الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة أكلي محند أولحاج - البويرة -
Université Akli Mohand Oulhadj - Bouira -
Tasdawit Akli Muḥend Ulḥağ - Tubirett -

كلية العلوم الإقتصادية والتجارية وعلوم التسيير
Faculté des Sciences Economiques, Commerciales et des Sciences de Gestion

مطبوعة مقدمة لطلبة السنة الأولى LMD جذع مشترك

محاضرات في مقياس

الإحصاء 2

إعداد الأستاذ: حيدوشي عاشور

السنة الجامعية: 2020/2019

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة

الحمد لله وحده والصلاة والسلام على من لا نبي بعده محمد وعلى آله وصحبه وبعد:

فإن هذه المطبوعة التي نضعها بين أيدي طلبة كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير ، نهدف من ورائها لتعليم الطالب المهارات الأساسية لعدد من المحاور المتعلقة ببرنامج الاحصاء 2 والتي تؤهله لفهم جيد لمقرر البرنامج، وقد راعينا في ذلك إعطاء بعض التفاصيل النظرية والتطبيقية التي يحتاج إليها الطالب في التطبيقات المباشرة دون التعمق بشكل كبير في المسائل النظرية حرصا منا على إيصال المعلومة الواضحة للطالب مع الحرص أكثر على أن تكون المطبوعة غنية بالأمثلة والتمارين المحلولة حتى يتسنى للطالب الفهم بشكل واضح والإلمام بمختلف محاور المقياس.

سعينا في هذه المطبوعة إلى تبسيط القوانين الأساسية المتعلقة بمقياس الاحصاء 2 وتزويد الطالب بحلول الأمثلة و بعض التمارين، و تطبيقات القوانين من أجل استيعابها، وتمكينه من استعمالها في حل مختلف المسائل المشابهة وذلك لرفع مهاراته وقدراته والربط بين تلك القوانين واستخداماتها في المسائل التطبيقية، إذ تمكن دراسة هذه المطبوعة الطالب من:

- الإلمام بالمفاهيم الخاصة بالمجموعات والعمليات عليها.
- معرفة القواعد الأساسية لطرق العد وتكوين مجموعة إمكانات التجارب العشوائية.
- الإلمام بمفهوم الاحتمالات وكيفية حسابها.
- معرفة المفاهيم المتعلقة بالمتغيرات العشوائية وطبيعتها.
- استخدامات قوانين التوزيعات الاحتمالية الخاصة.

ولتحقيق هذه الأهداف قمنا بتقسيم هذا العمل الذي هو بين أيديكم إلى أربعة فصول:

خصص الفصل الأول منه للمفاهيم الأساسية للاحتمالات حيث سنتناول في هذا الفصل المفاهيم المتعلقة بنظرية المجموعات والعمليات عليها، التجارب العشوائية وكيفية تحديد طرق العد والأحداث من خلال استخدامات التحليل التوفيقي، المفاهيم الأساسية للاحتمالات وطرق حسابها وخواصها، وكذا الاحتمالات الشرطية والمستقلة، قاعدة الاحتمال الكلي وقاعدة بايز.

أما الفصل الثاني والذي جاء بعنوان: " المتغيرات العشوائية" التي هي اقترانات حقيقية نعرفها على فضاء العينة لتجربة إحصائية وبالتالي المتغير العشوائي يعين قيمة عددية لكل نتيجة بسيطة أو كل نقطة من فضاء العينة، فقد ركزنا من خلاله على تحديد مفهوم المتغيرات العشوائية وأنواعها مع دراسة دالة كتلة

الاحتمـال الخاصـة بـالمتغير العشـوائي المنفصـل ودالـة كثافـة الاحتمـال للمتغـير العشـوائي المتصـل وكـذا دالـة التوزيع التراكمي وكيفيات حساب التوقع الرياضي، التباين والدالة المولدة لعزوم المتغير العشوائي.

ينتقـل الفصـل الثالـث لدراسـة قـوانين التوزيعـات الاحتماليـة الخاصـة بـالمتغير العشـوائي المنفصـل مثـل التوزيـع المنـتظم المنفصـل، توزيـع بيرنـولي وتوريـع ذي الحـدين، تجـارب التوزيـع فـوق الهندسـي والتوزيـع الهندسـي وكذا توزيع بواسون.

فيمـا يتعـرض الفصـل الرابـع لدراسـة التوزيعـات الاحتماليـة المتصـلة الـتي يحتاجهـا الطالـب فيمـا بعـد في السـنوات الاحقـة لدراسـته في تخصصـات العلـوم الاقتصـادية بشـكل عـام ومـن هـذه التوزيعـات، التوزيـع الطبيعي، توزيع كاي – مربع، توزيع ستودنت أو توزيع **t** و توزيع فيشر **F**.

الفصل الأول:

المفاهيم الأساسية للاحتمالات

تمهيد:

تلعب نظرية الاحتمالات دور رئيسي في الاقتصاد وغيره من المجالات الحياتية الأخرى، حيث نستطيع عن طريقها دراسة القوانين الاقتصادية التي تدرس الظواهر العرضية (العشوائية) التي تتكرر والتي نستطيع بموجبها أن نحكم على صحة هذا القانون أو خطئه.

كما تلعب نظرية الاحتمال أيضا دور رئيسي في التخطيط عند عدم إمكانية التكهن بالاتجاه العام للظواهر وبالتالي عدم تحديد أسبابها والتحكم بها كالتأمين على الحياة والحوادث وغيرها، إذ يدخل مفهوم الاحتمال في حياتنا ومعاملاتنا اليومية من خلال ما نود القيام به ولا نعرف مدى تحققه أو إذا كنا نستطيع القيام به أم لا، فجل الأعمال التي نود القيام بها تخضع لدرجة من عدم التأكد، وعدم تأكيد صحة نتائج التجارب العشوائية موجود في الاحصاء الاستدلالي.

