République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Akli Mohand Oulhadj - Bouira -

Faculté des Sciences et des Sciences Appliquées

Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Filière : Mathématiques

Spécialité : Recherche Opérationnelle

Thème

Théorèmes du point fixe positif et application

Présenté par :

- **BELLABES Zineb**
- **DIAB DJEFFAL Sofia**

Devant le jury composé de :

Président	M^r **BEDDAK Said**	**MAA**	**U. A/M/O Bouira.**
Encadreurs	M^s **MELOUANE Nassima**	**MAA**	**U. A/M/O Bouira.**
Examinatreurs	M^r **BOUDREF Mohamed Ahmed**	**MCA**	**U. A/M/O Bouira.**
	M^s **BOUDANE Khadidja**	**MAA**	**U. A/M/O Bouira.**

2020/2021

Remerciement

Avant tout, nous remercions DIEU, le tout puissant, qui nous a offert la santé, la volonté et le courage afin de réaliser ce travail. Nous adressons tout d'abord nos remerciements, les plus vifs, à notre encadrante Mme MELOUANE N, qui a proposé ce sujet, et qui nous a dirigées et conseillées afin de mener à bien ce travail. J'apprécie sa bienveillante attention et ses encouragements qu'elle n'a pas cessé de nous prodiguer le long de ce mémoire.

Il nous est agréable aussi de remercier profondément Monsieur BEDAK S., qui nous a fait l'honneur de présider le jury.

Nous formulons, nos sentiments les plus sincères à Mr BOUDREF et Mme BOUDANE, pour le temps qu'ils ont consacré à lire et à examiner nos écrits.

On tient à remercier aussi tous nos chers professeurs par qui on a été entourées durant notre cursus.

Nous remercions tout particulièrement Mr BIROUCHE, Mr DEMOUCHE et Mr ZITOUNE pour leur aide, et leur précieux conseils, sans oublier la secrétaire Sabrina et l'agent de scolarité Hakima .

Dédicaces

Au nom d'Allah, le miséricordieux, par essence et par excellence

Merci avant tout à Dieu

A ma mère Djamila, et mon père Mohamed, mes raisons d'être, les lanternes qui éclairent mon chemin, en signe d'amour, et de gratitude, pour tous les soutiens et les sacrifices dont ils ont fait preuve à mon égard.

A la mémoire de mon frère Rabah, décédé trop tôt,J'espère que sa tombe sera un paradis dans lequel il sera béni, et que la miséricorde et le pardon le ramèneront.

Nous sommes à Dieu, et c'est à lui nous revenons

A mes frères et sœurs

Ahmed, Soufian, Hadjer, Nawal et son petit garçon Abdallah .

Ma chère Copine, Sofia, ainsi que sa famille.

A mes très proches amis que je ne les oublierais jamais Kahina et Rihab ainsi que Walid et Slimane.

A tous mès amis particulièrement Hossam, Youcef, Nesrine, et toutes les personnes qui me connaissement de près ou de loin.

A Tous les étudiants de département, en particulier les étudiants de master 2 recherche opérationnelle (RO).

Zineb

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

A mes très chers parents

A mon père Ademen , et à ma mère Mebareka qui étaient toujours attentifs affectueux et compréhensifs qui m'ont soutenu durant les laborieuses années de mes études, à qui je témoigne toute ma gratitude.

A mon cher grand père, et ma chère grand mère paix a son âme.

A mes sœrs : Amel, Sonia, Feriel,Lyna et mon frère Mahdi.

A tous mes amis surtout Hakima, Ilhem et Safourya.

A ma chère Copine Zineb, ainsi qu'a ça famille surtout le petit garçon Abdallah .

A toute ma famille.

A mes très proches amis que je n'oublierais jamais F,W,S,H,Y,l.

A Tous les étudiants du département. en particulier les étudiants de master 2 recherche opérationnelle (RO).

Sofia

Table des matières

Résumé

Les théorèmes du point fixe sont des outils de base pour montrer l'existence des solutions dans divers genre d'équations. Le développement de cette théorie du point fixe a été bénéfique pour l'avancement de l'analyse non linéaire, et l'un des objectifs des chercheurs est de donner des conditions suffisantes sur T et X pour que $T : X \to X$ ait un point fixe.

La positivité de la solution d'une équation différentielle ordinaire, d'une équation aux dérivées partielle et/ou d'une équation intégrale est très utilisée dans les applications, où une solution positive peut présenter, la densité, la température et mathématiquement cette solution s'exprime comme étant une solution dans un cône. Dans ce mémoire on s'intéresse au théorème du point fixe positif (un point fixe dans un cône) pour les applications compactes.

L'indice du point fixe dans un cône d'une application compacte est un outil très important dans l'analyse non-linéaire, car il nous permette d'obtenir plusieurs conditions d'existence d'un point fixe et c'est ce que nous allons voir à travers ce mémoire.

Pour cela, on va donner dans le premier chapitre les notions nécessaires qui concerne le concept de l'indice du point fixe qui est intégré dans la théorie du degré topologique.

On présente dans le deuxième chapitre quelques théorèmes du point fixe positif. On commence par donner les lemmes essentiels du calcul de l'indice qui permettront par la suite de démontrer certains théorèmes comme le théorème d'expansion et compression d'un cône. Ce chapitre se termine par l'étude de l'existence d'une solution positive pour l'équation abstraite de Hammerstein.

Finalement, dans le troisième chapitre, on va essayer d'appliquer les résultats présentés dans les chapitres précédents pour montrer l'existence d'une solution positive de quelques problèmes aux limites associées aux équations différentielles ordinaires.

Mots clés : Théorème de point fixe, degré topologie, compacte, indice du point fixe, cône.

Abstract

Fixed point theorems are the basic tools in showing the existence of solutions in various kind of equation. The development of fixed point theory has been beneficial for the advancement of nonlinear analysis. The objective of mathematical researchers is to provide sufficient conditions over T and X so that $T : X \to X$ has a fixed point. par The positivity of the solution of an ordinary differential equation, a partial differential equation and an integral equation is very used in application, where a positive solution can present, density, temperator, ... A positive solution of a equation is expressed in mathematics by a solution in a cone. In this thesis we are interested in the theorem of the positive fixed point (a fixed point in a cone) for compact applications. par The index of the fixed point on the cones of a compact application is a very important tool in nonlinear analysis, because it allows us to obtain several results of existence of a fixed point and it is what we will see through this brief.

This title, we will give in the first chapter the notions necessary in this work which concerns the concept of the index of the fixed point which is integrated from the theory of topological degree. par In the second chapter, we present some positive fixed point theorems. We start by giving the essential lemmas for calculating the index which will allow us to prove theorems such as the expansion and compression theorem of a cone. This chapter ends with the study of the existence of a positive solution for the abstract Hamerstein equation. par Finally in the third chapter, we apply the results presented to show the existence of a positive solution for some boundary problem.

Key words : Fixed point theorem, topology degree, compact, fixed point index, cone.

Notation

$\mathbb{R}^n$: l'ensemble des réels a-dimension n.

$\| \, . \, \|_2$: la norme Euclidienne de $\mathbb{R}^n$.

$p.p$: presque partout.

tq : tel que.

$i.e.$: c'est-à-dire.

ssi : si et seulement si.

$\mathbb{N}$: l'ensemble des entiers naturels.

Ω : un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.

$\partial\Omega$: la frontière de Ω.

$\mathcal{J}$: la matrice Jacobienne de f.

$S_f(\Omega) = \{x_0 \in \Omega : J_f(x_0) = 0\}$: l'ensemble des points singuliers.

$T = \Omega \cap f^{-1}(y)$ et $\mathcal{J}_f(x) \neq 0$: l'ensemble discret et compact, il contient un nombre fini de points.

φ : une fonction poids d'indice α.

W_α : l'ensemble des fonctions poid d'indice α.

$d(.)$: le degré topologique.

$i(.)$: l'indice du point fixe.

$C^k(I, J)$: l'ensemble des fonction $f : I \to J$, k fois continûment dérivables.

P : un cône dans un espace de Banach.

$K^* = K \backslash \{0\}$.

K : un opérateur compacte

$r(L) = \lim_{n\to\infty} \parallel L^n \parallel^{\frac{1}{n}}$: le rayon spectrale de L.

$L(E)$: L'ensemble des opérateurs linéaires. $Q(E) \subset L(E)$: sous ensemble qui contents les opérateurs compacts.

Introduction Générale

Plusieurs problèmes en physique, chimie, biologie, économie... sont modélisés par des modèles mathématiques non linéaires contenant des équations différentielles ordinaires, des équations aux dérivées partielles et/ou des équations intégrales, lesquelles peuvent s'écrire sous forme d'équation abstraite

$$T(x) = x \tag{1}$$

où l'opérateur T est défini d'un ensemble X vers X. Les théorèmes du point fixe sont des outils mathématiques qui permettent de montrer l'existence des solutions pour les équations de la forme (1).

Le développement de la théorie du point fixe a donné un grand pas pour l'avancement de l'analyse non linéaire. Les mathématiciens s'intéressent toujours à donner des conditions suffisantes sur T et sur X pour avoir de nouveaux résultats concernant le point fixe.

En 1922, Banach a montré le résultat le plus connu en théorie de point fixe (le principe de contraction de Banach) qui dit qu'une contraction d'un espace métrique complet dans lui même admet un point fixe unique. Dans le même domaine, Brouwer en 1922 réussit à montrer l'existence d'un point fixe pour un opérateur continu défini sur un convexe compact dans un espace métrique de dimension finie. Puis, en 1930 Schauder publia une généralisation du théorème de Brouwer dans un espace de Banach de dimension infinie. Plus tard, de nombreux chercheurs se sont intéressés à l'extension de ces théorèmes dans diverses directions.

Un autre théorème du point fixe donné par Krasnosl'ski en 1964 est le théorème d'expansion et compression de cône. Ce théorème joue un rôle très important pour montrer l'existence de solution positive à l'équation (1). En effet, la positivité de la solution d'une équation différentielle ordinaire, d'une équation aux dérivées partielle et/ou d'une équation intégrale est très utilisée en applications, où une solution positive peut présenter, la densité, la température,....

Maintenant, ce que l'on entend habituellement par positive peut être décrit en mathématiques par un cône. i.e par un sous-ensemble convexe fermé P d'un espace de Banach E tel que $\lambda P \subset P$, pour tout $\lambda \geq 0$ et $P \cap \{-P\} = \{0\}$, Pensez par exemple $P = \mathbb{R}^+$ ou $P = \{x \in C(I, R), x(t) \geq 0, t \in I\}$. Un tel cône définit une relation d'ordre $\leq$ par $x \leq y$ ssi $y - x \in P$. Ce qui est utile puisque certains éléments de E peuvent être comparés entre eux d'une manière beaucoup plus précise que la comparaison par des non-estimations brutes.

Dans ce mémoire, on présente quelques théorèmes de point fixe positif, "point fixe dans un cône" et on s'intéresse à la théorie du point fixe pour les applications compact par l'utilisation de la notion de l'indice du point fixe sur les cônes. Le concept de l'indice du point fixe est dérivé du degré topologique de Lery-Schauder.

Le degré topologique est l'un des outils les plus importants de l'analyse fonctionnelle non linéaire, il est utilisé dans l'étude des équations différentielles ordinaires et des équations aux dérivées partielles qui impliquent l'usage de théorème du point fixe où le degré topologique fourni une technique naturelle pour présenter un tel théorème.

Ce travail est constitué de trois chapitres. On commence dans le premier par donner les outils nécessaires, qui concernent essentiellement les notions de degré topologique, les cônes et l'indice du point fixe. On commence par définir le degré topologique en dimension finie (Le degré de Brouwer), et en dimension infinie (Le dégrée de Leary-Schauder) puis on va donner ces propriétés. Par la suite, on parlera du cône dans un espace de Banach et on présentera quelques exemples pour terminer par la construction et les propriétés de l'indice du point fixe.

Au début du deuxième chapitre on donne les lemmes fondamentaux de calcul de l'indice de point fixe qu'on utilisera pour démontrer les théorèmes de point fixe présentés plus tard dans ce chapitre.

Le problème de la recherche de solutions pour les problèmes aux limites associés aux équations différentielles est souvent formulé comme problème de recherche de solution pour l'équation

$$LFu = u \tag{2}$$

où $L : E \to E$ est un opérateur compact et $F : E \to E$ est une fonction continue et bornée (il transforme les bornés en des bornés). Cette équation est connue comme l'équation abstraite de Hammerstein. L'objet de la dernière section du deuxième chapitre est de présenter quelques condition d'existence où de non-existence de solutions positives pour cette équation qui sont montrées dans [7]. En fait, on présentera des résultats de point fixe positif pour les opérateurs compacts qui s'écrivent sous la forme $T = LF$.

On termine ce travail par donner deux applications ; la première concerne le problème aux limites du deuxième ordre suivant

$$\begin{cases} -u''(x) = f(u(x)), & x \in]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

où $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est une fonction continue. La deuxième concerne le problème aux limites du troisième ordre suivant

$$\begin{cases} -u'''(x) = a(x)f(u(x)), & x \in]0,1[, \\ u(0) = u'(0) = u'(1) = 0, \end{cases}$$

où $a \in C([0,1], \mathbb{R}^+)$ n'est pas identiquement nulle sur aucun sous-intervalle de $[0,1]$ et $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est une fonction continue.

