

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Akli Mohand Oulhadj - Bouira -

Faculté des Sciences et des Sciences Appliquées
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Filière : Mathématiques

Spécialité : Recherche Opérationnelle

Thème

Méthode de Gauss-Seidel appliquée aux réseaux électriques

Présenté par :

— ALIOUAT ANIS

— SAOUD ABDELAZIZ

Devant le jury composé de :

<i>M^{er}</i> Beddek Said	Président	MAA	UAMO Bouira
<i>M^{er}</i> Demmouche Nacer	Examineur	MCB	UAMO Bouira
<i>M^{er}</i> Hamid Karim	Examineur	MAA	UAMO Bouira
<i>M^{er}</i> Ait Yala Abdelmadjid	Promoteur	MCA	UAMO Bouira

2020/2021

resumé

Résumé

Notre travail est réparti en trois chapitres, dans le chapitre 1 on présente la théorie générale des graphes , dans le deuxième chapitre on a traité la formulation de la matrice admittance, puis on établit les équations de répartition de charges et la classification des bus qui est importante pour la résolution de ces équations.

Le troisième chapitre est consacré à la méthode de Gauss-Seidel , nous avons donné la méthode mathématique après on l'appliquée. sur l'exemple de l'écoulement de puissance et on a terminé avec la solution sur MATLAB

Abstract

Our work is divided into three chapters. In the first one we present the general theory of graphs. chapter II is devoted to the formulation of the admittance matrix and the determination of the power distribution equations. we then establish the buses classification the which plays an important role in solving the governing equations. In the third chapter , we present the Gauss-Seidel method which was selected for the resolution of the problem. Using MATLAB, we were able to determine the optimized values for the choisen example.

Remerciements

Nous tenons à remercier tout premièrement Dieu le tout puissant pour la volonté, la santé et la patience, qu'il nous a donné durant toutes ces longues années.

Ainsi, nous tenons également à exprimer nos vifs remerciements à notre encadreur Dr. AIT YALA pour avoir

d'abord proposé ce thème, pour suivi continuel tout le long de la réalisation de ce mémoire et qui n'a pas cessé de nous donner ses conseils.

Nous tenons à remercier vivement toutes personnes qui nous ont Aidés à élaborer et réaliser ce mémoire, ainsi à tous ceux qui nous ont aidés de près ou de loin à accomplir ce travail.

Nos remerciements vont aussi à tous les enseignants du département mathématiques qui ont contribué à notre formation Nos sincères remerciements à tous les membres du jury qui on Accepté de juger notre travail. En fin, nous tenons à exprimer notre reconnaissance à tous nos Amis et collègues pour le soutien moral et matériel...

Table des matières

Introduction	5
1 Généralités sur la théorie des graphes et leurs applications au réseaux de distributions électriques	6
1.1 Introduction	6
1.2 Qu'est ce qu'un graphe ?	6
1.3 Graphe orienté	7
1.4 Graphe non orienté	8
1.5 Quelques types de graphes	8
1.5.1 Graphe simple et multigraphes	8
1.5.2 Graphe connexe	9
1.5.3 Graphe complet	9
1.5.4 Graphe biparti	10
1.5.5 Graphe planaire	10
1.6 Degré	11
1.6.1 Degré d'un sommet	11
1.6.2 Degré d'un graphe	11
1.7 Autre représentations d'un graphe	12
1.7.1 Matrice d'adjacences	12
1.7.2 La matrice d'incidence aux arcs	12
2 Distributions de puissances électriques	14
2.1 Introduction	14
2.2 Réseau	14
2.3 Réseaux électriques	14
2.4 Les grandeurs électriques	15
2.4.1 Courant électrique	15
2.4.2 Tension	15
2.4.3 Relation entre courant et tension (loi d'ohm)	15
2.4.4 Puissance électrique	16
2.5 Graphe d'un circuit électrique	16
2.6 Distribution de la puissance électrique	17
2.7 Classification des bus :	17
2.7.1 Bus de référence(SLACK ou SWING BUS)	17

2.7.2	Bus de charge (type P-Q bus)	17
2.7.3	Bus de contrôle (type P-V bus)	17
2.8	Équation du réseau électrique	18
2.9	Signe de puissance active et réactive	18
2.10	Admittance des bus	19
3	La solution de l'écoulement de puissance avec Gauss-Seidel	21
3.1	Introduction	21
3.2	La méthode de Gauss-Seidel	21
3.2.1	Cas linéaire	21
3.2.2	Cas non linéaire	22
3.3	Méthode de Gauss-Seidel utilisant la matrice Z	23
3.3.1	Dans les nœuds PQ	24
3.3.2	Dans les nœuds PV	24
3.3.3	Dans les nœuds balancier (Slack)	24
3.3.4	solution de l'exemple avec MATLAB	28
	Conclusion	29
	Bibliographie	30

Introduction

La répartition des charges (load flow ou power flow) est l'un des principaux problèmes qui se pose aux gestionnaires d'un système de production - transport d'énergie électrique.

La résolution du problème de la répartition des charges, nous permet de déterminer les valeurs du module et de la phase de la tension en chaque nœud du réseau pour des conditions de fonctionnement données, ce qui nous permettrons de calculer les puissances active et réactive. Pour résoudre ce problème, il est nécessaire de déterminer les conditions de l'opération en régime permanent d'un système de puissance,

qui sont :

- La formulation d'un modèle mathématique approprié.
- La spécification d'un certain nombre de variables et de contraintes dans les nœuds du système.
- La résolution numérique du système.

Pour résoudre le problème de l'écoulement de puissance qui est notre travail, nous représenterons le système par des schémas équivalents afin de le rendre à un modèle simple duquel nous établirons des équations qui seront non-linéaires. Pour les résoudre, nous utiliserons la méthode de Gauss Seidel .

La méthode de Gauss-Seidel est l'une de plus simple méthodes itératives utilisées pour la résolution du problème de l'écoulement de puissance pour résoudre un ensemble très large d'équations algébrique non linéaires.

Chapitre 1

Généralités sur la théorie des graphes et leurs applications aux réseaux de distributions électriques

1.1 Introduction

La théorie des graphes développée dans diverses disciplines telles que la chimie, la biologie, les sciences sociales. Depuis le début du XXe siècle, elle constitue une branche à part entière des mathématiques, grâce aux travaux de König, Menger, Cayley puis de Berge et d'Erdős. De manière générale, un graphe permet de représenter la structure, les connexions d'un ensemble complexe en exprimant les relations entre ses éléments : réseau de communication, réseaux routiers, interaction de diverses espèces animales, circuits électriques, . . . Les graphes constituent donc une méthode de pensée qui permet de modéliser une grande variété de problèmes en se ramenant à l'étude de sommets et d'arcs.

