



*République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Akli Mohand Oulhadj (Bouira)*

*Faculté des Sciences et des Sciences Appliquées
Département de Génie Mécanique*

Spécialité : Energétique

PROJET DE FIN D'ETUDES

THEME

**Effet du nombre du Prandtl sur la convection
thermo-capillaire dans une enceinte ouverte**

Présenté par :
Sadoun Fairouz

Zinafi Nawal

Encadreur :
Mr : S. Hamimid

Remerciement

On remercie en premier lieu, le grand dieu pour le courage, la patience et la santé qui nous a donné pour compléter ce modeste travail.

Un grand merci pour nos parents, pour leurs encouragements et leur soutien moral durant tous notre cursus.

Nous tenons également à exprimer nos profonds remerciements à notre professeur à l'Université de Bouira et notre encadreur Mr Hamimid, pour ses orientations et ses conseils précieux.

Nos vifs remerciements s'adressent aussi au membre de jury qui vont examiner et évaluer notre travail.

Enfin, merci à tous ceux et celles qui ont contribué la réalisation de notre mémoire, de près ou de loin, sans oublier notre chère collègue Mouloud pour son aide et son soutien.

Sommaire

Sommaire.....	I
Listes des figures et des tableaux.....	III
Nomenclature.....	IV
Résumé.....	VI
Introduction générale.....	21
Chapitre I: revue bibliographique	
I.2 Revue bibliographique :.....	3
I.3 Conclusion.....	9
Chapitre II: Formulation mathématique	
II .1 Introduction	9
II.2 Configuration physique et formulation mathématique	9
II.2.1.Hypothèses simplificatrices	9
II.3 Hypothèses de Boussinesq	10
II.4 Equation de conservation	10
II.4.1 Equation de continuité	10
II.4.2 Equation de la quantité de mouvement	11
II.4.3 Equation de l'énergie.....	11
II.5 Condition aux limites	12
II.6 A dimensionnement des équations gouvernantes et conditions aux limites	13
II.6.1 Forme adimensionnelles des équations	15
II.6.2 Conditions aux limites adimensionnelles	15
II.7 Conclusion.....	16
Chapitre III: résolution numérique	
III.1 Introduction.....	17
III.2.1 Terme transitoire.....	18
III.2.2 Terme convectif.....	19
III.2.3 Terme diffusif.....	19
III.3 Schémas numériques	22

III.4 Méthode et algorithme de calcul	24
III.4.1 Couplage vitesse pression (algorithme SIMPLER).....	24
III.4.2 Résolution du système linéaire des équations discrétisées.....	33
III.4.3 Validation de modèle.....	33

Signet non défini.

Chapitre VI: résultat et discussion

IV.1 introduction.....	38
IV.2 Résultats et interprétation.....	38
IV.3 Etude de l'effet du nombre de Marangoni	38
IV.3.1. Champs dynamiques et champs thermique.....	40
IV.4. Etude de l'effet du nombre de Prandtl	41
Conclusion.....	45

Conclusion générale.....46

ANEXE

a) Le schéma aux différences centrées (CDS).....	47
b) Schéma Upwind (UPS).....	48
c) Schéma Hybride (HDS).....	49
d) Schéma à loi de puissance (PLDS).....	50
e) Le schéma exponentiel.....	51

REFERENCES.....52

Liste des figures

Figure II 1: Geometrie de probleme.....	09
Figure III 1: Interpolation pour le gradient de ϕ	19
Figure III 2: Diffusivité pour un matériau composite.....	21
Figure III 3 : Algorithme SIMPLER.....	31
Figure III 4: Application ligne par ligne de la méthode TDMA.....	35
Figure III 5 : Evolution des lignes de courant (gauche) et des isothermes (droite) pour $Ma=100$, $Ra=1080$ et $Pr=0.054$	37
Figure IV 1 : évolution des lignes de courant et les isothermes pour $Ra=10000$ et $Ma=0$ a 10000	40
Figure IV 2 : nombre de Nusselt pour différentes Ma	42
Figure IV 3 : Evaluation des lignes de courant (gauche) et les isothermes (droit) pour $Ra= 10^4$ et $Ma = 100$ pour différentes valeurs de Pr	42
Figure IV 4 : nombre de Nusselt pour différentes Pr	45

Liste des tableaux

Tableau III 1: Discrétisation des équations de conservation pour les problèmes de convection -diffusion à 2d :	18
Tableau III 2 : Expression des coefficients convectifs	19
Tableau III 3 : Expression des coefficients diffusifs	20
Tableau III 4 : Expressions de la fonction $A(P)$ pour les différents schémas	24
Tableau IV1 : valeurs moyennes du nombre de Nusselt pour différent nombre de Ma	41
Tableau IV2 : valeurs moyennes de nombre de Nusselt pour différent nombre de prandtl.....	44

Nomenclature Symboles

g	: Accélération de la pesanteur (m/s^2)
λ	: Conductivité thermique du fluide ($W/m \cdot K$)
L	: Largeur dimensionnelle de l'enceinte (m)
H	: Hauteur dimensionnelle de l'enceinte(m)
u, v	: Composantes des vitesses (m/s)
U, V	: Composantes adimensionnelles des vitesses
T	: Température dimensionnelle (K)
T_c	: Température chaude (K)
T_f	: Température froide(K)
P	: Pression adimensionnelle
h	: Coefficient du transfert convectif ($w/m^2 \cdot k$)
x, y	: Coordonnées d'espace dimensionnelles
X, Y	: Coordonnées d'espace adimensionnelles
C_p	: Chaleur spécifique à pression constante [$J/kg \cdot K$]

Symboles Grecs

γ	: la dépendance de la tension de surface à la température
L	: longueur caractéristique
A	: Diffusivité thermique (m^2/s)
β	: Coefficient d'expansion thermique à pression constante (K^{-1})
Γ	: Coefficient de diffusion
ν	: Viscosité cinématique (m^2/s)
μ	: Viscosité dynamique ($kg/m \cdot s$)
ρ	: Masse volumique (kg/m^3)
Θ	: Température adimensionnelle
ΔT	: Différence de température

Indices Supérieurs

- * : Valeur estimée
- ' : Valeur corrigée

Indices Inférieurs

- i, j : ième et jème composantes
- e, w, n, s : Évalué sur la face correspondante du volume de contrôle entourant le P
- N, S, E, W : Évalué sur le point correspondant entourant le point P
- c : Surface chaude
- f : Surface froide

Nombres Adimensionnels

- Ra : Nombre de Rayleigh
- Gr : Nombre de Grashof
- Nu_x : Nombre de Nusselt
- Pr : Nombre de Prandtl
- Ma : Nombre de Marangoni

Résumé

Le travail que nous avons présenté dans ce mémoire concerne l'étude de la circulation d'air par convection naturelle en régime laminaire. Cette circulation est causée par des variations de température qui provoquent une variation de masse volumique du fluide créant ainsi des mouvements de la convection naturelle dans une cavité carrée. Le fluide est supposé être un fluide newtonien. Les murs de droite et de gauche sont maintenus à des températures uniformes T_c et T_f , respectivement, et sont telles que $T_c > T_f$. Les limites supérieures et inférieures sont considérées adiabatiques.

Le modèle mathématique décrivant le présent problème a été développé se basant sur l'équation de Navier Stokes et de l'énergie. Le modèle élaboré permet de déterminer les lignes de courant, les vitesses selon l'axe des x et des y et aussi les profils de température sont présentés.

Abstract

The work that we presented before in this thesis concerns the study of air circulation by natural convection in laminar regime. This circulation is caused by variations in temperature which cause a variation in the density of the fluid thus creating natural convection movements in a square cavity. The fluid is assumed to be a Newtonian fluid. The right and left walls are kept at uniform temperatures T_c and T_f , respectively, and are such that $T_c > T_f$. The upper and lower limits are considered adiabatic. The mathematical model describing the present problem was developed based on the equation of Navier Stokes and energy. The model developed allows determining the current lines, the speeds along the x and y axis and also the temperature profiles are presented.

ملخص

ويتعلق العمل الذي قدمناه في هذا الموجز بدراسة دوران الهواء بواسطة الحمل الحراري الطبيعي في نظام لامبينيار. يحدث هذا الدوران بسبب تغيرات درجة الحرارة التي تسبب تغييراً في كثافة السوائل مما يؤدي إلى حدوث حركات الحمل الحراري الطبيعي في تجويف مربع. ومن المفترض أن يكون السائل نيوتنيان يتم الحفاظ على الحوائط اليمنى واليسرى في درجات حرارة مرتفعة ومنخفضة الموحدة على التوالي. تعتبر الحدود العليا والسفلى حدوداً دياباتية. تم تطوير النموذج الرياضي الذي يصف هذه المسألة الحالية استناداً إلى معادلة نافير و الطاقة. حيث يتيح النموذج المتقدم بتحديد الخطوط الحالية، والسرعات وفقاً لمحور x و y وكذلك ملفات تعريف درجة الحرارة.

Introduction Générale

Introduction Générale

Introduction générale

L'étude du transfert de chaleur par convection est un domaine de recherche depuis plusieurs décennies. Il existe une grande quantité de publications scientifiques consacrées à l'étude de convection naturelle dans les cavités. La plupart des études ayant été généralement menés avec l'eau, l'huile ou l'air comme fluide de base. On sait que les transferts de chaleur par convection peuvent augmenter considérablement en changeant la configuration de l'écoulement ou en augmente les surfaces d'échange entre la paroi et le fluide.

La convection thermique est un des quatre modes (conduction, convection, rayonnement et changement de phase) de transfert de chaleur qui a une importance vitale aussi bien dans le domaine fondamentale que dans les domaines des applications telles que, la climatisation et le chauffage dans le domaine de l'habitat.

On a l'habitude de distinguer deux formes de convection :

- La convection naturelle ou libre : l'échange de chaleur est responsable du mouvement. Le transfert de chaleur provoque le mouvement.
- La convection forcée : il y a projection par un dispositif mécanique des molécules sur le dispositif chauffant. Le mouvement provoque le transfert de chaleur.

Les processus de transfert thermique peuvent être intensifiés également par la modification Des forces de tension superficielle, suite soit à des effets internes (Marangoni), soit par uneUtilisation de substances tensioactives.

En effet, l'effet Marangoni se manifeste lorsqu'il existe un gradient de tension superficielle à l'interface entre deux phase : dans la plupart des situations, une interface liquide-gaz.

La tension superficielle change typiquement due à des variations de concentration d'agent tensioactif, et des variations de température le long de l'interface.

Dans le cas où la tension superficielle varie avec la variation de concentration, l'effetMarangoni est désigné sous le nom d'effet soluto-capillaire. Dans les cas où la tension de surface varie avec la variation de concentration, l'effet Marangoni est désigné sous le nom d'effet thermo-capillaire. Les deux effets peuvent avoir lieu en même temps.

Les écoulements convectifs naturels ou thermo-capillaires suscite un grand intérêt dans les activités de recherche en raison de leur importance dans les phénomènes naturels et aussi dans de nombreuses applications industrielles telles que l'évaporation, le séchage des solutions polymère/solvant, la croissance cristalline, les procédés de bombardement électronique d'un métal liquide, etc.

L'écoulement de liquide le long de l'interface de zones de faible tension superficielle vers les zones de forte tension superficielle porte le nom du physicien italien Carlo Marangoni (1840-1925) qui a décrit ce phénomène pour la première fois dans les années 1870. Depuis l'observation des structures hexagonales par Rayleigh Bénard (1901) qui sont dues non seulement aux effets thermo-gravitaires mais aussi aux effets thermo-capillaires, de nombreuses études ont été menées sur la stabilité des écoulements convectifs d'origine thermo-capillaire. Ces écoulements sont caractérisés par une multitude de mécanismes physiques interactifs et montrent une grande variété de structures régulières ou complexes.

Notre mémoire est scindée quatre chapitres :

Le premier chapitre est consacré une présentation d'une synthèse d'étude bibliographique récente apportée sur ce sujet.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons d'abord la géométrie du modèle physique considéré. Ensuite, écrites sous leurs formes adimensionnelles, les équations modélisantes de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie et leurs conditions aux limites

Le troisième chapitre est consacré à la résolution numérique des équations modélisantes adimensionnelles. Après une brève introduction justifiant le choix de la méthode numérique utilisée qui est celle des volumes finis, le maillage dans sa globalité

Le quatrième chapitre Des exemples de simulation sont présentés analysés et discutés.

En fin nous terminerons cette étude par une conclusion générale sur les aspects positifs et les acquis de la recherche.

Chapitre I

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons une synthèse des travaux concernant la convection naturelle et la convection dans les enclosures et aussi la convection thermo capillaire. Les études que, nous avons répertoriées, sont relatives à plusieurs types de configurations.

Dans certaines configurations, un chauffage est considéré sur les parois verticales ou au niveau de la surface libre. Les résultats présentés mettent en exergue, les paramètres géométriques (forme et rapport d'aspect), les paramètres physiques (les nombres de Prandtl, de Rayleigh et de Marangoni), les méthodes de résolution, calcul bidimensionnel, ainsi que d'autres facteurs.

I.2 Revue bibliographique :

(Convection naturelle, convection dans les enclosures, convection thermo capillaire)

La revue de la littérature concernant la convection naturelle dans les enceintes montre que le sujet reste encore à explorer.

Actuellement la convection naturelle a fait l'objet de plusieurs études théorique, expérimentales et surtout numérique, parmi lesquelles nous présentons quelque unes que nous avons jugée proche dans notre cas.

L'étude de ce phénomène a suscité et suscite encore aujourd'hui l'intérêt de nombreux scientifique et industriels. Les recherches menées dans ce domaine, s'étendent sur un peu plus d'un siècle .un nombre considérable de travaux a été entrepris, suite a la découverte du phénomènes par les expériences de **Bénard** [1]et l'analyse théorique de **Rayleigh** [2]au début de XX ème siècle jusqu'à présent.

Les premiers travaux portant sur la convection naturelle ont été entrepris, dans les années 60 du 20emesiècle, par **Vahl Davis** et **al** [3] et [4]. Ces auteurs ont utilisé la méthode des différences finies pour résoudre le problème de convection naturelle dans une cavité carrée différentielle ment chauffée. Ces études ont eu le mérite de lancer une compétition internationale sur le sujet. Elles ont montré que la distribution de température à mi-hauteur de la cavité est presque linéaire et le gradient thermique vertical tend vers zéro pour les valeurs du nombre de Rayleigh inférieures à 10^4 .