Chapitre 1

L'indice du point fixe

1.1 Le degré topologique

La notion de degré a été introduite par Kronecker pour les applications C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ en 1869. Poincaré, Böhler et Hadamard l'ont ensuite développé au début des années 1990 puis étendu au cas des fonctions continues. L.E. Brouwer le généralisa pour les applications continues entre variétés compactes de même dimension finie et donna quelques applications topologiques. D'ailleurs, l'emploi dans les démonstrations d'arguments de type topologique revient à Poincaré (*en* 1883, 1884). Pour les applications différentiables, on a pu considérer des points critiques singuliers à partir de 1942 date à laquelle Sard étudia ces points. Les théories analytiques du degré de Brouwer pour les applications C ont été développées par Nagumo et Heinz. Cependant, les théorèmes du point fixe restèrent longtemps plus célèbres que le degré lui-même si bien que l'on trouve de nos jours une démonstration directe pour ces théorèmes et une autre utilisant la théorie du degré.[4]

1.1.1 Degré topologique en dimension finie (degré de Brouwer)

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ et $y \in \mathbb{R}$, on considère le problème suivant ;

$$\text{trouver x} \in \Omega\text{tel que :} \qquad f(x) = y. \qquad (P)$$

Exemple 1.1. $\Omega =]0, 1[$ *et* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *une application de classe* C^1 *vérifiant l'hypothèse suivante :*

$$\textit{pour toute solution de l'équation } f(x) = y, \textit{telle que } f'(x) \neq 0.$$

On définit alors le degré topologique (qui est un entier relatif) de f *en* y *relativement à* Ω *par :*

$$d(f, \Omega, y) = \begin{cases} \sum\limits_{i \in I} sgn(f'(x_i)) & , \quad si\{x_i, i \in I\} \textit{ est l'enseble des solutions de } (P). \\ 0 & , \quad \textit{si le problème } (P) \textit{ n'a pas de solution.} \end{cases}$$

.

Où $y \notin f(\partial\Omega)$ *et* $I \subset \mathbb{N}$.

▷ ***Illustrations graphiques :***

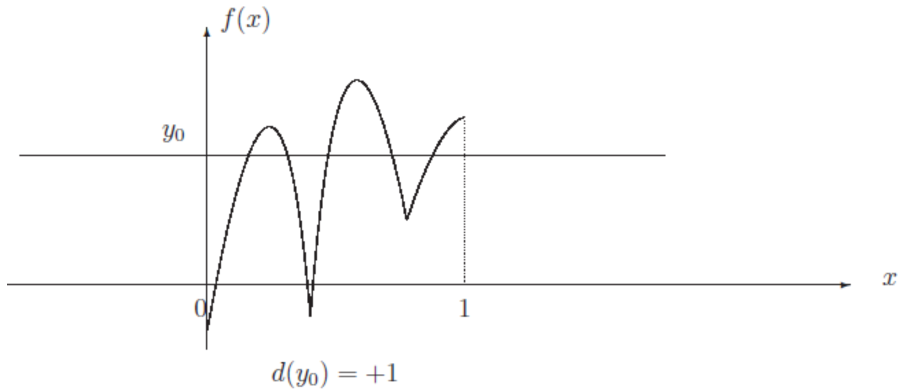

FIG. 1.1 –

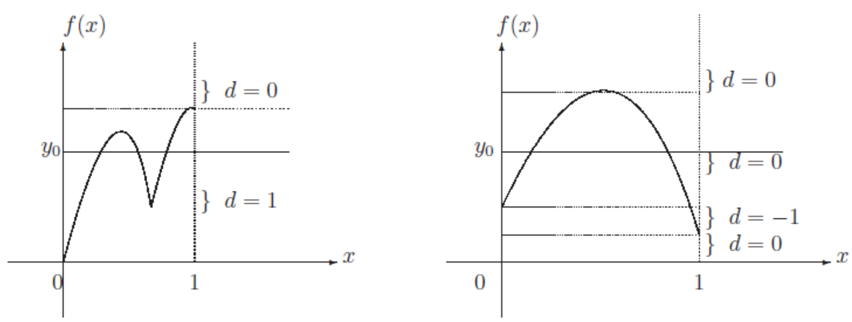

FIG. 1.2 –

Le cas régulier :

Pour $x_0 \in \Omega$, on notera $\mathcal{D}f(x_0) = (\frac{\partial f_i}{\partial x_j})_{1 \leq i,j \leq n}(x_0)$, la matrice Jacobienne de f en x_0 et $\mathcal{J}_f(x_0) = det[\mathcal{D}f(x_0)]$ le déterminant Jacobien de f en x_0.

Définition 1.1. 1. *Un point* $x_0 \in \Omega$ *est dit "régulier" si* $\mathcal{J}_f(x_0) \neq 0$.

2. *Un point* $x_0 \in \Omega$ *est dit "singulier" ou bien "critique" s'il n'est pas régulier. dans ce cas l'ensemble des points singuliers de* f *sur* Ω *est donné par :*

$$S_f(\Omega) = \{x_0 \in \Omega : J_f(x_0) = 0\}.$$

3. *Une valeur* $y \in f(\bar{\Omega})$ *est dite "régulière" si* $f^{-1}(y) \cap S_f(\Omega) = \varnothing$. *Autrement dit,* y *est régulière si* $\forall x \in f^{-1}(y), \mathcal{J}_f(x) \neq 0$, *si non, elle est dite "singulière".*

Proposition 1.1. *[4] Si* $y \notin f(\partial\Omega)$ *est une valeur régulière, alors l'ensemble* $f^{-1}(y)$ *est fini.*

Définition 1.2. *Soient $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction dans $C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ et $y \notin f(\partial\Omega) \cup f(S_f(\Omega))$. Le degré topologique de l'application f relativement à Ω au point y est l'entier d défini par ;*

$$d(f, \Omega, y) = \begin{cases} \sum\limits_{x \in T} \mathcal{J}_f(x) & si \quad T \neq \varnothing \\ 0 & si \quad T = \varnothing. \end{cases}$$

tel que : $T = \Omega \cap f^{-1}(y)$ et $\mathcal{J}_f(x) \neq 0$.

Le cas singulier :

Si $y \notin f(\partial\Omega)$ est une valeur singulière, on pose

$$d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega, z).$$

où z est une valeur régulière proche de y et dont l'existence est assurée par le lemme de Sard, (pour plus des détail voir [10].)

Définition 1.3. *Soient $\alpha > 0$, et $\varphi : [0, +\infty[\subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[0, +\infty[$. On dit que φ est une fonction poids d'indice α, s'il existe $\delta \in [0, \alpha[$ tel que $\varphi(t) = 0$ pour $t \notin [\delta, \alpha]$. On note par W_α l'ensemble des fonctions poids d'indice α.*

Remarque 1.1.

1. *Si $\varphi \in W_\alpha$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par*

$$g(x) = \varphi(\| x \|_2).$$

   où $\| . \|_2$ désigne la norme Euclidienne de $\mathbb{R}^n$. Alors g est une fonction continue à support compact dans $\mathbb{R}^n$. Ainsi $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\| x \|_2) dx$ est bien défini.

2. *On note par $W_\alpha^1 = \{\varphi \in W_\alpha$ tel que $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\| x \|_2) dx = 1\}$.*

Définition 1.4. *Soient $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ et y un point de $\mathbb{R}^n$ tel que $y \notin f(\partial\Omega)$, alors le degré de f au point y dans Ω est défini par :*

$$d_\varphi(f, \Omega, y) = \int_\Omega \varphi(\|f(x) - y\|_2) \mathrm{J}_{f(x)} dx$$

où $\varphi \in W_\alpha^1$ est une fonction poids d'indice α telle que $0 < \alpha < \gamma = \min \|f(x) - y\|_2;\ x \in \partial\Omega$.

Extension de la définition du degré

Nous allons étendre la définition du degré aux applications qui sont seulement continues de $\overline{\Omega}$ dans $\mathbb{R}^n$. En effet, pour une fonction f continues sur $\overline{\Omega}$, il existe une suite de fonctions f_k de classe $C^1(\Omega)$ et continue sur $\overline{\Omega}$ vérifiant la condition suivante :

$$\lim_{k \to \infty} \|f_k - f\|_\Omega = 0.$$

Définition 1.5. *Soit $f : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue sur $\overline{\Omega}$, Ω étant un ouvert borné, alors pour tout $y \notin f(\partial\Omega)$, le degré de f au point y dans Ω est défini par :*

$$d(f, \Omega, y) = \lim_{k \to \infty} d(f_k, \Omega, y).$$

1.1.1.1 Les propriétés du degré topologique

Dans cette section, nous énonçons quelques propriétés du degré topologique de Brouwer.

1. **le degré de l'identité** :
$$d(\mathrm{I}, \Omega, y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad y \in \Omega, \\ 0 & \text{si} \quad y \notin \overline{\Omega}, \end{cases}$$
et
$$d(-\mathrm{I}, \Omega, y) = \begin{cases} (-1)^n & \text{si} \quad y \in \Omega, \\ 0 & \text{si} \quad y \notin \overline{\Omega}, \end{cases}$$
où I est l'injection canonique de $\overline{\Omega}$ et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. Pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, on a y est une valeur régulière car $\mathrm{J}_I = +1, \forall x \in \mathbb{R}^n$, de plus $\mathrm{I}^{-1}(y) = y$ si $y \in \Omega$ et $\mathrm{I}^{-1}(y) = \emptyset$ si $y \notin \Omega$, donc par la définition 1.2 on obtient le résultat.
Le deuxième se traite de la même manière en notant que $\mathrm{J}_{-I}(x) = (-1)^n$. □

2. **Propriété d'existence**
soient $f : \mathbb{R}^n \supset \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue où Ω est un ouvert borné et $y \notin f(\partial\Omega)$. Si $d(f, \Omega, y) \neq 0$, alors l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution.

3. **Invariance par homotopie**
Soient $f_t(x) : [0,1] \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ est continue et $y \notin \cup_{t\in[0,1]} f_t(\partial\Omega)$. Alors le degré $d(f_t, \Omega, y)$ ne dépend pas de t, et dans ce cas, Les fonctions f_t sont dites reliées homotopiquement. De plus, on dit que deux fonctions f et g sont homotopes s'il existe une fonction continue $H : [0,1] \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ telle que $H(0,x) = f(x)$ et $H(1,x) = g(x), \forall x \in \overline{\Omega}$.

4. **Invariance sur le bord**
Soient $f, g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ deux fonctions continues sur Ω. Si $y \notin f(\partial\Omega)$ et $f_{|\partial\Omega} = g_{|\partial\Omega}$, alors
$$d(f, \Omega, y) = d(g, \Omega, y).$$

Démonstration. Pour $t \in [0,1]$, on introduit la déformation convexe $f_t = tf + (1-t)$. Alors pour tout $x \in \partial\Omega$ on a
$$f_t(x) = g(x) = f(x) \neq y$$
, donc Le degré $d(f_t, \Omega, y)$ est bien défini et constant d'après la propriété de l'invariance homotopique. D'ou ;
$$d(f_0, \Omega, y) = d(f_1, \Omega, y).$$
Cette propriété montre que pour le degré tout se passe sur le bord. □

5. **La continuité par rapport à la fonction**
Soit $r = \mathrm{dist}(y, f(\partial\Omega)) > 0$ et soit $g \in C^1(\overline{\Omega})$ une fonction telle que
$$\sup_{x\in\partial\Omega} \| g(x) - f(x) \| < r;$$

alors

$$d(f,\Omega,y) = d(g,\Omega,y).$$

On peut retenir cette propriété en se souvenant que deux fonctions voisines ont le même degré.

Démonstration. Pour $t \in [0.1]$, On pose $f_t = tg + (1-t)f$ et on veut montrer que $\forall t \in [0.1], y \notin f_t(\partial\Omega)$. Soit $x \in \partial\Omega$, on a :

$$\begin{aligned}
\| f_t(x) - y \| &= \| (tg + (1-t)f)(x) - y \| \\
&= \| t(g-f)(x) - (y - f(x)) \| \\
&\geq | \| y - f(x) \| - \| t(g-f)(x) \| | \\
&= \| y - f(x) \| - \| t(g-f)(x) \| \text{ (par définition de} r) \\
&\geq \| y - f(x) \| - \| (g-f)(x) \| \text{ (car} |t| \leq 1) \\
&> \| y - f(x) \| - r \geq 0 \text{ (par définition de} r).
\end{aligned}$$

Par conséquent, $f_t(x) \neq y$ pour tout $x \in \partial\Omega$. Le résultat demandé se déduit alors de la propriété d'invariance par homotopie du degré. Cette propriété sera utile pour l'approximation d'une fonction continue par une fonction plus régulière. □

6. **La continuité par rapport aux fonctions continues**

   Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $f : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue et $y \in \mathbb{R}^n$ tels que

   $$\min\{(\|f(x) - y\|_2); x \in \partial\Omega\} > \alpha > 0,$$

   alors pour toute fonction continue $g : \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vérifiant

   $$\|f - g\|_\Omega < \frac{1}{7}\alpha,$$

   on a

   $$d(f,\Omega,y) = d(g,\Omega,y).$$

7. **Additivité**

   Soient $y \in \mathbb{R}^n$ et $(\Omega)_{i\in I} \subset \Omega$ une famille d'ouverts deux à deux disjoints vérifiant l'une des assertions suivantes :

   (a) $\Omega = \bigcup_{i\in I} \Omega_i$ et $y \notin f(\partial\Omega)$;

   (b) $\bigcup_{i\in I} \Omega_i \subset \Omega$ et $y \notin f(\overline{\Omega} \backslash \bigcup_i \Omega_i)$.

