{\sqrt{z}}$$

En multipliant cette solution par le facteur constant  $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ , on obtient la fonction de Bessel

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z$$

D'une manière analogue, pour  $p = \frac{-1}{2}$ , on a :

$$J_{\frac{-1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z$$

Et par suite la solution de l'équation (1.1) pour  $p = \frac{1}{2}$  est de la forme :

$$y = C_1 J_{\frac{1}{2}}(z) + C_2 J_{-\frac{1}{2}}(z)$$

Notons sans le démontrer qu'en général pour  $p = \frac{2n+1}{2}$ , la fonction de Bessel est donnée sous la forme

$$J_{\frac{2n+1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[ P_n\left(\frac{1}{z}\right) \sin z + Q_n\left(\frac{1}{z}\right) \cos z \right]$$

Où  $P_n$  et  $Q_n$  sont des polynômes de  $\frac{1}{z}$ ; de plus on peut indiquer une autre formule pour tout  $n$  entier

$$J_{\frac{2n+1}{2}}(z) = (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} z^{\frac{2n+1}{2}} \left\{ \frac{d^{(n)}}{(z dz)^n} \left( \frac{\sin z}{z} \right) \right\}$$

### Définition 1.1.

Les fonctions de Bessel ou cylindriques jouent un rôle fondamental dans les applications, principalement dont les problèmes concernant les corps circulaires ou cylindrique. on fera une étude détaillée sur les fonctions de Bessel.

Soit l'équation de Bessel :

$$Z_p''(z) + \frac{1}{z} Z_p'(z) + \left(1 - \frac{p^2}{z^2}\right) Z_p(z) = 0 \quad (1.14)$$

( $Z_p(z)$  : indique que la solution de (1.14) est une fonction de  $p$ )

La solution de l'équation (1.14) est une fonction de Bessel définie à un facteur près :

$$J_p(z) = CZ^p \left(1 - \frac{z^2}{2(2p+2)} + \frac{z^4}{2.4(2p+2)(2p+4)} \dots\right) \quad (1.15)$$

- Si  $p = n \in \mathbb{N}$  donc  $C = \frac{1}{2^n \cdot n!}$ , on obtient :

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n} \quad (1.16)$$

- Si  $p \notin \mathbb{N}$  alors  $C = \frac{1}{2^p \Gamma(p+1)}$

Dans ce cas, la fonction de Bessel est :

$$J_p(z) = \frac{z^p}{2^p \Gamma(p+1)} \left\{ 1 - \frac{1}{1!(p+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!(p+1)(p+2)} \left(\frac{z}{2}\right)^4 - \dots \right\}$$

En vertu de la propriété fondamentale de  $\Gamma(z)$  on obtient aussi :

$$J_p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(p+k+1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+p} \quad (1.17)$$

#### Remarque 1.4.

- Pour  $p = n \in \mathbb{N}$ ,  $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$ .
- La série (1.17) est convergente absolument pour n'importe quelle valeur finie de  $z$ .  
(En utilisant le critère de D'Alembert pour les séries entières on le vérifie facilement dont le rayon de convergence).

## 1.2 Equations se ramenant à l'équation de Bessel

Soit l'équation :

$$z^2 y'' + zy' + (k^2 z^2 - p^2)y = 0 \quad (1.18)$$

Telle que  $k$  est une constante non nulle. Introduisons dans (1.18) le changement de variable suivant :  $\xi = kz$ , par suite on aura les dérivées suivantes :

$$y' = \frac{dy}{dz} = \frac{dy}{d\xi} \frac{d\xi}{dz} = k \frac{dy}{d\xi};$$

$$y'' = \frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{d}{dz} \left( \frac{dy}{dz} \right) = \frac{d}{dz} \left( k \frac{dy}{d\xi} \right) = k^2 \frac{d^2 y}{d\xi^2};$$

Alors l'équation (1.18) devient :

$$z^2 k^2 \frac{d^2 y}{d\xi^2} + zk \frac{dy}{d\xi} + (k^2 z^2 - p^2)y = 0$$

D'où

$$\xi^2 \frac{d^2 y}{d\xi^2} + \xi \frac{dy}{d\xi} + (\xi^2 - p^2)y = 0 \quad (1.19)$$

C'est exactement l'équation de Bessel (1.1).

D'après (1.1), la solution de (1.19) est  $y = C_1 J_p(\xi) + C_2 J_{-p}(\xi)$  et puisque  $\xi = kz$ , alors

$$y = C_1 J_p(kz) + C_2 J_{-p}(kz) \quad (1.20)$$



- Si  $p = n \in \mathbb{N}$  :

$$y = C_1 J_n(kz) + C_2 k_n(kz) \quad (1.21)$$

Etudions une catégorie importante d'équations se ramenant à l'équation de Bessel, en introduisant dans (1.1) une nouvelle variable  $t$ , et une nouvelle fonction  $u$  selon les formules

$$\begin{cases} y = t^\alpha u \\ z = \gamma t^\beta \end{cases} \quad (1.22)$$

Où  $\alpha, \beta, \gamma$  sont des constantes, de plus  $\beta, \gamma$  sont non nulles.

On a les dérivées suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dz} &= \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dz} \\ \frac{dt}{dz} &= \frac{1}{\beta\gamma} t^{1-\beta} \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dz} &= \frac{1}{\beta\gamma} t^{1-\beta} \frac{dy}{dt} \\ \frac{d^2 y}{dz^2} &= \frac{d}{dz} \left( \frac{1}{\beta\gamma} t^{1-\beta} \frac{dy}{dt} \right) = \frac{1}{\beta\gamma} t^{1-\beta} \left( \frac{1}{\beta\gamma} t^{1-\beta} \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{1-\beta}{\beta\gamma} t^{-\beta} \frac{dy}{dt} \right) \end{aligned}$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \alpha t^{\alpha-1} u + t^\alpha \frac{du}{dt} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= \alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2} u + \alpha t^{\alpha-1} \frac{du}{dt} + \alpha t^{\alpha-1} \frac{du}{dt} + t^\alpha \frac{d^2 u}{dt^2} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= \alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2} u + 2\alpha t^{\alpha-1} \frac{du}{dt} + t^\alpha \frac{d^2 u}{dt^2} \end{aligned}$$

En remplaçant toutes ces dérivées dans l'équation (1.1), on aura l'équation suivante :

$$t^2 \frac{d^2 u}{dt^2} + (2\alpha + 1)t \frac{du}{dt} + (\alpha^2 - \beta^2 p^2 + \beta^2 \gamma^2 t^{2\beta}) u = 0 \quad (1.23)$$

L'équation (1.1) avait la solution  $y = C_1 J_p(z) + C_2 J_{-p}(z)$

Alors compte tenu de (1.22) on aura :

$$y t^{-\alpha} = u = C_1 t^{-\alpha} J_p(\gamma t^\beta) + C_2 t^{-\alpha} J_{-p}(\gamma t^\beta) \quad (1.24)$$

Lorsque  $p = n$  est un entier positif  $J_{-p}(\gamma t^\beta)$  doit être remplacé par  $k_n(\gamma t^\beta)$ .

L'équation (1.23) est de la forme :

$$t^2 \frac{d^2 u}{dt^2} + at \frac{du}{dt} + (b + ct^m) u = 0 \quad (1.25)$$

Alors

$$\begin{cases} 2\alpha + 1 = a \\ \alpha^2 - \beta^2 p^2 = b \\ \beta^2 \gamma^2 = c \\ 2\beta = m \end{cases} \quad (1.26)$$

On peut inversement trouver pour n'importe quelle équation de la forme (1.25), si les constantes  $c$  et  $m$  ne sont pas nulles, trouver d'après les formules de (1.26)  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $p$  et exprimer l'intégrale générale de (1.25), conformément à la formule (1.24); par la fonction de Bessel.

Si  $m, c$  sont nulles alors l'équation (1.25) est l'équation d'Euler.

Soit le cas particulier de l'équation (1.25) :

$$t \frac{d^2 u}{dt^2} + a \frac{du}{dt} + tu = 0 \quad (1.27)$$

En multipliant l'équation (1.27) par  $t$ , on voit que  $a$  est arbitraire  $b = 0, c = 1, m = 2$  donc les équations (1.26) seront :

$$\begin{cases} 2\alpha + 1 = a \\ \alpha^2 - \beta^2 p^2 = 0 \\ \beta^2 \gamma^2 = 1 \\ 2\beta = 2 \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} \alpha = \frac{a-1}{2} \\ \beta = 1 \\ \gamma = 1 \\ p = \frac{a-1}{2} \end{cases}$$

Alors l'intégrale générale de (1.27) est :

$$u = C_1 t^{\frac{1-a}{2}} J_{\frac{a-1}{2}}(t) + C_2 t^{\frac{1-a}{2}} J_{\frac{a-1}{2}}(t);$$

De plus si  $\frac{a-1}{2} \leq 0$  alors on remplace  $J_{\frac{a-1}{2}}(t)$  par  $k_{\frac{a-1}{2}}(t)$

Pour  $a = 1$ , l'équation (1.27) coïncide avec  $y'' + \frac{1}{z}y' + y = 0$

### 1.3 Présentations graphiques des fonctions de Bessel

$\Leftrightarrow$  Les graphiques des fonctions de Bessel ressemblent à ceux des fonctions sinus ou cosinus mais s'aplanissent parce qu'elles sont divisées par un terme de la forme  $(\sqrt{z})$ . La courbe est donnée dans ce figure la fonction de Bessel de première espèce voir (figure 1.1), représente la fonction de Bessel de deuxième espèce voir (figure 1.2) et donnée également le graphe de fonction de Bessel d'indice fractionnaire voir (figure 1.3).