العلم الذي يبحث في عدم التأكد هو نظرية الاحتمال والتي تساعد في السيطرة على مقدار عدم التأكد كما تساعد في تعميم استخدامات المفاهيم التي تصح لمتغير يعتمد على مجتمع محدد كالمتوسط الحسابي والانحراف المعياري، لأن تكون مفاهيم تصح لجميع أنواع المتغيرات.

لابد قبل الدخول في حساب الاحتمال، من أن نعرج على بعض التعاريف المهمة والمرادفة لدراسة مفهوم الاحتمال ومنها نظرية المجموعات ومبدأ التجارب العشوائية والنظامية وكذا فراغ العينة والأحداث التي سيتم توضيحها من خلال هذا الفصل.

أولا - نظرية المجموعات:

إن دراسة المجموعة ذات أهمية كبيرة وضرورية لدراسة الاحتمال، والمجموعة هي تجمع أي عدد من العناصر أو الأشياء، وعند دراسة أي مجموعة يجب التأكد من أنها معرفة تماما وذلك يعني أنه إذا أعطينا أي عنصر فإنه سيكون بإمكاننا معرفة إذا كان هذا العنصر منتميا للمجموعة أو غير منتم إليها.

1- تعريف المجموعة:

تعرف المجموعة رياضيا أو منطقيا بأنها أي تجمع أو تكتل من الأشياء الحسية أو المعنوية التي يمكن تمييزها عن غيرها بمعيار دقيق وقاطع متفق عليه.

و تعرف المجموعة أيضا: على أنها تجمع الأشياء التي تشترك في صفة معينة، وقد تكون هذه الأشياء كميات أو أعداد أو أي شيئ آخر معرفا تعريفا واضحا[1].

كما يمكن أن نعرف المجموعة بذكر الخواص التي تحقق عناصرها، فمثلا إذا كانت C هي مجموعة الأعداد الفردية فنكتب إذا: $C = \{x / x : nombre..impair\}$ ويستعمل مثل هذا التعريف عادة عندما تكون عناصر المجموعة لانهائية.

2- رموز المجموعات وعناصرها:

عادة ما نرمز للمجموعات بحروف لاتينية كبيرة مثل: A أو B أو C....، بينما نرمز للأشياء التي تتألف منها المجموعة والتي تسمى بعناصر المجموعة بحروف صغيرة: a أو b أو c.....حيث يسمى كل عضو من أعضاء المجموعة عنصرا مع العلم أن ترتيب العناصر داخل المجموعة لا يؤثر على تعريفها.

المثال رقم 1: $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ هي مجموعة تتألف من عناصر وهي الأعداد من 1 إلى 6 ، بينما المجموعة $B = \{a, b, c, d\}$ تتألف من بعض الحروف اللاتينية وهي: a,b,c,d.

يستعمل الرمز $\in$ الذي يعني انتماء عنصر ما إلى مجموعة معينة فمثلا نقول أن العدد 2 ينتمي إلى المجموعة A ونكتب $(2 \in A)$، كما أن الرمز $\notin$ يعني عدم إنتماء عنصر ما إلى مجموعة معينة، مثلا العنصر e لا ينتمي للمجموعة B ونكتب اختصارا $(e \notin B)$.

3- أنواع المجموعات:

المجموعة الشاملة Comprehensive Set:

عند دراسة أي ظاهرة علمية أو اجتماعية فإننا نتعامل مع مجموعة أساسية كبيرة تحتوي على جميع المجموعات تحت الدراسة، فمثلا يمكن أن نصنف جميع طلبة كلية العلوم الاقتصادية كمجموعة أساسية بينما مجموعات الطلبة في التخصصات المختلفة على أنها مجموعات جزئية من المجموعة الأساسية، عادة ما نسمي مثل هذه المجموعة الأساسية بالمجموعة الشاملة ونرمز لها بالرمز S.

---

[1] - علي عبد السلام العماري و علي حسين العجيلي: " الاحصاء والاحتمالات النظرية والتطبيق "، منشورات ELGA مالطا 2000 ، ص 104.

المجموعة الخالية Empty Set:

هي المجموعة التي لا تحتوي على عناصر، أي لا ينتمي إليها أي عنصر، ويرمز لها بالرمز $\{\}$ أو ϕ ، ومفهوم المجموعة الخالية يقابله مفهوم الصفر في الأعداد، كما تعتبر المجموعة الخالية مجموعة وحيدة وجزئية من أي مجموعة أخرى، حيث أن المجموعة الخالية موجودة في أي مجموعة أخرى، مثلا: ϕ موجودة في S.

المجموعة الجزئية Sebset:

نقول إن B هي مجموعة جزئية من المجموعة A إذا كانت محتواة في A أو بمعنى آخر إن جميع عناصر B موجودة في المجموعة A ونرمز لهذا كما يلي: $B \subseteq A$

يمكن كتابة ذلك رياضيا كما يلي: $B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x \in B \Rightarrow x \in A$

إذا كانت $B \subseteq A$ و $B \neq A$ فنقول إن B مجموعة جزئية فعلية من A ونكتب $B \subset A$. أما إذا كانت B ليست مجموعة جزئية من A فنكتب $B \not\subset A$.

خاصية تساوي مجموعتين:

نقول إن المجموعتين A و B متساويتين ونكتب $A = B$ إذا كانت كل منهما مجموعة جزئية من الأخرى

أي أن: $\forall x \in B \Rightarrow x \in A$ و $\forall x \in A \Rightarrow x \in B \Leftrightarrow B \subseteq A$ و $A \subseteq B \Leftrightarrow A = B$

المثال رقم 2:

إذا كانت لدينا المجموعتين التاليتين: $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ و $B = \{4,5,6\}$

فإن B مجموعة جزئية من A ونكتب $B \subset A$.

وبصفة عامة إذا كان عدد عناصر أي مجموعة هو n عنصر فإن عدد المجموعات الجزئية لهذه المجموعة هو: 2^n.