   Alors

   $$d(f,\Omega,y) = \sum_i d(f,\Omega_i,y).$$

   où seul un nombre fini de termes dans la somme sont non nuls.

8. **Propriété d'excision**

   Soit $f : \mathbb{R}^n \supset \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue sur un ouvert borné Ω, alors pour tout ensemble fermé $K \subset \overline{\Omega}$, tel que $y \notin f(K) \cup f(\partial\Omega)$, on a

   $$d(f,\Omega,y) = d(f,\Omega\backslash K,y).$$

1.1.1.2 Application du degré de Brouwer

Nous allos utiliser le degré de Brouwer pour démontrer le théorème du point fixe de Brouwer. qui est publié par Luitzen Egbertus Jan Brouwer en 1912, on s'y intéresse aux cas où l'application est continue sur un convexe et compact d'un espace de dimension finie.

Théorème 1.1. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble non-vide, convexe et compact. et $f : \Omega \to \Omega$ une fonction continue. Alors, f admet un point fixe.*

Démonstration. Faisons-la dans le cas où $\Omega = \overline{B}(0, R)$, on distingue deux cas ;

- S' il existe $x_0 \in \partial\Omega$ tel que $f(x_0) = x_0$, le théorème est démontré.
- Si $f(x) \neq x, \forall x \in \partial\Omega$. Considérons la déformation continue $f_t(x) = x - tf(x)$ ou $t \in [0, 1[$. Soit $t \in [0, 1[$ et $x \in \partial\Omega$;

$$\| f_t(x) \| \geq | \| x \| - t \| f(x) \| | = |R - t \| f(x) \| | = R - t \| f(x) \| .$$

mais : $\begin{cases} f(x) \in \Omega & \Longrightarrow & \| f(x) \| \leq R \\ & \text{et} & \\ 0 \leq t < 1 \Longrightarrow & |t| < 1 & \Longrightarrow t \| f(x) \| < R \end{cases}$ alors : $\| f_t(x) \| > R(1 - t) > 0$. Conclusion ; $\forall x \in \partial\Omega : f_t(x) \neq 0 \Longleftrightarrow 0 \notin f_t(\partial\Omega$, d'où $d(f_t, \Omega, 0)$ est bien défini. On peut déduire aussi par homotopie ;

$$d(f_t, \Omega, 0) = d(I - f, \Omega, 0) = d(I, \Omega, 0) = 1.$$

Donc il existe $x \in \Omega$ tel que $(I - f)(x) = 0 \Longrightarrow f(x) = x$, i.e f admet un point fixe.

□

1.1.2 Degré topologique en dimension infinie (degré de Leray-Schauder)

En 1934, Leray-Schauder a généralisé la théorie du degré de Brouwer une application définie sur un espace de Banach de dimension infinie. Soient X un espace de Banach et Ω un ouvert borné de X. Rappelons que dans un espace de dimension infinie, la boule unité fermée $\overline{B}(0, 1)$ n'est pas compacte et qu'une application continue peut très bien être non bornée sur les fermés bornés. En plus, on sait que l'image d'un fermé est un ensemble fermé si f est une application fermée, D'une façon générale, la continuité d'une application f ne suffit pas(et même d'ailleurs une régularité supérieur d'ordre au moins C^1), pour cela on va introduire les notions suivantes.

Définition 1.6. *[8] Soient X un espace de Banach, Ω un ouvert borné de E et $T : \Omega \to X$ une application.*

1. *T est dite compacte si T est continue et $T(\Omega)$ est relativement compact ($\overline{T(\Omega)}$ est compact).*
2. *T est dite complètement continue si T est continue et envoie les bornés de Ω en des relativement compacts dans X.*
3. *T est dite borné si elle envoie les bornés de Ω en des bornés de X.*
4. *On dit que T est de rang fini si T est continue et $\overline{T(\Omega)}$ est contenu dans un sous-espace de dimension finie de X. Si $T : \Omega \to X$ est une application compacte, alors l'application $\psi = I - T$ est dite perturbation compacte de l'identité.*

5. *Soit $\psi : X \to F$ une application continue où X et F sont deux espace de Banach.*
   - *On dit que ψ est fermé si l'image de tout fermée de X est un fermé de F*
   - *On dit que ψ est propre si l'image inverse de tout compact de F est un compact de X.*

Remarque 1.2. *En dimension finie, le degré topologique est indépendant de la base utilisée pour le calculer. En effet, pour $m < n$, on considère $\mathbb{R}^m$ comme un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$ en rajoutant $n-m$ coordonnées nulles. Nous avons alors :*

Lemme 1.1. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert borné, $T : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^m$ une application continue et $f = Id_{\mathbb{R}^n} - T$. Si $y_0 \notin f(\partial\Omega)$ alors on a :*

$$d(f, \Omega, y_0) = d(f_{|\overline{\Omega}\cap\mathbb{R}^m}, \Omega \cap \mathbb{R}^m, y_0)$$

Définition 1.7. *Soit $T \in C(\overline{\Omega}, E)$ tel que $T(\overline{\Omega})$ soit contenue dans un sous-espace de dimension finie $F \subset E$ et posons $f = Id - T$ et soit $y_0 \in f(\partial\Omega)$ on pose :*

$$d(f, \Omega, y_0) = d(f_{|\overline{\Omega}\cap F}, \Omega \cap F, y_0).$$

Lemme 1.2. *(Approximation des applications compactes)*
Soit $T : \Omega \to E$ une application compacte, alors pour chaque $\epsilon > 0$, il existe un espace F_ϵ de dimension finie et une application continue $T_\epsilon : \Omega \to F_\epsilon$ telle que :

$$\| T_\epsilon x - Tx \| \leq \epsilon \qquad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Définition 1.8. *Soit f une perturbation compacte de l'identité $f = Id - T$ où $T : \Omega \to E$ est un opérateur compact et $y_0 \in E \setminus f(\partial\Omega)$, on définit le degré topologique de Leray-Schauder par :*

$$d(f, \Omega, y_0) = d(f_\epsilon, \Omega, y_0),$$

où f_ϵ est une perturbation de dimension finie de l'identité vérifiant :

$$\forall x \in \overline{\Omega} \qquad \| f_\epsilon x - fx \| \leq \epsilon \quad avec \quad \epsilon = dist(y_0, f(\partial\Omega)).$$

1.1.2.1 Propriétés du degré de Leray-Schauder

Les propriétés essentielles du degré en dimension finie restent valables en dimension infinie et se démontrent par approximation. En effet, il existe toujours une suite d'applications compactes convergeant uniformément vers T et telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, T_n(\overline{\Omega}) \subset E_n$ avec dim $(E_n) < +\infty$. D'après la définition du degré en dimension infinie, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, d(I-T, \Omega, y) = d(I-T_n, \Omega, y) = d(I-T_n|\overline{\Omega} \cap E_n, \Omega \cap T_n, y).$$

Ceci montre, en particulier que le degré de Schauder est aussi un entier relatif. De plus, si $d(I-T, \Omega, y) \neq 0$, alors il existe $x_n \in \Omega \cap E_n$ tel que $(I - T_n)(x_n) = y$. Mais, comme $\lim_{n\to+\infty} \| T_n(x_n) - t(x_n) \|_X = 0$, alors $\lim_{n\to+\infty} \| (I-T)(x_n) - y \|_X = 0$.

Enfin, T étant compact, il existe une sous-suite (x_{n_t}) telle que la suite $T(x_{n_t})$ soit convergente ; la suite x_{n_t} converge aussi vers une limite $x_0 \in \Omega$ et l'on a, par passage à la limite, l'égalité $x_0 - T(x_0) = y$. Ceci prouve la propriété de non nullité du degré, les autres propriétés se montrent de façon similaire.

1.1.2.2 Application du degré de Leray-Schauder

Le théorème de point fixe de Schauder prolonge le résultat du théorème de Brouwer pour montrer l'existence d'un point fixe pour une application continue sur un convexe compact dans un espace de Banach de dimension infinie. Il est publié par **Juliusz Schauder** en 1930.

Théorème 1.2. *[8] Soient X un espace de Banach, $\Omega \subset X$ un sous-ensemble non-vide, fermé, borné et convexe. Et $f : \Omega \to \Omega$ une application compacte, alors f admet au moins un point fixe.*

Démonstration. Dans le cas où Ω est la boule unité, le théorème se démontre avec une méthode similaire que le théorème de Brouwer, si non, dans le cas général, nous utilisons le fait que C est un rétracté de E. (Vous pouvez trouver le détail dans [8].) □

1.2 Les cônes

Soit E un espace de Banach.

Définition 1.9. *Un sous-ensemble non vide P de E est dit cône ordonne positif sur E s'il est convexe, fermé et vérifie les deux condition suivantes ;*

1. $(x \in P et\ \lambda \geq 0) \Rightarrow \lambda x \in P$.
2. $P \cap (-P) = 0_E$ *i.e* $(x \in P et - x \in P) \Rightarrow x = 0_E$. *La première condition entraîne que* $0_E \in P$.

Définition 1.10. *Un sous-ensemble non vide $C \subset E$ est appelé cône si pour tout $x \in C et\ \alpha > 0 \Rightarrow \alpha x \in C$.*

Chaque cône ordonné est un cône, mais la réciproque est fausse. Dans ce qui suit et pour simplifier, l'appellation cône sera réservée pour cône ordonné.

Définition 1.11. *Soit P un cône sur E. Alors on définit sur E une relation d'ordre partiel donnée par :*

$$\forall\ x, y \in E\ x \leq y \Leftrightarrow y - x \in P.$$

Nous pouvons aussi introduire les relations suivantes :

- $x < y \Leftrightarrow x \leq y$ et $x \neq y$
- $x \ll y \Leftrightarrow y - x \in \overset{\circ}{P}$ où $\overset{\circ}{P} \neq \varnothing$.

De plus on définit le segment d'un cône P par $[x, y] = \{z \in P ; x \leq z \leq y\}$.

Proposition 1.2. *Pour tout u, x, y et $z \in P$ et $a, b \in \mathbb{R}$, on a*

1. $x \leq x$.
2. $(x \leq y$ *et* $y \leq z) \Rightarrow x \leq z$.
3. $(x \leq y$ *et* $y \leq x) \Rightarrow x = y$.
4. $(x \leq y$ *et* $0 \leq a \leq b) \Rightarrow ax \leq by$.
5. $(x \leq y$ *et* $u \leq z) \Rightarrow x + u \leq y + z$.
6. $(x \ll y$ *et* $y \ll z) \Rightarrow x \ll z$.
7. $(x \ll y$ *et* $y \leq z) \Rightarrow x \ll z$.
8. $(x \leq y$ *et* $y \ll z) \Rightarrow x \ll z$.
9. $(x \ll y$ *et* $a > 0) \Rightarrow ax \ll ay$.
10. *Soit* $(x_n)_n$ *et* $(y_n)_n$ *deux suites de* E *telles que :* $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \leq y_n$. *Alors*

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Définition 1.12. *Un espace de Banach est dit ordonné s'il contient un cône* P.

Définition 1.13. *Soit* P *un cône sur* E. *Alors, on dit que*

- P *est solide si* $\mathring{P} \neq \varnothing$ *où* $\mathring{P} = int(P)$.
- P *générateur si* $E = P - P$. *i.e* $\forall x \in E, \exists\ u, v \in P$ *tels que :* $x = u - v$.
- P *est dit normal (ou nature) si*

$$\forall x, y \in P, \exists N > 0, \textit{tels que } x \leq y \Rightarrow \|x\| \leq N\|y\|$$

Exemple 1.2. ***[Exemples des cônes solides et générateurs]***

1. $\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-$ *sont des cônes solides et générateurs de* $\mathbb{R}$.
2. *Sur* $\mathbb{R}^2$, *on définit quartes cônes solides et générateurs ;* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_-$, $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+$ *et* $\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_-$.

Exemple 1.3. ***[Exemples des cônes normaux]***

1. $E = \mathbb{R}^n, P_1 = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, \forall i = \overline{1, n}\} = (\mathbb{R}_+)^n$. *est normal, avec la constante de normalité* $N = 1$, *car toutes les normes sur* $\mathbb{R}^n$ *sont monotones.*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, 0_{\mathbb{R}^n} \leq x \leq y \Rightarrow \| x \| \leq \| y \|$$

2. $E_2 = C(G)$ *: l'espace des fonction continues sur un ensemble fermé borné* G *de* $\mathbb{R}^n$.

$$P_2 = \{x \in C(G) : x(t) \geq 0, \forall t \in G\}.$$

• P_2 *est un cône solide et générateur sur* $C(G)$.

• *Il est normal car* $\| \,.\, \|_{C(G)}$ *définie par* $\| x \|_{C(G)} = \sup_{t\in G}|x(t)|$ *est monotone sur* P_2.

