

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE AKLI MOHAND OULHADJ-BOUIRA



Faculté des Sciences et des Sciences Appliquées  
Département de Génie Mécanique

**Mémoire de fin d'étude**

Présenté par :

**GUERROUAZ Takfarinas**  
**LAFDAL Lynda**

En vue de l'obtention du diplôme de **Master 02** en :

Filière : GENIE MECANIQUE

Option : Energétique

**Thème :**

**Analyse par éléments finis du transfert de chaleur dans une plaque  
bidimensionnelle**

**Devant le jury composé de :**

BOUSSAID Mohammed	Pr	UAMOB	Président
LATTARI Kamel	MCB	UAMOB	Encadreur
HAMIMID Saber	MCA	UAMOB	Examineur

Année Universitaire 2020/2021

## Remerciements

*Avant tout, nous remercions Dieu le Tout Puissant de nous avoir donné la force, le courage, la volonté, l'amour du savoir et surtout la patience pour pouvoir produire ce modeste travail.*

- ❖ Nous adressons nos remerciements les plus sincères à toutes les personnes qui nous ont permis d'évoluer dans la réflexion et l'élaboration de ce travail.*
- ❖ Nos remerciements s'adressent particulièrement à notre promoteur **Mr. Lattari Kamel** pour avoir dirigé ce mémoire. Nous le remercions infiniment pour la confiance et le respect qu'il nous a toujours accordé et pour les idées qui nous ont beaucoup orientés à progresser. Sa haute compétence, ses qualités humaines, ses conseils judicieux ont été pour nous une source inestimable de réconfort et d'encouragements pour mener à terme ce travail. Qu'il trouve ici l'expression de nos profondes gratitude.*
- ❖ Nos remerciements s'adressent aussi aux membres de jury, pour avoir bien voulu accepter de juger ce travail.*

*Enfin, nous tenons à exprimer notre profonde gratitude à nos familles qui nous ont toujours soutenus et à tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail. Ainsi que l'ensemble des enseignants qui ont contribué à notre formation.*



Merci

# *Dédicaces*

*Je dédie ce mémoire,*

*A*

*Mon père,*

*Ma mère,*

*Mes frères et sœurs.*

*Takfarinas*

## *Dédicace*

*Du fond cœur, je dédie ce modeste travail à la personne la plus chère à mes yeux, ma mère, qui a tout sacrifié pour ses enfants, et qui a veillé à mon éducation, qui, sans elle je ne serais pas ce que je suis ;*

*A mon père que j'adore, en signe de reconnaissance pour son sacrifice,*

*A mes chers frères et mon adorable sœur. Qui m'ont beaucoup aidé par leur présence, leur encouragement leur amour,*

*A toutes ma famille que j'aime,*

*A mes amis chacun de son nom,*

*A tous ceux qui m'aiment et tous ceux que j'aime,*

*A toutes la promotion de Génie Mécanique 2021.*

*Lynda*

# Sommaire

Remerciements .....	i
Dédicaces .....	ii
Sommaire .....	iv
Liste des annexes.....	viii
Liste des figures .....	viii
Liste des tableaux .....	ix
Nomenclature .....	x
Liste des abréviations .....	xi
Introduction générale.....	1

---

## CHAPITRE I : Généralités sur les transferts de chaleur

---

I-1 Introduction .....	2
I-2 Notions de base.....	2
I-2-1 la chaleur.....	2
I-2-2 Flux de chaleur.....	2
I-2-3 La Température.....	3
I-3 Définition du transfert de chaleur .....	4
I-4 Bilan d'énergie .....	4
I-5 Expressions des flux d'énergie .....	5
I-5-1 Conduction.....	5
a. Définition.....	5
b. Domaines d'applications.....	6
I-5-2 Rayonnement .....	6
a. Définition.....	6

b. Domaines d'applications .....	7
I-5-3 Convection .....	7
a. Définition.....	7
b. Domaines d'applications .....	8
I-6 Flux de chaleur lié à un débit massique.....	9
I-6-1 Stockage d'énergie.....	9
I-6-2 Génération d'énergie.....	9
I-7 Equation de la chaleur .....	10
Remarque .....	12
I-8 Conclusion .....	12

---

**CHAPITRE II : Discrétisation par la méthode des éléments finis**

---

II-1 Introduction .....	13
II-2 Généralités sur la méthode des éléments finis .....	13
II-3 Historique .....	13
II-4 Principes de la méthode des éléments finis .....	14
II-5 Etapes de transformation du système différentiel initial .....	15
II-6 Avantages et inconvénients de la méthode des éléments finis .....	16
II-7 Quelques inconvénients La méthode des éléments finis .....	16
II-8 Caractéristiques d'un élément fini .....	17
II-8-1 Attributs d'un élément fini .....	17
II-8-2 Types des éléments.....	17
II-8-3 Choix des éléments finis.....	19
II-8-4 Qualité d'un élément fini .....	19
II-9 Démarche éléments finis .....	20
II-9-1 Discrétisation géométrique .....	20
II-9-2 Approximation nodale .....	21

II-10	Forme intégrale de l'équation de chaleur .....	21
II-11	Mise en œuvre pratique de la méthode des éléments finis .....	22
	<i>Etape I</i> : Identification du problème .....	23
	<i>Etape II</i> : Choisir des fonctions des températures convenables .....	23
	<i>Etape III</i> : Relier les températures générales de l'élément aux températures nodales .....	23
	<i>Etape IV</i> : Discrétisation de la forme intégrale .....	24
	<i>Etape V</i> : Assemblage .....	25
II-11-1	Résolution en régime stationnaire .....	26
II-11-2	Résolution en régime transitoire .....	27
II-12	Conclusion .....	28

---

**CHAPITRE III : Calcul élémentaire**

---

III-1	Introduction .....	29
III-2	Elément fini triangulaire rectangle à trois nœuds – première configuration .....	29
	<i>Etape I</i> : Identification du problème .....	29
	<i>Etape II</i> : Choisir des fonctions de température convenables .....	30
	<i>Etape III</i> : Relier les températures générales de l'élément aux températures nodales .....	30
	<i>Etape IV</i> : Discrétisation de la forme intégrale .....	31
III-3	Elément fini triangulaire rectangle à trois nœuds – deuxième configuration .....	35
	<i>Etape I</i> : Identification du problème .....	35
	<i>Etape II</i> : Choisir des fonctions de température convenables .....	35
	<i>Etape III</i> : Relier les températures générales de l'élément aux températures nodales .....	35
	<i>Etape IV</i> : Discrétisation de la forme intégrale .....	36
III-4	Conclusion .....	40

---

## CHAPITRE IV : Expérimentation numérique

---

IV-1 Introduction.....	41
IV-2 Analyse en régime stationnaire .....	41
IV-2-1 Description du problème.....	41
IV-2-2 Résolution par la méthode analytique .....	42
a) Développement de la méthode .....	42
a) Application numérique .....	45
IV-2-3 Résolution par la méthode des éléments finis .....	45
A) Maillage de 32 éléments .....	46
B) Maillage de 128 éléments.....	49
IV-3 Analyse en régime transitoire .....	51
IV-3-1 Description du problème .....	51
IV-3-2 Résolution par la méthode analytique .....	51
IV-3-3 Résolution par la méthode des éléments finis .....	56
IV-3-4 Comparaison des résultats.....	59
IV-4 Conclusion.....	61
Conclusion générale .....	62
Références bibliographiques .....	63
Annexe .....	64
Résumés	

## *Liste des Annexes*

<b><u>Annexe 1</u></b> : Calcul de la matrice inverse [A].....	64
<b><u>Annexe 2</u></b> : Calcul des matrices des fonctions d'interpolation [N].....	64
<b><u>Annexe 3</u></b> : Calcul de matrice de capacité thermique [C] .....	64
<b><u>Annexe 4</u></b> : Calcul de matrice de conductivité thermique [K] .....	65
<b><u>Annexe 5</u></b> : Calcul du vecteur des flux de chaleur {F} .....	65
<b><u>Annexe 6</u></b> : Résolution analytique en régime stationnaire .....	66
<b><u>Annexe 7</u></b> : Résolution globale de conductivité thermique relative au problème à 32 éléments.....	67
<b><u>Annexe 8</u></b> : Résolution par la méthode de l'élément fini en régime stationnaire exemple à 32 éléments.....	68
<b><u>Annexe 9</u></b> : Résolution par la méthode des éléments finis en régime stationnaire exemple à 128 éléments.....	69
<b><u>Annexe 10</u></b> : Résolution analytique en régime transitoire.....	70
<b><u>Annexe 11</u></b> : Solution par la méthode des éléments finis en régime transitoire exemple à 16 éléments.....	71

## *Liste des figures*

<b>Figure I.1</b> : Illustration des notions de transfert de chaleur, de température et d'équilibre Thermique .....	3
<b>Figure I.2</b> : Exemple illustrant les différents types de transferts de chaleur.....	4
<b>Figure I.3</b> : Système et bilan énergétique.....	4
<b>Figure I.4</b> : Conduction thermique dans une plaque .....	5
<b>Figure I.5</b> : Schéma du transfert de chaleur radiatif.....	6
<b>Figure I.6</b> : Schéma du transfert de chaleur convectif .....	8
<b>Figure I.7</b> : Bilan thermique appliqué à un système élémentaire .....	10
<b>Figure II.1</b> : Maillages les espaces de Hilbert. ....	14
<b>Figure II.2</b> : Définition du domaine .....	15

<b>Figure II.3</b> : Principales étapes de la méthode des éléments finis .....	15
<b>Figure II.4</b> : Erreur de discrétisation géométrique .....	20
<b>Figure II.5</b> : Evolution linéaire de la température sur l'intervalle $\Delta t$ .....	27
<b>Figure III.1</b> : Elément triangulaire à 3 nœuds – Première configuration.....	29
<b>Figure III.2</b> : Elément fini triangulaire à trois nœuds .....	35
<b>Figure IV.1</b> : Exemple de validation en régime stationnaire .....	41
<b>Figure IV.2</b> : Maillage de 32 éléments en régime stationnaire .....	46
<b>Figure IV-3</b> : Maillage de 128 éléments en régime stationnaire.....	49
<b>Figure IV-4</b> : Exemple de validation en régime transitoire .....	51
<b>Figure IV-5</b> : Variation de la température en fonction du temps en régime transitoire obtenue par la méthode analytique.....	56
<b>Figure IV-6</b> : Discrétisation du mur en 128 éléments triangulaires.....	57
<b>Figure IV-7</b> : Variation de la température en fonction du temps en régime transitoire obtenue par la méthode des éléments finis .....	59
<b>Figure IV-8</b> : Comparaison des résultats obtenus par les deux méthodes au point P1 .....	60
<b>Figure IV-9</b> : Comparaison des résultats obtenus par les deux méthodes au point P2 .....	60
<b>Figure IV-10</b> : Comparaison des résultats obtenus par les deux méthodes au point P3 .....	61

## *Liste des tableaux*

<b>Tableau I.1</b> : Conductivité thermique de certains matériaux .....	12
<b>Tableau II.1</b> : Types des éléments finis .....	18
<b>Tableau IV-1</b> : Résultats obtenus par la méthode analytique .....	35
<b>Tableau IV-2</b> : Résultats obtenus par la MEF avec un maillage de 32 éléments .....	49
<b>Tableau IV-3</b> : Résultats obtenus par la MEF avec un maillage de 128 éléments .....	50
<b>Tableau IV-4</b> : Comparaison des résultats obtenus par les deux méthodes et différents maillages .....	50

# Nomenclature

$\varphi$ : Flux de chaleur	(W)
$\lambda$ : Conductivité thermique des matériaux	(W/m.K)
A : Surface traversée par le flux de chaleur	(m <sup>2</sup> )
T : Température	Kelvin
$h_C$ : Coefficient d'échange entre la paroi et le fluide	(W.m <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> )
$\sigma$ : Constante de Stefan-Boltzmann	(5,67. 10 <sup>-8</sup> W.m <sup>-2</sup> .K <sup>-4</sup> )
$\epsilon$ : Emissivité de surface $0 < \epsilon < 1$ (=1 pour un corps noir)	
$\varphi_e$ : Flux de chaleur entrant dans le système	(W)
$\dot{m}$ : Débit massique	(Kg.S <sup>-1</sup> )
$C_p$ : Chaleur Spécifique	(J.Kg <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup> )
q : Puissance thermique générée par unité de volume	(W/m <sup>3</sup> )
L : La longueur	(mm)
b : Dimension verticale de l'élément fini	(mm)
h : Dimension horizontale de l'élément fini	(mm)
x : Variable d'espace dans la direction du flux	(m)
Q : La puissance thermique reçue par le système	(W)
$T_p$ : Température de surface du solide	Kelvin
$T_\infty$ : Température du fluide loin de la surface du solide	Kelvin
S : Aire de la section de passage du flux de chaleur	(m <sup>2</sup> )
$S_T$ : Surface du solide où les températures sont imposées	
$S_\varphi$ : Surface du solide où les flux sont imposés.	
$\varphi_{st}$ : Flux de chaleur stocké	(W)
$\rho$ : Masse volumique	(Kg . m <sup>-3</sup> )
V : Volume	(m <sup>3</sup> )
t : Temps	(s)
$\varphi_g$ : Flux d'énergie thermique générée	(W)
q : Densité volumique d'énergie générée	(W.m <sup>-3</sup> )
f (x, y, z) : La fonction polynomiale	
$\alpha$ : vecteur colonne des coefficients inconnus de la fonction polynomiale	
$\{T(x, y, z)\}_e$ : La température au point (x, y, z) de l'élément	Kelvin

$[K]_e$ : La matrice de conductivité thermique élémentaire	(W/m <sup>2</sup> )
$[C]_e$ : La matrice de capacité thermique élémentaire	(J/K)
$\{F\}_e$ : Le vecteur des flux élémentaire	(w)
$\{T\}_e$ : Le vecteur des températures élémentaire	Kelvin
$\{T_n\}_e$ : Le vecteur des températures nodales élémentaires	Kelvin
$[N]$ : La matrice d'interpolation	(mm)
$[N]_e$ : La matrice d'interpolation élémentaire	(mm)
$[N]_{e,n}$ : La matrice d'interpolation élémentaire nodale	(mm)
$[N]_{e,T}$ : La matrice d'interpolation élémentaire transposée	(mm)
$[B]_e$ : La matrice garde de la matrice d'interpolation	(mm)
$[K]$ : La matrice de conductivité thermique globale	(W/m <sup>2</sup> )
$[C]$ : La matrice de capacité thermique globale	(J/K)
$\{F\}$ : Le vecteur des flux nodaux global	(w)
$\{T\}$ : Le vecteur des températures globales	Kelvin
$\{T_n\}_e$ : Le vecteur des températures nodales élémentaires	Kelvin
$\{T_p\}$ : Le vecteur des températures imposées	Kelvin
$\{T_L\}$ : Le vecteur des températures inconnues	Kelvin

## *Liste des abréviations*

MEF : méthode des éléments finis

EDP : équations aux dérivées partielles

APDL : langage de conception paramétrique ANSYS

## INTRODUCTION GENERALE

La méthode des éléments finis (MEF) est une méthode numérique utilisée pour résoudre certains problèmes de la physique. C'est une méthode qui permet de déterminer une solution approchée sur un domaine spatial, c'est-à-dire qui permet de calculer un champ (de scalaires, de vecteurs, de tenseurs) qui correspond à certaines équations et à certaines conditions imposées.

La méthode consiste à découper le domaine spatial en petits éléments, également appelés mailles, et à rechercher une formulation simplifiée du problème sur chaque élément, c'est-à-dire à transformer le système d'équations quelconque en un système d'équations linéaires. Chaque système d'équations linéaires peut se représenter par une matrice. Les systèmes d'équations pour tous les éléments sont ensuite assemblés, ce qui forme une grande matrice ; la résolution de ce système global donne la solution approchée au problème.

Ce travail s'inscrit dans la continuité du travail de M. DENDANI [01] dont l'objectif consiste essentiellement à l'application de la méthode des éléments finis pour la résolution des problèmes de transferts de chaleur bidimensionnels en régime stationnaire et transitoire en utilisant un élément triangulaire à trois nœuds. Pour ce faire, le mémoire est organisé en quatre chapitres : le premier a été consacré à quelques définitions de bases et des différents modes de transferts de chaleur ainsi que la formulation analytique de l'équation de la chaleur en régime stationnaire et transitoire. Le deuxième chapitre comporte une présentation générale de la méthode des éléments finis où la forme faible est obtenue à l'aide de la formulation de Galerkin. De plus, nous avons présenté les différents types et formes des éléments unidimensionnels (1D), bidimensionnels (2D). Dans le troisième chapitre, nous avons présenté les techniques de calculs des matrices élémentaires dans le cas d'un élément fini triangulaire à trois nœuds. Le dernier chapitre sera réservé à l'expérimentation numérique afin d'illustrer les techniques d'assemblage des matrices globales et la résolution des systèmes algébriques obtenus. Finalement, nous terminons ce travail par une conclusion générale suivie de plusieurs annexes afin de simplifier l'analyse de ce sujet pour les promotions à venir.

---

**CHAPITRE I : Généralités sur le transfert de chaleur**

---

**I.1 Introduction**

Dans ce chapitre, nous discutons des concepts de base et des définitions du transfert de chaleur, équations, les lois qui régissent les trois modes principaux de transfert thermique (conduction, rayonnement et convection) ainsi que les expressions de l'énergie stockée et générée. Il s'agit de développer l'équation de la chaleur en considérant le bilan énergétique de l'ensemble de ces énergies. L'expression ainsi obtenue sera présentée et simplifiée pour le cas d'un transfert de chaleur bidimensionnel en régime transitoire.

**I.2 Notions de base****I.2.1 la chaleur**

En physique, on appelle chaleur une forme particulière de l'énergie. L'équivalence de la chaleur et du travail constitue le premier principe de la thermodynamique. Il en résulte qu'énergie, travail et quantité de chaleur ont une même unité: le joule. [2]

A la base de l'étude des transferts thermiques se trouvent les concepts de quantité de chaleur et de différence de température.

Le transfert de chaleur d'une partie d'une substance à une autre partie, ou d'un corps à un autre corps, s'effectue sous forme d'énergie cinétique d'agitation moléculaire désordonnée.

Ce transfert est le fait d'une différence de température entre les deux corps. La chaleur se propage spontanément du corps ayant la température la plus élevée vers celui ayant la température la plus basse, élevant ainsi la température de ce dernier, tout en abaissant la température du premier, dans la mesure où le volume des deux corps reste constant. Ceci constitue le second principe de la thermodynamique.

Ce second principe met en évidence la notion d'irréversibilité: La chaleur ne pourra pas se propager d'un corps froid vers un corps chaud, sauf si on fournit un travail. [2]

**I.2.2. Flux de chaleur**

La chaleur s'écoule sous l'influence d'un gradient de température des hautes vers les basses températures. La quantité de chaleur transmise par unité de temps et par unité d'aire de la surface isotherme est appelée densité de flux de chaleur [3]:

$$\Phi = \frac{\partial q}{\partial t} \quad (I - 1)$$

Où  $S$  est l'aire de la surface.

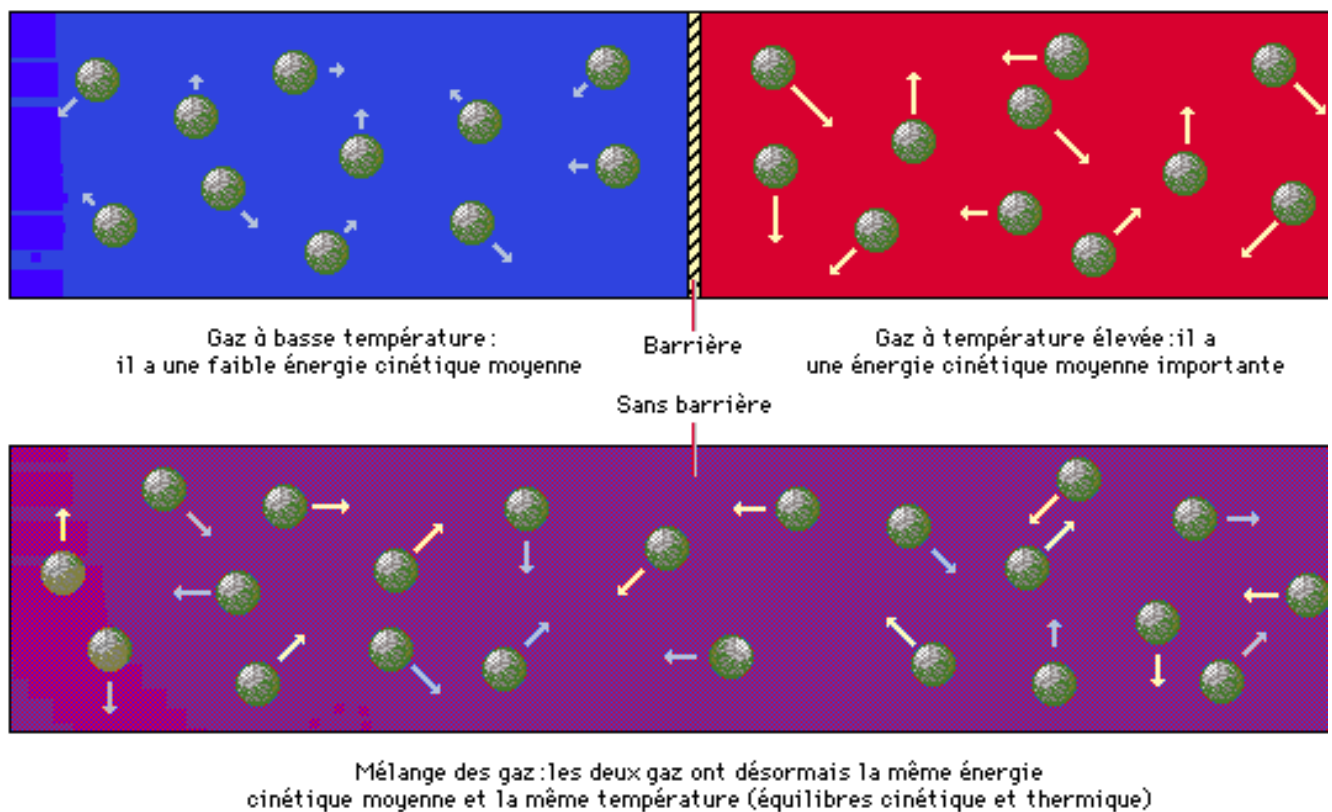
On appelle flux de chaleur la quantité de chaleur transmise sur la surface  $S$  par unité de temps:

$$\varphi = \frac{\partial Q}{\partial t} \quad (I - 2)$$

### I.2.3. La Température

On appelle température la grandeur physique qui mesure le degré de chaleur d'un corps ou d'un milieu.

Lorsque deux corps sont placés dans une enceinte adiabatique, le corps le plus chaud cède de la chaleur au corps le plus froid, jusqu'à ce que les deux corps aient la même température. On-dit alors qu'on a atteint l'équilibre thermique voir figure [2].