المثال رقم 3:

لتكن المجموعة $A = \{a, b, c\}$ فإن عدد المجموعات الجزئية للمجموعة A هو: $2^3 = 8$، وهذه المجموعات هي:

$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{\ \}$.

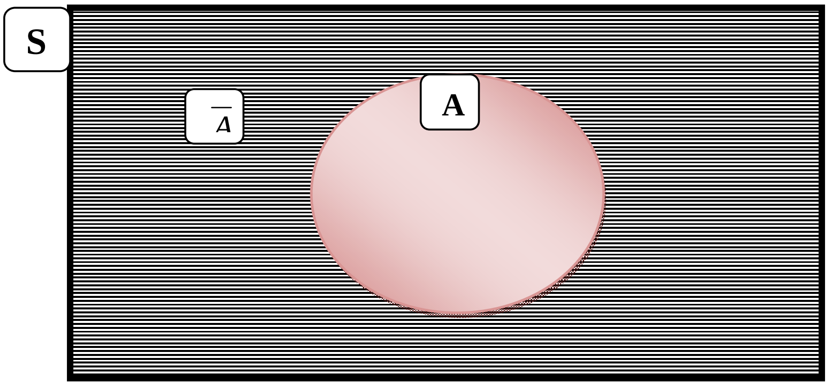
المجموعة المكملة Complementary Set:

إذا كانت A مجموعة ما، فإن المجموعة التي تحتوي على جميع العناصر الموجودة في المجموعة الشاملة S وغير موجودة في المجموعة A تسمى المجموعة المكملة لـ A ويرمز لها بالرمز: $\overline{A}$ أو A^c

حيث: $\overline{A} = S - A$ ، وتشمل المجموعة $\overline{A}$ جميع العناصر الموجودة في المجموعة الشاملة S وغير موجودة في المجموعة A.

نكتب اختصارا $\overline{A} = \{x : x \in S.et.x \notin A\}$

ويمثل بأشكال فن بالمنطقة المظللة كما هو موضح بالشكل التالي:



المجموعة القابلة للعد:

إذا أمكن عد أو ملاحظة عناصر مجموعة ما فإنها تكون قابلة للعد.

المثال رقم 4:

المجموعة $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ قابلة للعد، بينما المجموعة $B = \{x / 0 \langle x \langle 10\}$ غير قابلة للعد.

المجموعة المحدودة (المنتهية):

المجموعة المحدودة هي المجموعة التي تحتوي على عدد معين من العناصر، مثلا: $A = \{1,2,......,n\}$ حيث n عدد محدود تسمى مجموعة منتهية، بينما المجموعة $B = \{x / 0 \langle x \langle 10\}$ والمجموعة $C = \{1,2,3.......\}$ مجموعتان لانهائيتان.

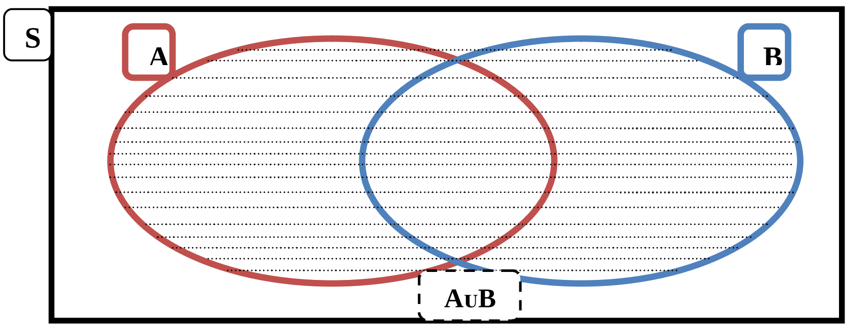
4- عمليات نظرية المجموعات:

الاتحاد Union:

إذا كانت A و B مجموعتين جزئيتين من S فإن المجموعة التي تتضمن جميع العناصر الموجودة في A أو في B أو في كليهما تعرف على أنها اتحاد A و B، ويرمز لها بالرمز: AUB.

$$A \cup B = \{x : x \in A.ou.x \in B\}$$

ويمكن تمثيل المجموعات والعمليات عليها باستعمال أشكال هندسية توضيحية تسمى أشكال فن (Venn diagram) وذلك بالتعبير عن المجموعة الشاملة S بمستطيل والمجموعتين الجزئيتين A و B بدوائر داخل المستطيل ويكون اتحادهم المنطقة المظللة كما هو موضح بالشكل التالي:

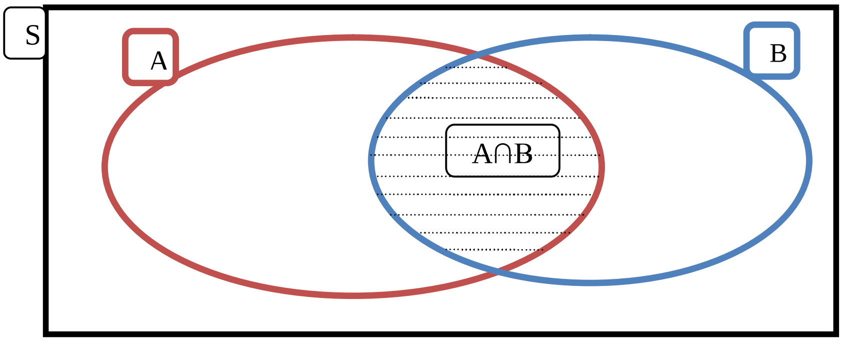


التقاطع Intersection:

إذا كانت A و B مجموعتين جزئيتين من S فإن المجموعة التي تتضمن العناصر المشتركة بين A و B تعرف على أنها تقاطع A و B، ويرمز لها بالرمز: $A \cap B$.