1.2 Qu'est ce qu'un graphe ?

Un graphe est un dessin géométriquement défini par la donnée d'un ensemble de points (appelés sommets ou nœuds), reliés entre eux par un ensemble de ligne ou de flèche (Appelée arêtes ou arcs) chaque arête a pour extrémités deux points, éventuellement confondus. Les graphes peuvent servir à représenter un grand nombre de situations courantes comme :

- Les circuits électriques
- Les réseaux de communication
- Les liens routiers [8]

Exemple La figure suivante représente un moyen de transport entre différentes villes (Paris, Lyon, Marseille, Toulouse, Caen) représentés par un graphe

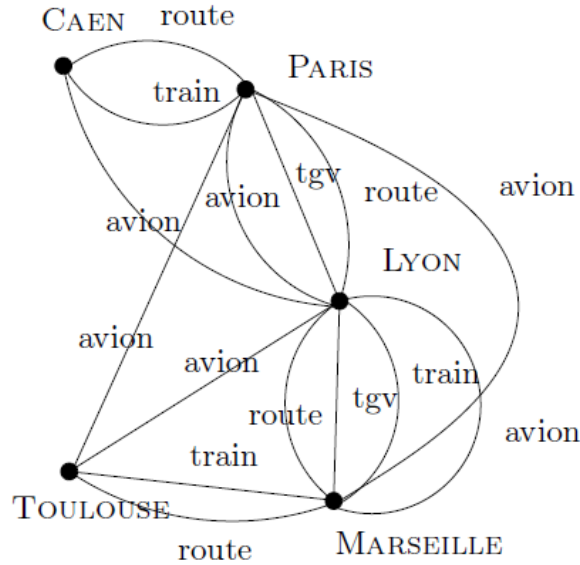


FIGURE 1.1 –

1.3 Graphe orienté

Un graphe orienté est un système formé d'un ensemble fini de sommets que l'en notera (x_1, x_2, \dots, x_n) , et d'un ensemble fini d'arcs reliant dans un ordre bien défini ces sommets, ou un certain nombre d'entre eux noté (u_1, u_2, \dots, u_m) . Mathématiquement un graphe orienté est représenté par le couple $G=(X,U)$ où :

- X est l'ensemble des sommets.
- U est l'ensemble des arcs.

On note un arc reliant un sommet x au sommet y dans un graphe G par : $u=(x,y)$ Si le graphe G contient n sommets , on dit alors que G est d'ordre n.

Chaque arc du graphe G relie respectivement deux sommets, le sommet de départ qui représente l'extrémité initiale de l'arc et le sommet d'arrivée qui représente l'extrémité terminale.

Un graphe orienté est défini par le quadruplet : $G=(X, U, I, T)$ où I est l'application extrémité initiale d'un arc défini par :

$$I : U \rightarrow X$$

$$(x, y) \rightarrow T(x, y) = x$$

T est l'application extrémité terminale d'un arc défini par :

$$I : U \rightarrow X$$

$$(x, y) \rightarrow T(x, y) = y$$

Exemple 1.

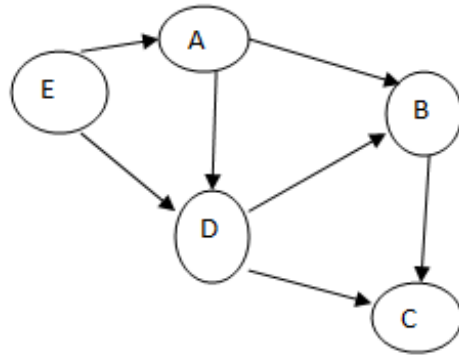


FIGURE 1.2 – Exemple d'un graphe orienté

1.4 Graphe non orienté

Si on définit une relation sur un ensemble où la notion d'ordre n'est pas important on représente ainsi la relation entre deux sommets par un ligne appelé arête, On obtient alors un graphe non orienté , noté $G=(X,E)$

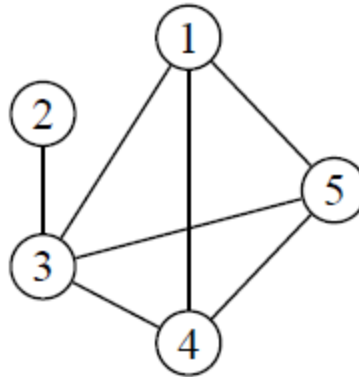


FIGURE 1.3 – Exemple d'un graphe non orienté

1.5 Quelques types de graphes

1.5.1 Graphe simple et multigraphes

Un graphe est simple si au plus une arête relie deux sommets et s'il n'y a pas de boucle sur un sommet. On peut imaginer des graphes avec une arête qui relie un sommet à lui-même (une boucle), ou plusieurs arêtes reliant les deux mêmes sommets. On appellera ces graphes des multigraphes

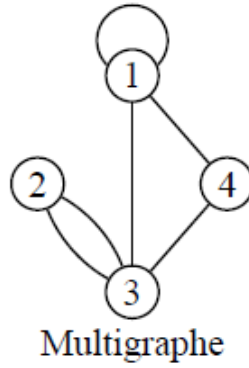


FIGURE 1.4 –

1.5.2 Graphe connexe

Un graphe est connexe s'il est possible, à partir de n'importe quel sommet, de rejoindre tous les autres en suivant les arêtes. Un graphe non connexe se décompose en composantes connexes. Sur le graphe ci-dessous, les composantes connexes sont $\{1, 2, 3, 4\}$ et $\{5, 6\}$.

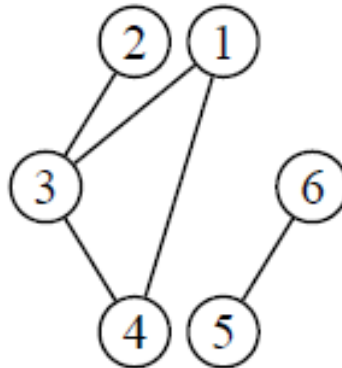


FIGURE 1.5 – Graphe non connexe

1.5.3 Graphe complet

Un graphe est complet si chaque sommet du graphe est relié directement à tous les autres sommets.

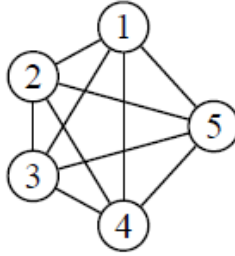


FIGURE 1.6 – Graphe complet

1.5.4 Graphe biparti

Un graphe est biparti si ses sommets peuvent être divisés en deux ensembles X et Y , de sorte que chaque arête du graphe relie un sommet dans X à un sommet dans Y (dans l'exemple ci-dessous, on a $X = \{1, 3, 5\}$ et $Y = \{2, 4\}$, ou vice versa).

