

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Akli Mohand Oulhadj - Bouira -



Faculté des Sciences et des Sciences Appliquées  
Département de Mathématiques

## *Mémoire de Master*

Filière : Mathématiques

Spécialité : Recherche Opérationnelle

# Thème

---

Etude de système de files d'attente avec dérobage

---

Présenté par :

— BOUABDALLAH AHLEM  
— BOULOUZA KHADIDJA

Devant le jury composé de :

Président	<i>M<sup>r</sup></i> Boughani L'hadi	MAA	U. A/M/O Bouira.
Encadreurs	<i>M<sup>me</sup></i> Boudanne Khadidja	MAA	U. A/M/O Bouira.
Examinateurs	<i>M<sup>me</sup></i> Meloune Nassima	MAA	U. A/M/O Bouira.
	<i>M<sup>r</sup></i> Ait Yala Nabil	MAA	U. A/M/O Bouira.

2020/2021

# Table des matières

<b>TABLE DES MATIÈRES</b>	<b>i</b>
<b>TABLE DES FIGURES</b>	<b>iii</b>
<b>LISTE DES TABLEAUX</b>	<b>iv</b>
<b>TABLE DES NOTATIONS</b>	<b>v</b>
<b>INTRODUCTION GÉNÉRALE</b>	<b>1</b>
0.1 Pourquoi y a-t-il de l'attente? . . . . .	2
<b>1 LES PROCESSUS STOCHASTIQUE</b>	<b>3</b>
1.1 Processus de Markov . . . . .	4
1.2 Processus de comptage . . . . .	5
1.3 Rappels : loi de Poisson et loi exponentielle . . . . .	6
1.3.1 Loi de Poisson . . . . .	6
1.3.2 Loi exponentielle . . . . .	6
1.4 Processus de Poisson . . . . .	7
1.5 Processus de naissance et de mort . . . . .	8
1.5.1 Processus de naissance . . . . .	9
1.5.2 Processus de mort . . . . .	10
<b>2 SYSTÈME DE FILE D'ATTENTE CLASSIQUES</b>	<b>11</b>
2.1 Les différents types de files d'attente . . . . .	12
2.2 File d'attente simple . . . . .	12
2.3 Files d'attentes Markoviennes . . . . .	13
2.4 Caractéristique de base d'une système d'attente . . . . .	13
2.4.1 Processus d'arrivée . . . . .	13
2.4.2 Processus de service . . . . .	14
2.4.3 Capacité de la file . . . . .	14
2.4.4 La taille de la population . . . . .	14
2.4.5 La discipline de la file . . . . .	14
2.4.6 Notation de Kendall . . . . .	14
2.4.7 Loi de Little . . . . .	15
2.5 Quelque modèles sur les files d'attente Markoviennes . . . . .	15
2.5.1 Modèle d'attente $M/M/1$ . . . . .	15

2.5.2	Modèle d'attente $M M 1 N$ . . . . .	19
2.5.3	Modèle d'attente $M M C$ . . . . .	21
2.5.4	Modèle d'attente $M M C N$ . . . . .	23
2.5.5	Modèle d'attente $M M \infty$ . . . . .	26
<b>3</b>	<b>SYSTÈME DE FILE D'ATTENTE AVEC DÉROBADE ET ABAN-</b>	
	<b>DON</b>	<b>28</b>
3.1	<b>Système de files d'attente avec dérobade et abandon</b> . . . . .	28
3.1.1	Description du modèle . . . . .	28
3.2	<b>Modèle de files d'attente <math>M/M/1/N</math> avec dérobade, abandon</b> . . .	29
3.3	<b>Résultats numériques</b> . . . . .	31
	<b>CONCLUSION GÉNÉRALE</b>	<b>38</b>

# Table des figures

1.1	Processus de comptage . . . . .	6
1.2	Processus de Poisson . . . . .	7
1.3	Graphe de transition d'un processus de naissance et de mort . . . . .	9
2.1	Système de file d'attente avec un serveur unique . . . . .	12
2.2	Système de file d'attente à $C$ serveurs parallèles . . . . .	12
2.3	Système de file d'attente à $C$ serveurs en série . . . . .	13
2.4	Représentation de la file d'attente simple . . . . .	13
2.5	La file $M/M/1$ . . . . .	16
2.6	Graphe de transition d'une file $M/M/1$ . . . . .	16
2.7	La file $M/M/1/N$ . . . . .	19
2.8	Graphe de transition d'une file $M/M/1/N$ . . . . .	20
2.9	La file $M/M/C$ . . . . .	22
2.10	Graphe de transition d'une file $M/M/C$ . . . . .	22
2.11	La file $M/M/C/N$ . . . . .	24
2.12	Graphe de transition d'une file $M/M/C/N$ . . . . .	25
2.13	La file $M/M/\infty$ . . . . .	26
2.14	Graphe de transition d'une file $M/M/\infty$ . . . . .	27
3.1	Modèle $M/M/1/N$ avec dérobade . . . . .	29
3.2	$L$ et $L_q$ en fonction de $N$ . . . . .	32
3.3	$W$ et $W_q$ en fonction de $N$ . . . . .	32
3.4	$L$ et $L_q$ en fonction de $\mu$ pour différentes valeurs de $\theta$ . . . . .	34
3.5	$W$ et $W_q$ en fonction de $\mu$ pour différentes valeurs de $\theta$ . . . . .	34
3.6	$L$ et $L_q$ en fonction de $\lambda$ pour différentes valeurs de $\theta$ . . . . .	35
3.7	$L$ et $L_q$ en fonction de $\theta$ pour différentes valeurs de $\mu$ . . . . .	36
3.8	$L$ et $L_q$ en fonction de $\theta$ pour différentes valeurs de $\lambda$ . . . . .	37

# Liste des tableaux

- 3.1 Variations des paramètres de performance par rapport  $N$  . . . . . 32
- 3.2 Variations des paramètres de performance par rapport  $\mu$  . . . . . 33
- 3.3 Variations des paramètres de performance par rapport  $\lambda$  . . . . . 35
- 3.4 Variations des paramètres de performance par rapport  $\theta$  . . . . . 36

# TABLE DES NOTATIONS

Paramètres	Signification
$(\Omega, F, P)$	L'espace de probabilité
$\Omega$	Class des évènements
$F$	Sous-class de parties de $\Omega$
$P$	La probabilité les évènements
$E$	Espace des états
$T$	Espace des temps
$a_{ij}$	Matrices stochastiques
$E(.)$	L'espérance
$V(.)$	Variance
$\lambda_n$	Taux de naissance
$\mu_n$	Taux de mort
$f(t)$	La densité de probabilité
$X(n)$	L'état du processus $\{X(n), n \geq 0\}$ à temps discret à l'étape $n$
$X(t)$	L'état du processus $\{X(t), t \geq 0\}$ à temps continu à l'instant $t$
$P_{ij}$	La probabilité de passage de l'état $i$ à l'état $j$ en une étape
e.i :	c'est-à-dire
$\lambda$	Le taux d'arrivée au système
$\frac{1}{\lambda}$	Le temps moyen entre deux arrivées
$\mu$	Le taux de service
$\frac{1}{\mu}$	La durée moyenne de service
$\rho$	Le coefficient d'utilisation du système
$L$	Le nombre moyen de clients dans le système
$L_q$	Le nombre moyen de clients dans le file d'attente
$W$	Le temps moyen de séjour d'un client dans le système
$W_q$	Le temps moyen d'attente dans la file
$C$	Le nombre de serveur
$N$	La capacité du système
$S$	Le serveur
$M$	Loi exponentielle
$G$	Loi général
$D$	Loi constante
$E_k$	Loi d'Erlang
$H_k$	Loi hyperexponentielles

FIFO	First in First out
LIFO	Last in First out
SIRO	Served in Random order

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

L<sup>a</sup> théorie des files d'attente fournit un outil très puissant et efficace pour la modélisation des systèmes admettant un phénomène d'attente. Cette théorie datent du début du XX<sup>ème</sup> siècle par les travaux de l'ingénieur danois Agner Krarup Erlang (1878, 1929). Ses études sur le trafic téléphonique de Copenhague pour le mieux gérer afin de déterminer le nombre de circuits nécessaires pour fournir un service téléphonique acceptable, sont considérées comme la première brique dans cette théorie [28]. Ensuite, les files d'attente ont été intégrés dans la modélisation des systèmes informatiques et aux réseaux de communication.

L'étude et l'analyse de ces systèmes d'attente se basent sur la théorie des processus stochastiques, en particulier des processus Markoviens. La modélisation et la simulation jouent un rôle dominant, dans l'évaluation prédictive du comportement du système.

Dans le but d'étudier mathématiquement un système de file d'attente, en premier lieu, on doit introduire un processus stochastique décrivant l'état du système à un instant donné du temps. En général, on distingue deux catégories de processus stochastique décrivant l'état du système de file d'attente : les processus stochastiques Markoviens et ceux non-Markoviens. Cependant, on dispose de plusieurs méthodes qui permettent de rendre ces derniers Markoviens moyennant certaines transformations (méthode de la chaîne de Markov induite, méthode des variables supplémentaires).

Puis, en fonction des quantités qui déterminent la structure du système, on cherche à calculer le régime transitoire. La distribution stationnaire du processus stochastique introduit permet d'obtenir les indices de performance du système : le temps d'attente d'un client, le nombre moyen de client dans le système, le taux d'occupation des dispositifs de service,... Comme les arrivées des clients et les temps de service dépendent de certains paramètres souvent pour un modèle stochastique en rendant certains paramètres du système, aléatoires. Les modèles les plus simples à étudier théoriquement sont ceux pour lesquels les clients arrivent suivant un processus de Poisson homogène (Markovien) qui ne dépend pas du temps (les temps d'inter-arrivées sont exponentielles).

Le modèle mathématique de base des files d'attente est le suivant : des clients arrivent suivant un certain processus. Quand un client arrive, si un guichet est libre, il se présente à celui-ci pour être servi, sinon il se met en attente et sera servi lorsqu'un guichet sera libre et que les clients arrivés avant lui auront été servis (à moins qu'un système de priorités plus complexe ne soit mis en place). Les temps de service suivent une certaine loi de probabilité.

Généralement, les clients voient dans l'attente une activité sans valeur ajoutée, s'ils attendent trop longtemps, ils associent cette perte de temps à une mauvaise qualité de service. De la même façon, au sein de l'entreprise, des employés inoccupés ou des équipe-



ments inutilisés représentent des activités sans valeur ajoutée. Pour éviter ces situations, la majorité des entreprises ont mis en place des processus d'amélioration continue dont le but ultime est l'élimination de toute forme de gaspillage, notamment l'attente. Tous ces exemples révèlent l'importance de l'analyse des files d'attente. Commençons par une question fondamentale : pourquoi y a-t-il de l'attente ?

## 0.1 Pourquoi y a-t-il de l'attente ?

Il y a plusieurs choses dans la vie pour lesquelles il faut attendre, par exemple, le temps passé par les vendeurs à discuter avant de prendre une commande ou le temps passé dans une banque ou on attend les autobus, les ascenseurs, et ainsi que établissement de restauration rapide qui peut traiter en moyenne 100 commandes à l'heure voit malgré tout se former des files d'attente avec un nombre moyen de 80 commandes à l'heure.

L'expression clé est " en moyenne ". Le problème vient du fait que les arrivées des clients ont lieu à intervalles aléatoires plutôt qu'à intervalles fixes. De plus, certaines commandes requièrent un temps de traitement plus long. En d'autres termes, les processus d'arrivée et de service ont un degré de variabilité élevé. Par conséquent, le système est soit temporairement congestionné, ce qui crée des files d'attente, soit vide, parce qu'aucun client ne se présente.

Dans ce travail, nous réalisons l'analyse d'un système de file d'attente avec dérobade, abandon (clients impatients). Cette impatience est due à plusieurs facteurs, soit par insuffisance de nombre de serveurs, soit par une qualité de service médiocre, ou encore une mauvaise gestion du système. les système de file d'attente avec dérobade, abandon ou les deux peuvent être considérées comme un phénomène caractéristique de la vie contemporaine. Il ont été étudiés par de nombreux chercheurs. Haight(1957) est le premier qui a étudié le modèle d'attente M/M/1 avec dérobade. Leffet de la combinaison entre le déro-bade et l'abandon dans un système de file d'attente M/M/1/N a été le but d'un travail proposé par Ancker et Gafarian.

Ce mémoire est structuré de la manière suivante :

Dans le premier chapitre, nous présentons les notions de bases de l'étude des systèmes de files d'attente, à savoir les processus stochastiques (processus de Markov, processus de comptage, processus de Poisson, processus de naissance et de mort), qui sont un outil très puissant pour la modélisation des systèmes dynamiques.

Dans le deuxième chapitre, nous introduisons la terminologie de la théorie des files d'attente. Certaines définitions et notations qui sont nécessaires dans l'étude des systèmes de files d'attente comme (notation de Kendall, la loi de Little, ...etc) sont notamment données. Ensuite nous étudions quelque modèles de files d'attente markoviennes (M|M|1, M|M|1|N, M|M|C, M/M/1/N, M|M|∞) et l'évaluation de leurs paramètres de performance.

Et enfin le troisième chapitre représente une étude du modèle M|M|1|N de file d'attente avec dérobade et abandon. Ensuite nous présentons quelques exemples numériques pour montrer comment les différents paramètres du modèle influencent sur le comportement du système.

# LES PROCESSUS STOCHASTIQUE

Les processus stochastiques décrivent l'évolution d'une grandeur aléatoire en fonction du temps (ou de l'espace). On le définit comme une famille de variables aléatoires  $X(t)$  associées à toutes les valeurs  $t \in T$  (souvent le temps). D'un point de vue statistique, on considèrera l'ensemble des observations disponibles  $X(t)$  comme une réalisation du processus, ce qui donne lieu à certaines difficultés. Un premier problème concerne le fait que la durée sur laquelle est construit le processus est généralement infinie alors qu'une réalisation porte sur une durée finie.