ونكتب: $A \bigcap B = \{x : x \in A.et.x \in B\}$

ويمثل بأشكال فن بالمنطقة المظللة كما هو موضح بالشكل التالي:



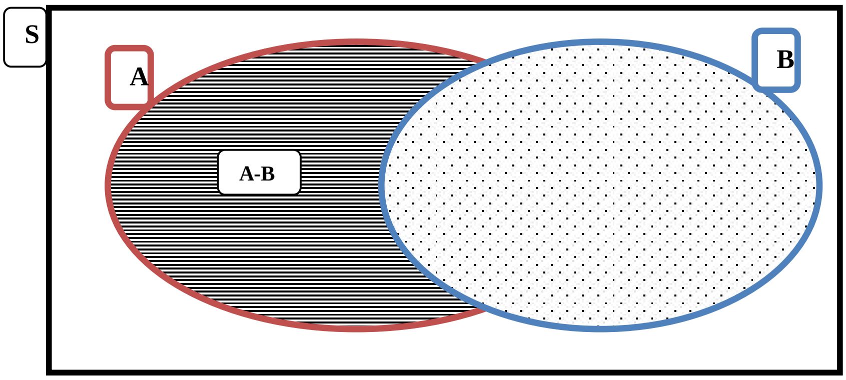
إذا لم توجد عناصر مشتركة بين مجموعتين نقول إن المجموعتين A و B منفصلتين عن بعضهما البعض أي أنه إذا كان: $A \cap B = \phi$ فإن A و B منفصلتان(disjoint).

الفرق:

إذا كانت A و B مجموعتين جزئيتين من S فإن الفرق بينهما A-B هو المجموعة التي تتضمن جميع النقاط الموجودة في A وغير موجودة في B، ونكتب:

$$A - B = \{x / x \in A.et.x \notin B\} = A \cap \overline{B}$$

ويمثل بأشكال فن بالمنطقة المظللة كما هو موضح بالشكل التالي:



5- قوانين نظرية المجموعات:

إن العمليات التي تجرى على المجموعات محكومة بقوانين وبديهيات تفسر العلاقات بين المجموعات، فإذا كانت A، B و C مجموعات جزئية من المجموعة الشاملة S فإن:

قانون التبديل:

ينص هذا القانون على مايلي:

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cap B = B \cap A$

قانون التنسيق:

ينص هذا القانون على مايلي:

- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

قانون التوزيع:

ينص هذا القانون على مايلي:

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

قانون المكملة:

ينص هذا القانون على مايلي:

- $A \cup \overline{A} = S, A \cap \overline{A} = \phi$
- $A \subset S$ وذلك لأن $A \cap S = A$ و $A \cup S = S$
- $\overline{A} = S - A$
- $\overline{\overline{A}} = A$ و $A \cap \phi = \phi$ و $A \cup \phi = A$

قانون الفرق:

ينص هذا القانون على ما يلي:

- $A - B = A \cap \overline{B}$
- $A - B = A - (A \cap B) = (A \cup B) - B$
- $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$
- $(A \cap B) \cap (A - B) = \phi$ و $(A \cap B) \cup (A - B) = A$

قانون دي مورغان:

ينص هذا القانون على ما يلي:

- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

الفرق التناظري بين مجموعتين:

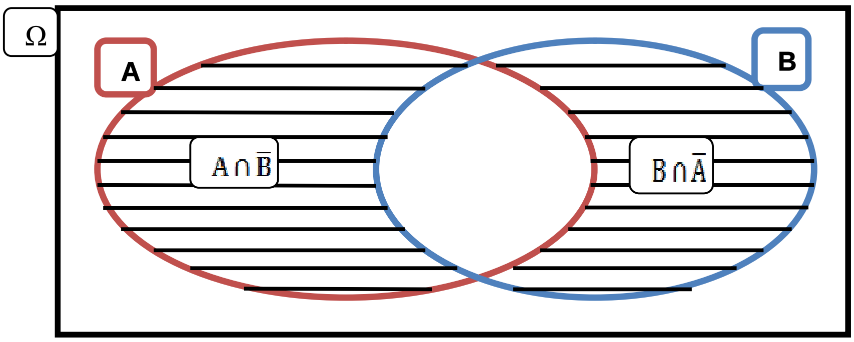
نعرف الفرق التناظري بين مجموعتين A و B بأنه مجموعة العناصر الموجودة إما في A أو B ولكن ليست موجودة في العناصر المشتركة بين المجموعتين، أي بمعنى آخر العناصر الموجودة في اتحاد المجموعتين وفي نفس الوقت ليست موجودة في التقاطع، ونرمز لهذا الفرق التناظري بالرمز $A\Delta B$.

كمايعرف أيضا بالفرق التماثلي وهو عملية ثنائية على مجموعات يرمز لها بالرمز Δ ، حيث إذا كانت المجموعتين الجزئيتين A و B فالفرق التماثلي $A\Delta B$ هو المجموعة التي تحتوي كل العناصر التي تنتمي إلى المجموعة A ولا تنتمي إلى المجموعة B بالإضافة إلى كل العناصر التي تنتمي إلى المجموعة B ولا تنتمي للمجموعة A [1] فالناتج عن عملية الفرق التناظري هو مجموعة نعتبرها C حيث:

$$C=A\Delta B=\{x/\ x\in A\ ;\ x\notin B \text{ أو } x\in B\ ;\ x\notin A\}$$

ونكتب الفرق التناظري بعلاقة أخرى : $A\Delta B = (A-B) \cup (B-A)$

ويمثل بأشكال فن بالمنطقة المظللة كما هو موضح بالشكل التالي:



بعض خواص الفرق التناظري: من خلال تعريف الفرق التناظري نستخلص الخواص التالية:

- $A\Delta \varnothing = A$
- $A\Delta A = \varnothing$
- $A\Delta B = B\Delta A$
- $A\Delta B = (A\cup B) - (A\cap B) = (A\cap \bar{B}) \cup (B\cap \bar{A})$
- $(A\Delta B)\Delta D = A\Delta (B\Delta D)$

[1] - علي نصر الدين الوكيل: " مبادئ رياضيات الحاسب"، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، القاهرة، 2000، ص 12.