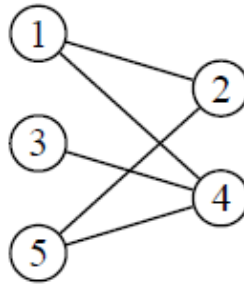


FIGURE 1.7 – Graphe biparti

1.5.5 Graphe planaire

On dit qu'un graphe est planaire si on peut le dessiner dans le plan de sorte que ses arêtes ne se croisent pas. Rappelons que les arêtes ne sont pas forcément rectilignes. Par exemple, la carte ci-dessous, avec sept sommets et neuf arêtes, divise le plan en quatre régions (A,B,C,D).

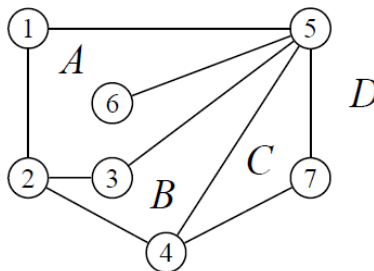


FIGURE 1.8 – Graphe planaire

1.6 Degré

1.6.1 Degré d'un sommet

On appelle degré du sommet v , et on note $d(v)$, le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet. Une boucle sur un sommet compte double. Dans un graphe simple, on peut aussi définir le degré d'un sommet comme étant le nombre de ses voisins (la taille de son voisinage). Dans le multigraphe ci-contre, on a les degrés :

$$d(v_1) = 2$$

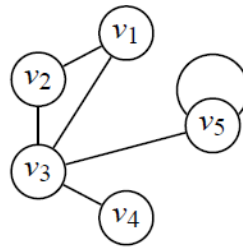


FIGURE 1.9 – Exemple avec multigraphe

$$d(v_2) = 2$$

$$d(v_3) = 4$$

$$d(v_4) = 1$$

$$d(v_5) = 3$$

Remarque 1.1. Un sommet de degré zéro est dit isolé.

Demi-degré d'un sommet

A tout sommet i du graphe orienté $G = (X; U)$ on associe :

- $d_G^+(i)$ "demi-degré extérieur du sommet i dans G " : c'est le nombre d'arcs ayant i comme extrémité initiale.
- $d_G^-(i)$ "demi-degré intérieur du sommet i dans G " : c'est le nombre d'arcs ayant i comme extrémité terminale.
- $d_G(i) = d_G^+(i) + d_G^-(i)$ "degré du sommet i dans G " : c'est le nombre d'arcs ayant i comme extrémité.

1.6.2 Degré d'un graphe

Le degré d'un graphe est le degré maximum de tous ses sommets. Dans l'exemple ci-dessous, le degré du graphe est 4, à cause du sommet V_3 .

Un graphe dont tous les sommets ont le même degré est dit régulier. Si le degré commun est k , alors on dit que le graphe est k -régulier.[2]

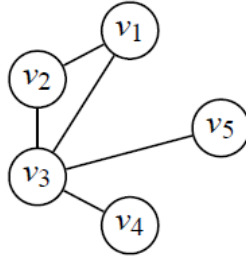


FIGURE 1.10 – Exemple d'un graphe de degré 4

1.7 Autre représentations d'un graphe

1.7.1 Matrice d'adjacences

On peut représenter un graphe simple par une matrice d'adjacences. Une matrice $(n \times n)$ est un tableau de n lignes et n colonnes.
 1 : signifie que les deux sommets sont reliés par un arc.
 0 : signifie que les deux sommets ne sont pas reliés par un arc.

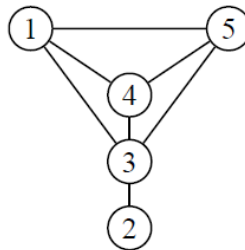


FIGURE 1.11 – Graphe G

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1.7.2 La matrice d'incidence aux arcs

La matrice d'incidence sommets-arcs (aux arcs) du graphe G est la matrice A de type $n \times m$ dont l'élément a_{ij} , i^{me} ligne et j^{me} colonne, est :

- +1 signifie que le sommet est une extrémité initiale de l'arc.
- -1 signifie que le sommet est une extrémité terminale de l'arc.
- 0 signifie qu'il n'existe pas de relations entre le sommet et l'arc

Exemple 2. Soit le graphe $G = (X, U)$ tel que $X = \{1, 2, 3, 4\}$ et $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$

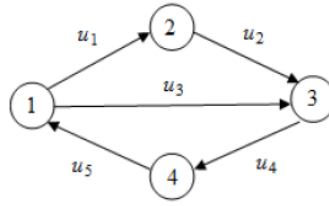


FIGURE 1.12 – Graphe G

La matrice d'incidence aux arcs G est :

$$\begin{pmatrix} +1 & 0 & +1 & 0 & -1 \\ -1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & +1 \end{pmatrix}$$

Chapitre 2

Distributions de puissances électriques

2.1 Introduction

Les réseaux électriques sont composés d'éléments qui sont (ou peuvent être approximatés) linéaire. Mais la puissance électrique est composée de la partie réelle qui se dissipe dans les résistances ($P = R * I^2$) et la partie réactive (bobines et capacités).

L'analyse de la répartition des puissances dans un réseau électrique composé de plusieurs nombres de générateurs, lignes de transmission et des charges est très importante pour les études, la planification et l'exploitation d'un réseau électrique. Cela permet de connaître les conditions de production et de charge et les niveaux des tensions du réseau. Les calculs permettant d'obtenir ces informations sont connus sous le nom (écoulement des puissances ou encore power flow) L'objet de ce travail est de décrire comment calculer les charges électriques dans ces réseaux (par charge on désigne la puissance consommée).

2.2 Réseau

Un réseau est un ensemble d'équipements inter connectés. Deux ordinateurs relient entre eux pour d'échanger des informations c'est déjà un petit réseau

2.3 Réseaux électriques

Un réseau électrique est un ensemble d'infrastructure permettant d'acheminer l'énergie électrique des centres de production vers les consommateurs d'électricité.

Il est constitué de lignes électriques exploitées à différents niveaux de tension, connectées entre elles dans des postes électriques. Les postes électriques permettent de répartir l'électricité et de la faire passer d'une tension à l'autre grâce aux transformateurs.[7]

2.4 Les grandeurs électriques

2.4.1 Courant électrique

Un courant électrique est la circulation des électrons dans un conducteur notée I , dont le signe $+$ ou $-$ marque le sens. IL s'exprime en ampères (A), on place une flèche pour marquer le sens conventionnel positif du courant.