Il est donc impossible de représenter parfaitement la réalité. Il y a une seconde difficulté beaucoup plus sérieuse : à la différence du problème des variables aléatoires, l'information disponible sur un processus se réduit généralement à une seule réalisation.

Dans ce chapitre nous allons présenté brièvement quelques définitions sur les processus stochastiques. On parlera en particulier de chaque processus, ensuite nous donnons certaines relations entre eux.

## Définition 1.1.1 : (Processus stochastique)

Un processus stochastique  $\{X(t), t \in T\}$  est une collection de variables aléatoires indexées par un paramètre  $t$  et définies sur un même espace de probabilités  $(\Omega, F, P)$  [1], où  $X(t)$  représente l'état du processus au temps  $t$  et l'ensemble de toutes les valeurs possibles pour cette variable est appelée l'espace des états du processus et sera noté  $E$ .

- Si  $T$  est dénombrable i.e :  $T \subseteq E$ , alors nous disons que  $\{X(t), t \in T\}$  est un processus à temps discret.
- Si  $T$  est un intervalle de  $[0; \infty[$ , alors le processus stochastique est dit un processus à temps continu.

## Définition 1.1.2 : (Matrices stochastiques)

Une matrice stochastique est une matrice  $(a_{ij})$  avec  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  telle que :

$$a_{ij} \geq 0$$
$$\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

**Théorème 1.1.1 :** Le produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique [2].

**Preuve :** Supposons que les matrices A et B sont stochastiques et posons  $C = AB$ , On a :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \geq 0 \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n c_{ij} &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \\ &= \sum_{k=1}^n a_{ik} \underbrace{\sum_{j=1}^n b_{kj}}_{=1, \forall k} \\ &= \sum_{k=1}^n a_{ik} = 1. \end{aligned}$$

## 1.1 Processus de Markov

Un processus de Markov est un processus stochastique possédant la propriété de Markov. Dans un tel processus, la prédiction du futur à partir du présent n'est pas rendue plus précise par des éléments d'information concernant le passé.

les suites markoviennes sont appelés chaînes de Markov. On distingue les chaînes de Markov à espace d'états discret et celles à espace d'états continu.

### Définition 1.2.1 : (Processus de Markov)

Un processus de Markov  $\{X(t), t \in R^+\}$  est un processus stochastique possédant la propriété de Markov si, pour tout

$$t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n \in R^+ :$$

$$P[X(t_n) = i_n | X(t_{n-1}) = i_{n-1}, \dots, X(t_0) = i_0] = P[X(t_n) = i_n | X(t_{n-1}) = i_{n-1}].$$

### Définition 1.2.2 : (Chaînes de Markov en temps discret)

Une chaîne de Markov à temps discret est un processus stochastique  $\{X(n), n = 0, 1, \dots\}$  à temps discret, défini sur un espace d'états E fini ou dénombrable et vérifiant la propriété de Markov suivante :

$$P[X(n+1) = j | X(n) = i, X(n-1) = i-1, \dots, X(0) = 0] = P[X(n+1) = j | X(n) = i]$$

pour tout  $n \geq 0$  et pour tout états  $j, i, i_{n-1}, \dots, i_0 \in E$ .

En d'autres termes, une chaîne de Markov à temps discret est homogène (dans le temps) si, pour toute paire d'états (i, j) et tout instant n :

$$P[X(n) = j | X(n-1) = i] = P[X(n+k) = j | X(n+k-1) = i]; \quad \forall k \geq 0 \quad [3].$$

### Définition 1.2.3 : (Chaînes de Markov en temps continu)

Une chaîne de Markov à temps continu est un processus  $\{X(t), t \in R^+\}$  à valeur discret dans E qui satisfait aux hypothèses suivantes [4] :

—  $H_1$  : X (t) est un processus Markovien, i.e : pour toute suite d'instant

$$t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n \in R^+ :$$

$$P[X(t_n) = i_n | X(t_{n-1}) = i_{n-1}, \dots, X(t_0) = i_0] = P[X(t_n) = i_n | X(t_{n-1}) = i_{n-1}];$$

- $H_2 : X(t)$  est un processus homogène, i.e : pour toute  $k, t \in \mathbb{R}^+$  et  $i, j \in \mathbb{R}^+$  :  $P[X(t+k) = j | X(k) = i] = P[X(t) = j | X(0) = i]$ .

**Définition 1.2.4 : (La matrice de transition)**

Il s’agit de modéliser une chaîne de Markov à l’aide de représentations synthétiques afin de connaître l’évolution des états du système. On note [5] :

- $P_{ij}$  la probabilité d’une transition à l’état  $j$  à l’instant  $t+1$  sachant qu’elle a été dans l’état  $i$  à l’instant  $t$ .
- $P$  la matrice de ces probabilités :

$$\begin{pmatrix} P_{1,1} & P_{1,2} & \dots & & P_{1,DimE} \\ P_{2,1} & P_{2,2} & \dots & & P_{2,DimE} \\ & & \ddots & & \\ & & & P_{i,i} & \dots & P_{i,j} \\ \vdots & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & P_{i,i} & \dots & P_{i,j} \\ & & & & & \ddots \\ P_{DimE,1} & P_{DimE,2} & \dots & & & P_{DimE,DimE} \end{pmatrix}$$

## 1.2 Processus de comptage

**Définition 1.3.1 : (Processus de comptage)**

Soit  $(O_n)_{n \geq 1}$  l’instant d’occurrence du  $n^{\text{ème}}$  évènement, le processus stochastique  $\{N(t), t \geq T\}$  est appelé processus de comptage à temps continu associé à  $(O_n)_{n \geq 1}$  si ses réalisations sont des fonctions en escalier non décroissantes [6].

Tout processus de comptage vérifier les propriété suivantes :

- Pour tout  $t \geq 0$ , le nombre  $N(t)$  est à valeurs entières positives ;
- $N(t)$  a des valeurs entières uniquement ;
- pour  $s < t$ ,  $N(t) - N(s)$  est le nombre d’évènements qui ont eu lieu entre  $s$  et  $t$ .

**Définition 1.3.2 : (Processus à accroissements indépendants)**

Un processus de comptage  $\{N(t), t \in \mathbb{R}^+\}$  est appelé processus à accroissements indépendants si pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour tous  $t_1, \dots, t_n$  tels que :  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , les accroissements  $N(t_1) - N(0), N(t_2) - N(t_1), \dots, N(t_n) - N(t_{n-1})$  sont des variables aléatoires indépendantes.

**Définition 1.3.3 : (Processus à accroissements stationnaire)**

Le processus est dit stationnaire (ou homogène dans le temps), si pour tout  $s$  et pour tout  $t$ , l’accroissement  $P[N(t-s) - N(s) = k] = P[N(t) = k] = p_k(t)$ .

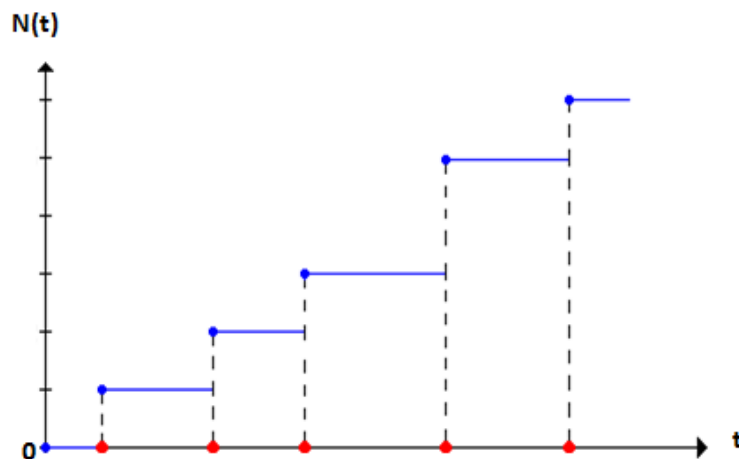


FIGURE 1.1 – Processus de comptage

## 1.3 Rappels : loi de Poisson et loi exponentielle

### 1.3.1 Loi de Poisson

**Définition 1.4.1.1 :** Une variable aléatoire  $X$  à valeurs entières suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$  si :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!} \exp^{-\lambda n}$  [11].

**Distribution de Poisson :** La distribution de probabilité de  $n$  est  $P_n = \frac{\lambda^n}{n!} \exp^{-\lambda n}$ ,  $n$  une variable aléatoire discret et  $n = 0, 1, \dots$ , l'espérance et la variance de  $n$  sont [11] :  $E(n) = \lambda$  et  $V(n) = \lambda$ .

### 1.3.2 Loi exponentielle

**Définition 1.4.2.1 :** Une variable aléatoire  $Y$  à valeurs réelles strictement positives suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$  si :  $\forall t > 0 \quad \mathbb{P}(Y = t) = \lambda \exp^{-\lambda t}$  [11].

**Distribution de exponentielle :** Soit  $t$  une variable aléatoire continue avec  $t \geq 0$  qui suit une distribution exponentielle. La densité de probabilité de  $t$  est  $f(t) = \lambda \exp^{-\lambda t}$  et la distribution cumulée correspondante est  $F(t) = 1 - \exp^{-\lambda t}$ .

L'espérance et la variance de  $t$  sont [11] :  $E(t) = \frac{1}{\lambda}$  et  $V(t) = \frac{1}{\lambda^2}$ .

**Remarque 1.4.2.1 :** Une variable aléatoire  $Y$  de la loi exponentielle est caractérisée par la propriété d'absence de mémoire que l'on exprime formellement par :

$$\forall t, s \geq 0 \quad \mathbb{P}(Y > t + s / Y > t) = \mathbb{P}(Y > s) \text{ [11].}$$

## 1.4 Processus de Poisson

Nous allons à présent introduire un processus de nature différente, dont le domaine d'applicabilité est très important : le processus de Poisson. Dans le cadre qui va nous intéresser ici, celui-ci décrit la répartition aléatoire et uniforme de points sur la droite réelle positive.

Il peut servir à modéliser par exemple :

- Les appels téléphoniques arrivant dans une centrale ;
- Les temps d'arrivée de clients à une caisse ;
- Les temps d'occurrence de sinistres à dédommager par une compagnie d'assurance... etc.

Les arrivées des clients à un système de file d'attente sont caractérisées par l'ensemble des instants ou dates d'arrivée de chaque client. La collection de ces dates d'arrivée peut être modéliser par le processus de Poisson.

**Définition 1.5.1 :** On dit qu'un processus de comptage  $\{N(t), t \in \mathbf{R}^+\}$  est un processus de Poisson s'il satisfait aux trois conditions suivantes [7] :

- Le processus  $N(t)$  est homogène dans le temps ;
- Le processus  $N(t)$  est à accroissements indépendants ;
- Autrement dit,

$$p_k(\Delta t) = \begin{cases} o(\Delta t) & \text{si } k \geq 2 \\ \lambda\Delta t + o(\Delta t) & \text{si } k = 1 \\ 1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t) & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

Le coefficient  $\lambda$  est appelé intensité du processus de Poisson.

Le processus ainsi décrit pourrait-être schématisé par le graphe suivant :

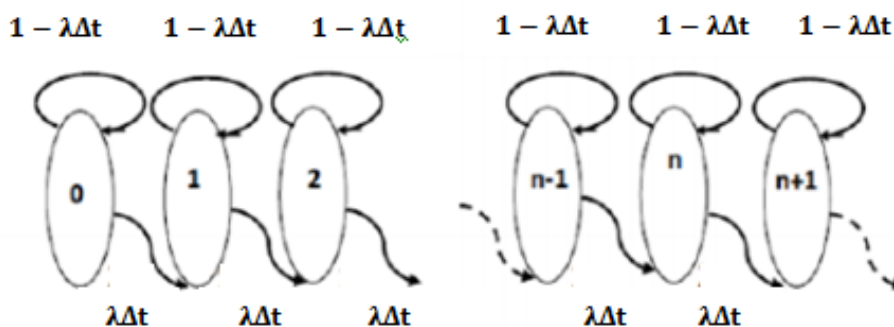


FIGURE 1.2 – Processus de Poisson

**Définition 1.5.1 :** (Équivalente du processus de Poisson)

Un processus de Poisson  $\{N(t), t \geq 1\}$  d'intensité  $\lambda$  est un processus de comptage à trajectoires continues à droite [8] tel que :

- $N(0) = 0$  ;
- $N$  est un processus à accroissements indépendants et stationnaires ;
- pour tout  $t \geq 0$ ,  $N(t)$  suit la loi de Poisson.

**Théorème 1.5.1 :**  $\{N(t), t \in \mathbf{R}^+\}$  est un processus de Poisson de paramètre  $\lambda$  si et seulement si les variables aléatoires  $T_n$  sont indépendantes de même loi exponentielle de densité [9] :

$$f_{T_n}(t) = \lambda \exp^{-\lambda t} 1_{]0, +\infty[}.$$

**Preuve :**  $P([T_1 > t]) = P([N(t) = 0]) = \exp^{-\lambda t} = 1 - F_1(t)$

où :  $F_1$  est la fonction de répartition de  $T_1$ . On a donc bien  $T_1$  qui suit la loi exponentielle.

$$\begin{aligned} P^{[T_1=t_1]}([T_2 > t]) &= P([N(t_1+t) = 1] / [N(t_1) = 1] \cap [N(s) = 0 \text{ pour tout } s < t_1]) \\ &= P([N(t_1+t) - N(t_1) = 0] / [N(t_1) = 1] \cap [N(s) = 0 \text{ pour tout } s < t_1]) \\ &= P([N(t_1+t) - N(t_1) = 0]). \end{aligned}$$

D'après l'indépendance des accroissements, on a :

$$P([N(t_1+t) - N(t_1) = 0]) = P([N(t_1+t-t_1) = 0]) = P([N(t) = 0]).$$

D'après la stationnarité, et c'est aussi  $\exp^{-\lambda t}$  car  $N(t)$  suit la loi de Poisson. Donc  $T_2$  est bien indépendante de  $T_1$  et de même loi exponentielle.