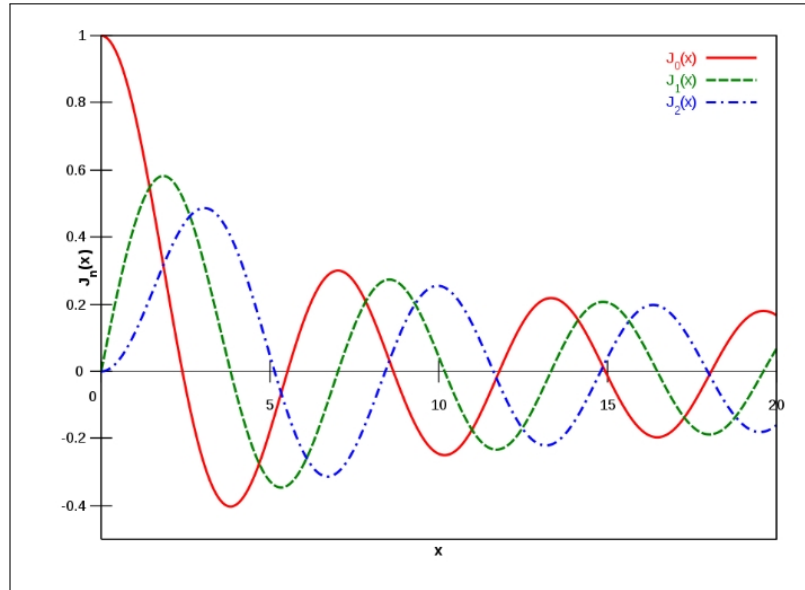


FIGURE 1.1 – fonction de Bessel de première espèce

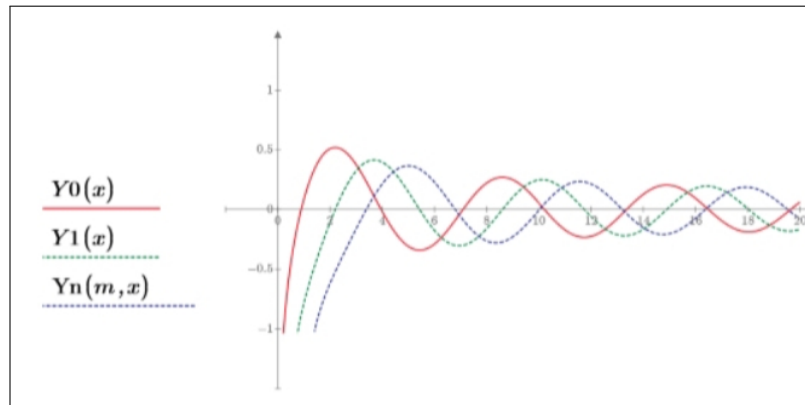


FIGURE 1.2 – fonction de Bessel de deuxième espèce

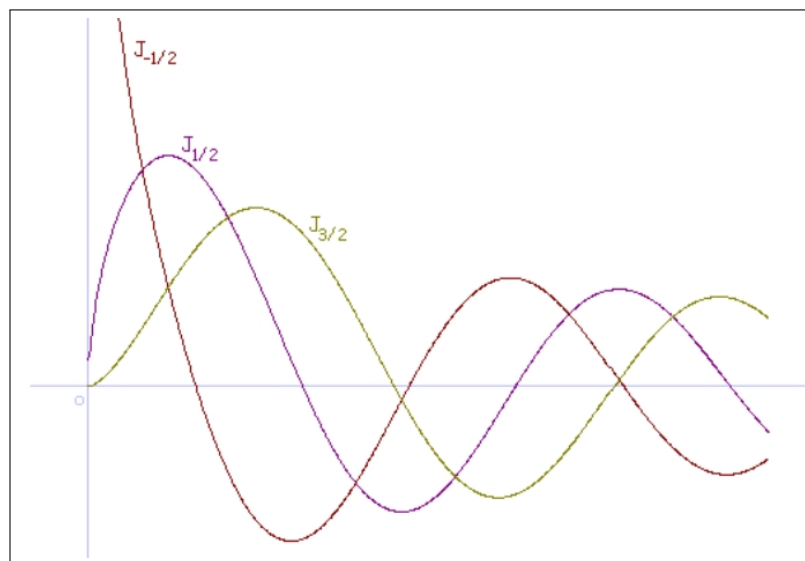


FIGURE 1.3 – fonction de Bessel d'indice fractionnaire

## 1.4 Relations de récurrence entre les fonctions de Bessel

Déduisons à présent quelques relations principales qui existent entre les fonctions de Bessel d'indices différents [1].

Soit :

$$J_p(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+p+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+p} \quad (1.28)$$

$$\text{On a : } \frac{d}{dz} \left\{ \frac{J_p(z)}{z^p} \right\} = \frac{d}{dz} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+p+1) 2^{2k+p}} z^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k \cdot (-1)^k}{k! \Gamma(k+p+1) 2^{2k+p}} z^{2k-1}$$

En remplaçant  $k$  par  $k+1$  et commençant la sommation par  $k=0$ , on obtient :

$$\frac{d}{dz} \frac{J_p(z)}{z^p} = -\frac{1}{z^p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+1+p+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+p+1} = -\frac{J_{p+1}(z)}{z^p}$$

D'où

$$\frac{d}{dz} \left\{ \frac{J_p(z)}{z^p} \right\} = -\frac{J_{p+1}(z)}{z^p} \quad (1.29)$$

$$\begin{aligned} \text{D'autre part } \frac{d}{dz} \frac{J_p(z)}{z^p} &= \frac{J'_p(z)z^p - pz^{p-1}J_p(z)}{z^{2p}} = \frac{J'_p(z)}{z^p} - p \frac{J_p(z)}{z^{p+1}} \\ &\Rightarrow \frac{d}{dz} \frac{J_p(z)}{z^p} = -\frac{J_p(z)}{z^{p+1}} \\ &\Rightarrow J'_p(z) = p \frac{J_p(z)}{z} - J_{p+1}(z) \end{aligned}$$

On a la formule suivante :

$$J'_p(z) = -J_{p+1}(z) + \frac{p}{z} J_p(z) \quad (1.30)$$

En particulier  $J'_0(z) = -J_1(z)$ .

Divisons les deux membres de la formule (1.29) par  $z$  :

$$\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \frac{J_p(z)}{z^p} = -\frac{J_{p+1}(z)}{z^{p+1}}$$

Appliquons cette règle plusieurs fois ; on obtient la formule suivante valable pour tout  $m \in \mathbb{N}$

$$\frac{d^{(m)}}{(zdz)^m} \frac{J_p(z)}{z^p} = (-1)^m \frac{J_{p+m}(z)}{z^{p+m}} \quad (1.31)$$

• Considérons le produit  $z^p J_p(z)$  :

On a :

$$\frac{d}{dz} z^p J_p(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k 2(k+p)}{k! \Gamma(k+p+1)} \frac{z^{2p+2k-1}}{2^{p+2k}}$$

Or  $\Gamma(p+k+1) = (p+k)\Gamma(p+k)$  ;

$$\text{Alors } \frac{d}{dz} z^p J_p(z) = z^p \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+1+p-1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+p-1} = J_{p-1}(z) z^p$$

Donc

$$\frac{d}{dz} z^p J_p(z) = z^p J_{p-1}(z) \quad (1.32)$$

D'autre part on a :

$$\frac{d}{dz} z^p J_p(z) = p z^{p-1} J_p(z) + z^p J'_p(z) = z^p J_{p-1}(z)$$

Avec  $J'_p(z) = -\frac{p J_p(z)}{z} + J_{p-1}(z)$

Alors

$$J'_p(z) = J_{p-1}(z) - \frac{p J_p(z)}{z} \tag{1.33}$$

Divisons les deux membres de la formule (1.32) par  $z$  :

$$\frac{1}{z} \frac{d}{dz} J_p(z) z^p = z^{p-1} J_{p-1}(z)$$

Appliquant plusieurs fois cette formule nous arrivons à une formule générale pour tout  $m \in \mathbb{N}$

$$\frac{d^{(m)}}{(z dz)^m} J_p(z) z^p = z^{p-m} J_{p-m}(z) \tag{1.34}$$

En combinant les deux formules (1.30) et (1.32) on obtient :

$$\frac{2p}{z} J_{p+1}(z) = J_{p+1}(z) + J_{p-1}(z) \tag{1.35}$$

Dans le cas où  $p = \frac{2n+1}{2}$ , ( $n \in \mathbb{N}$ ) ; On sait que  $J_p(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+p+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+p}$

Pour  $p = \frac{1}{2}$ , on a :  $J_{\frac{1}{2}}(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \frac{1}{2})} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k + \frac{1}{2}}$

Mais

$$\Gamma\left(k + \frac{3}{2}\right) = \left(k + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) = \left(k + \frac{1}{2}\right) \left(k - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(k - \frac{1}{2}\right) = \left(k + \frac{1}{2}\right) \dots \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2k+1) \dots 3 \cdot 1}{2^{k+1}} \sqrt{\pi},$$

Alors

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{k! 2^k 1 \cdot 3 \dots (2k+1)} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2^{-\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{k2 + \frac{1}{2}}}{(k2+1)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z.$$

Alors  $J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z.$

En générale pour tout  $m$  entier on a ;

$$J_{\frac{2m+1}{2}}(z) = (-1)^m \sqrt{\frac{2}{\pi}} z^{\frac{2m+1}{2}} \left\{ \frac{d^{(m)}}{(z dz)^m} \left( \frac{\sin z}{z} \right) \right\}$$

Aussi on a :

$$J_{-\frac{2m+1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} z^{\frac{2m+1}{2}} \left\{ \frac{d^{(m)}}{(z dz)^m} \left( \frac{\cos z}{z} \right) \right\}$$

## 1.5 Orthogonalité des fonctions de Bessel est leurs racines

On a vu quelques équations se ramenant à l'équation de Bessel de la section 1.2. Parmi ses équations on a l'équation :

$$z^2 y'' + zy' + (k^2 z^2 - p^2)y = 0 \quad (1.36)$$

Cette équation admet comme solution la fonction de Bessel  $J_p(kz)$

$$i.e : y'' + \frac{1}{z}y' + \left(k^2 - \frac{p^2}{z^2}\right)y = 0$$

En posant  $t = kz$ , l'équation se réduit à l'équation de Bessel, donc la solution est la fonction de Bessel  $J_p(kz)$ .

$$\frac{d^2}{dz^2}J_p(kz) + \frac{1}{z}\frac{d}{dz}J_p(kz) + \left(k^2 - \frac{p^2}{z^2}\right)J_p(kz) = 0$$

En multipliant par  $z$ , on aura voir[11] :

$$\frac{d}{dz} \left[ z \frac{d}{dz} J_p(kz) \right] + \left( k^2 z - \frac{p^2}{z} \right) J_p(kz) = 0 \quad (1.37)$$

Supposons que  $p \geq 0$ , ( $p \in \mathbb{R}^+$ ) ; et en prenant deux valeurs distinctes de  $k$ ,  $k_1 \neq k_2$  :

$$\frac{d}{dz} \left[ z \frac{d}{dz} J_p(k_1 z) \right] + \left( k_1^2 z - \frac{p^2}{z} \right) J_p(k_1 z) = 0 \quad (1.38)$$

$$\frac{d}{dz} \left[ z \frac{d}{dz} J_p(k_2 z) \right] + \left( k_2^2 z - \frac{p^2}{z} \right) J_p(k_2 z) = 0 \quad (1.39)$$

Multiplions (1.38) par  $J_p(k_2 z)$ , et (1.39) par  $J_p(k_1 z)$  et faisant la soustraction on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left( z \frac{d}{dz} J_p(k_1 z) \right) J_p(k_2 z) - \frac{d}{dz} \left( z \frac{d}{dz} J_p(k_2 z) \right) J_p(k_1 z) + \\ + (k_1^2 - k_2^2) z J_p(k_1 z) J_p(k_2 z) = 0 \end{aligned}$$

Intégrons la formule obtenue par rapport à  $z$  sur un intervalle fini  $(0, l)$  :

$$\begin{aligned} \int_0^l \left\{ J_p(k_2 z) \frac{d}{dz} \left( z \frac{dJ_p(k_1 z)}{dz} \right) - J_p(k_1 z) \frac{d}{dz} \left( z \frac{dJ_p(k_2 z)}{dz} \right) \right\} dz + \\ + (k_1^2 - k_2^2) \int_0^l z J_p(k_1 z) J_p(k_2 z) dz = 0 \end{aligned} \quad (1.40)$$

Comme :

$$J_p(k_2 z) \frac{d}{dz} \left( z \frac{dJ_p(k_1 z)}{dz} \right) - J_p(k_1 z) \frac{d}{dz} \left( z \frac{dJ_p(k_2 z)}{dz} \right) = \frac{d}{dz} \left\{ z \frac{dJ_p(k_1 z)}{dz} J_p(k_2 z) - z \frac{dJ_p(k_2 z)}{dz} J_p(k_1 z) \right\}$$

Alors (1.40) sera :

$$\left\{ z \frac{dJ_p(k_1 z)}{dz} J_p(k_2 z) - z \frac{dJ_p(k_2 z)}{dz} J_p(k_1 z) \right\}_0^l + (k_1^2 - k_2^2) \int_0^l z J_p(k_1 z) J_p(k_2 z) dz = 0$$

Comme :  $\frac{d}{dz}(J_p(kz)) = kJ'_p(kz)$ .

Alors

$$\{zk_1J'_p(k_1z)J_p(k_2z) - zk_2J'_p(k_2z)J_p(k_1z)\} + (k_1^2 - k_2^2) \int_0^l zJ_p(k_1z)J_p(k_2z) dz = 0$$

D'où

$$l \{k_1J'_p(k_1l)J_p(k_2l) - k_2J'_p(k_2l)J_p(k_1l)\} + (k_1^2 - k_2^2) \int_0^l zJ_p(k_1z)J_p(k_2z) dz = 0 \quad (1.41)$$

Pour  $l = 1$  on a :

$$k_1J'_p(k_1)J_p(k_2) - k_2J'_p(k_2)J_p(k_1) + (k_1^2 - k_2^2) \int_0^1 zJ_p(k_1z)J_p(k_2z) dz = 0 \quad (1.42)$$

On peut démontrer que pour  $z = 0$ ,

$$zk_1J'_p(k_1z)J_p(k_2z) - zk_2J'_p(k_2z)J_p(k_1z) = 0$$

### Remarque 1.5.

La fonction  $J_p(z)$  n'admet aucun racine complexe.