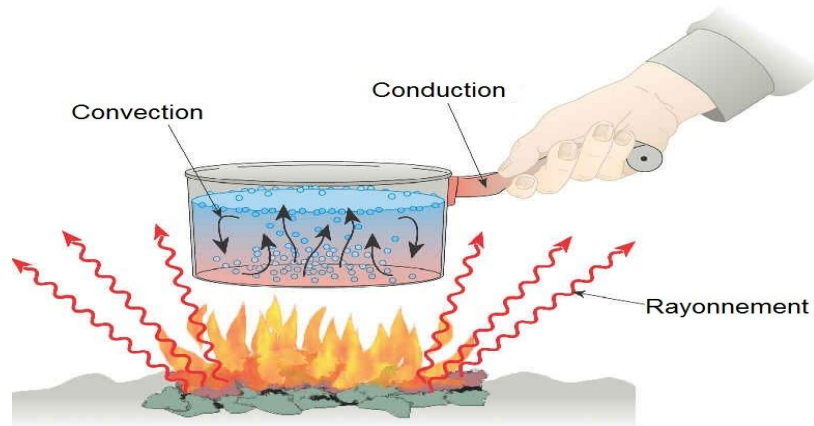
**Figure I.1:** Illustration des notions de transfert de chaleur, de température et d'équilibre

La température est une propriété thermodynamique du corps et mesure l'agitation microscopique de la matière. Selon la théorie cinétique, la température d'un corps est fonction de l'énergie cinétique moyenne de translation de ses molécules. L'énergie cinétique d'un corps est nulle à une température appelée zéro absolu. [2].

**I.3. Définition du transfert de chaleur**

Transfert de chaleur est une discipline d'ingénierie qui concerne la production, l'utilisation, la conversion et l'échange de chaleur (énergie thermique) entre des systèmes physiques. [4]

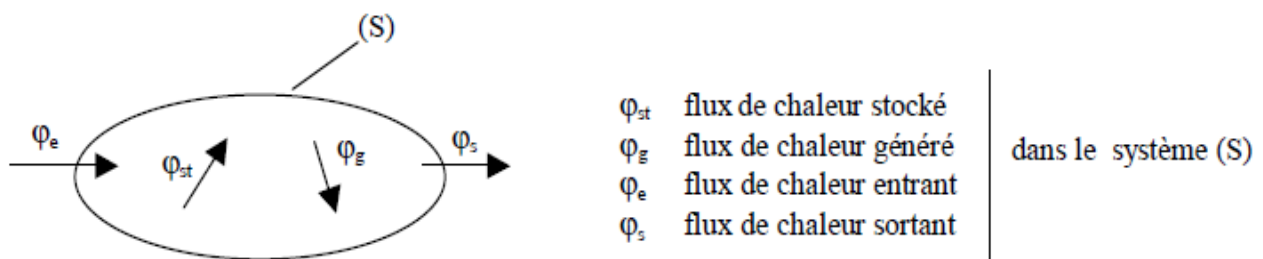
Dans la littérature relative à cette discipline, on reconnaît généralement trois modes distincts de transmission de la chaleur : la conduction, la convection et le rayonnement.



**Figure I.2:** Exemple illustrant les différents types de transferts de chaleur

**I.4. Bilan d'énergie**

Il faut tout d'abord définir un système (S) par ses limites dans l'espace et il faut ensuite établir l'inventaire des différents flux de chaleur qui influent sur l'état du système et qui peuvent être [5]



**Figure I.3 :** système et bilan énergétique

En appliquant le premier principe de la thermodynamique, nous pouvons établir le bilan d'énergie du système (S) :

$$\varphi_e + \varphi_g = \varphi_s + \varphi_{st} \tag{I - 3}$$

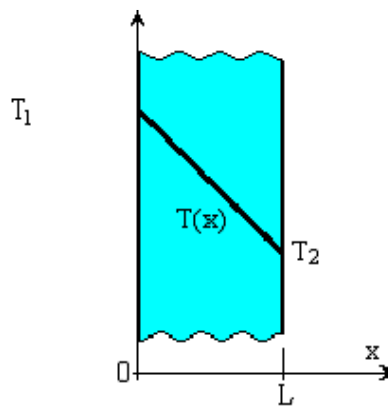
## I.5. Expressions des flux d'énergie

Nous allons tout d'abord illustrer les expressions des différents flux d'énergie, puis en les reportant dans le bilan d'énergie, on obtient une équation différentielle dont la résolution permet de connaître l'évolution de la température en chaque point du système. [5]

### I.5.1 Conduction

#### a. Définition

La conduction est une transmission de chaleur dans la masse d'un milieu matériel, les zones chaudes cédant de la chaleur à celles qui le sont moins. C'est le cas lorsqu'on chauffe l'extrémité d'une barre. [5].



**Figure I.4** Conduction thermique dans une plaque

Pour le cas unidirectionnel, le flux de chaleur prend la forme algébrique suivante:

$$\varphi = -\lambda \cdot S \frac{dT}{dx} \quad (I - 4)$$

$\varphi$  : Flux de chaleur (w) ou (Kcal/h)

$\lambda$  : Conductivité thermique des matériaux (w/m. k)

$x$  : Variable d'espace dans la direction du flux (m)

$S$  : Aire de la section de passage du flux de chaleur. (m<sup>2</sup>)

#### b. Domaines d'applications

Le transfert de chaleur par conduction caractérise tous les transferts de chaleur qui s'effectuent dans les parois séparant deux corps à des températures différentes. C'est le cas des surfaces d'échange des échangeurs de chaleur, mais c'est aussi celui des murs et vitrages d'un bâtiment, des cuves contenant des liquides chauds ou froids, des parois des fours, etc. [6].

Il est courant que les parois soient constituées de plusieurs matériaux ayant chacun un rôle spécifique (réfractaire, revêtement anticorrosion, isolant thermique, etc.) et qui sont des parois composites à travers lesquelles s'effectue le transfert de chaleur [4].

## I.5.2. Rayonnement

### a. Définition

Le rayonnement thermique peut être considéré comme un cas particulier du rayonnement électromagnétique. L'exemple le plus simple est celui du rayonnement solaire.

Le rayonnement thermique est le mode de transmission par lequel la chaleur passe d'un corps à haute température à un autre plus froid sans nécessité de support matériel. C'est donc le seul mode de transfert de chaleur qui peut se propager dans le vide.

Le rayonnement thermique ne diffère des autres ondes électromagnétiques, comme les ondes hertziennes par exemple, que par son origine : la température. En effet tout corps rayonne tant que sa température est différente de 0 K [7]

Dans les problèmes de conduction, on prend en compte le rayonnement entre un solide et le milieu environnant et dans ce cas nous avons la relation suivant [5] :

$$\varphi = \varepsilon \cdot \sigma \cdot S (T_p^4 - T_\infty^4) \quad (I - 5)$$

Avec

$\varphi$  : Flux de chaleur (w)

$\sigma$  : Constant de Stefan-Bolzman est égal à  $(5,67 \cdot 10^{-8} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4})$

$S$  : Aire de la section de passage du flux de chaleur ( $\text{m}^2$ )

$T_p$  : Température de surface du solide en (K)

$T_\infty$  : Température du fluide loin de la surface du solide en (K).

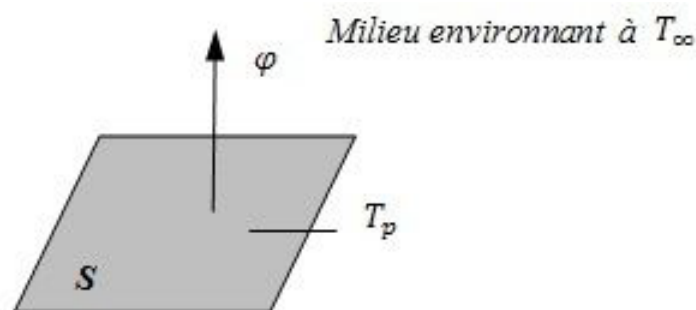


Figure I-5 : schéma du transfert de chaleur radiatif

## b. Domaines d'applications

Le rayonnement infrarouge est appliqué dans de très nombreux procédés industriels. Son action sur la matière est essentiellement thermique et les applications principales concernent

- le séchage (papiers, cartons, textiles, etc.)
- la cuisson (teintures, apprêts, enductions...)
- le chauffage (avant formage de matériaux divers, traitements thermiques, soudage, chauffage de postes de travail...)
- les polymérisations (encres, revêtements, emballages...)
- la stérilisation (vaccins pharmaceutiques, produits alimentaires divers...). [4]

### I.5.3. Convection

#### a. Définition

La convection est une mode de transport d'énergie par l'action combinée de la conduction, de l'accumulation de l'énergie et du mouvement du milieu. La convection est le mécanisme le plus important de transfert d'énergie entre une surface solide et un liquide ou un gaz [4].

La convection est un mode de transfert de chaleur qui met en jeu, en plus de la conduction, le mouvement macroscopique de la matière. Ce phénomène se produit au sein des milieux fluides en écoulement ou entre une paroi solide et un fluide en mouvement. On distingue trois types de convection [8] :

- ✓ **Convection naturelle:** les mouvements sont dus aux variations de masse volumique dans un fluide soumis au champ de pesanteur. Les variations de masse volumique peuvent être générées par des gradients de température (l'air chaud est plus léger que l'air froid) et/ou par des gradients de composition.
- ✓ **Convection forcée:** le mouvement du fluide est provoqué par des actions mécaniques extérieures (pompe, ventilateur...).
- ✓ **Convection mixte :** lorsque les deux types de convection coexistent dans un système.

Ce mécanisme de transfert est régi par la loi de Newton qui stipule que la densité de flux de chaleur échangé entre une paroi solide et un fluide en écoulement est Proportionnelle à l'écart de température qui lui a donné naissance [8].

$$\varphi = h \cdot S \cdot (T_P - T_\infty) \quad (I - 6)$$

Avec

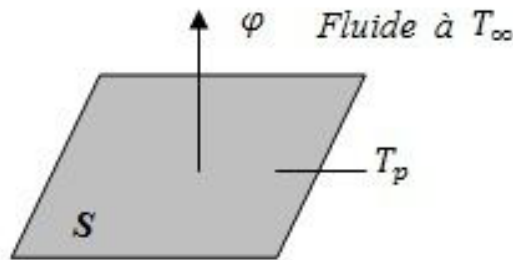
$\varphi$  : Flux de chaleur transmis par convection en (W)

$S$  : Aire de la surface de contact solide/fluide en (m<sup>2</sup>)

$T_p$  : Température de surface du solide en (K)

$T_\infty$  : Température du fluide loin de la surface du solide en (K)

$h$  : Coefficient de transfert de chaleur par convection (W.m<sup>-1</sup>. K<sup>-1</sup>)



**Figure I-6** : Schéma du transfert de chaleur convectif [2]

### b. Domaines d'applications

Les applications du transfert de chaleur par convection sont beaucoup trop nombreuses pour que l'on puisse envisager de les citer toutes. Elles interviennent chaque fois que l'on chauffe ou que l'on refroidit un liquide ou un gaz, qu'il s'agisse de faire bouillir de l'eau dans une casserole, du radiateur de chauffage central, du radiateur associé au moteur d'une voiture ou de l'échangeur dans un procédé, évaporateur ou condenseur [4].

La convection s'applique même si la surface d'échange n'est pas matérialisée par une paroi, ce qui est le cas des condenseurs par mélange ou des réfrigérants atmosphériques, voire des sècheurs à air chaud

Les trois mécanismes de transfert de la chaleur sont [4]

- **Conduction** : transfert dans la masse.
- **Rayonnement** : transfert à distance d'autant plus important que la température est élevée.
- **Convection** : transfert par transport.

A cela, il faut ajouter le changement d'état qui dissipe ou absorbe de la chaleur.

### I.6. Flux de chaleur lié à un débit massique

Lorsqu'un débit massique  $\dot{m}$  de matière entre dans le système à la température  $T_1$  et en ressort à la température  $T_2$ , on doit considérer dans le bilan (I-2) un flux de chaleur entrant correspondant [5] :

$$\varphi_e = \dot{m} \cdot C_p \cdot (T_1 - T_2) \quad (I - 7)$$

Où

$\varphi_e$  : Flux de chaleur entrant dans le système (W)

$\dot{m}$  : Débit massique (Kg.S<sup>-1</sup>)

$C_p$  : Chaleur Spécifique ;(J.Kg<sup>-1</sup>.k<sup>-1</sup>)

$T_1, T_2$  : Températures d'entrée et de sortie(K).

#### I.6.1. Stockage d'énergie

Le stockage d'énergie dans un corps correspond à une augmentation de son énergie interne au cours du temps d'où, à pression constante et en l'absence de changement d'état [2] :

$$\varphi_{st} = \rho \cdot v \cdot C_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad (I - 8)$$

$\varphi$  : Flux de chaleur stocké (W)

$\rho$  : Masse volumique ; (Kg.m<sup>-3</sup>)

$V$  : Volume (m<sup>3</sup>)

$C_p$  : Chaleur Spécifique (J.Kg<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup>)

$T$  : Température (K)

$t$  : temps (s).

#### I.6.2. Génération d'énergie

Elle intervient lorsqu'une autre forme d'énergie (chimique, électrique, mécanique, nucléaire) est convertie en énergie thermique. On peut l'écrire sous la forme [5]:

$$\varphi_g = q \cdot v \quad (I - 9)$$

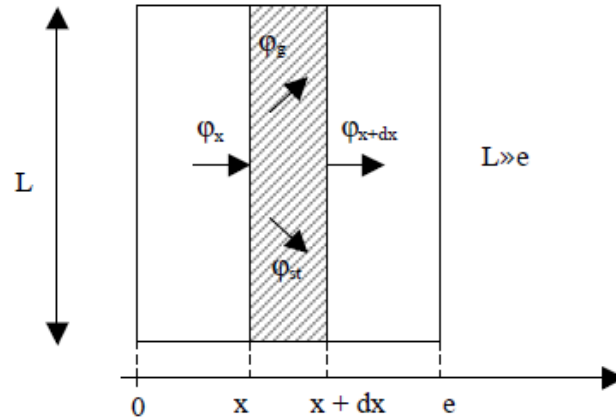
$\varphi_g$  : Flux d'énergie thermique générée (W)

$q$  : Densité volumique d'énergie générée (W.m<sup>-3</sup>)

$v$  : Volume (m<sup>3</sup>).

**I.7. Equation de la chaleur**

Dans sa forme monodimensionnelle, elle décrit le transfert de chaleur unidirectionnel au travers d'un mur plan :



**Figure I-7 :** Bilan thermique appliqué à un système élémentaire [5]

Considérons un système d'épaisseur  $dx$  dans la direction  $x$  et de section d'aire  $S$  normalement à la direction  $Ox$ . Le bilan d'énergie sur ce système s'écrit :

$$\varphi_x + \varphi_g = \varphi_{x+dx} + \varphi_{st} \tag{I - 10}$$

Avec

$$\varphi_x = -\left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}\right) \quad : \text{ Flux entrant (conduction).}$$

$$\varphi_g = q \cdot S \cdot dx \quad : \text{ Flux généré.}$$

$$\varphi_{x+dx} = -\left(\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial T}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial T}{\partial x}\right) dx \quad : \text{ Flux sortant.}$$

$$\varphi_{st} = \rho \cdot Cp \cdot S \cdot dx \frac{\partial T}{\partial t} dx \quad : \text{ Flux stocké.}$$

En tenant compte de ces expressions dans l'équation (I.10)

$$-\left(\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}\right) + q S dx = -\left(\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial T}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \cdot S \cdot \frac{\partial T}{\partial x}\right) dx + \rho cp S dx \frac{\partial T}{\partial t} \tag{I - 11}$$

Après simplification, nous obtenons l'équation de la chaleur dans le cas unidirectionnel :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + q = \rho cp \frac{\partial T}{\partial t} \tag{I - 12}$$

Dans le cas tridimensionnel, cette équation prend la forme générale suivante:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \cdot x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q = \rho \cdot C_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad (I - 13)$$

Cette équation peut se simplifier dans un certain nombre de cas :

a) Si le milieu est isotrope  $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = \lambda$

$$\lambda \cdot \left( \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2} \right) + \frac{d\lambda}{dT} \left[ \left( \frac{\partial T^2}{\partial X} \right) + \left( \frac{\partial T^2}{\partial Y} \right) + \left( \frac{\partial T^2}{\partial Z} \right) \right] + q = \rho \cdot C_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad (I - 14)$$

b) Si l'écart de température n'est pas important,  $\lambda$  peut être considérée constante

➤ Cas tridimensionnel

$$\lambda \cdot \left( \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2} \right) + q = \rho \cdot C_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad (I - 15)$$

➤ Cas bidimensionnel

$$\lambda \cdot \left( \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} \right) + q = \rho \cdot C_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad (I - 16)$$

➤ cas unidimensionnel

$$\lambda \cdot \left( \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} \right) + q = \rho \cdot C_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad (I - 17)$$

c) en régime stationnaire

➤ Cas tridimensionnel

$$\lambda \cdot \left( \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2} \right) + q = 0 \quad (I - 18)$$

➤ Cas bidimensionnel

$$\lambda \cdot \left( \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} \right) + q = 0 \quad (I - 19)$$

➤ cas unidimensionnel

$$\lambda \cdot \left( \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} \right) + q = 0 \quad (I - 20)$$

d) S'il n'y a pas de génération d'énergie à l'intérieur du système ( $q = 0$ )

$$\lambda \cdot \left( \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2} \right) = \rho \cdot C_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad (I - 21)$$

Nous présentons dans le tableau suivant quelques valeurs de conductivité thermique de matériaux homogènes :

Matériau	$\lambda$ (W.m <sup>-1</sup> .°C <sup>-1</sup> )	Matériau	$\lambda$ (W.m <sup>-1</sup> .°C <sup>-1</sup> )
Argent	419	Eau	0,60
Cuivre	386	Plâtre	0,48
Aluminium	204	Amiante	0,16
Acier doux	45	Liège	0,044-0,049
Acier inox	15	Laine de roche	0,038-0,041
Glace	1,88	Laine de verre	0,035-0,051
Béton	1,4	Polystyrène expansé	0,036-0,047
Bois (feuillu-résineux)	0,12-0,23	Polyuréthane (mousse)	0,030-0,045
Brique terre cuite	1,1	Polystyrène extrudé	0,027
Verre	1,05	Air	0,026

**Tableau I.1** : Conductivité thermique de certains matériaux [5]

### Remarque :

Dans cette équation, la conductivité thermique est supposée être un scalaire constant (c'est le cas des solides homogènes et isotropes). Il existe cependant de nombreux cas où la conductivité thermique dépend des propriétés d'orientation du solide (cristal, matériau déposé en couches minces, matériau fibreux etc..).

La conductivité thermique devient alors un tenseur dont la représentation matricielle dans le repère orthonormé (O, x, y, z) est :

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{xz} \\ & \lambda_{yy} & \lambda_{yz} \\ Sym & & \lambda_{zz} \end{bmatrix} \quad (I - 22)$$

### I.8 Conclusion

Ce chapitre nous a permis de cerner, d'une manière générale, les mécanismes de transfert de chaleur et de présenter les lois générales qui les gouvernent. La résolution numérique et analytique des équations de transfert de chaleur ainsi développées fera l'objet des chapitres subséquents.

---

**Chapitre II : Discrétisation par la méthode des éléments finis**

---

**II-1 Introduction**

Dans ce chapitre on va aborder les lois fondamentales de la mise en œuvre de la méthode des éléments finis pour résoudre des problèmes de transfert de chaleur envisagé dans le chapitre précédant. Par ailleurs, la solution analytique des équations décrivant le transfert de chaleur sont généralement inaccessible no somme donc guider à enquêté des solutions approchées par des méthodes numérique telles que la méthode des éléments finis

**II- 2 Généralités sur la méthode des éléments finis [09]**

La méthode des éléments-finis (MEF) est une méthode d'approximation numérique très utilisée pour résoudre les équations aux dérivées partielles (EDP) rencontrées dans divers domaines tels que

- Mécanique des milieux continus (solides et fluides)
- Diffusion thermique
- Electromagnétisme et électrostatique
- Problèmes multi-physiques (couplage thermomécanique ou piézo-électrique)

En résumé, à partir d'un problème différentiel, on développe une formulation variationnelle associée équivalente, dont on calcule une approximation de la solution en projetant sur un espace de dimension finie, ce qui revient à résoudre au final un système linéaire, chose que les ordinateurs actuels peuvent faire aisément. [09]

L'appellation éléments finis vient de la décomposition du domaine d'étude en éléments : ils sont souvent représentés par un maillage, voir figure II.1

**II- 3 Historique [09]**

L'origine de la méthode peut se trouver dans les travaux de Fermat et Bernoulli (1743) avec le calcul des variations, puis il faut attendre le début du XXème siècle avec les progrès en analyse avec la méthode de Galérien se basant sur des théorèmes de projection dans les espaces de Hilbert. [09]



*Figure II-1: Maillages des espaces de Hilbert [09]*

En 1943 Robert Courant introduit le principe vibrationnel avec des fonctions de base à support locaux ouvrant la voie à une division d'un domaine considéré en « éléments ». Cependant ce n'est qu'avec le développement des ordinateurs que ces travaux trouvent leurs applications avec les travaux pionniers de Zienkiewicz et Argyris qui définirent la méthode en 1960.

Ce qui amène le succès de la méthode et sa puissance est l'apport du calcul matriciel, introduit par un ingénieur civil anonyme. La méthode connaît alors un développement fulgurant accompagné par les progrès de l'informatique.

La méthode des éléments-finis est une méthode puissante basée sur une théorie mathématique rigoureuse.

Aujourd'hui, les 'éléments-finis sont un outil majeur, incontournable en mécanique (fluides et solides, interactions, structures), et applicable dans de nombreux domaines impliquant des problèmes d'EDP aux limites comme par exemple en mathématiques financières ou l'électromagnétisme.

De nombreux codes industriels (solveurs) existent et sont généralement couplés à un logiciel de CAO ou Computer Aided Design (CAD) en Anglais. Citons Ansys, Abaqus, Robot, LS-dyna, Feap, Code-Aster, Cast3M et bien d'autres.[09]

#### **II-4 Principes de la méthode des éléments finis**

La méthode des éléments finis repose sur l'approximation d'un milieu continu par un milieu discret : cette opération a pour objectif la transformation du système initial d'équations aux dérivées partielles par un système d'équations algébriques plus facilement exploitables sur ordinateur. La synoptique décrit les principales phases de la méthode. [10]

**II-5 Etapes de transformation du système différentiel initial [10]**

Cette transformation peut être obtenue par diverses méthodes, parmi celles-ci, une des deux plus couramment employées est la méthode des résidus pondérés. Pour plus de généralité, nous avons adopté les notations suivantes pour représenter le système différentiel.