De façon plus générale :

$$\begin{aligned} P([T_k > t] / [T_1 = t_1] \cap \dots \cap [T_{k-1} = k-1]) &= P([N(t_{k-1}+t) - N(t_{k-1}) = 0]) \\ &= P([N(t) = 0]) = \exp^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

Donc  $T_k$  est indépendante de  $T_1, \dots, T_{k-1}$  et de même loi exponentielle la réciproque sera admise.

## 1.5 Processus de naissance et de mort

Un processus est une collection des variables aléatoires  $\{X(t), t \geq 0\}$ , indexée par le temps. Ici, il nous servira à décrire l'évolution aléatoire au cours du temps d'un nombre d'individus, dans une population ou un système d'attente. Les variables aléatoires  $X(t)$  prennent donc leurs valeurs dans l'ensemble des entiers  $N$ . Le processus évolue comme un processus markovien de saut : le nombre d'individus reste constant pendant une certaine durée exponentielle, puis il saute vers une autre valeur. S'agissant d'une population ou d'une file d'attente, nous ne considérerons que des sauts vers les deux valeurs voisines : la taille de la population peut soit augmenter de 1 (naissance ou arrivée) soit diminuer de 1 (mort ou départ). L'intensité de ces sauts est gouvernée par deux suites de réels positifs  $(\lambda_n)_{n \in N}$  (taux de naissance) et  $(\mu_n)_{n \in N^*}$  (taux de mort).

Pour éviter les cas particuliers, nous supposerons dans un premier temps que ces taux sont tous strictement positifs.

**Définition 1.6.1 : (Processus de naissance et de mort)**

C'est un cas particulier de chaîne de Markov [10] où seules les transitions d'un état à un état voisin sont permises, on s'intéresse au cas continu avec des taux de transitions. C'est le point de départ de la théorie des files d'attente.

On introduit les données suivantes :

- $\lambda_n$  : taux de naissances quand le nombre de population égale à  $n$  ;
- $\mu_n$  : taux de morts quand le nombre de population égale à  $n$ .

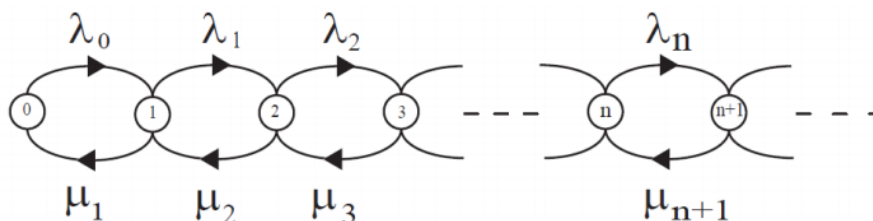


FIGURE 1.3 – Graphe de transition d'un processus de naissance et de mort

La matrice génératrice de ce processus est :

$$\begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mu_1 & -\lambda_1 - \mu_1 & \lambda_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mu_2 & -\lambda_2 - \mu_2 & \lambda_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \mu_3 & -\lambda_3 - \mu_3 & \lambda_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

À partir de là, on peut écrire les équations de balance associées à ce système :

$$\lambda_n P_n = \mu_{n+1} P_{n+1} \quad \text{si } n = 1, 2, \dots$$

ainsi,

$$P_{n+1} = \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}} P_n = \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}} \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} P_{n-1} = \dots = \prod_{i=0}^n \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} P_0 \quad \text{si } n = 1, 2, \dots$$

d'où :

$$P_{n+1} = \prod_{i=0}^n \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} P_0 \quad \text{si } n = 1, 2, \dots$$

en utilisant la condition  $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$ , on obtient :

$$P_0 = \left[ 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} \right]^{-1}.$$

**1.5.1 Processus de naissance**

**Définition 1.6.1.1 :** Soit  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels strictement positifs. Un processus de naissance de taux de naissance  $\lambda_n$  est un processus Markovien de saut  $\{X(t), t \geq 0\}$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq 0$  le taux de transition de  $n$  vers  $n+1$  est  $\lambda_n$ .



**Remarque 1.6.1.1 :** Le processus de naissance est la généralisation direct d'un processus de Poisson lorsque le paramètre d'intensité  $\lambda$  dépend de l'état courant du processus.

## 1.5.2 Processus de mort

**Définition 1.6.2.1 :** Soit  $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de réels strictement positifs. Un processus de mort de taux de mort  $\mu_n$  est un processus Markovien de saut  $\{X(t), t \geq 0\}$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq 0$  le taux de transition de  $n$  vers  $n - 1$  est  $\mu_n$ .

# SYSTÈME DE FILE D'ATTENTE CLASSIQUES

La théorie des files d'attentes consiste en l'étude de systèmes où des clients se présentent à un dispositif de service, appelé serveur. Puisqu'un client occupe le serveur pendant un certain temps, les autres clients doivent attendre avant d'être servis, formant ainsi une file d'attente. Cette théorie constitue un outil théorique et pratique pour la modélisation stochastique l'évaluation des performances et le contrôle de différents types de systèmes concrets (tels que les systèmes de production, les systèmes informatiques,.....).

Dans ce chapitre après la présentation des concepts et outils de base qui seront utilisés dans ce travail, nous allons passer en revue les principaux résultats et technique d'analyse mathématique obtenus dans la littérature sur les modèles de files d'attente Markovienne.

## Définition 1.2.1 : (File d'attente)

Une file d'attente est un système dans lequel arrivent des clients auquel des serveurs fournissent un service. Ce formalisme peut être utilisé dans des situations diverses : guichet de poste trafic routier, traitement des instructions par un processeur, gestion de communications téléphoniques, ateliers de réparation, ...etc.

On parle de phénomène d'attente chaque fois que certaines unités appelées clients se présentent d'une manière aléatoire à de stations afin de recevoir un service dont la durée est généralement aléatoire [12].

**Classification des files d'attente :** Pour décrire une file d'attente, on doit donc se donner les éléments suivants [13] :

- La nature du processus des arrivées qui est définie par la distribution des intervalles séparant deux arrivées consécutives ;
- La distribution du temps aléatoire de service ;
- Le nombre  $C$  des stations de service ;
- La capacité  $N$  du système. Si  $N < 1$ , la file ne peut dépasser une longueur de  $N - C$  unités. Dans ce cas, certains clients qui arrivent vers le système n'ont pas la possibilité d'y entrer.

**Terminologie et notations :** En lien avec la loi exponentielle [14] :

- $\lambda$  : Le taux d'arrivée : le nombre moyen d'arrivées par unité de temps ;
- $\frac{1}{\lambda}$  : L'intervalle de temps moyen séparant deux arrivées consécutives ;

- $\mu$  : Le taux de service : le nombre moyen de clients servis par unité de temps ;
- $\frac{1}{\mu}$  : Temps moyen de service d'un client dans le système.

**En situation d'équilibre on note :**

- $L$  : Nombre moyen (espérance mathématique) de client dans le système ;
- $L_q$  : Nombre de clients dans la file d'attente excluant ceux qui sont dans le service ;
- $W$  : Temps de séjour moyen d'un client dans le système ;
- $W_q$  : Le temps moyen passé par un client dans la file (excluant le temps de service) [15].

## 2.1 Les différents types de files d'attente

Les figures suivantes représentent les différents systèmes de files d'attente selon l'espace d'attente et l'espace de service :

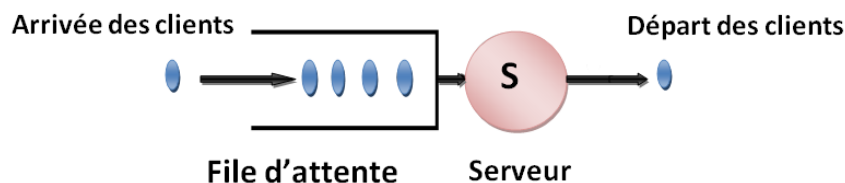


FIGURE 2.1 – Système de file d'attente avec un serveur unique

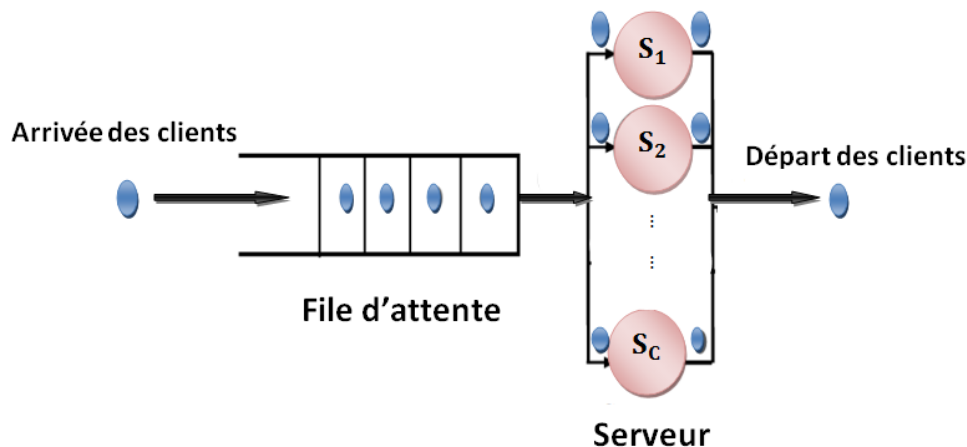
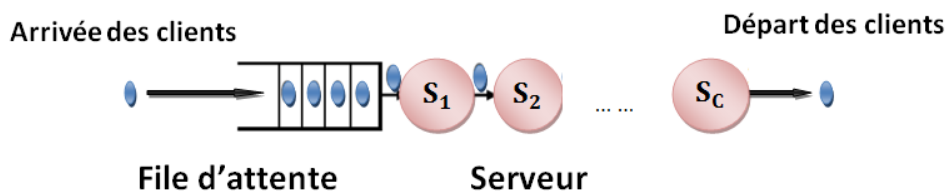


FIGURE 2.2 – Système de file d'attente à  $C$  serveurs parallèles

## 2.2 File d'attente simple

**Définition 1.3.1 :** Une file d'attente est un système caractérisé par un espace d'attente qui contient une ou plusieurs places, et un espace de service composé d'un ou plusieurs

FIGURE 2.3 – Système de file d'attente à  $C$  serveurs en série

serveurs.

les clients arrivent de l'extérieur, patientent éventuellement dans la file d'attente, reçoivent un service, puis quittent la station [16].

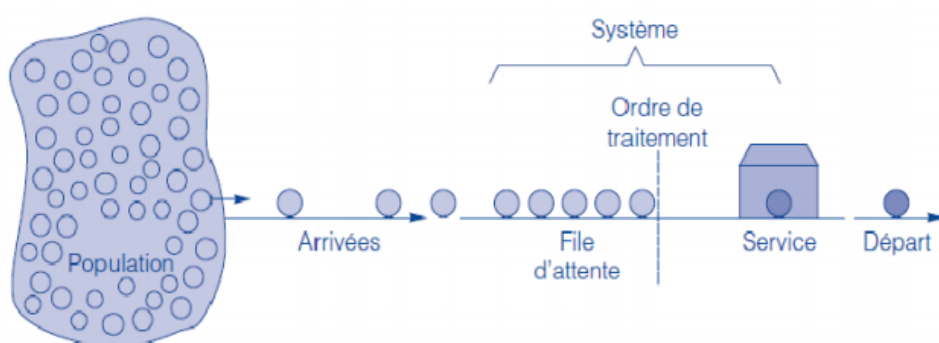


FIGURE 2.4 – Représentation de la file d'attente simple

## 2.3 Files d'attentes Markoviennes

**Définition 1.4.1 :** Ils caractérisent les systèmes dans lesquels les deux quantités stochastiques principales qui sont le temps des inter-arrivées et la durée de service sont des variables aléatoires indépendantes exponentiellement distribuées. Le système le plus simple est le modèle M/M/1, son étude est basée sur le processus  $\{X(t), t \geq 0\}$  qui est un processus de naissance et de mort Markovien.

## 2.4 Caractéristique de base d'une système d'attente

Les paramètres d'entrée d'un système d'attente sont :

### 2.4.1 Processus d'arrivée

L'arrivée des clients à la station sera décrite à l'aide d'un processus stochastique de comptage.

Si :  $A_n$  désigne la variable aléatoire mesurant l'instant d'arrivée du  $n^{\text{ème}}$  client dans le système, on aura ainsi :  $A_0 = 0$  et  $\inf\{t, N(t) = n\}$ .

Si :  $T_n$  désigne la variable aléatoire mesurant le temps séparant l'arrivée du  $(n-1)^{\text{ème}}$  client et du  $n^{\text{ème}}$  client [17], on a alors :  $T_n = A_n - A_{n-1}$ .

### 2.4.2 Processus de service

Les temps de service nécessaires au traitement de clients sont supposés être des réalisations des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.

### 2.4.3 Capacité de la file

La capacité de la file à accueillir de clients en attente de service peut être finie ou infinie. Soit  $N$  la capacité de la file, une file à capacité illimitée vérifie  $N = +\infty$ .

### 2.4.4 La taille de la population

Le plus souvent, le nombre de clients susceptibles d'accéder au serveur est supposé illimité et leur fréquence d'arrivée constante. Certaines situations sont, cependant, caractérisées par un nombre fixe et limité de clients. Chaque client présent dans le système diminue alors le nombre d'arrivées potentielles, le taux d'arrivée dans le système n'est donc plus constant mais dépend du nombre de client présents dans le système.

### 2.4.5 La discipline de la file

La discipline de service détermine l'ordre dans lequel les clients sont rangés dans la file et y sont retirés pour recevoir un service. Les disciplines de service classiques sont [18] :

- **FIFO (First In First Out)** : les clients sont servis dans leur ordre d'arrivée ;
- **LIFO (Last In First Out)** : le dernier client arrivé sera le premier servi ;
- **SIRO (Served In Random Order)** : les clients sont servis aléatoirement.