En effet (Raisonnant par l'absurde)

Supposons que  $J_p(z)$  admet une racine  $z = a + ib$ ; ( $a \neq 0$ );

$$J_p(a + ib) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(p+k+1)} \left(\frac{a+ib}{2}\right)^{2k+p} \quad (*)$$

Tout les coefficients du développement de (\*), sont réels alors  $J_p(z)$  doit avoir une autre racine  $z = a - ib$  ( $a \neq 0$ ).

Posons  $k_1 = a + ib$ ,  $k_2 = a - ib$ , ( $k_1 \neq k_2$ ) dans la formule (1.42).

On a  $\int_0^1 zJ_p(k_1z)J_p(k_2z) dz = 0$ , les composantes  $J_p(k_1z)$ ,  $J_p(k_2z)$  sont imaginaires conjugués, alors

$$zJ_p(k_1z)J_p(k_2z) > 0 \quad (\text{contradiction})$$

Supposons maintenant que  $a = 0$ , i.e :  $k_1 = ib$ ,  $k_2 = -ib$ , on a :

$$J_p(ib) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+p+1)} \left(\frac{ib}{2}\right)^{2k+p} = (ib)^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\Gamma(p+k+1)} \frac{b^{2k}}{2^{2k+p}} \quad (**)$$

La formule (\*\*) ne s'annule pas, car ces facteurs sont tous positifs, alors  $J_p(z)$  ne possède aucune racine complexe, et même purement imaginaire.

### Résultat

• La fonction  $J_p(z)$  admet un nombre infini de racine réel positives.

Si  $z = k_1$  et  $z = k_2$  sont deux racines réelles positives de l'équation  $J_p(lz) = 0$  avec  $k_1 \neq k_2$ , alors d'après (1.41) on a :

$$\int_0^l zJ_p(k_1z)J_p(k_2z) dz = 0 \quad (1.43)$$

La formule (1.43) représente la condition d'orthogonalité de fonction de Bessel. D'après le théorème de Rolle  $J'_p(z)$  doit avoir une infinité de racines réelles positives et si  $k_1, k_2$  deux racines réelles positives distinctes de l'équation

$$J'_p(zl) = 0 \quad (1.44)$$

On obtient la même chose :  $\int_0^l z J_p(k_1 z) J_p(k_2 z) dz = 0$ .

D'après Cas 1 et Cas 2, pour le cas général, considérant l'équation

$$\alpha J_p(zl) + \beta J'_p(zl) = 0 \quad (1.45)$$

Où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des nombres réels. Soit  $z = k_1$  et  $z = k_2$  sont deux racines de l'équation (1.45), on obtient :

$$\begin{cases} \alpha J_p(k_1 l) + \beta J'_p(k_1 l) = 0 \\ \alpha J_p(k_2 l) + \beta J'_p(k_2 l) = 0 \end{cases}$$

Il vient que :

$$\int_0^l z J_p(k_1 z) J_p(k_2 z) dz = 0$$

• Rappelons des deux résultats connus

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} \left( \frac{J_p(z)}{z^p} \right) = -\frac{J_{p+1}(z)}{z^p} \\ \frac{d}{dz} (z^{p+1} J_{p+1}(z)) = z^{p+1} J_p(z) \end{cases} \quad (1.46)$$

La première de ces formules, montre qu'entre deux racines consécutives de  $J_{p+1}(z)$ , il y'a exactement une seule racine de  $J_p(z)$ .

La seconde démontre qu'entre deux racines consécutives de  $J_p(z)$ , il y'a exactement une seule racine de  $J_{p+1}(z)$ .

Soient  $a, b$  deux plus petites racines de  $J_p(z)$ ,  $J_{p+1}(z)$  prenant en considération que  $z = 0$ , est une racine de  $z^{p+1} J_{p-1}(z)$ , en appliquant à la deuxième formule de (1.46), le théorème de Rolle ; alors  $J_p(z)$  doit avoir une racine à l'intérieur de  $(0, b)$  i.e :  $a < b$ . Alors on dit que la plus petite racine de  $J_p(z)$  plus proche de l'origine que celle de  $J_{p+1}(z)$ .

En remarquant que  $z^{-p} J_p(z)$  est une racine de  $zy'' + (2p+1)y' + zy = 0$ .

Par conséquent,  $\frac{J_p(z)}{z^p}$  et  $\frac{d}{dz} \left( \frac{J_p(z)}{z^p} \right)$  ne peuvent avoir des racines positives communes donc, il en est de même pour  $J_p(z)$  et  $J_{p+1}(z)$ .

Alors, il est nécessaire que l'on sache calculer l'intégrale :

$$\int_0^l z J_p^2(zk) dz$$

Où  $z = k$  est une solution de l'équation  $\alpha J_p(zl) + \beta J'_p(zl) = 0$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ).

On a deux cas à distinguer :

**cas1** : Lorsque  $z = k$ , est une racine de  $J_p(zl) = 0$

Considérant  $k_2 = k$ , et posons  $k_1$  comme variable qui tendre vers  $k$ .

D'après la formule (1.41)

$$(k_1 + k) \int_0^l z J_p(k_1 z) J_p(k_2 z) dz = \frac{lk J'_p(kl) J_p(k_1 l)}{k_1 - k}$$



Lorsque  $k_1 \rightarrow k$ , on tombe sur une forme indéterminée (F-I).  
En résolvant cette (F-I), on aura :

$$2k \int_0^l z J_p^2(kz) dz = l^2 k J_p^2(kl)$$

Donc

$$\int_0^l z J_p^2(kz) dz = \frac{l^2}{2} J_p^2(kl) \quad (1.47)$$

En vertu le fait que :  $J'_p(kz) = -J_{p+1}(kz)$ , car  $J_p(kl) = 0$

On a

$$\int_0^l z J_p^2(kz) dz = \frac{l^2}{2} J_{p+1}^2(kl) \quad (1.48)$$

**cas2 :**

Cas où  $z = k$  est la racine de  $J'_p(zl) = 0$

On obtient :

$$\int_0^l z J_p^2(kz) dz = -\frac{l^2}{2} J_p^{\prime 2}(kl) J_p(kl) \quad (1.49)$$

$$\text{Or } J_p''(kl) + \frac{1}{kl} J_p'(kl) + \left(1 - \frac{p^2}{k^2 l^2}\right) J_p(kl) = 0$$

$$\text{Et comme } J_p'(kl) = 0, J_p''(kl) = \left(\frac{p^2}{k^2 l^2} - 1\right) J_p(kl)$$

Alors

$$\int_0^l z J_p^2(kz) dz = \frac{1}{2} \left(l^2 - \frac{p^2}{k^2}\right) J_p^2(kl) \quad (1.50)$$

• Si  $p > 0$  et  $p > -1$  les racines de  $J_p(z)$  sont réelles. En outre, il suit immédiatement du développement de la fonction  $J_p(z)$ , contenant seules des puissances paires, que les racines de  $J_p(z)$  sont deux à deux égales en valeur absolue et opposées en signe voir [14].

Considérant le développement asymptotique de la fonction de Bessel :

$$J_p(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + o(z^{-\frac{3}{2}});$$

Ou bien

$$J_p(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[\cos\left(z - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + o(z^{-1})\right];$$

Quand  $z$  s'éloigne le long de l'axe réel positif, le seconde terme entre crochets tend vers zéro, quand au premier il passe un nombre infini de fois de  $-1$  à  $+1$ , il résulte que  $J_p(z)$  possède un nombre infini de racines réelles. Mais de la formule

$$J_p(-z) = \exp(ip\pi) J_p(z)$$

qui découle directement du développement (1.7) de la fonction  $J_p(z)$ , on voit que les zéros de  $J_p(z)$  sont disposés d'une manière symétrique par rapport à l'origine des coordonnées. Il découle du développement asymptotique de la fonction  $J_p(z)$  une formule approchée des zéros de  $J_p(z)$  :

$$\eta_k^p \approx \frac{3\pi}{4} + p\frac{\pi}{2} + k\pi^1 \text{ d'autant plus exacte que } |k| \text{ est plus grand.}$$

## 1.6 Fonction génératrice de la fonction de Bessel

Soit la fonction analytique de la variable complexe  $t$  :

$$f(z, t) = e^{\frac{z}{2}(t-\frac{1}{t})} \tag{1.51}$$

Les points singuliers essentiels de (1.51) sont  $t = 0$ ,  $t = \infty$  et par suite la fonction (1.51) est développable en série de Laurent<sup>1</sup>, dans tout le plans complexe  $t$ .

$$f(z, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z)t^n \tag{1.52}$$

Montrons que  $a_n(z)$  sont des fonctions de Bessel [11].

En effet : nous avons la représentation intégrale suivante par intégral curviligne :

$$a_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_0} u^{-n-1} e^{\frac{1}{2}z(u-\frac{1}{u})} du \tag{1.53}$$

$l_0$  est un contour fermé contournant l'origine dans le sens positif.  
Posons  $u = \frac{z}{2t}$ ,  $z$  est une valeur fixe non nulle ( $z \neq 0$ ) ;

Alors

$$\begin{aligned} a_n(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{l_0} \frac{1}{2^n} z^n \frac{1}{t^{n+1}} e^{t-\frac{z^2}{4t}} dt \\ \Rightarrow a_n(z) &= \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{z}{2}\right)^n \int_{l_0} t^{-n-1} e^{t-\frac{z^2}{4t}} dt \end{aligned}$$

Nous pouvons représenter  $e^{-\frac{z^2}{4t}}$  sur le contour  $l_0$  par une série entière uniformément convergente par rapport à  $t$  :  $e^{-\frac{z^2}{4t}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{z^{2k}}{2^{2k}t^k}$ .

En remplaçant cette expression dans la formule précédente, on obtient :

$$a_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k} \int_{l_0} t^{-n-k-1} e^t dt$$

- Si  $n + k < 0$ , alors  $t = 0$ , n'est pas un point singulier de la fonction sous le signe somme, d'où il vient que  $\int_{l_0} t^{-n-k-1} e^t dt = 0$  ;
- Si  $n + k \geq 0$ , alors le résidu de la fonction sous le signe somme au point  $t = 0$ , est  $\frac{1}{(n+k)!}$ , alors pour  $n$  positif on a

$$a_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k} ;$$

D'où

$$a_n(z) = J_n(z)$$

Par conséquent, si on remplace  $t$  par  $(-\frac{1}{t})$  dans (1.52), on aura  $a_{-n}(z) = J_{-n}(z)$ , alors

$$e^{\frac{z}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^n \tag{1.54}$$

On appelle donc la fonction  $f(z, t) = e^{\frac{z}{2}(t-\frac{1}{t})}$  la fonction génératrice de  $J_n(z)$ .

---

1. Simultanément à pierre Laurent (1813,1854), ce résultat a été obtenu en 1841 par K.Weierstass qui ne le publia néanmoins qu'en 1894. On rencontre des séries de la forme (1.43) dans un article de L.Euler (1748).

## 1.7 Forme intégrale des fonctions de Bessel

La fonction génératrice dans (1.54), peut être utilisée pour trouver une représentation intégrale d'une fonction de Bessel  $J_n(z)$  [7].