Mébrouk rebhi et **al** [5] ce travail étudié la convection naturelle laminaire dans une enceinte bidimensionnelle à fond non uniforme (sinusoïdal) chauffé par une température constante et uniforme, les parois verticales sont adiabatiques et la paroi supérieure est maintenue à une température constante. Les paramètres dont dépend la structure de la convection naturelle sont : le nombre de Rayleigh qui varie entre 10^3 et 5.10^5 , le rapport d'aspect de la cavité $As=8$, le facteur de forme A (entre 0.10 et 0.20) et le nombre

de Prandtl (celui de l'eau). Les équations gouvernant l'écoulement et le transfert thermique dans la cavité sont discrétisées par la méthode implicite aux différences finies et la méthode des volumes de contrôle. L'adéquation entre les champs des vitesses et de pression est réalisée l'aide de l'algorithme SIMPLE. L'influence des paramètres caractéristiques de la topographie de la surface d'échange (fond sinusoïdal), notamment de l'amplitude d'ondulation et le facteur de forme de la cavité, sur le transfert de chaleur et sur la structure de l'écoulement, est mise en évidence. Les nombres de Nusselt locaux passent par des maximums aux sommets et aux creux et par des minimums entre eux.

La convection naturelle transitoire dans une cavité carrée soumise par le bas à une variation sinusoïdale de la température a été étudiée numériquement par **Lakhal and Hasnaoui** [6] et [7] pour un nombre de Prandtl de 0,72 (air) et pour des nombres de Rayleigh variant de 10^5 à 10^6 . On y montre que si l'on s'intéresse au transfert thermique moyen, le chauffage périodique est avantageux si l'amplitude de l'excitation est grande et si l'intensité de la convection est importante.

Douamna et al. [8] ont étudié numériquement la convection naturelle instationnaire de l'air confiné dans une géométrie répétitive chauffée périodiquement par le bas, la température variant de façon sinusoïdale dans le temps. Les équations qui régissent le système ont été écrites en formulation fonction de courant- vorticité et intégrées à l'aide d'une méthode aux différences finies. La grande dépendance des comportements dynamique et thermique du fluide vis-à-vis des variations de paramètres de contrôle, tels que le nombre de Rayleigh, l'amplitude et la période de la température, a été mise en évidence.

Mobdi et al [9] ont réalisé une étude de convection naturelle dans une cavité carrée, les équations de l'énergie et de la vorticité sont résolues par la méthode ADI (Alternating Direction Implicite méthode) et l'équation de fonction de courant est résolue par la méthode des différences finies.

Rayen et al [10] ont adopté la convection naturelle qui s'effectue dans une enceinte rectangulaire, les équations sont discrétisées avec la méthode des volumes finis

Pessoet et al. [11] ont étudié analytiquement et numériquement la convection naturelle à de bas nombres de Prandtl et les différences de densité importante dans une cavité carrée de largeur « L », est une cavité bidimensionnelle où les deux parois verticales sont maintenues à des températures différentes « T_c » et « T_h », Les parois sont rigides et imperméables, et des conditions aux limites sans glissement sont imposées aux frontières. Le débit est stationnaire et Le fluide est incompressible, Newton et sa densité est censé être linéairement dépendants de la température dans tous les termes des équations régissant. Les résultats effectués pour les gammes des nombres de Prandtl $0.0071 \leq Pr \leq 7.1$ et le nombre Rayleigh $10 \leq Ra \leq 10^8$ et pour le nombre de Gay-Lussac $0 \leq Ga \leq 2$. L'influence du nombre de Prandtl sur le nombre de Nusselt moyen pour $Ga = 0,3$ et $10^3 \leq Ra \leq 10^5$ est représentée. Les augmentations de nombre de Nusselt que les

augmentations de nombre de Prandtl. En particulier l'effet du nombre de Prandtl est plus évident que le nombre de Rayleigh augmente.

Koca et al. [12] ont étudié numériquement les effets du nombre de Prandtl sur la convection naturelle dans des enclos triangulaire avec un échauffement localisé en bas. La configuration schématique de l'enceinte triangulaire à deux dimensions avec les paramètres importants géométrique Il est un triangle la longueur "L" en bas, et la hauteur du mur vertical "H". La paroi en dessous est en partie chauffée avec "TH" et la paroi inclinée est refroidi avec "Tc ". Paroi verticale est isolée. Le rapport d'aspect de la cavité est définie comme $AR = H / L = 1$. La longueur de la partie chauffée est représentée par "W" et le centre de localisation est "l'écoulement il est considéré stable, laminaire, incompressible et à deux dimensions La variation des propriétés du fluide avec la température et terme de dissipation visqueuse dans l'équation énergétique à été négligé toute, pour lesquels l'approximation de Boussinesq a été valide.

Ganzarolli et Milanez [13] ont étudié la convection naturelle dans des enceintes rectangulaires chauffées au-dessous et symétriquement refroidis par les côtés .le nombre de Rayleigh a été varié de 10^3 a 10^7 et le rapport d'aspect varié de 1 a 9.les influences du nombre de Rayleigh, du nombre de prandtl et de rapport d'aspect sur le mouvement du fluide et sur le transport d'énergie ont été présentées dans leur étude.

Hyunget al. [14], concerne la convection naturelle double diffusive dans un cylindre en rotation dans laquelle l'écoulement est piloté par des flux, de chaleurs horizontaux et des flux de concentrations verticaux, l'influence de la rotation sur la structure globale de l'écoulement a été mise en évidence. Il a aussi prouvé que pour les valeurs moyennes du rapport de flottabilité N, l'écoulement devient fortement dépendant de l'effet de la rotation.

Akrou et al. [15] ont fait une étude numérique de la convection naturelle thermosolutale dans une cavité rectangulaire, les parois horizontales de l'enceinte sont chauffées et refroidies et un gradient de concentration vertical est imposé. L'objectif de leur investigation est d'identifier le régime d'écoulement à dominance thermique ou solutale. Ils ont constaté qu'il est possible d'obtenir plusieurs solutions qui dépendent essentiellement des conditions initiales. Aussi, les résultats révèlent, que pour un fluide stratifié, un transfert de chaleur conductif s'installe au dépend de la convection thermique.

Sarris et autres [16] qui ont effectué une étude numérique de la convection naturelle dans les réservoirs rectangulaires chauffés localement au-dessous. Basé sur des prévisions numériques, les effets du Ra et la géométrie de la source de chauffage et du réservoir sur les structures d'écoulement et le transfert thermique ont été étudiés pour le nombre de Rayleigh dans la gamme 10^2 à 10^7 . Leur étude a indiqué que

l'augmentation de l'intensité de circulation d'écoulement augmente avec une augmentation de longueur de la source de chauffage.

Chu and Churchill [17] qui ont étudié la convection naturelle au sein d'une enceinte rectangulaire bidimensionnelle munie d'une source de chaleur discrète. Avec des parois horizontales thermiquement isolées, une paroi verticale froide isotherme et une source de chaleur installée sur l'autre paroi verticale, ils ont obtenu numériquement la position de la source qui optimise le transfert thermique, en fonction du nombre de Rayleigh. Cette position optimale se trouve près du centre de la paroi verticale, mais glisse légèrement vers le bas à mesure que le nombre de Rayleigh augmente.

Zi-Tao Yu et al. [18] ont étudié par une simulation numérique la dépendance de nombre de Prandtl à la convection naturel en régime laminaire dans un cylindre horizontal de température (T_{out}) avec un cylindre triangulaire interne et coaxial de température (T_{in}) avec $T_{out} < T_{in}$. Toutes les simulations ont été réalisées avec les valeurs des nombres de Prandtl $10^{-2} < Pr < 10^3$ et des nombres de Rayleigh, $Ra = 10^3$, et pour le rapport $AR = R_{out}/R_{in}$ où $AR = 1.2$ et 2.0 . Les résultats montrent que pour les nombres de Prandtl faibles $Pr = 0.03$ les modes d'écoulement et les distributions de température sont complètement différentes de celles pour des nombres de Prandtl élevés, et ils sont presque indépendant du nombre de Prandtl $Pr \geq 0.7$ lorsque, surtout à bas nombres de Rayleigh. Aussi les coefficients de transfert de chaleur pour $Pr = 0.03$ sont légèrement inférieurs à ceux de $0.7 \leq Pr \leq 7$, qui sont plus petits que ceux de $Pr > 7$.

Akrour et al. (2000)[19] ont étudié numériquement la convection à double diffusion dans une enceinte horizontale. La cavité soumise à un gradient de concentration verticale est chauffée différemment au niveau de ses parois horizontales ou verticales. Les équations couplées modélisantes sont discrétisées numériquement par la méthode des volumes finis. La résolution a ensuite été effectuée par la procédure de double balayage (ADI) et le couplage pression-vitesse par l'algorithme SIMPLER. Ils ont considéré l'effet, sur les transferts, du nombre N qui caractérise le rapport des forces de volume d'origine thermique et solutale pour $Pr=7$, $Le=100$ et $A=2$. Leurs résultats montrent que pour les faibles valeurs de N , des cellules convectives dues aux forces thermiques se mettent en place et le transfert devient indépendant de N . Pour des valeurs de N plus élevées, le transfert est diffusif et la stratification stable en concentration supprime l'écoulement. Pour des valeurs intermédiaires de N , le transfert diminue avec l'accroissement de N . Dans la zone de transition, la solution numérique dépend de la condition initiale.

Paolucci et chenoweth [20] ont étudié la convection naturelle dans les enceintes peu profondes avec des parois différentiellement chauffées. Ils ont trouvé que la solution de l'écoulement classique parallèle, précise dans le cœur de la cavité, à la limite de Boussinesq n'existe pas quand les propriétés des variables sont introduites.

L'étude du phénomène d'écoulement thermo capillaire revient au physicien Italien Carlo Giuseppe Matteo Marangoni (1840-1925), ce savant a étudié la diffusion d'un liquide d'une région à une autre, dans le plus grand bassin des jardins des Tuileries à Paris. Il a observé qu'un liquide A diffusé sur un liquide B si la tension de surface de A est inférieure à celle de B ; or cette tension superficielle ne représentait qu'un seul aspect du phénomène qu'on appellera plus tard "effet Marangoni". James Thomson (1822- 1892) a montré qu'un écoulement peut être également engendré lorsque les gradients de tension de surface sont dus à des différences de concentrations. Thomson a formulé d'une manière plus précise les observations faites par Marangoni, et de ce fait, "l'effet Marangoni" est parfois mentionné comme "l'effet Thomson".

Découverte, à la fin du siècle dernier, la convection thermo capillaire a fait l'objet de nombreuses études théoriques. Ce n'est qu'à partir de 1970 que l'on commence à s'intéresser de près aux différents aspects caractérisant cette convection tant au plan théorique [8] qu'au plan expérimental [9]. Ainsi, plusieurs configurations ont été étudiées correspondant principalement à l'élaboration des matériaux.

L'importance du phénomène de la convection thermo capillaire ainsi que ses effets sur la qualité des cristaux produits ont été à l'origine de plusieurs travaux expérimentaux et de simulation numérique pour des fluides ayant des nombres de Prandtl élevés [10, 11, 12].

Villers et Platen [21] utilisent comme fluide de l'acétone ($Pr=4$) dans une cellule de 10 mm de largeur et 30 mm de longueur, pour des hauteurs de fluide de l'ordre du millimètre. Les auteurs parlent de transition entre un état unicellulaire et un état multicellulaire, pour toute hauteur de fluide. Pour les faibles hauteurs, ils observent que l'état stationnaire multicellulaire, persiste quand le gradient de température est augmenté. Par contre, pour les hauteurs plus importantes, on observe une transition vers un état oscillant dans le temps. Les résultats expérimentaux, ont été retrouvés par une résolution numérique par ces Des études phénoménologiques des écoulements thermo capillaires ont été mené par **Kasperski** [22] et **Christopher** [23], sur une vaste gamme des nombres de Marangoni et de Prandtl. A l'aide d'une simulation numérique, en collocation spectrale.

Chebyshev, Kasperski [24] a montré que le nombre de Prandtl a une grande influence sur les régimes de transport de quantité de mouvement du fluide; il a trouvé que les écoulements, à fortes valeurs du nombre de Prandtl, restent diffusifs quant au transport de quantité de mouvement, mais peuvent être fortement convectifs pour le transport de chaleur. Tandis que, pour les faibles valeurs du nombre de Prandtl, des écoulements convectifs sont induits dynamiquement et thermiquement. En outre, il a déterminé la transition

vers l'instationnarité des écoulements à $Pr \leq 10^{-1}$ et $Pr \geq 2$. Cependant la transition n'a pas été observée pour des valeurs de Pr proche de l'unité.

Zebib, G. M. Homsy et E. Meiburg [25], ont étudié numériquement à l'aide de la méthode des différences finies, la structure de l'écoulement thermo capillaire en absence des forces de gravité dans le cas d'une cavité carrée. Ces auteurs ont établi les lois d'échelles, pour différentes grandeurs physiques, sur une large gamme des nombres de Prandtl et pour des valeurs du nombre de Reynolds allant jusqu'à $5 \cdot 10^4$. Ils ont trouvé que la déformation de la surface libre est sensible à la valeur de Pr . Quand $Pr > 1$, une dépression du niveau de la surface libre est observée près de la paroi chaude et une élévation est constatée près de la paroi froide, tandis qu'une élévation secondaire peut être produite près de la paroi chaude quand $Pr < 1$.

Bergeon et al [26] ont étudié la convection thermo capillaire dans le cas des géométries de Bénard, où le gradient de température est normal à la surface libre supérieure. Ces auteurs ont analysé les instabilités convectives produites par les gradients de tension de surface en absence de gravité, phénomène connu sous le nom d'instabilité de Marangoni-Bénard. Ils ont étudié numériquement, à l'aide de la méthode aux éléments spectraux, le cas d'une cavité tridimensionnelle, sur une large gamme du nombre de Pr et de rapports de formes. Ils ont montré que l'écoulement devient instable à partir d'une certaine valeur du nombre de Marangoni (Mac), ils ont également décrit les écoulements rencontrés au-delà de ce nombre critique. La convection Marangoni Bénard a fait l'objet des travaux scientifiques de **Char** [27] et **Jou** [28], qui se sont intéressés à l'étude des instabilités, et les travaux de **H. Bau** [29], qui portent sur l'étude du contrôle de la convection Marangoni.