ثانيا - التجربة Experiment:

الاحصاء له أهمية كبيرة في استقراء النتائج وصياغة التعميمات عن المجتمع بعد دراسة عينة عشوائية تؤخذ من ذلك المجتمع، وتستعمل نظرية الاحتمال في إعطاء التبريرات الرياضية للتوصل إلى هذه التعميمات من دراسة العينات، حيث تساعد نظرية الاحتمال في تحديد مدى صدق تمثيل العينات للمجتمع ومدى الثقة في الاستدلال.

إن مختلف البيانات هي عبارة عن مجموعة من المشاهدات والقياسات التي يتم تسجيلها نتيجة إجراء التجارب، فمختلف التجارب التي يتم تسجيل نتائجها تدعى تجارب إحصائية.

تعريف التجربة:

تعد التجربة من أهم المفاهيم في نظرية الاحتمال وهي تقوم على أساس التأكد من تحقق وصول بعض الظروف المشتركة لظاهرة ما التي قد تكون ظروف من صنع الإنسان أو وليدة الصدفة، ويمكن تصنيف التجربة إلى صنفين نظامية واحتمالية (عشوائية):

- **التجربة النظامية:** هي كل تجربة يمكن أن نتوقع أو نحدد نتائجها سلفا على أساس القوانين العلمية المعروفة، وهذا النوع من التجارب يراد من ورائه اكتشاف قوانين أو الاستفادة من ما هو موجود في تحقيق بعض الغايات.
- **التجربة العشوائية:** هي كل تجربة يمكن تكرارها أو تكون قابلة للتكرار عددا من المرات، وتكون نتائجها غير محددة سلفا لكونها تعتمد على الصدفة والعشوائية، فالمجرب لا يستطيع أن يتنبأ مسبقا بالنتيجة وعدم إمكانية التنبؤ هذه تعطي لهذه التجربة صفتها العشوائية.

كما تعرف التجربة العشوائية (الاحصائية) بأنها أي عملية أو مجموعة عمليات محددة لا تعرف نتائجها مسبقا بشكل حتمي، أي لا يستطاع التنبؤ بنتائجها بشكل مؤكد، وبعبارة أخرى هي كل عملية تعطي مشاهدة أو قياسا لظاهرة[1].

ومن أهم الصفات التي يجب أن تتوفر في التجربة الاحصائية تحديد المشاهدات والبيانات المراد تسجيلها فيها. ولكل تجربة احصائية نتائج، وتعرف النتيجة للتجربة على أنها النتيجة البسيطة، أي النتيجة التي لا يمكن تقسيمها أو تحليلها إلى نتيجتين أو أكثر. وتسمى النتائج البسيطة التي يمكن الحصول عليها عند القيام بتجربة احصائية، النتائج الممكنة الحدوث وهي عناصر هامة في دراسة الاحتمالات.

المثال رقم 5:

- إلقاء قطعة نقود تعتبر تجربة عشوائية لأننا نعلم أن لها نتيجتين إما صورة F وإما كتابة P ولكن لا نستطيع تحديد نتيجة التجربة مسبقا.

[1] - محمد صبحي أبو صالح: " الموجز في الطرق الاحصائية"، دار اليازوري، الأردن ، 2004 ، ص 124.

- رمي مكعب نرد مرة واحدة تعتبر تجربة عشوائية لأننا نعلم أن لها ستة نتائج ممكنة لكن لا نستطيع تحديد نتيجة التجربة مسبقا.

ثالثا- فضاء العينة والأحداث:

1- فضاء العينة (Sample Space):

فضاء العينة أو الفضاء العيني لتجربة احصائية هو مجموعة جميع النتائج الممكنة لتلك التجربة.

1-1- تعريف فضاء العينة (فراغ العينة / فراغ إمكانات التجربة):

فضاء العينة لتجربة عشوائية هو مجموعة جميع النتائج الممكنة لتلك التجربة، ويرمز له بالرمز Ω (ويقرأ omega)، إذ تحتوي Ω على جميع النتائج الممكنة للتجربة، أي أنها تقدم أكبر قدر ممكن من التفاصيل لهذه النتائج[1]، ويقصد بالتجربة العشوائية هنا كل تجربة لا تكون نتيجتها معروفة مسبقا بشكل حتمي.

المثال رقم 6:

إذا ألقيت قطعة نقود معدنية متزنة من فئة 10 دينار جزائري مرة واحدة فإن فراغ العينة في هذه الحالة هو: $\Omega = \{P, F\}$ حيث F ترمز للصورة أو الوجه أو الشعار و P ترمز للكتابة أو الظهر (القيمة).

المثال رقم 7:

إذا ألقيت قطعة نقود معدنية متزنة مرتين فإن فراغ العينة هو:

$$\Omega = \{PP , PF , FP , FF\}$$

[1] - علي عبد السلام العماري و علي حسين العجيلي، مرجع سابق، ص 111.

المثال رقم 8:

إذا تم إلقاء مكعبي نرد متزنين ومتمايزين مرة واحدة فإن:

$$\Omega = \{(i, j) : i = 1,2,3,4,5,6.et.j = 1,2,3,4,5,6\}$$

$$\Omega = \{(1,1), (1,2),......(1,6), (2,1),....., (6,1),.....(6,6)\}$$

المثال رقم 9:

إذا كانت التجربة تتضمن إلقاء قطعة نقود معدنية متزنة حتى ظهور الصورة F، ففي هذه الحالة يكون فراغ العينة هو:

$\Omega = \{F , PF , PPF , PPPF ,......... ...\}$ ، حيث أن Ω هي مجموعة لانهائية من النتائج وقابلة للعد.