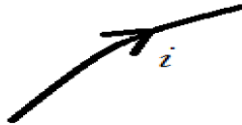


FIGURE 2.1 – Courant électrique

2.4.2 Tension

La tension électrique U entre deux points d'un circuit est la différence entre les potentiels en ces deux points. La tension aussi est une grandeur algébrique.elle s'exprime en volts (V), telle que :

$$U_{AB} = -U_{BA}$$

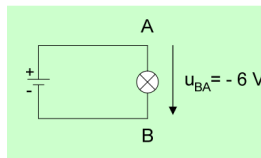


FIGURE 2.2 –

La tension est indiquée par une flèche placée entre les deux points de circuit

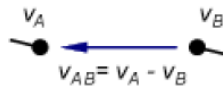


FIGURE 2.3 – La tension

2.4.3 Relation entre courant et tension (loi d'ohm)

Dans une résistance électrique, tension et courant sont proportionnels. On parle de convention récepteur quand les orientations du courant et de la tension relatives à un dipôle sont en sens inverse :

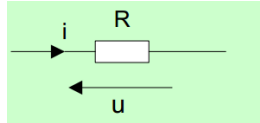


FIGURE 2.4 –

$$U = +RI$$

R est la résistance électrique (en ohm).

Les orientations du courant et de la tension sont dans le même sens :

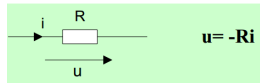


FIGURE 2.5 –

2.4.4 Puissance électrique

La puissance électrique consommée par une résistance est :

$$P = UI$$

$$\text{avec } U = RI$$

$$\text{Donc } P = RI^2 = \frac{U^2}{R} \quad [1] \quad [7]$$

2.5 Graphe d'un circuit électrique

La topologie d'un circuit électrique peut donc être représentée par un graphe, $G = (V, E)$ pour construire le graphe d'un circuit électrique, il suffit de remplacer tous les éléments de ce circuit par des branches, chaque branche relie les deux nœuds aux bornes de cet élément. La Figure (2.6) illustrent un circuit électrique et son graphe du circuit.

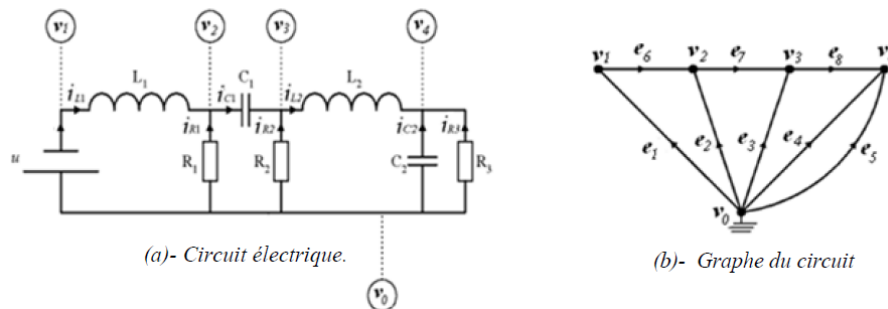


FIGURE 2.6 –

2.6 Distribution de la puissance électrique

La puissance dans un réseau électrique est déterminée par le voltage dans chaque bus (bus=nœud) du réseau et les impédances des lignes qui relient ces bus. La puissance nette (in et out) de chaque bus est la somme des flux de puissance qui entrent et sortent de ce bus, le problème consiste à déterminer l'ensemble de voltages et angles qui avec les impédances du réseau produisent les « charges » de puissance qui conviennent ceux terminaux du système. On considère le réseau électrique comme une collection de bus (nœuds) connectés par des lignes. (théorie des graphes) .Au niveau de chaque bus on peut avoir soit un générateur de puissances électriques , soit un équipement qui consomme cette puissance , on exprime cette puissance sous sa forme complexe : ainsi le flux de puissance au niveau de la nœud k est : $S_k = P_k + j*Q_k = V_k * I_k^*$
Avec

- p_k = puissance réelle = puissance consommée= $R * I^2$
- Q_K =puissance réactive =puissance stockée
- V_k = voltage (volt)
- I_K = courant (ampère)

2.7 Classification des bus :

Dans l'analyse d'écoulement de puissance on peut classer les bus en trois catégories en fonction des spécifications des variables utilisées :

2.7.1 Bus de référence(SLACK ou SWING BUS)

Ce bus connu aussi par le bus balancier (slack bus), est connecté à une source de tension considérée constante, et sans angle de phase est pris comme référence de calcul .Ses puissance actives et réactive, doivent être calculées d'après le calcul de la puissance pour s'adapter aux exigences de bus de contrôle.

2.7.2 Bus de charge (type P-Q bus)

pour ce genre, les puissances actives et réactives sont données, par contre le module et la phase de tension sont à déterminer

2.7.3 Bus de contrôle(type P-V bus)

Ce sont les bus génératrice de réseau ou la puissance active et le module de la tension est connu puisqu'elles sont contrôlables , par contre la puissance réactive et la phase de tension θ sont défini.

classification des bus	paramètres connus	paramètre inconnus
Bus de référence	$ V , \theta$	P, Q
Bus de génération PV	$ V , P$	θ , Q
Bus de charge PQ	P , Q	$ V , \theta$

2.8 Équation du réseau électrique

L'équation décrivant les relations entre courants et tensions aux bus est donné par :

$$I_{Bus} = Y_{Bus} * V_{Bus}$$

Où :

V_{Bus} : Vecteur des tensions des bus.

$$V_{Bus} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix}$$

I_{Bus} : Vecteur des courants des bus

$$I_{Bus} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ I_n \end{pmatrix}$$

Y_{Bus} : La matrice admittance du réseau électrique donnée par :

$$Y_{Bus} = \begin{pmatrix} \sum_{i=2}^n y_{1i} & -y_{12} & \dots & -y_{1n} \\ -y_{21} & \sum_{i=1, i \neq 2}^n y_{2i} & \dots & -y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -y_{n1} & -y_{n2} & \dots & \sum_{i=1}^{n-1} y_{ni} \end{pmatrix}$$

La matrice Y_{Bus} présente les propriétés suivantes :

- Matrice carrée d'ordre n.
- Matrice symétrique $Y_{Bus}(i, k) = Y_{Bus}(k, i)$
- Matrice complexe.
- Chaque élément $Y_{Bus}(i, k)$ en dehors de la diagonale est l'opposé de l'admittance de la branche $Y_{Bus}(k, i)$ entre les nœuds i et k.
- Chaque élément de la diagonale $Y_{Bus}(k, k)$ est la somme des admittances de toutes les branches liées au bus k

Z_{Bus} : L'impédance des bus telle que $Z_{Bus} = \frac{1}{Y_{Bus}}$

[3]

2.9 Signe de puissance active et réactive

En général, les signes de puissances actifs et réactifs pour les jeux de barres de générations sont positifs, tandis que pour les bus de charges sont négatifs. Cependant il y a quelques remarques à faire :

1. Les puissances active et réactive associées à un bus de charge inductif sont les deux négatives.

2. Les puissances active et réactive associées à un bus de charge capacitive sont respectivement, négatives et positives.
3. Les puissances active et réactive associées à un bus de génération inductive sont positives.
4. Les puissances active et réactive associées à un bus de génération capacitive sont respectivement, positives et négatives.
5. La puissance réactive d'un compensateur capacitif shunt local pour un bus est positive.[6]

2.10 Admittance des bus

On rappelle que le voltage est relié au courant par la relation :

$$v = z * I$$

z étant l'impédance (pour une résistance on pose $Z = R$) ainsi on peut écrire $I = \frac{V}{Z}$ ou $I = y * v$ Y étant égale à $1/z$. On désigne Y par l'admittance .