La première étape est de mettre  $t = e^{i\varphi}$  dans (1.54), ce qui donne :

$$e^{iz \sin \varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) e^{in\varphi}, \text{ tels que } z, \varphi \in \mathbb{R}.$$

$$\cos(z \sin \varphi) = J_0(z) + \sum_{n=1}^{+\infty} J_n(z) \cos n\varphi + \sum_{n=-\infty}^{-1} J_n(z) \cos n\varphi$$

$$\sin(z \sin \varphi) = \sum_{n=1}^{+\infty} J_n(z) \sin n\varphi + \sum_{n=-\infty}^{-1} J_n(z) \sin n\varphi$$

En tenu compte de  $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$ , on obtient :

$$\begin{cases} \cos(z \sin \varphi) = J_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(z) \cos 2n\varphi \\ \sin(z \sin \varphi) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(z) \sin(2n-1)\varphi \end{cases} \quad (1.55)$$

La formule (1.55) représente le développement des fonctions en série de Fourier, d'où

$$\begin{cases} J_{2n}(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(z \sin \varphi) \cos 2n\varphi \, d\varphi, \quad n = 0, 1, \dots \\ J_{2n-1}(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(z \sin \varphi) \sin(2n-1)\varphi \, d\varphi, \quad n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (1.56)$$

De même on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(z \sin \varphi) \cos(2n-1)\varphi \, d\varphi &= 0 \\ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(z \sin \varphi) \sin 2n\varphi \, d\varphi &= 0 \end{aligned}$$

On peut écrire la formule qui réunit les deux formules (1.56) :

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\varphi - z \sin \varphi) \, d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(z \sin \varphi) \cos n\varphi \, d\varphi + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(z \sin \varphi) \sin n\varphi \, d\varphi$$

Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a la représentation intégrale :

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\varphi - z \sin \varphi) \, d\varphi, \quad (n = 0, 1, \dots), \text{ avec } (z \in \mathbb{R}) \quad (1.57)$$

A l'aide du principe, du prolongement analytique, nous pouvons affirmer que cette formule (1.57) est aussi valable pour  $(z \in \mathbb{C})$ , tennat compte de la partié de la fonction sous le signe somme, nous pouvons écrire cette formule comme suit :

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\varphi - z \sin \varphi) \, d\varphi \quad (1.58)$$

On peut aussi écrire cette formule comme suit :

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n\varphi - z \sin \varphi)} \, d\varphi \quad (1.59)$$

Remarquons que la formule (1.57) n'est pas valable si  $n \notin \mathbb{N}$ , dans ce cas, on peut indiquer une formule plus compliquée pour  $p$  quelconque :

$$J_p(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\varphi - z \sin \varphi) d\varphi - \frac{\sin p\varphi}{\pi} \int_0^\infty e^{-p\varphi - zsh\varphi} d\varphi^3 \quad (1.60)$$

où  $sh\varphi = \frac{e^\varphi - e^{-\varphi}}{2}$ .

Cette formule est valable pour des valeurs de  $z$  à droite de l'axe imaginaire. Appliquant la formule (1.52), on faisant usage de l'égalité :

$$e^{\frac{1}{2}a(t-\frac{1}{t})} e^{\frac{1}{2}b(t-\frac{1}{t})} = e^{\frac{1}{2}(a+b)(t-\frac{1}{t})}$$

On a :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(a+b)t^n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(a)t^k \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(b)t^k$$

Multiplions les séries entières à droite et regroupons les termes en  $t^n$  :

$$J_n(a+b) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_n(a)J_{n-k}(b) \quad (1.61)$$

Cette formule exprime le théorème d'addition des fonctions de Bessel d'indice entier. Pour  $n = 0$ , on a :

$$J_0\left(\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}\right) = J_0(a)J_0(b) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_k(a)J_k(b) \cos k\alpha \quad (1.62)$$

## 1.8 Formule de Fourier-Bessel

Pour des fonctions arbitraires définies dans l'intervalle  $(0, +\infty)$ , et y vérifiant une condition supplémentaire, il existe une représentation intégrale analogue à l'intégrale de Fourier, mais contenant au lieu de fonctions Trigonométriques, des fonctions de Bessel [11].

Notamment : si  $f(p)$  est continue dans  $(0, +\infty)$  et vérifie les conditions de Dirichlet dans tout intervalle fini, et en outre, si  $\int_0^{+\infty} \rho |f(\rho)| d\rho$  existe, alors  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\rho > 0$  ; au lieu la formule suivante :

$$f(\rho) = \int_0^{+\infty} sJ_n(sp) ds \int_0^{+\infty} tf(t)J_n(st) dt \quad (1.63)$$

Donnons une déduction de la formule (1.63).

Supposons que  $\rho$  est un rayon vecteur, introduisons les coordonnées polaires, et appliquons à la fonction :

$$g(x, y) = f(\rho)e^{in\varphi}, \begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$$

La formule de Fourier, on obtient :

$$g(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(ux+vy)} du dv \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi, \eta)e^{-i(u\xi+v\eta)} d\xi d\eta$$

Posons maintenant  $\begin{cases} \xi = s \cos \alpha ; \\ \eta = s \sin \alpha ; \end{cases} \quad \begin{cases} u = t \cos \beta \\ v = t \sin \beta \end{cases}$

Alors

$$f(p)e^{in\varphi} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{+\infty} t dt \int_{-\pi}^{\pi} e^{ipt \cos(\beta-\varphi)} d\beta \int_0^{+\infty} sf(s) ds \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\alpha} e^{-ist \cos(\alpha-\beta)} d\alpha$$

Introduisons au lieu de  $\beta$ , la variable d'intégration  $\beta'$ , selon la formule :

$\beta - \varphi = \frac{\pi}{2} + \beta'$ , on obtient :

$$f(p)e^{in\varphi} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\infty} t dt \int_{-\frac{3\pi}{2}-\varphi}^{\frac{\pi}{2}-\varphi} e^{-ipt \sin \beta'} d\beta' \times \\ \times \int_0^{\infty} sf(s) ds \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\alpha} e^{-ist \cos(\alpha-\varphi-\beta'-\frac{\pi}{2})} d\alpha.$$

En tenant compte de la périodicité des fonctions trigonométriques, on peut ramener l'intervalle d'intégration à l'intervalle  $(-\pi, \pi)$ . De même, en introduisant la variable  $\alpha'$  au lieu de  $\alpha$ , selon la formule :  $\alpha - \varphi - \beta' = \alpha'$  ;

On aura :

$$f(p)e^{in\varphi} = \frac{e^{in\varphi}}{4\pi^2} \int_0^{\infty} t dt \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ipt \sin \beta' + in\beta'} d\beta' \int_0^{\infty} sf(s) ds \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ist \sin \alpha' + in\alpha'} d\alpha'$$

En vertu de  $J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n\varphi - z \sin \varphi)} d\varphi$ , on obtient la formule (1.63).

### Remarque 1.6.

Dans le cas où  $f$  est donnée dans un intervalle fini  $(0, l)$  au lieu de (1.63), on peut considérer le développement en série suivant des fonctions orthogonales.

## 1.9 Autres types de fonctions de Bessel

### 1.9.1 Fonction de Hankel

Les fonctions de Hankel parfois sont appelées fonctions de Bessel de troisième espèce, sont définies par :

$$H_p^{(1)}(z) = J_p(z) + iY_p(z)$$

$$H_p^{(2)}(z) = J_p(z) - iY_p(z)$$

- $H_p^{(1)}(z)$  est appelée fonction de Hankel de première espèce.
- $H_p^{(2)}(z)$  est appelée fonction de Hankel de deuxième espèce.

### Remarque 1.7. [8]

On peut écrire  $K_p(z)$  sous la forme suivant :

$$K_p(z) = \frac{\pi}{2} i^{p+1} H_p^{(1)}(iz)$$

### 1.9.2 Fonction de Kelvin

Soit l'équation différentielle suivante :

$$z^2 \frac{d^2 y}{dz^2} + z \frac{dy}{dz} - (i(kz)^2 + p^2) y = 0 \tag{1.64}$$

Elle est écrite sous la forme de l'équation de Bessel modifiée avec  $\lambda^2 = ik^2$ , alors sa solution générale est

$$\begin{aligned} y &= CI_p(\lambda z) + DK_p(\lambda z) \\ &= CI_p(i^{\frac{1}{2}}kz) + DK_p(i^{\frac{1}{2}}kz) \end{aligned}$$

Comme  $I_p(z) = (i)^{-p}J_p(iz)$ , on déduit

$$y = C(i)^{-p}J_p(i^{\frac{3}{2}}kz) + DK_p(i^{\frac{1}{2}}kz)$$

Et nous obtenons des fonctions réelles données par les définitions suivantes :

$$ber_p(z) = Re J_p(i^{\frac{3}{2}}z)$$

$$bei_p(z) = Im J_p(i^{\frac{3}{2}}z)$$

$$ker_p(z) = Re(i)^{-p}K_p(i^{\frac{1}{2}}z)$$

$$kei_p(z) = Im(i)^{-p}K_p(i^{\frac{1}{2}}z)$$

**Remarque 1.8.**

$ber_p(z)$   $bei_p(z)$   $ker_p(z)$  et  $kei_p(z)$  sont appelées fonctions de Kelvin.

## Chapitre 2

# Résolutions des problèmes des oscillations des membranes

Dans ce chapitre, nous intéressons à un problème des oscillations membranes circulaires et rectangulaires.

### 2.1 Oscillations Transversales des Membranes

On a vu les équations des ondes sur un plan et dans l'espace, en l'absence de frontières de sorte que l'on n'avait en plus de l'équation différentielle, que des conditions initiales. Les problèmes aux limites pour une équation des ondes sur un plan et dans l'espace sont beaucoup difficiles que dans le cas linéaire. On étudiera le problème aux limites lorsque le domaine étudié est un cercle. On interprétera physiquement l'équation des ondes sur une surface comme l'équation des oscillations transversales d'une membrane.

#### Définition 2.1. [12]

Une membrane est une plaque très mince qui comme dans le cas d'une corde, ne subit que l'action de la tension. La membrane est soumise à une tension uniforme  $T_0$  et se trouve en équilibre dans le plan  $(x, y)$ , et si on se limite au cas où le mouvement a lieu parallèlement à l'axe  $OZ$ . Le déplacement  $u$  du point  $(x, y)$  de la membrane est une fonction de  $x$ , de  $y$  et de  $t$ , qui vérifie une équation différentielle analogue à celle des cordes :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t) \text{ où } a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}} \text{ où } T_0 : \text{ la tension uniforme, } \rho : \text{ le tension superficielle.}$$

Il faut en outre considérer les conditions initiales :

$$(*) \begin{cases} u|_{t=0} = \varphi_1(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \varphi_2(x, y) \end{cases}$$

Aussi, les conditions aux limites que doit satisfaire  $u$  sur le contour  $(c)$  ou  $(c)$  est la frontière de la membrane.

On étudiera que le cas où la membrane est fixée sur le contour  $(c)$ ,

$$i.e. u = 0 \text{ sur } (c) (**)$$

On verra seulement le cas où  $f(x, y, t) = 0$  i.e la membrane ne subit aucune force extérieure.

## 2.2 Membrane Circulaire

Le cas d'une membrane circulaire (voir figure 2.1) donne un exemple concret du développement d'une fonction donnée en fonctions de Bessel. Ceci est très important, car on rencontre ces développements dans plusieurs problèmes de la physique mathématique.

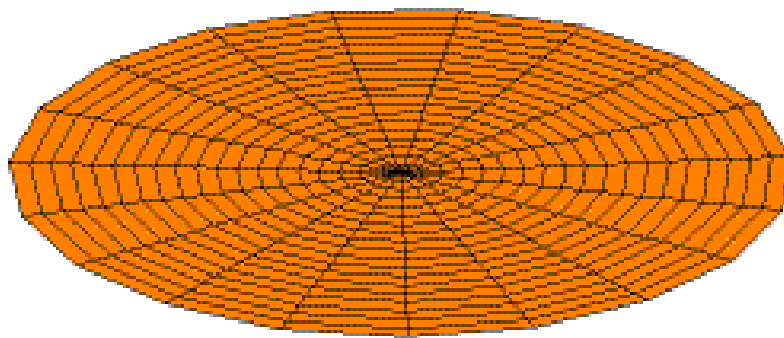


FIGURE 2.1 – Membrane circulaire

On étudiera, les oscillations (vibrations) libres d'une membrane circulaire dont le contour est une circonférence de rayon  $l$ , et dont le centre est à l'origine des coordonnées.

## 2.3 Explication physique sur les vibrations des membranes circulaires

La réalisation d'une expérience avec une membrane en caoutchouc, fixée à un pot de fleur circulaire de diamètre  $298\text{ mm}$ . Le fond du pot de fleur a été ajouté afin de placer un haut-parleur qui excite la membrane par le dessous. Ce haut-parleur est relié à un amplificateur qui, lui-même, est raccordé à un ordinateur (Figure 2.2 et Figure 2.3).