1.3 Les opérateurs monotones

Définition 1.14. *Soit X et Y deux espaces de Banach ordonnés et soit l'opérateur $T : D(T) \subset X \to Y$*

1. *T est dit croissant si ; $\forall x, y \in D(T), \quad x < y \Rightarrow Tx \leq Ty$.*
2. *T est dit strictement ou fortement croissant si le symbôle " $\leq$ " est remplacé par " $<$ " ou " $\ll$ " .*
3. *T est dit décroissant si $\forall x, y \in D(T), \quad x < y \Rightarrow Tx \geq Ty$.*
4. *l'opérateur T est dit strictement ou fortement décroissant si le symbôle " $\geq$ " est remplacé par " $>$ " ou " $\gg$ ".*
5. *l'opérateur T est dit positif si, $T(0) > 0$ et pour tout $x \in D(T)$,*
   $x > 0 \Rightarrow Tx \geq 0$.

1.4 L'indice du point fixe

Un des outils les plus important de l'analyse fonctionnelle non linéaire est le degré topologique de Leray-Schauder pour les applications compactes définies sur la fermeture des sous-ensembles ouverts bornés dans les espaces de Banach. Cependant, en relation avec les applications non linéaires définies dans les espaces ordonnés, il est naturel de considérer aussi les applications définies sur les sous-ensembles ouverts d'un cône positif. Si ce dernier n'a pas de points intérieurs alors le degré de Leray-Schauder n'est pas immédiatement applicable. Mais à cause du fait qu'un cône est un rétracté de l'espace de Banach qui le contient, il est possible de définir dans un cône positif. " L'indice du point fixe" pour les applications compactes. Cet indice du point fixe est une extension de la notion du degré de Leray-Schauder.

Définition 1.15. *[5]*
Soit X un espace de Banach. Un sous-ensemble $Y \subset X$ est dit un rétracté de X s'il existe une application continue $r : X \to Y$ telle que

$$\forall x \in Y, \quad r(x) = x,$$

Ou encore si $\mathcal{I}_{d|Y}$ admet une extension à X. L'application r est alors appelée rétraction.

Remarque 1.3. *Toute partie convexe fermée d'un espace de Banach X est une rétractée de X. En particulier, tout cône $P \subset X$ est un rétracté de X.*

Exemple 1.4. *La boule $\mathcal{B}_n = \overline{\mathcal{B}}(x_0, R)$ est une rétractée de $\mathbb{R}^n$. Il suffit pour cela de considérer l'application définie par :*

$$r(x) = \begin{cases} x & , \quad si \ \| x - x_0 \| \leq R \\ x_0 + R\dfrac{x - x_0}{\| x - x_0 \|} & , \quad si \ \| x - x_0 \| \geq R \end{cases}$$

Théorème 1.3. *(définitions axiomatiques) Soient E un espace de Banach et X un rétracté de E. Pour tout ouvert borné Ω de X et toute application compacte $f : \overline{\Omega} \to X$ sans points fixes sur $\partial\Omega$, il existe un unique nombre entier noté $i(f, \Omega, X)$ ayant les propriétés suivantes :*

1. ***Normalisation***

   $i(f, \Omega, X) = 1$ si f est constante sur $\overline{\Omega}$ (i.e. $f(x) = y, \forall x \in \overline{\Omega}$, où y est une constante de Ω.)

2. ***Additivité***

   Pour tout sous-ensembles ouverts et disjoints Ω_1,Ω_2 de Ω tels que f n'admet pas de point fixe sur $\overline{\Omega}\backslash(\Omega_1 \cup \Omega_2)$, on a :

   $$i(f, \Omega, X) = i(f, \Omega_1, X) + i(f, \Omega_2, X).$$

   où $i(f, \Omega_k, X) = i(f_{|\overline{\Omega_k}}, X); k \in 1, 2.$

3. ***Invariance homotopique***

   L'entier $i(h_t, \Omega, X)$ est indépendant du choix du paramètre $t \in [0, 1]$, où

   $$\begin{array}{llll} h_t : & [0,1] \times \overline{\Omega} & \to X \\ & (t, x) & \longmapsto h_t(x) = h(t, x) \end{array}$$

   est un opérateur compact tel que $\forall x \in \partial\Omega, \forall t \in [0, 1] : h_t(x) \neq x$.

4. ***Permanence***

   Si Y est un rétracté de X tel que $f(\overline{\Omega}) \subset Y$, alors

   $$i(f, \Omega, X) = i(f, \Omega \cap Y, Y) = i(f_{|\overline{\Omega \cap Y}}, \Omega, Y).$$

   La famille { $i(f, \Omega, X)$ tel que X est un rétracté de E, Ω est un ouvert borné de X et $f : \overline{\Omega} \to X$ est une application compacte sans points fixes sur $\partial\Omega$ } est uniquement déterminée par les propriétés $(1) - (4)$, où l'entier $i(f, \Omega, X)$ est appelé l'indice du point fixe de f sur Ω par rapport à X.

Démonstration. Soit $\{i(f, \Omega, X)\}$ une famille satisfaisant les propriétés $(1) - (4)$. Si on choisit $X = E$, alors $(1) - (2)$ représentent les propriétés du degré de Leray-Schauder, d'où la définition :

$$i(f, \Omega, X) = d(\mathcal{I}_d - f, \Omega, 0). \tag{1.1}$$

où $(\mathcal{I}_d - f)(x) \neq 0, \forall x \in \partial\Omega$, i.e : le degré de Leray-Schauder $d(\mathcal{I}_d - f, \Omega, 0)$ est bien défini. Supposons maîntenant que X soit un rétracté de E, donc il existe une rétraction $r : E \to X$ telle que $\forall x \in X, r(x) = x$. Pour tout sous-ensemble ouvert Ω de X, on choisit une boule $\mathcal{R} = \{x \in E :\| x \|< R\}$. D'après la propriété (4). On a

$$i(f, \Omega, X) = i(f \circ r, \mathcal{B}_R \cap r^-1(\Omega), E) = d(\mathcal{I}_d - (f \circ r), \mathcal{B}_R \cap r^-1(\Omega), 0).$$

En effet, d'une part $r : E \to X$ est une rétraction donc continue, par conséquence, Ω est un ouvert de $X \Rightarrow r^{-1}(\Omega)$ est un ouvert de E. En effet, $\mathcal{B}_R \cap r^{-1}(\Omega)$ est un ouvert borné de E et on a

$$\overline{\mathcal{B}_R \cap r^{-1}(\Omega)} \subset \overline{r^{-1}(\Omega} \subset \overline{r^{-1}\overline{\Omega}} = r^{-1}(\overline{\Omega}).$$

Il s'en suit que

$$(f \circ r)(\overline{\mathcal{B}_R \cap r^{-1}(\Omega)}) \subset (f \circ r)(r^{-1}(\overline{\Omega})) = f(\overline{\Omega}) \subset X.$$

La propriété de permanence est donc applicable et on a :

$$\begin{aligned} i(f \circ r, \mathcal{B}_R \cap r^{-1}(\Omega), E) &= i(f \circ r, [\mathcal{B}_R \cap r^{-1}(\Omega)] \cap X, X) \\ &= i(f \circ r_{|[\mathcal{B}_R \cap r^{-1}(\Omega)] \cap X}, \Omega, X) \\ &= i(f \circ r_{|\mathcal{B}_R \cap r^{-1}(\Omega)}, \Omega, X) \\ &= i(f, \Omega, X) \end{aligned}$$

□

Remarque 1.4. *D'après ce qui précède, on définit l'indice du point fixe d'un opérateur compact f sur Ω relativement à X par :*

$$i(f, \Omega, X) = d(\mathcal{I}_d - (f \circ r), \mathcal{B}_R \cap r^{-1}(\Omega), 0) \tag{1.2}$$

où $r : E \to X$ est une rétraction et $\mathcal{B}_R$ est une boule de X. Notons que cette définition est indépendante du choix de la rétraction r et de la boule $\mathcal{B}_R$. En effet, soit $r_1 : E \to X$ une autre rétraction. On pose $V = r_1^{-1} \cap r^{-1}(\Omega)$ et $r_0 = r$. D'après la propriété d'excision du degré de Leray-Schauder, on obtient :

$$d(\mathcal{I}_d - (f \circ r_j), \mathcal{B}_R \cap r_j^{-1}(\Omega), 0) = d(\mathcal{I}_d - (f \circ r_j), \mathcal{B}_R \cap V, 0), \quad j \in 0, 1.$$

Introduisons l'opérateur compact $h : [0,1] \times \overline{V}$ par :

$$h(\lambda, x) = h_\lambda(x) = r_0[(1-\lambda) f(r_0(x)) + \lambda f(r_1(x))].$$

On remarque que $h(\lambda, x) \neq x, \forall (\lambda, x) \in [0,1] \times \partial V$. i.e. le degré de Leray-Schauder $d(\mathcal{I}_d - h(\lambda, .), \mathcal{B}_R \cap V, 0)$ est bien défini $\forall \lambda \in [0,1]$. La propriété d'invariance homotopique du degré de Leray-Schauder entraîne que :

$$d(\mathcal{I}_d - (f \circ r_0), \mathcal{B}_R \cap V, 0) = d(\mathcal{I}_d - (f \circ r_1), \mathcal{B}_R \cap V, 0)$$

Par conséquent, la définition de $i(f, \Omega, X)$ est indépendante du choix de la rétraction r et de la boule $\mathcal{B}_R$. Rappelons que le degré de Leray-Schauder admet une extension aux ouverts non bornés de X . Finalement, par la définition (1.2) et les propriétés de degré de Leray-Schauder, on peut vérifier les propriétés $(1) - (4)$.

Corollaire 1.1. *L'indice du point fixe vérifie les propriétés suivantes :*

(i) ***Propriété d'excision***

Soit $V \subset \Omega$ un sous-ensemble ouvert tel que f soit sans points fixes sur $\overline{\Omega} \backslash V$, alors

$$i(f, \Omega, X) = i(f, V, X).$$

(ii) ***Propriété de l'existence***

$$i(f, \Omega, X) \neq 0 \Rightarrow f \text{ admet au moins un point fixe sur } \Omega.$$

Démonstration.

- Soit $\Omega_1 = \Omega$ et $\Omega_2 = \varnothing$. Alors on a, $\overline{\Omega}\backslash(\Omega_1 \cup \Omega_2) = \overline{\Omega}\backslash\Omega = \partial\Omega.f$ est sans points fixes sur $\partial\Omega$, La propriété d'additivité de l'indice a lieu et on a :

$$i(f, \Omega, X) = i(f, \Omega, X) + i(f, \varnothing, X) \Rightarrow i(f, \varnothing, X) = 0.$$

  Si on prend maîntenant $\Omega_1 = V$, la même propriété nous donne

$$i(f, \Omega, X) = i(f, V, X) + i(f, \varnothing, X) = i(f, V, X).$$

  D'ou le résultat demandé.

- On raisonne par l'absurde, on suppose que $i(f, \Omega, X) \neq 0$ et que f n'admet pas de point fixe sur Ω. Soit $V = \varnothing$, i.e : $\overline{\Omega}\backslash V = \overline{\Omega}$, f étant sans points fixes sur Ω et $\partial\Omega$, donc elle l'est aussi sur $\Omega \cup \partial\Omega = \overline{\Omega}$. Ceci nous permet d'appliquer la propriété d'excision pour $V = \varnothing$, et on a :

$$i(f, \Omega, X) = i(f, V, X) = i(f, \varnothing, X) = 0.$$

  Ce qui contredit le fait que $i(f, \Omega, X) \neq 0$. D'où le résultat demandé.

$\square$

Chapitre 2

Quelque théorèmes de point fixe positif

Dans le chapitre précédent nous avons vu que le théorème de Brouwer peut se démontrer en utilisant le degré topologique de Brouwer, de même pour le théorème de Shauder sachant que les deux théorèmes sont publiés avant la théorie du degré topologique. Notons qu'un point fixe positif s'interprète en mathématique par un point fixe dans un cône, donc pour satisfaire la condition de positivité.

Dans un espace de Banach on a besoin d'introduire un cône P. Dans ce chapitre nous allons présenter le théorème de Kranowski (1964) qui a été généralisé par guo(1988). Pour démontrer ces théorèmes nous allons utiliser la théorie de l'indice du point fixe sur les cônes, pour cela nous commençons par donner les lemmes fondamentaux de calcul de l'indice.

2.1 Lemmes fondamentaux de calcul de l'indice du point fixe

Dans tout ce qui suit, on considère X un espace de Banach, $P \subset X$ un cône et Ω un ouvert borné de E.

Lemme 2.1. *Soit* $0 \in \Omega$ *et* $F : \overline{\Omega} \cap P \to P$ *un opérateur compact on suppose que*

$$Fx \neq \lambda x, \ \forall x \in P \cap \partial\Omega \ \textit{et} \ \forall \lambda \geq 1. \tag{2.1}$$

Alors, $i(F, \Omega \cap P, P) = 1$.

Démonstration. Considérons la fonction $H : [0,1] \times P \cap \overline{\Omega} \to P$ définie pour tout $(t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R}$ par $H(t,x) = H_t(x) = tFx$. H est un opérateur compact qui n'admet pas des points fixes sur $P \cap \partial\Omega$. i.e. $\forall t \in [0,1], \forall x \in P \cap \partial\Omega, H_t(x) \neq x$. En effet, s'il existe $t \in [0,1]$, pour lequel il existe $x_0 \in P \cap \partial\Omega$, tels que $H_t(x) = x$, alors on a les deux cas suivantes ;

- Pour $t = 0$, on obtient l'existence d'un point $x_0 \in P \cap \partial\Omega$ tel que $x_0 = 0$, d'où la contradiction.
- Pour $t \in]0,1]$, on obtient l'existence d'un point fixe $x_0 \in P \cap \partial\Omega$ tel que $tFx_0 = x_0$; donc $Fx_0 = \frac{1}{t}x_0$, d'où la contradiction avec l'hypothèse (2.1).