إن كل نتيجة ممكنة لتجربة عشوائية هي في الحقيقة عنصر ينتمي لفراغ العينة ويسمى نقطة فراغ العينة.

المثال رقم 10:

إذا تم اختيار نقطة من المجال $[0,1]$ ، فإن فراغ العينة في هذه الحالة هو: $\Omega = \{x / 0 \le x \le 1\}$ وهو يحتوي على عدد من النقاط غير القابلة للعد.

1-2- أنواع فراغ العينة: نميز نوعان من فراغ العينة:

- **فراغ العينة المنفصل (المتقطع)« Discrete Sample Space » :**

يسمى الفضاء العيني فضاء منفصلا إذا كان محدودا أو لانهائيا معدودا، أي إذا كان محدودا أو إذا أمكن ربط ربط عناصره واحدا إلى واحد مع الأعداد الصحيحة الموجبة، فإذا احتوى فراغ العينة Ω على الأكثر على عدد من العناصر القابلة للعد يسمى فراغا منفصلا، ومن الأمثلة على فراغ العينة المنفصل الأمثلة السابقة ذات الأرقام (6)، (7)، (8) و(9).

- **فراغ العينة المتصل (المستمر)« Continuous Sample Space » :**

إذا احتوى فراغ العينة Ω على مجموعة غير قابلة للعد سواء كانت منتهية أو غير منتهية يسمى فراغا متصلا. ومن الأمثلة على فراغ العينة المتصل المثال رقم (10).

1-3- طرق عد عناصر فراغ العينة:

في كثير من التجارب العشوائية نجد أن عدد عناصر فراغ العينة في Ω سيكون كبيرا جدا وأن عملية كتابة جميع النتائج الممكنة للتجربة العشوائية غالبا ما يكون صعبا، في مثل هذه التجارب نكتفي بتحديد العدد الكلي للنتائج الممكنة لفراغ العينة Ω دون أن تكون هناك ضرورة لوجود قائمة لجميع تلك النتائج، ومن بين الطرق التي يتم بها تحديد عدد عناصر Ω نذكر:

- **قاعدة الضرب:** إذا كانت لدينا تجربتين عشوائيتين، حيث أن التجربة A تتضمن n من النتائج الممكنة بينما التجربة B تتضمن m من النتائج الممكنة، عندها يكون عدد النتائج الممكنة للتجربتين معا هو $n \times m$.

المثال رقم 11:

كم عدد النقاط بفراغ العينة إذا تم إلقاء مكعبي نرد متمايزين مرة واحدة ؟

الحل:

هناك 6 نتائج ممكنة لكل مكعب، إذن عدد النقاط بفراغ العينة هو: $n(\Omega) = n \times m = 6 \times 6 = 36$

المثال رقم 12:

إذا كانت التجربة تتضمن إلقاء قطعة نقود معدنية متزنة 3 مرات فما هو عدد عناصر فراغ العينة ؟

الحل:

النتيجة الممكن الحصول عليها عند إلقاء قطعة النقود هي إما صورة F و إما كتابة P حيث n = 2 وعدد مرات الإلقاء هي k=3.

إذن عدد النقاط بفراغ العينة هو: $n(\Omega) = n^k = 2^3 = 8$

قاعدة الجمع: إذا كانت التجربة A تحدث في n من النتائج الممكنة و التجربة B في m من النتائج المحتملة، وكانت التجربتان متنافيتين فإن عدد النتائج الممكنة من التجربة A أو التجربة B هو n+m.

المثال رقم 13:

نقوم بإلقاء قطعة نقود أو حجر نرد والمطلوب تحديد فراغ العينة Ω ؟

الحل:

هناك نتيجين ممكنتين لرمي قطعة نقود و 6 نتائج ممكنة لرمي مكعب النرد، إذن عدد النقاط بفراغ العينة هو:

$n(\Omega) = n + m = 2 + 6 = 8$

التحليل التوافقي Combinatorial Analysis:

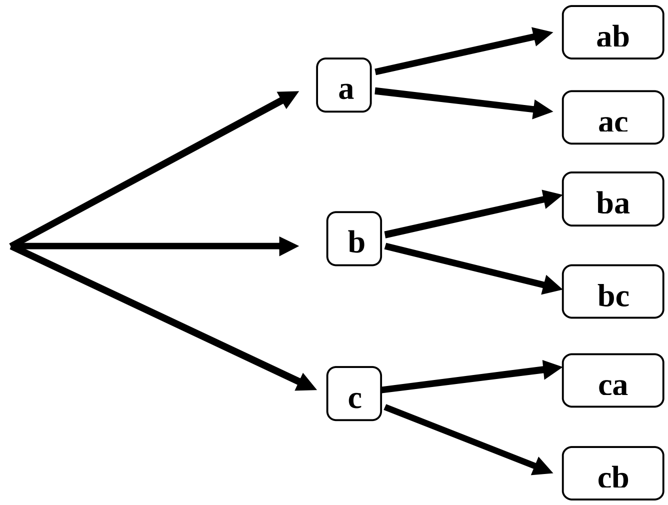
يهدف التحليل التوافقي من خلال تبسيط العد واستنباط طرق أكثر فعالية إلى حساب عدد الحالات الملائمة وعدد الحالات الممكنة المرتبطة بذلك الحدث وبالتالي يصبح حساب الاحتمالات من أهم التطبيقات العملية للتحليل التوافقي، ويتكون هذا التحليل من ثلاثة عناصر: التراتيب، التباديل، التوافيق.

أ- التراتيب Arrangement:

التراتيب هي عدد الطرق المختلفة التي يمكننا بها اختيار k عنصر من n من العناصر حيث $(k\langle n)$، مع مراعاة الترتيب في كل حالة سحب (اختيار)، فقد يتم هذا السحب بإعادة العنصر المسحوب إلى المجموعة محل السحب أو بدون إعادته لذا نميز بين نوعين منها:

- **التراتيب دون إعادة:** السحب دون إعادة (دون إرجاع) يشترط علينا عند تشكيل أي من المجموعات الممكنة بأن لا نسحب العنصر الواحد من المجموعة الشاملة Ω أكثر من مرة واحدة ليكون عنصرا في المجموعة الجزئية A.