L'un des avantages de cette expérience est de permettre d'exercer une excitation à une fréquence précise et mesurable directement.

L'utilisation d'une membrane et d'un haut-parleur permet aussi l'observation de modes lorsqu'on émet de la musique.

Nous avons essayé de faire vibrer le membrane sans sable et de l'observer à la lumière stroboscopique. Cela nous a permis de voir à l'œil nu certains modes de vibration au ralenti. Le but de cette expérience était aussi de voir la fréquence fondamentale de la membrane. Cela a été un échec, car la membrane était trop grande ce qui implique une fréquence fondamentale très basse (au-dessous de  $5\text{Hz}$ ), donc impossible à produire avec nos moyens, particulièrement au niveau du haut-parleur.

Nous avons aussi relié un synthétiseur à l'amplificateur (Figure 2.2) pour observer les vibrations de la membrane quand nous jouons un morceau de musique voir [2].





FIGURE 2.2 – Photo d’installation de la membrane

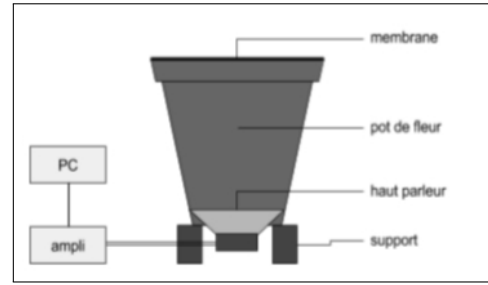


FIGURE 2.3 – Schéma du montage de la membrane

Une autre expérience réalise une variante de la membrane nommée Tonoscope (Figure 2.4). La membrane est plus petite et il ne fonctionne pas grâce un haut-parleur, la particularité est qu’on émet des sons à la voix directement via un tube (Figure 2.5). Le tonoscope est construit à partir de tuyaux de canalisation en pvc de 8,5cm de diamètre interne et d’une membrane provenant d’un ballon de baudruche. Ce dispositif a eu beaucoup de succès à la Fête de la Science puisqu’il permettait aux visiteurs de visualiser les motifs créés par leur propre voir [2].



FIGURE 2.4 – Photo du Tonoscope

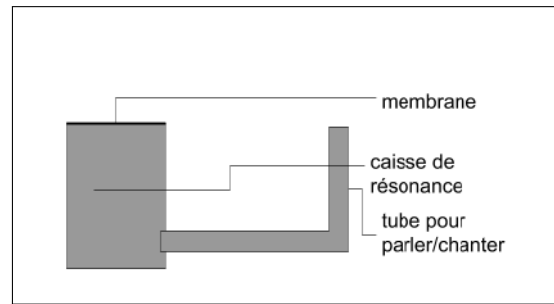


FIGURE 2.5 – Schéma du montage de la membrane

## 2.4 Modélisation des oscillations d'une membrane circulaire

L'équation différentielle régissant le mouvement des différents points de la membrane peut-être obtenue grâce aux outils Mathématiques.

Il existe une infinité de solution particulières de cette équation, appelées "modes propres", où tous les points de la membrane oscillent à la même fréquence. Ces Solutions particulières sont très importantes, car un mouvement quelconque de la membrane peut s'interpréter comme une combinaison des différents modes propres.

Les animations représentant quelques-uns des modes propres de la membrane (figure 2.6), ont été réalisées à l'aide du logiciel Maple.

On constate que certains points de la membrane restent constamment immobiles : ils forment les "lignes nodales".

D'autres points oscillent avec une amplitude maximale : ce sont les "ventres" de vibration.

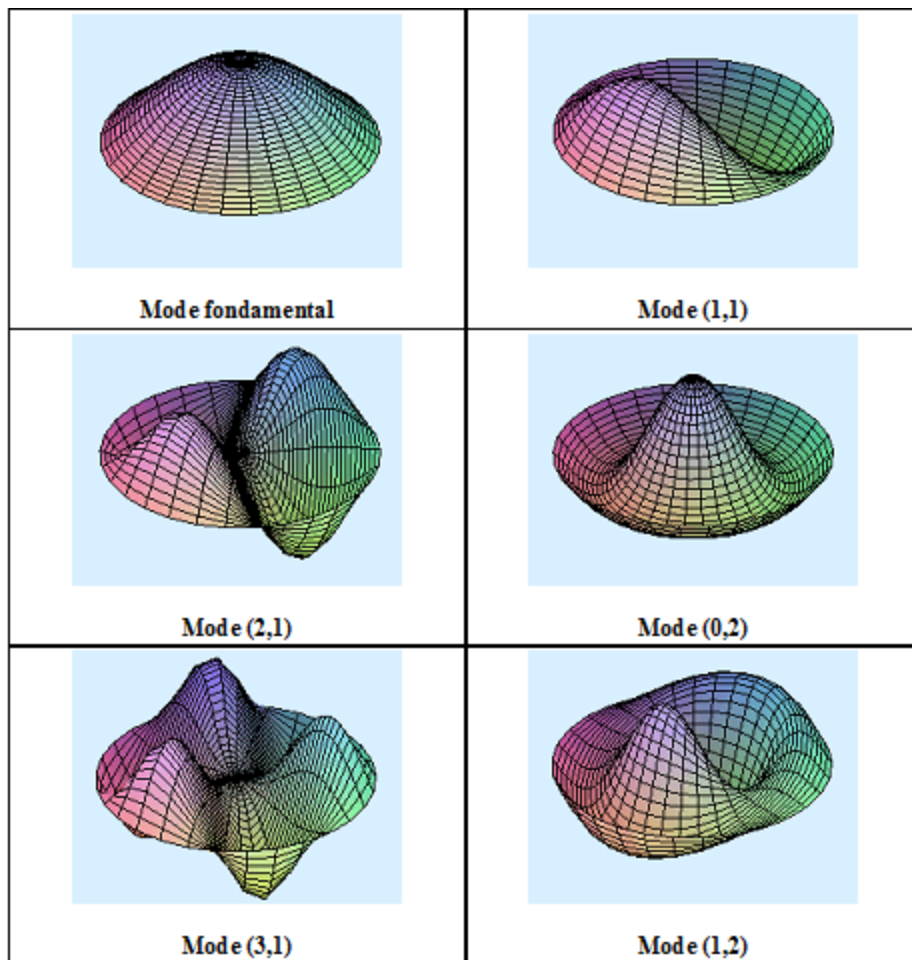


FIGURE 2.6 – Les modes propres de la membrane

## 2.5 Résolution de l'équation de la membrane circulaire

Considérons l'équation de la membrane :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), (a \neq 0) \quad (2.1)$$

Introduisons au lieu des coordonnées  $(x, y)$ , les coordonnées polaires  $(r, \theta)$ , on aura  $u = 0$  pour  $u = l$  voir [12] .

Cherchons la solution de l'équation (2.1) sous la forme :

$$u = (\alpha \cos wt + \beta \sin wt)v \quad (2.2)$$

Où  $v$  est une fonction de  $r$  et de  $\theta$ .

En substituant (2.2) dans (2.1), on aura :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + k^2 v = 0, \quad k = \frac{w}{a} \quad (2.3)$$

Exprimons la formule (2.3) en moyen de  $(r, \theta)$  voir [10] , pour cela il suffit de transformer le laplacien :  $\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$  (\*) en coordonnées polaires :  $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$

Cherchons les dérivées premières de la fonction  $v$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{-y}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \\ &\implies \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{1}{r} \sin \theta; \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{1}{r} \cos \theta; \end{aligned}$$

Cherchons les dérivées secondes de la fonction  $v$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{1}{r} \sin \theta \right) = \\ &= \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \cos^2 \theta + \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\sin^2 \theta}{r} + 2 \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \frac{\sin^2 \theta}{r^2}; \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{1}{r} \cos \theta \right) = \\ &= \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \sin^2 \theta + \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\cos^2 \theta}{r} - 2 \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \end{aligned}$$

Alors :

$$(*) \iff \Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}$$

Par suite, la formule (2.3) sera :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + k^2 v = 0 \quad (2.4)$$

Cherchons les solutions particulières de l'équation (2.4); Posons  $v(r, \theta) = R(r)T(\theta)$ .  
 En suivant la méthode de Fourier (séparation de variables), en substituant  $v(r, \theta)$  dans (2.4);  
 On aura :

$$T(\theta) \left\{ R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) + k^2R(r) \right\} + \frac{1}{r^2}T''(\theta)R(r) = 0$$

Ou bien :

$$\frac{T''(\theta)}{T(\theta)} = -\frac{r^2R''(r) + rR'(r) + k^2r^2R(r)}{R(r)} = -\lambda^2$$

On aura deux équations différentielles :

$$T''(\theta) + \lambda^2T(\theta) = 0 ; \quad (a)$$

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) + \left( k^2 - \frac{\lambda^2}{r^2} \right) R(r) = 0 ; \quad (b)$$

L'équation (a) donne une solution sous la forme :

$$T(\theta) = C \cos \lambda\theta + D \sin \lambda\theta$$

A cause de sens physique du problème,  $v(r, \theta)$  doit être une fonction périodique de  $\theta$ , de période  $2\pi$ , par suite  $T(\theta)$  doit avoir la même propriété, ce qui n'est possible que si  $\lambda = n \in \mathbb{N}$ , i.e.  $\lambda = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$

Désignons les expressions correspondant pour  $T(\theta)$ ,  $R(r)$  par

$$T_0(\theta), T_1(\theta), \dots, T_n(\theta), \dots, R_0(r), R_1(r), \dots, R_n(r), \dots$$

Alors on obtient une infinité de solutions pour (2.1); de la forme :

$$u = (\alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t) (C \cos n\theta + D \sin n\theta) R_n(r) \quad (2.5)$$

Avec  $\omega = ak$ .

Nous savons que  $R_n(r)$  est la solution de l'équation (b) :

$$R_n''(r) + \frac{1}{r}R_n'(r) + \left( k^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) R_n(r) = 0 \quad (2.6)$$

Comme on l'a vu déjà, l'intégrale générale de cette équation est :

$$R_n(r) = C_1 J_n(kr) + C_2 K_n(kr) \quad (2.7)$$

Où  $J_n(kr)$  est la fonction de Bessel d'ordre  $n$  du première espèce et  $K_n(kr)$  est la fonction de Bessel d'ordre  $n$  du deuxième espèce.

Par ailleurs,  $K_n(kr) = +\infty$ , pour  $r = 0$ . Puisque d'après le même sens physique du problème, les solutions qu'on cherche doivent rester bornées en tout point de la membrane parmi ces points l'origine  $r = 0$ . Or pour  $r = 0$ , on a  $K_n(kr) = +\infty$ , par convention on pose  $C_2 = 0$ ; i.e.  $R_n(r) = C_1 J_n(kr)$  sans restreindre la généralité, on prend  $C_1 = 1$  i.e.  $R_n(r) = J_n(kr)$ ; Avec la condition frontière  $J_n(kr) = 0$ ;  $r = l$

$$i.e. J_n(kl) = 0 \quad \boxed{\text{posons } kl = \mu, J_n(\mu) = 0} \quad (2.8)$$

Nous savons que l'équation (2.8) admet une infinité de racines réelles positives ;

$$\mu_1^n, \mu_2^n, \mu_3^n, \mu_m^n, \dots \quad (2.9)$$

Aux quelles correspondre les valeurs :

$$k_1^{(n)}, k_2^{(n)}, k_3^{(n)}, \dots, k_m^{(n)} = \frac{\mu_m^n}{l}, \quad (2.10)$$

Du paramètre  $k$ .

$$\text{On a : } k^2 = \frac{w^2}{a^2}, \text{ les valeurs } w_{m,n} = ak_m^{(n)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots; m = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.11)$$

De fréquence  $w$ .