Soit un système défini sur un domaine  $V$  délimité par une frontière  $S$

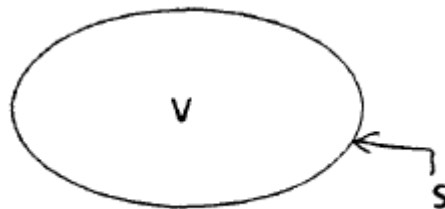


Figure II-2: Définition du domaine

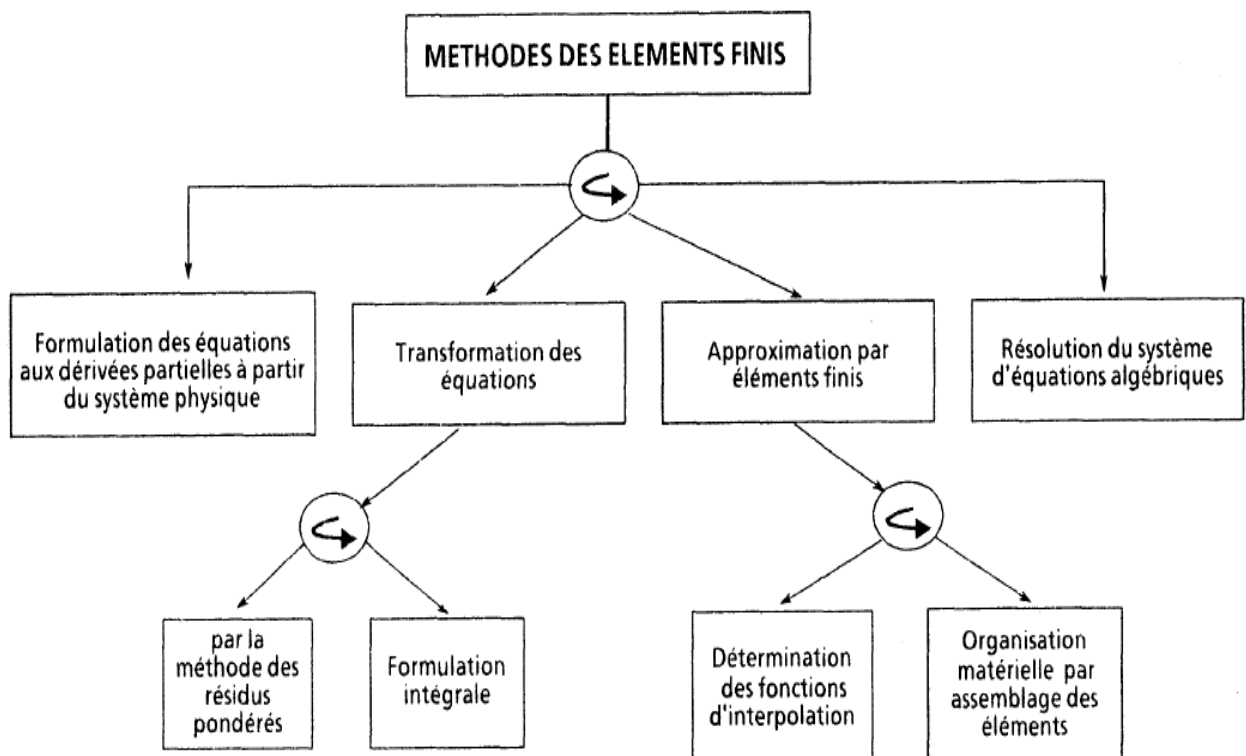


Figure II-3: Principales étapes de la méthode des éléments finis [10]

**II-6 Avantages et inconvénients de la méthode des éléments finis [11]**

De toutes les méthodes permettant de résoudre de manière approximative un problème aux limites (séries, différences finies, ...), la méthode des éléments finis présente de tels avantages qu'elle est la plus utilisée (parfois même exagérément), sauf cas particuliers.

Ces avantages sont essentiellement les suivants :

- La puissance de la méthode des éléments finis réside essentiellement dans sa généralité et sa souplesse
- Elle peut être applicable à une variété de problèmes physiques. La géométrie du domaine peut être quelconque, les forces et les conditions aux limites peuvent être aussi de nature quelconque
- Le maillage peut combiner autant de types d'éléments que l'on souhaite
- Et toute cette généralité est contenue dans un programme unique qu'on peut faire tourner sur un ordinateur (sélection du type de problème, de la géométrie, du type d'élément, des chargements et des conditions aux limites)
- la méthode des éléments finis réside dans le fait que le modèle qu'elle utilise est très proche de la structure réelle

**II-7 Quelques inconvénients de la méthode des éléments finis [11]**

- Elle donne un résultat numérique particulier pour un problème spécifique
  - Elle ne fournit aucune forme de solution susceptible de permettre une étude analytique de l'effet d'un changement de paramètre par exemple un ordinateur, un programme fiable et une utilisation intelligente sont nécessaires
  - Les programmes généraux de calcul doivent être fortement documentés
  - L'expérience et un grand sens de l'ingénieur sont indispensables à la définition d'un bon modèle
  - La plupart des problèmes comportent un grand nombre de données et une foule de résultats qu'on doit dépouiller avec méthode pour une compréhension optimale.
- Modèle

## II-8 Caractéristiques d'un élément fini [11]

### II-8-1 Attributs d'un élément fini

Un découpage artificiel (par l'imagination) d'un milieu continu en éléments finis permet d'isoler un de ces éléments pour l'étudier et établir les caractéristiques. L'identification d'un élément fini comprend les points suivants :

- *Géométrie* : un élément fini peut être un segment de droite ou de courbe, triangle ou quadrilatère (plan ou courbe), tétraèdre, prismes ou hexaèdre (brique). Les frontières entre les éléments peuvent être respectivement des points, des segments de droite ou de courbe, des faces planes ou courbes.
- *Matériau* : le matériau de l'élément est défini par une loi de comportement (loi de

Hooke isotrope, ... etc.).

- *Nœuds* : les nœuds définissent la géométrie et assurent la connexion des éléments les uns aux autres. Ils occupent les sommets, les extrémités, les milieux des arêtes et faces...etc.
- *Degrés de liberté* : la fonction d'approximation (en général le champ de déplacements ou champ de potentiels) est exprimée en fonction des valeurs particulières qu'elles prennent aux nœuds, valeurs qui deviennent les inconnues nodales. L'union, par leurs degrés de liberté nodaux communs des différents éléments adjacents, permet de reconstituer la solution complète (assemblage) tout en veillant à respecter certaines règles, dites critères de convergence.
- *Forces nodales* : à travers les nœuds transitent des forces associées aux degrés de liberté. Elles sont dues aux charges appliquées à l'élément (poids propre, charge uniforme, température ...etc.)

### II-8-2 Types des éléments

On peut classer, les différents types d'éléments finis suivant leur géométrie (Tableau II-1) comme suit :

- Les éléments unidimensionnels : barres, poutres rectilignes ou courbes utilisées de façon individuelle ou associées à des plaques pour modéliser les raidisseurs dans un voile

- Les éléments bidimensionnels : élasticité plane, plaque en flexion, coques courbes, de forme triangulaire ou quadrangulaire
- Les éléments tridimensionnels : éléments de volume ou coques épaisses
- Les éléments axisymétriques : qui constituent une classe bien particulière : tores à section triangulaire ou quadrangulaire, coques coniques ou méridienne courbe.[08]

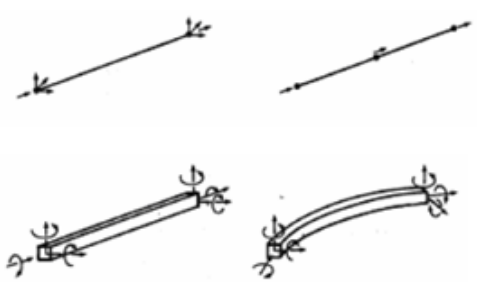
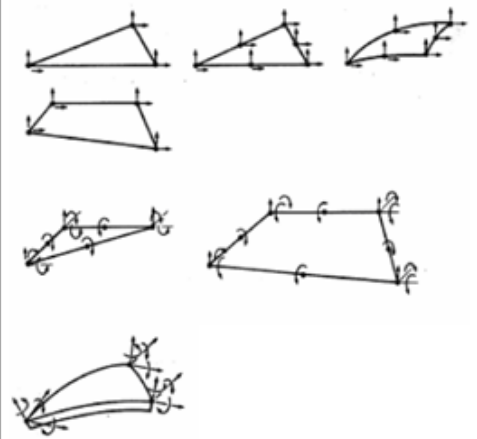
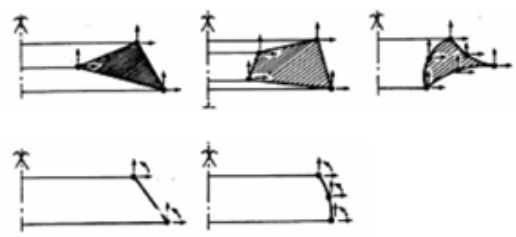
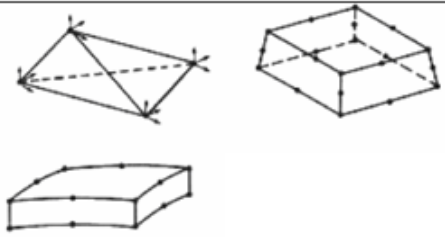
CLASSE	NOM	GÉOMÉTRIE
1 D.	Barre  Poutre	
2 D.	Elasticité 2D membranes  plaques en flexion  Coques	
AXISYM.	Tores axisymétriques  Coques axisymétriques	
3 D.	Volume  Coque épaisse	

Tableau II-1: Types des éléments finis [11]

### II-8-3 Choix des éléments finis

Les éléments doivent s'adapter à la nature du problème à traiter, c'est-à-dire respecter les hypothèses et se conformer aux caractéristiques de la modélisation. Certains programmes offrent un choix très vaste, d'autres très limité. Il convient donc de passer en revue les particularités essentielles des éléments disponibles : [11]

- Modèle (déplacement, équilibre, mixte, ...)
- Convergence (critères et taux)
- Degré (des divers champs)
- Nœuds, et inconnues aux divers nœuds
- Compatibilité des éléments les uns avec les autres
- Performances et limitations

### II-8-4 Qualité d'un élément fini

Un bon élément fini doit réunir les propriétés suivantes : [11]

- Aucun défaut de base (mécanisme...)
- Convergence rapide
- Bonne précision, déjà dans un maillage grossier
- Qualités de convergence et précision conservée pour une distorsion raisonnable
- Vecteurs forces consistants
- souplesse d'emploi
- Connexion (conforme) possible avec d'autres modèles
- Dérivation théorique simple et claire
- Programmation efficace et limpide

## II-9 Démarche éléments finis [12]

Les principales étapes de construction d'un modèle éléments finis, qui sont détaillées par la suite, sont les suivantes :

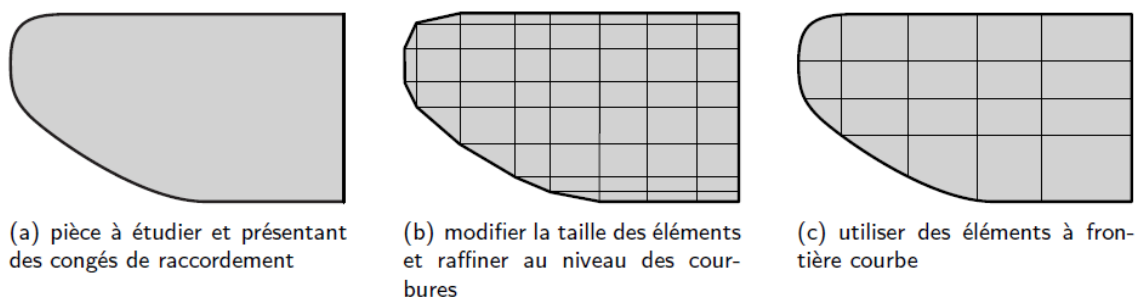
- Discrétisation du milieu continu en sous domaines
- Construction de l'approximation nodale par sous domaine
- Calcul des matrices élémentaires correspondant à la forme intégrale du problème
- Assemblage des matrices élémentaires
- prise en compte des conditions aux limites
- Résolution du système d'équations

### II-9-1 Discrétisation géométrique [12]

Cette opération consiste à procéder à un découpage du domaine continu en sous domaines

Il faut donc pouvoir représenter au mieux la géométrie souvent complexe du domaine étudié par des éléments de forme géométrique simple. Il ne doit y avoir ni recouvrement ni trou entre deux éléments ayant une frontière commune.

Lorsque la frontière du domaine est complexe, une erreur de discrétisation géométrique est inévitable. Cette erreur doit être estimée, et éventuellement réduite en modifiant la forme ou en diminuant la taille des éléments concernés comme proposé sur la figure 2.1. Sur chaque élément nous allons chercher à définir une approximation de la fonction solution.



**Figure II-4:** Erreur de discrétisation géométrique [12]

**II-9-2 Approximation nodale [12]**

La méthode des éléments finis est basée sur la construction systématique d'une approximation  $u^*$  du champ des variables  $u$  par sous domaine. Cette approximation est construite sur les valeurs approchées du champ aux nœuds de l'élément considéré, on parle de représentation nodale de l'approximation ou plus simplement d'approximation nodale.

**II-10 Forme intégrale de l'équation de chaleur [13]**

L'équation de la chaleur présentée dans le chapitre précède, l'équation (I-16), s'écrit comme suit :

$$\lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + q = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (II - 1)$$

Où

$T(x, y, z, t)$ : Température en tout point du solide (est la solution recherchée de cette équation)

$\lambda$ : Conductivité thermique du matériau du solide (considérée constante dans ce présent travail)

$q$ : Densité volumique d'énergie générée par une source de chaleur

$\rho$ : Masse volumique du matériau

$c_p$ : Chaleur spécifique.

Cette équation peut également être réécrite sous la forme suivante :

$$\text{div}(\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T) + q = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (II - 2)$$

Pour résoudre cette équation par la méthode des éléments finis, nous utilisons la méthode des résidus pondérés dans la formulation de Galerkin. Ainsi, en multipliant cette l'équation par une fonction arbitraire  $\bar{T}$  et en l'intégrant sur le domaine  $V$ , nous obtenons :

$$\int_V (\bar{T} (\text{div}(\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T) + q)) dV = \int_V \bar{T} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dV \quad (II - 3)$$

$$\int_V \bar{T} \text{div}(\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T) dV + \int_V \bar{T} q dV - \int_V \bar{T} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dV = 0 \quad (II - 4)$$

En considérant la relation suivante où  $f$  sont un scalaire et  $v$  un vecteur :

$$\text{div}(f \vec{v}) = f \text{div}(\vec{v}) + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} f \text{ D'où } f \text{div}(\vec{v}) = \text{div}(f \vec{v}) - \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} f \quad (II - 5)$$

On peut écrire alors :

$$\bar{T} \text{div}(\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T) = \text{div}(\bar{T} \lambda \overrightarrow{\text{grad}} T) - \lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \bar{T} \quad (II - 6)$$

En substituant l'équation (II-6) dans l'équation (II-4), on aura :

$$\int_V \text{div}(\bar{T} \text{div}(\lambda \overrightarrow{\text{grad}}T)) dV - \int_V \lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}}T \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\bar{T} dV + \int_V \bar{T} q dV - \bar{T} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dV = 0$$

Transformons le premier terme de cette équation en intégrale de surface à l'aide du théorème d'Ostrogradski (théorème de la divergence) :

$$\int_V \text{div}(\bar{T}(\lambda \overrightarrow{\text{grad}}T)) dV = \int_{S_\varphi} \bar{T} \cdot \bar{n} \cdot (\lambda \overrightarrow{\text{grad}}T) dS + \int_{S_T} \bar{T} \cdot \bar{n} \cdot (\lambda \overrightarrow{\text{grad}}T) dS \quad (II - 7)$$

Où

$S$ : Surface totale du solide  $S = S_T \cup S_\varphi$

$S_T$  : Surface du solide où les températures sont imposées

$S_\varphi$  : Surface du solide où les flux sont imposés

$\bar{n}$  : Vecteur unitaire normal à  $S$  et dirigé vers l'extérieur de  $V$

En imposant la condition  $\bar{T} = 0$  sur  $S_T$ , annulera la dernière intégrale de l'équation (II-7). De plus, en considérant les différents modes de transfert de chaleur présentés auparavant :

$$\bar{T} \cdot \bar{n} \cdot (\lambda \overrightarrow{\text{grad}}T) = \bar{T}(\varphi_{cond} + \varphi_{conv} + \varphi_{rya}) \quad (II - 8)$$

$$\bar{T} \cdot \bar{n} \cdot (\lambda \overrightarrow{\text{grad}}T) = \bar{T}(\varphi_{cond} + h(T_f + T) + \varepsilon\sigma(T_\infty^4 + T^2)) \quad (II - 9)$$

En tenant compte des équations (II-7) et (II-9) dans l'équation (II-6), nous obtenons la formulation intégrale faible d'un problème thermique :

$$\int_{S_\varphi} \bar{T}(\varphi_{cond} + h(T_f + T) + \varepsilon\sigma(T_\infty^4 + T^2)) dS - \int_V \lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}}T \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\bar{T} \cdot dV + \int_V \bar{T} q dV - \int_V \bar{T} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} dV = 0 \quad (II - 10)$$

### II-11 Mise en œuvre pratique de la méthode des éléments finis [14]

Dans ce qui suit, nous présenterons les étapes de base nécessaire pour la résolution de l'équation intégrale (II-10) par la méthode des éléments finis dont l'objectif est d'abord la construction de la matrice de conductivité thermique élémentaire  $[K]_e$ , du vecteur des flux nodaux  $[F]_e$  et du vecteur des température nodale  $[T]_e$  et ensuite la construction des matrices globales respectives.

**Etape I : Identification du problème**

Cette étape consiste à choisir un système de coordonnées et une numération des nœuds appropriés pour l'élément fini considéré. En général, le domaine  $V$  est décomposé en sous-domaines  $V_e$  de forme géométrique simple (les éléments) reliés entre eux en des points appelés nœuds. Cette opération s'appelle maillage (figure II-8).

**Etape II : Choisir des fonctions de température convenables**

On choisit une fonction de température qui définit de façon unique l'état de température de tous les points de l'élément. Ce modèle peut être représenté de façon commode par une expression polynomiale, et puisque son but est d'exprimer les températures  $T_e(x, y, z)$  de n'importe quel point de l'élément en termes des températures nodales  $\{T\}_e$ , elle doit contenir un coefficient inconnu pour chaque degré de liberté de l'élément. L'état des températures en chaque point  $(x, y, z)$  de l'élément peut être écrit sous la forme matricielle suivante :

$$T(x, y, z) = [f(x, y, z)] \cdot \{\alpha\} \quad (II - 11)$$

Où  $\{\alpha\}$  est la vectrice colonne des coefficients encore inconnus de la fonction polynomiale  $[f(x, y, z)]$  Et l'indice «  $e$  » signifie que le calcul est élémentaire (pour un seul élément).

**Etape III : Relier les températures générales de l'élément aux températures nodales**

On exprime maintenant les coefficients de la fonction de température  $\{\alpha\}$  en fonction de températures nodales  $\{T\}_e$ , et en reportant dans l'équation (II-11) on relie les températures des points de l'élément aux températures nodales  $\{T\}_e$ .

Puisque  $T_e(x, y, z)$  représente la température au point  $(x, y, z)$  de l'élément, les températures nodales peuvent être obtenues à partir de celui-là en introduisant simplement les coordonnées nodales convenables dans l'équation (II - 11). Cela donne par exemple pour le nœud 1 :

$$T_1 = T(x_1, y_1, z_1) = [f(x_1, y_1, z_1)] \cdot \{\alpha\} \quad (II - 12)$$

En procédant de façon similaire pour tous les autres nœuds de l'élément fini, on obtient :

$$\{T\}_e = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_1, y_1, z_1) \\ f(x_2, y_2, z_2) \\ \vdots \\ f(x_n, y_n, z_n) \end{bmatrix} \cdot \{\alpha\} \quad (II - 13)$$

Puisque la matrice  $[A]$  est maintenant connue, le vecteur des coefficients connus  $\{X\}$  peut être obtenu en inversant l'expression précédant ; cela donne :

$$\{\alpha\} = [A]^{-1}\{T\}_e \quad (\text{II} - 14)$$

On remplace  $\{\alpha\}$  par sa valeur dans l'équation (II - 11) et on obtient la relation recherchée entre les températures  $T(x, y, z)$  de tous les points de l'élément et les températures nodales.

$$\begin{aligned} T_e(x, y, z) &= [f(x_1, y_1, z_1)][A]^{-1}\{T\}_e \\ T_e(x, y, z) &= [N]_e \cdot \{T\}_e \end{aligned} \quad (\text{II} - 15)$$

Où  $[N]_e$  est dite matrice d'interpolation.

En considérant la variation en fonction du temps des températures des différents nœuds de l'élément, l'équation (II - 15) devient :

$$T_e(x, y, z) = [N]_e \cdot \{T(t)\}_e \quad (\text{II} - 16)$$

#### Étape IV : Discrétisation de la forme intégrale

A partir de l'équation (II - 16), nous pouvons écrire :

$$\{gradT(x, y, z, t)\}_e = [B]_e \cdot \{T(t)\}_e \quad (\text{II} - 17)$$

$$\frac{\partial T_e(x, y, z)}{\partial t} = \dot{T}_e = [N]_e \cdot \{\dot{T}(t)\}_e \quad (\text{II} - 18)$$

De façon similaire, on aura pour les températures virtuelles:

$$\bar{T}_e(x, y, z) = [N]_e \cdot \{\bar{T}\}_e = \{\bar{T}\}_e^T \cdot [N]_e^T \quad (\text{II} - 19)$$

$$\{grad\bar{T}(x, y, z, t)\}_e = [B]_e \cdot \{\bar{T}\}_e = \{\bar{T}\}_e^T \cdot [B]_e^T \quad (\text{II} - 20)$$

$$\bar{T}_e = [N]_e \cdot \{\bar{T}\}_e = \{\bar{T}\}_e^T \cdot [N]_e^T \quad (\text{II} - 21)$$

En portant ces relations dans l'équation (II-10), on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{S_\varphi} \{\bar{T}\}_e^T \cdot [N]_e^T (\varphi_{cond} + hT_h - h \cdot [N]_e \cdot \{T\}_e + \varepsilon\sigma(T_\infty^4 - T^4)) ds \\ & - \int_V \{\bar{T}\}_e^T \cdot [B]_e^T \cdot \lambda [B]_e \cdot \{T\}_e dV + \int_V \{\bar{T}\}_e^T \cdot [N]_e^T \cdot q dV \\ & - \int_V \{\bar{T}\}_e^T \rho \cdot C_p \cdot [N]_e^T [N]_e \cdot \{T\}_e dV = \{0\} \end{aligned} \quad (\text{II} - 22)$$

Après un réarrangement de l'équation, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \{\bar{T}\}_e^T \left[ \int_{S_\varphi} [N]_e^T (\varphi_{cond} + hT_h + \varepsilon\sigma(T_\infty^4 - T^4)) ds - \int_{S_\varphi} (h \cdot [N]_e^T \cdot [N]_e ds) \cdot \{T\}_e \right. \\ & \left. - \int_V ([B]_e^T \lambda [B]_e dV) \cdot \{T\}_e + \int_V [N]_e^T \cdot q dV - \int_V (\rho \cdot C_p \cdot [N]_e^T [N]_e dV) \cdot \{T\}_e \right] = \{0\} \quad (\text{II} - 23) \end{aligned}$$

Afin de contourner le vecteur  $[T]_e^T$  qui est valide pour n'importe quel système de températures applique, on peut choisir ce dernier comme on veut. Dans le cas présent, il est commode de supposer que le vecteur des températures virtuelles est égal à l'unité. Par suite, la forme discrétisée d'un problème thermique s'écrit finalement :

$$[C]_e \{\dot{T}\}_e + [K]_e \{F\}_e - \{F\}_e = \{0\} \quad (\text{II} - 24)$$

$$[C]_e = \int_V \rho \cdot C_p \cdot [N]_e^T [N]_e dV \quad (\text{II} - 25)$$

$$[K]_e = \int_V [B]_e^T \lambda [B]_e dV + \int_{S_\varphi} h [N]_e^T \cdot [N]_e ds \quad (\text{II} - 26)$$

$$\{F\}_e = \int_V [N]_e^T \cdot q dV + \int_{S_\varphi} [N]_e^T (\varphi_{cond} + hT_h + \varepsilon\sigma(T_\infty^4 - T^4)) ds \quad (\text{II} - 27)$$

Où

$[C]_e$ : Matrice de capacité thermique élémentaire (J/K)

$[K]_e$ : Matrice de conductivité thermique élémentaire (W/K)

$\{F\}_e$ : Vecteur des flux nodaux élémentaire (W)

$\{T_n\}_e$ : Vecteur des températures nodales élémentaire (K).