Peltier et al [30], présentent le mécanisme thermique de la convection thermo capillaire oscillatoire, dans un environnement de gravité nulle pour une cavité rectangulaire peu profonde avec un nombre de Prandtl égale à 6,78. Une simulation numérique, basée sur la méthode des différences finies, a été employée pour résoudre les équations 2D instationnaires. Ces auteurs ont montré que l'instabilité dépendait du couplage temporel entre la structure thermique de l'écoulement et la température à la surface libre. Ils présentent le diagramme de stabilité donnant l'évolution du nombre de Marangoni critique, séparant l'état d'écoulement stationnaire et instationnaire, en fonction du rapport d'aspect pour des valeurs de A comprises entre 2,3 et 3,8. En dehors de cette gamme, les auteurs prédisent le rapport d'aspect critique minimum de l'ordre de 2,3 et le nombre de Marangoni critique de l'ordre de 20 000, et au-dessus des quels la convection stationnaire existe

Nous avons réalisé ci-dessous une synthèse bibliographique sur quelques travaux de la convection qui nous intéressent pour la compréhension de notre problématique. Cependant, il est utile de rappeler certaines informations

Chapitre II

FORMULATION MATHÉMATIQUE

I.1 Introduction :

Nous proposons d'exposer, dans une première partie de ce chapitre, le modèle et les hypothèses simplificatrices physique et mathématique ainsi que les conditions aux limites appropriées. nous donnerons à la fin de cette partie les formes adimensionnelles des équations ainsi que les principaux nombres adimensionnelles utilisés.

II.2 Configuration physique et formulation mathématique :

La géométrie du problème est présentée sur la figure 1. Il s'agit d'une enceinte carrée comme indique au-dessous. Le liquide est supposé être un fluide newtonien. Les murs de droite et de gauche sont maintenus à des températures uniformes T_c et T_f , respectivement, et sont telles que $T_c > T_f$. Les limites supérieures et inférieures sont considéré comme adiabatiques.

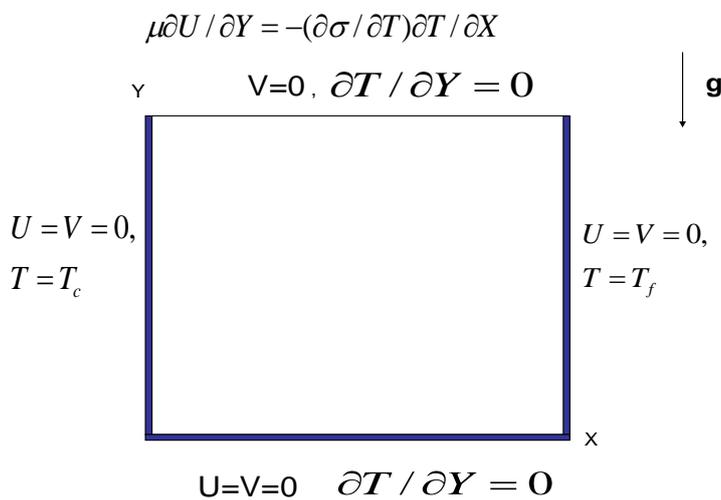


Figure II 1: Geometrie de probleme

II.2.1Hypothèses simplificatrices :

Un certain nombre d'hypothèses simplificatrices nous sera utile dans la modélisation mathématique de notre problème, à savoir :

- ✓ Le fluide est un liquide newtonien, incompressible et satisfaisant à l'approximation de *Boussinesq*.
- ✓ L'écoulement du liquide au sein de la cavité est laminaire et bidimensionnel.
- ✓ L'écoulement est instationnaire.
- ✓ les sources de chaleur interne et la dissipation visqueuse sont négligées.
- ✓ la surface du fluide est supposée parfaite et plane (non déformable), dû au fait que le nombre capillaire $Ca = \Delta\sigma / \sigma(T_0)$ est très faible.

II.3 Hypothèses de Boussinesq :

En 1903, à l'époque même où Rayleigh s'intéresse à la convection, Boussinesq propose une simplification de ces équations de façon à ne conserver que les ingrédients nécessaires et suffisants à la convection thermique. Les hypothèses de Boussinesq consistent à supposer que les différentes propriétés thermodynamiques et de transport du fluide sont indépendants de la pression. Elles supposent aussi que le fluide est incompressible mais il conserve bien entendu le terme de poussée d'Archimède, directement lié à la dilatation ou à la contraction thermique du fluide. Cette approximation est valable lorsque l'écarte la température entre les parois chaudes et les parois froides est inférieure à 30°(Dt≤30).

L'hypothèse essentielle de Boussinesq est la masse volumique (ρ) est constante sauf dans le terme de poussée d'Archimède. L'approximation de Boussinesq est adoptée pour la masse volumique qui est considérée comme constante (égale à sa valeur de référence) dans tous les termes des équations de transfert sauf dans le terme gravitationnel où elle est traitée comme variable en fonction de la température et s'exprime comme suit :

$$(\rho - \rho_0)g = -\rho_0\beta(T - T_0)\rho = \rho_0[1 - \beta(T - T_0)]$$

Où ρ_0 est la masse volumique de référence et β est le coefficient d'expansion thermique à pression constante.

II.4 Equation de conservation :

Pour un écoulement incompressible, les équations qui régissent la conservation de la masse, la conservation de l'énergie et la conservation la quantité de mouvement sont données respectivement par les équations de Navier-Stokes moyennées :

II.4.1 Equation de continuité :

L'écoulement des fluides dans le système est décrit par l'équation de Navier-Stokes (continuité et équations de mouvement). En supposant un flux incompressible, l'équation de continuité peut être exprimée comme ;

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0$$

II.4.2 Equation de la quantité de mouvement :

Le principe de conservation de la quantité de mouvement permet d'établir les relations entre les caractéristiques du fluide lors de son mouvement et les causes qui le produisent. Il indique que « Le taux de variation de quantité de mouvement contenu dans le volume de contrôle est égal à la somme de toutes les forces extérieures qui lui sont appliquées ».

Les équations de la quantité de mouvement pour des fluides newtoniens incompressibles en régime laminaire sont données par les expressions suivantes :

Suivant la direction X :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + V \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + V \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

Suivant la direction Y :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + U \frac{\partial v}{\partial x} + V \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + V \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g\beta(T - T_0)$$

II.4.3 Equation de l'énergie :

Elle est obtenue par l'application du premier principe de la thermodynamique et du principe de conservation de l'énergie.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

Où :

U, v Représentent respectivement les composantes de la vitesse horizontale et verticale selon les directions (x, y),

P Le champ de pression la viscosité cinématique le champ de gravité terrestre,

α La diffusivité thermique,

β est le coefficient d'expansion thermique donné par : $\beta = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)$

ρ_0 étant la masse volumique à la température T_0

II.5 Condition aux limites :

Pour compléter la modélisation de la convection thermo capillaire, des conditions aux limites et initiales sont à associées aux équations de Navier stokes et celle de transfert thermique, elles s'écrivent :

$u = v = T = 0$, pour $t=0$.

▶ au niveau de la paroi verticale chaude : ($x=0$)

$$u = v = 0.$$

$$T = T_c$$

▶ Au niveau de la paroi verticale froide : ($x=L$)

$$u = v = 0.$$

$$T = T_f$$

▶ En paroi horizontale inférieur : ($y=0$)

$$u = v = 0.,$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0$$

➤ Au niveau de la surface libre : ($y=H$)

$$v = 0.$$

$$\mu \frac{\partial u}{\partial y} = -\gamma \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0$$

II.6 A dimensionnement des équations gouvernantes et conditions aux limites :

L'analyse adimensionnelle offre la possibilité de décrire un phénomène l'aide d'un nombre réduit de variables, ce qui simplifie l'approche du problème .les nombres sans dimensions obtenus mettent ainsi en

évidence des concepts plus simples facilitant la description et l'étude du phénomène .pour aboutir à ce résultat, il faut cependant utiliser un a dimensionnement judicieux (correspondant à un comportement physique), facilitant l'interprétation de résultats

Les grandeurs de référence choisies sont :

- la longueur L de la cavité pour l'échelle de longueur.
- La vitesse caractéristique de diffusion thermique $\frac{\alpha}{L}$ pour la vitesse.
- $\rho \frac{\alpha^2}{L^2}$ pour la pression.
- $\frac{L^2}{\alpha}$ pour le temps.

- La température normalisée est $\theta = \frac{T - T_0}{\Delta T}$, avec $T_0 = \frac{T_c + T_f}{2}$, et

$$\Delta T = T_c - T_f.$$

La mise en forme adimensionnelle des équations fait apparaître les nombres suivants :

Nombre de prandtl :

Il caractérise l'importance relative des effets thermique et visqueux, il donné par le rapport :

$$Pr = \frac{V}{K}$$

Si l'on imagine par exemple un élément de fluide de taille caractéristique l , les temps de diffusions visqueuse τ_v et la chaleur τ_k seront donnés par :

$$\tau_v = \frac{l^2}{\nu}, \quad \tau_k = \frac{l^2}{k} \quad \rightarrow Pr = \frac{\tau_k}{\tau_v}$$

On note ainsi pour les fluides de grand nombre de prandtl, le temps thermique est plus grand que le temps visqueux et que les processus de diffusion de la chaleur pilotent le mouvement du fluide. Tandis que

pour les faibles valeurs du nombre de Prandtl (métaux liquides par exemple), les effets thermiques s'amenuisent et le comportement du fluide est essentiellement hydrodynamique.

Nombre de Raileigh et Grashof :

Le nombre de Rayleigh permet de comparer les effets thermiques et visqueux et les effets d'Archimède pour la convection libre dans une couche horizontale de fluide

Il est donné par le rapport :

$$Gr = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\nu K}$$

Un grand nombre de Rayleigh exprime le fait que la vitesse d'ascension d'une particule fluide sous l'effet de la poussée d'Archimède est telle que la diffusion thermique n'a pas le temps d'agir $\tau \ll \tau_k$.

Le nombre de Grashof permet de comparer les effets visqueux aux effets d'Archimède en convection libre, il s'écrit :

$$Gr = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\nu^2}$$

Le nombre de Grashof est relié au nombre de Rayleigh par :

$$Gr = \frac{Ra}{Pr}$$

Nombre de Marangoni :

Le nombre de Marangoni donne le rapport entre l'énergie libérée par les forces engendrées par la variation de la tension de surface avec la température et l'énergie dissipé par conduction thermique et amortissement visqueux, il s'écrit alors sous la forme :

$$Ma = \frac{\gamma\Delta TL}{\mu\alpha}$$

$\gamma = \frac{\partial\sigma}{\partial T}$: représente la dépendance de la tension de surface à la température,

L longueur caractéristique,

ΔT gradient de température appliqué

α diffusivité thermique μ : la viscosité dynamique.

II.6.1 Forme adimensionnelles des équations :

Les équations adimensionnelles régissant prennent la forme :

➤ **Equation de continuité :**

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0$$

➤ **Equation de quantité de mouvement :**

Suivant la direction X :

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + Pr \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right)$$

Suivant la direction Y :

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + Pr \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) + Ra Pr \theta$$

➤ **Equation de l'énergie :**

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right)$$

II.6.2 Conditions aux limites adimensionnelles :

L'écriture adimensionnelle des conditions aux limites est comme suit :

$$U=V=\theta = 0, \text{ pour } \tau = 0$$

- ▶ Au niveau de la paroi verticale chaude :(x=0)

$$U=V=0$$

$$\theta = \theta_c = 0.5$$

- ▶ Au niveau de la paroi verticale froid (X=l)

$$U=V=0$$

$$\theta = \theta_c = -0.5$$

- ▶ En paroi horizontale inférieur :(Y=0)

$$U=V=0$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0$$

► Au niveau de la surface libre

$$V=0$$

$$\frac{\partial U}{\partial Y} = \text{Ma} \frac{\partial \theta}{\partial X}$$

II.7 Conclusion

Après avoir posé les équations dynamiques, thermiques et massiques, ainsi que les conditions aux limites, et initiale associées, la recherche des solutions, sera conduite selon une direction:

Une résolution par voie numérique, objet du troisième chapitre, qui traitera les techniques utilisées pour simuler la convection

Chapitre III

RESOLUTION NUMERIQUE

III.1 Introduction

Les équations présentées au deuxième chapitre sont des équations différentielles aux dérivées partielles non linéaires, elliptiques et couplées. En raison de leur complexité, elles ne peuvent être résolues analytiquement. Ces équations sont résolues à l'aide de méthodes numériques. Plusieurs techniques numériques sont disponibles dans la littérature. On peut distinguer les méthodes des différences finies, méthodes des éléments finis, méthodes des volumes finis et méthodes spectrales. La méthode des volumes finis, sans doute la plus employée actuellement, et celle que nous allons décrire, pour les différents avantages qu'elle offre, en particulier :

- les équations aux différences traduisent la conservation de bilan de quantité de mouvement et d'énergie. Cela signifie que l'extension du principe de conservation écrit sous une forme discrétisée pour un volume de contrôle typique fini est vérifiée pour l'ensemble du domaine numérique ;
- sa robustesse numérique, sa maniabilité et son formalisme très proche de la réalité physique (conservation des bilans d'énergie et de quantité de mouvement).

Forme générale des équations de conservation :

Pour simplifier la présentation, les équations de conservation à faible nombre de Mach sous leur forme adimensionnelle donnée au chapitre précédent sont traduites mathématiquement par des équations de transport de fonctions scalaires qui prennent la forme générale d'une équation de convection-diffusion de ϕ :

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\rho\phi) + \nabla \cdot (\rho \vec{V} \phi) = \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) + S_\phi \quad (3.1)$$

Le premier terme de cette équation : terme transitoire, $\frac{\partial}{\partial \tau}(\rho\phi)$, représente l'accumulation de ϕ dans le temps. Le second, $\nabla \cdot (\rho \vec{V} \phi)$, représente le transport de ϕ par convection. Dans le second membre, le premier terme, $\nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi)$, correspond au transport de ϕ par diffusion, et le dernier, S_ϕ , terme source, la production locale de ϕ .