لنفرض أنه لدينا مجموعة مكونة من ثلاثة عناصر: $\Omega = \{a, b, c\}$



❖ عدد الطرق التي يمكن بموجبها اختيار مجموعة جزئية أحادية يساوي إلى ثلاث (3) طرق وهي:

$$a\,/\,b\,/\,c$$

❖ عدد الطرق التي يمكن بموجبها اختيار مجموعة جزئية ثنائية يساوي إلى ستة (6) طرق وهي:

$$ab\,/\,ac\,/\,ba\,/\,bc\,/\,ca\,/\,cb\,/$$

وعليه فإن عدد المجموعات الجزئية التي تحتوي عنصرين من Ω يساوي إلى:

$$n(n-1)! = 3(3-1)! = 3\times 2! = 3\times 2\times 1 = 6$$

وبصفة عامة فإن عدد المرتبات $k\times k$ عنصرا دون إعادة من n عنصر معطى بالعلاقة التالية:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

حيث: $n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times \dots\dots\dots \times 2\times 1$ و $0! = 1$

المثال رقم 14:

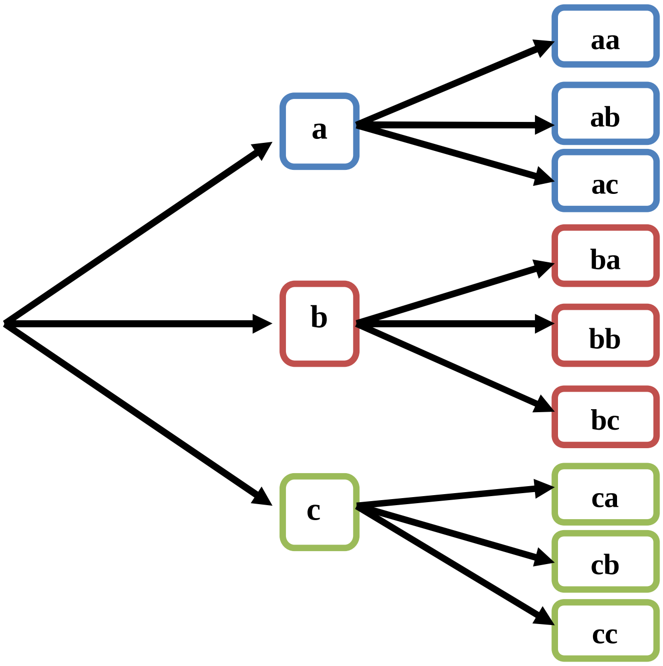
ترشح لرئاسة مجلس الإدارة 10 أشخاص، على أن يتم انتقاء 6 منهم ولنحسب بكم طريقة يمكن انتقاء هؤلاء.

(لدينا: $n = 10$ و $k = 6$) يتعلق الأمر هنا بالتراتيب دون إعادة (لأن مجلس الإدارة يتكون من رئيس، نائب الرئيس، .... كما لا يحق للشخص أن يشغل أكثر من منصبين أي لا يمكن أن يتكرر الشخص) وعليه فالأمر يتعلق بتراتيب دون إعادة، ومنه فإن عدد الطرق هو:

$$A_{10}^{6} = \frac{10!}{(10-6)!} = \frac{10!}{4!} = \frac{10\times9\times8\times7\times6\times5\times4!}{4!} = 151.200$$

- **التراتيب مع الإعادة:** السحب مع الإعادة يسمح لنا بانتقاء العنصر الواحد من المجموعة Ω أكثر من مرة ليكون عنصرا في المجموعة الجزئية المراد تشكيلها.

  لنأخذ مرة أخرى المجموعة Ω حيث: $\Omega = \{a, b, c\}$



❖ عدد الطرق التي يمكن بموجبها اختيار مجموعة جزئية أحادية يساوي إلى ثلاث (3) طرق وهي:

$$a / b / c$$

❖ عدد الطرق التي يمكن بموجبها اختيار مجموعة جزئية ثنائية من Ω مع الأخذ بعين الاعتبار أن السحب يتم مع الإعادة يساوي إلى تسعة (9) طرق وهي:

$$aa / ab / ac / ba / bb / bc / ca / cb / cc /$$

وعليه فإن عدد المجموعات الجزئية التي تحتوي عنصرين من Ω يساوي إلى: $n^k = 3^2 = 9$

وبصفة عامة فإن عدد المرتبات $k \times k$ عنصرا مع الإعادة من n عنصر ($_rA_n^k$) معطى بالعلاقة التالية:

$$\boxed{{}_rA_n^k = n^k}$$

المثال رقم 15:

لنجد كافة الأعداد المؤلفة من مرتبتين، ثلاث مراتب وذلك انطلاقا من مجموعة الأعداد الفردية التالية:

$$\Omega = \{1,3,5,7,9\}$$

الحل: لدينا عدد الأرقام هو $n=5$ و العدد k في كلا الحالتين أقل من n أي أن: $k \langle n$ وبما أنه في تشكيل الأعداد فإن الترتيب مهم ويمكن تكرار الأعداد، فإننا نكون بصدد استخدام ترتيبة مع التكرار وعليه:

❖ الأعداد المكونة من مرتبتين $(n=5$ و $k=2)$ و التي يمكن تكوينها من Ω هو:

$$_rA_n^k = {}_rA_5^2 = 5^2 = 25 .$$

❖ الأعداد المكونة من ثلاث مراتب $(n=5$ و $k=3)$ و التي يمكن تكوينها من Ω هو:

$$_rA_n^k = {}_rA_5^3 = 5^3 = 125 .$$

ب- التباديل Permutations: التبديلة هي ترتيبة لـ n عنصر مختارة من بين n من العناصر $(k=n)$، ونميز بين نوعين من التباديل:

- **تباديل دون تكرار**: إن متبادلات مجموعة ما ولتكن A (بفرض $A \subseteq \Omega$) هي جملة المجموعات الممكن تشكيلها من عناصر A نفسها والتي تختلف عن بعضها البعض باختلاف ترتيب أحد هذه العناصر على الأقل.

