log.png

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université AMO de Bouira

Faculté des Sciences et des Sciences Appliquées

Département du Mathématiques

MÉMOIRE POUR L'OBTENTION DU DIPLOME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

OPTION

Recherche opérationnelle Mathématiques

Thème

Principe de contraction sur un espace métrique complet muni d'un graphe

Présenté par :BOUKHALFA Nesrine

Soustiendra le : Mercredi 07/07/2021 **à** $10^h : 00$

Devant le jury de :

M^{me} *BENCHABANE Saadia*	**Promotrice**	**MCB**	**ENS Kouba**
M^{me} *MELOUANE Nassima*	**Co-Promotrice**	**MAA**	**UAMO Bouira**
M^{me} *RAFAA Souad*	**Présidente**	**MAA**	**UAMO Bouira**
M^{r} *BOUDREF Mohamed Ahmed*	**Examinateur**	**MCA**	**UAMO Bouira**

Année universitare : 2020/2021

DÉDICACE

Je dédie ce travail à :

Mes trés chères parents pour toute leurs éducation, leurs sacrifices, leurs amour, leur tendresse, leurs soutient tout au long des mes études et qui m'ont donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance.

Mes chères soeurs Asma, Mariem et Malek et Hadjer, Doaa et Chifaa, pour leurs encouragements et leur soutien moral.

Mes chères frères, Ismail et Abdallah, Amine et Islam, Abdelrahmane, pour leurs appuis et leurs encouragements.

Toute ma famille pour leurs soutiens tout au long de mon parcours universitaire.

Mes amis et à tous ceux qui me connaissent et qui m'ont aidée à réaliser ce travail.

REMERCIEMENTS

La réalisation de ce mémoire à été possible grace au concours de plusieurs personnes à qui je voudrais témoigner toute ma reconnaissance.

Tout d'abord adresser toute ma gratitude à ma promotrice de ce mémoire Madame Benchabane Saadia pour sa patioence, sa disponibilété et surtout ses judicieux, conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion.

Je remercie Madame Melouane Nassima pour toute l'aide qu'elle m'a apportée.

Je tiens à remercier sincèrement les membres du jury, Mme. Souad Rafaa d'avoir bien voulu présider mon travail, et Mr. Boudref Mohamed Ahmed d'avoir fait partis de ces membres. qui me font le grand honneur d'évalue ce travail.

En fin, je tiens àtémoigner toute ma gratitude à pour leur confience et leur support iestimable.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE

0

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les théorèmes du point fixe sont les outils mathématiques de base pour montrer l'existence des solutions pour plusieurs équations. L'origine de ce théorème est les travaux de Banach en 1922. Le théorème du point fixe de Banach est dit principe de l'application contractante, il est la base de la théorie du point fixe. Ce principe garantit l'existence d'un unique point fixe pour toute application contractante dans un espace métrique complet dans lui-même.

En quelques décennies, la théorie des graphes est devenue l'un des domaines les plus féconds et les plus dynamiques des mathématiques et de l'informatique. Cette évolution constante est sans doute due au large spectre des applications telles que l'électronique, la linguistique, la chimie, la sociologie, les mathématiques, l'informatique....
On s'intéressera dans ce mémoire à prouver le théorème du point fixe de Banach sur un espace métrique complet muni d'un graphe qui a été introduit par Jachymski [6] en 2008. Ce résultat théorique permet d'étendre beaucoup de résultats connus dans la littérature récente dans le cadre d'espaces métriques complets.
Notre travail est organisé en trois chapitres :

Dans le premier chapitre "Préliminaires" nous avons présenté quelques outils topologie qui seront utilisés dans ce mémoire.

Dans le deuxième chapitre, nous avons donnés quelques rappels sur la théorie des graphes pour faciliter la compréhension de ce mémoire à un lecteur qui n'est pas familiarisé avec la théorie des graphes.

Enfin, dans le dernier chapitre,qui comprend l'objectif principal de la mémoire, qui est l'utilisation de Jachimsky [6] le structure du graphe pour prouver l'existence du point fixe.

CHAPITRE

1

PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, nous présentons certaines notions de base de la topologie.

1.1 Topologie

Soit E un ensemble non vide. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

Définition 1.1. *Une topologie sur E est une famille $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(E)$ de parties de E vérifiant les trois conditions suivantes :*
1) $\emptyset$ et E sont des éléments de $\mathcal{T}$,
2) toute réunion d'éléments de $\mathcal{T}$ est un élément de $\mathcal{T}$,
3) toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{T}$ est un élément de $\mathcal{T}$.

Exemple 1.1.

1) *Soit E un ensemble non vide, alors $\mathcal{T} = \{\emptyset, E\}$ est une topologie sur E appelée topologie grossière.*
2) *Soit E un ensemble non vide, alors $\mathcal{T} = \mathcal{P}(E)$ définit une topologie, appelée topologie discrète.*

1.2 Espace topologique

Définition 1.2. *Un espace topologique est un couple $(E, \mathcal{T})$, où E est un ensemble non vide et $\mathcal{T}$ une topologie sur E.*

Remarque 1.1. *Il faut remarquer qu'un espace topologique ne dépend pas que de E, mais de $\mathcal{P}(E)$, autrement dit à un même ensemble correspond une multiplicité d'espaces topologiques.*

Exemple 1.2. *Un ensemble à deux éléments $E = \{1, 2\}$ peut être muni de quatre topologies différentes données par la liste suivante :*

$\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, E\}$, $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, E, \{1\}\}$, $\mathcal{T}_3 = \{\emptyset, E, \{2\}\}$, $\mathcal{T}_4 = \{\emptyset, E, \{1\}, \{2\}\}$.

1.3 Notion généraux

1.3.1 Ouvert

Définition 1.3. *Soit* $(E, \mathcal{T})$ *un espace topologique et* $\Omega \subset E$*. On dit que* Ω *est un ouvert de* $(E, \mathcal{T})$ *si seulement si il est appartient à* $\mathcal{T}$*.*

1.3.2 Fermé

Définition 1.4. *Soit* $(E, \mathcal{T})$ *un espace topologique et* $F \subset E$*. On dit que* F *est un fermé de* $(E, \mathcal{T})$ *si et seulement si* $E \setminus F$ *est un ouvert de* $(E, \mathcal{T})$*.*

Remarque 1.2. *Une partie de E peut-être ni ouverte ni fermée (par exemple* $]0, 1]$ *dans* $\mathbb{R}$*). De même un partie de* E *peut-être ouverte et fermée (par exemple* E *et* $\emptyset$*).*

Proposition 1.1. *[3] Soit* $(E, \mathcal{T})$ *un espace topologique alors :*

1) Une intersection quelconque de fermés est un fermé.

2) Une union finie de fermés est un fermé.

Remarque 1.3.

On peut difinir un espace topologique du $\mathcal{T}$ *par les ensembles fermé .*

1.3.3 Voisinage

Définition 1.5. *Soient* $(E, \mathcal{T})$ *un espace topologique,* $V \subset E$ *et* $a \in E$*. On dit que* V *est un voisinage de* a *si il existe un ouvert* Ω *de* E *tel que* a *soit élément de* Ω *et* Ω *soit inclus dans* V*.*

Notation : On notera $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble de tous les voisinages de a.

Remarque 1.4. *Si* $V \in \mathcal{T}$ *et si* $a \in V$ *alors* $V \in \mathcal{V}(a)$*.*

Proposition 1.2. *Un sous ensemble* Ω *de* E *est ouvert si et seulement si il est voisinage de chacun de ses points.*

Démonstration. D'après la remarque précédente, le sens direct est évident. Montrons la réciproque. Supposons donc que Ω est un ensemble voisinage de chacun de ses points. Pour tout a dans Ω, on peut alors trouver un sous ensemble Ω_a de Ω tel que Ω_a soit ouvert et a élément de Ω_a. On peut même écrire :

$$\Omega = \cup_{a\in\Omega}\Omega_a.$$

Ω est donc réunion quelconque d'ouverts. Ceci implique évidemment que Ω est ouvert. □

Proposition 1.3. *[3] Les voisinages d'un point vérifient les propriétés suivante :*

1) $\forall V \in \mathcal{V}(a), a \in V$.

2) $\forall (V, W) \in (\mathcal{V}(a))^2, V \cap W \in \mathcal{V}(a)$.

3) $\forall V \in \mathcal{V}(a), \exists W \in \mathcal{V}(a), b \in W \Rightarrow W \in \mathcal{V}(b)$.

1.3.4 Adhérence, Intérieur, Frontière

1.3.4.1 Adhérence

Définition 1.6. *Soit* $(E, \mathcal{T})$ *un espace topologique et* $A \subset E$.
Un point $a \in E$ *est dit adhérent à* A *si et seulement si :*

$$\forall V \in \mathcal{V}(a) : V \cap A \neq \emptyset.$$

On note $\overline{A}$ *l'ensemble des point adhérents à* A.