### Etape V : Assemblage

L'utilisation de la méthode des éléments finis pour résoudre l'équation de la chaleur nous a conduits à interpoler sur chaque élément la variable température par ses valeurs prises aux nœuds de l'élément. Ainsi, pour chaque élément considère, on obtient un système élémentaire [15].

Une fois que le calcul des matrices élémentaires est terminé, on passe à leurs assemblages pour l'obtention du système global en considérant le principe de la superposition. Ainsi, l'équation (II.24) se réécrit après assemblage sous la forme suivante :

$$[C]_e \{\dot{T}\}_e + [K]_e \{F\}_e - \{F\}_e = \{0\} \quad (II - 28)$$

En effet, les nœuds de la structure doivent être numérotés de gauche à droite et du haut en bas afin de simplifier son implémentation sur ordinateur [13].

Par la suite, il faut effectuer un réarrangement des composantes du vecteur des températures globales  $\{T\}$  en plaçant d'abord les températures inconnues  $\{T_L\}$  puis les températures connues  $\{T_P\}$ . Ce réarrangement affecte automatiquement les autres composants de l'équation c.à.d. la matrice de capacité thermique globale  $[C]$  la matrice de conductivité globale  $[K]$  et le vecteur des flux de chaleur global  $\{F\}$ . Le système (II-28) devient après la partition des degrés de liberté comme suit:

$$\begin{bmatrix} C_{LL} & C_{LP} \\ C_{LP} & C_{PP} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \dot{T}_L \\ \dot{T}_P \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{LL} & K_{LP} \\ K_{LP} & K_{PP} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} T_L \\ T_P \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F_L \\ F_P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (II - 29)$$

La résolution de ce système dépend du régime considéré (stationnaire ou transitoire).

### II-11-1 Résolution en régime stationnaire

En régime stationnaire, le système (II-29) se réduit à

$$\begin{bmatrix} K_{LL} & K_{LP} \\ K_{LP} & K_{PP} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} T_L \\ T_P \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F_L \\ F_P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (II - 30)$$

Pour résoudre ce système, l'idéal est d'inverser la matrice de conductivité globale  $[K]$  et de déduire les températures inconnues. Cependant, dans la plupart des cas la matrice  $[K]$  est une matrice singulière (elle n'admet pas de matrice inverse), ce qui nous oblige à effectuer quelques transformations afin de résoudre. Ce système. En effet, la technique consiste à :

- Supprimer les lignes correspondant aux températures connues :

~~$$\begin{bmatrix} K_{LL} & K_{LP} \\ K_{LP} & K_{PP} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} T_L \\ T_P \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F_L \\ F_P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (II - 31)$$~~

- Réarranger le système comme suit :

$$[K_{LL}] \cdot \{T_L\} = \{F_L\} - [K_{LP}] \cdot \{T_P\} \quad (II - 32)$$

- Inverser la matrice de conductivité réduite et résoudre le système:

$$\{T_L\} = [K_{LL}]^{-1} (\{F_L\} - [K_{LP}] \cdot \{T_P\}) \quad (II - 33)$$

### II-11-2 Résolution en régime transitoire [16]

Dans ce cas, le transfert de chaleur est décrit par l'équation (II-28), ou :

$$[C].\{\dot{T}\} + [K].\{T\} = \{F\} \quad (II - 34)$$

Discrétisons la durée du chargement en intervalles de temps :  $T_0, T_1, T_2, \dots, T_S, T_{S+1}, \dots$

Où l'intervalle de temps  $\Delta t$  est décrit par :

$$\Delta t = T_{S+1} - T_S \quad (II - 35)$$

A l'instant  $t + \Delta t$  l'équation (II-34) prend la forme suivante :

$$[C].\{\dot{T}\}_{t+\Delta t} + [K].\{T\}_{t+\Delta t} = \{F\}_{t+\Delta t} \quad (II - 36)$$

En supposant une variation linéaire de la température sur l'intervalle compris entre  $t$  et  $t + \Delta t$ . On peut écrire :

$$\{\dot{T}\}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} (\{T\}_{t+\Delta t} - \{T\}_t) \quad (II - 37)$$

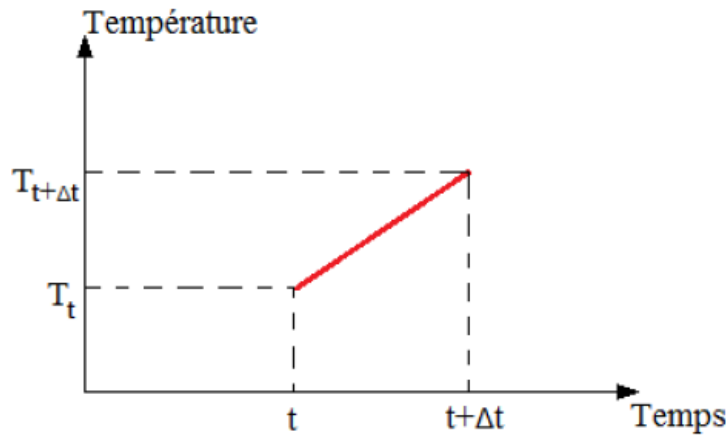


Figure II-5: Evolution linéaire de la température sur l'intervalle  $\Delta t$

En tenant compte de l'équation (II-37) dans l'équation (II-36) :

$$\frac{1}{\Delta t} (\{T\}_{t+\Delta t} - \{T\}_t) + [K]\{T\}_{t+\Delta t} = \{F\}_{t+\Delta t} \quad (II - 38)$$

En multipliant l'équation par  $\Delta t$ , et après un réarrangement adéquat, nous obtenons :

$$([C] + \Delta t[K])\{T\}_{t+\Delta t} = \Delta t\{F\}_{t+\Delta t} + [C]\{T\}_t \quad (II - 39)$$

➤ En tenant compte de la partition des DDL, nous aurons :

$$\left( \begin{bmatrix} C_{LL} & C_{LP} \\ C_{LP} & C_{PP} \end{bmatrix} + \Delta t \begin{bmatrix} K_{LL} & K_{LP} \\ K_{LP} & K_{PP} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} T_L \\ T_P \end{Bmatrix}_{t+\Delta t} = \Delta t \begin{Bmatrix} F_L \\ F_P \end{Bmatrix}_{t+\Delta t} + \begin{bmatrix} C_{LL} & C_{LP} \\ C_{LP} & C_{PP} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_L \\ T_P \end{Bmatrix}_t \quad (II - 40)$$

➤ En supprimant les lignes correspondant aux températures connues, nous obtenons :

$$\begin{aligned} ([C_{LL}] + \Delta t[K_{LL}]) \cdot \{T_L\}_{t+\Delta t} &= \Delta t\{F_L\}_{t+\Delta t} + [C_{LL}C_{LP}] \begin{Bmatrix} T_L \\ T_P \end{Bmatrix}_t \\ &\quad - ([C_{LL}] + \Delta t[K_{LP}]) \cdot \{T_P\} \end{aligned} \quad (II - 41)$$

➤ Ou plus simplement, sous la forme suivante :

$$[\bar{K}]\{T_L\} = \{\bar{F}\} \quad (II - 42)$$

Avec

$$[\bar{K}] = [C_{LL}] + \Delta t[K_{LL}] \quad (II - 43)$$

$$\{\bar{F}\} = \Delta t\{F\}_{t+\Delta t} + [C_{LL}C_{LP}] \begin{Bmatrix} T_L \\ T_P \end{Bmatrix}_t - ([C_{LL}] + \Delta t[K_{LP}])\{T_P\} \quad (II - 44)$$

En régime transitoire, il n'existe pas une seule solution comme pour le régime stationnaire. Il faut, établir les solutions successives dans le temps de l'évolution de la température. La solution transitoire consiste donc, à résoudre le système (II-42) pour chaque intervalle de temps :  $T_0, T_1, T_2, \dots, T_n$ .

## II-12 Conclusion

Ce chapitre est consacré essentiellement à la discrétisation par la méthode des éléments finis où nous avons montré comment passer à la discrétisation spatiale ou géométrique en vue de formuler l'expression discrétisée des équations de transfert de chaleur en régime stationnaire et transitoire. Nous avons également présenté d'une manière générale le principe de la méthode ainsi que ses avantages et ses inconvénients.

---

**CHAPITRE III : Calculs élémentaires d'un élément triangulaire**

---

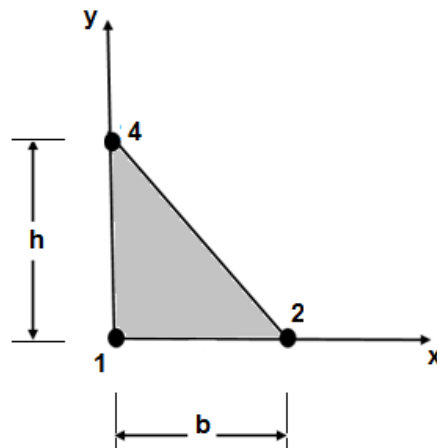
**III-1 Introduction**

Nous présenterons dans ce chapitre l'application de la méthode des éléments finis au cas d'un élément fini de forme triangulaire à trois nœuds en considérant deux configurations distinctes permettant ainsi de discrétiser une forme rectangulaire.

En effet, nous allons calculer les différents paramètres présentés dans le chapitre précédent tels que le vecteur des coefficients inconnus  $\{\alpha\}$ , la matrice d'interpolation  $[N]$ , la matrice de capacité thermique  $[C]$ , la matrice de conductivité thermique  $[K]$  et le vecteur des flux de chaleur  $\{F\}$  relatifs aux deux cas d'éléments finis susmentionnés.

**III-2 Élément fini triangulaire rectangle à trois nœuds – première configuration****Étape I : Identification du problème**

On considère que l'élément possède une section transversale uniforme et faisant partie d'une structure continue. Pour un tel élément on peut utiliser le système de coordonnées et la numération de la figure (III-1) où les deux axes  $(x, y)$  de l'élément fini désignent les sens du flux de chaleur. En utilisant ce type d'élément, on se limite au cas d'un problème de transfert de chaleur bidimensionnel, où chaque nœud est affecté d'une température. Ainsi, le nombre total de  $ddl$  de chaque élément est égal à trois.



*Fig. III-1: Élément triangulaire à 3 nœuds – Première configuration*

**Etape II : Choisir des fonctions de température convenables**

Pour un élément à trois nœuds, la température de n'importe quel point de l'élément peut être localisée par deux composantes suivant x et y. Ainsi :

$$T(x, y, z) = T(x, y) \quad (\text{III} - 1)$$

Puisque l'élément possède 3 ddl ( $T_1, T_2, T_4$ ), 3 coefficients inconnus doivent apparaître dans le polynôme présentant le modèle de température. Supposons que  $T(x, y)$  Soit donnée par l'équation suivante :

$$T(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (\text{III} - 2)$$

Où  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  et sont des coefficients encore indéfinis.

L'équation (III-2) peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$T(x, y) = [1 \quad x \quad y] \cdot \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{III} - 3)$$

**Etape III : Relier les températures générales de l'élément aux températures nodales**

L'équation (III-3) définit la température de n'importe quel nœud de l'élément. Ainsi, en considérant les coordonnées de l'élément présenté à la figure (III-2), on aura :

Au nœud 1 (0, 0) :  $T_1 = \alpha_1$

Au nœud 2 (b, 0) :  $T_2 = \alpha_1 + \alpha_2 b$

Au nœud 4 (0, h) :  $T_4 = \alpha_1 + \alpha_3 h$

Ces expressions peuvent s'écrire sous forme matricielle comme suit:

$$\{T\}_e = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 1 & 0 & h \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{III} - 4)$$

Dans ce cas, la matrice  $[A]$  est une matrice carrée d'ordre 3. Pour simplifier le calcul de sa matrice inverse, nous avons développé un programme, sous le langage Matlab, permettant de déterminer aisément la matrice  $[A]^{-1}$ . Le programme relatif à cette opération est présenté en annexe 1.

On obtient ainsi le vecteur  $\{\alpha\}$  écrit sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/b & 1/b & 0 \\ -1/h & 0 & 1/h \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{III} - 5)$$

La relation entre les températures générales et les températures nodale peut être obtenue en substituant l'équation (III-5) dans l'équation (III-3), on aura :

$$T(x, y) = [1 \quad x \quad y] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/b & 1/b & 0 \\ -1/h & 0 & 1/h \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{III} - 6)$$

Après développement et simplification, on obtient :

$$T(x, y) = [N_1 \quad N_2 \quad N_4] \cdot \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{III} - 7)$$

Avec

$$N_1 = 1 - \frac{x}{b} - \frac{y}{h} \quad (a)$$

$$N_2 = \frac{x}{b} \quad (b)$$

$$N_4 = \frac{y}{h} \quad (c)$$

Ou, d'une manière plus simplement :

$$T(x, y) = [N]_e \{T\}_e \quad (\text{III} - 8)$$

En annexe 2, nous avons proposé un programme MATLAB permettant de calculer la matrice d'interpolation d'un élément triangulaire à trois nœuds  $[N]_e$ .

Pour le cas d'un transfert de chaleur transitoire (régime thermique variable) cette dernière équation prend la forme suivante :

$$T(x, y, t) = [N]_e \cdot \{T(t)\}_e \quad (\text{III} - 9)$$

#### **Etape IV : Discrétisation de la forme intégrale**

Pour un élément fini triangulaire d'épaisseur « e » constante, l'intégrale sur le volume se réduit à une double intégrale suivant la surface de l'élément où  $\int_V dV = e \cdot \int_x dx \int_y dy$ .

Ainsi les équations (II-24) à (II-27) deviennent:

$$[C]_e = \rho \cdot e \cdot C_p \int_0^b \int_0^{y(x)} [N]_e^T \cdot [N]_e dx dy \quad (\text{III} - 10)$$

$$[K]_e = \lambda \cdot e \int_0^b \int_0^{y(x)} [B]_e^T [B]_e dx dy + A \cdot h \cdot [N]_{e,n}^T \cdot [N]_{e,n} \quad (\text{III} - 11)$$

$$\{F\}_e = e \cdot q \cdot \int_0^b \int_0^{y(x)} [N]_e^T dx dy + A \cdot [N]_{e,n}^T (\varphi_x + hT_f + \varepsilon\sigma(T_\infty^4 - T^4)) \quad (\text{III} - 12)$$

Où

$A = \frac{b \cdot h}{2}$  : Représente l'aire de l'élément fini.

$y(x) = -\frac{h}{b} \cdot x + h$  : Relation entre les variables x et y correspondant à la droite inclinée du triangle.

### ❖ Définition de la matrice de capacité thermique élémentaire

L'équation (III-10) devient en compte de la matrice d'interpolation  $[N]_e$  définie à l'équation (III-7), comme suit:

$$[C]_e = \rho e C_p \int_0^b \int_0^{y(x)} \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{b} - \frac{y}{h} \\ \frac{x}{b} \\ \frac{y}{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{b} - \frac{y}{h} & \frac{xy}{bh} \end{bmatrix} dx dy \quad (\text{III} - 13)$$

$$\Rightarrow [C]_e = \rho \cdot e \cdot C_p \begin{bmatrix} bh/12 & bh/24 & bh/24 \\ bh/24 & bh/12 & bh/24 \\ bh/24 & bh/24 & bh/12 \end{bmatrix} \quad (\text{III} - 14)$$

Le calcul de la première composante de la matrice  $[C]_e$  est illustré ci-après :

$$\begin{aligned} C_{11} &= \rho \cdot e \cdot C_p \int_0^b \int_0^{y(x)} \left( \frac{x}{b} + \frac{y}{h} - 1 \right) \left( \frac{x}{b} + \frac{y}{h} - 1 \right) dx dy \\ \Rightarrow C_{11} &= \rho \cdot e \cdot C_p \int_0^b \int_0^{y(x)} \left[ \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{h^2} + 2 \frac{xy}{bh} - 2 \frac{x}{b} - 2 \frac{y}{h} + 1 \right] dx dy \\ \Rightarrow C_{11} &= \rho \cdot e \cdot C_p \int_0^b \left[ \frac{x^2}{b^2} y + \frac{y^3}{3h^2} + \frac{xy^2}{bh} - 2 \frac{x}{b} y - \frac{y^2}{h} + y \right] dx \\ \Rightarrow C_{11} &= \rho \cdot e \cdot C_p \int_0^b \left[ \frac{x^2}{b^2} \left( -\frac{h}{b} x + h \right) + \frac{1}{3h^2} \left( -\frac{h}{b} x + h \right)^3 + \frac{x}{bh} \left( -\frac{h}{b} x + h \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{x}{b} \left( -\frac{h}{b} x + h \right) - \frac{1}{h} \left( -\frac{h}{b} x + h \right)^2 - \frac{h}{b} x + h \right] dx \\ \Rightarrow C_{11} &= \rho \cdot e \cdot C_p \int_0^b \left[ 2 \frac{hx^2}{b^2} - \frac{hx^3}{3b^3} - \frac{hx}{b} + \frac{h}{3} - \frac{hx^3}{b^2} \right] dx = \rho \cdot e \cdot C_p \left( 2 \frac{bh}{3} - \frac{bh}{12} - \frac{bh}{2} \right) \\ \Rightarrow C_{11} &= \rho \cdot e \cdot C_p \left( \frac{bh}{12} \right) \quad (\text{III} - 15) \end{aligned}$$

Vu le nombre important de calculs à réaliser pour la détermination de la matrice  $[C]_e$ , nous avons élaboré un programme Matlab à cet effet, voir annexe 3.

#### ❖ Définition de la matrice de conductivité thermique élémentaire

Pour calculer la matrice de conductivité élémentaire, nous allons d'abord calculer la matrice  $[B]_e$  définie à l'équation (II-17) en considérant les fonctions d'interpolation définies à l'équation (III-7) :

$$[B]_e = grad[N]_e \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (III - 16)$$

Où , la matrice  $[B]_e$  prend la forme suivante :

$$[B]_e = \begin{bmatrix} -\frac{1}{b} & \frac{1}{b} & 0 \\ -\frac{1}{h} & 0 & \frac{1}{h} \end{bmatrix} \quad (III - 17)$$

L'expression de la matrice de conductivité thermique est donnée par l'équation (III-11), où :

$$[K]_e = \lambda \cdot e \int_0^b \int_0^{y(x)} [B]_e^T \cdot [B]_e dx dy + A \cdot h \cdot [N]_{e,n}^T \cdot [N]_{e,n} \quad (III - 18)$$

Dans ce qui suit, nous allons évaluer seulement le premier terme de cette équation.

$$[K]_e = \lambda \cdot e \int_0^b \int_0^{y(x)} \begin{bmatrix} -1/b & -1/h \\ 1/b & 0 \\ 0 & 1/h \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\frac{1}{b} & \frac{1}{b} & 0 \\ -\frac{1}{h} & 0 & \frac{1}{h} \end{bmatrix} dx dy \quad (III - 19)$$

$$[K]_e = \lambda \cdot e \begin{bmatrix} b^2 + h^2/2bh & -h/2b & -b/2h \\ -h/2b & h/2b & 0 \\ -b/2h & 0 & b/2h \end{bmatrix} \quad (III - 20)$$

Le calcul de la première composante de la matrice  $[K]_e$  est illustré ci-après :

$$K_{11} = \lambda \cdot e \int_0^b \int_0^{y(x)} \left( \left( -\frac{1}{b} \right)^2 + \left( \frac{1}{h} \right)^2 \right) dx dy$$

$$K_{11} = \lambda \cdot e \left( -\frac{1}{b} \right)^2 + \left( \frac{1}{h} \right)^2 \int_0^b \int_0^{y(x)} dx dy$$

$$K_{11} = \lambda \cdot e \left( \left( -\frac{1}{b} \right)^2 + \left( \frac{1}{h} \right)^2 \right) \left[ \frac{bh}{2} \right]$$

$$K_{11} = \lambda \cdot e \left[ \frac{b^2 + h^2}{2bh} \right] \quad (\text{III} - 21)$$

Vu le nombre important de calculs à réaliser pour la détermination de la matrice  $[K]_e$ , nous avons élaboré un programme MATLAB à cet effet, voir annexe 4.

#### ❖ Définition du vecteur des flux de chaleur élémentaire

L'expression du vecteur des flux de chaleur est donnée par l'équation (III-12), où :

$$\{F\}_e = e \cdot q \cdot \int_0^b \int_0^{y(x)} [N]_e^T dx dy + A \cdot [N]_{e,n}^T (\varphi_x + hT_f + \varepsilon\sigma(T_\infty^4 - T^4)) \quad (\text{III} - 22)$$

En tenant compte de l'expression de matrice d'interpolation définie par l'équation (III-8), nous aurons :

$$\{F\}_e = e \cdot q \int_0^b \int_0^{y(x)} \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{b} - \frac{y}{h} \\ \frac{x}{b} \\ \frac{y}{h} \end{Bmatrix} dx dy + A \cdot [N]_{e,n}^T (\varphi_x + hT_f + \varepsilon\sigma(T_\infty^4 - T^4)) \quad (\text{III} - 23)$$

Le programme informatique relatif au calcul de ces intégrales est présenté en annexe 5. On obtient :

$$\Rightarrow \{F\}_e = e \cdot q \begin{Bmatrix} \frac{bh}{6} \\ \frac{bh}{6} \\ \frac{bh}{6} \end{Bmatrix} + A \cdot [N]_{e,n}^T (\varphi_x + hT_f + \varepsilon\sigma(T_\infty^4 - T^4)) \quad (\text{III} - 24)$$

### III-3 Élément fini triangulaire rectangle à trois nœuds – deuxième configuration

#### Etape I : Identification du problème

L'élément à considérer dans ce qui suit est représenté à la figure III-3.