Alors, d'après les propriétés de l'invariance homotopique et de la normalisation de l'indice du point fixe, on déduit que :

$$i(H_1, P \cap \Omega, P) = i(F, P \cap \Omega, P) = i(H_0, P \cap \Omega, P) = i(0, P \cap \Omega, P) = 1.$$

D'où le résultat demandé. □

Lemme 2.2. *Soient* $0 \in \Omega$*et* $F : P \cap \overline{\Omega} \to P$ *un opérateur compact satisfaisant l'hypothèse*

$$\|Fx\| \geq \|x\| \ \textit{et} \ Fx \neq x, \forall x \in P \cap \partial\Omega. \tag{2.2}$$

Alors, $i(F, P \cap \Omega, P) = 1$.

Démonstration. Il suffit de montrer que les conditions du lemme 2.4 sont satisfaites. En effet, raisonnons par l'absurde et supposons que

$$\exists x_0 \in P \cap \partial\Omega \ , \ \exists \lambda_0 \geq 1 \text{ tels que } Fx_0 = \lambda_0 x_0.$$

On a deux cas ;

- Si $\lambda_0 > 1$:

  $\| Fx_0 \| = \| \lambda_0 x_0 \| = \lambda_0 \| x_0 \| > \| x_0 \|$, ce qui contredit le fait que $\| Fx \| \leq \| x \|$, $\forall x \in P \cap \partial\Omega$.
- Si $\lambda_0 = 0$:

  $Fx_0 = x_0$. ce qui contredit le fait que $Fx \neq x, \forall x \in P\partial\Omega$.

Ainsi, on a démontré que (2.2) $\Rightarrow$ (2.1), par suite le premier lemme nous donne

$$i(F, P \cap \Omega, P) = 1.$$

□

Lemme 2.3. *Soient* $0 \in \Omega$ *et* $F : P \cap \overline{\Omega} \to P$ *un opérateur compact satisfaisant l'hypothèse*

$$Fx \not\geq x, \forall x \in P \cap \partial\Omega. \tag{2.3}$$

Alors, $i(F, P \cap \Omega, P) = 1$

Démonstration. En procédant de la même manière que la démonstration du lemme précédent, on montre que (2.3) $\Rightarrow$ (2.1). En effet, s'il existe $x_0 \in P \cap \partial$ et $\lambda_0 \geq 1$tels que$Fx_0 = \lambda_0 x_0$, alors $Fx_0 \geq x_0$, ce qui contredit (2.3). □

Lemme 2.4. *Soit* $F : P \cap \overline{\Omega} \to P$ *est compact. Supposons que*

1. $\inf_{x \in P \cap \partial\Omega} \quad \| Fx \| > 0.$
2. $Fx \neq \lambda x,\ x \in P \cap \partial\Omega,\ 0 < \lambda \leq 1.$

Alors, $i(f, P \cap \Omega, P) = 0.$

Lemme 2.5. *Soient* $0 \in \Omega$ *et* $F : P \cap \overline{\Omega} \to P$ *un opérateur compact satisfaisant l'hypothèse,*

$$\exists u_0 \in P \backslash \{0\} \textit{ tel que : } x - Fx \neq \lambda u_0, \forall x \in P \cap \partial\Omega, \forall \lambda \geq 0. \tag{2.4}$$

Alors, $i(F, P \cap \Omega, P) = 0.$

Démonstration. Ω est un ouvert borné donc il existe $r > 0$ tel que $\|x\| \leq r$ pour tout $x \in \Omega$ et $\mu = \sup_{x \in \overline{\Omega \cap P}} \| Fx \|$. Soit

$$\lambda > \frac{r + \mu}{\| u_0 \|}.$$

On définit l'application compacte $H : [0, 1] \times \overline{P \cap \Omega} \to P$ par :

$$H(t, x) = H_t(x) = tFx + (1 - t)(Fx + \lambda u_0).$$

Alors, H n'admet pas de points fixes sur $P \cap \partial\Omega$ car sinon, il existerait $t_0 \in [0, 1]$ et $x_0 \in \partial P$ tels que ;

$$t_0 Fx_0 + (1 - t_0)(Fx_0 + \lambda u_0) = x_0 \Rightarrow x_0 - Fx_0 = \lambda(1 - t_0)u_0.$$

Et comme $t_0 \leq 1$, alors $\lambda(1 - t_0) \geq 0$, ce qui contredit l'hypothèse (2.4). D'après la propriété de l'invariance homotopique du point fixe de H_t, on obtient :

$$i(H_1, \Omega \cap P, P) = i(F, \Omega \cap P, P) = i(H_0, \Omega \cap P, P) = i(F + \lambda u_0, \Omega \cap P, P)$$

Si on suppose que $i(F + \lambda u_0, P_r, P) \neq 0$, alors il existe $x_0 \in P \cap \Omega$ tel que
$x_0 = Fx_0 + \lambda u_0$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \|x_0\| \quad &= \|Fx_0 + \lambda u_0\| \\ &\geq \lambda \|u_0\| - \|Fx_0\| \\ &> \frac{r + \mu}{\|u_0\|} \|u_0\| - \|Fx_0\| \\ &> r + \mu - \|Fx_0\| \\ &> r + \|Fx_0\| l - \|Fx_0\| = r. \end{aligned}$$

Mais $x_0 \in P \cap \Omega \Rightarrow \|x_0\| < r$, d'où la contradiction. Ainsi, on a démontré que

$$i(F + \lambda u_0, P \cap \Omega, P) = 0.$$

D'ou le résultat demandé. □

Lemme 2.6. *Soient* $0 \in \Omega$, *et* $F : P \cap \overline{\Omega} \to P$ *un opérateur compact satisfaisant l'hypothèse*

$$Fx \nleq x, \forall x \in \partial\Omega \cap P. \text{ et } Fx \neq x, \forall x \in P \cap \partial\Omega. \tag{2.5}$$

Alors, $i(F, P \cap \Omega, P) = 0$.

Démonstration. Supposons par l'absurde que :

$$\forall u_0 > 0,\ \exists x_0 \in P \cap \partial\Omega,\ \exists \lambda_0 \geq 0 :\ x_0 - Fx_0 = \lambda_0 u_0.$$

On a deux cas

- Si $\lambda = 0$ on obtient $Fx_0 = x_0$, contradiction avec $Fx \neq x, \forall x \in P \cap \partial\Omega$
- Si $\lambda_0 > 0$ on obtient alors, $x_0 - Fx_0 = \lambda_0 u_0 > 0 \Rightarrow Fx_0 < x_0$, contradiction avec $\| Fx \| \geq \| x \|, \forall x \in P \cap \partial\Omega$.

D'où (2.5) $\Rightarrow$ (2.4) Et par le lemme 2.5, on conclut que $i(F, P \cap \Omega, P) = 0$. □

Lemme 2.7. *Soient* $0 \in \Omega$, *et* $F : P \cap \overline{\Omega} \to P$ *un opérateur compact satisfaisant l'hypothèse*

$$\|Fx\| \geq \|x\|, \forall x \in \partial\Omega \cap P. \text{ et } Fx \neq x, \forall x \in P \cap \partial\Omega. \tag{2.6}$$

Alors, $i(F, P \cap \Omega, P) = 0$.

Démonstration. Supposons par l'absurde que :

$$\exists x_0 \in P \cap \partial\Omega,\ \exists\ 0 < \lambda_0 \leq 1 \geq 0 : \lambda_0 x_0 = Fx_0.$$

On a deux cas

- Si $\lambda = 1$ on obtient $Fx_0 = x_0$, contradiction avec $Fx \neq x, \forall x \in P \cap \partial\Omega$
- Si $0 < \lambda_0 < 1$ on obtient alors ; $\lambda_0 x_0 = Fx \Rightarrow \|Fx\| > \|x_0\|$, contradiction avec $\| Fx \| \leq \| x \|, \forall x \in P \cap \partial\Omega$.

De plus on a

$$0 \in \Omega \Rightarrow \inf_{x \partial\Omega \cap P} \|Fx\| > \inf_{x \partial\Omega \cap P} \|x\| > 0.$$

D'où d'après le lemme 2.4 on conclut que $i(F, P \cap \Omega, P) = 0$. □

2.2 Théorèmes de point fixe positif

Nous commençons par le théorème principal qui est le théorème de Krasnosel'ski (1960).

2.2.1 Théorème du Krasnosel'ski

Théorème 2.1. *[5] Soient Ω_1 et Ω_2 deux ensembles ouverts et bornés dans un espace de Banach X tels que $0 \in \Omega_1$ et $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$, P un cône de X. Et $A : P \cap (\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1) \to P$ est un opérateur compact. Supposons que l'une des deux conditions*

$$(H_1) \qquad Ax \ngeq x, \forall x \in P \cap \partial\Omega_1 \ \textit{et}\ Ax \nleq x,\ \forall x \in P \cap \partial\Omega_2,$$

et

$$(H_2) \qquad Ax \nleq x, \forall x \in P \cap \partial\Omega_1 \ \textit{et}\ Ax \ngeq x,\ \forall x \in P \cap \partial\Omega_2.$$

soit satisfaite. Alors, A admet au moins un point fixe dans $P \cap (\Omega_2 \backslash \overline{\Omega}_1)$.

Démonstration. Par le théorème d'extension, A a une extension complètement continue (aussi dénotée par A) de $P \cap \overline{\Omega}_2$ dans P. On suppose d'abord que (H_1) est satisfaite, d'après les lemmes 2.6 et 2.3 on trouve que

$$i(A, p \cap \Omega_1, P) = 0 \ \text{ et } \ i(A, p \cap \Omega_1, P) = 1$$

D'ou d'après la propriété de l'additivité de l'indice du point fixe on obtient :

$$i(A, p \cap \Omega_2 \setminus \overline{\Omega_1}, P) = -1$$

qui nous assure l'existence d'un point fixe dans $\Omega_2 \setminus \overline{\Omega_1}$. Dans le cas où l'hypothèse (H_2) est vérifiée la démonstration se fait de la même méthode. □

Remarque 2.1. *Le théorème précédent s'appelle aussi le théorème de point fixe d'expansion et de compression d'un cône. Si l'opérateur A vérifie l'hypothèse (H_1) on dit que A est l'expanseur du cône P et on dit que A est le compresseur de P dans le cas où A satisfait (H_2).*

2.2.2 Théorème du Guo

Le théorème suivant est la généralisation du théorème se Krasnosl'ki qui est obtenu par Guo (1988). Ce théorème est la version de type norme du théorème d'expansion et de compression d'un cône.

Théorème 2.2. *[5] Soient Ω_1 et Ω_2 deux ensembles ouverts et bornés dans un espace de Banach X tels que $0 \in \Omega_1$ et $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$, P un cône de X. Et $A : P \cap (\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1) \to P$ est un opérateur compact. Supposons que l'une des deux conditions*

$$(H_3) \qquad \| Ax \| \leq \| x \|, \forall x \in P \cap \partial\Omega_1 \ \textit{et}\ \| Ax \| \geq \| x \|, \forall x \in P \cap \partial\Omega_2,$$

et

$$(H_4) \qquad \| Ax \| \geq \| x \|, \forall x \in P \cap \partial\Omega_1 \ \textit{et}\ \| Ax \| \leq \| x \|, \forall x \in P \cap \partial\Omega_2.$$

soit satisfaite. Alors, A possède au moins un point fixe dans $P \cap (\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1)$.

Démonstration. Nous avons seulement besoin de prouver ce théorème sous la condition (H_3), puisque la preuve est similaire lorsque (H_4) est satisfaite. Par le théorème d'extension, A peut être étendu à un opérateur complètement continu de $P \cap \overline{\Omega}_2$ dans P. d'après les lemme 2.2 et 2.7 on trouve que

$$i(A, p \cap \Omega_1, P) = 1 \quad \text{et} \quad i(A, p \cap \Omega_1, P) = 0$$

D'ou d'après la propriété de l'additivité de l'indice du point fixe on obtient que

$$i(A, p \cap \Omega_2 \setminus \overline{\Omega_1}, P) = -1$$

qui nous assure l'existence d'un point fixe dans $\Omega_2 \setminus \overline{\Omega_1}$. Dans le cas où l'hypothèse (H_2) est vérifié la démonstration se fait de la même méthode. □

Remarque 2.2. *les lemmes précédents restent correcte si on suppose que l'application F est complètement continue.*

2.3 Solution positive pour l'équation abstraite de Hammerstein

Soient E un espace de Banach, K un cône dans E, $L : E \to E$ un opérateur linéaire compact et croissant, $F : K \to K$ est une application continue et bornée. Nous concentrons notre attention dans cette section sur l'existence de point fixe positif pour l'opérateur LF.