### 2.4.6 Notation de Kendall

La notation suivante, appelée la notation de Kendall, est largement utilisée pour classer les différents systèmes de files d'attente [18] :

$$\mathbf{A/B/C/N/D/O}$$

- **A** : indique la loi des temps inter-arrivées des clients ;
- **B** : indique la loi des temps de services ;
- **C** : indique le nombre de serveurs ;
- **N** : indique la capacité de la salle d'attente, ce dernier sera supprimé si  $N = \infty$  ;
- **D** : indique la discipline du service ;
- **O** : la source des clients potentiels, qui peut être fini ou infini, homogène ou hétérogène.

Les lois des deux premiers symboles sont données par :

- **M** : loi exponentielle ;
- **G** : loi générale ;
- **D** : loi constante (déterministe) ;
- $E_k$  : loi de Erlang d'ordre  $k$  ;
- $H_k$  : loi hyperexponentielle.

### 2.4.7 Loi de Little

La loi de Little est une relation très général qui s'applique à une grande classe de systèmes. Elle ne concerne que le régime permanent du système. La seule condition d'application de la loi de Little est que le système soit stable.

Le nombre moyen de clients dans le système est donné par la relation suivante :

$$L = E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP_n.$$

Soit  $L_q$  le nombre de clients se trouvant dans la file d'attente, on peut alors écrire le nombre moyen de clients dans la file d'attente comme suit :

$$L_q = E(X_q) = \sum_{n=c}^{+\infty} (n - c)P_n.$$

Pour trouver  $W$  et  $W_q$  on fait souvent appel aux loi de Little, celles-ci sont données par les relation suivant [19] :

$$\begin{aligned} L &= \lambda W \\ L_q &= \lambda W_q \\ W &= W_q + \frac{1}{\mu} \\ L &= L_q + \frac{\lambda}{\mu}. \end{aligned}$$

## 2.5 Quelques modèles sur les files d'attente Markoviennes

### 2.5.1 Modèle d'attente $M/M/1$

#### 2.6.1.1 Description du modèle

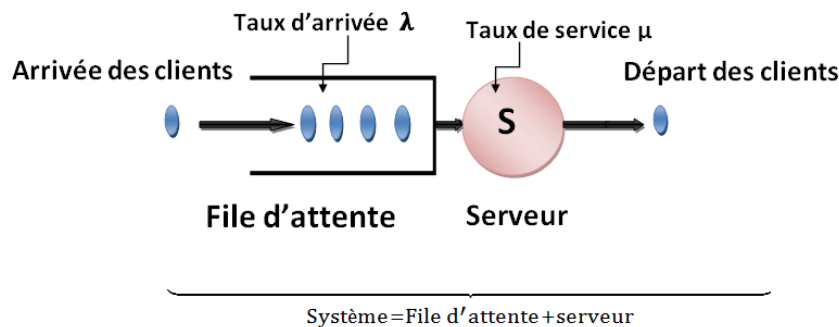
Le système de files d'attente  $M/M/1$  est le système le plus élémentaire de la théorie des files d'attente.

La file d'attente  $M/M/1$  est un modèle caractérisé par des arrivées suivant un processus de Poisson de taux  $\lambda$ , temps de service exponentielle de paramètre  $\mu$  et un seul serveur. Les clients arrivent à la station selon un processus de Poisson de taux  $\lambda$ , si le serveur est vide le client est pris en charge immédiatement sinon il rejoint la file d'attente (de capacité illimitée et discipline FIFO), les temps des interarrivées sont indépendants. Ces clients reçoivent le service selon une distribution exponentielle de paramètre  $\mu$ . Ces temps de service sont également supposés indépendants [20]. En outre, toutes les variables aléatoires concernés sont censés être indépendantes les unes des autres. Les clients sont servis dans leur ordre d'arrivée.

#### 2.6.1.2 Condition de stabilité

L'expression  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$  est souvent appelée coefficient d'utilisation du système ou encore intensité du trafic correspondant si  $\rho < 1$  la file d'attente  $M/M/1$  est dit stable :

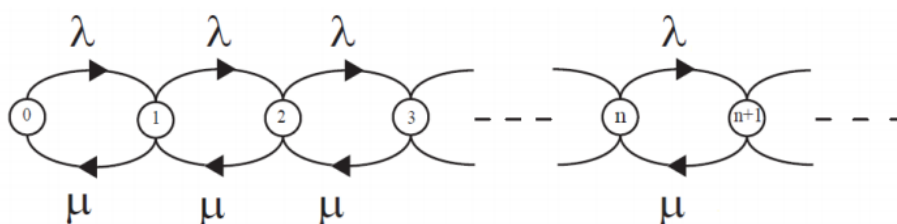
$$\rho < 1 \Leftrightarrow \lambda < \mu.$$

FIGURE 2.5 – La file  $M/M/1$ 

### 2.6.1.3 Régime transitoir

Grâce aux propriétés fondamentales du processus de Poisson et de la loi exponentielle pour un petit intervalle de temps  $\Delta t$  les probabilités suivantes :

- $P(\text{exactement 1 arrivée pendant } \Delta t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$  ;
- $P(\text{aucune arrivée pendant } \Delta t) = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)$  ;
- $P(2 \text{ arrivée ou plus pendant } \Delta t) = o(\Delta t)$  ;
- $P(\text{exactement 1 départ pendant } \Delta t / X(t) \geq 1) = \mu \Delta t + o(\Delta t)$  ;
- $P(\text{aucune départ pendant } \Delta t / X(t) \geq 1) = 1 - \mu \Delta t + o(\Delta t)$  ;
- $P(2 \text{ départ ou plus pendant } \Delta t) = o(\Delta t)$ .

FIGURE 2.6 – Graphe de transition d'une file  $M/M/1$ 

Ces probabilités ne dépendent ni du temps  $t$  ni de l'état  $X(t)$ , dans lequel le système se trouve .

Nous désignons maintenant par  $P_{ij}(\Delta t)$  la probabilité (conditionnelle) que le processus  $X(t)$  fasse une transition de  $i$  vers  $j$  pendant la durée  $\Delta t$  :

$$P_{ij}(\Delta t) = P(X(t + \Delta t) = j / X(t) = i) \quad \text{si } i, j = 0, 1, 2, \dots$$

Ces probabilités de transition dépendant pas de l'instant  $t$ , puisque les arrivées et les départs indépendamment les uns autres, on a :

- $P_{n,n+1}(\Delta t) = \lambda \Delta t (1 - \mu \Delta t) + o(\Delta t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$  ( $n \geq 0$ ) ;
- $P_{n,n}(\Delta t) = \lambda \Delta t \cdot \mu \Delta t + (1 - \lambda \Delta t)(1 - \mu \Delta t) + o(\Delta t) = 1 - (\lambda + \mu) \Delta t + o(\Delta t)$  ( $n \geq 1$ ) ;
- $P_{0,0}(\Delta t) = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)$  ;
- $P_{n+1,n}(\Delta t) = (1 - \lambda \Delta t) \mu \Delta t + o(\Delta t) = \mu \Delta t + o(\Delta t)$  ( $n \geq 0$ ).

Tandis que :

- $P_{n,m}(\Delta t) = o(\Delta t)$ .

A partir d'un état donnée  $n$ , le processus ne peut donc que passer l'un des états voisins  $n - 1$  et  $n + 1$ .

Pour calculer les probabilité d'état  $P_n(t) = P(X(t) = n)$ , nous pouvons écrire d'après le théorème des probabilité totale et pour  $n \geq 1$  [2] :

$$P_n(t + \Delta t) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i(t)P_{in}(\Delta t)$$

$$= P_{n-1}(t)\lambda\Delta t + P_n(t)[1 - (\lambda + \mu)\Delta t] + P_{n+1}(t)\mu\Delta t + o(\Delta t)$$

d'où :

$$[P_n(t + \Delta t) - P_n(t)]/\Delta t = -(\lambda + \mu)P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \mu P_{n+1}(t) + o(\Delta t)\Delta t.$$

Une adaptation évidente de ce raisonnement nous donne :

$$\begin{cases} P'_n = -(\lambda + \mu)P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) \dots \dots \dots (1) & \text{si } n = 1, 2, \dots \\ P'_0 = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \dots \dots \dots (2) \end{cases}$$

Les équation (1) et (2) sont connues sous le nom d'équation différentielle de KOLMOGOROV, elle permettent en principe de calculer les probabilités d'état  $P_n(t)$  si l'on connaît en plus les condition initiales du processus, c'est-à-dire la distribution  $X(0)$ .

On peut ainsi déterminer le régime transitoire du processus stochastique  $\{X(t), t \geq 0\}$  à partir des taux de transition  $\lambda$  et  $\mu$ .

**2.6.1.4 Loi du système en régime permanent (stable)**

Lorsque  $t \rightarrow \infty$  dans le système d'équations de KOLMOGOROV, on peut montrer que les limites  $\lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t) = P_n$  existent et sont indépendantes de l'état du processus et que  $\lim_{t \rightarrow \infty} P'_n(t) = 0$  si  $n = 0, 1, 2, \dots$

A la place d'un système d'équation différentielle, on obtient alors un système d'équation linéaires et homogènes [21].

$$\begin{cases} \mu p_1 = \lambda p_0 \\ \lambda p_{n-1} + \mu p_{n+1} = (\lambda + \mu)p_n & \text{si } n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Aux quelles il faut ajouter la condition :

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1.$$

Sa résolution est élémentaire en additionnant les  $n + 1$  première équation, Lorsque le système se stabilise ( $\rho = \lambda/\mu < 1$ ), on obtient :

$$P_n = \rho P_0 = (1 - \rho)P^n, \quad \text{si } 1, 2, \dots$$

Lorsque le système sa stabilise, sa loi est donnée par :



$$P_n(t) = \begin{cases} \frac{\prod_{i=1}^n \frac{\lambda_i - 1}{\mu_i}}{1 + \sum_{n \geq 0} \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_i - 1}{\mu_i}} & n \geq 1 \\ \frac{1}{1 + \sum_{n \geq 1} \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_i - 1}{\mu_i}} & n = 0 \end{cases}$$

on pose  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

$$P_n = \begin{cases} \frac{\rho^n}{1 - \rho} & n \geq 1 \\ 1 - \rho & n = 0 \end{cases}$$

Donc  $P_n = \rho^n(1 - \rho)$ ,  $n \geq 0$  si  $\rho < 1$ .

### 2.6.1.5 Les paramètres de performances [21]

D'après le résultat de la distribution stationnaire on d'abord :

- **Nombre moyen de clients dans le système à la date t :**

Soit le nombre moyen de client dans le système d'attente est donne par  $E(X)$

$$L = E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n = (1 - \rho) \sum_{n=0}^{\infty} nP^n = \rho/1 - \rho = \lambda/\mu - \lambda.$$

- **Nombre moyen de clients dans la file à la date t :**

Soit le nombre de clients dans la file d'attente à l'instant  $t \geq 0$  :

$$X_q = \begin{cases} 0 & \text{si } X = 0 \\ X - 1 & \text{si } X \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{alors : } L_q = E(X_q) = \sum_{n=1}^{\infty} (n - 1)P_n = \lambda^2/\mu(\mu - \lambda).$$

- **Le temps moyen d'attente dans le système :**

On peut maintenant calculer la quantité  $W$  soit d'après la loi de little, soit directement à partir de la distribution stationnaire

$$\text{alors : } W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu} - \lambda.$$

- **Le temps moyen d'attente dans la file :**

De manière analogue

on obtient :  $W_q = E(L_q) = \frac{\lambda}{\mu}(\mu - \lambda)$ .

## 2.5.2 Modèle d'attente $M|M|1|N$

### 2.6.2.1 Description du modèle

On considère le modèle précédent, en supposant que la capacité  $N$  du système est finie. On a donc toujours les hypothèses suivantes : le processus d'arrivée des clients dans la file est un processus de Poisson de taux  $\lambda$  et le temps de service d'un client est une variable aléatoire exponentielle de taux  $\mu$ , et  $N$  la capacité de la file d'attente.

les files d'attente sont toujours finie. Dans ce cas, quand un client arrive alors qu'il y a déjà  $N$  clients présents devant lui dans le système, il est perdu, (par exemple, les appels téléphoniques).

L'espace d'états  $E$  est maintenant fini :  $E = \{0, 1, 2, \dots, N\}$ . La capacité de la file étant limitée, même si les clients arrivent en moyenne beaucoup plus vite que ce que le serveur de la file est capable de traiter, dès que celle-ci est pleine, les clients qui se présentent sont rejetés [22].

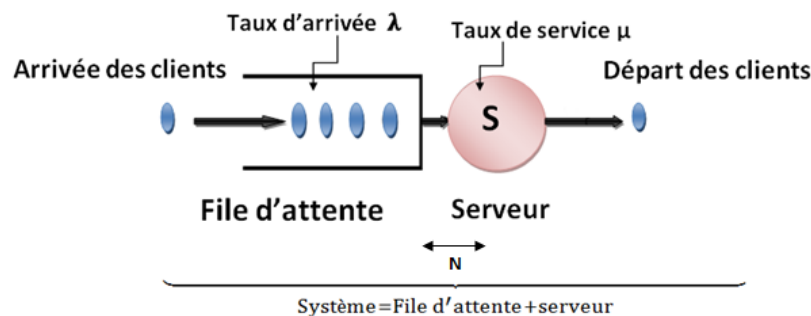


FIGURE 2.7 – La file  $M/M/1/N$

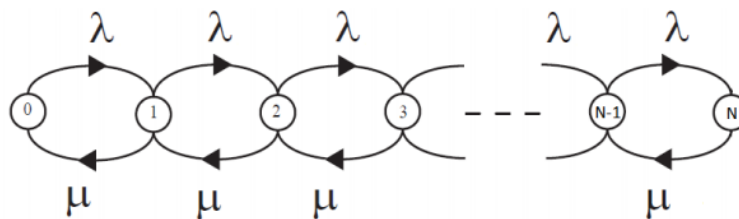
### 2.6.2.2 Condition de stabilité

Il n'y a pas de condition de stabilité pour la file  $M/M/1/N$ . Ce résultat s'interprète facilement. La capacité de la file étant limitée, même si les clients arrivent en moyenne beaucoup plus vite que le serveur de la file est capable de traiter, dès que celle-ci est pleine, les clients qui se présentent sont rejetés.