Proposition 1.4. *[3] Soit* A *et* B *deux ensemble de* E. *Alors*

1) A *fermé* $\Leftrightarrow A = \overline{A}$.

2) $A \subset \overline{A}$.

3) $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.

4) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

5) $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.

6) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

1.3.4.2 Intérieur

Définition 1.7. *Soit* $(E, \mathcal{T})$ *un espace topologique et* $A \subset E$.
Un point $a \in A$ *est dit intérieur à* A *si et seulement si* A *est voisinage de* a. *On note* $\mathring{A}$ *l'ensemble des points intérieurs à* A.

Proposition 1.5. *[3] Soit* A *et* B *deux ensemble de* E. *Alors*

1) A *ouvert* $\Leftrightarrow A = \mathring{A}$.
2) $\mathring{A} \subset A$.
3) $A \subset B \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$.
4) $(A \cap B)^{\circ} \subset \mathring{A} \cap \mathring{B}$.
5) $(A \cup B)^{\circ} = \mathring{A} \cup \mathring{B}$.
6) $(\mathring{A})^{\circ} = \mathring{A}$.
7) $C_E\overline{A} = (C_E A)^{\circ}$.
8) $\overline{C_E A} = C_E\mathring{A}$.

1.3.4.3 Frontière

Définition 1.8. *Soit* $(E, \mathcal{T})$ *un espace topologique et* $A \subset E$.
Un point $a \in E$ *est un point frontière de* A *si tout voisinage de* a *rencontre à la fois* A *et son complémentaire* $E \setminus A$. *L'ensemble des points frontières de* A *s'appelle la frontière de* A *et se note* $F_r A$.

1.3.5 Application continue

Définition 1.9. *Soient* E *et* F *deux espaces topologiques,* $f : E \longrightarrow F$ *une fonction et* $a \in E$.
On dit que f *est continue en* a *si, pour tout voisinage* V *de* $f(a)$, *il existe un voisinage* U *de* a, *tel que* $f(U) \subset V$. *Cette définition est équivalente à : pour tout voisinage* V *de* $f(a)$, $f^{-1}(V)$ *est un voisinage de* a.
On dit que f *est continue sur* E *si elle est continue en chaque point de* E.

Remarque 1.5. *Cette définition de la continuité est compatible avec celle déjà donnée dans les espaces métriques. Par ailleurs, la continuité est stable par composition.*

Proposition 1.6. *[3] Soient E et F deux espaces topologiques, et $f : E \longrightarrow F$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) Pour tout ouvert V de F, $f^{-1}(V)$ est un ouvert de E.

2) Pour tout fermé V de F, $f^{-1}(V)$ est un fermé de E.

3) Pour tout $a \in E$, f est continue en a.

4) Pour tout $A \subset E$, on a $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

5) f est continue sur E.

1.4 Espaces métriques

1.4.1 Distance

Définition 1.10. *Soit E un ensemble non vide. On appelle «distance sur E» toute application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}_+$ qui vérifier :*

- *Séparation : $\forall (x, y) \in E^2$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;*
- *Symétrie : $\forall (x, y) \in E^2$, $d(x, y) = d(y, x)$;*
- *Inégalité triangulaire : $\forall (x, y, z) \in E^3$, $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$;*

1.4.2 Espace métrique

Définition 1.11. *On appelle espace métrique un couple (E, d) où E est un ensemble non vide et d une distance sur E.*

Remarque 1.6.

- *Interprétation géométrique de l'inégalité triangulaire : dans un triangle, la longueur d'un côté est inférieure ou égale à la somme des longueurs des deux autres côtés.*
- *A partir de l'inégalité triangulaire, on peut montrer une autre inégalité parfois appelée « deuxième inégalité triangulaire » :*

$$\forall (x, y, z) \in E^3, |d(x, y) - d(y, z)| \leqslant d(x, z)$$

Exemple 1.3. *L'exemple fondamental d'un espace métrique est l'espace* $\mathbb{R}$ *avec la distance définie par* $d(x,y) = |x-y|$. *Cette distance s'appelle distance usuelle sur* $\mathbb{R}$.
Il est facile de vérifie que d *est une distance. En Effet :*
On a pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$ *:*

1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow |x-y| = 0 \Leftrightarrow x = y$.

2) $d(x,y) = |x-y| = |y-x| = d(y,x)$.

3) $d(x,y) = |x-y| = |x-z+z-y| \leq |x-z| + |z-y| = d(x,z) + d(z,y)$.

Deux propriétés importantes de la distance sont données par la proposition suivante :

Proposition 1.7. *Soit* (E,d) *un espace métrique. Alors la distance* d *satisfait les deux propriétés suivantes :*

a) La distance d *est positive :*

$$d(x,y) \geq 0, \forall x, y \in E.$$

b) Pour tout $x, y, z \in E$:

$$|d(x,y) - d(y,z)| \leq d(x,z).$$

Démonstration.
a) Soient $x, y \in E$. En utilisant successivement les propriétés 2).3), on obtient :

$$d(x,y) \leq d(x,y) + d(y,x) = 2d(x,y),$$

d'où :

$$d(x,y) \geq 0.$$

b) Soient $x, y, z \in E$. On a d'après 3) :

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y).$$

D'après 2). On obtient :

$$d(x,y) - d(y,z) \leq d(x,z).$$

En changeant le rôle entre x et z et par 2), on a :

$$d(y,z) - d(x,y) \leq d(x,z).$$

On en déduit que :

$$|d(x,y) - d(y,z)| \leq d(x,z).$$

Remarque 1.7.

1) *Le nombre positif $d(x,y)$ s'appelle distance entre x et y ou distance de x à y.*

2) *Pour vérifie que d est une distance, en générale seul, la propriété 3) qui pose une difficulté (parfois grande) contrairement aux propriétés 1) et 2) qui sont faciles à vérifier.*

□

Exemple 1.4. *Soit $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application définie par*

$$\forall x, y \in E : d(x,y) = \begin{cases} 1, & si \ x \neq y \\ \\ 0, & si \ x = y \end{cases}$$

d est une distance sur E, appelée distance discrète.

Exemple 1.5. *La distance notée d_1,est défini sur $\mathbb{R}^n$ par :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|,$$

où $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Démonstration.

1. On a :

$$\begin{aligned} d_1(x,y) = 0 &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = 0 \\ &\Leftrightarrow |x_i - y_i| = 0, \forall i = 1, ..., n \\ &\Leftrightarrow x_i = y_i, \forall i = 1, ..., n \\ &\Leftrightarrow x = y. \end{aligned}$$

2. Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$. On a :

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^n |y_i - x_i| = d_1(y,x).$$

3. Soient $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ On a :

$$\begin{aligned}
d_1(x,y) &= \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \\
&= \sum_{i=1}^n |x_i - z_i + z_i - y_i| \\
&\leqslant \sum_{i=1}^n (|x_i - z_i| + |z_i - y_i|) \\
&= \sum_{i=1}^n |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^n |z_i - y_i| \\
&= d_1(x,z) + d_1(z,y).
\end{aligned}$$

d_1 est bien une distance sur $\mathbb{R}^n$. □

Exemple 1.6. *On définit sur $\mathbb{R}^n$ la distance usuelle (la distance euclidienne), notée d_2 par :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : d_2(x,y) = \sqrt{(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2)}.$$

Démonstration.

1) On a :

$$\begin{aligned}
d_2(x,y) = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2)} = 0 \\
&\Leftrightarrow |x_i - y_i|^2 = 0, \forall\ i = 1, ..., n \\
&\Leftrightarrow x_i = y_i, \forall\ i = 1, ..., n \\
&\Leftrightarrow x = y.
\end{aligned}$$

2) Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$. On a :

$$d_2(x,y) = \sqrt{(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2)} = \sqrt{(\sum_{i=1}^n |y_i - x_i|^2)} = d_2(y,x).$$

3) Pour montrer l'inégalité triangulaire, on utilise l'inégalité de Minkowski suivant :

Pour tout $a = (a_1, ..., a_n), b = (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\sqrt{(\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^2)} \leq \sqrt{(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)} + \sqrt{(\sum_{i=1}^{n}b_i^2)}$$

On a pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} d_2(x,y) &= \sqrt{(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2)} \\ &= \sqrt{(\sum_{i=1}^{n}|(x_i-z_i)+(z_i-y_i)|^2)} \\ &\leq \sqrt{(\sum_{i=1}^{n}|x_i-z_i|^2)} + \sqrt{(\sum_{i=1}^{n}|z_i-y_i|^2)} \\ &= d_2(x,z)+d_2(z,y). \end{aligned}$$

d_2 est bien une distance sur $\mathbb{R}^n$. □

Exemple 1.7. *La distance notée d_∞, est défini sur $\mathbb{R}^n$ par :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : d_\infty(x,y) = \max_{1\leq i\leq n}|x_i-y_i|.$$

Démonstration.

1) Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$. On a :

$$\begin{aligned} d_\infty(x,y) = 0 &\Leftrightarrow \max_{1\leq i\leq n}|x_i-y_i| = 0 \\ &\Leftrightarrow |x_i-y_i| = 0, \forall\ i = 1, ..., n \\ &\Leftrightarrow x_i = y_i, \forall\ i = 1, ..., n \\ &\Leftrightarrow x = y. \end{aligned}$$

2) Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$. On a :

$$d_\infty(x,y) = \max_{1\leq i\leq n}|x_i-y_i| = \max_{1\leq i\leq n}|y_i-x_i| = d_\infty(y,x).$$

3) Soient $x, y, z \in \mathbb{R}^n$. On a :

$$\begin{aligned} d_\infty(x,y) &= \max_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i| \\ &= \max_{1\leq i\leq n} |x_i - z_i + z_i - y_i| \\ &\leq \max_{1\leq i\leq n} (|x_i - z_i| + |z_i - y_i|) \\ &\leq \max_{1\leq i\leq n} |x_i - z_i| + \max_{1\leq i\leq n} |z_i - y_i| \\ &= d_\infty(x,z) + d_\infty(z,y). \end{aligned}$$

d_∞ est bien une distance sur $\mathbb{R}^n$.

$\square$

1.4.3 Topologie associée à une distance

1.4.3.1 Boule ouverte et fermée

On définit certaines notions mathématiques, en s'inspirant de la géométrie euclidienne du plan et de l'espace.

Définition 1.12. *Soient (E, d) un espace métrique, $a \in E$ et $r > 0$:*

1) La boule ouverte de centre a et de rayon r est l'ensemble :

$$B(a,r) = \{x \in E : d(a,x) < r\}.$$

2) La boule fermé de centre a et de rayon r est l'ensemble :

$$\overline{B}(a,r) = \{x \in E : d(a,x) \leq r\}.$$

3) Sphère de centre a et de rayon r est l'ensemble :

$$S(a,r) = \{x \in E : d(a,x) = r\}.$$

1.4.3.2 Partie bornée d'un espace métrique

Définition 1.13. *Soient (E, d) un espace métrique et A une partie de E.*

On dit que A est une partie bornée de E si elle est contenue dans une boule.

1.4.3.3 Ouvert

Définition 1.14. *Une partie U d'un espace métrique est dite ouverte si, pour tout point a de U, il existe une boule ouverte de centre a et de rayon $r > 0$ contenue dans U. Une partie F de E est dite fermée si son complémentaire est ouvert.*
En d'autre termes, U est ouvert s'il est réunion de boules ouvertes. Il est clair que $\emptyset$ et E sont des parties ouvertes (et fermées) de E.

Théorème 1.1. *Toute boule ouverte de l'espace métrique E est ouverte. Toute boule fermée de l'espace métrique E est fermée.*

Démonstration. Soit y un point de la boule ouverte $B(a, r)$ de centre a et de rayon r. On a $d(a, y) < r$. Si on note $\rho = r - d(a, y) > 0$, on a $B(y, \rho) \subset B(a, r)$: en effet, si $z \in B(y, \rho)$,,

$$d(a, z) \leq d(a, y) + d(y, z) < d(a, y) + \rho = r.$$

Ce qui montre que $z \in B(x, r)$. De même, si y n'appartient pas à la boule fermée $\tilde{B}$ de centre a et de rayon r, on a : $\rho = d(a, y) - r > 0$. Et la boule ouverte $B(y, \rho)$ est disjointe de $\tilde{B}$: en effet, si $z \in B(y, \rho) \cap \tilde{B}$, on doit avoir :

$$d(a, y) \leq d(a, z) + d(z, y) < r + \rho = d(a, y).$$

Ce qui est absurde. Ceci prouve que $E \setminus \tilde{B}$ est ouvert, donc que $\tilde{B}$ est fermé. □

Proposition 1.8. *L'intersection de deux ouverts est un ouvert. La réunion d'une famille quelconque d'ouverts est ouverte. La réunion de deux fermés est fermée. L'intersection d'une famille quelconque de fermés est fermée.*

Démonstration. Soient U et V deux ouverts. Si x est un point de $U \cap V$, il existe $r > 0$ et $r' > 0$ tels que $B(x, r) \subset U$ et $B(x, r') \subset V$. Alors $r'' = min(r, r') > 0$ et $B(x, r'') \subset U \cap V$. Si $(U_i)_i \in I$ est une famille de parties ouvertes de E, si $U = \cup_{i \in I} U_i$ et si $x \in U$, il existe $i \in I$ tel que $x \in U_i$, donc $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U_i$. Alors $B(x, r) \subset U$, ce qui prouve que U est ouvert.
Les propositions analogues concernant les ensembles fermés s'en déduisent par passage au complémentaire. □

1.4.4 Convergence des suites

Rappelons qu'une suite dans un ensemble E est une application de $\mathbb{N}$ dans E.

Définition 1.15. *Soient (E, d) un espace métrique, (u_n) une suite d'éléments de E et $l \in E$. On dit que la suite (u_n) converge vers l si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N} : n > n_0 \implies d(u_n, l) < \varepsilon$$

On écrit alors $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} u_n = l$.

Remarque 1.8. *Une suite (u_n) converge vers la limite l si, aussi petit que soit un voisinage de l, tous les termes de la suite à partir d'un certain rang sont dans ce voisinage. Evidemment, le rang en question augmente en général, quand on réduit le voisinage.*

1.4.5 Suite de Cauchy

Définition 1.16. *Soient (E, d) un espace métrique et (u_n) une suite d'éléments de E. On dit que la suite (u_n) est une suite de Cauchy si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2 : m \geq n \geq N \implies d(u_m, u_n) < \varepsilon.$$

Cette définition dit simplement qu'aussi petit que soit ε, les terme de la suite ont, à partir d'un certain rang, des distances mutuelles plus petites que ε.

Proposition 1.9. *[3] Soient (E, d) un espace métrique et (u_n) une suite d'éléments de E. Si (u_n) converge alors (u_n) est une suite de Cauchy.*

Proposition 1.10. *Toute suite de Cauchy est bornée.*

Démonstration. Soit (u_n) une suite de Cauchy. Choisissons $\varepsilon = 1$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, m \geq n \geq N : d(u_n, u_m) < 1.$$

En particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N : d(u_n, u_N) < 1,$$

ce qui montre que la suite est bornée. $\square$

Proposition 1.11. *[3] Toute suite de Cauchy ayant une valeur d'adhérence converge vers cette valeur d'adhérence.*

1.4.6 Suites équivalentes de Cauchy

Définition 1.17. *Les suites* (u_n) *et* (v_n) *dans un espace métrique* (E, d) *sont dites équivalentes de Cauchy si elles sont cauchy et* $\lim\limits_{n\to\infty} d(u_n, v_n) = 0$.

1.4.7 Espace métrique complet

Définition 1.18. *On dit qu'un espace métrique est complet si toute suite de Cauchy converge de ce espace dans cet espace.*

Remarque 1.9. *Dans un espace métrique complet, la définition des suites de Cauchy est donc un critère de convergence. On remarquera que ce critère ne fait pas intervenir la limite de la suite, et c'est là toute sa force. Il permet de prouver qu'une suite est convergente sans en connaitre, ni même en évoquer la limite.*

1.4.8 Continuité d'un espace métrique

Définition 1.19. *Soient* (E, d) *et* (F, d') *deux espaces métriques, et* $f : (E, d) \to (F, d')$. *On dit que* f *est continue au point* a *de* E *si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f : d(x, a) < \delta \implies d'(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Théorème 1.2. *Si* E *et* F *sont des espaces métriques, si* f *est une application de* E *dans* F *et* a *un point de* E, f *est continue en* a *si et seulement si toute suite* (u_n) *qui converge vers* a *une image par* f *qui converge vers* $f(a)$.