Equation	ϕ	Γ	Terme de source s_ϕ
Continuité	1	0	0
Quantité de mouvement suivant X	u	p_r	$-\frac{\partial P}{\partial Y}$
Quantité de mouvement suivant Y	v	p_r	$-\frac{\partial P}{\partial Y} + Ra Pr \theta$
Energie	θ	1	0

Tableau III 1: Discrétisation des équations de conservation pour les problèmes de convection-diffusion a 2d :

L'équation différentielle instationnaire sous la forme générale (3.1) est intégrée dans le temps sur le volume de contrôle Ω_{cv} entourant le nœud courant P , on obtient :

$$\int_t \int_{\Omega_{cv}} \frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) dt d\Omega + \int_t \int_{\Omega_{cv}} \text{div} (\rho\phi\vec{u}) dt d\Omega - \int_t \int_{\Omega_{cv}} \text{div} (\Gamma \text{grad} \phi) dt d\Omega = \int_t \int_{\Omega_{cv}} S_\phi dt d\Omega$$

Grace au théorème de la divergence de Gauss, on obtient :

$$\int_t \int_{\Omega_{cv}} \frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) dt d\Omega + \int_t \int_{A_{cv}} (\rho\phi\vec{u}) d\vec{A} dt - \int_t \int_{A_{cv}} (\Gamma \text{grad} \phi) d\vec{A} dt = \int_t \int_{\Omega_{cv}} S_\phi dt d\Omega \quad (3.23)$$

Où A est la surface qui limite le volume de contrôle Ω_{cv} .

III.2.1 Terme transitoire

Pour l'intégration de ce terme particulier, on considère uniquement la variation en temps, en assimilant la variable ϕ à sa valeur au centre du volume de contrôle :

$$I_1 = \int_t \int_{\Omega_{cv}} \frac{\partial}{\partial t} \rho\phi d\Omega dt = \left\{ (\rho\phi)_P - (\rho\phi)_P^0 \right\} \Delta\Omega \quad (3.24)$$

Où Ω désigne le volume de contrôle de ϕ et $\Delta\Omega$ sa mesure ($\Delta\Omega = \Delta x \Delta y$) dans le cas 2D et l'exposant 0 indique que la quantité est considérée au pas de temps précédent.

III.2.2 Terme convectif

$$I_2 = \int_t \int_{A_{CV}} (\rho \phi \vec{u}) d\vec{A}_n dt = \int_t \int_{A_{CV}} (\rho \phi \vec{u}) (d\vec{A}_e - d\vec{A}_w + d\vec{A}_s - d\vec{A}_n) dt$$

$$= \{ (\rho \phi u A)_e - (\rho \phi u A)_w + (\rho \phi v A)_n - (\rho \phi v A)_s \} \Delta t \quad (3.25)$$

On définit la variable $F_i = (\rho v A)_i$, qui représente le flux de masse convectif traversé par la surface (i), $i = (e, w, n, s)$.

Face	e	W	N	S
Flux de masse convectif	$F_e = \rho_e u_e A_e$	$F_w = \rho_w u_w A_w$	$F_n = \rho_n v_n A_n$	$F_s = \rho_s v_s A_s$

Tableau III 2 : Expression des coefficients convectifs

Il vient que :

$$I_2 = \{ F_e \phi_e - F_w \phi_w + F_n \phi_n - F_s \phi_s \} \Delta t \quad (3.26)$$

III.2.3 Terme diffusif

Le gradient de ϕ aux interfaces est finalement calculé en supposant que ϕ varie linéairement entre chaque point du maillage (figure 3.4). On obtient ainsi:

$$I_3 = \int_t \int_{A_{CV}} (\Gamma grad \phi) d\vec{A} dt = \left\{ \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} A \right)_e - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} A \right)_w + \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} A \right)_n - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} A \right)_s \right\} \Delta t \quad (3.27)$$

$$(3.28)$$

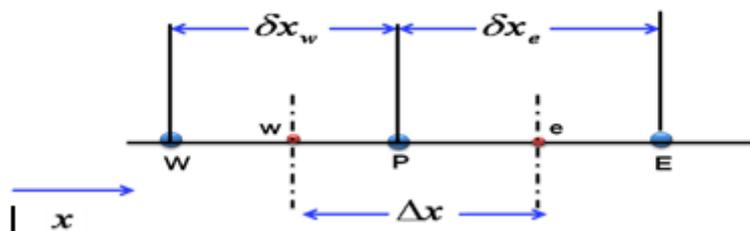


Figure III 1: Interpolation pour le gradient de ϕ

On pose $D_i = \frac{\Gamma_i A_i}{\delta x_i}$ qui représente le coefficient diffusif, où $i = (e, w, n, s)$

Face	E	W	N	s
Conductance de diffusion	$D_e = \frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_e}$	$D_w = \frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_w}$	$D_n = \frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_n}$	$D_s = \frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_s}$

Tableau 3 : Expressions des coefficients diffusifs

On obtient finalement :

$$I_3 = (D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W) + D_n (\phi_N - \phi_P) - D_s (\phi_P - \phi_S)) \Delta t \quad (3.29)$$

Calcul de la conductance Γ :

En général $\Gamma_e \neq \Gamma_w$, la conductivité thermique étant fonction de la température $\Gamma = \Gamma(T)$, ou même fonction de l'espace $\Gamma = \Gamma(x)$ pour les matériaux composites.

Si l'on considère le flux à l'interface "e" (figure 3.5), il peut être écrit ainsi :

$$q_e = \frac{T_P - T_E}{\frac{\delta x_e^-}{\Gamma_P} + \frac{\delta x_e^+}{\Gamma_E}} = \frac{T_P - T_E}{\frac{\delta x_e}{\Gamma_e}} \quad (3.30)$$

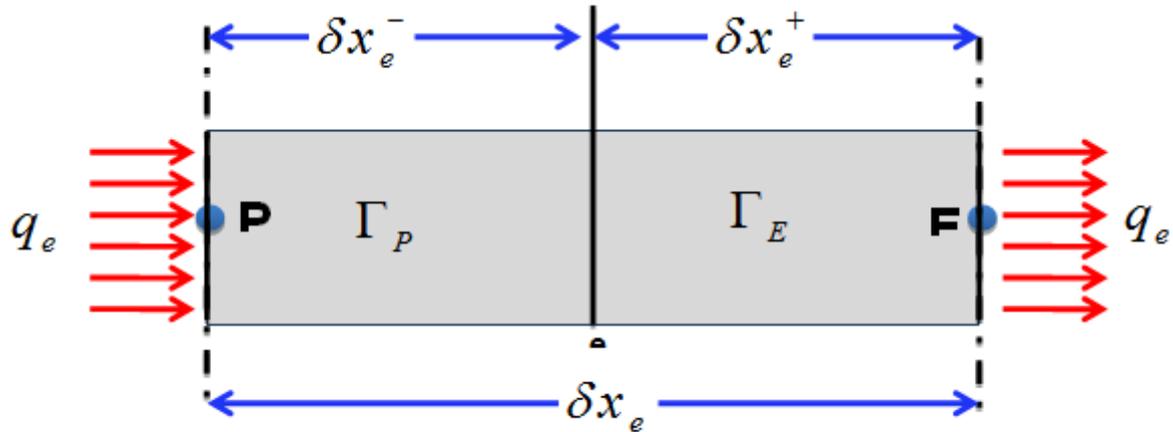


Figure III 2: Diffusivité pour un matériau composite

De la relation (3.30) on sort l'expression de la conductivité thermique à l'interface du volume de contrôle :

$$\Gamma_e = \frac{\delta x_e}{\frac{\delta x_e^-}{\Gamma_P} + \frac{\delta x_e^+}{\Gamma_E}} = \delta x_e \frac{\Gamma_P \Gamma_E}{\Gamma_P \delta x_e^+ + \Gamma_E \delta x_e^-} \quad (3.31)$$

Si on définit les paramètres : $f_e = \frac{\delta x_e^+}{\delta x_e}$ et $1 - f_e = \frac{\delta x_e^-}{\delta x_e}$, la relation (3.31) devient :

$$\Gamma_e = \frac{1}{\frac{1-f_e}{\Gamma_P} + \frac{f_e}{\Gamma_E}} = \frac{\Gamma_P \Gamma_E}{f_e \Gamma_P + (1-f_e) \Gamma_E} \quad (3.32)$$

Terme source

L'intégration de ce terme est donné par :

$$I_4 = \int_t \int_{\Omega_{CV}} S_\phi \, d\Omega = \bar{S} \Delta t \Delta \Omega \quad (3.33)$$

Où \bar{S} est la valeur moyenne de S sur le volume considéré.

Souvent le terme source S_ϕ dépend de la variable ϕ . Il est exprimé comme une fonction linéaire de ϕ_p . La méthode de Pantakar[4] est recommandée dans la linéarisation du terme source; elle consiste à écrire :

$$\bar{S} = S_C + S_P \phi_p \quad (3.34)$$

Où S_C représente la partie constante de \bar{S} (qui ne dépend pas de ϕ_P), alors que S_P est le coefficient de ϕ_P (S_P ne représente pas \bar{S} évalué au point P).

L'utilisation des expressions de I_1, I_2, I_3 et I_4 permet d'écrire l'équation (3.23) sous forme discrétisée:

$$\{(\rho\phi)_P - (\rho\phi)_P^0\}\Delta\Omega + \{F_e\phi_e - F_w\phi_w + F_n\phi_n - F_s\phi_s\}\Delta t - (D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W) + D_n(\phi_N - \phi_P) - D_s(\phi_P - \phi_S))\Delta t = (S_C + S_P\phi_P)\Delta t\Delta\Omega \quad (3.35)$$

Équation de continuité

Dans le cas des équations de Navier-Stokes, on doit aussi résoudre l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (3.36)$$

L'intégration de cette équation sur le volume de contrôle Ω_{CV} conduit à :

$$\int_t \left(\int_{\Omega_{CV}} \rho d\Omega \right) dt + \int_{dt} \left(\int_{\Omega_{CV}} \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) d\Omega \right) dt + \int_t \left(\int_{\Omega_{CV}} \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) d\Omega \right) dt = 0 \quad (3.37)$$

$$(\rho_P - \rho_P^0) \frac{\Delta\Omega}{\Delta t} + (\rho u A)_e - (\rho u A)_w + (\rho v A)_n - (\rho v A)_s = 0 \quad (3.38)$$

Ce qui donne:

$$(\rho_P - \rho_P^0) \frac{\Delta\Omega}{\Delta t} = F_w - F_e + F_s - F_n \quad (3.39)$$

Effectuons l'opération [(3.35) - ($\phi_P \times$ (3.39))], on obtient :

$$\left\{ \rho_P^0 \frac{\Delta\Omega}{\Delta t} + F_w - F_e + F_s - F_n - S_P \Delta\Omega \right\} \phi_P + \{F_e\phi_e - F_w\phi_w + F_n\phi_n - F_s\phi_s\} - (D_e\phi_E - D_e\phi_P - D_w\phi_P + D_w\phi_W + D_n\phi_N - D_n\phi_P - D_s\phi_P + D_s\phi_S) = S_C \Delta\Omega + \rho_P^0 \phi_P^0 \frac{\Delta\Omega}{\Delta t} \quad (3.40)$$

III.3 Schémas numériques :

Dans l'équation (3.40), l'inconnue ϕ n'est pas encore exprimée sur son domaine de définition (dans les termes convectifs), les nœuds de discrétisation. L'interpolation assurant

cette opération dépendra du choix du schéma de discrétisation spatiale. Il existe plusieurs schémas donnant la valeur de ϕ sur son domaine (tel que : *CDS*, *upwind*, *exponentiel*, *hybride*, *puissance*) et qui sont détaillés dans l'Annexe.

Si on pose $Pe = \frac{F}{D}$ qui désigne le nombre de Péclet de maille, l'équation de conservation une fois discrétisée implicitement en temps, est de la forme :

$$a_P^{n+1} \phi_P^{n+1} = a_E^{n+1} \phi_E^{n+1} + a_W^{n+1} \phi_W^{n+1} + a_N^{n+1} \phi_N^{n+1} + a_S^{n+1} \phi_S^{n+1} + b \quad (3.41)$$

Où les coefficients de l'équation (3.41) sont exprimés sous la forme générale suivante :

$$a_E = D_e A(|P_e|) + [-F_e, 0] \quad (3.42)$$

$$a_W = D_w A(|P_w|) + [F_w, 0] \quad (3.43)$$

$$a_N = D_n A(|P_n|) + [-F_n, 0] \quad (3.44)$$

$$a_S = D_s A(|P_s|) + [F_s, 0] \quad (3.45)$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_P^0 - S_P \quad (3.46)$$

$$a_P^0 = \rho_P^0 \frac{\Delta\Omega}{\Delta t} \quad (3.47)$$

$$b = S_C \Delta\Omega + a_P^0 \phi_P^0 \quad (3.48)$$

L'expression entre crochets représente le maximum entre les quantités et $A(|P|)$ est une fonction caractéristique du schéma choisi (Tableau III 4).

Schéma	$A(P)$
CDS	$1 - 0.5 P $
Upwind	1
Exponentiel	$ P / (\exp(P) - 1)$
Hybride	$[0, 1 - 0.5 P]$
Power Law	$[0, (1 - 0.1 P)^5]$

Tableau III 4 : Expressions de la fonction $A(|P|)$ pour les différents schémas

Le schéma exponentiel discrétise l'ensemble des termes convectifs et diffusifs, contrairement aux schémas habituels tels que les schémas décentré et amont. Cette discrétisation concerne l'expression des coefficients Aux faces des volumes de contrôle. Ceux-ci sont interpolés entre les deux nœuds que sépare la face de telle sorte que l'équation stationnaire 1D de convection-diffusion soit vérifiée entre ces deux points, et ce, indépendamment du problème que l'on résout.

Le schéma hybride [8] et le schéma puissance [9] utilisé dans cette étude, sont dérivés directement du schéma exponentiel. Ils reposent tous deux sur l'approximation des coefficients où apparaît l'exponentiel, qui est coûteuse en temps de calcul. En fonction du nombre de Péclet, le schéma hybride effectue une approximation linéaire par morceaux de la fonction $A(P)$ et le schéma puissance une approximation polynomiale.

III.4 Méthode et algorithme de calcul :

III.4.1 Couplage vitesse pression (algorithme SIMPLER)

La résolution des équations de Navier-Stokes ne peut pas s'effectuer séparément par composante car la contrainte représentée par l'équation de continuité porte sur les trois composantes de la vitesse ou de la quantité de mouvement. Si toutefois la résolution est fractionnée par composante, on parle de prédiction de la vitesse et celle-ci doit être suivie d'une étape de correction pour satisfaire par exemple $(div\vec{V} = 0)$ en incompressible.