### 2.6.2.3 Régime transitoire

Donc ce processus est considéré comme un processus de naissance et de mort avec :

- un taux de naissance  $\lambda_n = \lambda$ , pour tout  $n < N$  ;
- le taux de mortalité  $\mu_n = \mu$  pour tout  $n \neq 0$ .

FIGURE 2.8 – Graphe de transition d'une file  $M/M/1/N$ 

Soit  $P_n$  pour  $n = 0, 1, \dots, N$ , la probabilité pour qu'il ait  $n$  clients dans le système à l'instant  $t$  [23].

$$\begin{aligned} \lambda P_0 &= \mu P_1 \\ (\lambda + \mu)P_n &= \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+1} \quad \text{si } 0 \leq n \leq N-1 \\ \lambda P_{N-1} &= \mu P_N \end{aligned}$$

#### 2.6.2.4 Loi du système en régime permanent (stable)

On note par  $P_n$  la distribution stationnaire d'être dans l'état  $n$  (la probabilité que le système contienne  $n$  clients). Ces probabilités peuvent être calculées en écrivant les équations d'équilibre du système :

$$\lambda P_{n-1} = \mu P_n \quad \text{si } 0 \leq n \leq N$$

Soit

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_{n-1} = \rho P_{n-1} \quad \text{si } 0 \leq n \leq N$$

on applique  $n$  fois cette relation, on obtient :

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 = \rho^n P_0 \quad \text{si } 0 \leq n \leq N$$

comme les  $P_n$  définissent une distribution de probabilité, on peut écrire :

$$\sum_{n=0}^N P_n = 1$$

on peut en déduire la probabilité  $P_0$  :

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^N P_n} = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{N+1}}.$$

on obtient finalement [24] :

$$P_n = \frac{(1 - \rho)\rho^n}{1 - \rho^{N+1}} \quad \text{si } 0 \leq n \leq N$$

### 2.6.2.5 Les paramètres de performances [24]

- Nombre moyen de clients dans le système à la date  $t$  :

$$\begin{aligned}
 L &= \sum_{n=0}^N nP_n = \frac{1 - \rho^N}{1 - \rho^{N+1}} \sum_{n=0}^N n\rho^n \\
 &= \rho \frac{1 - \rho^N}{1 - \rho^{N+1}} \sum_{n=0}^N n\rho^{n-1} \\
 &= \rho \frac{1 - \rho^N}{1 - \rho^{N+1}} \frac{d}{d\rho} \left( \frac{1 - \rho^{N+1}}{1 - \rho^N} - 1 \right) \\
 &= \frac{\rho}{1 - \rho} \frac{1 - (N+1)\rho^N + N\rho^{N+1}}{1 - \rho^{N+1}}.
 \end{aligned}$$

- Nombre moyen de clients dans la file à la date  $t$  :

$$L_q = \sum_{n=0}^{\infty} (n-1)P_n = L - (1 - P_0)$$

- Le temps moyen d'attente dans le système :

Le calcul du temps moyen de séjour  $W$  dans la file se fait en appliquant la loi de Little :

$$W = \frac{L}{\lambda}.$$

- Le temps moyen d'attente dans la file :

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}.$$

## 2.5.3 Modèle d'attente $M|M|C$

### 2.6.3.1 Description du modèle

Dans cette file d'attente, les arrivées se font selon un processus de Poisson de paramètre  $\lambda$ , les temps de services sont des variables aléatoires de loi exponentielle de paramètre  $\mu$ . A la différence de la file  $M/M/1$ , le système n'est pas constitué d'un unique serveur mais d'un nombre arbitraire  $c$  de serveurs (guichets) ( $c \geq 1$ ).

Ce système est connu sous le nom de file  $M/M/C$  [25]. L'espace d'états  $E$  est comme pour la  $M/M/1$  infini :  $E = \{0, 1, 2, \dots\}$ .

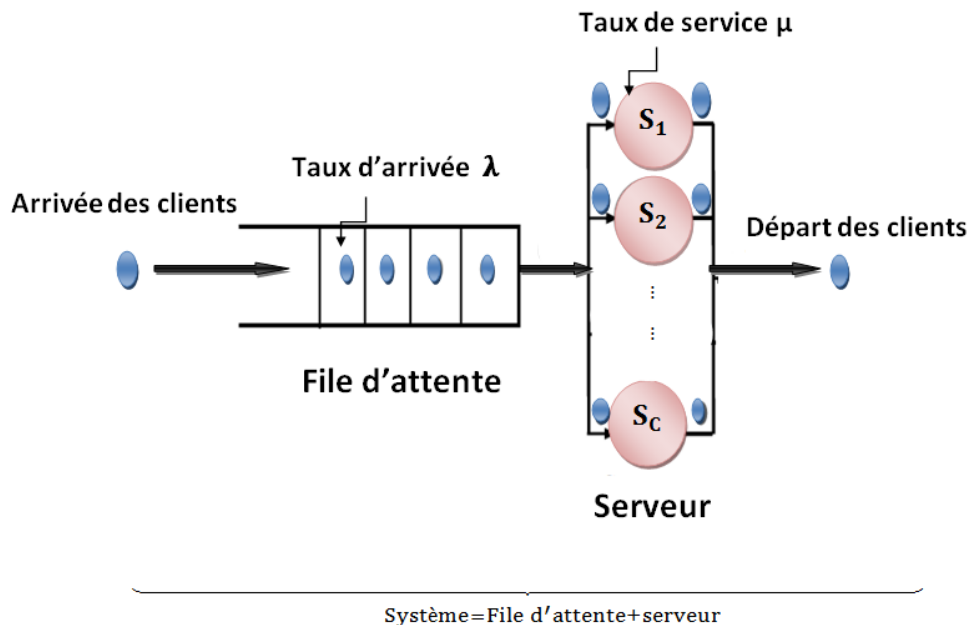


FIGURE 2.9 – La file  $M/M/C$

### 2.6.3.2 Condition de stabilité

On considère pour ce système une intensité de trafic normalisée par le nombre de serveurs  $\rho = \lambda/c\mu$  et exprime le fait que le nombre moyen de clients qui arrivent à la file par unité de temps doit être inférieur au nombre moyen de clients que les serveurs de la file sont capables de traiter par unité de temps.

### 2.6.3.3 Régime transitoire

Dans ce cas aussi, le processus modélisant le nombre de clients dans le système est un processus de naissance et de mort avec [26] :

$$\lambda_n = \lambda \quad \forall n \geq 0$$

$$\mu_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ n\mu & \text{si } 0 \leq n \leq c - 1 \\ c\mu & \text{si } n \geq c \end{cases}$$

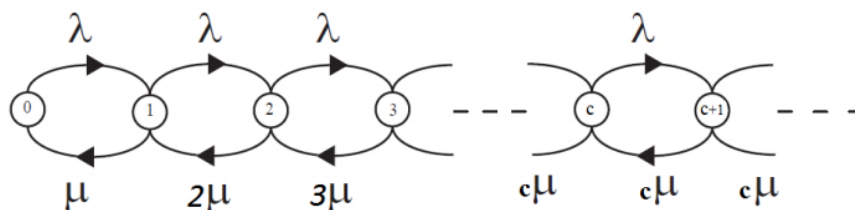


FIGURE 2.10 – Graphe de transition d'une file  $M/M/C$

### 2.6.3.4 Loi du système en régime permanent (stable)

On peut donner  $P_n$  comme suit [27] :

$$P_n = \begin{cases} \frac{\rho^n}{n!} P_0 & \text{si } 1 \leq n \leq c-1 \\ \frac{\rho^n c^{c-n}}{c!} P_0 & \text{si } n \geq c \end{cases}$$

où :  $\rho = \frac{\lambda}{c\mu} < 1$ .

avec cette condition,  $P_0$  est donnée comme suit :  $P_0 = \left[ \sum_{n=0}^{c-1} \frac{\rho^n}{n!} + \left(\frac{\rho^c}{c!}\right) \left(\frac{1}{1 - \frac{\rho}{c}}\right) \right]^{-1}$ .

### 2.6.3.5 Les paramètres de performances [24]

- Nombre moyen de clients dans la file d'attente à date  $t$  :

Dans ce type de système d'attente, on a :

$$X_q = \begin{cases} 0 & \text{si } X \leq c \\ X - c & \text{si } X > c \end{cases}$$

donc :

$$\begin{aligned} L_q &= |E(X_q)| = \sum_{n=c+1}^{\infty} (n - c) P_n \\ &= \frac{(c\rho)^{c+1}}{c!(1 - \rho)^2} P_0. \end{aligned}$$

- Nombre moyen de clients dans le système à la date  $t$  :

On a :

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

donc :

$$L = c\rho + \frac{(c\rho)^{c+1}}{c!(1 - \rho)^2} P_0 \quad \text{avec : } \rho = \frac{\lambda}{c\mu} < 1.$$

- Le temps moyen d'attente dans le système :

On a :

$$W = \frac{(c\rho)^c}{\mu c!(1 - \rho)^2} P_0 + \frac{1}{\mu}.$$

## 2.5.4 Modèle d'attente $M|M|C|N$

### 2.6.4.1 Description du modèle

Considérons un système de files d'attente de type  $M/M/C/N$ , il existe  $C$  serveurs et en autorisant un maximum de  $N$  (finie) clients présents dans le système. On conserve les

hypothèses : le processus d'arrivée des clients dans la file est un processus de Poisson de taux  $\lambda$  et le temps de service d'un client est une variable aléatoire exponentielle de taux  $\mu$ , et  $N$  la capacité de la file d'attente.

L'espace d'états  $E$  est maintenant fini :  $E = \{0, 1, 2, \dots, N\}$ .

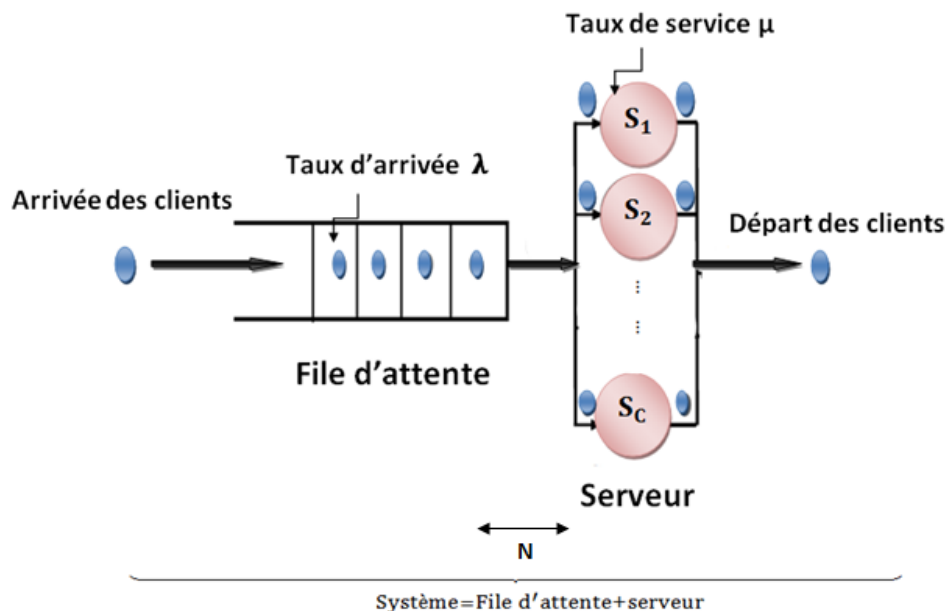


FIGURE 2.11 – La file  $M/M/C/N$

#### 2.6.4.2 Condition de stabilité

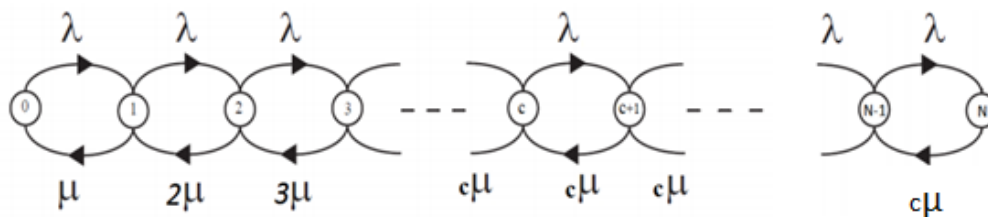
Il n'y a pas de condition de stabilité pour la file  $M/M/C/N$ . Ce résultat s'interprète facilement. La capacité de la file étant limitée, même si les clients arrivent en moyenne beaucoup plus vite que les  $C$  serveurs de la file sont capables de traiter, dès que celle-ci est pleine, les clients qui se présentent sont rejetés.

#### 2.6.4.3 Régime transitoire

Donc ce processus est considéré comme un processus de naissance et de mort avec :

$$\lambda_n = \lambda \quad 0 \leq n \leq N - 1$$

$$\mu_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ n\mu & \text{si } 0 \leq n \leq c - 1 \\ c\mu & \text{si } n \geq c \end{cases}$$

FIGURE 2.12 – Graphe de transition d'une file  $M/M/C/N$ 

#### 2.6.4.4 Loi du système en régime permanent (stable)

La distribution stationnaire d'avoir  $N$  clients dans le système notée  $P_n$  est donnée comme suit :

$$P_n = \begin{cases} \frac{(c\rho)^n}{n!} P_0 & \text{si } 1 \leq n \leq c-1 \\ \frac{\rho^n c^c}{c!} P_0 & \text{si } n \geq c \end{cases}$$

où :  $\rho = \frac{\lambda}{c\mu} < 1$ .