Le réseau consiste en un nombre n_b de bus et un nombre N_l de lignes. Chaque ligne ayant une certaine impédance Z (généralement complexe).

les interconnexions entre les bus est décrite par la matrice incidente des bus, cette matrice qui est de dimensions N_l colonnes et N_b lignes, ainsi :

$$NI = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et la matrice incidente pour le cas ci-dessous :

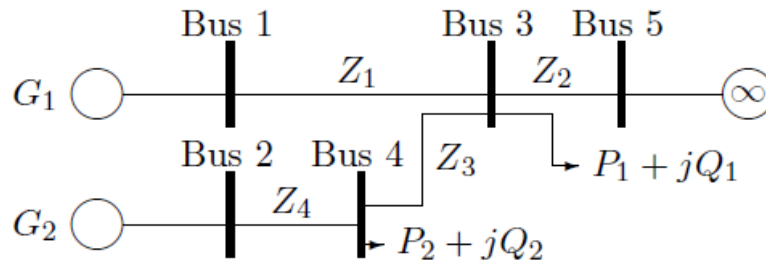


FIGURE 2.7 – graphe simple

Rappels : $y_{jk} = y_{kj}$

et on a $I = y * v$ (I : courant ; v : voltage et y matrice admittance)

d'où :

$$I_k = \sum_{j=1}^n y_{jk} v_j$$

ainsi la puissance électrique (complexe) a chaque nœud sera :

$$S_k = V_k \sum_{j=1}^N Y_{jk}^* V_j^*$$

Le problème typique de distribution de charges concerne des bus avec des contraintes différentes. Il est possible d'en spécifier 6 quantités à chaque nœud

- La Magnitude et l'angle de déphasage du voltage (v)
- La Magnitude et l'angle de déphasage du courant (I)
- La puissance active et la puissance réactive (P et Q)

Les quantités sont inter-connectées (reliées) de sorte que chacune des deux sont spécifiés par les autres 4. Et le Réseau lui-même fournit deux autres contraintes. Impédance fixes. (Relation entre voltage et courant)

Bus ∞ : il s'agit du bus source. voltage de magnitude constante et d'angle de déphasage constante. Le problème de la distribution électrique consiste à résoudre :

$$S_k = V_k \sum_{j=1}^N Y_{jk}^* V_j$$

On choisit un bus et on lui assigne la qualité de "slack bus". C'est à dire qu'on le considère comme "bus ∞ "

Il n'a pas de puissance réelle ni de puissance réactive contraintes, il s'accommode la puissance réelle dissipée et la puissance réactive stockée dans les lignes du réseau

Chapitre 3

La solution de l'écoulement de puissance avec Gauss-Seidel

3.1 Introduction

Un grand nombre de mathématiciens, des informaticiens et des ingénieurs ont consacré des années de leurs carrières pour développer les méthodes de calcul de l'écoulement de puissance. Avant 1992, les calculs de l'E.P se faisaient à la main, en 1929 les calculateurs de réseau (de westing house) des analyseurs des réseaux furent employer le calcul de l'écoulement de puissance. Ce n'est qu'en 1956 que fûtes développe la première méthode adéquates par « WANT » et « HALE ».

La méthode initialement utilisée était la méthode de Gauss-Seidel, qui a l'inconvénient de converger en un nombre d'itérations proportionnel à la taille du réseau.

3.2 La méthode de Guss-Seidel

3.2.1 Cas linéaire

La méthode de Gauss-Seidel est une méthode pour résoudre les systèmes linéaires $Ax=b$, où A est une matrice $n \times n$ et x, b sont des vecteurs de \mathbb{R}^n Elle consiste en la manipulation suivante : on décompose A comme $A=D-E-F$, où D est une matrice diagonale, $-E$ est une

matrice triangulaire inférieure, et $-F$ est une matrice triangulaire supérieure $\begin{pmatrix} & & -F \\ & D & \\ -E & & \end{pmatrix}$

On peut alors transformer le système en :

$$Ax = b \iff (D - E)x - Fx = b \iff X = (D - E)^{-1}Fx + (D - E)^{-1}b$$

On définit ensuite une suite de vecteurs (x^k) par la formule :

$$x^{(k+1)} = (D - E)^{-1}Fx^{(k)} + (D - E)^{-1}b$$

d'où :

$$X_j^{(k+1)} = \frac{1}{a_{jj}}(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} + b_j) \quad , \quad 1 \leq j \leq n$$

et on espère que la suite $(x^{(k)})$ converge vers une solution de $Ax=b$. Sous de bonnes hypothèses

concernant la matrice A, c'est effectivement le cas.[5]

3.2.2 Cas non linéaire

Soit à résoudre la fonction :

$$f(x) = 0$$

cette méthode est basée sur changement de l'équation $f(x)=0$ à la forme :

$$x = g(x)$$

On estime une valeur initiale x^0 :

$$x^{(1)} = g(x^{(0)})$$

$$x^{(2)} = g(x^{(1)})$$

.

.

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$$

Où k représente le numéro d'itération .

Le processus itératif se termine si la différence entre deux valeurs successives est vérifiée le test de convergence.

Le test de convergence : $|x^{(k+1)} - x^{(k)}| < \varepsilon$

Pour un système de n équations :

Soit à résoudre le système d'équation d'ordre n suivant :

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

.

.

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

Pour trouver l'algorithme de Gauss-Seidel ,on a besoin de reformer la fonction $f(x) = 0$ à la forme itérative $x = g(x)$

$$x^{(1)} = g(x^{(0)})$$

$$x^{(2)} = g(x^{(1)})$$

.

.