Définition 2.1. *Pour tout sous-ensemble P de K avec $P^* = P\backslash\{0\} \neq \varnothing$ on définit les ensembles suivant*

$$\Lambda_p^+(L) = \{\lambda \geq 0 : \exists u \in P^* \text{ tel que } Lu \leq \lambda u\}$$

et

$$\Lambda_p^-(L) = \{\lambda \geq 0 : \exists u \in P^* \text{ tel que } Lu \geq \lambda u\}.$$

Lorsque ces quantités existent, on pose

$$\lambda_p^+ = \inf \Lambda_p^+(L), \quad \lambda_p^- = \sup \Lambda_p^-(L), \quad \lambda^+ = \inf \Lambda_k^+(L), \lambda^- = \sup \Lambda_k^-(L).$$

Remarque 2.3.
1. *Notons que $0 \in \Lambda_p^-(L)$, et si $\lambda \in \Lambda_p^-(L)$, alors $[0, \lambda] \subset \Lambda_p^-(L)$.*
2. *Si $\lambda \in \Lambda_p^+(L)$ alors $[\lambda, +\infty) \subset \Lambda_p^+(L)$.*
3. *On a $\Lambda_p^+(L) \subset \Lambda_k^+(L)$ et $\Lambda_p^-(L) \subset \Lambda_k^-(L)$.*

Lemme 2.8. *[7]*

1. *Si P est un cône et $L(K) \subset P$, alors $\Lambda_p^+(L) \neq \varnothing$.*

2. *Supposons que K est normal. Alors, pour tout sous-ensemble non vide $P \subset K, \Lambda_p^-(L)$ est délimité par le rayon spectrale $r(L)$ tel que,*

$$r(L) = \lim_{n\to\infty} \parallel L^n \parallel^{\frac{1}{n}} .$$

3. *Supposons que L est K-normal.*

   Alors, pour tout cône $P \subset K$ avec $L(K) \subset P, \Lambda_p^-(L)$ est borné par dessus par $r(L)$.

Remarque 2.4. *L est K-normal si $\exists\, u, v \in E, u \leq v \Rightarrow \parallel Lu \parallel \leq n \parallel Lu \parallel, \quad \forall n \in \mathbb{N}$*

Remarque 2.5. *Si L admet une valeur propre positive λ alors on a :*

$$\lambda^+ \leq \lambda^- \quad et \quad \lambda \in [\lambda^+, \lambda^-]$$

La question qu'on se pose maintenant; qu'elle est la relation entre λ_p^+ etλ_p^- dans le cas ou L n'admet aucune valeur propre positive.

Dans tout ce qui suit on va montrer que pour chaque cône P avec $L(K) \subset P \subset K$ et L complètement continue on a toujours $\lambda_p^+ \leq \lambda_p^+$ même si L n'admet pas de valeurs propres positives.

Proposition 2.1. *Soit $F : K \to K$ une fonction continue et bornée. Si l'une des hypothèses suivantes vérifiée :*

$$Fu \leq \alpha u \quad \forall u \in P^* \quad avec \quad \alpha\lambda_p^- < 1 \tag{2.7}$$

$$Fu \geq \beta u \quad \forall u \in P^* \quad avec \quad \beta\lambda_p^+ > 1 \tag{2.8}$$

avec $P \subset K$ est non vide et $L(K) \subset P$ alors l'équation :

$$LFu = u \tag{2.9}$$

n'admet aucune solution positive.

Démonstration. On donne la démonstration dans le cas ou (2.7) vérifiée, le deuxième cas est similaire.
Si on suppose qu' il existe $u \in k^*$ tel que $LFu = u$ donc $u \in P^*$ .D'après (2.7)

$$Fu \leq \alpha u$$

donc :

$$u = LFu \leq \alpha Lu \Rightarrow \frac{1}{\alpha}u \leq Lu \Rightarrow \frac{1}{\alpha} \in \Lambda_p^-$$

donc $\frac{1}{\alpha} < \lambda_p^-$ contradiction. □

Théorème 2.3. *On suppose que $L \in Q(E)$, $P \subset K$ un cône avec $L(K) \subset P$ et il existe des nombres réel α, β, R_1, R_2 avec*

$$\alpha\lambda_p^- < 1 \quad \beta\lambda_p^+ > 1 \quad 0 < R_1 < R_2$$

Si l'une des conditions suivantes vérifiée :

$$Fu \leq \alpha u \quad \forall u \in P \cap \partial B(0, R_1) \quad et \quad Fu \geq \beta u \quad \forall u \in P \cap \partial B(0, R_2) \tag{2.10}$$

$$Fu \geq \beta u \quad \forall u \in P \cap \partial B(0, R_1) \quad et \quad Fu \leq \alpha u \quad \forall u \in P \cap \partial B(0, R_2) \tag{2.11}$$

alors l'équation (2.9) admet une solution positive u avec $R_1 \leq \parallel u \parallel \leq R_2$

Démonstration. On donne la démonstration dans le cas où (2.10) est vérifié. Il suffit de montrer que :

$$LFu \ngeq u \ \ \forall u \in P \cap \partial B(0, R_1) \ \ \text{et} \ \ LFu \nleq u \ \ \forall u \in P \cap \partial B(0, R_2)$$

Si On suppose qu'il existe $u \in P \cap \partial B(0, R_1)$ tel que $LFu \geq u$, d'après (2.10) on a :

$$\begin{aligned} Fu \leq \alpha u \quad & \Rightarrow LFu \leq L\alpha u \\ & \Rightarrow u \leq LFu \leq \alpha Lu \\ & \Rightarrow \tfrac{1}{\alpha} u \leq Lu \\ & \Rightarrow \tfrac{1}{\alpha} < \lambda_p^- \ \ \text{contardiction} \end{aligned}$$

Et de même on peut montrer que $LFu \nleq u \ \ \forall u \in P \cap \partial B(0, R_2)$, et donc d'après le théorème d'expansion l'équation $LFu = u$ admet une solution positive u tel que $R_1 \leq \parallel u \parallel \leq R_2$ □

Théorème 2.4. *On suppose que $L \in Q(E)$, alors pour chaque cône $P \subset K$ avec $L(K) \subset P$ on a $\lambda_P^+ \leq \lambda_P^-$*

Démonstration. Si $\lambda_p^+ = 0$ c'est évident.
On suppose que $\lambda_p^+ > \lambda_p^- \geq 0$ et on considère la fonction $G : K \to K$ définie pour $u \in K$ par :

$$Gu = \frac{\beta u + \alpha \parallel u \parallel u}{1 + \parallel u \parallel}$$

avec

$$0 < \beta < \alpha \ \ \text{et} \ \ \beta\alpha_p^+ > 1 > \alpha\lambda_p^-$$

D'une part on a :

$$\begin{aligned} Gu - \alpha u \quad & = \tfrac{\beta u + \alpha \|u\| u}{1 + \|u\|} - \alpha u \\ & = \tfrac{\beta u + \alpha \|u\| u - \alpha u - \alpha u \|u\|}{1 + \|u\|} \\ & = \tfrac{(\beta - \alpha) u}{1 + \|u\|} < 0 \end{aligned}$$

Donc :

$$Gu \leq \alpha u \ \ \forall u \in K^* \ \ \text{et} \ \ \alpha\lambda_p^- < 1$$

alors d'après la proposition 2.1 l'équation $LGu = u$ n'admet aucune solution positive.
D'autre part pour chaque $0 < R_1 < R_2$ on a

$$Gu \leq \alpha u \ \ \forall u \in P \cap \partial B(0, R_1)$$

et $Gu - \beta u = \frac{(\alpha-\beta)u\|u\|}{1+\|u\|} > 0$ donc :

$$Gu \geq \beta u \ \ \forall u \in P \cap \partial B(0, R_2)$$

Donc d'après le théorème 2.3 l'équation $LGu = u$ admet une solution positive avec

$R_1 \leq\| u \|\leq R_2$ contradiction donc :$\lambda_p^- \geq \lambda_P^+$

□

Remarque 2.6. *D'après les lemmes 2.3et 2.6 Si $L \in Q(E)$, alors pour chaque cône $P \subset K$ avec $L(K) \subset P$ et pour chaque $R > 0$ on a*

1. $i(\alpha L, B(0, R) \cap P, P) = 1$ *si* $\alpha\lambda_p^- < 1$ *et*
2. $i(\beta L, B(0, R) \cap P, P) = 1$ *si* $\beta\lambda_p^+ > 1$

Théorème 2.5. *On suppose que $L \in Q(E)$, K est normale, $P \subset K$ un cône avec $L(K) \subset P$ et il existe $\alpha, \beta, \gamma > 0$ et des fonctions $G_i : K \to K, i = 1, 2, 3$ avec*

$$\alpha\lambda_p^- < 1 \quad \beta\lambda_p^+ > 1$$

$$Fu \leq \alpha u + G_1(u) \quad \forall u \in P^* \cap B(0, \gamma) \ \ pour \ \ \gamma > 0 \tag{2.12}$$

et

$$\beta u - G_2(u) \leq Fu \leq \gamma u + G_3(u) \quad \forall u \in P^* \tag{2.13}$$

Et si l'une des hypothèses suivantes vérifiée :

$$G_1(u) = 0(\| u \|) \ \ si \ \ u \to 0 \ et \ G_i(u) = 0(\| u \|) \ \ si \ \ u \to \infty \ \ \ i = 2, 3 \tag{2.14}$$

$$G_1(u) = 0(\| u \|) \ \ si \ \ u \to \infty \ et \ G_i(u) = 0(\| u \|) \ \ si \ \ u \to 0 \ \ \ i = 2, 3 \tag{2.15}$$

l'équation de Hammerstein $LFu = u$ admet une solution positive.

Démonstration. On donne la démonstration dans le cas ou (2.14) est vérifiée le deuxième cas est similaire. On a besoin de montrer qu'il existe $0 < r < R$ tel que

$$i(LF, B(0, r) \cap P, P) = 1 \quad \text{et} \quad i(LF, B(0, R) \cap P, P) = 0$$

Dans ce cas on trouve que :

$$i(LF, (B(0, R) - B(0, r)) \cap P, P) = i(LF, B(0, R) \cap P, P) - i(LF, B(0, r) \cap P, P) = 0 - 1 = -1$$

Donc l'équation $LFu = u$ admet une solution positive telle que $r \leq\| u \|\leq R$

i) Considérons la fonction $H_1 : [0,1] \times K \to K$ définie par :

$$H_1(t,u) = tLFu + (1-t)\beta Lu$$

et montrons qu'il existe $R > 0$ assez grand tel que pour chaque $t \in [0,1]$ l'équation $H_1(t,u) = u$ n'admet aucune solution sur $\partial B(0,R) \cap P$ si non :

$$\forall n \geq 1, \quad \exists t_n \in [0,1], \quad \exists u_n \in \partial B(0,R) \cap P$$

tel que $H_1(t_n, u_n) = u_n$ i.e

$$t_n LFu_n + (1-t_n)\beta Lu_n = u_n$$

Posons : $V_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$ alors on trouve :

$$V_n = t_n L \frac{Fu_n}{\| u_n \|} + (1-t_n)\beta LV_n \tag{2.16}$$

Et d'après (2.13) on a :

$$\beta V_n - \frac{G_2(u_n)}{\| u_n \|} \leq \frac{Fu_n}{\| u_n \|} \leq \gamma V_n + \frac{G_3(u_n)}{\| u_n \|} \tag{2.17}$$

Et comme K est normale on trouve :

$$\frac{1}{N}\beta \| V_n \| - \frac{\| G_2(u_n) \|}{\| u_n \|} \leq \frac{\| Fu_n \|}{\| u_n \|} \leq N\gamma \| V_n \| + \frac{\| G_3(u_n) \|}{\| u_n \|}$$

et de plus comme $G_i(u) = 0(\| u \|)$ à ∞ alors on conclut que la suite $\frac{Fu_n}{\|u_n\|}$ est bornée.
D'après la compacité de L il existe une sous-suite V_n aussi notée V_n qui converge vers $V \in \partial B(0,R) \cap P$ posons $t_n \to t_0$ dans $[0;1]$, en passant aux limites dans (2.16) on trouve :

$$V = \lim_{n\to\infty} V_n \geq t_0 \lim_{n\to\infty} L(\frac{Fu_n}{\| u_n \|}) + (1-t_0)\beta LV$$

en passant aussi aux limites dans (2.17) on trouve :

$$\beta V \leq \lim_{n\to\infty} \frac{Fu_n}{\| u_n \|} \Rightarrow \beta LV \leq \lim_{n\to\infty} L(\frac{Fu_n}{\| u_n \|})$$

Donc

$$LV \leq \frac{1}{\beta} V \Rightarrow \frac{1}{\beta} \geq \lambda_P^+$$

et ceci est en contradiction avec $\beta\lambda_P^+ > 1$ Alors il existe $R > 0$ tel que :

$$\begin{aligned} i(LF, B(0,R) \cap P, P) &= i(H_1(1,.), B(0,R) \cap P, P) \\ &= i(H_1(0,.), B(0,R) \cap P, P) \\ &= i(\beta L, B(0,R) \cap P, P) = 0 \quad \text{(d'aprés la remarque (2.6))} \end{aligned}$$

Considérons la fonction $H_2 : [0,1] \times K \to K$ définit par :

$$H_2(t,u) = tLFu + (1-t)\alpha Lu$$

et montrons qu'il existe $r > 0$ assez petit tel que pour chaque $t \in [0, 1]$ l'équation $H_2(t, u) = u$ n'admet aucune solution dans $\partial B(0, r) \cap P$ si non :

$$\forall n \geq 1, \quad \text{avec} \frac{1}{n} < \sigma \quad \exists t_n \in [0, 1], \quad \exists u_n \in \partial B(0, \frac{1}{n}) \cap P$$

tel que $H_2(t_n, u_n) = u_n$ i.e.