Il existe plusieurs méthodes que l'on peut classer en deux familles : l'une où l'on se débarrasse du problème de la pression en prenant le rotationnel de l'équation de Navier-Stokes et l'autre où l'on compose avec la pression en établissant une équation spécifique. Dans le premier cas on parle de formulation en Vorticité-Potentiel Vecteur en 3D ou Vorticité-Fonction de Courant en 2D ($\Omega - \Psi$) et dans le second cas on a une formulation en variables primitives Vitesse-Pression (P, V). L'équation de l'énergie peut être aussi couplée pour certaines applications (convection naturelle par exemple).

Le problème du couplage se manifeste par l'apparition des variables vitesse et pression dans les deux équations de quantité de mouvement. Le gradient de pression qui apparaît comme terme source dans ces équations joue le rôle du moteur de l'écoulement. Malheureusement, on ne dispose d'aucune équation de transport pour cette troisième variable qu'est la pression (les deux autres étant les deux composantes de la vitesse). En d'autres termes, si le gradient de pression est connu à priori on peut calculer le champ vitesse qui dans ce cas vérifie bien l'équation de continuité. Malheureusement, la pression est toujours une inconnue à déterminer aussi bien que la vitesse. Un champ de vitesse donné peut satisfaire l'équation de continuité sans pour autant vérifier les équations de transport de quantité de mouvement. Cette particularité des équations rend nécessaire l'utilisation d'un algorithme de couplage pression-vitesse.

Algorithme SIMPLER

Des techniques de couplage des équations de Navier-Stokes équivalentes à la technique de projection ont été élaborées et mise en œuvre par Spalding et Patankar à l'Impérial Collège de Londres dans les années 1960-1970. Elles ont donné lieu à de multiples versions intitulées SIMPLE, SIMPLER, SIMPLEST,

L'algorithme le plus universel et le plus utilisé est sans doute l'algorithme SIMPLE de Patankar et Spalding[3] détaillé en [Annexe III](#) avec l'Algorithme SIMPLER, ensuite ses variantes telles que : SIMPLEC (van Doormal and Raithby[10]), PISO (Issa [11]) et SIMPLER (Patankar[4]) que nous avons utilisé dans ce travail.

La supériorité de l'algorithme SIMPLER par rapport à SIMPLE réside dans le fait que la déduction de l'équation de la pression ne fait intervenir aucune simplification. Dans SIMPLE, la déduction de l'équation de correction de la pression passe par l'annulation du terme $\sum a_{nb} u'_{nb}$. Par conséquent le champ de pression dans SIMPLER est plus proche de la réalité

que celui de SIMPLE, puisqu'en général l'estimation d'un champ de vitesse initial est plus facile que celle d'un champ de pression. Notons, ici que l'algorithme SIMPLER ne nécessite pas de champ de pression initial. La pression est directement générée à partir de l'initialisation de la vitesse. Par conséquent des coefficients de sous relaxation plus consistants peuvent être utilisés pour les vitesses. Mieux encore, aucune sous relaxation n'est nécessaire pour la pression. Il est vrai qu'une itération suivant l'algorithme SIMPLER nécessite environ 30% de temps plus que celle de SIMPLE, mais cet effort est largement compensé par la réduction consistante en nombre d'itérations nécessaires pour la convergence.

Cependant, en termes de vitesse de convergence des calculs, l'algorithme SIMPLER est de 30 à 50% plus efficace que SIMPLE selon Anderson [12] et Jang[13].

Couplage Vitesse-Pression

Algorithme SIMPLER

L'algorithme SIMPLER (Semi Implicit Method for Pressure Linked Revised) de Patankar a été utilisé dans ce travail pour la résolution des équations régissant l'écoulement. Il présente une extension de l'algorithme SIMPLE (Semi Implicit Method for Pressure Linked).

Le choix de développer SIMPLER provient des difficultés que présente SIMPLE. Ce dernier est basé sur l'approximation de l'omission des termes qui présentent l'influence des vitesses des voisins, ce qui risque d'exagérer la pression, et ensuite il y aura tendance vers la divergence sans l'utilisation des relaxations appropriées.

À partir de cette difficulté l'algorithme SIMPLER est basé sur le fait que l'équation de correction de pression est employée seule pour corriger la vitesse et une autre procédure est utilisée pour obtenir le champ de pression.

Les équations de conservation de la quantité de mouvement discrétisées (III.50) et (III.53) sont écrites sous la forme suivante, en considérant une estimation du champ de vitesse :

$$a_e u_e = \sum a_{nb} u_{nb} + (p_P - p_E) A_e + b_u \quad (\text{III.16})$$

$$a_n v_n = \sum a_{nb} v_{nb} + (p_P - p_N) A_n + b_v \quad (\text{III.17})$$

Les équations (III.16, III.17) peuvent s'écrire :

$$u_e = \frac{\sum a_{nb} u_{nb} + b_u}{a_e} + d_e (P_P - P_E) \quad (\text{III.18})$$

$$v_n = \frac{\sum a_{nb} v_{nb} + b_v}{a_n} + d_n (P_P - P_N) \quad (\text{III.19})$$

Avec :

$$d_e = \frac{A_e}{a_e}, d_n = \frac{A_n}{a_n} \quad (\text{III.20})$$

Lorsqu'on initialise le champ de vitesse, le champ de pression est inconnu. On annule donc le terme qui représente la pression et on introduit les pseudo-vitesses définies comme suit :

$$\hat{u}_e = \frac{\sum a_{nb} u_{nb} + b_u}{a_e} \quad (\text{III.21})$$

$$\hat{v}_n = \frac{\sum a_{nb} v_{nb} + b_v}{a_n} \quad (\text{III.22})$$

Ainsi les équations de quantité de mouvement s'écrivent :

$$u_e = \hat{u}_e + d_e (P_P - P_E) \quad (\text{III.23})$$

$$v_n = \hat{v}_n + d_n (P_P - P_N) \quad (\text{III.24})$$

En reportant les expressions précédentes (III.23 et III.24) dans l'équation discrète de conservation de la masse (III.2) on obtient directement une équation en pression :

$$a_P P_P = a_E P_E + a_W P_W + a_N P_N + a_S P_S + b \quad (\text{III.25})$$

Avec :

$$a_E = (\rho A d)_e ; a_W = (\rho A d)_w \quad (\text{III.26})$$

$$a_N = (\rho A d)_n ; a_S = (\rho A d)_s \quad (\text{III.27})$$

$$a_p = a_E + a_W + a_N + a_S \quad (\text{III.28})$$

$$b = (\rho \hat{u}A)_w - (\rho \hat{u}A)_e + (\rho \hat{v}A)_s - (\rho \hat{v}A)_n - (\rho_p - \rho_p^0) \frac{\Delta \Omega}{\Delta t} \quad (\text{III.29})$$

Considérons maintenant une estimation du champ de pression : $P^* = P$.

À partir du champ de pression obtenue P^* , on résout les équations de quantité de mouvement pour obtenir u^* et v^* :

$$a_e u_e^* = \sum a_{nb} u_{nb}^* + (P_p^* - P_e^*) A_e + b_u \quad (\text{III.30})$$

$$a_n v_n^* = \sum a_{nb} v_{nb}^* + (P_p^* - P_n^*) A_n + b_v \quad (\text{III.31})$$

Où :

$$u_e^* = \hat{u}_e + d_e (P_p^* - P_e^*) \quad (\text{III.32})$$

$$v_n^* = \hat{v}_n + d_n (P_p^* - P_n^*) \quad (\text{III.33})$$

On utilise ce champ de vitesse dans la résolution de l'équation de continuité pour obtenir les équations de correction de pression P' (comme dans SIMPLE). L'équation de cette dernière s'écrit sous la même forme que l'équation de la pression.

En conservant l'équation de correction de vitesse de SIMPLE, on écrit :

$$u_e = u_e^* + d_e (P_p' - P_e') \quad (\text{III.34})$$

$$v_n = v_n^* + d_n (P_p' - P_n') \quad (\text{III.35})$$

Ce qui donne l'équation de correction de pression :

$$a_p P_p' = a_E P_E' + a_W P_W' + a_N P_N' + a_S P_S' + b \quad (\text{III.36})$$

$$a_E = (\rho A d)_e ; a_W = (\rho A d)_w \quad (\text{III.37})$$

$$a_N = (\rho A d)_n ; a_S = (\rho A d)_s \quad (\text{III.38})$$

$$a_p = a_E + a_W + a_N + a_S \quad (\text{III.39})$$

$$b = (\rho u^* A)_w - (\rho u^* A)_e + (\rho v^* A)_s - (\rho v^* A)_n - (\rho_p - \rho_p^0) \frac{\Delta\Omega}{\Delta t} \quad (\text{III.40})$$

On en déduit la vitesse mais on ne corrige pas la pression. Cette démarche représente l'algorithme SIMPLE Révisé (SIMPLER).

Lorsque la convergence est atteinte, les valeurs de b s'annulent dans tous les volumes de contrôle.

Le fait que le terme source b soit nul partout est une preuve que nous avons obtenu le champ de pression correct, et que la solution actuelle de p' n'est pas demandée durant l'itération finale. Ainsi le terme source b est employé comme un indicateur utile pour la convergence de la solution du problème.

Les étapes à suivre dans l'algorithme de SIMPLER sont résumées comme suit:

- 1- Choisir un champ de vitesse (initialisé par des valeurs : u^*, v^*)
- 2- Calculer les coefficients des équations de quantité de mouvement et déduire les « pseudo vitesse » (Eq. III.21, III.22)

$$\hat{u}_e = \frac{\sum a_{nb} u_{nb}^* + b_u}{a_e}$$

$$\hat{v}_n = \frac{\sum a_{nb} v_{nb}^* + b_v}{a_n}$$

- 3- évaluer le terme source de la masse de l'équation

$$(\text{III.29}) \quad b = (\rho \hat{u} A)_w - (\rho \hat{u} A)_e + (\rho \hat{v} A)_s - (\rho \hat{v} A)_n - (\rho_p - \rho_p^0) \frac{\Delta\Omega}{\Delta t}$$

et résoudre l'équation de pression (III.25)

$$a_p P_p = a_E P_E + a_W P_W + a_N P_N + a_S P_S + b$$

- 4- Utiliser le champ de pression ($P^* = P$) pour résoudre les équations de quantité de mouvement u^*, v^* (III.30,31), (ne pas corriger la pression).

$$a_e u_e^* = \sum a_{nb} u_{nb}^* + (P_P^* - P_E^*) A_e + b_u$$

$$a_n v_n^* = \sum a_{nb} v_{nb}^* + (P_P^* - P_N^*) A_n + b_v$$

5- Calculer le terme source de la masse b , (III.40)

$$b = (\rho u^* A)_w - (\rho u^* A)_e + (\rho v^* A)_s - (\rho v^* A)_n - (\rho_P - \rho_P^0) \frac{\Delta \Omega}{\Delta t}$$

de l'équation (III.40) et résoudre les équations (III.36) de correction de pression (comme dans SIMPLE).

$$a_P P_P' = a_E P_E' + a_W P_W' + a_N P_N' + a_S P_S' + b$$

6- Corriger le champ de vitesse via l'équation (III.34 et 35) , mais ne pas corriger la pression.

$$u_e = u_e^* + d_e (P_P' - P_E')$$

$$v_n = v_n^* + d_n (P_P' - P_N')$$

7- Résoudre les autres équations de transport ϕ (énergie, masse,...).

8- Retourner à l'étape -2-, avec les nouveaux champs de (vitesse, température, pression). Répéter les calculs jusqu'à convergence de toutes les variables.

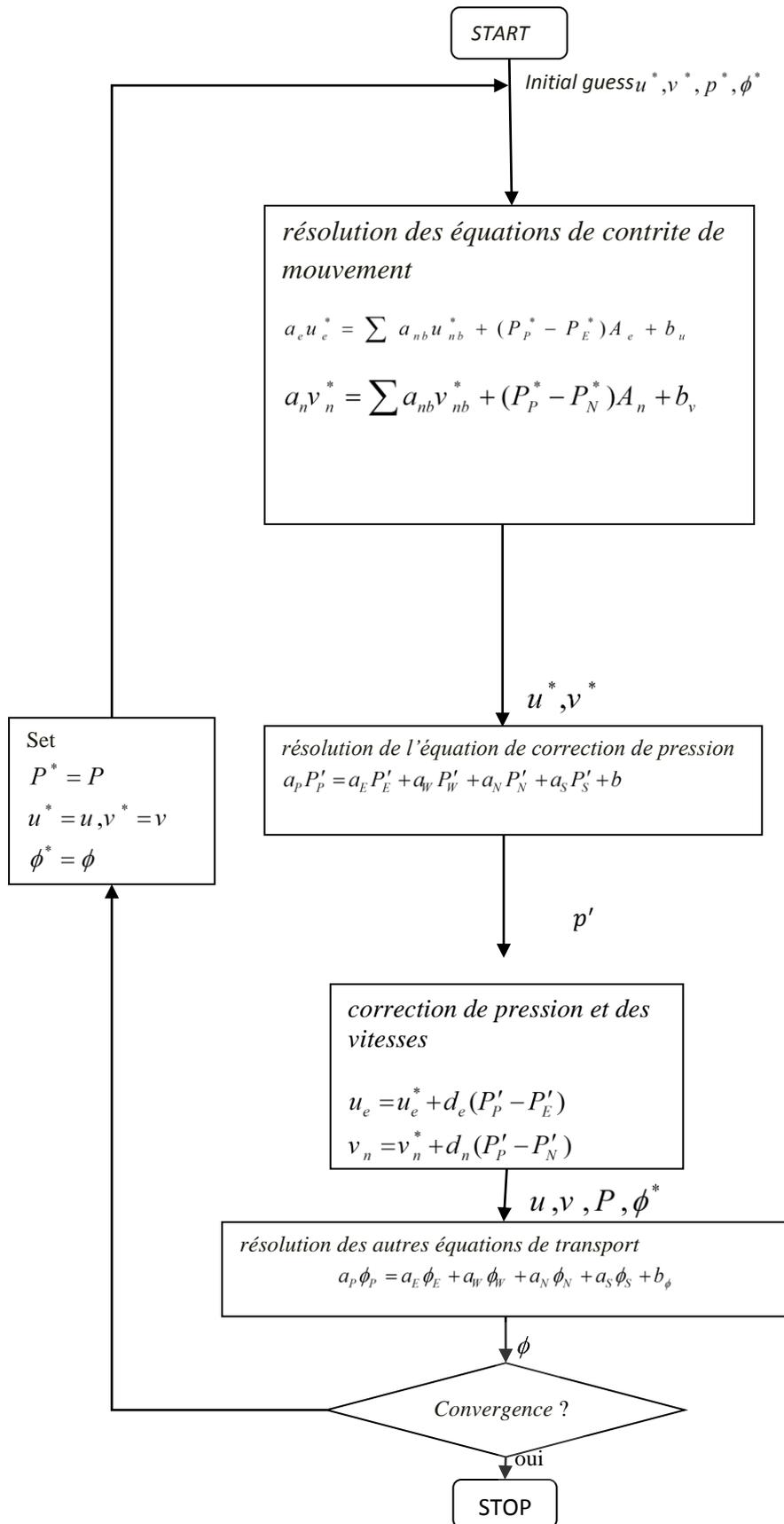


Figure III 3 : Algorithme SIMPLER

RELAXATION

Le processus itératif utilisé dans SIMPLER exige le contrôle du taux de variation des inconnues au cours de chaque itération. Ceci est réalisé par des méthodes dites de sous-relaxation [12] :