Démonstration. Si (u_n) converge vers a et si f est continue en a, il existe pour tout voisinage W de $f(a)$ un voisinage V de a tel que $f(V) \subset W$, donc un entier N tel que $u_n \in V$ pour tout $n > N$. Alors, pour tout $n > N$, $f(u_n) \in W$, c'est-à-dire que la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$. Inversement, si f est discontinue en a. il existe un voisinage W de $f(a)$ tel que $U = f^{-1}(W)$ ne soit pas un voisinage de a. Pour tout entier n, la boule de centre a et de rayon 2^{-n} n'est pas incluse dans U. Puisque $d(a, u_n) < 2^{-n}$, la suite (u_n) converge vers a, mais la suite $(f(u_n))$ dont aucun terme n'appartient à W ne converge pas vers $f(a)$. $\square$

CHAPITRE

2

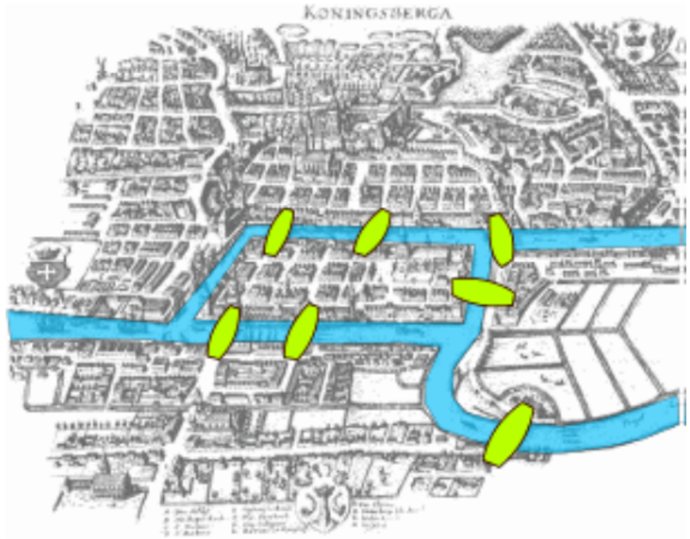
THÉORIE DES GRAPHES

2.1 Historique

L'histoire de la théorie des graphes débute peut-être avec les travaux d'Euler au $XVIII^e$ siècle et trouve son origine dans l'étude de certains problèmes, tels que celui des ponts de Königsberg (Les habitants de Königsberg se demandaient s'il était possible, en partant d'un quartier quelconque de la ville, de traverser tous les ponts sans passer deux fois par le même et de revenir à leur point de départ), la marche du cavalier sur l'échiquier ou le problème de coloriage de cartes. La théorie des graphes s'est alors développée dans diverses disciplines telles que la chimie, la biologie, les sciences sociales. Depuis le début du XX^e siècle, elle constitue une branche à part entière des mathématiques, grâce aux travaux de König, Menger, Cayley puis de Berge et d'Erdös.

2.2 Problème des sept ponts de konigsberg

Le problème des sept ponts de konigsberg est connu pour être à l'origine de la topologie et de la théorie des graphes. Résolu par Leonhard Euler en 1735, ce problème mathématique se présente de la facon suivante :
La ville de Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad) est construite autour de deux îles situées sur le Pregel et reliées entre elles par un pont. Six autres ponts relient les rives de la rivière à l'une ou l'autre des deux îles, comme représentés sur le plan ci-dessus. Le problème consiste à déterminer s'il existe ou non une promenade dans les rues de Königsberg permettant, à partir d'un point de départ au choix, de passer une et une seule fois par chaque pont, et de revenir à son point de départ, étant entendu qu'on ne peut traverser le Pregel qu'en passant sur les ponts.



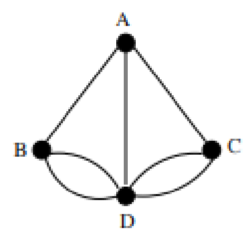
2.2.1 Résolution du problème

Une telle promenade n'existe pas, et c'est Euler qui donna la solution de ce problème en caractérisant les graphes que l'on appelle aujourd'hui « eulériens » en référence à l'illustre mathématicien, à l'aide d'un théorème dont la démonstration rigoureuse ne fut en fait publiée qu'en 1873, par Carl Hierholzer.

Ce problème n'a sous cette forme non généralisée qu'un intérêt historique, car pour ce cas, il est assez intuitif de démontrer que la promenade demandée n'existe pas. Pour voir cela, il suffit d'associer un graphe à la ville comme dans la figure ci-dessus et de supposer que la promenade recherchée existe. On peut alors, à partir de la promenade, ordonner les sept arêtes du graphe de façon que deux arêtes consécutives par rapport à notre ordre soient adjacentes dans le graphe (en considérant que la dernière et la première arête sont consécutives, puisqu'il-y- a retour au point de départ).

Ainsi tout sommet du graphe est-il nécessairement incident à un nombre pair d'arêtes (puisque s'il est incident à une arête il est aussi incident à l'arête précédente ou qui lui succède dans l'ordre). Mais le graphe a des sommets qui sont incidents à trois arêtes, d'où l'impossibilité.

Notons que même si on renonce à exiger le retour au point de départ, une promenade traversant une et une seule fois chaque pont n'existe pas. Elle existerait si au plus deux sommets du graphe, correspondant aux points à choisir respectivement comme départ et arrivée, étaient incidents à un nombre impair d'arêtes, or les sommets du graphe des ponts de Königsberg sont tous les quatre dans ce cas ; la promenade est donc impossible. Il suffirait cependant de supprimer ou de rajouter un pont quelconque pour que le graphe modifié permette des promenades tous ponts sans retour (seuls deux sommets restant d'incidence impaire). Et ce sont au moins deux ponts, bien choisis, qu'il faudrait ajouter ou retirer pour permettre la promenade avec retour initialement cherchée.

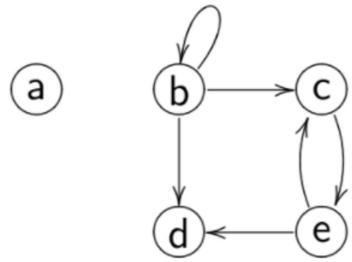


2.3 Définition de graphe

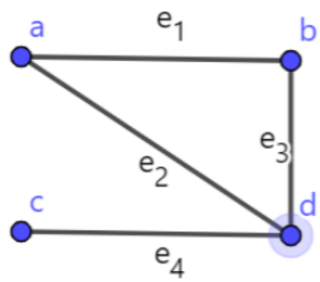
Définition 2.1. *Soient V un ensemble (fini ou infini) et E une partie de $V \times V$ (i.e ;une relation sur V). Le graphe $G = (V, E)$ est la donnée du couple (V, E). Les éléments de V sont appelés les sommets ou noueds de G. Les éléments de E sont appelés les arcs ou arêtes de G. Si V est fini, on parlera de graphe fini.*
Un graph peut être orienté ou non :
Dans un graphe orienté. Les couples $(v_i, v_j) \in V$ sont orientés, c'est-à-dire que (v_i, v_j) est un couple ordonné, où v_i est le sommet initial, et v_j le sommet terminal. Un couple (v_i, v_j) est appelé un arc, et est représenté graphiquement par $v_i \longrightarrow v_j$.
On dit que G est un graphe non orienté si :

$$\forall\ v_1, v_2 \in V : (v_1, v_2) \in E \Rightarrow (v_2, v_1) \in E.$$

Exemple 2.1. *Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté défini par :*
$V = \{a, b, c, d, e\},\ E = \{(b, b), (b, c), (b, d), (c, e), (e, d)\}.$



Exemple 2.2. *Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté défini par :*
$V = \{a, b, c, d\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

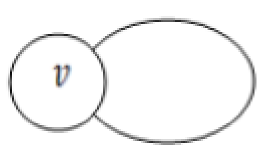


2.4 Les éléments distinctif de graphe

Soit $G = (V, E)$ un graphe.

2.4.1 Boucle

Définition 2.2. *Une boucle est un arc ou une arête reliant un sommet à lui-même.*



2.4.2 Chemain

Définition 2.3. *Un chemin dans un graphe orienté est une suite de sommets et d'arcs telle que*

1) la suite débute par un sommet et se termine par un sommet ;

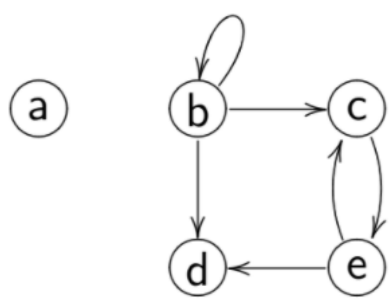
2) les sommets et les arcs alternent ;

3) chaque arc est précédé par son sommet origine et est suivi par son sommet cible ;

4) aucun arc n'apparaît plus d'une fois.

Un chemin est un cycle s'il contient au moins un arc et que le premier et le dernier sommet du chemin sont identiques.
La longueur d'un chemin est le nombre d'arcs de ce chemin.
On note :
$[v]_G^N := \{u \in X : \textit{il existe un chemain de longueur } N \textit{ à partir de } v \textit{ à } u\ \}$, $[v]_G = \cup_{N\in\mathbb{N}}[v]_G^N$.

Exemple 2.3. *Soit* $G = (V, E)$ *un graphe orienté défini par :*
$V = \{a, b, c, d, e\}$, $E = \{(b, b), (b, c), (b, d), (e, c), (e, d)\}$.