$$t_n LFu_n + (1 - t_n)\alpha Lu_n = u_n$$

Posons : $V_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$ alors on trouve :

$$V_n = t_n L \frac{Fu_n}{\| u_n \|} + (1 - t_n)\alpha LV_n = V_n \tag{2.18}$$

Et d'après (2.12) on a :

$$\frac{Fu_n}{\| u_n \|} \leq \alpha V_n + \frac{G_1(u_n)}{\| u_n \|} \tag{2.19}$$

Et comme K est normale on trouve :

$$\frac{\| Fu_n \|}{\| u_n \|} \leq N\alpha \| V_n \| + \frac{\| G_1(u_n) \|}{\| u_n \|}$$

De plus, comme $G_1(u) = 0(\| u \|)$en 0 alors on conclut que la suite $\frac{Fu_n}{\|u_n\|}$ est bornée. d'après la compacité de L il existe une sous-suite V_n aussi noté V_n qui converge vers $V \in \partial B(0, \frac{1}{n}) \cap P$

En passant aux limite on trouve :

$$V = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} L(\frac{Fu_n}{\| u_n \|}) + (1 - t_0)\alpha Lv$$

et d'après (2.19) on trouve :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{FU_n}{\| U_n \|} \leq \alpha V \Rightarrow \lim_{n\to\infty} L \frac{FU_n}{\| U_n \|} \leq \alpha LV$$

Donc

$$LV \geq \frac{1}{\alpha} V \Rightarrow \frac{1}{\alpha} \leq \lambda_P^-$$

et ceci est en contradiction avec $\alpha\lambda_P^- < 1$ Alors il existe $r > 0$ tel que :

$$\begin{aligned} i(LF, B(0, R) \cap P, P) &= i(H_2(1, .), B(0, r) \cap P, P) \\ &= i(H_2(0, .), B(0, r) \cap P, P) \\ &= i(\alpha L, B(0, r) \cap P, P) = 1 \quad \text{(d'aprés la remarque 2.6)} \end{aligned}$$

D'ou le résultat. □

Chapitre 3

Application

Dans ce chapitre, on trouve une solution positive à un problème E.D.O, E.D.P ou a une équation intégrale très importante dans l'analyse fonctionnelle. On applique les théorèmes présentés dans le chapitre précédent pour montrer l'existence d'une on de la solution positive aux quelques problèmes aux limites associée aux équations différentielles ordinaires.

3.1 Problème aux limites de second ordre

Considérons le problème aux limites du second ordre d'une équation différentielle ordinaire suivant :

$$(Pb) \qquad \begin{cases} -u'' = f(u) & 0 \leq t \leq 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

où $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est continue, et vérifie $f(0) = 0$. Évidemment, $u(t) \equiv 0$ est la solution triviale du problème (Pb). Soit $E = C([0,1])$ muni de la norme $\|u\| = \sup_{x\in[0,1]} |u(x)|$ On définit l'opérateur $A : E \to E$ par

$$(Au)(t) = \int_0^1 G(t,s)f[u(s)]ds,$$

où $G(t,s)$ est la fonction de Green de l'opérateur différentiel $-u''$, avec les condition aux limites de Dirichlet $u(0) = u(1) = 0$, donnée par ;

$$G(t,s) = \begin{cases} t(1-s) & , \quad 0 \leq t \leq s \leq 1, \\ s(1-t) & , \quad 0 \leq s \leq t \geq 1. \end{cases} \tag{3.1}$$

Lemme 3.1. *u est une solution de problème (Pb) si et seulement si u est un point fixe de l'opérateur A.*

Propriété 3.1. *La fonction définie par (3.1) vérifie les propriétés suivantes*

1. $0 < G(t,s) \leq G(s,s) = s(1-s),\ t > 0, s < 1,$
2. $G(t,s) \geq \frac{1}{4}s(1-s),\ t \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}],\ s \in [0,1],$
3. $\int_0^1 G(t,s)ds = \dfrac{t(1-t)}{2} \leq \frac{1}{8},\ \forall t \in [0,1],$
4. $\frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 G(t,s)ds = \dfrac{t(1)}{2},\ \forall t \in [0,1],$
5. $\max\limits_{0\leq t\leq 1} \int_0^1 G(t,s)ds = \frac{1}{8},$
6. $\min\limits_{\frac{1}{4}\leq t\leq \frac{3}{4}} \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} G(t,s)ds = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} G(\frac{1}{4},s)ds = \frac{1}{16},$
7. $\min\limits_{0\leq r\leq 1} \dfrac{G(\frac{1}{4},r)}{(\frac{1}{2},r)} = \frac{1}{2}.$

Lemme 3.2. *L'opérateur $A : E \to E$ est un opérateur complètement continu.*

Démonstration. Pour montrer que A est complètement continu il faut montrer que A est continu et pour chaque ensemble borné de E, $A(B)$ est relativement compact.

1. A est continu sur E, soit $(u_n)_n \in E$ une suite qui converge vers un certain élément u, on a

$$(Au_n)(t) = \int_0^1 G(t,s)f(u_n(s))ds,\ \forall t \in [0,1].$$

D'une part, la continuité de f entraîne que

$$f(u_n(s)) \to f(u(s)),\ \forall s \in [0,1] \text{ quand } n \to +\infty.$$

D'autre part, on a pour tout $t \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} |(Au_n)(t)| &\leq |\int_0^1 G(t,s)f(u_n(s))ds| \\ &\leq \sup_{s\in[0,1]} |f(u_n(s))| \int_0^1 |G(t,s)|ds \\ &\leq \tfrac{M}{8} \in L^1([0,1]). \end{aligned}$$

Ainsi, on a vérifié les deux conditions du théorème de la convergence dominée de Lebesgue, donc $Au \in L^1([0,1])$ et $\| Au_n - Au \|_{L^1([0,1])} \to 0$ quand $n \to +\infty$. ceci montre la continuité de A sur $C([0,1])$.

2. A est borné sur E, soit $u \in C([0,1])$, alors

$$|(Au)(t) \leq \frac{M}{8} < \infty, \ \forall t \in [0,1].$$

3. Soit B un ensemble borné de E, pour montrer que $A(B)$ est relativement compact nous allons utiliser le théorème d'Scoli-Arzela.
   - $A(B)$ est borné car A est borné.
   - $A(B)$ est équicontinu, en effet soit $t_1, t_2 \in [0,1]$ et soit $u \in B$ on a

$$\begin{aligned} \|Au(t_1) - Au(t_2)\| &= \left\| \int_0^1 (G(t_1,s) - G(t_2,s))f(u(s))ds \right\| \\ &\leq \sup_{s\in[0,1]} \|f(u(s))\| \int_0^1 |(G(t_1,s) - G(t_2,s)|ds \\ &\leq \|f\| \int_0^1 |(G(t_1,s) - G(t_2,s)|ds \to 0, \text{lorsque} t_1 \to t_2 \end{aligned}$$

   d'où $A(B)$ est compact ce qui termine la démonstration.

□

Théorème 3.1. *En exigeant à f de satisfaire les deux conditions suivantes :*

$$0 \leq \overline{\lim_{u\to 0}} \frac{f(u)}{u} < 8 \tag{3.2}$$

et

$$24\sqrt{3} < \overline{\lim_{u\to+\infty}}, \frac{f(u)}{u} < 8. \tag{3.3}$$

alors le problème (Pb) a au moins une solution non triviale $u(t)$, qui appartient à $C^2[0,1]$ et qui satisfait la condition suivante $u(t) > 0, \forall 0 < t < 1$.

Démonstration. On considère les ensembles suivants

$$P = \{u \in C([0,1]) : \ u(t) \geq 0, \ \forall t \in [0,1]\}$$

$$P_1 = \{u \in P : \min_{\frac{1}{4},\frac{3}{4}} u(t) \geq \frac{1}{4} \parallel u \parallel\}$$

qui sont des cônes sur $C([0,1])$.

1. Montrer que $A : P \to P_1$.

   Soit $u \in P$, d'après les propriétés de la fonction de Green G on a

$$\min_{t\in[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]} (Au)(t) = \min_{t\in[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]} \int_0^1 G(t,s)f(u(s))ds \geq \frac{1}{4}\int_0^1 s(1-s)f(u(s))ds \geq \frac{1}{4} \parallel Au \parallel,$$

   et comme $(Au)(t) \geq 0, \forall t \in [0,1]$, alors $Au \in P_1$.

2. Montrer qu'il existe $r > 0$, tel que

$$\forall u \in P_r = P \cap B(0,r), \ \|Au\| \leq \|u\|.$$

La condition $0 \leq \overline{\lim\limits_{u\to 0^+}} \dfrac{f(u)}{u} < 8$ et la définition de la limite supérieure nous permettent de choisir $r > 0$ tel que $0 \leq f(u) \leq 8u, 0 \leq u \leq r$. Soit $u \in P_1$ avec $\| u \| = r$, alors ;

$$\begin{aligned} |(Au)(t)(t)| &= | \textstyle\int_0^1 G(t,s)f(u(s))ds| \\ &\leq 8| \textstyle\int_0^1 G(t,s)u(s)ds| \\ &\leq 8 \| u \| \textstyle\int_0^1 |G(t,s)|ds \\ &\leq 8 \| u \| \tfrac{1}{8} \\ &\leq \| u \| . \end{aligned}$$

Donc, $\max\limits_{t\in[0,1]} |(Au)(t)| = \| Au \| \leq \| u \|$.

3. Montrer qu'il existe $R > r$, tel que

$$\forall u \in P_R = P \cap B(0,R), \|Au\| \geq \|u\|.$$

La condition $\frac{128}{3} < \underline{\lim\limits_{u\to\infty}} \frac{f(u)}{u}$ entraîne qu'il existe $\eta > 0$ tel que $f(u) \geq \frac{128}{3}u$, si $u \geq \eta$. Soit $R = \max\{2r, 4\eta\}$, Si $u \in P_1$ et $\| u \| = R$, on a alors,

$$\min_{\frac{1}{4},\frac{3}{4}} u(t) \geq \frac{1}{4} \| u \| = \frac{R}{4} \geq \eta \Rightarrow f(u(t)) \geq \frac{128}{3}u(t), \ \forall t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right].$$

soit $u \in P_1$ avec $\|u\| = R$, alors

$$\begin{aligned} |(Au)(\tfrac{1}{2}| &= \textstyle\int_0^1 G(\tfrac{1}{2},s)f(u(s))ds \\ &\geq \textstyle\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} G(\tfrac{1}{2},s)f(u(s))ds \\ &\geq \tfrac{128}{3} \left[\min_{s\in[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]} u(s)\right] \textstyle\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} G(\tfrac{1}{2},s)ds \\ &\tfrac{128}{3} \left(\tfrac{1}{4} \| u \|\right) \textstyle\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} G(\tfrac{1}{2},s)ds \\ &\geq \frac{32}{3} \| u \| J \\ &= \| u \| \end{aligned}$$

où $J = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} G(\frac{1}{2},s)ds = \frac{3}{32}$. Donc

$$\| Au \| = \max_{0\leq t\leq 1} |(Au)(t)| \geq |(Au)(t)| \geq |(Au)(\frac{1}{2})| \geq \| u \|$$

D'où $\| Au \| \geq \| u \|, \forall u \in \partial P_R$ Par conséquent, d'après le théorème de Guo 2.2, l'opérateur A admet un point fixe $u \in P_1 \cap (U_R \backslash \overline{P}_r) = P_1 \cap \{u \in Pb : r < u < R\}$. Ceci est équivalent à dire que le problème (Pb) admet au moins une solution $u \in C^2([0,1])$ avec $u(t) > 0$ sur $(0,1)$ d'après le lemme 3.1

□

Remarque 3.1. *Cet exemple s'etend au cas d'expansion d'un cône de type norme. On peut considérer aussi un exemple de cas de compression d'un cône donnant le même résultat. Supposons qu'une fonction* $f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ *satisfait*

1. $\lim\limits_{u \to 0^+} \dfrac{f(u)}{u} > \frac{128}{3}$,
2. $0 \leq \overline{\lim\limits_{u \to +\infty}} \dfrac{f(u)}{u} < 4$.

Alors, Le problème (Pb) *admet au moins une solution* $u \in C^2([0,1])$ *avec* $u(t) > 0$ *sur* $(0,1)$.

3.2 Problème aux limites du troisième ordre

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -u'''(x) = a(x)f(u(x)) & x \in]0,1[\\ u(0) = u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

où $a \in C([0,1], \mathbb{R}^+)$ non identiquement nulle sur chaque sous-intervalle de $[0,1]$ et $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue.