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$$

A la fin de chaque itération , on fait le test de convergence :

$$|x^{(k+1)} - x^{(k)}| < \varepsilon$$

Où K est le numéro d'itération [4]

Exemple 3. On résoudre avec Gauss-Seidel l'équation suivante :

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = 0$$

L'expression ci-dessus est écrit comme :

$$x = \frac{-1}{9}x^3 + \frac{6}{9}x^2 + \frac{4}{9}$$

$$= g(x)$$

Si on dessine le graphe de $g(x)$ et x entre 0 et 4.5 on obtient le graphe ci-dessus

On peut voir que la méthode de Gauss-Seidel nécessite de nombreuses itérations pour atteindre la précision souhaitée, et il n'y a aucune garantie pour la convergence dans cette exemple,

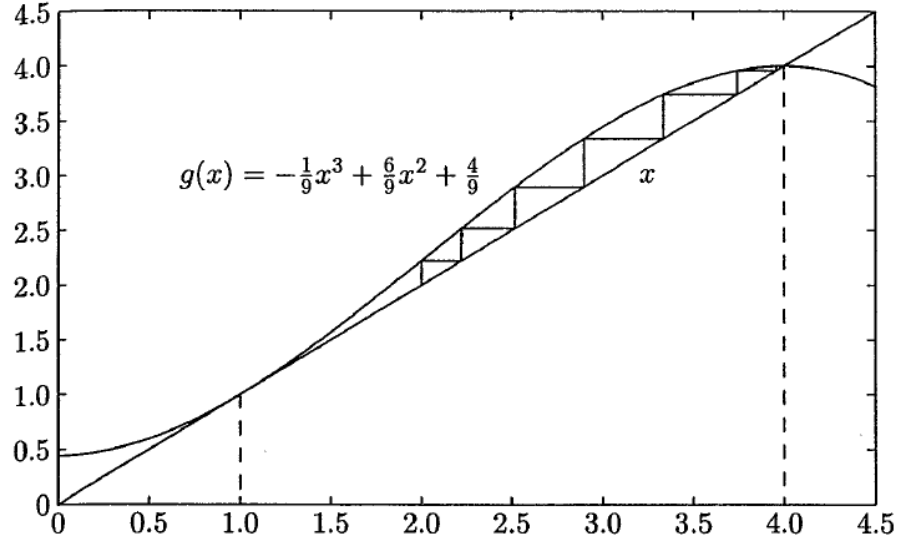


FIGURE 3.1 –

puisque l'estimation initiale était dans une région "encadrée", la solution converge en zigzag vers l'une des racines.

En effet, si l'estimation initiale était en dehors de cette région, disons $x^{(0)} = 6$, le processus divergerait, en particulier pour le cas n -dimensionnel est difficile et aucune méthode générale n'est connue

3.3 Méthode de Gauss-Seidel utilisant la matrice Z

On a la puissance réelle et la puissance réactive dans chaque nœud est donnée par :

$$P_k + jQ_k = V_k I_k^*$$

Où

$$I_k = \frac{P_k - jQ_k}{V_k^*} = \frac{S_k^*}{V_k^*}$$

$$[I] = [Y_{Bus}][v]$$

telle que Y est une matrice de $n \times n$ et V est un vecteur de $n \times 1$

Ainsi, pour la ligne k :
$$I_k = \sum_{i=1}^n V_i Y_{ki}$$

I_k : courant injecté dans le bus k

Donc :
$$I_k = \frac{S_k^*}{V_k^*}$$

et donc :
$$Y_{k1}V_1 + Y_{k2}V_2 + \dots + Y_{kk}V_k + \dots + Y_{kn}V_n = \frac{S_k^*}{V_k^*}$$

donc :

$$Y_{kk}V_k = \frac{S_k^*}{V_k^*} - \sum_{i=1, i \neq k}^n Y_{ki}V_i$$

On obtient :

$$V_k = \frac{1}{Y_{kk}} \left[\frac{P_k - jQ_k}{V_k^*} - \sum_{i=1, i \neq k}^n Y_{ki}V_i \right]$$

Puisque les nœuds sont classés, chaque type de nœuds comporte deux paramètres connus et deux inconnus qu'il faut déterminer.

En se basant sur la solution de l'itération (k), le calcul des nouvelles tensions à l'itération (k+1) dépend du type de nœud concerné.[3]

3.3.1 Dans les nœuds PQ

Une formule générale pour déterminer la tension complexe (l'amplitude $|V_i|$ et la phase $|\theta_i|$) du nœud i peut être développée en substituant l'équation :

$$V_i^{(k+1)} = \frac{1}{y_{ii}} \left(\frac{p_i - jQ_i}{v_i^{(k)*}} - \sum_{j=1}^{i-1} y_{ij}^k v_j - \sum_{j=i+1}^n y_{ij}^k v_j \right), \quad i=2..n \quad (*)$$

Il faut noter que le nœud 1 est choisi comme nœud balancier dont l'amplitude et la phase de tension sont connues. Cela explique pourquoi on commence les calculs pour $i = 2$.

3.3.2 Dans les nœuds PV

Si le nœud est un nœud de génération, la puissance réelle p_i et l'amplitude de tension $|v_i|$ sont connus, et il reste à déterminer la puissance réactive et la phase de tension au début de chaque itération

Aussi, pour le générateur du nœud i, on a :

$$\begin{aligned} V_i^{(k+1)} &= \frac{1}{Y_{ii}} \left(\frac{p_i - jQ_i}{v_i^{(k)*}} - \sum_{j=1}^{i-1} Y_{ij}^{(k)} v_j - \sum_{j=i+1}^n Y_{ij}^{(k)} v_j \right) \text{ D'où} \\ V_i^{(k+1)} + \sum_{j=1}^{i-1} Y_{ij}^{(k)} v_j + \sum_{j=i+1}^n Y_{ij}^{(k)} v_j &= \frac{1}{Y_{ii}} \left(\frac{p_i - jQ_i}{v_i^{(k)*}} \right) \end{aligned} \quad (**)$$

donc :

$$Q_i^{(k+1)} = -IM[v_i^{(k)*} (v_i^{(k)} Y_{ii} + \sum_{j=1, j \neq i}^n Y_{ij} v_j^{(k)})]$$

Une fois Q_i est déterminée, on utilise l'équation (*) pour calculer la nouvelle valeur de du nœud de génération i.

En résumé, le processus itératif de Gauss-Seidel commence en prenant des valeurs initiales pour les amplitudes et phases de tension inconnues (sauf pour le cas du nœud balancier) et calcule les nouvelles valeurs, qui sont ainsi des valeurs corrigées. Au niveau de chaque nœud, et à chaque itération, la tension corrigée est remplacée dans l'équation (*) comme une valeur estimée afin de calculer une nouvelle valeur. Ce processus est répété jusqu'à convergence.