La probabilité permanent  $P_0$  d'observer un système vide est :

si  $\rho \neq 1$

$$P_0 = \left[ 1 + \sum_{n=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^n}{n!} + \frac{(1 - \rho^{N-c+1})(c\rho)^c}{c!(1 - \rho)} \right]^{-1}$$

lorsque  $\rho = 1$

$$P_0 = \left[ 1 + \sum_{n=0}^{c-1} \frac{(c)^n}{n!} + \frac{c^c}{c!}(1 + N - c) \right]^{-1}.$$

#### 2.6.4.5 Les paramètres de performances [27]

- Nombre moyen de clients dans la file d'attente à la date  $t$  :

$$L_q = \sum_{n=c+1}^N (n-c)P_n = \begin{cases} \frac{(\rho^{N-c}[(1-\rho)(c-N+1) - \rho] + 1)(c\rho)^{c+1}}{c!(c-c\rho)^2} P_0 & \text{si } \rho \neq 1 \\ \frac{c^c (N-c)(N-c+1)}{2} P_0 & \text{si } \rho = 1 \end{cases}$$

- Nombre moyen de clients dans le système à la date  $t$  :

$$L = \sum_{n=1}^N nP_n = L_q + c\rho(1 - P_N)$$



• **Le temps moyen d'attente dans le système et la file :**

Pour calculer les temps moyens de séjour et d'attente, il ne reste plus qu'à appliquer la loi de Little mais toute arrivée dans le système alors que sa capacité maximale  $N$  est atteinte est perdue alors le taux effectif d'arrivée des clients est donc :

$$\lambda' = \sum_{n=1}^{N-1} \lambda P_n = \lambda(1 - P_N)$$

en utilisant cette valeur, le temps moyen de séjour d'un client est alors :

$$W = \frac{L}{\lambda'}$$

et le temps moyen d'attente est donné par :

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda'}$$

### 2.5.5 Modèle d'attente $M|M|\infty$

#### 2.6.5.1 Description du modèle

On considère un système composé d'un nombre illimité de serveurs identiques et indépendants les uns des autres. Dès qu'un client arrive, il rentre donc instantanément en service. Dans cette file particulière, il n'y a pas donc d'attente. On suppose toujours que : le processus d'arrivée des clients dans la file est un processus de Poisson de taux  $\lambda$  et le temps de service d'un client est une variable aléatoire exponentielle de taux  $\mu$ .

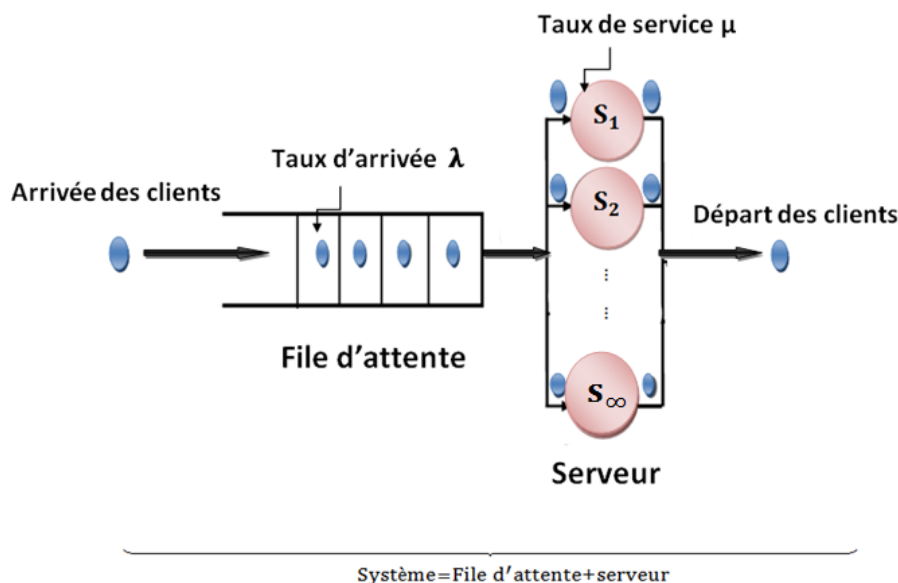


FIGURE 2.13 – La file  $M/M/\infty$

#### 2.6.4.2 Condition de stabilité

Le système stable si vérifie :  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ .

### 2.6.5.2 Régime transitoire

Le processus de naissance et de mort relatif à la file d'attente  $M/M/\infty$  est donné comme suit :

$$\forall n \in N : \quad \lambda_n = \lambda, \mu_n = n\mu.$$

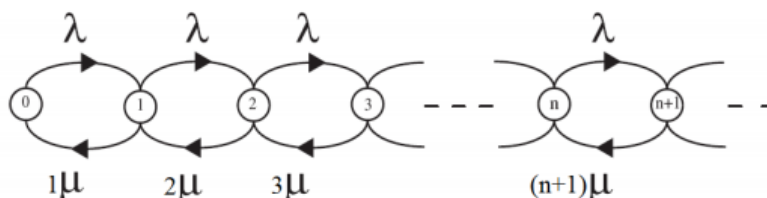


FIGURE 2.14 – Graphe de transition d'une file  $M/M/\infty$

### 2.6.5.3 Loi du système en régime permanent (stable)

Soit  $P_n$  la distribution stationnaire d'être dans l'état  $n$ . Les équations d'équilibre nous donnent :

$$\lambda P_{n-1} = \mu P_n.$$

On peut écrire aussi :  $P_n = \frac{\rho}{n} P_{n-1}, \forall n \geq 1$

où :  $\rho = \lambda/\mu$ .

On peut alors exprimer toutes les probabilités en fonction de  $P_0$  :

$$P_n = \frac{\rho^n}{n!} P_0$$

on obtient  $P_0$  :

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \Rightarrow P_0 = e^{-\rho}$$

donc :

$$P_n = \frac{\rho^n}{n!} e^{-\rho}.$$

### 2.6.5.4 Les paramètres de performances [27]

- Nombre moyen de clients dans le système à la date  $t$  :

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = \rho$$

- Le temps moyen d'attente dans le système :

La loi de Little permet d'écrire :  $W = \frac{L}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda} = \frac{1}{\mu}$ .

# SYSTÈME DE FILE D'ATTENTE AVEC DÉROBADE ET ABANDON

Dans divers domaines, les clients impatients, dérobade soit par la qualité de service, soit longueur de la file d'attente. Sont devenus le but de plusieurs recherche([29],[20],[30],...). Ces systèmes qui contiennent des clients impatients ont fait des pertes considérables à l'économie de plusieurs firmes.

Dans ce chapitre on s'intéresse aux files d'attente M/M/1/N avec dérobade (un client impatient qui décide ne pas rejoindre le système) et abandon (Après un temps passé dans la file, le client impatient décide de quitter sans avoir le service).

## 3.1 Système de files d'attente avec dérobade et abandon

Les systèmes de files d'attente avec dérobade et abandon sont des modèles largement utilisés dans des problèmes de la vie réelle tels que les centrales d'appels téléphoniques, les urgences des hôpitaux. le client découragé par la longueur de la file d'attente par exemple, décide de ne pas rejoindre la file d'attente, c'est le cas du dérobade. Cette impatience a poussé beaucoup de mathématiciens à l'étude de ce phénomène afin de trouver des solutions.

### 3.1.1 Description du modèle

Soit un client qui arrive à un système et n clients devant lui, entre avec la probabilité  $p_n$  ou part avec la probabilité  $p_n = 1 - p_n$ . Si la longueur de la file d'attente décourage les clients, alors  $p_n$  serait une fonction décroissante de n. Comme un cas particulier, s'il y a une salle d'attente de capacité N, nous pourrions supposer que :

$$p_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n < N \\ 0 & \text{si } n \geq N \end{cases}$$

indiquant que, une fois la salle d'attente est remplie, les clients n'ont plus la possibilité d'entrer dans le système.

Soit  $X(t)$  le nombre de clients dans le système à l'instant t, et le processus d'arrivée des

clients dans le système est Poissonien de taux  $\lambda$ . Un client qui arrive de l'extérieur et trouve  $n$  clients dans le système devant lui entre avec la probabilité  $p_n$  alors le processus de naissance appropriés est :

$$\lambda_n = \lambda p_n \quad \text{si } n = 0, 1, \dots$$

Et dans le cas d'un seul serveur est :

$$\mu_n = \mu \quad \text{si } n = 0, 1, \dots$$

## 3.2 Modèle de files d'attente M/M/1/N avec dérobaide, abandon

La théorie des files d'attente avec dérobaide et abandon joue un rôle important dans la modélisation de beaucoup de problèmes de la vie réelle. Ces applications sont utilisées dans plusieurs secteurs (informatique, communication, l'industrie, ...) ou encore dans les secteurs de la santé et des sciences médicales, ...etc.

Le système est composé d'un serveur unique, les clients arrivent dans le système selon un processus de Poisson de taux qui dépend du nombre de clients présents dans le système

i.e :  $\frac{\lambda}{(n+1)}$ .

Le service des clients est assuré par un seul serveur et les clients sont servis selon la discipline du premier arrivé, premier servi (FIFO). Les temps de service sont supposés être distribués selon une distribution exponentielle de paramètre  $\mu$  avec une fonction de densité donnée comme suit :  $S(t) = \mu e^{-\mu t}, t \geq 0, \mu > 0$

Où  $\mu$  est le taux de service.

- La capacité du système est limitée de taille  $N$ .
- Le client arrivant au système attend un certain moment son service. Si ce service ne commence pas, alors il devient impatient et il peut quitter le système avec une probabilité  $p$ , ou rejoint la file avec une probabilité  $q = 1 - p$ . Le temps d'abandon suit une distribution exponentielle de paramètre  $\theta$ .

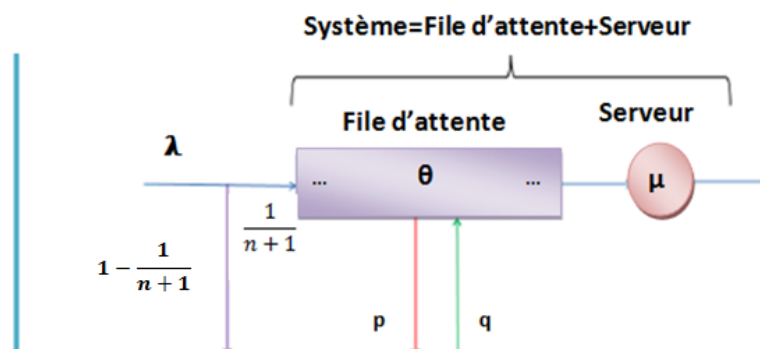


FIGURE 3.1 – Modèle  $M/M/1/N$  avec dérobaide

Soit  $P_n(t)$  la probabilité qu'il y ait  $n$  clients dans le système à l'instant  $t$ . Le processus est considéré comme un processus de naissance et de mort, donc les équations différentielles

du modèle à l'état stable du système sont :

$$\frac{d}{dt}P_0(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \dots\dots\dots (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}P_n(t) = & -\left[\left(\frac{\lambda}{n+1}\right) + \mu + (n-1)\theta p\right]P_n(t) + (\mu + n\theta p)P_{n+1}(t) \\ & + \left(\frac{\lambda}{n}\right)P_{n-1}(t) \quad n = 1, 2, \dots, N-1 \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}P_N(t) = -(\mu + (N-1)\theta p)P_N(t) + \left(\frac{\lambda}{N}\right)P_{N-1}(t) \dots\dots\dots (3)$$

En état d'équilibre,  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(t) = P_n$  et,  $\frac{d}{dt}P_n(t) = 0$  et d'après le système de KOLMOGOROV on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \mu P_1 = \lambda P_0 \\ \left(\frac{\lambda}{n}\right)P_{n-1} + (\mu + n\theta p)P_{n+1} = \left[\left(\frac{\lambda}{n+1}\right) + \mu + (n-1)\theta p\right]P_n \quad \text{si } n = 1, 2, \dots, N-1 \\ \left(\frac{\lambda}{N}\right)P_{N-1} = (\mu + (N-1)\theta p)P_N \end{cases}$$

En résolvant les équations on obtient :

$$\begin{cases} P_1 = \frac{\lambda}{N}P_0 \\ P_n = \frac{\lambda}{N(\mu + (N-1)\theta p)}P_{N-1} \end{cases}$$

d'ou :  $P_n = \left[\frac{1}{n!} \prod_{k=1}^n \frac{\lambda}{\mu + (k-1)\theta p}\right]P_0 \quad \text{si } n = 1, \dots, N$

car :  $P_2 = \frac{\lambda}{2(\mu + (2-1)\theta p)}P_1$

$$P_3 = \frac{\lambda}{3(\mu + (2-1)\theta p)}P_2$$

$$\vdots = \quad \quad \quad \vdots$$

$$P_n = \frac{\lambda}{n(\mu + (k-1)\theta p)}P_{n-1}$$

en effet la condition de normalisation,  $\sum_{n=0}^N P_n = 1, \quad P_0 + P_1 + \dots + P_n = 1$

on obtient :  $P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n!} \prod_{k=1}^n \frac{\lambda}{\mu + (k-1)\theta p}\right)}$ .

Et par conséquent, la distribution stationnaire du processus permet de calculer d'autres paramètres de performances du système telles que :

- Nombre moyen de clients dans le système à la date  $t$  :

$$L = E(x) = \sum_{n=1}^N nP_n = \sum_{n=1}^N n \left[ \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^n \frac{\lambda}{\mu + (k-1)\theta p} \right] P_0.$$

- Nombre moyen de clients dans la file à la date  $t$  :

$$L_q = L - \frac{\lambda}{\mu} = \left[ \sum_{n=1}^N n \left[ \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^n \frac{\lambda}{\mu + (k-1)\theta p} \right] P_0 - \frac{\lambda}{\mu} \right].$$

- Le temps moyen d'attente dans le système :

$$W = \frac{L}{\lambda} = \left[ \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^N n \left[ \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^n \frac{\lambda}{\mu + (k-1)\theta p} \right] \right] P_0.$$

- Le temps moyen d'attente dans la file :

$$W_q = W - \frac{1}{\mu} = \left[ \left[ \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^N n \left[ \frac{1}{n!} \prod_{k=1}^n \frac{\lambda}{\mu + (k-1)\theta p} \right] \right] P_0 - \frac{1}{\mu} \right].$$

### 3.3 Résultats numériques

Dans cette partie, nous présentons quelques exemples numériques pour montrer l'impact de différents paramètres du modèle sur le système, certains calculs numériques sont présentés sous forme des tableaux et des graphiques.