Et on considère aussi le problème de valeur propre associé :

$$\begin{cases} -u'''(x) = \lambda a(x)u(x) & x \in]0,1[\\ u(0) = u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

Soit :

$$X = \{u \in C^2([0,1]), u(0) = u'(0) = u'(1) = 0\}$$

et la norme associée est définie pour $u \in X$ par :

$$\| u \| = \sup\{|u''(t)|, t \in [0,1]\}$$

Et on considère l'opérateur $L : X \to X$ donné par :

$$Lu(x) = \int_0^x (\int_0^1 G(s,t)a(t)u(t)dt)ds \tag{3.6}$$

Ou :

$$G(s,t) = \begin{cases} s(1-t) & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ t(1-s) & 0 \leq t \leq s \leq 1 \end{cases}$$

la fonction de green associe à l'opérateur $\frac{-d^2}{dx^2}$ avec les conditions de Dirichlet. [7]

Lemme 3.3. $\lambda > 0$ *est une valeur propre positive de problème 3.5 si et seulement si* λ^{-1} *est une valeur propre de l'opérateur* L.

Démonstration. Soit $\lambda > 0$ une valeur propre de l'opérateur L i.e

$$\lambda u(x) = Lu(x) = \int_0^x \left(\int_0^1 G(s,t)a(t)u(t)dt \right) ds$$

donc :

$$\lambda u'(x) = \int_0^1 G(x,t)a(t)u(t)dt$$

alors :

$$\begin{aligned}\lambda u'(x) &= \int_0^x t(1-x)a(t)u(t)dt + \int_x^1 x(1-t)a(t)u(t)dt \\ &= (1-x)\int_0^x ta(t)u(t)dt + x\int_x^1 (1-t)a(t)u(t)dt\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}\lambda u''(x) &= -\int_0^x ta(t)u(t)dt + (1-x)xa(x)u(x) + \int_x^1 (1-t)a(t)u(t)dt - (1-x)xa(x)u(x) \\ &= -\int_0^x ta(t)u(t)dt + \int_x^1 (1-t)a(t)u(t)dt\end{aligned}$$

et finalement :

$$\begin{aligned}\lambda u'''(x) &= -xa(x)u(x) - (1-x)a(x)u(x) \\ &= -a(x)u(x)\end{aligned}$$

d'ou λ^{-1} est une valeur propre de problème 3.5 □

Soit λ une valeur propre de problème 3.5 donc :

$$\begin{cases} -u'''(x) = \lambda a(x)u(x) & x \in]0,1[\\ u(0) = u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

Soit $v = u'$ donc on obtient :

$$\begin{cases} -v''(x) = \lambda a(x)u(x) & x \in]0,1[\\ v(0) = v(1) = 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

une solution de problème 3.7 est écrit de forme :

$$v(x) = \lambda \int_0^1 G(x,t)a(t)u(t)dt$$

donc :

$$u(x) = \lambda \int_0^x \int_0^1 G(x,t)a(t)u(t)dt = \lambda Lu(x)$$

d'ou le résultat.

Théorème 3.2. *[7] Le problème 3.5 admet une valeur propre positive unique* $\lambda_1 \frac{1}{r(L)} > 0$

Proposition 3.1. *Si l'une des hypothèses suivantes :*

$$\inf\left\{\frac{f(u)}{u}, \quad u > 0\right\} > \lambda_1$$

ou

$$\sup\left\{\frac{f(u)}{u}, \quad u > 0\right\} < \lambda_1$$

est vérifiée alors le problème 3.4 n'admet aucune solution positive. ou λ_1 *est la seule valeur propre positive de* L $\left(\lambda_1 = \frac{1}{r(L)}\right)$.

Notations

$$f^0 = \limsup_{u\to 0}(\frac{f(u)}{u}) \qquad f_0 = \liminf_{u\to 0}(\frac{f(u)}{u})$$
$$f^\infty = \limsup_{u\to 0}(\frac{f(u)}{u}) \quad f_\infty = \liminf_{u\to 0}(\frac{f(u)}{u})$$

Soit $E = C([0,1])$, $L : E \to E$ l'opérateur défini dans (3.6), et soit C le cône nature de E l'opérateur de Nemytski $F : C \to C$ défini par ;

$$Fu = f(u(t))$$

C'est clair que d'après la continuité de f, F borné et continu.

Lemme 3.4. *[7] Soit*

$$\lambda_C^+ = \inf\{\lambda \geq 0 : Lu \leq \lambda u \quad pour\ u \in C^*\}$$

et

$$\lambda_C^- = \sup\{\lambda \geq 0 : Lu \geq \lambda u \quad pour\ u \in C^*\}$$

le problème 3.5 admet une seule valeur propre positive $\mu_1$et $(\mu_1)^{-1} = \lambda_C^+ = \lambda_C^-$

Théorème 3.3. *Soit $\mu_1 = \frac{1}{r(L)}$, si l'une des hypothèses suivant :*

$$f^0 < \mu_1 < f_\infty \leq f^\infty < \infty \tag{3.8}$$

ou

$$f^\infty < \mu_1 < f_0 \leq f^0 < \infty \tag{3.9}$$

est vérifiée alors le problème 3.4 admet une solution positive.

Démonstration. une solution de problème 3.4 est un point fixe de l'opérateur LF, donc il suffit de montrer que LF admet un point fixe : d'après 3.8 on a : $f^0 < \mu_1$ donc :

$$\exists\theta > 0 \text{tel que} \forall u, |u| \leq \theta \text{on a :} \frac{f(u)}{u} < \mu_1$$

alors pour $u \in C^* \cap B(0,\theta)$ on a :

$$\frac{f(u(t))}{u(t)} < \mu_1$$

donc $\exists\epsilon > 0$ tel que

$$F(u) \leq (\mu_1 - \epsilon)u \quad \text{pour} \quad u \in C^* \cap B(0,\theta)$$

posons $G : C \to C$ une fonction définie pour $u \in C$ par

$Gu(t) = \max\{f(u(t)) - f^0 u(t), 0\}$, G est une fonction continue et de plus

on a :

$$0 < \lim_{u\to 0} \frac{G(u)}{\| u \|} \leq \limsup_{u\mapsto\infty} \frac{f(u) - f^0 u}{u} = 0$$

et

$$F(u) \leq (\mu_1 - \epsilon)u + G(u) \quad \text{pour} \quad u \in C^* \cap B(0, \theta)$$

et d'après : $\mu_1 < f_\infty \leq f^\infty$ on a :

$$\exists \eta > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall u \quad |u| > \eta \quad \mu_1 < \frac{f_u}{u} \leq f^\infty$$

donc $\exists \epsilon > 0$ tel que pour $|u| > \eta$ on :

$$(u_1 + \epsilon)u \leq f(u) \leq (f^\infty + \epsilon)u \tag{3.10}$$

et comme f est continue alors pour $u \in [0, \eta]$ il existe C_1, C_2 des nombres positifs tels que :

$$-C_1 \leq f(u) \leq C_2 \tag{3.11}$$

Finalement d'après (3.10) et (3.11) on trouve que pour chaque $u > 0$ on a :

$$(u_1 + \epsilon)u - C_1 \leq f(u) \leq (f^\infty + \epsilon)u + C_2$$

donc pour $u \in C^*$ on a :

$$(u_1 + \epsilon)u(t) - C_1 \leq f(u(t)) \leq (f^\infty + \epsilon)u(t) + C_2$$

et alors :

$$(u_1 + \epsilon)u - C_1 \leq F(u) \leq (f^\infty + \epsilon)u + C_2$$

d'ou le résultat d'après le théorème 2.5 avec $\alpha = \mu_1 - \epsilon$ et $\beta = \mu_1 + \epsilon$. $\square$

Annexes

3.3 théorèmes d'extension de Dugundji

Théorème 3.4. *[9]*

soient X et Y deux espaces vectoriels normés,$A \subset X$ une partie fermée de X et $f : A \to Y$ une application continue.

Alors, f admet une extension continue $\tilde{f} : X \to Y$ telle que $\tilde{f}(X) \subset Conv(f(A))$.

soient X et Y deux espaces de Banach, $A \subset X$ une partie fermée bornée de X et $f : A \to Y$ une application compacte.

Alors, f admet une extension compacte $\tilde{f} : X \to Y$ telle que $\tilde{f}(X) \to Conv(f(A))$.

3.4 Critère de compacité d'Ascoli-Arzéla

Théorème 3.5.

soient X un espace métrique compact, Y un espace de Banach et $H \subset C(X, Y)$ un sous-espace muni de la norme sup.

Alors, H est relativement compact si et seulement si :

1. *H est uniformément borné, i.e.*

$$\forall x \in X, \text{ l'ensemble } \{f(x) : f \in H\} \text{ est borné dans } Y.$$

2. *H est équicontinu,i.e.*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists V \subset V(x), \forall y \in X, y \in V \Rightarrow \| f(y) - f(x) \| \leq \varepsilon, \forall f \in H.$$

- *Cas où $X = [a, b] \subset \mathbb{R}^n$ et $Y = R$.*

Théorème 3.6.

soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C([a, b], \mathbb{R}^n)$ une suite vérifiant

1. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est uniformément bornée, i.e.*

$$\exists c>0, \forall n\in\mathbb{N} : \parallel f_n \parallel \leq c \parallel g \parallel .$$

2. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est équicontinue,i.e.*

$$\forall \varepsilon>0, \exists \delta=\delta(\varepsilon), \forall x,y\in[a,b] : |x-y|\leq \varepsilon \Rightarrow |f_n(x)-f_n(y)|\leq \varepsilon, \forall n\in\mathbb{N}.$$

Alors, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet une sous-suite convergente.(i.e.* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est relativement compacte.)*

Corollaire 3.1.
Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée dans* $C^1([a,b],R)$*, i.e.* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est bornée dans* $C([a,b],R)$*, indépendamment de* n*.*
Alors, elle admet une sous-suite convergente dans $C([a,b],R)$

Lemme 3.5. ***Lemme de Sard***
Soient $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ *un ouvert et* f *une application continument dérivable sur* Ω*. Alors, l'ensemble* $f(S_f(\Omega))$ *est de mesure de Lebesgue-nulle. [10]*

3.5 théorème de la convergence dominée de Lebesgue

Théorème 3.7.
soit $(f_n)_{n\to\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions appartenant à* $L^1(\Omega)$ *avec* $\Omega\subset\mathbb{R}^n$*.*
on suppose que :

1. $f_n(x)\to f(x)$ *p.p sur* Ω*.*
2. *il existe une fonction* $g\in L^1(\Omega)$ *telle que*

$$\forall n\in\mathbb{N}, |f_n(x)|\leq g(x) p.p \ sur \ \Omega.$$

Alors,

$$f\in L^1(\Omega) \ et \ \parallel f_n - f \parallel_{L^1(\Omega)}\to 0.$$

3.6 Théorème des points fixes multiples du H.Amann

Théorème 3.8. *[1] Soient* X *un espace de Banach,* $D\subset X$ *un rétracté,et* $F:D\to D$ *un opérateur compact sans point fixe sur* ∂D*. Supposons que* D_1, D_2 *sont deux rétractés disjoints de* D*,* $\Omega_i\subset D_i$ *un ouvert de* D *pour* $i\in\{1,2\}$*. Supposons de plus que* $F(D_i)\subset D_i$ *et Fix(*F*)*$\cap(D_i\backslash\Omega_i)=\varnothing$*, où Fix(*$F$*) désigne l'ensemble des points fixes de* F*. Alors,* F *admet au mois trois points fixes distincts* x, x_1, x_2 *tel que*

$$x_i\in\Omega_i \ et \ x\in D\backslash(D_1\cup D_2)$$

Conclusion et perspective

Dans ce travail, nous avons démontré quelques théorèmes du point fixe positif dans un espace de Banach pour les applications compactes, en utilisant de la théorie de l'indice du point fixe sur les cônes.

Nous avons aussi appliqué ces théorèmes pour montrer l'existence d'une solution positive pour certains problèmes aux limites associés aux équations différentielles ordinaires.

Nous souhaiterions dans le futur, qu'ils s'appliquent sur le cas de type fonctionnel et peut être aussi le cas des équations différentielles fractionnaires.

Bibliographie

[1] H. Amann, Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordred Banach spaces, SIAM Review 18 (1976) ; 620-709

[2] R. Avery . D.R. Anderson, Fixed point theorem of cone expansion and compression of fonction, J, Dier, Eqn, Appl, 8(2002)1073-1083

[3] R. Avery. D.R.Anderson , R.J. Krueger, An extension of the Fixed point theorem of cone expansion and compression of fonctional type, (2006)

[4] S. Djebali, Degré topologique, théorie et application aux EDO-EDP, Cours policopié, Département de mathématiques, ENS-Kouba, Alger, (1998)

[5] D. Guo, V. Lakshmikantham, Nonlinear Problèms in Abstract Cones, Acad Press, San Diiego, (1988).

[6] M.A. Krasnosel'skii, Positive solutions of operator equations, Noordhoff, Groningen. The netherlands (1964).

[7] A. Benmezai,Jouhn R.GRAF, *Positive solution to the linear abstract Hammerstein equation and applications to $\phi-$Laplacian BVP_s Nonlinear Diff. Equat. Appl. 20(3), 489-510 (2013).Communications in Mathematical Analysis Volume 16, Number 1, pp. 47–65 (2014) ISSN 1938-9787*

[8] S. Djebali. Le degré topologique. Théorie et application. Département de Mathématiques, E.N.S. Kouba, Alger, Algérie, 2007.

[9] Dugundji J. Granas A., Fixed point Theory. Vol I, Monograf, Mat, N 61, PFN-Polish Scientific Pub. Warzawa, 1982

[10] O. Kavian , Introduction à la Théorie des Points Critiques et Applications aux problèmes elliptiques, Springer Verlag, Math. et Appl., Vol 13 ; 1993