Les neuf premières racines des six premières fonctions de Bessel sont données dans le tableau suivant :

$J_0$	$J_1$	$J_2$	$J_3$	$J_4$	$J_5$
2.404	3.832	5.135	6.379	7.586	8.780
5.520	7.016	8.417	9.760	11.064	12.339
8.654	10.173	11.620	13.017	14.373	15.700
11.792	13.323	14.796	16.224	17.616	18.982
14.931	16.470	17.960	19.410	20.827	22.220
18.076	19.616	21.117	22.583	24.018	25.431
21.212	22.760	24.270	25.749	27.200	28.628
24.353	25.903	27.421	28.909	30.371	31.813
27.494	29.047	30.571	32.050	33.512	34.983

TABLE 2.1 – les neuf premières racines des six premières fonctions de Bessel

Les racines exposées peuvent être données par la formule suivante :

$$\mu_m^{(n)} = \frac{1}{4}\pi \{2n - 1 + 4m\} - \frac{4n^2 - 1}{\pi(2n - 1 + 4m)} \quad 1;$$

Les solutions particulières de (2.1) peuvent être données sous la forme :

$$\begin{aligned} & (\alpha_{m,n}^{(1)} \cos w_{m,n}t + \alpha_{m,n}^{(2)} \sin w_{m,n}t) \cos n\theta J_n(k_m^{(n)}r) \\ & + (\beta_{m,n}^{(1)} \cos w_{m,n}t + \beta_{m,n}^{(2)} \sin w_{m,n}t) \sin n\theta J_n(k_m^{(n)}r) \quad (m, n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Notons que pour  $\lambda = 0$ , l'équation (a) a comme solution une constante, la deuxième n'est pas valable, car elle n'est pas périodique.

Pour  $n = 0$  cas la formule (2.5) donne la solution :

$$\left( \alpha_{m,0}^{(1)} \cos w_{m,0}t + \alpha_{m,0}^{(2)} \sin w_{m,0}t \right) J_0(k_m^{(0)}r)$$

On peut également la trouver, en remplaçant dans la formule (2.12)  $n = 0$ ; Il ne reste qu'à vérifier les conditions initiales,

$$u|_{t=0} = \varphi_1(r, \theta), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \varphi_2(r, \theta) \quad (2.13)$$

1. Une autre formule approchée a été donnée dans le chapitre I,  $n_k^n \approx \frac{3\pi}{4} + n\frac{\pi}{2} + k\pi$  donne presque les mêmes valeurs.

Considérons les solutions particulières obtenues, et cherchons la fonction  $u$  sous la forme d'une série double,

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \alpha_{m,n}^{(1)} \cos w_{m,n}t + \alpha_{m,n}^{(2)} \sin w_{m,n}t \right) \cos n\theta J_n \left( k_m^{(n)} r \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \beta_{m,n}^{(1)} \cos w_{m,n}t + \beta_{m,n}^{(2)} \sin w_{m,n}t \right) \sin n\theta J_n \left( k_m^{(n)} r \right)$$

Cherchons la dérivée :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} w_{m,n} \left\{ \alpha_{m,n}^{(2)} \cos w_{m,n}t - \alpha_{m,n}^{(1)} \sin w_{m,n}t \right\} \cos n\theta J_n \left( k_m^{(n)} r \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} w_{m,n} \left\{ \beta_{m,n}^{(2)} \cos w_{m,n}t - \beta_{m,n}^{(1)} \sin w_{m,n}t \right\} \sin n\theta J_n \left( k_m^{(n)} r \right)$$

On pose  $t = 0$ , on aura :

$$\begin{cases} \varphi_1(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \alpha_{m,n}^{(1)} \cos n\theta + \beta_{m,n}^{(1)} \sin n\theta \right) J_n \left( k_m^{(n)} r \right) \\ \varphi_2(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} w_{m,n} \left( \alpha_{m,n}^{(2)} \cos n\theta + \beta_{m,n}^{(2)} \sin n\theta \right) J_n \left( k_m^{(n)} r \right) \end{cases} \quad (2.14)$$

En développant  $\varphi_1(r, \theta)$  comme fonction périodique en série de Fourier ; On a :

$$\varphi_1(r, \theta) = \frac{\varphi_0^{(1)}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \varphi_n^{(1)} \cos n\theta + \Psi_n^{(1)} \sin n\theta \right)$$

Où :

$$\begin{aligned} \varphi_n^{(1)} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_1(r, \theta) \cos n\theta \, d\theta, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \\ \Psi_n^{(1)} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_1(r, \theta) \sin n\theta \, d\theta, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

En comparant ce développement avec la première formule de (2.14) on a :

$$\begin{cases} \varphi_0^{(1)} = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{m,0}^{(1)} J_0 \left( K_m^{(0)} r \right) \\ \varphi_n^{(1)} = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{m,n}^{(1)} J_n \left( K_m^{(n)} r \right) \\ \Psi_n^{(1)} = \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{m,n}^{(1)} J_n \left( K_m^{(n)} r \right) \end{cases} \quad (2.15)$$

Si on arrive à déterminer  $\alpha_{m,0}^{(1)}$ ,  $\alpha_{m,n}^{(1)}$ ,  $\beta_{m,n}^{(1)}$ , le problème est résolu.

On a trouvé que  $\varphi_n^{(1)}$ ,  $\Psi_n^{(1)}$  sont des fonctions développées en série de fonctions de Bessel, donnons la généralisation de cet effet ;

Soit  $f(r)$  une fonction peut être développée en série de fonction de Bessel, de la forme :

$$f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_n \left( K_m^{(n)} r \right) \quad (2.16)$$

Supposons que le développement (2.16) existe, et peut être intégrer terme à terme. Démontrer que le système :

$$\left\{ J_n \left( k_1^{(n)} r \right), J_n \left( k_2^{(n)} r \right), J_n \left( k_3^{(n)} r \right), \dots, J_n \left( k_m^{(n)} r \right), \dots \right\} \text{ est orthogonal.}$$

$$i.e. : \int_0^l r J_n \left( k_\tau^{(n)} r \right) J_n \left( k_\sigma^{(n)} r \right) dr = 0 \quad (\tau \neq \sigma) \quad (2.17)$$

En effet, si on remplace dans l'équation (2.16);  $k$  par  $k_\tau^{(n)}$ ,  $k_\sigma^{(n)}$  et  $R_n(r)$  respectivement par  $J_n \left( k_\tau^{(n)} r \right)$ ,  $J_n \left( k_\sigma^{(n)} r \right)$  on aura :

$$\begin{cases} \frac{d^2 J_n \left( k_\sigma^{(n)} r \right)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dJ_n \left( k_\sigma^{(n)} r \right)}{dr} + \left( k_\sigma^{(n)2} - \frac{n^2}{r^2} \right) J_n \left( k_\sigma^{(n)} r \right) = 0 \\ \frac{d^2 J_n \left( k_\tau^{(n)} r \right)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dJ_n \left( k_\tau^{(n)} r \right)}{dr} + \left( k_\tau^{(n)2} - \frac{n^2}{r^2} \right) J_n \left( k_\tau^{(n)} r \right) = 0 \end{cases}$$

En multipliant la première par  $r J_n \left( k_\tau^{(n)} r \right)$ , et la deuxième par  $r J_n \left( k_\sigma^{(n)} r \right)$ , en soustrayant et en intégrant par rapport à  $r$  de 0 à  $l$ , on aura :

$$\begin{aligned} & \left( k_\sigma^{(n)2} - k_\tau^{(n)2} \right) \int_0^l r J_n \left( k_\tau^{(n)} r \right) J_n \left( k_\sigma^{(n)} r \right) dr = \int_0^l \left\{ \frac{d^2 J_n \left( k_\tau^{(n)} r \right)}{dr^2} J_n \left( k_\sigma^{(n)} r \right) - \frac{d^2 J_n \left( k_\sigma^{(n)} r \right)}{dr^2} J_n \left( k_\tau^{(n)} r \right) \right\} \\ & + \int_0^l \left\{ \frac{dJ_n \left( k_\tau^{(n)} r \right)}{dr} J_n \left( k_\sigma^{(n)} r \right) - \frac{dJ_n \left( k_\sigma^{(n)} r \right)}{dr} J_n \left( k_\tau^{(n)} r \right) \right\} dr \\ & \Rightarrow \left( k_\sigma^{(n)2} - k_\tau^{(n)2} \right) \int_0^l r J_n \left( k_\tau^{(n)} r \right) J_n \left( k_\sigma^{(n)} r \right) dr \\ & = \left[ r \frac{dJ_n \left( k_\tau^{(n)} r \right)}{dr} J_n \left( k_\sigma^{(n)} r \right) - \frac{dJ_n \left( k_\sigma^{(n)} r \right)}{dr} J_n \left( k_\tau^{(n)} r \right) \right]_0^l \\ & \text{Comme } J_n \left( k_\sigma^{(n)} l \right) = J_n \left( k_\tau^{(n)} l \right) = 0 \end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^l r J_n \left( k_\tau^{(n)} r \right) J_n \left( k_\sigma^{(n)} r \right) dr = 0$$

Ce qu'il fallait à démontrer.

Multiplions les deux membres de la formule (2.16) par  $J_n \left( k_p^{(n)} r \right)$  et intégrons par rapport à  $r$  de 0 à  $l$ ;

Alors on a; En vertu de (2.17) :

$$\int_0^l f(r) J_n \left( k_p^{(n)} r \right) r dr = A_p \int_0^l J_n^2 \left( k_p^{(n)} r \right) r dr$$

Par suite on peut déterminer les coefficients  $A_m$ ,  $A_m = \frac{\int_0^l f(r) J_n \left( k_m^{(n)} r \right) r dr}{\int_0^l J_n^2 \left( k_m^{(n)} r \right) r dr}$

Alors nous pouvons ainsi déterminer les coefficients  $\alpha$ ,  $\beta$  tels que :

$$\begin{aligned}\alpha_{m,0}^{(1)} &= \frac{1}{2} \frac{\int_0^l \varphi_0^{(1)} J_0(k_m^{(0)} r) r dr}{\int_0^l J_0^2(k_m^{(0)} r) r dr} = \\ &= \frac{1}{2\pi \int_0^l J_0^2(k_m^{(0)} r) r dr} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^l r \varphi_1(r, \theta) J_0(k_m^{(0)} r) dr \\ \alpha_{m,n}^{(1)} &= \frac{\int_0^l r \varphi_n^{(1)} J_n(k_m^{(n)} r) dr}{\int_0^l r J_n^2(k_m^{(n)} r) r dr} = \\ &= \frac{1}{\pi \int_0^l r J_n^2(k_m^{(n)} r) r dr} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^l r \varphi_1(r, \theta) \cos n\theta J_n(k_m^{(n)} r) dr \\ \beta_{m,n}^{(1)} &= \frac{\int_0^l r \psi_n^{(1)} J_n(k_m^{(n)} r) dr}{\int_0^l r J_n^2(k_m^{(n)} r) r dr} = \\ &= \frac{1}{\pi \int_0^l r J_n^2(k_m^{(n)} r) r dr} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^l r \varphi_1(r, \theta) \sin n\theta J_n(k_m^{(n)} r) dr\end{aligned}$$

De la même manière, on détermine  $\alpha^{(2)}$ ,  $\beta^{(2)}$ , il faut simplement remplacer  $\varphi_1$  par  $\varphi_2$  et  $\psi_1$  par  $\psi_2$  dans les formules précédentes, et diviser les expressions par  $w_{m,n}$ .



## 2.6 Membrane Rectangulaire

Nous allons voir le cas d'une membrane rectangulaire (Figure 2.7)

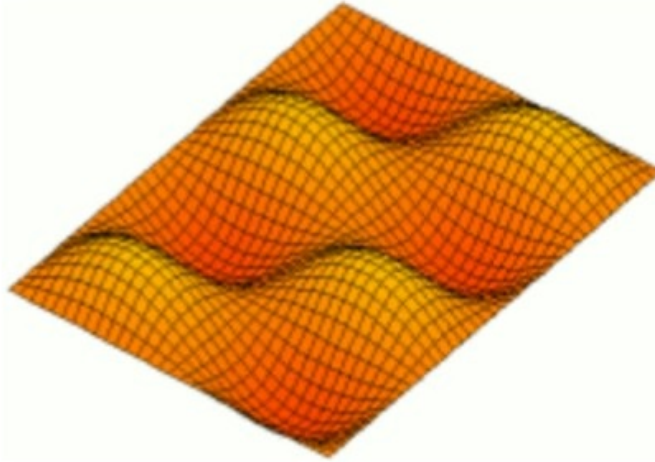


FIGURE 2.7 – Membrane rectangulaire

Le membrane rectangulaire dont le contour est un rectangle de côtés :

$$x = 0, x = l, y = 0, y = m \quad (2.18)$$

sur le plan  $(x, y)$ . On considère qu'il n'y a pas de force extérieure, c'est-à-dire que  $f = 0$  voir [12].