Soit ϕ_p^* la valeur de ϕ_p à l'itération courante. Si ϕ_p satisfait à l'équation:

$$a_p \phi_p = \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b \quad (3.68)$$

Alors, pour que le système soit résolu pour l'itération courante, on estime une valeur de ϕ_p donnée par :

$$\phi_p = \frac{\sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b}{a_p} \quad (3.69)$$

Le changement dans ϕ_p d'une itération à la suivante est donné par :

$$\Delta \phi_p = \frac{\sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b}{a_p} - \phi_p^* \quad (3.70)$$

Le changement de ϕ_p s'effectue d'une fraction α définie par:

$$\phi_p = \phi_p^* + \alpha \left(\frac{\sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b}{a_p} - \phi_p^* \right) \quad (3.71)$$

Après réarrangements des termes, on trouve :

$$\frac{a_p}{\alpha} \phi_p = \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b + \frac{1-\alpha}{\alpha} a_p \phi_p^* \quad (3.72)$$

Ainsi la nouvelle valeur de la grandeur ϕ_p dépend de la valeur précédente ϕ_p^* et de sa

correction $\Delta\phi = \frac{\sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b}{a_p} - \phi_p^*$ en utilisant le coefficient de sous-relaxation α dont la

valeur est strictement inférieure à 1.

III.4.2 Résolution du système linéaire des équations discrétisées

Algorithme de THOMAS (TDMA)

C'est un algorithme développé par Thomas [14] en 1949, c'est une méthode directe pour la situation unidimensionnelle (1D), mais peut être utilisée d'une manière itérative ligne par ligne (line by line) pour la résolution des problèmes bidimensionnels (2D).

La discrétisation par volumes finis donne un système tri diagonal pour le cas 1D, un système penta-diagonal pour le cas 2D et un système septa-diagonal pour le cas 3D. D'autres schémas de discrétisation donnent plusieurs diagonal, par exemple le schéma QUICK donne sept diagonal dans le cas 2D. Dans ce cas on pose deux diagonal dans le terme source.

Un système tridiagonal peut s'écrire sous la forme générale, (voir [15] pour plus de détails) :

$$a_i \phi_{i-1} + b_i \phi_i + c_i \phi_{i+1} = d_i \tag{3.73}$$

Sous forme d'une matrice, ce systèmes 'écrit

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & c_{n-1} \\ 0 & & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \phi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ d_n \end{bmatrix} \tag{3.74}$$

Le calcul se fait de la manière suivante :

- Pour $i=2$, on utilise les équations :

$$P_2 = \frac{b_2}{a_2}, Q_2 = \frac{d_2 + c_2 \phi_1}{a_2} \tag{3.75}$$

- Pour i variant de 3 à $N-1$, on utilise les équations :

$$P_i = \frac{b_i}{a_i - c_i P_{i-1}}, \quad Q_i = \frac{d_i + c_i Q_{i-1}}{a_i - c_i P_{i-1}} \quad (3.76)$$

avec $P_N = 0$ et $Q_N = \phi_N$ (où ϕ_N est une condition aux limites).

- La dernière étape détermine les inconnues, pour i variant de $N-1$ à 1 , on utilise

$$\text{l'équation : } \phi_i = P_i \phi_{i+1} + Q_i$$

ϕ_1 et ϕ_N sont des valeurs aux limites du domaine.

Application de l'algorithme de THOMAS à des problèmes à 2D (TDMA)

L'algorithme de Thomas (TDMA) peut être appliqué itérativement pour résoudre un problème d'un système d'équations bidimensionnel [9]. Considérons le maillage envisagé dans la figure (3.11) et une équation générale de transport discrétisée sous la forme :

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \quad (3.77)$$

Pour résoudre ce système, l'algorithme de Thomas est appliqué pour une ligne choisie, par exemple la ligne Nord-Sud (N-S). L'équation de transport discrétisée est réarrangée sous la forme :

$$-a_S \phi_S + a_P \phi_P - a_N \phi_N = a_E \phi_E + a_W \phi_W + b \quad (3.78)$$

Le membre droit de l'équation (3.78) est supposé temporairement connu. L'équation (3.78) est de la même forme que l'équation (3.73), avec :

$$a_i \phi_{i-1} + b_i \phi_i + c_i \phi_{i+1} = d_i$$

$$a_i = -a_S$$

$$b_i = a_P$$

$$c_i = -a_N$$

$$d_i = a_W \phi_W + a_E \phi_E + b$$

(3.79)

On peut maintenant résoudre le système le long de la direction (N-S) de la ligne choisie pour des valeurs $j = 2, 3, 4, \dots, n$ comme indiqué sur la figure (3.11).

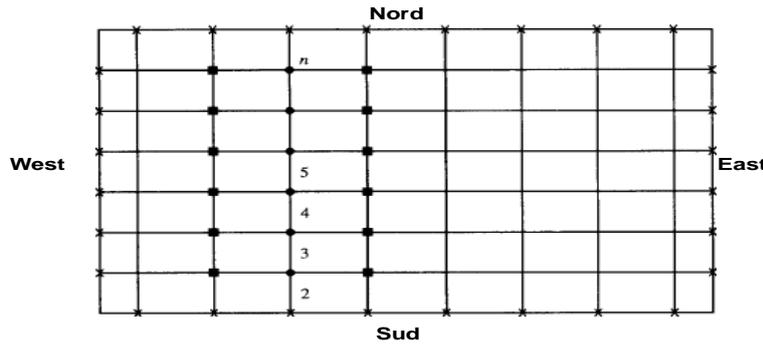


Figure III 4: Application ligne par ligne de la méthode TDMA

- Points auxquels les valeurs sont considérées être temporairement connues
- ✘ Valeurs connues à la frontière

A gauche de l'équation (3.78), il n'y a que le système tri diagonal qui peut être résolu efficacement par l'algorithme de Thomas. La solution est d'abord calculée sur la deuxième ligne des volumes de contrôle, on suppose que les valeurs de la première ligne sont connues (valeurs connues à la frontière) et les valeurs de la troisième ligne sont considérées être temporairement connues. Après que le vecteur $[\phi_2]$ ait été calculé avec l'algorithme de Thomas, on passe au vecteur $[\phi_3]$ et on suppose que la deuxième ligne est déjà calculée (à l'itération précédente) et les valeurs de la quatrième ligne sont supposées temporairement connues, puis plus généralement au vecteur $[\phi_j]$ où l'ensemble de la zone de résolution est ainsi balayé.

La procédure de calcul ligne par ligne est répétée jusqu'à atteindre la convergence de la solution.

CRITERE DE CONVERGENCE

Le critère de convergence utilisé dans SIMPLER est : $\max(\phi_{n+1} - \phi_n) \leq e_\phi$, en balayant toutes les cellules du domaine où n est l'ordre d'itération et ϕ désigne U, V ou θ . Dans la plupart des cas e_u, e_v, e_T sont pris inférieurs à 10^{-5} . Pour la pression et la correction de pression, le test de convergence est réalisé sur la divergence de la vitesse qui doit être inférieure à 10^{-7} . Le régime permanent est supposé atteint lorsque l'écart entre deux variables calculées pour deux pas de temps successifs est inférieur à 10^{-6} .

III.4.3 Validation de modèle

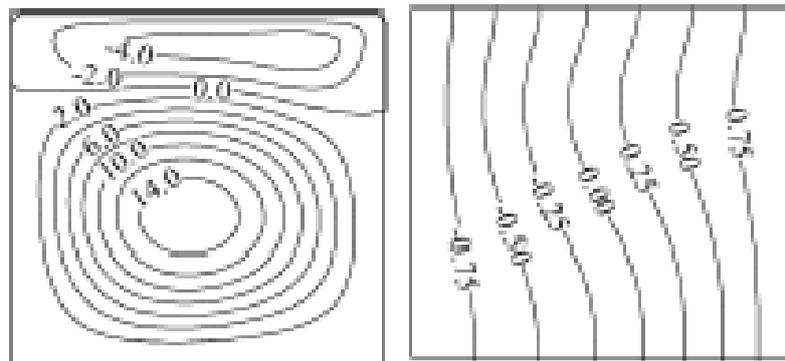
Nous nous proposons d'exposer dans cette partie la validation de l'algorithme utilisé pour résoudre les équations de conservation.

Dans cette partie, on applique notre algorithme de calcul à l'étude de la convection thermo capillaire et thermo gravitaire, pour deux configurations. L'une est une cavité de rapport de forme égale à 1, remplie d'un fluide à nombre de Prandtl $Pr = 0.054$.

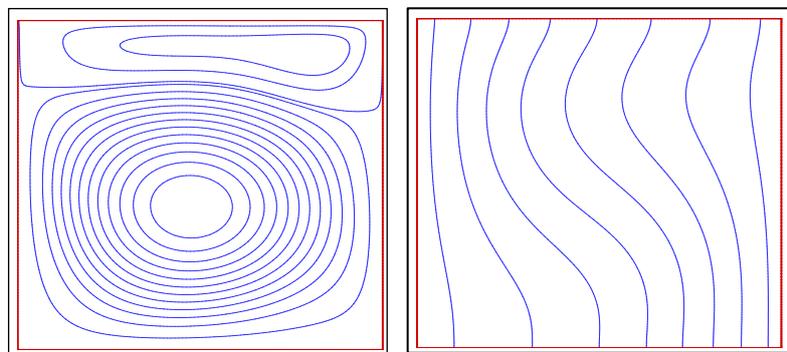
Les figures (IV-13a) et (IV-13b) représentent respectivement les lignes isothermes et isocourantes déterminées par notre code de calcul ainsi que celles obtenues par M. Anwar Hossain [1], L'allure de ces figures montre la bonne concordance de nos résultats avec ceux de [1]

a)-Résultats de la référence [1].

b)-Résultats obtenus au moyen du code.



(a)



(b)

Figure III 5 : Evolution des lignes de courant (gauche) et des isothermes (droite) pour $Ma=100$, $Ra=1080$ et $Pr=0.054$. **a)**-Résultats de la référence [1]. **b)**-Résultats obtenus au moyen du code.

Chapitre IV

RESULTATS ET DISCUSSION

IV.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter quelques résultats obtenus pour ce problème de la convection naturelle dont la formulation mathématique des équations gouvernantes qu'ils ont été établis dans les chapitres précédents.

Après avoir écrit le programme de calcul en langage nous allons étudier l'influence des quelques paramètres physiques comme le nombre de Marangoni et le nombre de Prandtl sur l'écoulement du fluide considéré l'air dans une cavité carrée bidimensionnelle.

Les résultats présentés sont issus des simulations effectuées en prenant un nombre de Marangoni variant entre 0 et 10000 et le nombre de Rayleigh fixé à 10000 et dans le deuxième cas on prend le nombre de Rayleigh fixe à 10000 alors que le nombre de Prandtl varie de 0.0002 à 7.0. En outre, ces résultats obtenus sont présentés sous forme de la structure de l'écoulement (lignes de courant, isothermes, profils des composantes de vitesse ...ect).

IV.2 Résultats et interprétation On se propose dans cette partie de présenter quelques résultats de simulation pour l'effet combiné du nombre de Marangoni et du nombre de Prandtl sur le régime thermique et dynamique de l'écoulement. Pour cela on a utilisé un maillage de 120×120 très raffiné au niveau des parois. Les résultats sont présentés en termes des lignes de courant, des isothermes et du nombre de Nusselt local au niveau de la paroi chaude.

IV.3 Effet du nombre de Marangoni :

Les résultats sont présentés en termes de lignes de courant et isothermes ainsi que le nombre de Nusselt local pour $Ra = 10^4$, $Pr=0.71$ et pour différentes valeurs de Ma .