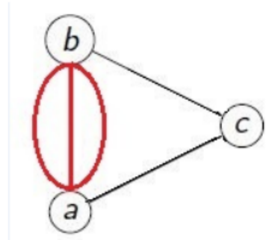
(c, e, d) *est un chemain de longueur deux.*

(b, c, e, d) *est un chemain de longueur trois.*

2.4.3 Circuit

Définition 2.4. *Un circuit est un chemin dont les sommets de départ et de fin sont les mêmes.*

Exemple 2.4. *Un exemple du circuit :*

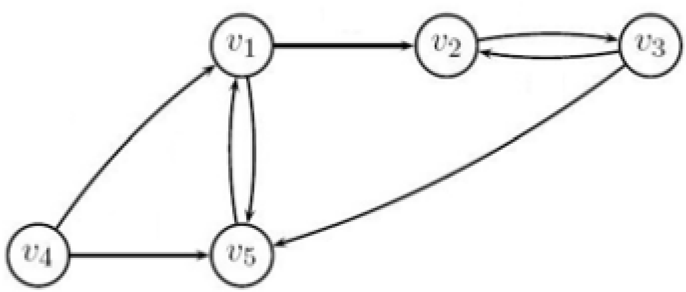


2.4.4 Ordre

Définition 2.5. *L'ordre d'un graphe fini est le nombre de ses sommets.*

Exemple 2.5. *Soit* $G = (V, E)$ *un graphe orienté défini par :*

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_5), (v_2, v_3), (v_3, v_2), (v_3, v_5), (v_4, v_5), (v_4, v_1), (v_5, v_1)\}$.



L'ordre de graphe G *est cinq.*

2.4.5 Degré d'un sommet

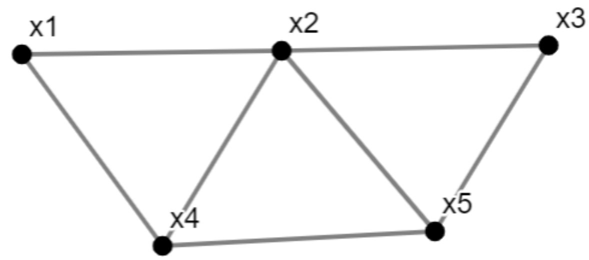
2.4.5.1 Graphe non orienté

Définition 2.6. *Le degré d'un sommet* x *est le nombre d'arcs ayant* x *comme extrémité initiale ou terminale, on dit aussi le nombre d'arcs adjacents à* x*. D'ailleurs, un graphe ayant pour chaque sommet le même degré est dit graphe régulier et un sommet ayant le degré égal à zero est dit sommet isolé.*

Exemple 2.6. *Soit* $G = (V, E)$ *un graph non orienté définie par :*

$V = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$,

$E = \{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_5), (x_4, x_5), (x_1, x_4), (x_2, x_5), (x_2, x_4)\}$.



Degré d'un sommet x_1 *est :* 2.

Degré d'un sommet x_2 *est :* 4.

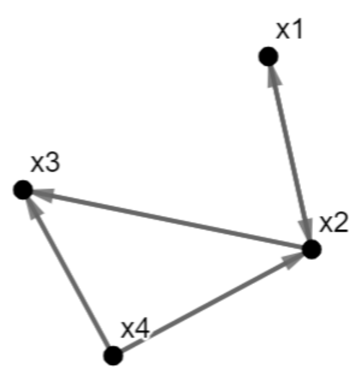
2.4.5.2 Graph orienté

Il existe deux types de degré :

1) Le degré entrant d'un sommet v est le nombre de côtés d'entrée dans le sommet.

2) Le degré sortant d'un sommet v est le nombre de côtés de sortie dans le sommet.

Exemple 2.7. *Soit* $G = (V, E)$ *un graphe orienté definie par :*
$V = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $E = \{(x_1, x_2), (x_2, x_1), (x_2, x_3), (x_4, x_2), (x_4, x_3)\}$.

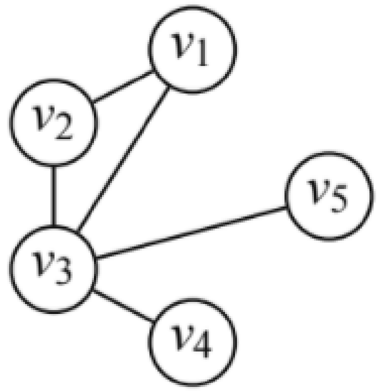


— *Le degré entrant d'un sommet* x_1 *est :* 1.
  Le degré sortant d'un sommet x_1 *est :* 0.
— *Le degré entrant d'un sommet* x_2 *est :* 2.
  Le degré sortant d'un sommet x_2 *est :* 1.

2.4.6 Degré d'un graphe

Le degré d'un graphe est le degré maximum de tous ses sommets.

Exemple 2.8. *Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté definie par :*
$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_1, v_3), (v_3, v_5), (v_3, v_5)\}$.

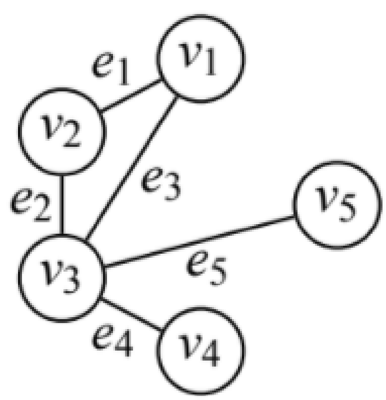


Le degré de graphe G est quatre, à cause du sommet v_3.

2.4.7 Chaînes

Définition 2.7. *Une chaîne dans $G = (V, E)$, est une suite ayant pour éléments alternativement des sommets et des arêtes, commençant et se terminant par un sommet, et telle que chaque arête est encadrée par ses extrémités.*

Exemple 2.9. *Le graphe ci-dessous contient entre autres les chaines* $(v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_5, v_5)$ *et* $(v_4, e_4, v_3, e_2, v_2, e_1, v_1)$.



2.4.8 Cycles

Définition 2.8. *Dans un graphe, un cycle est une chaîne simple dont les extrémités coïncident. On ne rencontre pas deux fois le même sommet, sauf celui choisi comme sommet de départ et d'arrivée.*

Exemple 2.10. *Dans l'exemple présédent, la chaîne* $(v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_1)$ *est un cycle.*

2.5 Quelque types de graphe

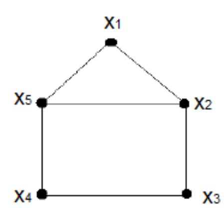
2.5.1 Sous-graphe

Définition 2.9.

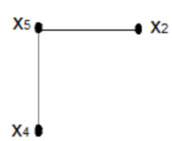
1) *Un graphe* $G' = (V', E')$ *est un sous-graphe de* G *si* $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ *et toutes les aretes de* E' *ont leurs extrémités dans* V'. *On note* $G' \subseteq G$.

2) *Un graphe* $G'' = (V'', E'')$ *est un sous-graphe partiel de* G *si* $V'' = V$, *et* $E'' \subseteq E$.

Exemple 2.11. *Soit* $G = (V, E)$ *un graphe non orienté definie par :*
$V = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $E = \{(x_1, x_5), (x_1, x_2), (x_2, x_5), (x_5, x_4), (x_4, x_3), (x_2, x_3)\}$.



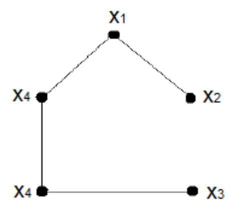
Soit $G' = (V', E')$ *est un graphe défini par :*
$V' = \{x_5, x_2, x_4)\}$, $E' = \{(x_5, x_2), (x_5, x_4)\}$.



G' est un sous-graphe de G.

Soit $G'' = (V, E'')$ un graphe défini par :

$V = \{x_1, x_2, x_5, x_4, x_3\},\ E'' = \{(x_2, x_1), (x_1, x_5), (x_5, x_4), (x_4, x_3)\}.$



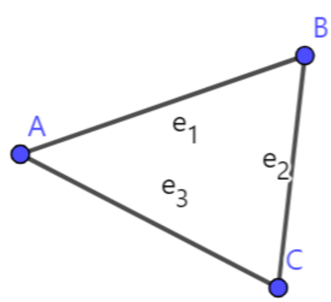
G'' est un sous-graphe partiel de G.

2.5.2 Graphe simple

Définition 2.10. *Un graphe est dit simple, s'il ne contient pas de boucle et s'il n'y a pas plus d'une arête reliant deux mêmes sommets.*

Exemple 2.12. *Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté definie par :*

$V = \{A, B, C\},\ E = \{e_1, e_2, e_3\}.$



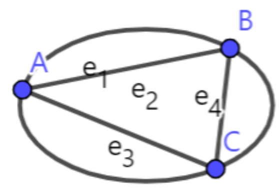
G est un graphe simple.