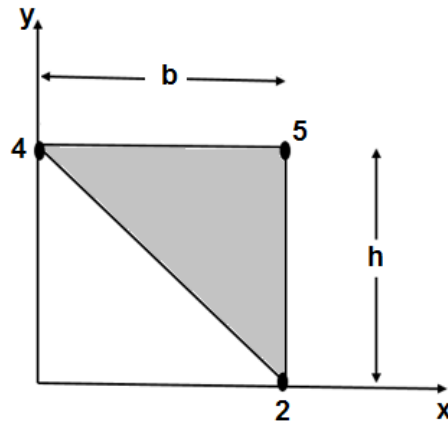


Fig. III-2 : Élément fini triangulaire à trois nœuds

#### Etape II : Choisir des fonctions de température convenables

La fonction de température prend la même forme que la première configuration :

$$T(x, y) = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \quad (\text{III} - 25)$$

Où  $\alpha_4, \alpha_5$  et  $\alpha_6$  sont des coefficients encore indéfinis.

L'équation (III-25) peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$T(x, y) = [1 \quad x \quad y] \cdot \begin{Bmatrix} \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{III} - 26)$$

#### Etape III : Relier les températures générales de l'élément aux températures nodales

L'équation (III-26) définit la température de n'importe quel nœud de l'élément. Ainsi, en considérant les coordonnées de l'élément présenté à la figure (III-3), on aura :

$$\text{Au nœud 2 } (b, 0) : T_2 = \alpha_4 + \alpha_5 b$$

$$\text{Au nœud 4 } (0, h) : T_4 = \alpha_4 + \alpha_6 h$$

$$\text{Au nœud 5 } (b, h) : T_5 = \alpha_4 + \alpha_5 b + \alpha_6 h$$

Ces expressions peuvent s'écrire sous forme matricielle comme suit:

$$\{T\}_e = \begin{Bmatrix} T_2 \\ T_5 \\ T_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b & 0 \\ 1 & b & h \\ 1 & 0 & h \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{III} - 27)$$

Le calcul de la matrice  $[A]^{-1}$  a été réalisé directement en modifiant le programme présenté en annexe 1. On obtient ainsi le vecteur  $\{\alpha\}$  écrit sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{Bmatrix} \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1/b & -1/b \\ -1/h & 1/h & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_2 \\ T_5 \\ T_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{III} - 27)$$

La relation entre les températures générales et les températures nodale peut être obtenue en substituant l'équation (III-27) dans l'équation (III-26), on aura :

$$T(x, y) = [1 \ x \ y] \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1/b & -1/b \\ -1/h & 1/h & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_2 \\ T_5 \\ T_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{III} - 28)$$

Après développement et simplification, on obtient :

$$T(x, y) = [N_2 \ N_5 \ N_4] \cdot \begin{Bmatrix} T_2 \\ T_5 \\ T_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{III} - 29)$$

Avec

$$N_2 = 1 - \frac{y}{h} \quad (a)$$

$$N_5 = \frac{x}{b} + \frac{y}{h} - 1 \quad (b)$$

$$N_4 = 1 - \frac{x}{b} \quad (c)$$

Ou, d'une manière plus simplement :

$$T(x, y) = [N]_e \{T\}_e \quad (\text{III} - 30)$$

Le programme présenté en annexe 2, peut être adapté pour le calcul de la matrice d'interpolation, comme pour la première configuration.

Pour le cas d'un transfert de chaleur transitoire (régime thermique variable) cette dernière équation prend la forme suivante :

$$T(x, y, t) = [N]_e \cdot \{T(t)\}_e \quad (\text{III} - 31)$$

#### **Etape IV : Discrétisation de la forme intégrale**

Pour un élément fini triangulaire d'épaisseur « e » constante, l'intégrale sur le volume se réduit à une double intégrale suivant la surface de l'élément où  $\int_V dV = e \int_x dx \int_y dy$ .

Ainsi les équations (II-) à (II-) deviennent:

$$[C]_e = \rho \cdot e \cdot C_p \int_0^h \int_{x(y)}^b [N]_e^T \cdot [N]_e dx dy \quad (\text{III} - 32)$$

$$[K]_e = \lambda \cdot e \int_0^h \int_{x(y)}^b [B]_e^T [B]_e dx dy + A \cdot h \cdot [N]_{e,n}^T \cdot [N]_{e,n} \quad (\text{III} - 33)$$

$$\{F\}_e = e \cdot q \cdot \int_0^h \int_{x(y)}^b [N]_e^T dx dy + A \cdot [N]_{e,n}^T (\varphi_x + hT_f + \varepsilon\sigma(T_\infty^4 - T^4)) \quad (\text{III} - 34)$$

Où

$A = \frac{b \cdot h}{2}$  : Représente l'aire de l'élément fini.

$x(y) = -\frac{b}{h} \cdot y + b$  : Relation entre les variables x et y correspondant à la droite inclinée du triangle.

#### ❖ Définition de la matrice de capacité thermique élémentaire

L'équation (III-32) devient en compte de la matrice d'interpolation  $[N]_e$  définie à l'équation (III-29), comme suit:

$$[C]_e = \rho e C_p \int_0^h \int_{x(y)}^b \begin{bmatrix} 1 - \frac{y}{h} \\ \frac{x}{b} + \frac{y}{h} - 1 \\ 1 - \frac{x}{b} \end{bmatrix} dx dy \begin{bmatrix} 1 - \frac{y}{h} & \frac{x}{b} + \frac{y}{h} - 1 & 1 - \frac{x}{b} \end{bmatrix} \quad (\text{III} - 35)$$

$$\Rightarrow [C]_e = \rho \cdot e \cdot C_p \begin{bmatrix} bh/12 & bh/24 & bh/24 \\ bh/24 & bh/12 & bh/24 \\ bh/24 & bh/24 & bh/12 \end{bmatrix} \quad (\text{III} - 36)$$

Le calcul de la première composante de la matrice  $[C]_e$  est illustré ci-après :

$$\begin{aligned} C_{11} &= \rho \cdot e \cdot C_p \int_0^h \left( \frac{y}{h} - 1 \right)^2 dx dy \\ &\Rightarrow C_{11} = \rho \cdot e \cdot C_p \int_0^h \int_{x(y)}^b \left[ \frac{y^2}{h^2} - 2 \frac{y}{h} + 1 \right] dx dy \\ &\Rightarrow C_{11} = \rho \cdot e \cdot C_p \int_0^h \left[ \frac{y^2}{h^2} x - 2 \frac{y}{h} x + x \right] dy \\ C_{11} &= \rho \cdot e \cdot C_p \int_0^h \left[ \frac{y^2}{h^2} b - 2 \frac{y}{h} b + b \right] - \left[ \frac{y^2}{h^2} \left( -\frac{b}{h} y + b \right) - 2 \frac{y}{h} \left( -\frac{b}{h} y + b \right) - \frac{b}{h} y + b \right] dy \\ C_{11} &= \rho \cdot e \cdot C_p \int_0^h \left[ \frac{y^2}{h^2} b - 2 \frac{y}{h} b + b + \frac{by^3}{h^3} - \frac{by^2}{h^2} - 2 \frac{by^2}{h^2} + 2 \frac{by}{h} + \frac{by}{h} - b \right] dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow C_{11} &= \rho \cdot e \cdot C_p \int_0^h \left[ \frac{by^3}{h^3} - 2 \frac{by^2}{h^2} + \frac{by}{h} \right] \\
\Rightarrow C_{11} &= \rho \cdot e \cdot C_p \left[ \frac{bh^4}{4h^3} - 2 \frac{bh^3}{3h^2} + \frac{bh^2}{2h} \right] \\
\Rightarrow C_{11} &= \rho \cdot e \cdot C_p \left( \frac{bh}{4} - 2 \frac{bh}{3} + \frac{bh}{2} \right) \\
\Rightarrow C_{11} &= \rho \cdot e \cdot C_p \left( \frac{bh}{12} \right) \tag{III - 37}
\end{aligned}$$

Le programme présenté en annexe 3 peut être adapté pour le calcul de la matrice  $[C]_e$ .

#### ❖ Définition de la matrice de conductivité thermique élémentaire

Pour calculer la matrice de conductivité élémentaire, nous allons d'abord calculer la matrice  $[B]_e$  définie à l'équation (II-17) en considérant les fonctions d'interpolation définies à l'équation (III-29) :

$$[B]_e = grad[N]_e \begin{bmatrix} \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_5}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_5}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{III - 38}$$

Finalement, la matrice  $[B]_e$  prend la forme suivante :

$$[B]_e = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{b} & -\frac{1}{b} \\ -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} & 0 \end{bmatrix} \tag{III - 39}$$

L'expression de la matrice de conductivité thermique est donnée par l'équation (III-33), où :

$$[K]_e = \lambda \cdot e \int_0^h \int_{x(y)}^b [B]_e^T \cdot [B]_e dx dy + A \cdot h \cdot [N]_{e,n}^T \cdot [N]_{e,n} \tag{III - 40}$$

Dans ce qui suit, nous allons évaluer seulement le premier terme de cette équation puisque le second terme est défini selon le cas à considérer.

$$[K]_e = \lambda \cdot e \int_0^h \int_{x(y)}^b \times \begin{bmatrix} 0 & -1/h \\ 1/b & 1/h \\ -1/b & 0 \end{bmatrix}$$

$$\int \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{b} & -\frac{1}{b} \\ -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} & 0 \end{bmatrix} dx dy \quad (III - 41)$$

$$[K]_e = \lambda \cdot e \begin{bmatrix} \frac{b}{2h} & -\frac{b}{2h} & 0 \\ -\frac{b}{2h} & \frac{b^2 + h^2}{2bh} & -\frac{h}{2b} \\ 0 & -\frac{h}{2b} & \frac{h}{2b} \end{bmatrix} \quad (III - 42)$$

Le calcul de la première composante de la matrice  $[K]_e$  est illustré ci-après :

$$K_{11} = \lambda \cdot e \int_0^b \int_{x(y)}^b \left[ \left( \frac{1}{h} \right)^2 \right] dx dy$$

$$K_{11} = \lambda \cdot e \left( \frac{1}{h^2} \right) \int_0^b \int_0^{y(x)} dx dy$$

$$K_{11} = \lambda \cdot e \left[ \left( \frac{1}{h^2} \right) * \frac{bh}{2} \right]$$

$$K_{11} = \lambda \cdot e \left( \frac{b}{2h} \right) \quad (III - 43)$$

Pour calculer la matrice  $[K]_e$ , nous avons modifié le programme présenté à annexe 4.

❖ **Définition du vecteur des flux de chaleur élémentaire**

L'expression du vecteur des flux de chaleur est donnée par l'équation (III-34), où :

$$\{F\}_e = e \cdot q \cdot \int_0^h \int_{x(y)}^b [N]_e^T dx dy + A \cdot [N]_{e,n}^T (\varphi_x + hT_f + \varepsilon\sigma(T_\infty^4 - T^4)) \quad (III - 44)$$

En tenant compte de l'expression de matrice d'interpolation définie par l'équation (III-29), nous aurons :

$$\{F\}_e = e \cdot q \int_0^h \int_{x(y)}^b \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{y}{h} \\ \frac{x}{b} + \frac{y}{h} - 1 \\ 1 - \frac{x}{b} \end{array} \right\} dx dy + A \cdot [N]_{e,n}^T (\varphi_x + hT_f + \varepsilon\sigma(T_\infty^4 - T^4)) \quad (III - 45)$$

Le calcul de ces intégrales peut s'effectuer en effectuant une simple modification au programme présenté à annexe 5. On obtient :

$$\Rightarrow \{F\}_e = e \cdot q \begin{Bmatrix} \frac{bh}{6} \\ \frac{bh}{6} \\ \frac{bh}{6} \\ \frac{bh}{6} \end{Bmatrix} + A \cdot [N]_{e,n}^T (\varphi_x + hT_f + \varepsilon\sigma(T_\infty^4 - T^4)) \quad (\text{III} - 46)$$

### III-4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté le calcul des matrices élémentaires (matrice d'interpolation, matrice de capacité thermique, matrice de conductivité thermique et le vecteur des flux de chaleur) relatives aux deux configurations d'éléments triangulaires à trois nœuds.

En effet, nous avons constaté que la matrice de conductivité thermique dépend et varie en fonction de la configuration de l'élément par contre la matrice de capacité thermique et le vecteur des flux de chaleur gardent leurs formes. Ce résultat est très intéressant pour le calcul d'un élément triangulaire de forme quelconque où la matrice de capacité thermique et le vecteur des flux de chaleur sont très difficiles à déterminer.

---

**CHAPITRE IV : Applications numérique**


---

**IV-1 Introduction**

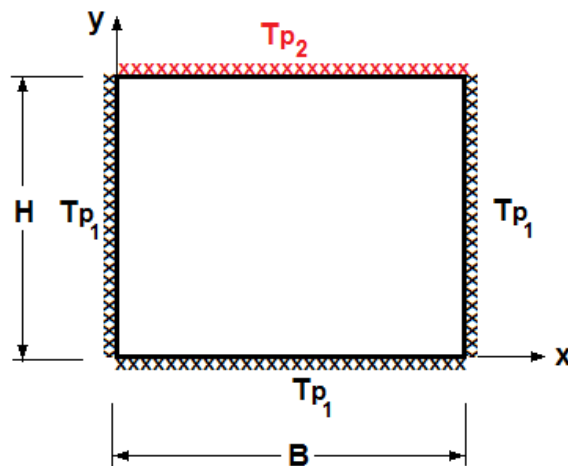
Nous allons, dans ce qui suit, considérer deux exemples, l'un en régime stationnaire et l'autre en régime transitoire, présentant des conditions aux limites simples que nous allons résoudre d'abord analytiquement puis par la méthode des éléments finis. Une comparaison des résultats obtenus par ces deux méthodes, sera effectuée afin de jauger la fiabilité de la méthode proposée.

En effet, les deux exemples considérés dans ce travail présentent un mur de forme rectangulaire de dimensions (B x H). Pour la comparaison des résultats, nous allons considérer seulement trois points situés à différentes positions et dont les coordonnées sont:

$$P_1 = \left(x = \frac{B}{2}, y = \frac{H}{2}\right), P_2 = \left(x = \frac{B}{4}, y = \frac{H}{4}\right) \text{ et } P_3 = \left(x = \frac{B}{8}, y = \frac{H}{8}\right)$$

**IV-2 Analyse en régime stationnaire****IV-2-1 Description du problème**

Soit à déterminer les températures d'un mur de forme rectangulaire ayant une largeur B et une hauteur H dont les conditions aux limites sont illustrées sur la figure ci-après. Avec :  $B = 7m, H = 2m, T_{p_1} = 10^\circ C, T_{p_2} = 150^\circ C$ .



*Fig. IV-1 : Exemple de validation en régime stationnaire*

### IV-2-2 Résolution par la méthode analytique

#### a) Développement de la méthode

Le mur présenté au paragraphe précédent est un système bidimensionnel et sans source de chaleur. L'équation générale de conduction gouvernant la distribution de la température en régime permanent (I-19) se simplifie à :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (IV - 1)$$

Avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} T(x = 0, y) &= Tp_1 \\ T(x = B, y) &= Tp_1 \\ T(x, y = 0) &= Tp_1 \\ T(x, y = H) &= Tp_2 \end{aligned} \quad (IV - 2)$$

Afin que la solution soit simple à déterminer, nous allons considérer le changement de variables suivant :

$$T(x, y) = \theta(x, y) + Tp_1 \quad (IV - 3)$$

Où  $Tp_1$  est une constante qui représente la condition aux limites appliquée sur les trois parois du mur.

En substituant l'équation (IV-3) dans l'équation (IV-1), nous obtenons une nouvelle forme de l'équation de la chaleur bidimensionnelle :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0 \quad (IV - 4)$$

Et dont les CAL correspondantes sont :

$$\begin{aligned} \theta(x = 0, y) &= 0 \\ \theta(x = B, y) &= 0 \\ \theta(x, y = 0) &= 0 \\ \theta(x, y = H) &= Tp_2 - Tp_1 \end{aligned} \quad (IV - 5)$$

La solution analytique d'un problème de conduction thermique doit satisfaire l'équation gouvernante régissant le phénomène ainsi que les conditions aux limites relatives au problème physique considéré. L'approche traditionnelle de recherche d'une solution analytique pour l'équation de Fourier (IV-4), consiste à utiliser la méthode de séparation de variables. Donc, la

méthode de séparation de variables permettant de déterminer la solution analytique de la dite équation, consiste à supposer que la solution est sous la forme d'un produit de deux fonctions:

$$\theta(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \quad (IV - 6)$$

En substituant l'équation (IV-6) dans l'équation (IV-4), nous obtenons :

$$\frac{d^2X}{dx^2}Y + \frac{d^2Y}{dy^2}X = 0 \quad (IV - 7)$$

Après un arrangement, cette équation devient :

$$-\frac{1}{X} \frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{Y} \frac{d^2Y}{dy^2} \quad (IV - 8)$$

Cette équation illustre clairement que le premier terme de cette équation ne dépend que de la variable  $x$  et le second terme dépend uniquement de la variable  $y$ . Et comme les variables  $x$  et  $y$  sont indépendantes, alors chacun de ces deux termes est égal à une constante que nous allons noter  $\beta^2$  afin d'obtenir la forme standard des équations différentielles.

L'équation (IV-8) permet alors d'écrire :

$$\frac{d^2X}{dx^2} + X \cdot \beta^2 = 0 \quad (IV - 9)$$

$$\frac{d^2Y}{dy^2} - Y \cdot \beta^2 = 0 \quad (IV - 10)$$

La solution générale de ces équations sont données par :

$$X = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x \quad (IV - 11)$$

$$Y = C_3 \cosh(\beta y) + C_4 \sinh(\beta y) \quad (IV - 12)$$

Où les constantes  $C_1, C_2, C_3$  et  $C_4$  seront déterminées par les conditions aux limites présentées à l'équation (IV-5).

En substituant les équations (IV-11) et (IV-12) dans l'équation (IV-6), nous obtenons la forme de la solution de l'équation (IV-4) :

$$\theta(x, y) = (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) \cdot (C_3 \cosh(\beta y) + C_4 \sinh(\beta y)) \quad (IV - 13)$$

La première condition aux limites permet d'obtenir la valeur de la constante  $C_1$  :

$$\begin{aligned}\theta(x = 0, y) = 0 &\Rightarrow C_1 \cdot (C_3 \cosh(\beta y) + C_4 \sinh(\beta y)) = 0 \\ &\Rightarrow C_1 = 0\end{aligned}\quad (IV - 14)$$

La troisième condition aux limites permet de calculer la valeur de la constante  $C_3$  :

$$\begin{aligned}\theta(x, y = 0) = 0 &\Rightarrow C_3 \cdot (C_2 \sin \beta x) = 0 \\ &\Rightarrow C_3 = 0\end{aligned}\quad (IV - 15)$$

La deuxième condition aux limites permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\theta(x = B, y) = 0 &\Rightarrow \theta(x, y) = C_2 \cdot \sin \beta B \cdot (C_4 \sinh(\beta y)) = 0 \Rightarrow \sin \beta B = 0 \\ &\Rightarrow \beta = \frac{n \cdot \pi}{B}\end{aligned}\quad (IV - 16)$$

L'équation (IV-13) devient alors :

$$\theta(x, y) = \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} C_n \cdot \sin \beta x \cdot \sinh(\beta y)\quad (IV - 17)$$

Pour déterminer la valeur du dernier coefficient,  $C_n$ , nous allons considérer la quatrième CAL :

$$\theta(x, y = H) = Tp_2 - Tp_1 \Rightarrow C_n \cdot \sin \beta x \cdot \sinh(\beta H) = Tp_2 - Tp_1\quad (IV - 18)$$

En multipliant les deux termes de cette l'équation par  $\sin \beta x$  puis en intégrant de 0 à B nous obtenons:

$$C_n \cdot \sinh(\beta H) \cdot \int_0^B (\sin \beta x)^2 dx = (Tp_2 - Tp_1) \cdot \int_0^B \sin \beta x dx\quad (IV - 19)$$

$$C_n = \frac{-2}{n \cdot \pi} \frac{(Tp_2 - Tp_1)}{\sinh(\beta H)} (\cos(n\pi) - 1)\quad (IV - 20)$$

En ne retenant que les nombres impairs, nous obtenons :

$$C_n = \frac{4}{n \cdot \pi} \frac{(Tp_2 - Tp_1)}{\sinh(\beta H)} \quad n = 1, 3, \dots\quad (IV - 21)$$

En substituant l'équation (IV-21) dans l'équation (IV-17), nous obtenons :

$$\theta(x, y) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{4}{n \cdot \pi} \frac{(Tp_2 - Tp_1)}{\sinh(\beta H)} \cdot \sin \beta x \cdot \sinh(\beta y) \quad (IV - 22)$$

En remplaçant l'équation (IV-22) dans l'équation (IV-3) nous obtenons l'expression finale de la température en tout point du mur :

$$T(x, y) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{4}{n \cdot \pi} \frac{(Tp_2 - Tp_1)}{\sinh(\beta H)} \cdot \sin \beta x \cdot \sinh(\beta y) + Tp_1 \quad (IV - 23)$$

Où

B : Dimension horizontale du mur

H : Dimension verticale du mur

$Tp_1$  : Température imposée sur les trois parois du mur

$Tp_2$  : Température imposée sur la paroi supérieure du mur

$\beta = \frac{n \cdot \pi}{B}$  : Paramètre de calcul.

#### a) Application numérique

Un programme, sous le langage MATLAB, a été élaboré afin de déterminer aisément les températures des points  $P_1, P_2$  et  $P_3$  qui seront considérées pour la comparaison des résultats. Le programme relatif à cette opération est présenté en annexe 6. Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau suivant :

	H=2m et B=7m		
Points	P1	P2	P3
Température (°C)	80,6435	118,8779	139,4788

*Tableau IV-1 : Résultats obtenus par la méthode analytique*

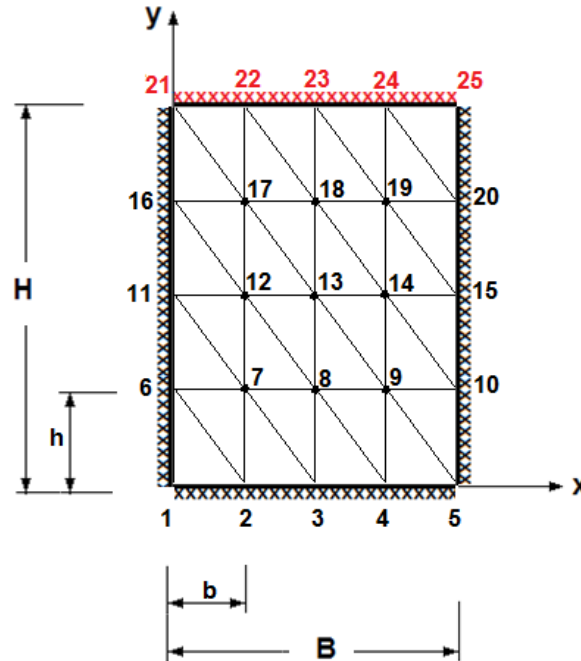
#### VI-2-3 Résolution par la méthode des éléments finis

Afin de mieux illustrer les matrices globales et l'opération d'assemblage, nous allons présenter deux configurations de maillages, une avec 32 éléments et l'autre avec 128 éléments. Une comparaison des résultats obtenus nous permettra, également, de mettre en évidence l'influence de la qualité du maillage sur la précision des résultats.