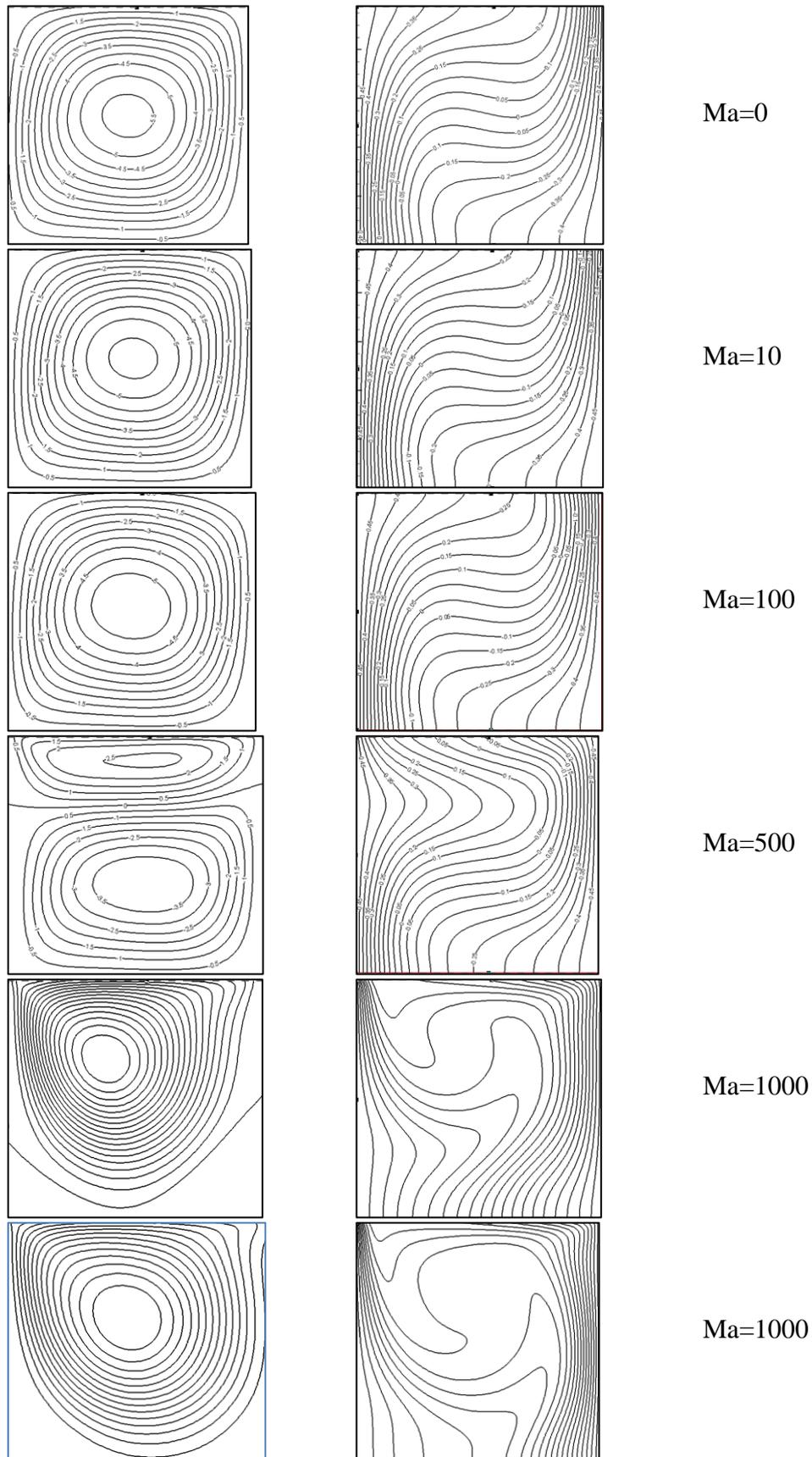


Figure IV 1 : évolution des lignes de courant (gauche) et des isothermes (droite) pour $Ra=10^4$ n $Pr=0.71$ et pour différentes valeurs de Ma.

IV.3.1. Champs dynamiques et champs thermiques

Nous avons présenté en figure (IV.1), l'évolution des isothermes entre la paroi chaude et la paroi froide. L'examen de cette figure montre que l'écoulement est conductif pour les faibles valeurs du nombre de Marangoni ($Ma=10$) et les isothermes sont des droites parallèles à la paroi active (chaude).

On remarque que le fluide est entraîné à la surface libre, de la paroi chaude vers la paroi froide. Pour $Ma=0, 10, 100$, la structure de l'écoulement est constituée d'une seule cellule de convection circulant dans le sens des aiguilles d'une montre et occupant l'ensemble du domaine et centrée près de la surface libre.

L'évolution du profil de température à la surface libre, montre une variation linéaire de la température à la surface libre pour Ma compris entre 1 et 10. Cette structure de l'écoulement dépend fortement du nombre de Marangoni. Quand celui-ci augmente, la convection, de plus en plus intense, modifie considérablement le champ de température. Les isothermes se déforment progressivement et la chaleur au niveau de la surface libre est advectée vers la surface froide. Il en résulte un resserrement des isothermes près de la surface libre, au voisinage de la paroi froide et une légère diminution du gradient thermique près de la surface libre, au niveau de la paroi chaude.

En augmentant la valeur de $|Ma|$ le sens de l'écoulement reste le même mais avec un vortex très intense et concentré autour d'un point plus proche une fois de la paroi froide et une autre près de la paroi chaude

Ma	0	10	100	1000	5000	10000
Nu_{moy}	2.36	2.3633	2.2997	2.4083	3.7586	5.3119

Tableau IV. 1 : valeurs moyennes du nombre de Nusselt pour différentes valeurs de Ma

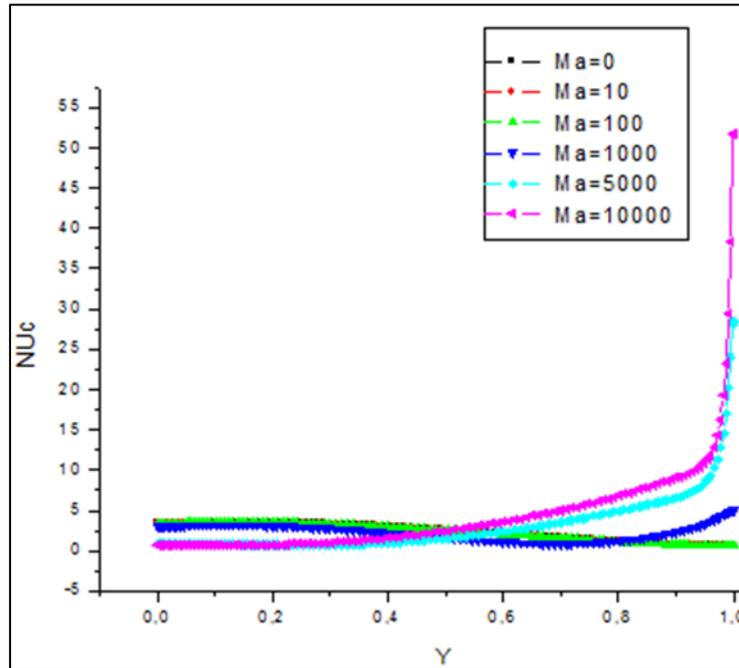
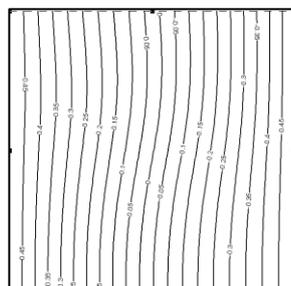
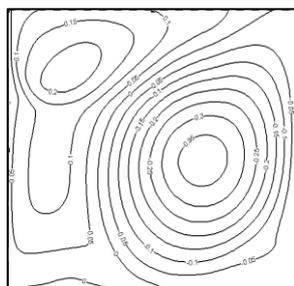


Figure IV 2 : nombre de Nusselt pour différentes Ma.

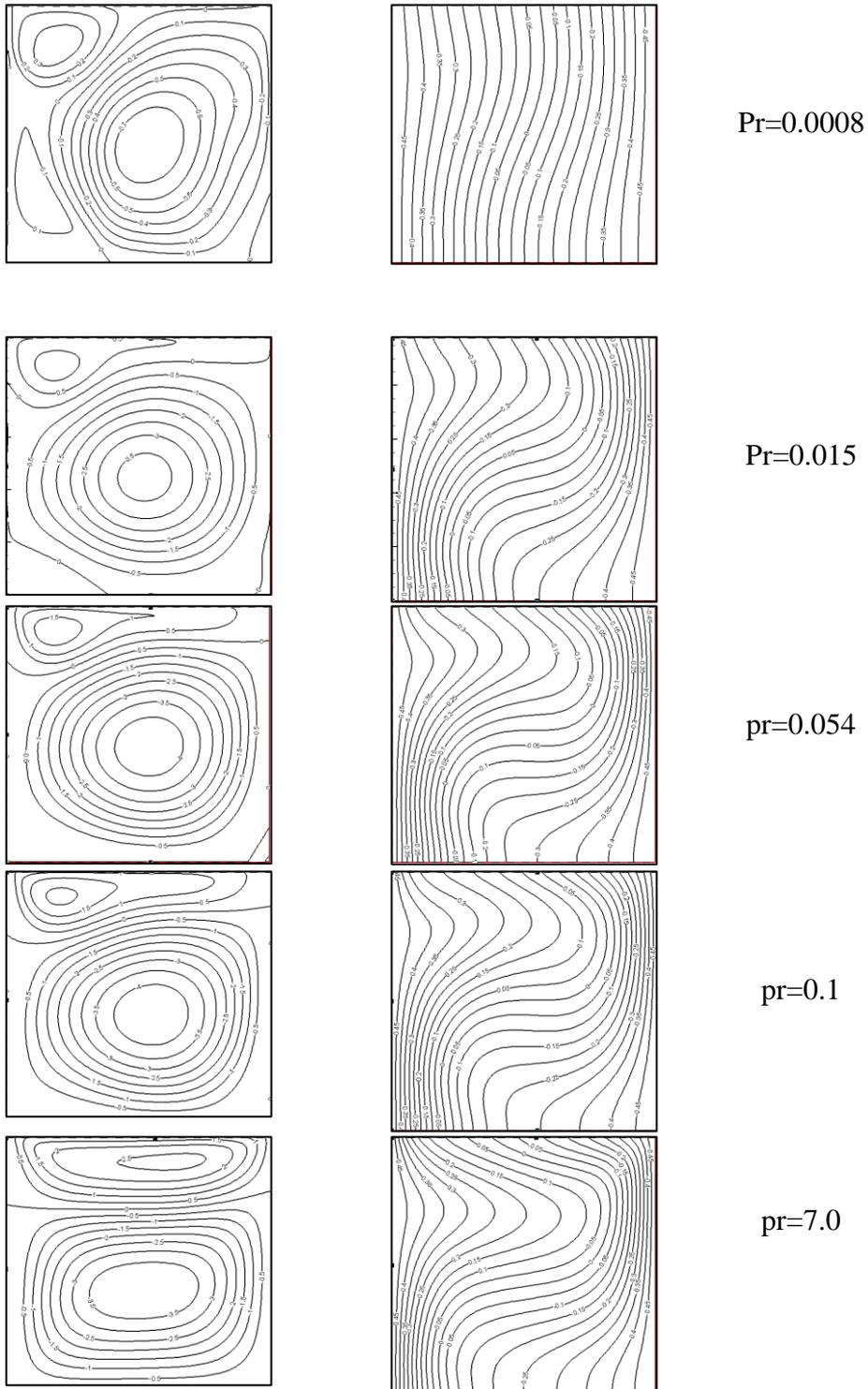
Le nombre de Nusselt augmente proportionnellement avec le nombre de marangoni dans la partie supérieure de la paroi chaude signifiant un régime convectif du transfert thermique. Pour de faible valeur de Ma, le transfert de chaleur est caractérisé par un régime conductif.

IV.4. Étude de l'effet du nombre de Prandtl :

Les résultats sont présentés en termes de lignes de courant et isothermes ainsi que le nombre de Nusselt local pour $Ra = 10^4$, $Ma=100$ et pour différentes valeurs de Pr.



Pr =0.0002



IV 3 : évolution des lignes de courant (gauche) et isothermes (droite) pour $Ra= 10^4$ et $Ma = 100$ et pour différentes valeurs de Pr.

Pr	0.0002	0.0008	0.015	0.025	0.054	0.1	7.0
Nucmoy	1.0211	1.0631	1.6655	1.8627	2.0077	2.1167	2.4442

Tableau IV. 2 : valeurs moyennes du nombre de Nusselt pour différent nombre de prandtl

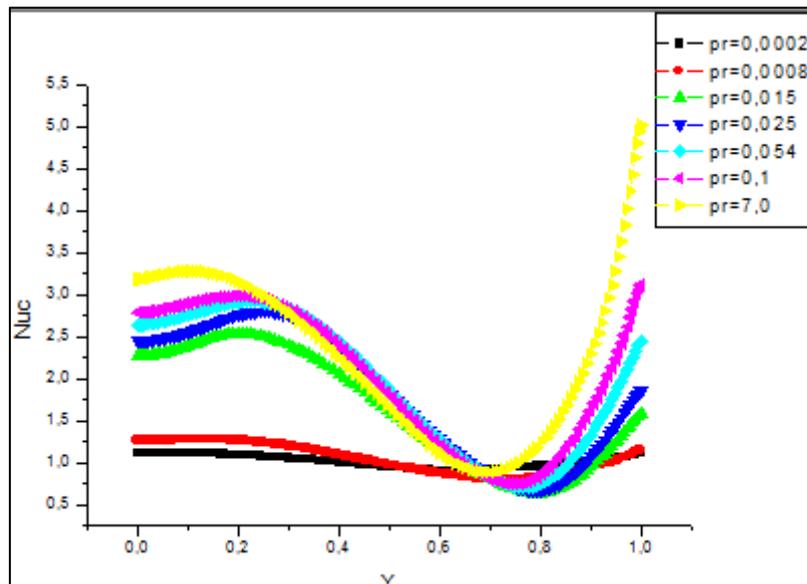


Figure IV4: nombre de Nusselt pour différentes Pr

Commentaire :

Pour voir l'influence du nombre de Prandtl, on a comparé quelques liquides (métaux liquide, eau, huiles). Les champs de température et des vitesses pour ces fluides pour Le champ de température dans le mercure est encore dans un régime conductif (isothermes presque verticales), alors qu'on est en régime convectif pour l'eau (isothermes courbées).

- Le nombre Nusselt augmente avec l'augmentation de nombre de prandtl.

Conclusion

L'effet thermo capillaire sur la convection de volume (thermo gravitaire) a été analysé et cela pour des nombres de Marangoni négatifs. Le modèle utilisé ainsi que l'ensemble des résultats ont montré que l'effet thermo capillaire même faible peut avoir une influence considérable sur la convection de volume.

A la fin de ce travail nous pouvons dire que les résultats obtenus sont en bon accord qualitatif avec les données disponibles dans la littérature

Conclusion générale

Conclusion Générale

Ce mémoire est une contribution à l'étude de la convection thermo capillaire en croissance cristalline. Pour lequel nous avons étudié aussi bien les situations où la convection naturelle est présente.

Le modèle mathématique décrivant le présent problème a été développé en ce basant sur les équations **les équations d'Oberbeck-Boussinesq** et de l'énergie. Certains auteurs les appellent les équations de Navier-Stokes-Fourier.

Toutefois cette modélisation nous a permis la visualisation du comportement fluide lors du Transfert de chaleur par convection de Marangoni (thermo capillaire) et nous a donné un profil de vitesse et de température qui caractérise ce mode d'échange de chaleur.