2.5.3 Graphe multiple

Définition 2.11. *Un graphe multiple est un graphe contenant des boucles et/ou plusieurs arêtes reliant les mêmes sommets.*

Exemple 2.13. *Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté definie par :*

$V = \{A, B, C\},\ E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}.$

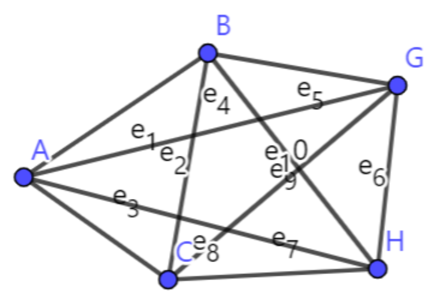


G est un graphe multiple.

2.5.4 Graphe complet

Définition 2.12. *On appelle graphe complet un graphe dont tous les sommets sont adjacents.*

Exemple 2.14.
Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté definie par :
$V = \{A, B, C, G, H\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$.



Le graphe G est complet.

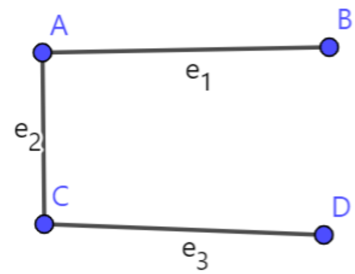
2.5.5 Graphe complémentaire

Définition 2.13. *Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. On peut définir un graphe complémentaire $\overline{G} = (V, \overline{E})$ de G comme suit :*

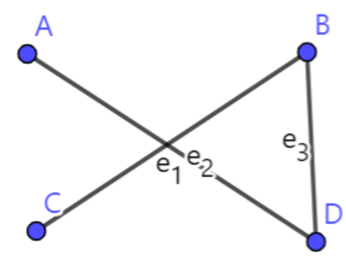
$$e \in \overline{E} \Leftrightarrow e \notin E$$

C'est-à-dire : une arrête (arc) appartient au graphe complémentaire $\overline{G}$ si elle n'appartient pas au graphe initial G.

Exemple 2.15. *On considère le graphe simple G suivant :*



Son graphe complémentaire $\overline{G}$ est :

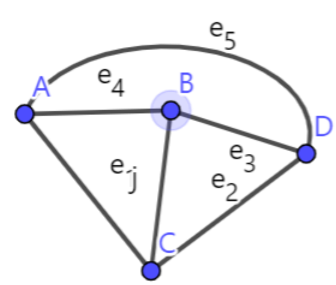


$(\overline{G})$

2.5.6 Graphe planaire

Définition 2.14. *Un graphe planaire est un graphe que l'on peut dessiner sur une surface plate sans que ses arêtes se croisent. Les graphes que l'on ne peut pas dessiner sans croisement sont dits non planaires.*

Exemple 2.16. *Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté défini par :*
$V = \{A, B, C, D\},\ E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$.



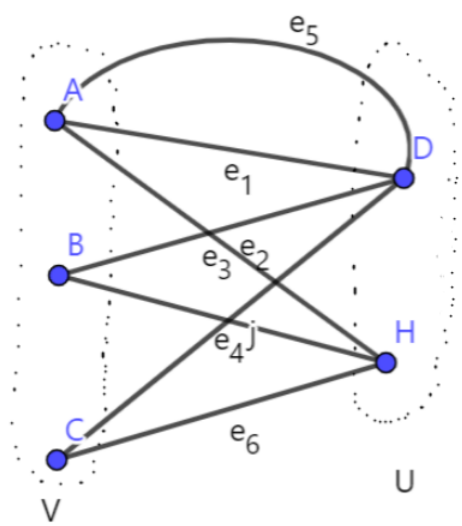
(G)

Le graphe G est planaire.

2.5.7 Graphe biparti

Définition 2.15. *Un graphe $G = (V, E)$ est biparti si ses sommets peuvent être divisés en deux ensembles V et U, de sorte que toutes les arêtes du graphe relient un sommet dans V à un sommet dans U.*
Si G est biparti, il est habituellement noté par $G = (V, U, E)$.

Exemple 2.17. *Soit un graphe $G = (V, U, E)$ defini par :*
$V = \{A, B, C\}$, $U = \{D, H\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, j\}$.



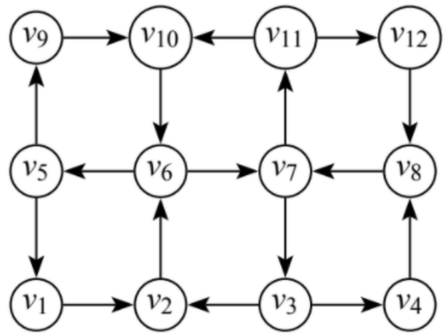
2.5.8 Graphe connexe

Définition 2.16. *Un graphe connexe est un graphe dans lequel chaque paire de sommets est reliée par une chaîne. Un graphe qui n'est pas connexe est dit non connexe, et se décompose en compo-santes connexes.*

2.5.9 Graphe fortement connexe

Définition 2.17. *Un graphe est fortement connexe, si toute paire ordonnée (a, b) de sommets distincts du graphe est reliée par au moins un chemin. En d'autres termes, tout sommet est atteignable depuis tous les autres sommets par au moins un chemin.*

Exemple 2.18. *Le graphe ci-dessous fortement connexe :*



2.5.10 Graphe faiblement connexe

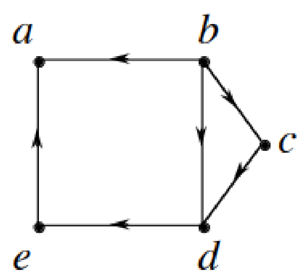
Définition 2.18. *Un graphe $G = (V, E)$ est faiblement connexe si $\tilde{G} = (V, \tilde{E})$ est connexe, de sorte que :*

$$\tilde{E} = E \cup E^{-1},$$

où :

$$E^{-1} = \{(u, v) : (v, u) \in E\}.$$

Exemple 2.19. *Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté défini par :*
$V = \{a, b, c, d, e\},\ E = \{(b, a), (e, a), (d, e), (b, d), (b, c), (c, d)\}.$



G n'est pas fortement connexe, car par exemple, il n'existe pas de chemain orienté de a vers b.
Il claire que G est faiblement connexe.

CHAPITRE

3

THÉORÈMES DU POINT FIXE

Dans ce chapitre, supposons que (X, d) est un espace métrique complet et $G = (V, E)$ est un graphe orienté non-multiple tel que $V = X$ et $\Delta = \{(x, x), x \in X\} \subset E$.

3.1 Concepts de base

Définition 3.1. *Soit $f : X \to X$ une application. On dit que $x \in X$ est un point fixe de f si $f(x) = x$.*
On note $Fix(f)$ l'ensemble des points fixes de f.

Définition 3.2. *On dit qu'une application $f : X \to X$ est une opérateur de Picard (OP) si f admet un point fixe unique $x_\star$ et $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x) = x_\star, \ \forall \ x \in X$.*

Définition 3.3. *On dit qu'une application $f : X \to X$ est une opérateur faiblement Picard (OFP) si pour tout $x \in X$, $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x)$ existe (il peut dépendre de x) et est un point fixe de f.*

Définition 3.4. *Soit (X, d) un espace métrique muni d'un graphe G. On dit que le triple (X, d, G) satisfait la propriété (P) si :*

$$\text{pour toute } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ dans } X, \text{ si } x_n \to x \text{ et } (x_n, x_{n+1}) \in E \text{ pour } n \in \mathbb{N},$$
$$\text{alors il existe une sous-suite } (x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ avec } (x_{k_n}, x) \in E \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

Définition 3.5. *On dit qu'une application $f : X \longrightarrow X$ est une G-contraction de Banach ou G-contraction si :*

(i) $\forall x, y \in X((x, y) \in E \Rightarrow (f(x), f(y)) \in E)$,

(ii) $\exists \ \alpha \in \,]0, 1[, \ \forall \ x, y \in X \ ((x, y) \in E \Rightarrow d(f(x), f(y)) \leq \alpha \ d(x, y))$.

Exemple 3.1. *Toute application constante $f : X \longrightarrow X$ est une G-contraction car E contient toutes les boucles.*

Maintenant, nous discutons de certains types de continuité.