**A) Maillage de 32 éléments**

❖ **Discrétisation de la géométrie**

Le maillage considéré dans cette première discrétisation est représenté sur la figure suivante où les nœuds sont numérotés de gauche à droite et du bas vers le haut.



*Fig. IV-2 : Maillage de 32 éléments en régime stationnaire*

❖ **Définition des matrices élémentaires**

On définit, pour chaque élément, un vecteur élémentaire des températures nodales. Ainsi, on aura :

$$\{T\}_1 = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_6 \end{Bmatrix} ; \{T\}_2 = \begin{Bmatrix} T_2 \\ T_7 \\ T_6 \end{Bmatrix} ; \{T\}_3 = \begin{Bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_7 \end{Bmatrix} ; \dots \dots \dots \{T\}_{32} = \begin{Bmatrix} T_{20} \\ T_{25} \\ T_{24} \end{Bmatrix} \quad (IV - 24)$$

Où la numérotation des nœuds, de chaque élément, suit le sens trigonométrique.

D'après l'équation (III-20) et (III-42), les expressions des matrices de conductivité thermique élémentaire, pour chacune des deux configurations, prennent les formes suivantes :

$$[K]_{e1} = [K]_{e3} = \frac{\lambda \cdot e}{2 \cdot b \cdot h} \begin{bmatrix} (b^2 + h^2) & -h^2 & -b^2 \\ -h^2 & h^2 & 0 \\ -b^2 & 0 & b^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1,8929 & -0,1429 & -1,75 \\ -0,1429 & 0,1429 & 0 \\ -1,75 & 0 & 1,75 \end{bmatrix} \quad (IV - 25)$$

$$[K]_{e2} = \frac{\lambda \cdot e}{2 \cdot b \cdot h} \begin{bmatrix} b^2 & -b^2 & 0 \\ -b^2 & (b^2 + h^2) & -h^2 \\ 0 & -h^2 & h^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,75 & -1,75 & 0 \\ -1,75 & 1,8929 & -0,1429 \\ 0 & -0,1429 & 0,1429 \end{bmatrix} \quad (IV - 26)$$

D'après l'équation (III-24) ou (III-46), l'expression du vecteur élémentaire des flux de chaleur est :

$$\{F\}_e = \frac{e \cdot q \cdot b \cdot h}{6} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (IV - 27)$$

#### ❖ Définition des matrices globales

Le vecteur global des températures nodales prend la forme suivante :

$$\{T\}^T = \{T_1 \quad T_2 \quad T_3 \quad \dots \quad T_{25}\} \quad (IV - 28)$$

Vue la taille importante de la matrice globale de conductivité thermique (25 lignes x 25 colonnes), elle a été présentée dans l'annexe 7.

Le vecteur global des flux nodaux présente 25 composantes et prend la forme suivante :

$$\{F\}^T = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0\} \quad (IV - 29)$$

#### ❖ Résolution

En régime stationnaire, l'équation de la chaleur discrétisée prend la forme suivante (voir l'équation II-28):

$$[K] \cdot \{T\} = \{F\} \quad (IV - 30)$$

Pour résoudre ce système, nous devons inverser la matrice de conductivité thermique. Or, dans la majorité des cas, cette matrice est singulière (elle n'admet pas de matrice inverse).

Pour résoudre ce système, on procède comme suit :

- Suppression de toutes lignes correspondantes aux températures imposées : Dans cet exemple en particulier, la matrice K comportera 9 lignes x 25 colonnes au lieu de 25 lignes x 25 colonnes. Et le vecteur des flux de chaleur comportera également 9 composantes au lieu de 25. Par contre le vecteur des températures gardera toujours sa forme.
- Partition des températures (ddl) et résolution: Cette étape consiste à séparer les températures inconnues et les températures imposées. Ainsi, le vecteur des températures nodales prendra une nouvelle forme où les températures inconnues sont

placées en premier puis elles sont suivies des températures imposées, comme c'est illustré à l'équation (IV-31) :

$$\{T\}^T = \{T_7 \ T_8 \ T_9 \ T_{12} \ T_{13} \ T_{14} \ T_{17} \ T_{18} \ T_{19} \ T_1 \ T_2 \ T_3 \ T_4 \ T_5 \ T_6 \\ T_{10} \ T_{11} \ T_{15} \ T_{16} \ T_{20} \ T_{21} \ T_{22} \ T_{23} \ T_{24} \ T_{25} \} \quad (IV - 31)$$

Cette partition des températures affecte automatiquement la matrice de conductivité thermique et le vecteur des flux de chaleur. Ainsi, nous aurons :

$$[K_{LL} \ K_{LP}] \cdot \begin{Bmatrix} T_L \\ T_P \end{Bmatrix} = \{F_L\} \quad (IV - 32)$$

Un autre arrangement permet d'écrire ce système sous la forme suivante :

$$[K_{LL}] \cdot \{T_L\} = \{F_L\} - [K_{LP}] \cdot \{T_P\} \quad (IV - 33)$$

Où le vecteur des températures inconnues  $T_L$  peut être déterminé aisément en inversant la matrice de conductivité thermique réduite (cette matrice n'est pas singulière), ainsi nous obtenons :

$$\{T_L\} = [K_{LL}]^{-1}(\{F_L\} - [K_{LP}] \cdot \{T_P\}) \quad (IV - 34)$$

Dans cet exemple numérique, ces matrices valent :

$$\{T_L\}^T = \{T_7 \ T_8 \ T_9 \ T_{12} \ T_{13} \ T_{14} \ T_{17} \ T_{18} \ T_{19}\} \\ = \{120,58 \ 116,36 \ 120,58 \ 89,10 \ 82,04 \ 89,10 \ 53,23 \ 46,56 \ 53,23\} \quad (IV - 35)$$

$$\{F_L\}^T = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\} \quad (IV - 36)$$

$$[KLP] = \begin{bmatrix} 0 & -3.50 & 0 & 0 & 0 & -0.28 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3.50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3.50 & 0 & 0 & -0.28 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.28 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.28 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.28 & 0 & 0 & -3.50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3.50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.28 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3.50 & 0 \end{bmatrix} \quad (IV - 37)$$

$$\{T_P\}^T = \{150 \ 150 \ 150 \ 150 \ 150 \ 150 \ 150 \ 150 \ 150 \ 150 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10 \ 10\} \quad (IV - 38)$$

$$[K_{LL}]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1826 & 0.0136 & 0.0013 & 0.1082 & 0.0144 & 0.0016 & 0.0504 & 0.0086 & 0.0011 \\ 0.0136 & 0.1839 & 0.0136 & 0.0144 & 0.1099 & 0.0144 & 0.0086 & 0.0514 & 0.0086 \\ 0.0013 & 0.0136 & 0.1826 & 0.0016 & 0.0144 & 0.1082 & 0.0011 & 0.0086 & 0.0504 \\ 0.1082 & 0.0144 & 0.0016 & 0.2330 & 0.0222 & 0.0023 & 0.1082 & 0.0144 & 0.0016 \\ 0.0144 & 0.1099 & 0.0144 & 0.0222 & 0.2353 & 0.0222 & 0.0144 & 0.1099 & 0.0144 \\ 0.0016 & 0.0144 & 0.1082 & 0.0023 & 0.0222 & 0.2330 & 0.0016 & 0.0144 & 0.1082 \\ 0.0504 & 0.0086 & 0.0011 & 0.1082 & 0.0144 & 0.0016 & 0.1826 & 0.0136 & 0.0013 \\ 0.0086 & 0.0514 & 0.0086 & 0.0144 & 0.1099 & 0.0144 & 0.0136 & 0.1839 & 0.0136 \\ 0.0011 & 0.0086 & 0.0504 & 0.0016 & 0.0144 & 0.1082 & 0.0013 & 0.0136 & 0.1826 \end{bmatrix} \quad (IV-39)$$

## ❖ Résultats obtenus

Le programme établi, sous le langage MATLAB, relatif à ces calculs est présenté en annexe 08 où les températures des points  $P_1$  et  $P_2$  sont affichées dans le tableau ci-après. Par contre, la température du point  $P_3$  n'a pas été affichée vu que le maillage considéré ne présente pas de nœud à la position de ce point et cela peut être considéré comme un inconvénient de la méthode des éléments finis.

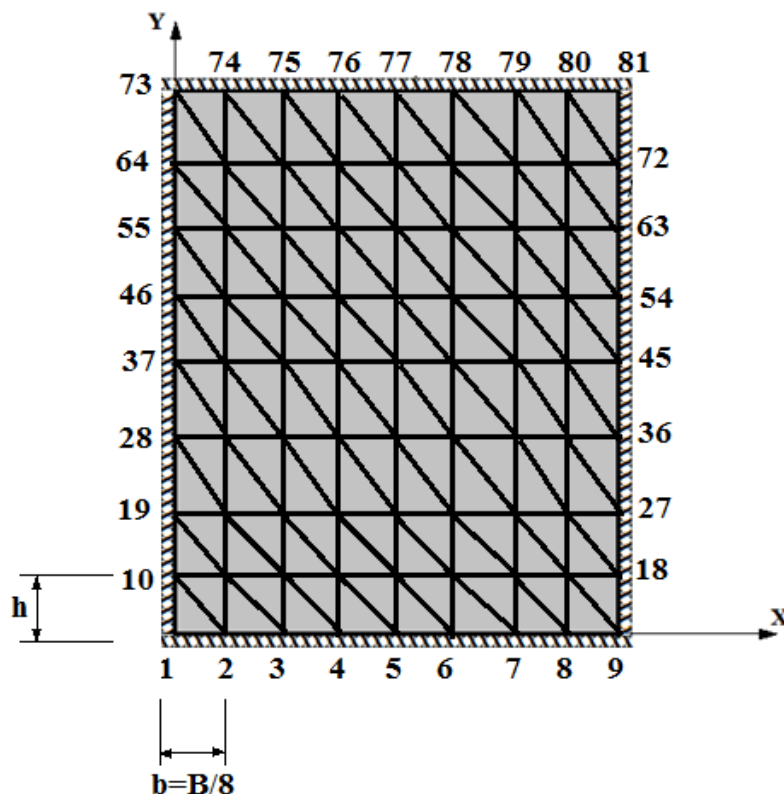
	H=2m et B=7m		
Points	P1 (nœud 13)	P2 (nœud 7)	P3
Température (°C)	82,0409	120,5796	-----

*Tableau IV-2 : Résultats obtenus par la MEF avec un maillage de 32 éléments*

## B) Maillage de 128 éléments

## ❖ Discrétisation de la géométrie

Le maillage considéré dans cette deuxième discrétisation est représenté sur la figure suivante.



*Fig. IV-3 : Maillage de 128 éléments en régime stationnaire*

❖ **Définition des matrices élémentaires**

On définit, pour chaque élément, un vecteur élémentaire des températures nodales. Ainsi, on aura :

$$\{T\}_1 = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_{10} \end{Bmatrix} ; \{T\}_2 = \begin{Bmatrix} T_2 \\ T_{11} \\ T_{10} \end{Bmatrix} ; \{T\}_3 = \begin{Bmatrix} T_2 \\ T_3 \\ T_{11} \end{Bmatrix} ; \dots \dots \dots \{T\}_{128} = \begin{Bmatrix} T_{72} \\ T_{81} \\ T_{80} \end{Bmatrix} \quad (IV - 40)$$

Les matrices élémentaires de conductivité thermique et le vecteur élémentaire des flux de chaleur ont la même forme que précédemment (voir les équations IV-25, 26 et 27).

❖ **Résolution : Cette étape suit la même procédure que précédemment, c'est-à-dire :**

- *Suppression de toutes lignes correspondantes aux températures imposées ;*
- *Partition des températures et résolution du système obtenu.*

❖ **Résultats obtenus**

Le programme établi, sous le langage MATLAB, relatif à ces calculs est présenté en annexe 09 où les températures des points  $P_1, P_2$  et  $P_3$  sont affichées dans le tableau ci-après.

	H=2m et B=7m		
Points	P1 (nœud 25)	P2 (nœud 9)	P3(nœud 1)
Température (°C)	81,0633	119,4123	139,5652

**Tableau IV-3 : Résultats obtenus par la MEF avec un maillage de 128 éléments**

**IV-2-4 Comparaison des résultats**

Points	Analytique (°C)	MEF 32 éléments	Erreur relative (%)	MEF 128 éléments	Erreur relative (%)
P1	80,6435	82,0409	-1,73	81,0633	-0,52
P2	118,8779	120,5796	-1,43	119,4123	-0,45
P3	139,4788	----	----	139,5652	-0,06

**Tableau IV-4 : Comparaison des résultats obtenus par les deux méthodes et différents maillages**

Nous remarquons, dans ce cas, que les résultats obtenus par la méthode des éléments finis présentent une parfaite concordance avec ceux obtenus par la méthode analytique où l'erreur relative maximale est de 1,73%. Nous remarquons également, que les résultats sont

nettement plus proches des résultats analytiques en augmentant le nombre d'éléments du maillage où l'erreur relative a diminué de 0,73 à 0,52%.

Notons par ailleurs que l'erreur relative, exprimée en pourcentage, est calculée en prenant comme référence la solution analytique. Ainsi, les valeurs négatives des erreurs signifient que la valeur calculée par la MEF est supérieure à la valeur obtenue par la méthode analytique.

### IV-3 Analyse en régime transitoire

#### IV-3-1 Description du problème

Soit à déterminer l'évolution en fonction du temps des températures d'une plaque de forme rectangulaire ayant une température initiale  $T_i$  et dont les extrémités sont imposées à une température  $T_p$  comme c'est illustré par la figure suivante. Où  $T_i = 20^\circ\text{C}$ ,  $T_p = 150^\circ\text{C}$ ,  $B=0.1\text{m}$ ,  $H=0.2\text{m}$ ,  $e=1\text{m}$ ,  $q=0$ ,  $C_p=885\text{ J/Kg.K}$ ,  $\rho=2700\text{Kg/m}^3$ ,  $\lambda=209\text{W/m}^\circ\text{C}$ .

Comme pour le régime stationnaire, nous allons afficher les résultats aux points ( $P_1, P_2$  et  $P_3$ ).

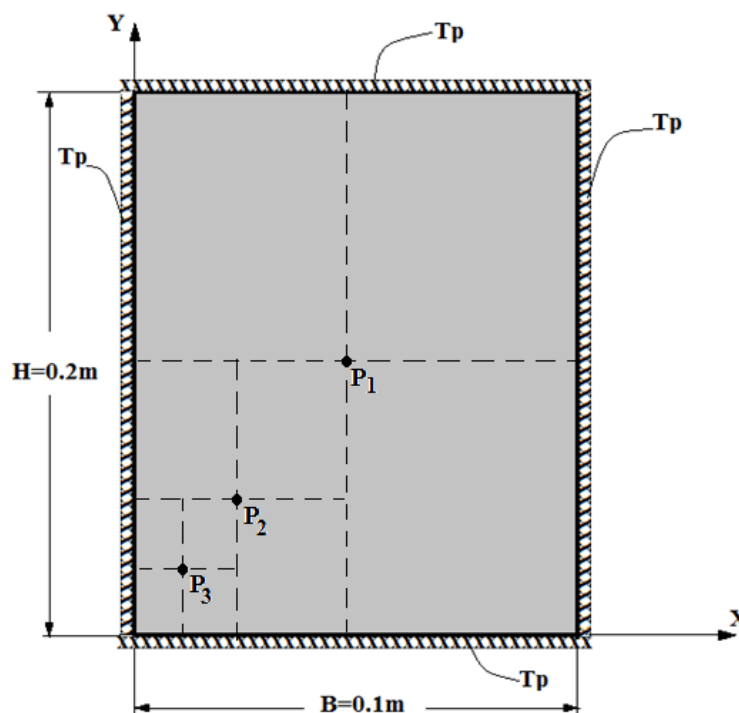


Fig. IV-4 : Exemple de validation en régime transitoire

## IV-3-2 Résolution par la méthode analytique

## ❖ Développement de la méthode

Soit à résoudre l'équation de la chaleur (I-16), où :

$$\lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (IV - 41)$$

Après un arrangement de cette équation, nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\lambda} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (IV - 42)$$

Avec les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} T(x = 0, y, t) &= T_p \\ T(x = B, y, t) &= T_p \\ T(x, y = 0, t) &= T_p \\ T(x, y = H, t) &= T_p \\ T(x, y, t = 0) &= T_i \end{aligned} \quad (IV - 43)$$

On pose le changement de variables suivant :

$$T(x, y, t) = \theta(x, y, t) + T_p \quad (IV - 44)$$

Equation de la chaleur (IV-42) devient :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \frac{1}{\lambda} \rho c_p \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (IV - 45)$$

Les conditions aux limites exprimées à l'équation (IV - 43) deviennent :

$$\begin{aligned} \theta(x = 0, y, t) &= 0 \\ \theta(x = B, y, t) &= 0 \\ \theta(x, y = 0, t) &= 0 \\ \theta(x, y = H, t) &= 0 \\ \theta(x, y, t = 0) &= T_i - T_p \end{aligned} \quad (IV - 46)$$

En considérant la méthode de séparation de variables, la fonction  $\theta(x, y, t)$  peut s'écrire :

$$\theta(x, y, t) = f(t) \cdot F(x, y) \quad (IV - 47)$$

Où

$f(t)$  : Fonction temporelle ;

$F(x, y)$  : Fonction de forme.

En substituant l'équation (IV-47) dans l'équation (IV-45), nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} \cdot f(t) + \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2} \cdot f(t) = \frac{1}{\lambda} \rho c_p \frac{df(t)}{dt} \cdot F(x, y) \quad (IV - 48)$$

Après un arrangement de cette équation, en séparant les variables, nous obtenons :

$$\frac{df(t)}{dt} \cdot \frac{1}{f(t)} = a \left( \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2} \right) \cdot \frac{1}{F(x, y)} \quad (IV - 49)$$

Nous constatons que le premier terme de cette équation dépend de la variable (t) alors que le second terme ne dépend que des variables (x et y), par conséquent nous pouvons admettre que ces deux termes sont égaux à une constante que nous allons noter  $\omega$ .

Le premier terme de l'équation (IV-49) permet d'écrire :

$$\omega = \frac{df(t)}{dt} \frac{1}{f(t)} \quad (IV - 50)$$

La solution de cette équation peut être calculée aisément en intégrant les deux termes de cette équation, ainsi:

$$\int \frac{df(t)}{dt} \frac{1}{f(t)} dt = \int \omega dt \Rightarrow \ln(f(t)) = \omega t + C \Rightarrow f(t) = e^{\omega t + C} = e^{\omega t} \cdot e^C \quad (IV - 51)$$

Finalement, nous obtenons la solution de l'équation (IV-50) qui prend la forme suivante:

$$f(t) = A \cdot e^{\omega t} \quad (IV - 52)$$

Où A est une constante à déterminer par la condition initiale.

Revenons à présent au second terme de l'équation (IV-49), où :

$$\left( \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2} \right) \cdot \frac{a}{F(x, y)} = \omega \quad (IV - 53)$$

La solution de cette équation doit vérifier les quatre conditions aux limites citées à l'équation (IV-46). Pour cela, nous proposons la fonction (IV-54) :

$$F_{mn}(x, y) = \sin \frac{m\pi x}{B} \cdot \sin \frac{n\pi y}{H} \quad (\text{IV} - 54)$$

Avec

$$F(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn}(x, y) \quad (\text{IV} - 55)$$

En substituant l'équation (IV-54) dans l'équation (IV-53), nous obtenons :

$$\omega_{mn} = -a \left[ \left( \frac{m\pi}{B} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{H} \right)^2 \right] \quad (\text{IV} - 56)$$

Où à chaque couple de valeurs de (m et n) correspond une valeur de  $\omega_{mn}$ .

En tenant compte des équations (IV-52) et (IV-54) dans (IV-47), nous aurons :

$$\theta_{mn}(x, y, t) = A_{mn} \cdot e^{\omega_{mn}t} \cdot \sin \frac{m\pi x}{B} \cdot \sin \frac{n\pi y}{H} \quad (\text{IV} - 57)$$

Où la variable  $\theta(x, y, t)$  s'obtient en additionnant tous les termes de l'équation (IV-57):

$$\theta(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{mn}(x, y, t) \quad (\text{IV} - 58)$$

Nous présenterons, dans ce qui suit, le calcul de la constante  $A_{mn}$  moyennant la condition initiale, où :

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{mn}(x, y, t=0) = T_i - T_p \quad (\text{IV} - 59)$$

En remplaçant cette condition dans l'équation (VI-57), nous obtenons :

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi x}{B} \cdot \sin \frac{n\pi y}{H} = (T_i - T_p) \quad (\text{IV} - 60)$$

En multipliant les deux termes de cette l'équation par  $\sin \frac{m\pi x}{B} \cdot \sin \frac{n\pi y}{H}$  puis en intégrant respectivement de 0 à B et de 0 à H, on obtient :

$$A_{mn} \int_0^B \int_0^H \left( \sin \frac{m\pi x}{B} \cdot \sin \frac{n\pi y}{H} \right)^2 dx dy = (T_i - T_p) \cdot \int_0^B \int_0^H \sin \frac{m\pi x}{B} \cdot \sin \frac{n\pi y}{H} dx dy \quad (\text{IV} - 61)$$

$$A_{mn} \cdot \int_0^B \sin^2\left(\frac{m\pi x}{B}\right) dx \cdot \int_0^H \sin^2\left(\frac{n\pi y}{H}\right) dy = (T_i - T_p) \cdot \int_0^B \sin\left(\frac{m\pi x}{B}\right) dx \cdot \int_0^H \sin\left(\frac{n\pi y}{H}\right) dy$$

Sachant que  $\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$ , nous aurons:

$$A_{mn} = \frac{4}{B \cdot H} \cdot (T_i - T_p) \cdot \frac{B \cdot H}{m \cdot n \cdot \pi^2} \cdot (\cos(m\pi) - 1)(\cos(n\pi) - 1) \quad (IV - 62)$$

En considérant des valeurs impaires des nombres  $m$  et  $n$ , l'équation (IV-62) se simplifie et prend la forme suivante :

$$A_{mn} = \frac{16}{m \cdot n \cdot \pi^2} \cdot (T_i - T_p) \quad m, n: \text{impairs} \quad (IV - 63)$$

En substituant cette expression dans l'équation (IV-60), nous obtenons :

$$\theta_{mn}(x, y, t) = \frac{16}{m \cdot n \cdot \pi^2} \cdot (T_i - T_p) \cdot e^{\omega_{mn}t} \cdot \sin \frac{m\pi x}{B} \cdot \sin \frac{n\pi y}{H} \quad (IV - 64)$$

En substituant l'équation (IV-64) dans l'équation (IV-44), nous obtenons l'expression finale de la solution de l'équation de transfert de chaleur bidirectionnel en régime transitoire :

$$T(x, y, t) = \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{16}{m \cdot n \cdot \pi^2} \cdot (T_i - T_p) \cdot e^{\omega_{mn}t} \cdot \sin \frac{m\pi x}{B} \cdot \sin \frac{n\pi y}{H} + T_p \quad (IV - 65)$$

Avec :

$m, n$  : Nombres entiers impaires

$B$  : Largeur de mur suivant la direction  $x$

$H$  : Hauteur du mur suivant la direction  $y$

$T_p$  : Température des parois (extrémités) du mur

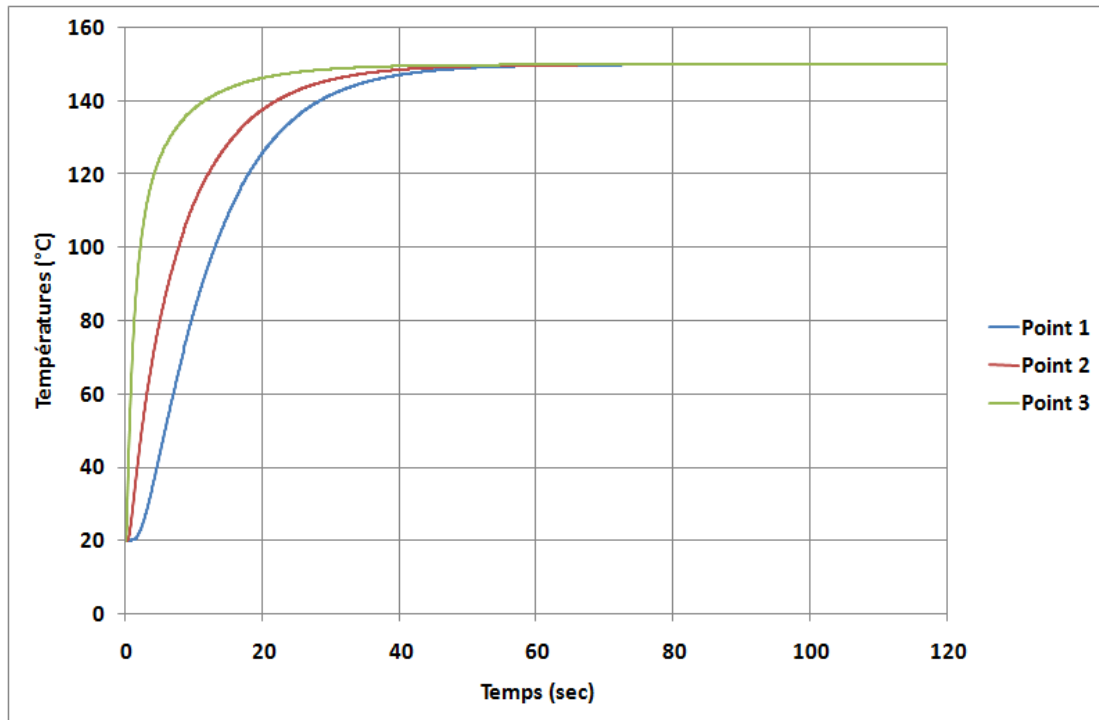
$T_i$  : Température initiale du mur

$\omega_{mn}$  : Paramètre défini à l'équation (IV-56)

$t$  : Paramètre temps (sec).