3.3.3 Dans les nœuds balancier (Slack)

Une fois que toutes les tensions aux nœuds V_2, V_3, \dots, V_n sont calculées, la puissance du nœud balancier est alors calculée :

$$\begin{aligned} \frac{P_1 - jQ_1}{V_1^*} &= Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 + \dots + Y_{1n}V_n \\ P_1 - jQ_1 &= V_1^*Y_{11}V_1 + V_1^*Y_{12}V_2 + V_1^*Y_{13}V_3 + \dots + V_1^*Y_{1n}V_n \end{aligned}$$

Exemple 4. La figure 6.12 montre le schéma d'une système électrique simple à trois bus avec générateurs aux bus 1 et 3.

La magnitude de la tension au bus 1 est ajustée à 1.05 pu.
 La magnitude de la tension au bus 3 est fixée à 1.04 pu avec une puissance réelle de 200 MW .
 La puissance réelle au bus 2 est 400 MW
 La puissance réactive au bus 2 est 250 Mvar.
 Les impédances de ligne sont marquées par unité sur une base de 100 Mvar.
 Les susceptances de charge de ligne sont négligées
 On Obtenir la solution de l'écoulement de puissance par la méthode de Gauss-Seidel comme suit :

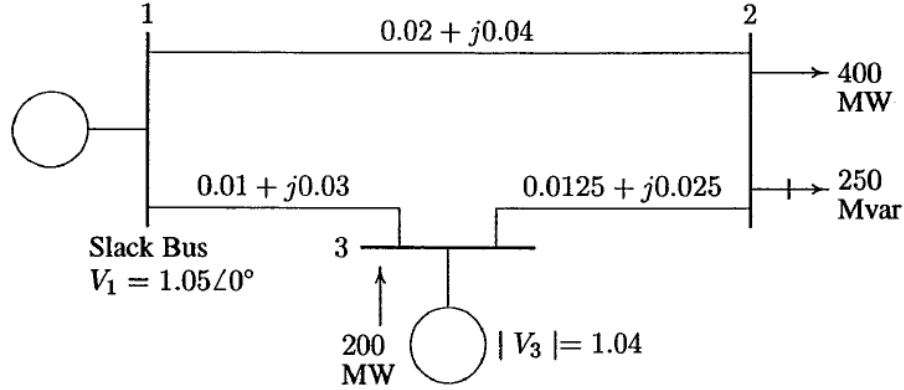


FIGURE 3.2 –

Impédance de ligne convertie en admittance :
 $y_{12} = 10 - j20$ et $y_{13} = 10 - 30j$ et $y_{23} = 16 - 32j$
 pour les bus 2 et 3 :

$$S_2 = -\frac{400+250j}{100} = -4.5 - 2.5j$$

$$p_3 = \frac{200}{100} = 2.0pu$$

Le bus 1 est le bus de référence (Slack) ,On donne des valeurs initiale pour V_2 et V_3 :

$$V_2^{(0)} = 1.0 + 0.0j \quad \text{et} \quad V_3^{(0)} = 1.04 + 0.0j$$

On a :

$$V_i^{(k+1)} = \frac{1}{Y_{ii}} \left(\frac{p_i - jQ_i}{v_i^{(k)*}} - \sum_{j=1}^{i-1} Y_{ij}^k v_j - \sum_{j=i+1}^n Y_{ij}^k v_j \right)$$

et on a $y_{ij} = -Y_{ij}$ pour $i \neq j$

donc la relation précédent devient :

$$V_i^{(k+1)} = \frac{1}{y_{ii}} \left(\frac{p_i - jQ_i}{v_i^{(k)*}} + \sum_{j=1}^{i-1} y_{ij}^k v_j + \sum_{j=i+1}^n y_{ij}^k v_j \right)$$

et donc :

$$\begin{aligned} V_2^{(1)} &= \frac{1}{y_{22}} \left[\frac{P_2 - jQ_2}{V_2^{*(0)}} + y_{12} V_1 + y_{23} V_3^{(0)} \right] \\ &= \frac{-4.0 + 2.5j}{1.0 + 0j} + (10 - 20j)(1.05 + 0j) + (16 - 32j)(1.04 + 0j) \\ &= \frac{26 - 52j}{26 - 52j} \end{aligned}$$

$$= 0.97462 - j0.042307$$

Le bus 3 est un bus de contrôle tq la magnitude de voltage et la puissance active sont spécifiés la puissance réactive est :

$$Q_i = -IM[v_i^{(k)*}(v_i^{(k)}Y_{ii} + \sum_{j=1, j \neq i}^n Y_{ij}v_j^{(k)})]$$

et on a :

$$y_{ij} = -Y_{ij} \text{ pour } i \neq j$$

Donc :

$$Q_i = -IM[v_i^{(k)*}(v_i^{(k)}Y_{ii} - \sum_{j=1, j \neq i}^n y_{ij}v_j^{(k)})]$$

et :

$$Q_3 = -IM[v_3^{*(0)}(v_3^{(0)}(y_{13} + y_{23}) - y_{13}v_1 - y_{23}v_2^{(1)})]$$

$$\begin{aligned} &= -IM[(1.04 - j0)((1.04 + j0)(26 - j62) - (10 - j30)(1.05 + j0) - (16 - j32)(0.97462 - \\ &\quad j0.042307))] \\ &= 1.16 \end{aligned}$$

On utilise la valeur de Q_3 pour calculer la tension au bus 3 :

$$\begin{aligned} V_3^{(1)} &= \frac{1}{y_{33}} \left[\frac{P_3 - jQ_3}{V_3^{*(0)}} + y_{13}V_1 + y_{23}V_2^{(1)} \right] \\ &= \frac{\frac{2.0 - j1.16}{1.04 - j0} + (10 - j30)(1.05 + j0) + (16 - j32)(0.97462 - j0.042307)}{(26 - j62)} \\ &= 1.03783 - j0.005170 \end{aligned}$$