Il faut donc trouver la solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (2.19)$$

qui vérifie les conditions (\*) et (\*\*).

En appliquant à nouveau la méthode des ondes stationnaires (de Fourier), on cherche une solution particulière de l'équation (2.19) sous la forme :

$$(\alpha \cos wt + \beta \sin wt) U(x, y), \quad (2.20)$$

D'où

$$(\alpha \cos wt + \beta \sin wt) U(x, y) = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) (\alpha \cos wt + \beta \sin wt),$$

Et en supposant que :

$$k^2 = \frac{w^2}{a^2}, \quad (2.21)$$

On obtient pour  $U$  l'équation :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + k^2 U = 0.$$

On va chercher maintenant une solution particulière de cette équation sous la forme :

$$U(x, y) = X(x)Y(y), \quad (2.22)$$

Ce qui donne :

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) + k^2X(x)Y(y) = 0,$$

Soit :

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y) + k^2Y(y)}{Y(y)} = -\lambda^2$$

Où  $\lambda^2$  est une constant pour l'instant non déterminée.

On a donc les deux équations :

$$X''(x) + \lambda^2X(x) = 0, \quad Y''(y) + \mu^2Y(y) = 0, \quad (2.23)$$

Où

$$\mu^2 = k^2 - \lambda^2, \quad \mu^2 + \lambda^2 = k^2$$

Les équation (2.23) donnent la forme générale des fonctions  $X(x)$  et  $Y(y)$  :

$$X(x) = C_1 \sin \lambda x + C_2 \cos \lambda x, \quad Y(y) = C_3 \sin \mu y + C_4 \cos \mu y.$$

A partir de la condition :

$$u = 0 \text{ sur } (c)$$

On obtient :

$$U(x, y) = 0 \text{ sur } (c)$$

Et cette dernière condition se décompose à son tour'en :

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \quad Y(0) = 0, \quad Y(m) = 0,$$

D'où l'on voit que  $C_2 = C_4 = 0$ , et si on rejette les facteurs constants  $C_1$  et  $C_3$ , qui ne sont pas nuls, on a :

$$X(x) = \sin \lambda x, \quad Y(y) = \sin \mu y, \quad (2.24)$$

Où

$$\sin \lambda l = 0, \quad \sin \mu m = 0. \quad (2.25)$$

Il résulte des équations (2.25) que  $\lambda$  et  $\mu$  ont une infinité de valeurs :

$$\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\sigma, \dots; \quad \mu = \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\tau, \dots; \quad \lambda_\sigma = \frac{\sigma\pi}{l}, \quad \mu_\tau = \frac{\tau\pi}{m} \quad (2.26)$$

En prenant de façon arbitraire une des valeurs de  $\lambda$  et de  $\mu$  dans les séries (2.26), on obtient la valeur correspondante de la constante  $k^2$  :

$$k_{\sigma,\tau}^2 = \lambda_\sigma^2 + \mu_\tau^2 = \pi^2 \left( \frac{\sigma^2}{l^2} + \frac{\tau^2}{m^2} \right)$$

Et à partir de cette valeur de  $k^2$ , on trouve la valeur correspondante de la fréquence  $w$  à partir de (2.21) :

$$w_{\sigma,\tau}^2 = a^2 k_{\sigma,\tau}^2 = a^2 \pi^2 \left( \frac{\sigma^2}{l^2} + \frac{\tau^2}{m^2} \right). \quad (2.27)$$

En remplaçant  $\lambda$  par  $\lambda_\sigma$  et  $\mu$  par  $\mu_\tau$  dans l'expression (2.20), et en désignant par  $\alpha_{\sigma,\tau}$ ,  $\beta_{\sigma,\tau}$  les valeurs correspondantes de  $\alpha$  et  $\beta$ , on obtient pour l'équation (2.19), une infinité de solutions qui vérifient la condition aux limites (\*\*), sous la forme :

$$(\alpha_{\sigma,\tau} \cos w_{\sigma,\tau} t + \beta_{\sigma,\tau} \sin w_{\sigma,\tau} t) \sin \frac{\sigma\pi x}{l} \sin \frac{\tau\pi y}{m},$$

C'est-à-dire une infinité d'oscillations harmoniques libres (propres) de la membrane, correspondant aux oscillations de la corde.

Les constantes  $\alpha$ ,  $\beta$  sont définies à partir des conditions initiales. En supposant que  $t = 0$  dans les formules :

$$u = \sum_{\sigma,\tau=1}^{\infty} (\alpha_{\sigma,\tau} \cos w_{\sigma,\tau}t + \beta_{\sigma,\tau} \sin w_{\sigma,\tau}t) \sin \frac{\sigma\pi x}{l} \sin \frac{\tau\pi y}{m},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\sigma,\tau=1}^{\infty} w_{\sigma,\tau} (\beta_{\sigma,\tau} \cos w_{\sigma,\tau}t - \alpha_{\sigma,\tau} \sin w_{\sigma,\tau}t) \sin \frac{\sigma\pi x}{l} \sin \frac{\tau\pi y}{m},$$

On obtient à partir de (\*) :

$$u|_{t=0} = \varphi_1(x, y) = \sum_{\sigma,\tau=1}^{\infty} \alpha_{\sigma,\tau} \sin \frac{\sigma\pi x}{l} \sin \frac{\tau\pi y}{m},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \varphi_2(x, y) = \sum_{\sigma,\tau=1}^{\infty} \beta_{\sigma,\tau} w_{\sigma,\tau} \sin \frac{\sigma\pi x}{l} \sin \frac{\tau\pi y}{m}.$$

Ces formules ne sont que les développements des fonctions  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  en séries doubles de Fourier, et les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  sont définis, comme il est aisé de le constater, au moyen des formules :

$$\begin{cases} \alpha_{\sigma,\tau} = \frac{4}{lm} \int_0^l \int_0^m \varphi_1(\xi, \eta) \sin \frac{\sigma\pi\xi}{l} \sin \frac{\tau\pi\eta}{m} d\xi d\eta \\ \beta_{\sigma,\tau} w_{\sigma,\tau} = \frac{4}{lm} \int_0^l \int_0^m \varphi_2(\xi, \eta) \sin \frac{\sigma\pi\xi}{l} \sin \frac{\tau\pi\eta}{m} d\xi d\eta \end{cases} \quad (2.28)$$

ce qui donne la solution du problème considéré.

## 2.7 Mécanisme de déformation membranaire (Terme biologique)

Le trafic membranaire nécessite la génération de transporteurs lipidiques à haute courbure représentés par des tubules et des vésicules. Les mécanismes sont déformés ont attiré beaucoup d'attention récemment. Une avancée majeure a été la démonstration que les interactions directes entre les protéines cytosoliques et les bicouches lipidiques sont importantes dans l'acquisition de la courbure membranaire. Plutôt que d'être entraînée uniquement par la formation d'échafaudages structuraux associés à la membrane, la déformation de la membrane, la déformation de la membrane nécessite une perturbation physique de la bicouche lipidique. Une variété de protéines ont été identifiées qui se lient et déformation de la membrane nécessite une perturbation physique de la bicouche lipidique. Un thème émergent dans ce processus est l'importance des peptides amphipathiques qui pénètrent partiellement dans la bicouche lipidique. des vibrations des membranes circulaires et rectangulaires.

# Conclusion et Perspectives

Nous avons étudié dans ce mémoire, les principaux résultats connus sur la théorie des fonctions de Bessel. On a commencé par une étude plus ou moins détaillée des propriétés essentielles des fonctions de Bessel : relations entre les fonctions de Bessel, l'orthogonalité des fonctions de Bessel, fonction génératrice, forme intégrale des fonctions de Bessel ...

On rencontre souvent les fonctions de Bessel dans les problèmes appliqués de la physique mathématique. A titre d'exemple, nous avons considéré le problème des oscillations des membranes circulaires et rectangulaires qui sont l'un des phénomènes physique. Les plus examinés depuis 1738 (la première étude a été fait par Leonard Euler).

Les méthodes fondamentales de l'étude des propriétés des fonctions de Bessel, sont les méthodes développées dans le chapitre I au moment de la résolution des problèmes des vibrations libres des membranes circulaire et rectangulaire. Nous étions obligés d'appliquer la méthode de séparation des variables connues sous le nome : méthode de Fourier.

Dans ce travail nous avons résolu l'équation des ondes pour des membranes fixées sur un contour, nous avons réalisé quatre programmes : deux en Matlab pour la membrane rectangulaire, un pour membrane circulaire et un programme de l'animation d'une fonction de Bessel.

Comme perspective, une étude sur des membranes déformées aura au intérêt particulier car : la déformation de la membrane nécessite une perturbation physique de la bicouche lipidique. Un thème émergent dans ce processus est l'importance des peptides amphipathiques qui pénètrent partiellement dans la bicouche lipidique. des vibrations des membranes circulaires et rectangulaires.

Alors, nous pensons à revoir le problème des oscillations ainsi que la programmation numérique.

## Annexe A

# Programme informatique Matlab de la membrane rectangulaire

```
% Création d'un maillage qui représente la membrane

x=linspace(0,2,2);
y=linspace(0,2,2);
[X, Y] = meshgrid(y,x);

% initialisation des constantes

fps = 6.0
dt=1 / fps
N=fps *20;

% taille de la membrane

l=30
m=30

% permet de faire varier le temps

for k = 0 :N-1
t = k*dt;

% solution de l'équation de la membrane rectangulaire calculée pour m=1 et n=1

umn = (2048/5)/(pi^6) * cos(1.25 * pi * sqrt(5) * t) * 0.5 * ((cos(pi * ((1/l) * X - (1/m) * Y)) -
cos(pi * ((1/l) * X + (1/m) * Y))))

% affiche la surface et les axes

surf(X,Y,umn)
axis([0,4,0,2,-0.3,0.3])

% enregistre les images
```

---

```
M=getframe();  
end
```

```
% Affiche le film après avoir fait les calculs et enregistre les images
```

```
movie(M,2,fps)
```

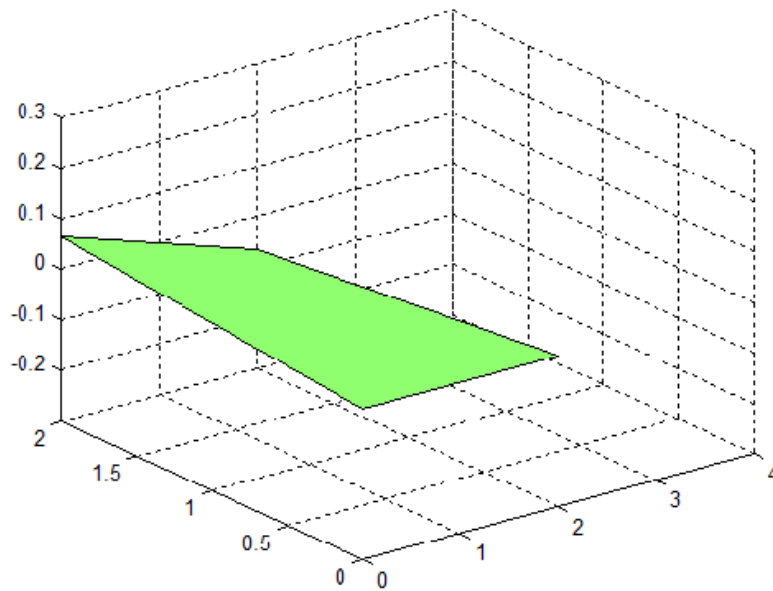


FIGURE A.1 – Membrane rectangulaire mode (30,30)

## Annexe B

# Programme informatique Matlab de déformation de la membrane rectangulaire

Ce programme Matlab illustre comment les modes de vibrations d'une membrane rectangulaire évoluent dans le temps et interagissent les uns avec les autres.