#### ❖ Représentations graphiques des résultats

Pour tracer les résultats de l'équation (IV-65), nous avons établi un programme sous le langage MATLAB, voir annexe 10, où le temps est discrétisé en plusieurs intervalles  $\Delta t=0,1$  sec. Après environ 800 itérations, la température de la plaque s'est stabilisée à  $T_p$ . Les résultats obtenus, pour les trois points (P1, P2, P3), sont représentés sur la figure suivante.



*Fig. IV-5 : Variation de la température en fonction du temps en régime transitoire obtenue par la méthode analytique*

#### IV-3-3 Résolution par la méthode des éléments finis

Afin d'éviter les erreurs dues au maillage, nous allons considérer directement un maillage de 128 éléments où les nœuds sont numérotés de la même façon d'en régime stationnaire.

##### ❖ Discrétisation de la géométrie

En effet, comme pour le régime stationnaire, ce maillage comporte 128 éléments triangulaires et 81 nœuds dont 32 possèdent des températures imposées. Ainsi, le système global à résoudre présente 49 équations.

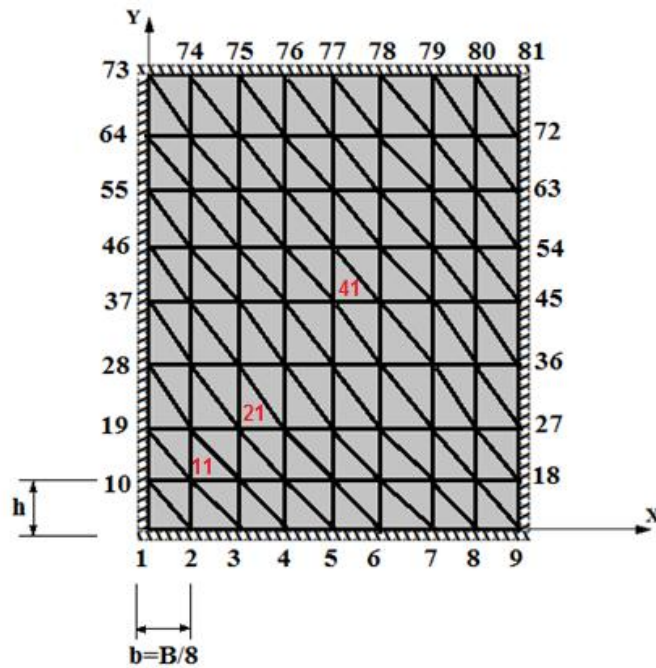


Fig. IV-6 : Discrétisation du mur en 128 éléments triangulaires

❖ Définition des matrices élémentaires

Les matrices élémentaires correspondantes ce calculent de la même façon que le régime stationnaire. En plus des matrices de conductivité et du vecteur des flux de chaleur, on définit, en régime transitoire, la matrice de capacité thermique élémentaire qui prend la forme suivante :

$$[C]_e = \frac{\rho \cdot e \cdot Cp \cdot b \cdot h}{24} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 31,1133 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (IV - 66)$$

❖ Définition des matrices globales

L'opération d'assemblage suit la même procédure que le régime stationnaire. Ainsi, et vue la taille importante de ces matrices, elles ne seront pas présentées dans ce manuscrit.

❖ Partition des ddl

En régime transitoire, l'équation de la chaleur discrétisée prend la forme suivante (voir l'équation II-42), où:

$$[\bar{K}] \cdot \{T_L\} = \{\bar{F}\} \quad (IV - 67)$$

Et dont la solution s'obtient en inversant la matrice  $[\bar{K}]$  :

$$\{T_L\} = [\bar{K}]^{-1} \cdot \{\bar{F}\} \quad (IV - 68)$$

Avec

$$[\bar{K}] = [C_{LL}] + \Delta t \cdot [K_{LL}] \quad (IV - 69)$$

$$\{\bar{F}\} = \Delta t \cdot \{F_L\}_{t+\Delta t} + [C_{LL} \quad C_{LP}] \cdot \left\{ \begin{matrix} T_L \\ T_P \end{matrix} \right\}_{t_0} - ([C_{LP}] + \Delta t \cdot [K_{LP}]) \cdot \{T_P\} \quad (IV - 70)$$

Où

- ✓  $\{T_L\}_{t_0}$  : Vecteur des températures inconnues comportant 49 lignes:

$$\{T_L\}_{t_0}^T = 20 \cdot \{1 \quad 1 \quad 1 \quad \dots \quad 1\} \quad (IV - 71)$$

- ✓  $\{T_P\}$  : Vecteur des températures imposées comportant 32 lignes :

$$\{T_P\}^T = 150 \cdot \{1 \quad 1 \quad 1 \quad \dots \quad 1\} \quad (IV - 72)$$

- ✓  $\{F_L\}_{t+\Delta t}$  : Vecteur des flux de chaleur, comportant 49 lignes, correspondant aux températures inconnues:

$$\{F_L\}_{t+\Delta t} = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0\} \quad (IV - 73)$$

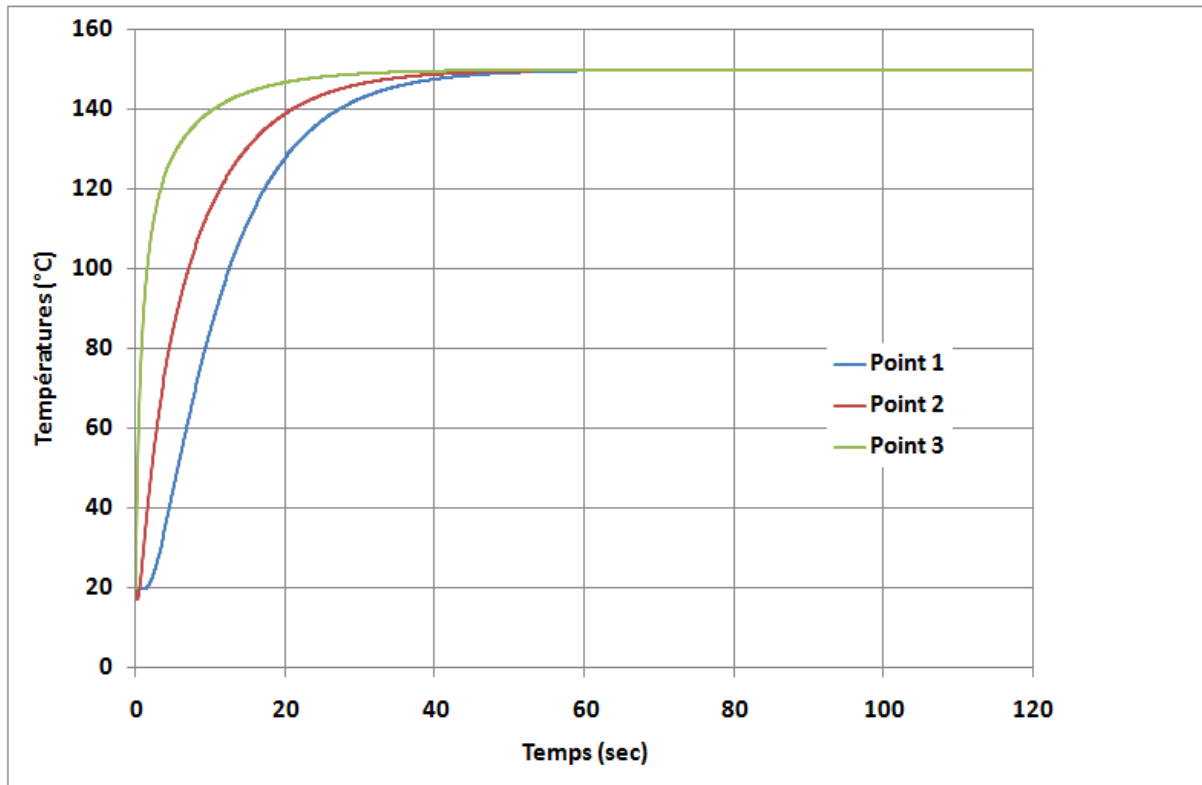
- ✓  $[C_{LL}]$  et  $[K_{LL}]$  : Matrice comportant 49 lignes et 49 colonnes
- ✓  $[C_{LP}]$  et  $[K_{LP}]$  : Matrice comportant 49 lignes et 32 colonnes

#### ❖ Etapes de résolution en régime transitoire

- ✓ Calculer la matrice  $[\bar{K}]$
- ✓ Calculer la matrice inverse de  $[\bar{K}]$
- ✓ Calculer le vecteur  $\{\bar{F}\}$
- ✓ Résoudre le système (IV-68) et déterminer le vecteur des températures inconnues  $\{T_L\}_{t_0+\Delta t}$
- ✓ Initialiser le vecteur des températures inconnues (prendre  $\{T_L\}_{t_0} = \{T_L\}_{t_0+\Delta t}$ )
- ✓ Refaire ces trois dernières étapes, pour chaque pas de temps, jusqu'à ce que les températures se stabilisent à des valeurs constantes (régime permanent).

### ❖ Affichage des résultats

Les variations des températures en fonction du temps, pour les trois points (P1, P2, P3) correspondant aux nœuds 41, 21 et 11 respectivement, sont représentées sur la figure suivante. Le programme relatif à cette résolution est présenté à l'annexe 11.



*Fig. IV-7 : Variation de la température en fonction du temps en régime transitoire obtenue par la méthode des éléments finis*

#### IV-3-4 Comparaison des résultats

Les évolutions de la température en fonction du temps, des trois points (P<sub>1</sub>, P<sub>2</sub> et P<sub>3</sub>), obtenus par les deux méthodes, analytique et éléments finis, sont représentées sur les figures IV-8, 9 et 10 où nous remarquons une quasi concordance des résultats ce qui démontre clairement la fiabilité de la méthode des éléments finis.

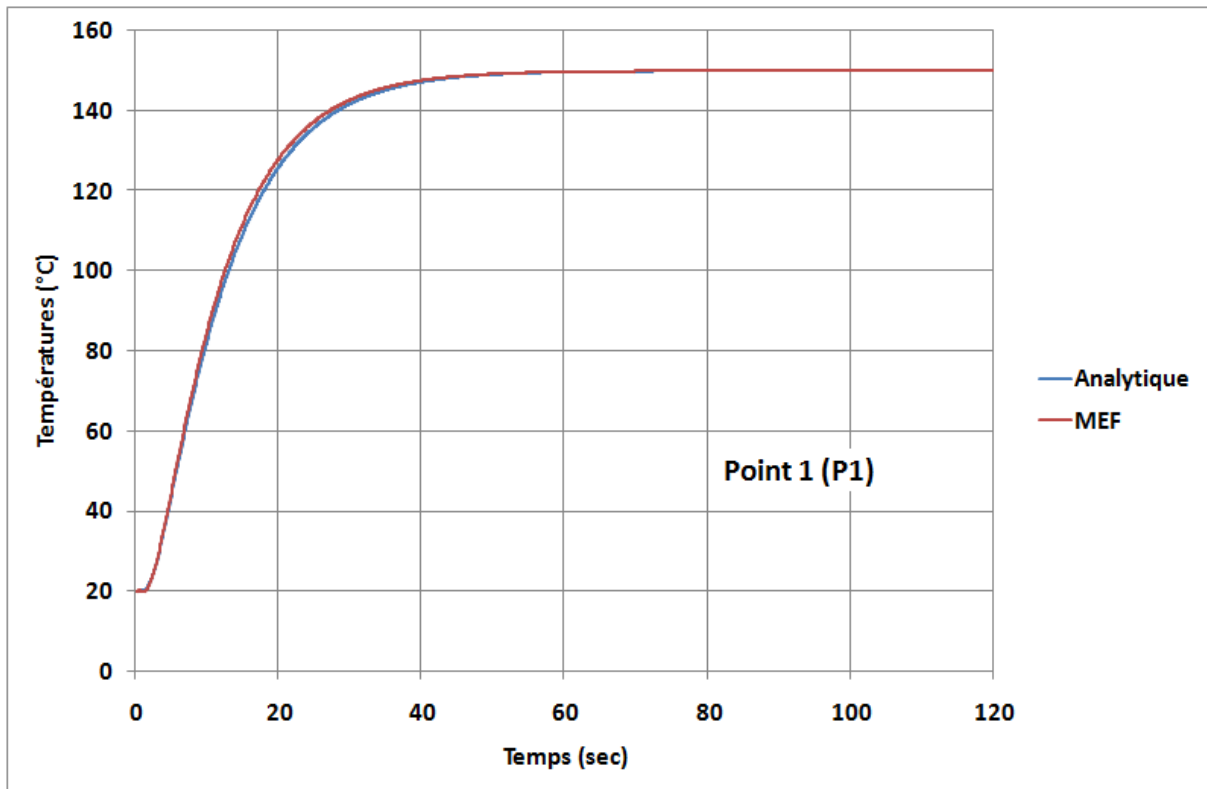


Fig. IV-8 : Comparaison des résultats obtenus par les deux méthodes au point P1

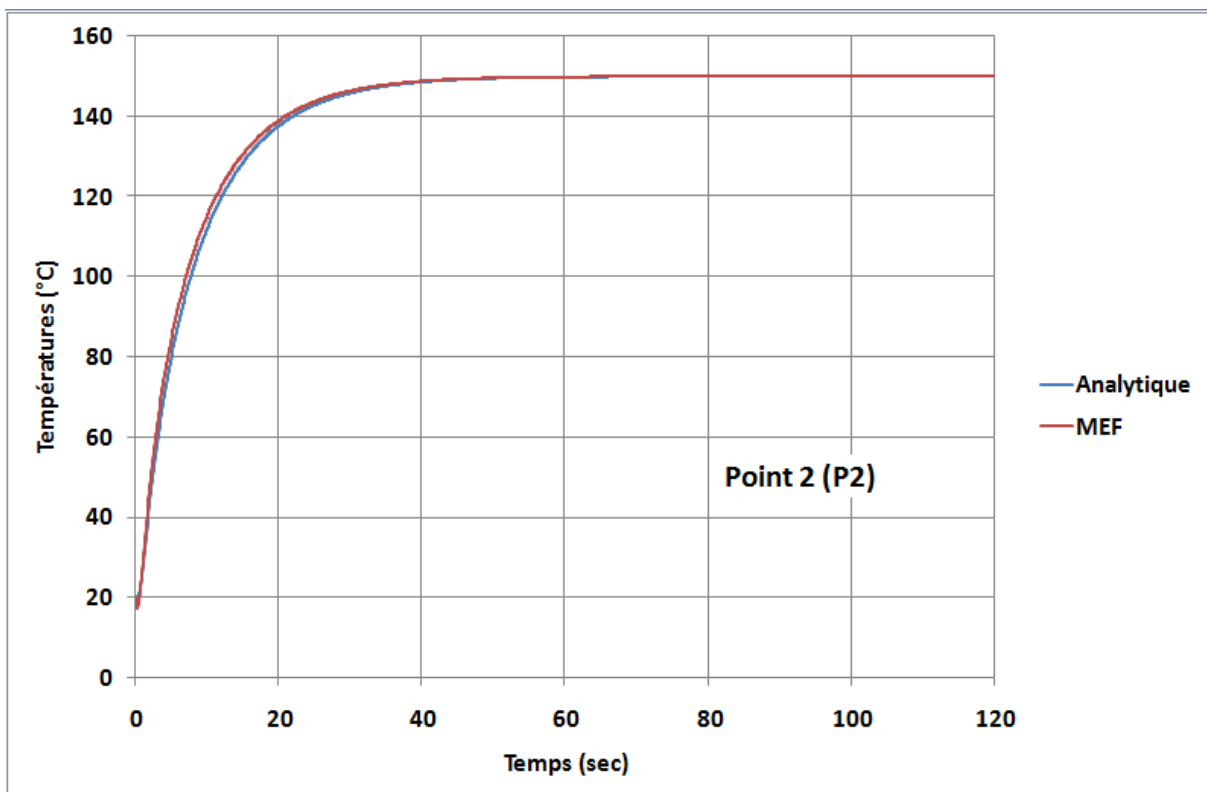
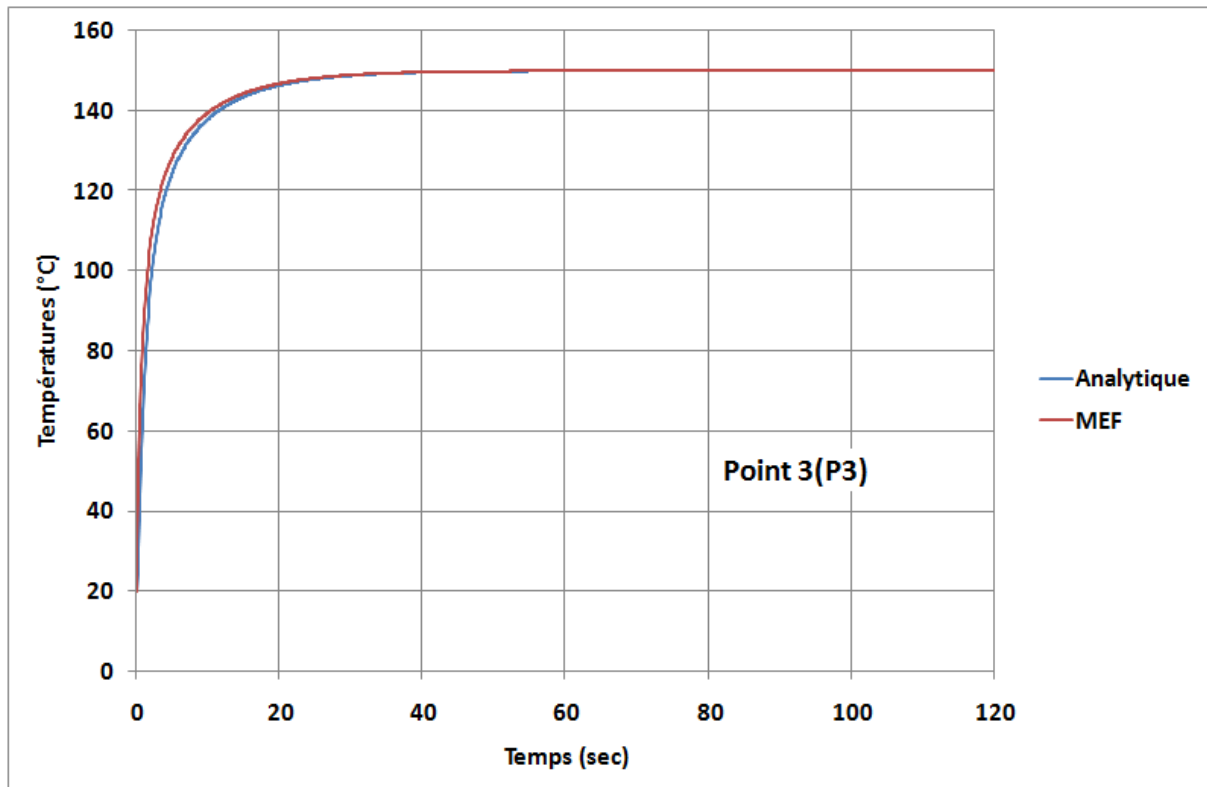


Fig. IV-9 : Comparaison des résultats obtenus par les deux méthodes au point P2



*Fig. IV-10 : Comparaison des résultats obtenus par les deux méthodes au point P3*

#### IV-4 Conclusion

Nous avons pu à travers ce chapitre afficher les résultats des transferts de chaleur bidimensionnels en considérant les deux régimes stationnaire et transitoire en utilisant la méthode des éléments finis où un élément fini triangulaire à trois nœuds a été considéré. Les résultats obtenus ont été comparés avec ceux issus de la méthode analytique où nous avons constaté une parfaite concordance, ce qui montre l'efficacité et la précision de la méthode des éléments finis dont l'application peut se généraliser sur n'importe quel conditions aux limites.

## CONCLUSION GENERALE

L'objectif de ce travail est l'application de la méthode des éléments finis pour la résolution des problèmes de transfert de chaleur bidirectionnels en considérant les deux régimes stationnaire et transitoire. Le développement de la méthode a été présenté d'une manière générale puis appliqué à deux configurations d'éléments finis triangulaire à trois nœuds.