Puisque $|V_3| = 1.04$ donc on retenue la partie imaginaire de V_3 seulement, et on obtient la partie réelle avec la relation suivant :

$$e_3^{(1)} = \sqrt{(1.04)^2 - (0.005170)^2} = 1.039987$$

Remarque 3.1. $|V_i| = \sqrt{(e_i^{(k+1)})^2 + (f_i^{(k+1)})^2}$

telle que :

e_i : la partie réelle de V_i et f_i : la partie imaginaire de V_i

Donc :

$$V_3^{(1)} = 1.039987 - j0.005170$$

pour l'itération 2 On a :

$$\begin{aligned} V_2^{(2)} &= \frac{1}{y_{22}} \left[\frac{P_2 - jQ_2}{V_2^{*(1)}} + y_{12}V_1 + y_{23}V_3^{(1)} \right] \\ &= \frac{\frac{-4.0 + 2.5j}{0.97462 + j0.042307} + (10 - 20j)(1.05 + j0) + (16 - 32j)(1.039987 + j0.005170)}{(26 - 52j)} \\ &= 0.971057 - j0.043432 \end{aligned}$$

$$Q_3^{(2)} = -IM[v_3^{*(1)}(v_3^{(1)}(y_{13} + y_{23}) - y_{13}V_1 - y_{23}v_2^{(2)})]$$

$$\begin{aligned}
&= -IM[(1.039987 + j0.005170)((1.039987 - j0.005170)(26 - j62) - \\
&(10 - j30)(1.05 + j0) - (16 - j32)(0.971057 - j0.043432))] \\
&= 1.38796
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_3^{(2)} &= \frac{1}{y_{33}} \left[\frac{P_3 - jQ_3}{V_3^{*(1)}} + y_{13}V_1 + y_{23}V_2^{(2)} \right] \\
&= \frac{\frac{2.0 - j1.38796}{1.039987 + j0.00517} + (10 - j30)(1.05 + j0) + (16 - j32)(0.971057 - j0.043432)}{(26 - j62)} \\
&= 1.03908 - j0.00730
\end{aligned}$$

Puisque $|V_3| = 1.04$ donc on retenue la partie imaginaire de V_3 seulement, et on obtient la partie réelle avec la relation suivant :

$$e_3^{(2)} = \sqrt{(1.04)^2 - (0.00730)^2} = 1.039974$$

d'où :

$$V_3^{(2)} = 1.039974 - j0.00730$$

Le processus sera continue jusqu'à la solution est converge avec une précision de $5 * 10^{-5}$ pu. voici les sept premier itérations :

$V_2^{(3)} = 0.97073 - j0.04479$	$Q_3^{(3)} = 1.42904$	$V_3^{(3)} = 1.03996 - j0.00833$
$V_2^{(4)} = 0.97065 - j0.04533$	$Q_3^{(4)} = 1.44833$	$V_3^{(4)} = 1.03996 - j0.00873$
$V_2^{(5)} = 0.97062 - j0.04555$	$Q_3^{(5)} = 1.45621$	$V_3^{(5)} = 1.03996 - j0.00893$
$V_2^{(6)} = 0.97061 - j0.04565$	$Q_3^{(6)} = 1.45947$	$V_3^{(6)} = 1.03996 - j0.00900$
$V_2^{(7)} = 0.97061 - j0.04569$	$Q_3^{(7)} = 1.46082$	$V_3^{(7)} = 1.03996 - j0.00903$

pour le bus 1 (slack bus) on a :

$$\begin{aligned}
P_1 - jQ_1 &= V_1^* [V_1 Y_{11} + V_2 Y_{12} + V_3 Y_{13}] \\
&= V_1^* [V_1 y_{11} - V_2 y_{12} - V_3 y_{13}] \\
&= (1.05) [(20 - j50)(1.05 + j0) - (10 - j20)(0.9702 - j*0.0459) - \\
&\quad (10 - j30)(1.04 - j0.0090)] \\
&= 2.1842 + j1.4085 \text{ pu [4]}
\end{aligned}$$

3.3.4 solution de l'exemple avec MATLAB

```
Y=[20-j*50 , -10+j*20, -10+j*30; -10+j*20, 26-52*j , -16+32*j; -10+j*30, -16+32*j, 26-62*j]
s2=-4.0-2.5*j;
p3=2.0; % les valeurs initial pour v
v2=1.0+0.0*j;
v3=1.04+0.0*j;
v1=1.05+0*j;
% on fixe un epsilon
Eps=0.000001;
erreur=Eps+1;
% on donne m pour voir le nombre d'itération
m=0;
while (erreur>Eps)
    z=v2;
    m=m+1;
    v2= ((conj(s2))/conj(v2))-Y(1,2)*v1-Y(2,3)*v3/Y(2,2);
    Q3=-imag(conj(v3)*(v3*Y(3,3)+Y(1,3)*v1+Y(2,3)*v2));
    v3= ((p3-j*Q3)/conj(v3))-Y(1,3)*v1-Y(2,3)*v2/Y(3,3);
    e3=sqrt((1.04)^2 - (imag(v3))^2);
    v3=e3+imag(v3);
    erreur=max(abs(z-v2));
end
s=conj(v1)*(v1*Y(1,1)+v2*Y(1,2)+v3*Y(1,3));
s1=conj(s);
a1=angle(v2);
a2=angle(v3);
% calcul des valeurs des angles en degré
angle2=(a1*180)/3.1415;
angle3=(a2*180)/3.1415;
```

```
angle2
angle3
v2
Q3
v3
m
s1
```

Conclusion

En conclusion, les réseaux électriques sont extrêmement complexe et faire le calcul de la propagation de puissance à l'intérieur de ceux-ci devient très difficile. Heureusement, existe méthodes mathématiques qui ont été développées permettant de calculer le tout en quelques fractions de seconde, La détermination de la magnitude et des angles du voltage au niveau de chaque bus est indispensable. Grace aux méthodes mathématiques notamment la théorie des graphes et l'analyse matricielle on a pu modéliser ce problème. Ensuite nous avons choisi la méthode de Gauss- Seidel pour déterminer les valeurs inconnues. Ainsi , pour le cas étudié nous avons pu calculer les valeurs des angles et les puissances dans un exemple et on a trouvé les résultats suivants :

$$|V_2| = 0.97168 \text{ pu} \qquad \theta_2 = -2.6948^\circ$$

$$S_3 = 2.0 + j1.4617 \text{ pu}$$

$$|V_3| = 1.04 \text{ pu} \qquad \theta_3 = -0.498^\circ$$

$$S_1 = 2.1842 + j1.4085 \text{ pu}$$

Bibliographie

- [1] David FOLIO *Support de cours d'électricité/électronique* Edition 2017/2018
- [2] Didier Muler *Introduction à la théorie des graphes* Edition 2012
- [3] FERHTIA Saàd *calcul d'écoulement de puissance dans les réseaux électriques lors de l'intégration des fermes éoliennes et des dispositifs FACTS* Edition 2012/2013
- [4] Hadi Saadat
Power System Analysis Edition 1999
- [5] Luca Amode et Jean-Pierre Dedieu *Analyse numérique matricielle* Edition 2008
- [6] Messaoud Abderrahim et Allouche Idris *Mémoire répartition de charges dans les réseaux électriques* Edition 2010/2011
- [7] Mohammed Naji Rekkab
Memoire L'intégration du calcul symbolique de la simulation des systèmes électriques par une approche topologique Edition 2011/2012..
- [8] N.Belharrat *Recherche opérationnelle La Théorie des graphes.* Edition 2008

”