Définition 3.6. *On dit qu'une application $f : X \longrightarrow X$ est orbitalement continue si pour tout $x, y \in X$ et toute suite $(k_n)_{n\in N}$ d'entiers positifs,*

$$\lim_{n\to\infty} f^{k_n}(x) = y \implies \lim_{n\to\infty} f(f^{k_n}(x)) = f(y).$$

Définition 3.7. *On dit qu'une application $f : X \longrightarrow X$ est G-continue si on donne $x \in X$ et une suite $(x_n)_{n\in N}$,*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x,\ (x_n, x_{n+1}) \in E,\ \forall\ n \in \mathbb{N} \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x).$$

Définition 3.8. *On dit qu'une application $f : X \longrightarrow X$ est orbitalement G-continue si pour tout $x, y \in X$ et toute suite $(k_n)_{n\in N}$ d'entiers positifs,*

$$\lim_{n\to\infty} f^{k_n}(x) = y \text{ et } (f^{k_n}(x), f^{k_{n+1}}(x)) \in E,\quad \forall\ n \in \mathbb{N} \implies \lim_{n\to\infty} f(f^{k_n}(x)) = f(y).$$

Remarque 3.1. *Il est clair que :*

1. *continuité $\implies$ continuité orbitale $\implies$ G-continuité orbitale ;*
2. *continuité $\implies$ G-continuité $\implies$ G-continuité orbitale.*

Proposition 3.1. *Soit $f : X \longrightarrow X$ une application. Si f est G-contraction, alors f est une $\tilde{G}$-contraction.*

Démonstration. D'après la définition de $\tilde{G}$ et la symétrie de la distance d. □

3.2 Principe de contraction sur un espace métrique complet muni d'un graphe

Théorème 3.1. *Soit (X, d) un espace métrique muni d'un graphe G et $f : X \to X$ une application G-contraction. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) G est faiblement connexe ;

(ii) Pour tout $x, y \in X$, les suites $(f^n(x))_{n\in N}$ et $(f^n(y))_{n\in N}$ sont équivalentes de Cauchy ;

(iii) $card(Fix(f)) \leq 1$.

La démonstration de ce théorème est basée sur le lemme suivant :

Lemme 3.1. *Soit (X, d) un espace métrique muni d'un graphe G et $f : X \longrightarrow X$ une application G-contraction. Alors, pour tout $x \in X$ et $y \in [x]_{\tilde{G}}$, il existe $r(x, y) \geq 0$ tel que :*

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq \alpha^n r(x,y),\ \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Démonstration. Soit $x \in X$ et $y \in [x]_{\tilde{G}}$. Alors il existe un chemin $(x_i)_{i=0}^N$ dans $\tilde{G}$ de x à y, c'est-à-dire, $x_0 = x$, $x_N = y$ et $(x_{i-1}, x_i) \in \tilde{E}$ pour $i = 1, ..., N$.

D'après la proposition 3.1, f est un $\tilde{G}$-contraction. Alors :

$$(f^n(x_{i-1}), f^n(x_i)) \in \tilde{E}, d(f^n(x_{i-1}), f^n(x_i)) \leq \alpha^n d(x_{i-1}, x_i),\quad \forall\ n \in \mathbb{N},\ 1 \leq i \leq N.$$

Par recurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $i = 1, ..., N$,

$$\begin{aligned} d(f^n(x_{i-1}), f^n(x_i)) &\leq \alpha d(f^n(x_{i-1}), f^n(x_i)) \\ &\leq \alpha^2 d(f^{n-1}(x_{i-1}), f^{n-1}(x_i)) \\ &\vdots \\ &\leq \alpha^n d(x_{i-1}, x_i). \end{aligned}$$

D'après l'inégalité triangulaire, on obtient :

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq \sum_{i=1}^N d(f^n(x_{i-1}), f^n(x_i)) \leq \alpha^n \sum_{i=1}^N d(x_{i-1}, x_i), \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Il suffit de prendre $r(x,y) := \sum_{i=1}^N d(x_{i-1}, x_i)$. □

Démenstration du théorème 3.1. Soit f une application G-contraction.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) : Supposons que G est faiblement connexe et $x, y \in X$. Comme G est faiblement connexe, $[x]_{\tilde{G}} = X$, alors $f(x) \in [x]_{\tilde{G}}$. D'après le lemma 3.1, il existe $r(x, f(x)) \geq 0$ tel que

$$d(f^n(x), f^{n+1}(x)) \leq \alpha^n r(x, f(x)),\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

En faisant la somme, on trouve que :

$$\textstyle\sum_{n=0}^\infty d(f^n(x), f^{n+1}(x)) \leq r(x, f(x)) \sum_{n=0}^\infty \alpha^n,$$

comme $\alpha \in]0,1[$, alors :

$$\textstyle\sum_{n=0}^\infty d(f^n(x), f^{n+1}(x)) < \infty,$$

donc $(f^n(x))_{n\in N}$ est un suite de Cauchy. De la même manière on obtient que $(f^n(y)_{n\in\mathbb{N}})$ est une suite de Cauchy.

Comme $y \in [x]_{\tilde{G}}$, alors d'après le lemme 3.1, il existe $r(x,y) \geq 0$ tel que

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq \alpha^n r(x,y), \ \forall \ n \in \mathbb{N},$$

En prenant la limite, on obtient :

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) \leq \lim_{n\to\infty} \ \alpha^n r(x,y) = 0,$$

alors :

$$\lim_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0.$$

Par concéquent, $(f^n(x))_{n\in N}$ et $(f^n(y))_{n\in N}$ sont équivalents de Cauchy.

(ii) $\implies$ (iii) : Soit $x, y \in Fix(f)$. Par (ii), $(f^n(x))_{n\in N}$ et $(f^n(y))_{n\in N}$ sont équivalents de Cauchy, c'est-à-dire

$$\lim_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = d(x,y) = 0,$$

ce qui implique que $x = y$.

(iii) $\implies$ (i) : Par l'absurde, supposons que G n'est pas faiblement connexe. Soit $x_0 \in X$. Alors les deux ensembles $[x_0]_{\tilde{G}}$ et $X\setminus [x_0]_{\tilde{G}}$ sont non vides. Soit $y_0 \in X\setminus [x_0]_{\tilde{G}}$, on va définir $f : X \to X$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x_0, & x \in [x_0]_{\tilde{G}} \\ \\ y_0, & x \in X \setminus [x_0]_{\tilde{G}} \end{cases}$$

Il est clair que, $Fix(f) = \{x_0, y_0\}$. On va montrer que f est une G-contraction.

Soit $(x,y) \in E$, on a :

$$[x]_{\tilde{G}} = [y]_{\tilde{G}},$$

donc

$$x, y \in [x_0]_{\tilde{G}} \text{ ou } x, y \in X \setminus [x_0]_{\tilde{G}},$$

ce qui implique que :

$$f(x) = f(y).$$

Comme $\Delta \subset E$, alors :

$$(f(x), f(y)) \in E \text{ et } d(f(x), f(y)) = 0 \leq \alpha d(x, y), \alpha \in]0, 1[,$$

c'est-à-dire f est une G-contraction. D'après (iii), $card(Fix(f)) \leq 1$, mais $card(Fix(f)) = 2$, ce ci est une contradiction. □

Dans la suite, nous avons besoin de la proposition suivante :

Proposition 3.2. *[6] Soit (X, d) un espace métrique complet muni d'un graphe G et $f : X \to X$ une G-contraction. Supposons qu'il existe $x_0 \in X$ tel que $f(x_0) \in [x_0]_{\tilde{G}}$. Si $x, y \in [x_0]_{\tilde{G}}$, alors $(f(x_n))$ et $(f(y_n))$ sont équivalentes de Cauchy.*

Théorème 3.2. *Soit (X, d) un espace métrique complet muni d'un graphe G et $f : X \to X$ une G-contraction. Supposons que le triple (X, d, G) satisfait la propriété (P).*
Posons $X_f := \{x \in X : (x, f(x)) \in E\}$. Alors les assertion suivantes sont vérifiées :

1) *card $(Fix(f)) = card\{[x]_{\tilde{G}} : x \in X_f\}$.*
2) *$Fix(f) \neq \emptyset$ si est seulement si $X_f \neq \emptyset$.*
3) *f admet un point fixe unique si est seulement si il existe $x_0 \in X_f$ tel que $X_f \subseteq [x_0]_{\tilde{G}}$.*
4) *Pour tout $x \in X_f$, $f|_{[x]_{\tilde{G}}}$ est OP.*
5) *Si $X_f \neq \emptyset$ et G est faiblement connexe, alors f est OP.*
6) *Si $X' := \{[x]_{\tilde{G}} : x \in X_f\}$, alors $f|_{X'}$ est OFP.*
7) *Si $f \subseteq E$, alors f est OFP.*

Démonstration. Nous commençons par les points 4) et 5). Soit $x \in X_f$. C'est-à-dire $(x, f(x)) \in E$ qui implique que $f(x) \in [x]_{\tilde{G}}$. D'après la proposition 3.2, si $y \in [x]_{\tilde{G}}$, alors $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f^n(y))_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes de Cauchy. Comme (X, d) est un espace métrique complet, alors il existe $x_* \in X$ tel que $(f^n(x))_{n\in N}$ converge vers x_*. Il est Clair que $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(y) = x_*$ car $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f^n(y))_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes de Cauchy. Comme $(x, f(x)) \in E$ et f est une G-contraction (condition (i)), alors :

$$(f^n(x), f^{n+1}(x)) \in E, \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