Pour nos exécutions numériques, en fixant les valeurs des différents paramètres :

- La capacité d'attente du système  $N = 7$  ;
- Taux d'arrivée  $\lambda = 0.1$  ;
- Taux de service  $\mu = 0.5$  ;
- Taux d'impatience  $\theta = 0.2$  ;
- Probabilité  $p = 0.8$ , ou rejoint la file avec une probabilité  $q = 1 - p = 0.2$ .

Avec, on a :

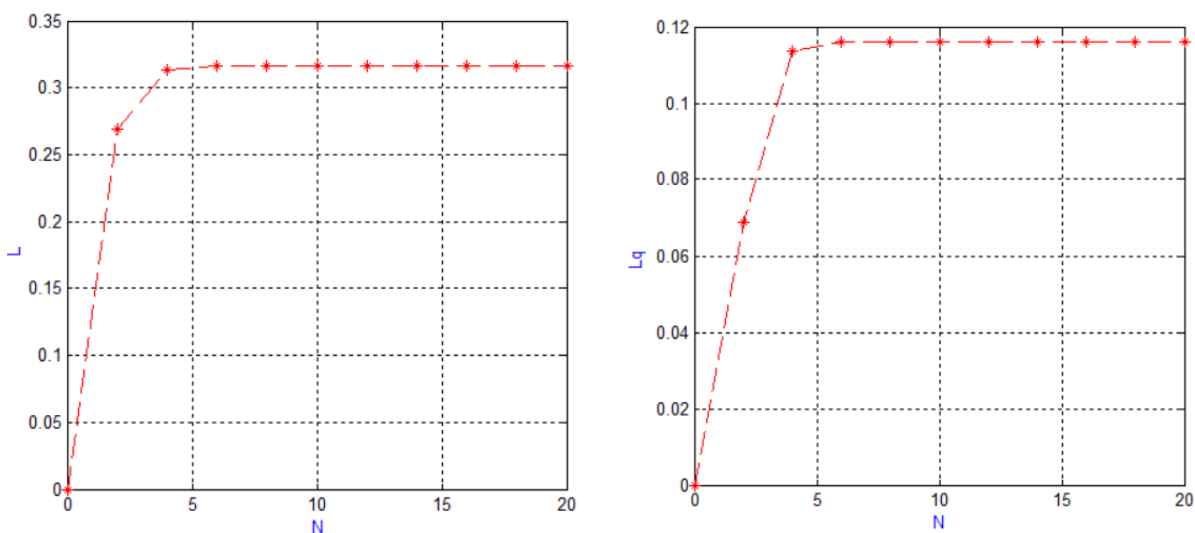
- $P_0$  : La probabilité que les système soit vide.
- $Pb = 1 - P_0$  : La probabilité que le serveur est occupé.

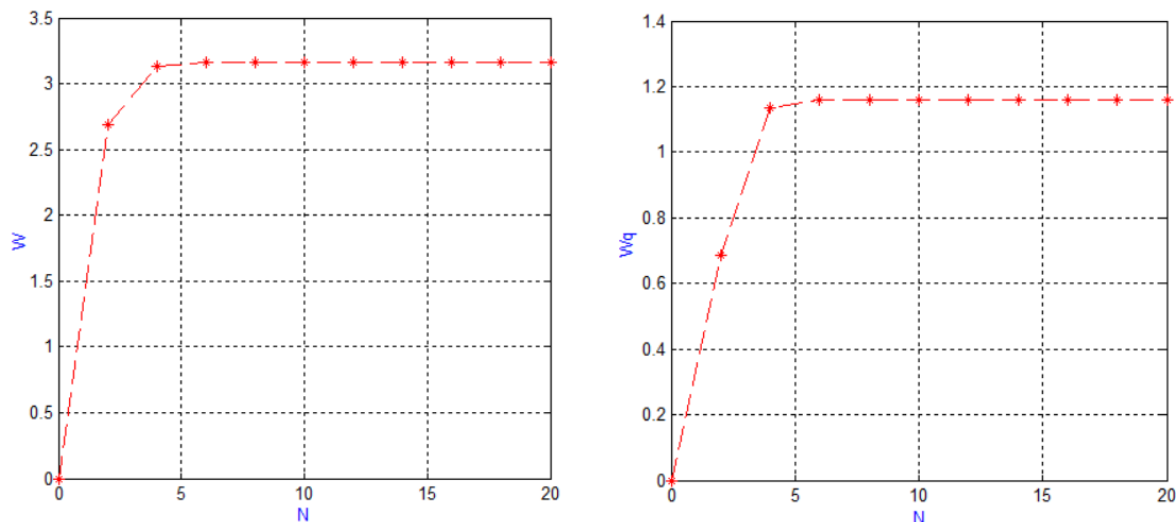
✓ Dans le tableau 3.1, nous présentons le résultats numériques obtenus pour la file d'attente M/M/1/N avec dérobaude, abandon. En fixant les valeur de  $\lambda, \mu, \theta, p, q$  et nous varions la capacité du système.

N	$P_0$	Pb	L	$L_q$	W	$W_q$
2	0.7214	0.2786	0.2687	0.0687	2.6866	0.6866
4	0.6662	0.3338	0.3136	0.1136	3.1359	1.1359
6	0.6628	0.3372	0.3160	0.1160	3.1596	1.1596
8	0.6627	0.3373	0.3160	0.1160	3.1602	1.1602
10	0.6627	0.3373	0.3160	0.1160	3.1602	1.1602
12	0.6627	0.3373	0.3160	0.1160	3.1602	1.1602
14	0.6627	0.3373	0.3160	0.1160	3.1602	1.1602
16	0.6627	0.3373	0.3160	0.1160	3.1602	1.1602
18	0.6627	0.3373	0.3160	0.1160	3.1602	1.1602
20	0.6627	0.3373	0.3160	0.1160	3.1602	1.1602

TABLE 3.1 – Variations des paramètres de performance par rapport  $N$ 

Dans la figure 3.2 et la figure 3.3, nous présentons le comportement de la capacité d'attente du système  $N$ . Pour les résultats numériques obtenus dans la figure 3.2 et 3.3, il est évident de voir que l'augmentation de la capacité du système  $N$  engendre l'augmentation de  $L$  et  $L_q$  et  $W$ ,  $W_q$ .

FIGURE 3.2 –  $L$  et  $L_q$  en fonction de  $N$

FIGURE 3.3 –  $W$  et  $W_q$  en fonction de  $N$ 

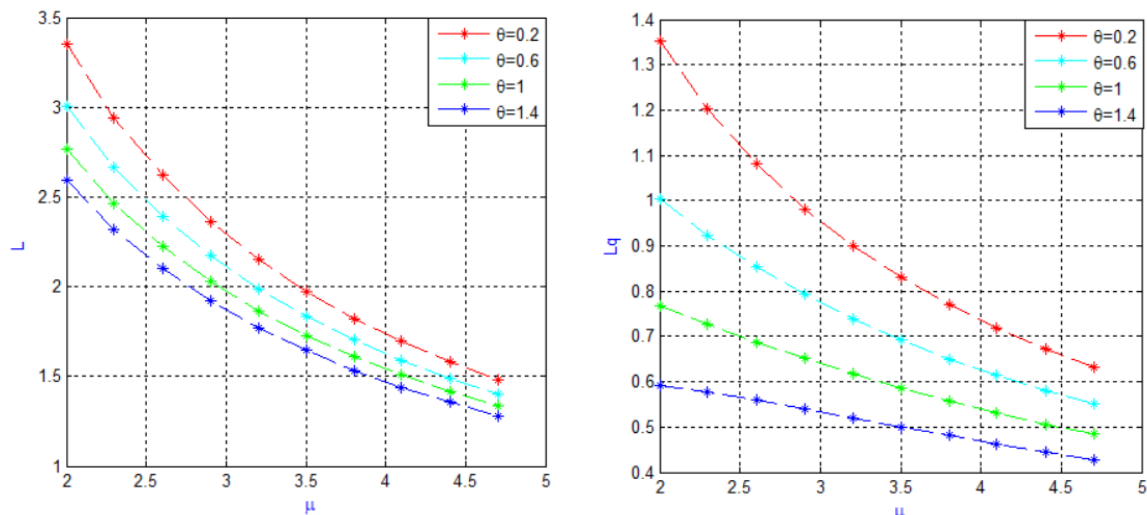
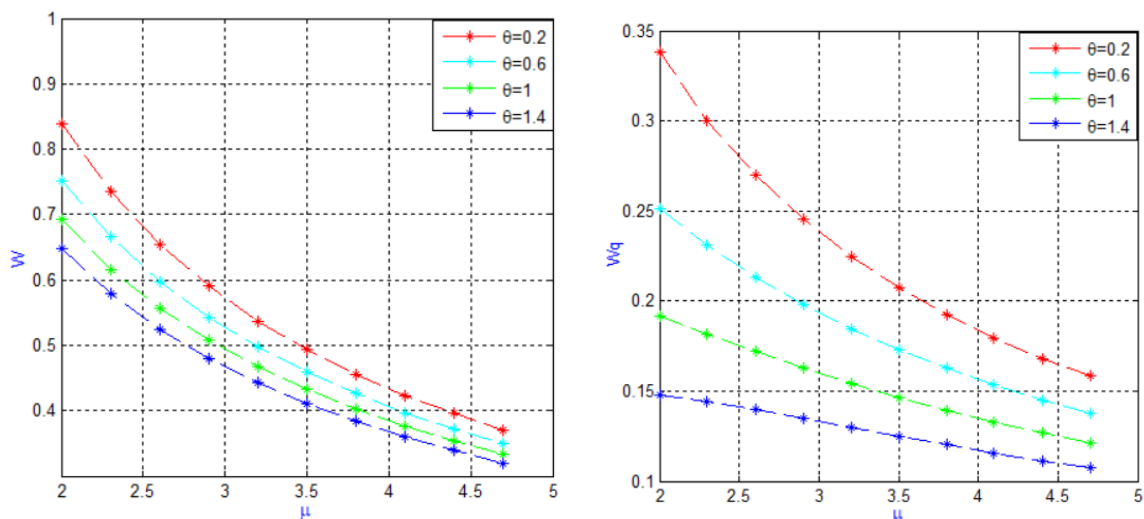
✓ Dans le tableau 3.2 nous supposons que la capacité du système est fixée  $N = 7$  et nous allons illustrer le comportement de mêmes performances  $P_0, Pb, L, L_q, W$  et  $W_q$  par rapport au taux de service  $\mu$ . En variant les valeurs de  $\mu$  de 2 à 4.7.

$\mu$	$P_0$	Pb	L	$L_q$	W	$W_q$
2	0.8841	0.1159	3.3531	1.3531	0.8383	0.3383
2.3	0.8973	0.1027	2.9408	1.2017	0.7352	0.3004
2.6	0.9078	0.0922	2.6190	1.0806	0.6548	0.2701
2.9	0.9163	0.0837	2.3609	0.9816	0.5902	0.2454
3.2	0.9234	0.0766	2.1491	0.8991	0.5373	0.2248
3.5	0.9294	0.0706	1.9723	0.8294	0.4931	0.2074
3.8	0.9345	0.0655	1.8224	0.7698	0.4556	0.1924
4.1	0.9389	0.0611	1.6937	0.7181	0.4234	0.1795
4.4	0.9428	0.0572	1.5820	0.6729	0.3955	0.1682
4.7	0.9462	0.0538	1.4841	0.6331	0.3710	0.1583

TABLE 3.2 – Variations des paramètres de performance par rapport  $\mu$ 

Pour les résultats numériques obtenus dans le tableau 3.2 il est évident de voir que l'augmentation de taux de service  $\mu$  engendre la diminution de la probabilité  $Pb$  ainsi que  $L, L_q, W$  et  $W_q$ , e.i : les clients sont servis rapidement.



FIGURE 3.4 –  $L$  et  $L_q$  en fonction de  $\mu$  pour différentes valeurs de  $\theta$ FIGURE 3.5 –  $W$  et  $W_q$  en fonction de  $\mu$  pour différentes valeurs de  $\theta$ 

La figure 3.4 montre l'effet de la perturbation du taux d'impatience sur le calcul des performances  $L$  et  $L_q$ . D'après l'illustration graphique donnée en figure 3.4 les performances  $L$  et  $L_q$  diminuent avec l'augmentation du taux de service.

Du point de vue pratique, l'une des performances la plus utile est celle du temps moyen d'attente d'un client dans le système, ainsi nous préférons l'attention d'étudier le comportement de celle-ci par rapport au changement des deux paramètres : taux de service  $\mu$  et taux d'impatience  $\theta$ .

La figure 3.5 fournit le temps moyen d'attente  $W$  d'un client arbitraire dans la file d'attente  $M/M/1/N$  avec dérobade, abandon par rapport au changement du  $\mu$  et  $\theta$ . On observe que le temps moyen d'attente d'un client devient plus petit lorsque le taux de service  $\mu$  et le taux d'impatience  $\theta$  augmente.

✓ Dans le troisième exemple, on considère le même modèle de file d'attente mais dans ce cas nous varions le taux d'arrivée  $\lambda$ . Les résultats numériques de cet exemple sont

exhibés dans le tableau 3.3.