Afin de jauger les résultats obtenus par cette méthode, deux exemples simples ont été traités par la méthode analytique puis par la MEF où nous avons constaté une parfaite concordance des résultats.

Par ailleurs, cette étude nous a permis de découvrir la difficulté de résolution de l'équation de chaleur par la méthode analytique où les solutions ne sont connues que pour des conditions aux limites simples. Et pour remédier à ce problème, les chercheurs ont souvent recours à l'utilisation des méthodes numériques dont particulièrement la méthode des éléments finis.

De plus, nous tenons à confirmer l'efficacité de la méthode des éléments finis pour la résolution des problèmes de transfert de chaleur malgré qu'elle n'est pas très utilisée dans la littérature énergétique.

En outre, à partir des résultats numériques obtenus, nous pouvons dégager les conclusions suivantes:

- La méthode des éléments finis est une méthode très générale qui peut résoudre facilement les problèmes de transfert de la chaleur présentant des conditions aux limites mêmes complexes.
- La précision des résultats obtenus par MEF dépend de la taille du maillage. Plus le maillage est fin, meilleur sont les résultats.

Enfin, pour améliorer ce sujet nous proposons, à nos camarades des promotions à venir, de développer les caractéristiques élémentaires d'un élément triangulaire à trois nœuds ayant une forme quelconque où la matrice de capacité thermique et le vecteur des flux de chaleur garderont les mêmes expressions que celles présentées dans ce manuscrit.

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [01] : DENDANI Mohammed « Analyse par éléments finis d'un transfert de chaleur unidimensionnel », université de bouira département génie mécanique, 2019/2020.
- [02] : Dr Iyès Borrdja, « Polycopié de cours transfert thermique », Edition Janvier, 1999
- [03] : Dominique Marchio et Paul Reboux, « Introduction Aux Transferts Thermiques », École des mines de Paris, ISBN : 978291176293, 2008.
- [04] : Arif Ali. Thèse de Magister : « Modélisation d'une installation à plasma inductif basse fréquence ». Université de Biskra.
- [05] : Yves JANNOT, « TRANSFERTS THERMIQUES », Ecole des Mines Nancy 2ème année, 2012.
- [06] : René Leleu, « Transferts De Chaleur » J 1 080, Techniques de l'Ingénieur, traité Sciences Fundamentals.
- [07] : Er.R.K. Rajput, "Heat and Mass transfer", revised Edition, S. Chand & company LTD, 2011.
- [09] : Daniel Choï 1, « Méthode des éléments-finis par l'exemple », Version Janvier 2016.
- [10] : Patrice RAZLOZNIK, « Analyse de systèmes thermiques par la Méthode des éléments finis, application à la conception de nouveaux capteurs thermiques », université de lille FLANDERS-ARTOIS, 10/06/1988
- [11] : MEZIANI Nedjma « Contribution de l'approche en déformation dans la modélisation des structures a contour circulaire », 2005/2006.
- [12] : Hervé Oudin « Méthode des éléments finis », 28/09/2008.
- [13] Nicolas ERRIEN « Transfert thermique », polycopié de cours, Département de Physique, Faculté des Sciences, université du Main.
- [14] K. Rockey, H. Evans « Introduction à la méthode des éléments finis », Eyrolles, 2005.
- [15] Jean-Michel Bergheau, Roland Fortunier, « Finite element simulation of heat transfert » Wiley, 2008.
- [16] K. Bathe « Finite element procedures » Prentice Hall, 1996.

**Annexe 01 : Calcul de la matrice inverse de [A]**

```

clc
clear all
syms b h
A=[1 0 0;1 b 0;1 0 h]
A1=inv(A)

```

**Annexe 02 : Calcul de la matrice des fonctions d'interpolation, [N]**

```

clc
clear all
syms b h x y
A=[1 0 0;1 b 0;1 0 h]
A1=inv(A);
N=[1 x y]*A1;
N=simplify(N)

```

**Annexe 03 : Calcul de la matrice de capacité thermique [C]**

```

clc
clear all
syms x y b h
x=sym('x','real');
y=sym('y','real');
b=sym('b','real');
h=sym('h','real');
A=[1 0 0;1 b 0;1 0 h];
A1=inv(A);
N=[1 x y]*A1;
N=simplify(N);
PRO=N'*N;
PR=simplify(PRO)
I1=int(PR,y,0,(-h/b)*x+h)
I2=int(I1,x,0,b)

```

**Annexe 04 : Calcul de la matrice de conductivité thermique [K]**

```

clc
clear all
syms x y b h bh S
x=sym('x','real');
y=sym('y','real');
b=sym('b','real');
h=sym('h','real');
B=[-1/b 1/b 0 ; -1/h 0 1/h];
S=B'
PR0=S*B;
PR=simplify(PR0)
I1=int(PR,y,0,((-h/b)*x)+h)
I2=int(I1,x,0,b)

```

**Annexe 05 : Calcul du vecteur des flux de chaleur {F}**

```

clc
clear all
syms x y b h
x=sym('x','real');
y=sym('y','real');
b=sym('b','real');
h=sym('h','real');
N=[1-x/b-y/h; x/b; y/h];
I1=int(N,y,0,((-h/b)*x)+h)
I2=int(I1,x,0,b)

```

## Annexe 06 : Résolution analytique en régime stationnaire

```

%% Résolution Analytique en régime stationnaire%%
clc
clear all
%%% Données du problèmes
H=2; % Hauteur du mur (m)
B=7; % Largeur du mur (m)
Tp1=150;%Températures imposées (°C)
Tp2=10;%Températures imposées (°C)
dT=Tp2-Tp1;
% Point P1
x=B/2;
y=H/2;
Teta=0;
for n=1:2:10
    beta=(n*pi)/B;
    T0=((4*dT/(n*pi))*sinh(beta*y)*sin(beta*x))/sinh(beta*H);
    Teta=Teta+T0;
end
T1=Teta+Tp1
% Point P2
x=B/4;
y=H/4;
Teta=0;
for n=1:2:10
    beta=(n*pi)/B;
    T0=((4*dT/(n*pi))*sinh(beta*y)*sin(beta*x))/sinh(beta*H);
    Teta=Teta+T0;
end
T2=Teta+Tp1
% Point P3
x=B/8;
y=H/8;
Teta=0;
for n=1:2:10
    beta=(n*pi)/B;
    T0=((4*dT/(n*pi))*sinh(beta*y)*sin(beta*x))/sinh(beta*H);
    Teta=Teta+T0;
end
T3=Teta+Tp1

```



## Annexe 08 : Résolution par la méthode des éléments finis en régime stationnaire

## Exemple à 32 éléments

```

clc
clear all
%%% Données du problèmes
H=2; % Hauteur du mur (m)
B=7; % Largeur du mur (m)
Tp1=150;%Températures imposées (°C)
Tp2=10;%Températures imposées (°C)
e=1; % Epaisseur de la plaque
Lamda=1;
q=0;
%%% Paramètre de la discrétisation
nn=25; % nbre de noeuds dans le maillage
ne=32; %nbre d'éléments dans le maillage
nnp=16; % nbre de noeuds où la température est imposée
nnl=nn-nnp; % nbre de noeuds où la température est inconnue
nev=8; %Nbre d'éléments horizontaux
neh=8; %Nbre d'éléments verticaux
TP1=ones(11,1);
TP1=Tp1*TP1;
TP2=ones(5,1);
TP2=Tp2*TP2;
TP=[TP1;TP2];
h=(2*H)/nev;
b=(2*B)/neh;
G=[01 02 06;02 07 06;02 03 07;03 08 07;03 04 08;04 09 08;04 05 09;05 10 09
    06 07 11;07 12 11;07 08 12;08 13 12;08 09 13;09 14 13;09 10 14;10 15 14
    11 12 16;12 17 16;12 13 17;13 18 17;13 14 18;14 19 18;14 15 19;15 20 19
    16 17 21;17 22 21;17 18 22;18 23 22;18 19 23;19 24 23;19 20 24;20 25 24];
%%%%%%%% ELEMENT 1
K1=(Lamda*e)/(2*b*h)*[b^2+h^2 -h^2 -b^2;-h^2 h^2 0;-b^2 0 b^2]
%%%%%%%% ELEMENT 2 défini par les noeuds(2,5,4)
K2=(Lamda*e)/(2*b*h)*[b^2 -b^2 0;-b^2 b^2+h^2 -h^2;0 -h^2 h^2]
%%% ASSEMBLAGE
K=zeros(nn,nn);
C=zeros(nn,nn);
F=zeros(nn,1);
%%%%%%%%
for nne=1:ne
    for l=1:3
        F(G(nne,l))=Fe(l,1)+F(G(nne,l));
        for c=1:3

                ii= mod(nne,2);
if (ii==0) %paire
            K(G(nne,l),G(nne,c))=K2(l,c)+K(G(nne,l),G(nne,c));
else
            K(G(nne,l),G(nne,c))=K1(l,c)+K(G(nne,l),G(nne,c));
end
        end
    end
end
% %%%%%%%%%

```

**Annexe 09 : Résolution par la méthode des éléments finis en régime stationnaire****Exemple à 128 éléments**

```

clc
clear all
%%% Données du problèmes
H=2; % Hauteur du mur (m)
B=7; % Largeur du mur (m)
Tp1=150;%Températures imposées (°C)
Tp2=10;%Températures imposées (°C)
e=1; % Epaisseur de la plaque
Lamda=1;
q=0;
%%% Paramètre de la discrétisation
nn=81; % nbre de noeuds dans le maillage
ne=128; %nbre d'éléments dans le maillage
nnp=32; % nbre de noeuds où la température est imposée
nnl=nn-nnp; % nbre de noeuds où la température est inconnue
nev=16; %Nbre d'éléments horizontaux
neh=16; %Nbre d'éléments verticaux
TP1=ones(23,1);
TP1=Tp1*TP1;
TP2=ones(9,1);
TP2=Tp2*TP2;
TP=[TP1;TP2];
h=(2*H)/nev;
b=(2*B)/neh;
nbrR=1; % nbre de résultats à afficher
Result=zeros(nbrR,nbrR+1);
G=[01 02 10;02 11 10;02 03 11;03 12 11;03 04 12;04 13 12;04 05 13;05 14 13
  05 06 14;06 15 14;06 07 15;07 16 15;07 08 16;08 17 16;08 09 17;09 18 17
  10 11 19;11 20 19;11 12 20;12 21 20;12 13 21;13 22 21;13 14 22;14 23 22
  14 15 23;15 24 23;15 16 24;16 25 24;16 17 25;17 26 25;17 18 26;18 27 26
  19 20 28;20 29 28;20 21 29;21 30 29;21 22 30;22 31 30;22 23 31;23 32 31
  23 24 32;24 33 32;24 25 33;25 34 33;25 26 34;26 35 34;26 27 35;27 36 35
  28 29 37;29 38 37;29 30 38;30 39 38;30 31 39;31 40 39;31 32 40;32 41 40
  32 33 41;33 42 41;33 34 42;34 43 42;34 35 43;35 44 43;35 36 44;36 45 44
  37 38 46;38 47 46;38 39 47;39 48 47;39 40 48;40 49 48;40 41 49;41 50 49
  41 42 50;42 51 50;42 43 51;43 52 51;43 44 52;44 53 52;44 45 53;45 54 53
  46 47 55;47 56 55;47 48 56;48 57 56;48 49 57;49 58 57;49 50 58;50 59 58
  50 51 59;51 60 59;51 52 60;52 61 60;52 53 61;53 62 61;53 54 62;54 63 62
  55 56 64;56 65 64;56 57 65;57 66 65;57 58 66;58 67 66;58 59 67;59 68 67
  59 60 68;60 69 68;60 61 69;61 70 69;61 62 70;62 71 70;62 63 71;63 72 71
  64 65 73;65 74 73;65 66 74;66 75 74;66 67 75;67 76 75;67 68 76;68 77 76
  68 69 77;69 78 77;69 70 78;70 79 78;70 71 79;71 80 79;71 72 80;72 81 80];

##### ELEMENT 1
K1=(Lamda*e)/(2*b*h)*[b^2+h^2 -h^2 -b^2;-h^2 h^2 0;-b^2 0 b^2]
Fe=((e*q*b*h)/6)*[1;1;1]
##### ELEMENT 2 défini par les noeuds(2,5,4)
K2=(Lamda*e)/(2*b*h)*[b^2 -b^2 0;-b^2 b^2+h^2 -h^2;0 -h^2 h^2]
##### ASSEMBLAGE
K=zeros(nn,nn);
C=zeros(nn,nn);
F=zeros(nn,1);
#####

```

## Annexe 10 : Résolution analytique en régime transitoire

```

clc
clear all
H=0.2; % Hauteur du mur (m)
B=0.1; % Largeur du mur (m)
Tp=150;%Températures imposées (°C)
Ti=20; %Température initiale (°C)
Lamda=209; %Conductivité thermique (W/m°C)
Rho=2700; % Masse volumique (kg/m^3)
Cp=885; % Capacité thermique massique (j/kg.K)
istep=150; % Nbre d'itérations
dt=0.1;% Pas de temps
a=Lamda/(Rho*Cp);% Diffusivité thermique

%%Coordonnées du point à considérer
x=B/2;
y=H/2;
%%%
i=0;
for t=0:dt:istep
    T=0; % Compteur des températures
    for m=1:2:500
        for n=1:2:500
            Wmn=(-a)*[(m*pi/B)^2+(n*pi/H)^2];
            T0=(16/(m*n*pi^2))*(Ti-Tp)*exp(Wmn*t)*sin(m*pi*x/B)*sin(n*pi*y/H);
            T=T0+T;
        end
    end
    T=T+Tp;
    i=i+1;
    Result(i,1)=t;
    Result(i,2)=T;
end
Result
plot(Result(:,1),Result(:,2))

```

## Annexe 11 : Résolution par la méthode des éléments finis en régime transitoire

## Exemple à 16 éléments

```

clc
clear all
%format long
%%% Données du problèmes
H=0.2; % Hauteur du mur (m)
B=0.1; % Largeur du mur (m)
Tp=150;%Températures imposées (°C)
Ti=20; %Température initiale (°C)
Lamda=209; %Conductivité thermique (W/m°C)
Rho=2700; % Masse volumique (kg/m^3)
Cp=885; % Capacité thermique massique (j/kg.K)
e=1; % Epaisseur de la plaque
%%% Paramètre de la discrétisation
istep=150; % Nbre d'itérations
dt=0.1;% Pas de temps
nn=81; % nbre de noeuds dans le maillage
ne=128; %nbre d'éléments dans le maillage
nnp=32; % nbre de noeuds où la température est imposée
nnl=nn-nnp; % nbre de noeuds où la température est inconnue
nev=16; %Nbre d'éléments horizontaux
neh=16; %Nbre d'éléments verticaux
q=0;
tp=ones(nnp,1);
TP=Tp*tp;
h=(2*H)/nev;
b=(2*B)/neh;
TL=ones(nnl,1);
TL=Ti*TL;
Tn=[TL;TP]
nbrR=3; % nbre de résultats à afficher
Result=zeros(nbrR,nbrR+1);
G=[01 02 10;02 11 10;02 03 11;03 12 11;03 04 12;04 13 12;04 05 13;05 14 13
 05 06 14;06 15 14;06 07 15;07 16 15;07 08 16;08 17 16;08 09 17;09 18 17
 10 11 19;11 20 19;11 12 20;12 21 20;12 13 21;13 22 21;13 14 22;14 23 22
 14 15 23;15 24 23;15 16 24;16 25 24;16 17 25;17 26 25;17 18 26;18 27 26
 19 20 28;20 29 28;20 21 29;21 30 29;21 22 30;22 31 30;22 23 31;23 32 31
 23 24 32;24 33 32;24 25 33;25 34 33;25 26 34;26 35 34;26 27 35;27 36 35
 28 29 37;29 38 37;29 30 38;30 39 38;30 31 39;31 40 39;31 32 40;32 41 40
 32 33 41;33 42 41;33 34 42;34 43 42;34 35 43;35 44 43;35 36 44;36 45 44
 37 38 46;38 47 46;38 39 47;39 48 47;39 40 48;40 49 48;40 41 49;41 50 49
 41 42 50;42 51 50;42 43 51;43 52 51;43 44 52;44 53 52;44 45 53;45 54 53
 46 47 55;47 56 55;47 48 56;48 57 56;48 49 57;49 58 57;49 50 58;50 59 58
 50 51 59;51 60 59;51 52 60;52 61 60;52 53 61;53 62 61;53 54 62;54 63 62
 55 56 64;56 65 64;56 57 65;57 66 65;57 58 66;58 67 66;58 59 67;59 68 67
 59 60 68;60 69 68;60 61 69;61 70 69;61 62 70;62 71 70;62 63 71;63 72 71
 64 65 73;65 74 73;65 66 74;66 75 74;66 67 75;67 76 75;67 68 76;68 77 76
 68 69 77;69 78 77;69 70 78;70 79 78;70 71 79;71 80 79;71 72 80;72 81 80];
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% ELEMENT 1
K1=(Lamda*e)/(2*b*h)*[b^2+h^2 -h^2 -b^2;-h^2 h^2 0;-b^2 0 b^2]
Fe=((e*q*b*h)/6)*[1;1;1]
Ce=((Rho*e*Cp*b*h)/24)*[2 1 1; 1 2 1;1 1 2]
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% ELEMENT 2 défini par les noeuds(2,5,4)
K2=(Lamda*e)/(2*b*h)*[b^2 -b^2 0;-b^2 b^2+h^2 -h^2;0 -h^2 h^2]
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% ASSEMBLAGE
K=zeros(nn,nn);
C=zeros(nn,nn);
F=zeros(nn,1);

```

```

for nne=1:ne
    for l=1:3
        F(G(nne,l))=Fe(l,1)+F(G(nne,l));
        for c=1:3
            C(G(nne,l),G(nne,c))=Ce(l,c)+C(G(nne,l),G(nne,c));
            ii= mod(nne,2);
            if (ii==0) %paire
                K(G(nne,l),G(nne,c))=K2(l,c)+K(G(nne,l),G(nne,c));
            else
                K(G(nne,l),G(nne,c))=K1(l,c)+K(G(nne,l),G(nne,c));
            end
        end
    end
end
% %%%
disp('matrice globale de conductivité thermique')
K;
disp('Matrice globale de capacité thermique')
C;
disp('vecteur global des flux de chaleur')
F;
% %%% Suppression des lignes de la matrice de conductivité
KL=K;
KL(1:10,:)=[];KL(8:9,:)=[];KL(15:16,:)=[];KL(22:23,:)=[];KL(29:30,:)=[];
KL(36:37,:)=[];KL(43:44,:)=[];KL(50:59,:)=[];
% Définition de la matrice KLL
KLL=KL;
KLL(:,1:10)=[];KLL(:,8:9)=[];KLL(:,15:16)=[];KLL(:,22:23)=[];
KLL(:,29:30)=[];KLL(:,36:37)=[];KLL(:,43:44)=[];KLL(:,50:59)=[];
% Définition de la matrice KLP
KLP=KL;
KLP(:,11:17)=[];KLP(:,13:19)=[];KLP(:,15:21)=[];KLP(:,17:23)=[];
KLP(:,19:25)=[];KLP(:,21:27)=[];KLP(:,23:29)=[];
% %%% Suppression des lignes de la matrice de capacité
CL=C;
CL(1:10,:)=[];CL(8:9,:)=[];CL(15:16,:)=[];CL(22:23,:)=[];
CL(29:30,:)=[];CL(36:37,:)=[];CL(43:44,:)=[];CL(50:59,:)=[];
% Définition de la matrice CLL
CLL=CL;
CLL(:,1:10)=[];CLL(:,8:9)=[];CLL(:,15:16)=[];CLL(:,22:23)=[];
CLL(:,29:30)=[];CLL(:,36:37)=[];CLL(:,43:44)=[];CLL(:,50:59)=[];
% Définition de la matrice CLP
CLP=CL;
CLP(:,11:17)=[];CLP(:,13:19)=[];CLP(:,15:21)=[];CLP(:,17:23)=[];
CLP(:,19:25)=[];CLP(:,21:27)=[];CLP(:,23:29)=[];
% Définition de la matrice CL
CL=[CLL CLP];
% Définition du vecteur FL
FL=F;
FL(1:10)=[];FL(8:9)=[];FL(15:16)=[];FL(22:23)=[];FL(29:30)=[];
FL(36:37)=[];FL(43:44)=[];FL(50:59)=[];
Kbar=CLL+dt*KLL;
K1=inv(Kbar);
t=0;
i=0;
for t=0:dt:istep
    i=i+1;
    Result(i,1)=t;
    Result(i,2)=Tn(1);
    Result(i,3)=Tn(9);
    Result(i,4)=Tn(25);
    Fbar=(dt*FL)+CL*Tn-(CLP+dt*KLP)*TP;
    T=K1*Fbar;
    Tn(1:nnl)=T;
    t=t+dt;
end
disp('Temps          T11          T21          T41')
Result

```

## Résumé

L'objectif de ce travail est l'application de la méthode des éléments finis pour la résolution des problèmes de transfert de chaleur bidirectionnels en considérant les deux régimes stationnaire et transitoire. En effet, il s'agit de développer explicitement les matrices élémentaires de conductivité thermique et de capacité thermique ainsi que le vecteur des flux de chaleur relatifs à un élément triangulaire à trois nœuds. Les résultats obtenus sont confrontés avec succès à ceux issus de la méthode analytique où l'erreur maximale ne dépasse guère les 2%. On se basera en outre sur l'hypothèse classique d'un matériau solide, homogène, continu et isotrope.

**Mots Clés:** méthode des éléments finis, transfert de chaleur, régime stationnaire, régime transitoire, conduction, convection, rayonnement.

## Abstract

The objective of this work is the application of the finite element method for solving bidirectional heat transfer problems considering both stationary and transient regimes. Indeed, it is a question of explicitly developing the elementary matrices of thermal conductivity and thermal capacity as well as the vector of heat fluxes relating to a triangular element with three nodes. The results obtained are successfully compared with those resulting from the analytical method where the maximum error hardly exceeds 2%. We will also base ourselves on the classical assumption of a solid, homogeneous, continuous and isotropic material.

**Keywords:** finite element method, heat transfer, stationary regime, transient regime, conduction, convection, radiation.

## الملخص

الهدف من هذا العمل هو تطبيق طريقة العناصر المحدودة لحل مشاكل نقل الحرارة ثنائية الاتجاه مع الأخذ في الاعتبار الأنظمة الثابتة والعبارة. في الواقع، إنها مسألة تطوير المصفوفات الأولية للتوصيل الحراري والسعة الحرارية بالإضافة إلى متجه التدفقات الحرارية المتعلقة بالعنصر الثلاثي ذي العقد الثلاث. تمت مقارنة النتائج التي تم الحصول عليها بنجاح مع تلك الناتجة عن الطريقة التحليلية حيث لا يتجاوز الحد الأقصى للخطأ 2%. سنبنينا أنفسنا أيضاً على الافتراض الكلاسيكي لمادة صلبة ومتجانسة ومستمرة ومتجانسة.

الكلمات المفتاحية: طريقة العناصر المحدودة، انتقال الحرارة، النظام الثابت، النظام العابر، التوصيل، الحمل الحراري، الإشعاع.