D'après la propriété (P), il existe une sous-suite $(f^{k_n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ de $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $(f^{k_n}(x), x_*) \in E$ pour $n \in \mathbb{N}$. On déduit $(x, f(x), f^2(x), ..., f^{k_1}(x), x_\star)$ est un chemin dans G (donc aussi dans $\tilde{G}$) de x à $x_\star$, c'est-à-dire $x_\star \in [x]_{\tilde{G}}$. Comme $(f^{k_n}(x), x_\star) \in E$ et f est une G-contraction (condition (ii)), alors :

$$d(f^{k_{n+1}}(x), f(x_\star)) \leq \alpha d(f^{k_n}(x), x_\star), \forall\ n \in \mathbb{N},$$

Par passage à la limite on obtient que $d(x_\star, f(x_\star)) \leq \alpha d(x_\star, x_\star) = 0$, qui implique que $x_\star = f(x_\star)$. Par conséquent, $f|_{[x]_{\tilde{G}}}$ est OP. De plus, si G est faiblement connexe, alors $[x]_{\tilde{G}} = X$, donc f est OP.
6) est une conséquence facile de 4).
Pour montrer 7), on remarque que $f \subseteq E$ implique $X_f = X$. Cela donne $X' = X$, donc d'après 6), f est OFP.
Pour montrer 1), on va définir l'application π par :

$$\pi(x) := [x]_{\tilde{G}}, \forall\ x \in Fix(f).$$

Il suffit de montrer que π est une bijection de $Fix(f)$ dans $C := \{[x]_{\tilde{G}} : x \in X_f\}$. Comme $\Delta \subset E$, alors $Fix(f) \subseteq X_f$ qui implique $\pi(Fix(f)) \subseteq C$. D'autre part, si $x \in X_f$, alors d'après 4),

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) \in [x]_{\tilde{G}} \cap Fix(f),$$

ce qui implique

$$\pi(\lim_{n\to\infty} f^n(x)) = [x]_{\tilde{G}}.$$

Alors f est une surjection de $Fix(f)$ dans C. Maintenant, si $x_1, x_2 \in Fix(f)$ tels que $\pi(x_1) = \pi(x_2)$, c'est-à-dire, $[x_1]_{\tilde{G}} = [x_2]_{\tilde{G}}$, alors $x_2 \in [x_1]_{\tilde{G}}$, donc par 4),

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x_2) \in [x_1]_{\tilde{G}} \cap Fix(f) = x_1,$$

comme $f^n(x_2) = x_2$, alors $x_1 = x_2$. Par conséquent, f est injective et la démonstration est terminée.

Enfin, on remarque que 2) et 3) sont des conséquences simples de 1). □

Le résultat suivant donne une autre condition suffisante pour l'existence des points fixes dans le cas où un triplet (X, d, G) ne vérifie pas la propriété (P).

Théorème 3.3. *Soit (X, d) un espace métrique complet muni d'un graphe G et $f : X \to X$ une G-contraction. Supposons que f est orbitalement G-continu. Alors les assertion suivantes sont vérifiées :*

1) $Fix(f) \neq \emptyset$ si est seulement si $X_f \neq \emptyset$.

2) $\forall\ x \in X_f$ et $y \in [x]_{\tilde{G}}$, $(f^n(y))_{n \in N}$ converge vers un point fixe de f et $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(y)$ ne dépend pas de y.

3) Si $X_f \neq \emptyset$ et G est faiblement connexe, alors f est OP.

4) Si $f \subseteq E$, alors f est OFP.

Démonstration. On va commencer par 2). Soit $x \in X$ tel que $(x, f(x)) \in E$ et $y \in [x]_{\tilde{G}}$. D'après la proposition 3.2, $(f^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f^n(y))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers le même point x_*. De plus, $(f^n(x), f^{n+1}(x)) \in E$ pour $n \in \mathbb{N}$. Comme f est orbitalement G-continue, alors $f(f^n(x)) \to f(x_*)$ quand $n \to \infty$. Comme $f(f^n(x)) = f^{n+1}(x) \to x_\star$ quand $n \to \infty$, alors $f(x_\star) = x_\star$.
1) Si $Fix(f) \neq \emptyset$, il existe $x \in Fix(f)$, alors $(x, f(x)) = (x, x) \in E$. (car $\Delta \subset E$) c'est-à-dire $X_f \neq \emptyset$. Si $X_f \neq \emptyset$, alors d'après 2), $Fix(f) \neq \emptyset$.
3) Soit $x_0 \in X_f$. Comme G est faiblement connexe, alors $[x_0]_{\tilde{G}} = X$. D'après 2) f est OP.
4) Si $f \subset E$, alors $X_f = X$. D'après 2) f est OFP. □

En remplaçant la condition "f est orbitalement G-continu" par "f est orbitalement continu", on obtient le résultat suivant :

Théorème 3.4. *Soit (X,d) un espace métrique complet muni d'un graphe G et $f : X \to X$ une G-contraction. Supposons que f est orbitalement continu. Alors les assertion suivantes sont vérifiées :*

1) $Fix(f) \neq \emptyset$ *si est seulement si il existe* $x_0 \in X$ *avec* $f(x_0) \in [x_0]_{\tilde{G}}$.

2) Si $x \in X$ *tel que* $f(x) \in [x]_{\tilde{G}}$*, alors pour tout* $y \in [x]_{\tilde{G}}$, $(f^n(y))_{n \in N}$ *converge vers un point fixe de* f*, et* $\lim\limits_{n \to \infty} f^n(y)$ *ne dépend pas de* y.

3) Si G *est faiblement connexe, alors* f *est OP.*

4) Si $f(x) \in [x]_{\tilde{G}}$ *pour tout* $x \in X$*, alors* f *est OFP.*

Démonstration. On va commencer par 2). Soit $x \in X$ tel que $f(x) \in [x]_{\tilde{G}}$, et $y \in [x]_{\tilde{G}}$. D'après la proposition 3.2, $(f^n(x))_{n \in N}$ et $(f^n(y))_{n \in N}$ convergent vers le même point x_*. Comme f est orbitalement continue, alors $f(f^n(x)) = f^{n+1}(x) \to f(x_*)$ ce qui implique $x_* = f(x_*)$.

1) Si $Fix(f) \neq \phi$, alors il existe $x_0 \in X$ tel que $f(x_0) = x_0$. Comme $\Delta \subset E$, alors $f(x_0) \in [x_0]_{\tilde{G}}$. S'il existe $x_0 \in X$ tel que $f(x_0) \in [x_0]_{\tilde{G}}$, alors d'après 2), $Fix(f) \neq 0$.

3) Si G est faiblement connexe, alors pour tout $x \in X$, $[x]_{\tilde{G}} = X$, en particulier, $f(x) \in [x]_{\tilde{G}}$, d'après 2), on déduit que f est OP.

4)est une conséquence immédiate de 2). □

CONCLUSION

Dieu soit loué, nous le louons et le remercions d'avoir achevé ce travail, et nous espérons avoir récolté les fruits souhaités de cette modeste recherche, à travers laquelle nous avons essayé d'étudier les théories les plus importantes du point fixe dans un espace métrique.

Notre but dans ce mémoire était de détailler les démonstrations de certains résultats qui traitent du sujet afin de les rendre plus claires plus accessibles pour les lecteurs. Pour cela, nous avons commencé par les résultats préliminaires sur la topologie qui sont utilisés dans ce mémoire.

Nous avons présenté ensuite la théorie des graphes pour faciliter la compréhension de ce mémoire.

La dernière partie de ce mémoire étant consacrée à prouver le théorème du point fixe de Banach sur un espace métrique complet muni d'un graphe qui a été introduite par Jachymski [6].

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.R. Alfuraidan, Q.H. Ansari, Fixed Point Theory and Graph Theory. Foundations and Integrative Approaches. Academic Press, 2016.

[2] G. Chartrand, L. Lesniak, and P. Zhang, Graphs and Digraphs. Sixth edition. Textbooks in Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 2016.

[3] A. El Jai, Eléments de topologie et espaces métriques. Presses Universitaires de Perpignan, 2007.

[4] J. Gross, J. Yellen, Graph Theory and its Applications. CRC Press, New York, 1999.

[5] M. Hazi, Espaces Topologiques en général et Espaces Métriques en particulier. Office Des Publications Universitaires, Alger, 1993.

[6] J. Jachymski, The contraction principle for mappings on a metric with a graph, Proc. Am. Math. Soc. 136(2008), no,4, 1359-1373.