$\lambda$	$P_0$	Pb	L	$L_q$	W	$W_q$
0.6391	0.2352	0.7648	2.0197	0.7415	2.1759	0.1759
0.7171	0.2151	0.7847	2.2661	0.8319	2.4515	0.4515
0.7448	0.2087	0.7913	2.3537	0.8640	2.5212	0.5212
0.7959	0.1980	0.8020	2.5153	0.9234	3.1446	1.1446
0.7981	0.1976	0.8024	2.5221	0.9259	3.1483	1.1483
0.7999	0.1972	0.8028	2.5277	0.9280	3.1601	1.1601
0.8011	0.1970	0.8030	2.5316	0.9294	3.1601	1.1601
0.8922	0.1805	0.8195	2.8195	1.0256	3.1601	1.1601
1.0134	0.1624	0.8376	3.2024	1.1891	3.1601	1.1601
1.0706	0.1551	0.8449	3.3832	1.2391	3.1601	1.1601

TABLE 3.3 – Variations des paramètres de performance par rapport  $\lambda$

D'après le tableau 3.3 on remarque que avec l'augmentation du taux d'arrivée  $\lambda$ , la probabilité  $Pb$  augmente. Après une certaine valeur du taux d'arrivée  $\lambda$ , la probabilité reste presque inchangée ainsi que pour  $W$  et  $W_q$ .

Les résultats obtenus précédemment sont présentés dans la figure 3.6 et ce pour les mêmes valeurs des paramètres fixés sauf le taux d'arrivée  $\lambda$  et le taux d'impatience  $\theta$ .

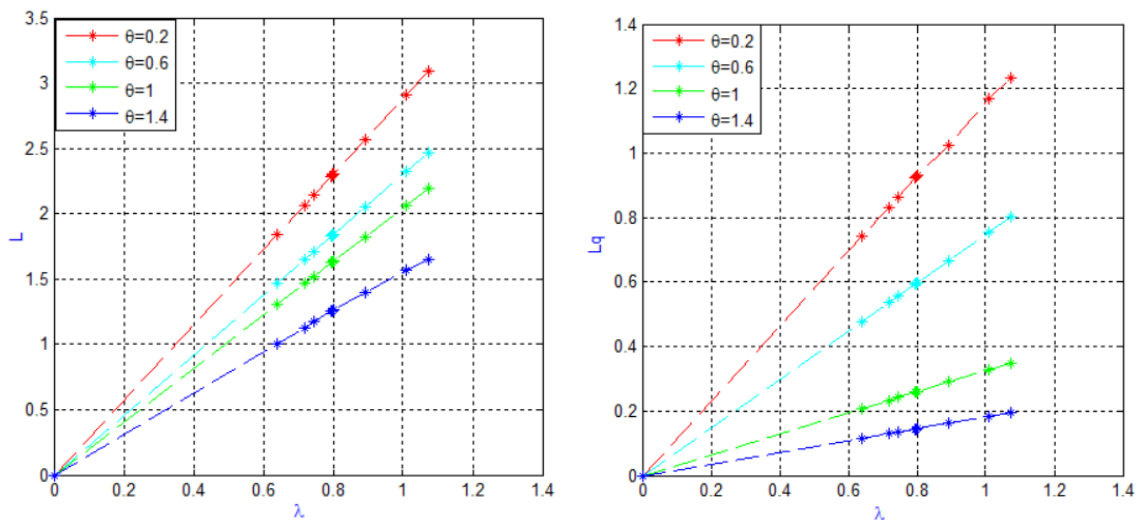


FIGURE 3.6 –  $L$  et  $L_q$  en fonction de  $\lambda$  pour différentes valeurs de  $\theta$

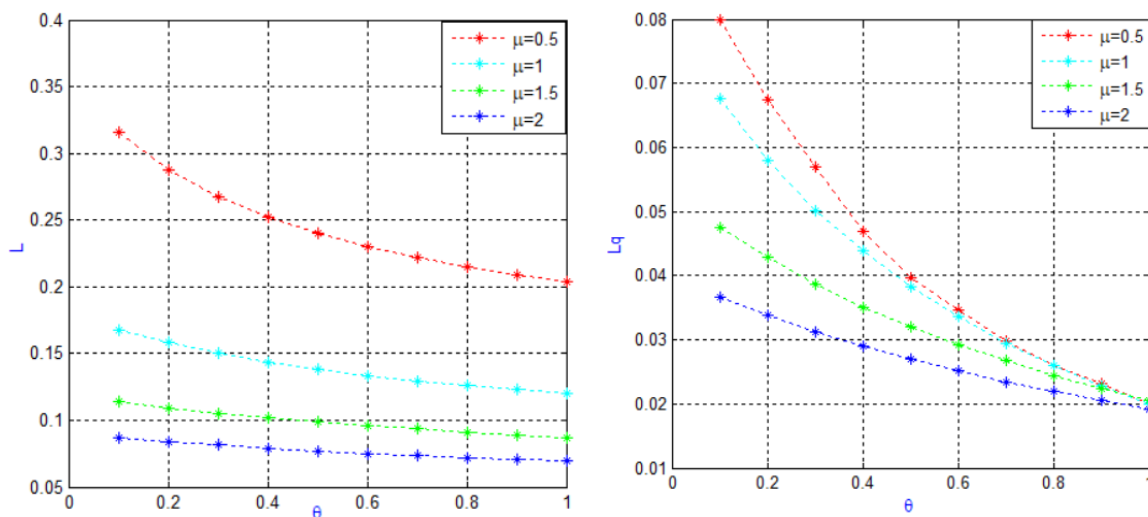
Finalement, dans le tableau 3.4 nous présentons les résultats obtenus pour les différentes mesures de performances associées au même modèle de file d'attente. Pour cet exemple numérique, nous avons fixé la capacité du système  $N$  et nous variaisons le taux d'impatience  $\theta$ .

$\theta$	$P_0$	Pb	L	$L_q$	W	$W_q$
0.1	0.2821	0.7179	1.5801	0.5801	3.1601	1.1601
0.2	0.2918	0.7082	1.4377	0.4377	2.8755	0.8755
0.3	0.2994	0.7006	1.3361	0.3361	2.6723	0.6723
0.4	0.3055	0.6945	1.2592	0.2592	2.5185	0.5185
0.5	0.3106	0.6794	1.1987	0.1987	2.3973	0.3973
0.6	0.3150	0.6850	1.1496	0.1496	2.2992	0.2992
0.7	0.3186	0.6814	1.1089	0.1089	2.2178	0.2178
0.8	0.3218	0.6782	1.0746	0.0746	2.1493	0.1493
0.9	0.3246	0.6754	1.0453	0.0453	2.0907	0.0907
1	0.3271	0.6729	1.0200	0.0200	2.0400	0.0400

TABLE 3.4 – Variations des paramètres de performance par rapport  $\theta$ 

On remarque que la croissance de  $\theta$  (taux d'impatience) provoque une décroissance de paramètres de performance L,  $L_q$ , W,  $W_q$  et Pb par contre  $P_0$  augmente.

Les résultats obtenus précédemment sont présentée dans la figure 3.7 et 3.8, cette figure montre l'effet de la perturbation du taux d'impatience  $\theta$  sur le calcul des performances L et  $L_q$  et W,  $W_q$ . D'après l'illustration graphique donnée en figure 3.7, les performance L et  $L_q$  diminue avec l'augmentation du taux d'impatience  $\theta$ . Par conséquent, l'effet du perturbation du taux d'impatience  $\theta$  sur ces types de performances a un sens dans la pratique.

FIGURE 3.7 – L et  $L_q$  en fonction de  $\theta$  pour différentes valeurs de  $\mu$

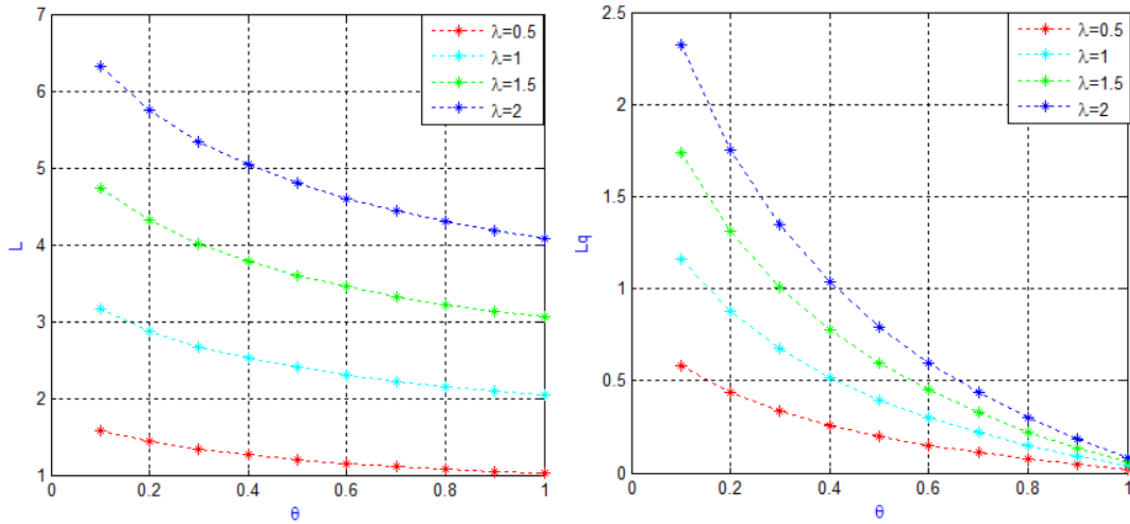


FIGURE 3.8 –  $L$  et  $L_q$  en fonction de  $\theta$  pour différentes valeurs de  $\lambda$

Par la croissance de  $\lambda$  (taux d'arrivée)  $L$ ,  $L_q$ ,  $W$ ,  $W_q$  décroissance. cette est plus important dans le cas  $\lambda = 0.5$  que dans le cas  $\lambda = 2$ .

# CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans ce présent mémoire, nous avons montré, dans un premier temps l'intérêt et les applications des systèmes d'attente classique. Ensuite, nous sommes intéressés au modèle de file d'attente  $M/M/1/N$  avec dérobade et abandon on se basant sur le cas de rétention des clients abandonnés  $q \neq 0$ . Enfin, nous avons effectué une analyse numérique montrant l'effet de quelques paramètres sur les mesures de performances (la probabilité que le système soit occupé, le nombre moyen de clients dans le système, le temps moyen d'attente...) de système de file d'attente  $M/M/1/N$  avec dérobade et abandon.

A la fin et comme perspectives, ce modèle peut être étudié sous les hypothèses de dépendance de taux d'arrivées et de taux de service.

# Bibliographie

- [1] Ubino G. (2006). *Processus stochastiques*. Tech report. Université INRIA/IRISA Rennes, France.
- [2] Louis Poss J . Mai (2003). *Probabilité et statistique version 2.1*. p74
- [3] Philippe N. (1994). *Basic elements of queueing theory : application to medelling of com- puter systems*. Technical report. The university of Massachusetts.
- [4] Lionel B. (Septembre 2004). *Processus stochastiques : processus de poisson et chaîne de Markov*.
- [5] Robson M. IUP Miage Bordeaux. *Processus stochastique et simulation*.
- [6] Lebarbier E. and Robin S. *Processus de Poisson, processus de naissances et morts*. Technical report. Universite paris, France.
- [7] Alan R. (1988). *Processus stochastiques avec application aux phénomènes d'attente et abilité*. Edition 1. Presses Polytechnique Romandes.
- [8] Rubino G. Février 2006. *Processus Stochastiques*.
- [9] Claudie C. 2012/2013. *Processus stochastiques et modélisation*. Universite de Toulouse le Mirail.
- [10] Arnaud G. 2006/2007. *Processus Markoviens de sauts*. Université de Rennes.
- [11] Baynat B T 2000. *héorie des les d'attente-des chaînes de Markove aux réseaux à forme produit*. Paris. Hermès Science Publications.
- [12] Cheprasov V P. 1985. *Elements of Queueing Theory*. Kazan Aviation Institute. Russian.
- [13] Newell G F. 1982. *Applications of Queueing Theory*. Second edition. Chapman and Hall. London(First edition : 1971).
- [14] Anisimov V V. Zakusilo O K. and Donchenko V S. 1987. *Elements of Queueing Theory and Asymptotic System Analysis*. Vishcha Shkola. Kiev. Russian.
- [15] Moulay H. 2014/2015. *Files d'attente et applications*. p12
- [16] K.B. GK. *Techniques de modÃ©lisation : MÃ©thodes analytiques*.
- [17] Kendall D G. (1953). *Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of the imbedded Markov chain*. *Annals of Mathematical Statistics*. (1953).
- [18] Claudie H C. Janvier 2008. *Eléments de Théorie des files d'attente*.

- [19] Gebenbe end Puolle. 1985. *Introduction aux réseaux de files d'attente Eyrolles, Paris.*
- [20] Kumar R. and Sharma S K. (2012). *An M/M/1/N Queuing Model with Retention of renegeed customers and Balking, American Journal of Operational Research.*
- [21] Frédéric Sur. (2013)-(2014). *Programmation dynamique, chaînes de Markov, files d'attente. école des Mines de Nancy.*
- [22] Newell G F. 1982. *Applications of Queueing Theory. Second edition, Chapman and Hall, London (First edition : 1971)*
- [23] Gross D end Harris C. 1985. *Fundamentals of Queueing Theory. John Wiley and Sons, NY.*
- [24] Ruegg A. 1989. *Processus Stochastiques. Presses Polytechniques Romandes, Suisse.*
- [25] Gross D and Harris C M. 1975 1984. *Fundamentals of Queueing Theory, Willy, New york.*
- [26] Abou El-Ata M O and Hariri A M A. (1992). *The M=M=c=N queue with balking and renegeing. Computers and Operations Research. 19, No. 13 713-716.*
- [27] Hêche J F end Liebling M T, Werra D. 1995. *Recheche Opérationnelle pour Ingénieurs II. Presse Polytechniques et Universitaires Romandes, Suisse.*
- [28] Chaudhry M L and Templeton J G C. 1983. *A First Course in Bulk Queues. John Wiley and Sons. New York.*
- [29] Yan Z end Dequan Y, Wuyi Y. (2005). *Analysis of an M/M/1/N queue with Balking, Reneging and server vacation. International symposium on OR and its applications.*
- [30] Rakesh K and Sumeet K S. (2012). *M/M/1/N Queuing System with Retention of Renegeed Customers . Pak.j.stat.oper.res. Vol.VIII No.4 pp859-866.*