Les plus simples mouvements vibrants correspondent à l'évolution périodique de la soi-disant mode normal, qui ont des déplacements initiaux de la forme  $zz$  où  $l, m$  sont des nombres entiers positifs et la membrane est le rectangle  $x \leq l$  et  $y \leq m$  la valeur de  $c$  est définie comme  $A = (l + m)/2$  le mouvement générale de la membrane est obtenu en exprimant le déplacement initiale comme une superposition de modes normaux (en utilisant une double série de sinus de Fourier) et en superposant leur évolution. la fonction superposition de mode permet à l'utilisateur de tracer une combinaison linéaire des 4 premiers mode normaux ( $0 \leq \sigma, \tau \leq 2$ ) et de voir leur évolution dans le temps. L'utilisation est également autorisé à modifier la largeur et la longueur de la membrane, on peut voir que la dynamique des modes superposés dépend de si la membrane est un carré ou un rectangle.

```

%%% taille de l'assiette
l=1;
m=1;
%%% Forme de mode
sigma=1;
tau=1;
%% Ordre de grandeur
A=1;
%% modes x et y
x=linspace(0,l,100);
y=linspace(0,m,100);
[xx,yy] = meshgrid(x,y);
phix=sin(sigma*pi*xx/l);
phiy=sin(tau*pi*yy/m);
%%% déviation de déplacement
zz=A*phix.*phiy;
mesh(xx,yy,zz)

```

```

%% déplacement/déviation
w=0.1;
figure()
axis([-1/2 1/2 -m/2 m/2 -A A])
view(45,45)
for t=1 :0.1 :100
cla
zz=A*phix.*phiy*sin(w*t);
mesh(xx,yy,zz)
drawnow
end
%%% displacement/deflection
w=0.1;
figure()
for t=1 :0.1 :100
cla;
zz=A*phix.*phiy
mesh(xx,yy,zz)
axis([0 1 0 m -A A])
view(45,45)
drawnow

end

```

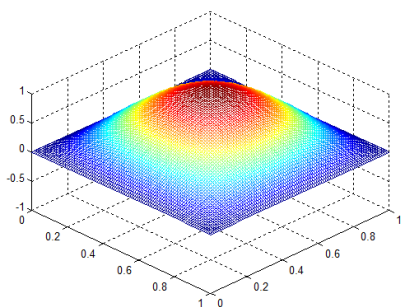


FIGURE B.1 – Membrane rectangulaire fondamentale

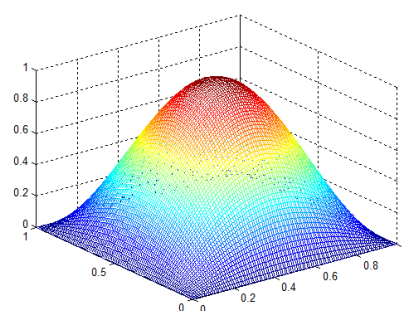


FIGURE B.2 – Membrane rectangulaire mode (1,1)

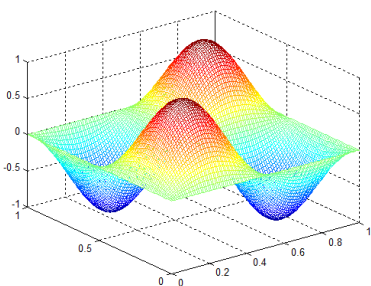


FIGURE B.3 – Membrane rectangulaire mode (2,2)



## Annexe C

# Programme informatique Matlab de la membrane circulaire

Sur un coup de tête, nous écrivons un programme en Matlab pour simuler les modes d'une membrane circulaire 2D vibrant dans l'espace 3D, aussi appelée tambour. Le programme prend les deux variables pour le mode de la membrane (n,m) où : n est le nombre de nœuds radiaux, et m est le nombre de nœuds coucentriques (1= aucun seulement centre et bord, 2=centre, bord, et 1 de plus, etc.) puis génère un tracé de la membrane, en utilisant le lissage laplacien pour créer la surface.

```
function [ ] = drumsolvee(n,m)

    granrad=0.02;
    grantheta=(2*pi)/360;
    changetol = 0.0001

    radmax = 5;
    zmax = 1;

    rad=[0 :granrad :radmax];
    theta=[0 :grantheta :2*pi];

    for a=1 :length(rad)
x( :,a)=rad(a)*cos(theta);
y( :,a)=rad(a)*sin(theta);
movable(1 :length(theta),a)=1;
end

    if (n>0)
for a=1 :n
myangle=(a-1)*(pi./n);
movable(1+round(myangle./grantheta), :)=0;
z(1+round(myangle./grantheta), :)=0;
movable(1+round((pi+myangle)./grantheta), :)=0;
z(1+round((pi+myangle)./grantheta), :)=0;
end
end
```

---

```

    if (m>0)
for a=1 :m+1
myrad=(a-1)*(radmax/m);
movable( :,1+round(myrad./granrad))=0;
z( :,1+round(myrad./granrad))=0;
end
end

    rowstart = 1;

    for b=2 :length(rad)-1
if (m==0 || movable(2,b)==1)
blockstart = rowstart;
for a=1 :length(theta)
if movable(a,b)==1
z(a,b)=blockstart;
end
blockstart=blockstart*-1;
end
end
else
rowstart = rowstart*-1;
end
end
done=0;
while done==0
done=1;
for b=1 :length(rad)
for a=1 :length(theta)
if (movable(a,b) == 1)
div = 3;
if (a==1)
neighbortotal = z(length(theta),b);
else
neighbortotal = z(a-1,b);
end
if (a==length(theta))
neighbortotal = neighbortotal+z(1,b);
end
neighbortotal = neighbortotal+z(a+1,b);
end
if (b>1)
neighbortotal = neighbortotal+z(a,b-1);
else
neighbortotal = neighbortotal+z(mod((a+round(pi./grantheta)-1),length(theta))+1,2);
end
if (b<length(rad)) neighbortotal = neighbortotal+z(a,b+1);

```

---

```

div = div+1;
end
new = neighbortotal./div;
if abs(new-z(a,b))>changetol
done = 0;
end
z(a,b)=new;
end
end
end
end
z=z.*zmax./max(max(abs(z)));
figure(1);
for i=1 :5;
for rho=0 :pi./12 :2*pi; coeff = sin(rho);
clf;
mesh(x,y,coeff.*z);
axis([-radmax radmax -radmax radmax -2*zmax 2*zmax -1*zmax zmax]);
M(1)=getfr
ame();
end
end

```

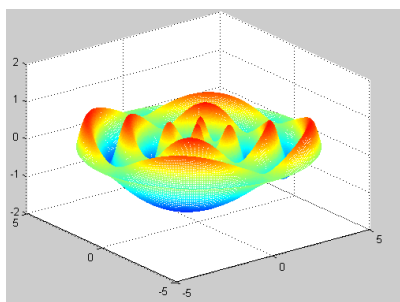


FIGURE 3.1 – Membrane circulaire mode (2,6)

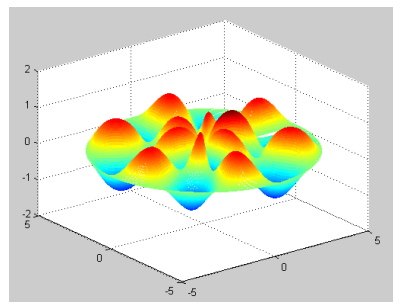


FIGURE 3.2 – Membrane circulaire mode (6,2)

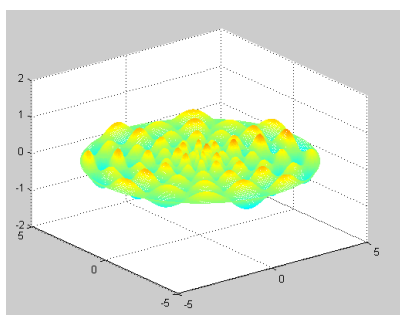


FIGURE 3.3 – Membrane circulaire mode (8,8)

## Annexe A

# Animation d'une fonction de Bessel sous Matlab

```
clear all;

FilmBessel=figure('position', [100 250 300 200]);

% construction de l'animation

M=moviein(15);

% construction d'un maillage dans le plan (x,y)

[x, y]=meshgrid([-10 :0.5 :10]);

for k=1 :15

z=Besselj(0,(k-1)*0.2*sqrt(x.^2+y.^2))

% affiche la surface et les axes

surf(x, y, z);

% mise à l'échelle et apparence de l'axe

axis ( [-10 10 - 10 10 - 0.5 1] );

figure(FilmBessel);

% enregistre les images

M(z,k)=getframe;

end
```

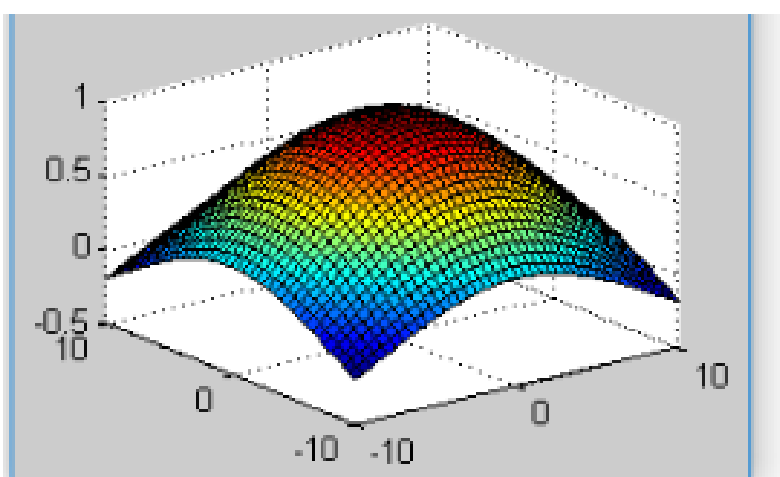


FIGURE A.1 – Animation d'une fonction de Bessel

# Bibliographie

- [1] A.ABBASSOV et K.BADDARI. Equations de la physique mathématique appliquées, 2009, OPO Alger.
- [2] BASKEVITCH, François. L'élaboration de la notion de vibration sonore : Galilée dans les Discorsi. Revue d'Histoire des Sciences, 2007-2, Tome *n*60.
- [3] A. Cuyt. Brigitte Verdonk. Vigdis Brevik Petersen. Haakon Waadeland William B. Jones, Handbook of Continued Fractions for Special Functions, London, 2008.
- [4] Maxime Fouillat. Le Son et La Matière, ou comment visualiser un son. Martin Beaujon, 2017.
- [5] H.Hochstard, les fonctions de la physique mathématique, Masson et Cie, 1973.
- [6] M.LAVRENTIEV et B.CHABAT. Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe. Editions Mir, Moscou, 1972.
- [7] H.MERAD. Fonction de Bessel et applications à la résolution d'un problème de physique mathématique, 2018/2019.
- [8] A.NIKIFOROV. V.OUVAROV, Fonctions spéciales de la physique mathématique, Office publications universitaires, 1983.
- [9] N.PISKOUNOV. Calcul différentiel et intégral T2. Editions Mir, Moscou, 1980.
- [10] H.Reinhard. Equations aux dérivées partielles (introduction). DUNOD, 1991.
- [11] V.SMIRNOV. Cours de mathématiques supérieures T3. Edition Mir Moscou, 1969/1976.
- [12] V.SMIRNOV. Cours de mathématiques supérieures T2. Edition Mir Moscou, 1979.
- [13] MURRY R. SPIEGEL. Théorie et applications de l'analyse. SÉRIE SCHAUM, *4<sup>ème</sup> tirage*, 1984.
- [14] G.N.WATSON. A treatise on the theory of Bessel functions, Cambridge University Press, 1992(1996).