Avant d'exposer les différents cas de figures considérés dans ce travail, nous avons procédé dans une première partie, à une description détaillée de la méthode des volumes finis. Une technique numérique de haute précision que nous avons adopté pour l'élaboration d'un code de calcul, permettant la discrétisation du modèle mathématique exprimé en variables primitives (u,v,p) et sa résolution en adoptant l'algorithme SIMPLER.

Une étude détaillée des régimes thermiques et hydrodynamiques a donc été réalisée dans le cas bidimensionnel. Dans le but notamment d'étudier la nature des régimes observés. Dans le cas d'une cavité carrée soumise à un gradient de température horizontal. Nous avons étudié différents problèmes qui sont rencontrés dans la technique de solidification dirigée de type Bridgman horizontal.

Les résultats de la simulation numérique, nous ont permis de constater plusieurs constatations sur les effets subis par la structure hydrodynamique et thermique de l'écoulement, occasionnés par les effets de gravité.

Nous résumons dans ce qui suit les principaux résultats obtenus:

Dans le cas de la convection thermo capillaire seul, on a montré que dès que Ma est supérieur à quelques unités, le niveau de la vitesse le long de la cavité modifié, l'augmentation des forces de surface, entraîne l'accroissement du transfert thermique locale et l'écoulement à la surface libre est accéléré sur la plus grande partie de la cavité avec la naissance des vortex secondaires au niveau de coins de la cavité.

Annexe

Annexe

Annexe : Schémas numériques

Dans l'équation (III.11) de chapitre (III), l'inconnue ϕ n'est pas encore exprimée sur son domaine de définition (dans les termes convectifs), les nœuds de discrétisation. L'interpolation assurant cette opération dépendra du choix du schéma de discrétisation spatiale. Il existe plusieurs schémas donnant la valeur de ϕ sur son domaine (tel que : CDS, up Wind, exponentiel, hybride, puissance).

a) Le schéma aux différences centrées (CDS)

On suppose que les faces (e, w, n, s) se trouvent au milieu des nœuds (E, W, N, S) respectivement, les termes convectifs des variables généralisées Φ se présente par une interpolation comme suite :

$$\phi_e = \frac{\phi_E + \phi_P}{2}$$

$$\phi_w = \frac{\phi_P + \phi_W}{2} \text{ (B.1)}$$

$$\phi_n = \frac{\phi_N + \phi_P}{2}$$

$$\phi_s = \frac{\phi_P + \phi_S}{2}$$

Et en remplaçant dans l'équation (III.11), nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \{(\rho\phi)_P - (\rho\phi)_P^0\} \Delta\Omega + \left\{ \frac{F_e}{2} (\phi_E + \phi_P) + \frac{F_w}{2} (\phi_P + \phi_W) + \frac{F_n}{2} (\phi_N + \phi_P) + \frac{F_s}{2} (\phi_P + \phi_S) \right\} \Delta t \\ & - \{D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W) + D_n(\phi_N - \phi_P) - D_s(\phi_P - \phi_S)\} \Delta t \\ & - \{S_c + S_p \phi_p\} \Delta t \Delta\Omega - \{F_e - F_w + F_n - F_s\} \phi_P = 0 \end{aligned} \quad \text{(B.2)}$$

Si on pose $P_e = \frac{F}{D}$ qui désigne le nombre de Péclet de maille, on obtient :

$$a_E = D_e A(|P_e|) + \max(-F_e, 0)$$

$$a_W = D_w A(|P_w|) + \max(F_w, 0) \quad \text{(B.3)}$$

$$a_N = D_n A(|P_n|) + \max(-F_n, 0)$$

$$a_S = D_s A(|P_s|) + \max(F_s, 0)$$

Annexe

$$a_P^O = \rho_P^O \Delta \Omega$$

$$b = S_c \Delta \Omega + a_P^O \phi_P^O$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_P^O - S_c$$

la forme générale de l'équation algébrique discrétisée s'écrit comme suit :

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \quad (\text{B.4})$$

a_E, a_W, a_N, a_S et a_P : sont les coefficients correspondants, respectivement, aux nœuds Est, Ouest, Nord, Sud et centre du volume.

a_P^O : est le coefficient de la variable à calculer au point P, et à un instant précédent.

b : est un terme de source supposé être constant dans le volume de contrôle.

b) Schéma Upwind (UPS)

Dans ce schéma, la valeur de la variable Φ à l'interface n'est pas interpolée. Il est appliqué pour les écoulements à dominance convective.

La formulation pour le terme de diffusion est inchangée mais le terme de convection est calculé dans les hypothèses suivantes :

$$\phi_e = \phi_P \quad \text{si} \quad F_e > 0$$

$$\phi_e = \phi_E \quad \text{si} \quad F_e < 0$$

$$\phi_w = \phi_W \quad \text{si} \quad F_w > 0$$

$$\phi_w = \phi_P \quad \text{si} \quad F_w < 0 \quad (\text{B.5})$$

$$\phi_n = \phi_P \quad \text{si} \quad F_n > 0$$

$$\phi_n = \phi_N \quad \text{si} \quad F_n < 0$$

$$\phi_s = \phi_S \quad \text{si} \quad F_s > 0$$

$$\phi_s = \phi_P \quad \text{si} \quad F_s < 0$$

Cette condition peut être exprimée par l'opérateur : $[A,B] = \max(A,B)$

alors le schéma décentré s'écrit :

Annexe

$$F_e \phi_e = \phi_P \max(F_e, 0) - \phi_E \max(-F_e, 0)$$

$$F_w \phi_w = \phi_W \max(F_w, 0) - \phi_P \max(-F_w, 0) \text{ (B.6)}$$

$$F_n \phi_n = \phi_P \max(F_n, 0) - \phi_N \max(-F_n, 0)$$

$$F_s \phi_s = \phi_S \max(F_s, 0) - \phi_P \max(-F_s, 0)$$

En substituant les expressions (B.6) dans l'équation (III.11), l'équation de discrétisation devient :

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b$$

$$a_E = D_e + \max(-F_e, 0)$$

$$a_W = D_w + \max(F_w, 0) \text{ (B.7)}$$

$$a_N = D_n + \max(-F_n, 0)$$

$$a_S = D_s + \max(F_s, 0)$$

$$a_P^0 = \rho_P^0 \Delta \Omega$$

$$b = S_c \Delta \Omega + a_P^0 \phi_P^0$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_P^0 - S_c$$

Tous les coefficients de discrétisation de ce schéma sont positifs.

c) Schéma Hybride (HDS)

Ce schéma mis au point par Spadling (1972). Le schéma HDS est la combinaison des deux schémas (centré et Upwind).

En appliquant ce schéma, la variable généralisée Φ aux différentes interfaces du volume de contrôle prendra la forme suivante :

$$\phi_e = a_e \phi_P + (1 - a_e) \phi_E$$

$$\phi_w = a_w \phi_W + (1 - a_w) \phi_P \text{ (B.8)}$$

$$\phi_n = a_n \phi_P + (1 - a_n) \phi_N$$

$$\phi_s = a_s \phi_S + (1 - a_s) \phi_P$$

Annexe

Où les coefficients (i = e, w, n, s) sont définis par :

$$0 \quad \text{si} \quad P_e < -2 \rightarrow \text{Schéma upwind}$$

$$a_i = \frac{1}{2} \quad \text{si} \quad |P_e| \leq 2 \rightarrow \text{schéma centré (B.9)}$$

$$1 \quad \text{si} \quad P_e > 2 \rightarrow \text{schéma upwind}$$

En substituant les valeurs prises par la variable Φ à l'équation (III.11), on aura :

$$a_P \Phi_P = a_E \Phi_E + a_W \Phi_W + a_N \Phi_N + a_S \Phi_S + b$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_P^0 - S_c$$

$$a_P^0 = \rho_P^0 \Delta \Omega$$

$$b = S_c \Delta \Omega + a_P^0 \Phi_P^0$$

$$a_E = \max[-F_e, (D_e - \frac{F_e}{2})]$$

$$a_W = \max[F_w, (D_w + \frac{F_w}{2})] \quad (\text{B.10})$$

$$a_N = \max[-F_n, (D_n - \frac{F_n}{2})]$$

$$a_S = \max[F_s, (D_s + \frac{F_s}{2})]$$

d) Schéma à loi de puissance (PLDS)

On remarque que pour $P_e = \pm 2$ l'erreur est maximale, aussi il n'est pas exacte de mettre la diffusion égale à zéro pour $P_e > 2$. Une bonne approximation polynomiale de la solution exacte est donnée par le schéma PLDS (Power Law DifferntingScheme) développé par Patankar (1980), qui s'écrit pour le coefficient a_i comme suit :

$$a_E = -P_e D_e \quad \text{si} \quad P_e < -10$$

$$a_E = ((1 + 0.1P_e)^5 - P_e) D_e \quad \text{si} \quad -10 \leq P_e < 0 \quad (\text{B.11})$$

$$a_E = (1 + 0.1P_e)^5 D_e \quad \text{si} \quad 0 \leq P_e < 10$$

$$\frac{a_E}{D_e} = 0 \quad \text{si} \quad P_e > 10$$

Appliqué à notre cas, l'équation de discrétisation de ce schéma s'écrit :

Annexe

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b$$

$$a_P^0 = \rho_P^0 \Delta \Omega$$

$$b = S_c \Delta \Omega + a_P^0 \phi_P^0$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_P^0 - S_c$$

$$a_E = D_e \max(0, (1 - 0.1|P_e|^5) + \max(0, -F_e))$$

$$a_W = D_w \max(0, (1 - 0.1|P_w|^5) + \max(0, F_w)) \quad (\text{B.12})$$

$$a_N = D_n \max(0, (1 - 0.1|P_n|^5) + \max(0, -F_n))$$

$$a_S = D_s \max(0, (1 - 0.1|P_s|^5) + \max(0, F_s))$$

e) Le schéma exponentiel

Le schéma exponentiel discrétise l'ensemble des termes convectifs et diffusifs, contrairement aux schémas habituels tels que les schémas décentré et amont. ce schéma est assez peu utilisé car :

- les exponentielles coûtent cher à calculer numériquement ;
- le schéma exponentiel n'est pas exact pour les problèmes 2D, 3D, instationnaires et avec le terme source.

On trouve :

$$a_e = \frac{|F_e|}{\exp(P_e) - 1} + \max(F_e, 0)$$

$$a_w = \frac{|F_w|}{\exp(P_w) - 1} + \max(F_w, 0) \quad (\text{B.13})$$

$$a_n = \frac{|F_n|}{\exp(P_n) - 1} + \max(F_n, 0)$$

$$a_s = \frac{|F_s|}{\exp(P_s) - 1} + \max(F_s, 0)$$

Références

References

Références

- [1]D. Villers, J. K. Platten, Coupled buoyancy and Marangoni convection in acetone: experiments and comparison with numerical simulations. *J. Fluid Mech.* Vol. 234, pp. 487-510 (1992).
- [2]A. Zebib, G. M. Homsy, E. Meiburg, High Marangoni convection in a square cavity. *Phys. Fluides*, Vol. 28, pp. 3467- 3476 (1985).
- [3]G. Kasperski, Convection thermo capillaire bidimensionnelle en pont liquide chauffé latéralement. Thèse de Doctorat de l'Université Paris-Sud XI (1999).
- [4]A. Bergeon Instabilité de Marngoni-Bénard. 14eme Congrès Français de Mécanique, Toulouse (1999).
- [5]M. -I Char, K. -Ta Chiang, J. J. Jou, Oscillatory instability analysis of Bénard-Marangoni convection in a rotating fluid with internal heat generation. *Int. J. Heat Mass Transfer.*Vol. 40 N°4, pp. 857-867 (1997)
- [6]H. H. Bau, Control of Marangoni- Bénard convection *Int. J. Heat Mass Transfer.*Vol. 42, pp. 1327-1341(1999).
- [7]L. J. Peltier Time-Dependent thermo capillary convection in a rectangular cavity: numerical results for a moderate Prandtl number fluid. *J. Fluid Mech.* Vol. 257, pp.339-357 (1993).
- [8]D. M. Christopher, Prandtl number effects for Marangoni convection over a flat surface. *Int. J. Therm. Sci.* Vol. 40, pp. 564-570 (2001).
- [9]L.Rayleih.(On convection currents in horizontal layer of fluid ,when the higher temperature is on the underside).*Phil .Mag* .32:pp.529-538(1936).
- [10]Anwar Husain M., Hafiz M.Z., D.A.S. Rees, Buoyancy and thermo capillary driven convection flow of an electrically conducting fluid in an enclosure with heat generation. *International Journal of Thermal Sciences* 44 (2005) 676–684.
- [12]H.Bénard. (les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide transportant de la chaleur par convection en régime permanent).*Ann.Chim.phys.*7(ser.23) :pp.62-79(1901)

References

- [13]M.M.Ganzarolli.L.F.Milanez. (natural convection in rectangular enclosures heated from below and symmetrically cooled from the side).int.j.Heat Mass Transfer .38.pp.1063-1073(1995).
- [14]G de vahl Davis. (Natural convection of air in a square cavity): bench mark solution .intj.Numer.Methodsfluids , vol,3,pp,249-264(1983)
- [15]E.K.Lakhal et M.Hasnaoui (convection naturelle dans une cavité carrée chauffé périodiquement par le bas).Revue générale de thermique ,27.pp.480-485(1995)
- [16]Paolucciet D.R.Chenoweth (natural convection in shallow enclosures with differentially heated end walls).j.Heat Transfer 110.pp.625-634(1988)
- [17]A.Koca, the effects of Prandtl number natural convection in triangular enclosures with localized heating from below, Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 34, pp. 511–519, (2007).
- [18]A.Sarris, ., MHD natural convection in a laterally and volumetrically heated square cavity, International Journal of Heat and Mass
- [19]H .SABER, « étude numérique de la convection thermo capillaire et thermo gravitaire dans les milieux confinés sous l'action d'un champ magnétique», Thèse Magister, Génie Mécanique, Université M'HEMED BOUGARA-BOUMERDES, 2006
- [20]D. Akrou, *"Effet d'hystérésis en convection thermosolutale avec des gradients croisés: Etang de stockage,"* Rev. Energ. Ren, vol. 3, pp. 39- 47, 2000
- [21]Chu H.H.-S., Churchill S.W. et Patterson C.V.S. *"The effects of heater size, location, aspect ratio, and boundary conditions on two-dimensional, laminar, natural convection channels"*. J. Heat Transfer, Vol. 98, pp. 1194-201. (1976).