إن عدد متبادلات n عنصر هو!n و نكتب:

$$\boxed{P_n = n!}$$

حيث: $n! = n\times(n-1)\times(n-2).......2\times 1$ و $(0! = 1)$

المثال رقم 16:

بكم طريقة يمكن تصنيف ثلاث كتب في رف؟ $(n=3$ و $k=3)$

لنفرض أن الكتب خاصة بالاحصاء Stat، الرياضيات Math والمحاسبة Compt، هنا الترتيب مهم ولكن دون تكرار:

Stat Math Compt	Stat Compt Math	Math Stat Compt
Math Compt Stat	Compt Stat Math	Compt Math Stat

إذن عدد الطرق المختلفة لترتيب الثلاث كتب هو:

$$P_n = P_3 = 3! = 3\times(3-1)\times(3-2) = 3\times 2\times 1 = 6$$

- **التباديل مع التكرار**: نحتاج في بعض الأحيان لمعرفة عدد تباديل مجموعة من العناصر يكون بعضها متماثلا (مكررا) مثل تكرار الحروف في الأسماء (جرجرة، statistique...) أو تكرار الأعداد سواء كانت فردية أم زوجية أو في حالة السحب مع إعادة العنصر المسحوب إلى المجموعة محل السحب.

وعليه فإن عدد التباديل المختلفة لـ n عنصر منها n_1 عناصر الصنف الأول، n_2 من الصنف الثاني... و n_k من الصنف الأخير هو:

$$P_n^{n_1,n_2,\dots n_k} = \frac{n!}{n_1!.n_2!.....n_k!}$$

المثال رقم17:

ماهو عدد التباديل المختلفة التي يمكن تكوينها من جميع أحرف كلمة "RECHERCHE".

لدينا هنا تسعة عناصر كلها غير متميزة مثنى مثنى وهي الأحرف:H,C,E,R حيث:

H,C,R يتكرر كل منها مرتين وE يتكرر ثلاث مرات ومنه عدد التباديل المختلفة هو:

$$P_9^{2,2,2,3} = \frac{9!}{2!.2!.2!.3!} = 7560$$

- **التبديلات الدائرية:**

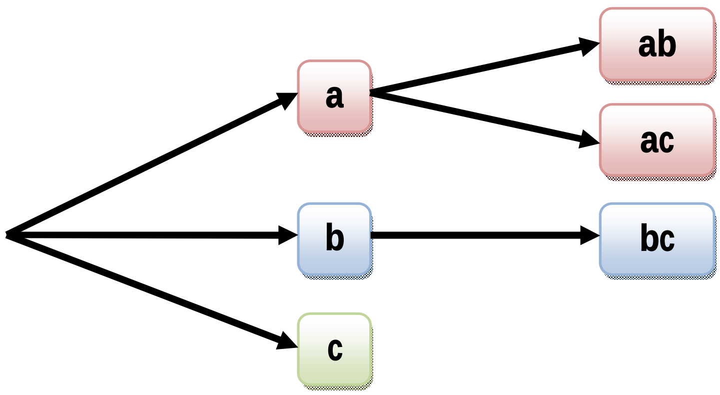
التبديلات الدائرية هي حالة خاصة وهي معطاة بالعلاقة التالية:

$$\bar{P_n} = (n-1)!$$

ت- **التوافيق Combinations:** التوافيق هي عدد الطرق المختلفة التي يمكننا بها اختيار k عنصر من n من العناصر حيث أن $(k\langle n)$ مع عدم مراعاة الترتيب في كل حالة اختيار ، ونميز بين نوعين من التوافيق:

- **التوافيق دون إعادة:** إذا كانت لدينا مجموعة من n عنصر مختلف وأردنا تشكيل جميع المجموعات الجزئية الممكنة والتي يتكون كل منها من k عنصرا مختلفا حيث $(k\langle n/n,k\in N)$ فإن المجموعات المحصلة تدعى بمتوافقات $k\times k$ لـ n عنصر مختلف إذا تميزت كل مجموعة عن الأخريات بحسب طبيعة العناصر التي تتكون منها فقط ودون النظر إلى ترتيبها ضمن المجموعة.

لنأخذ المجموعة Ω حيث: $\Omega = \{a,b,c\}$



❖ عدد الطرق التي يمكن بموجبها اختيار مجموعة جزئية أحادية يساوي إلى ثلاث (3) طرق وهي:

$$a / b / c$$

❖ عدد الطرق التي يمكن بموجبها اختيار مجموعة جزئية ثنائية من Ω مع الأخذ بعين الاعتبار أن السحب يتم دون إعادة ومع عدم مراعاة الترتيب يساوي إلى ثلاثة (3) طرق وهي:

$$ab / ac / bc /$$

تعطى علاقة التوافيق دون إعادة بالصيغة التالية:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!.(n-k)!}$$

المثال رقم 18 :

يتكون أحد أقسام الاختصاص بكلية العلوم الاقتصادية من 40 طالبا وتود الإدارة تكوين عدد من المجموعات من 10 طلاب لزيارة أحد المصانع الموجودة بالمدينة، فبكم طريقة يمكن للإدارة تكوين هذه المجموعات؟ $(k=10$ و $n=40)$

في هذه الحالة الترتيب غير مهم ولكن المهم هو اختلاف كل مجموعة عن الأخرى و لو بطالب واحد فقط، إذن فالأمر يتعلق بالتوافيق، ومنه فعدد الطرق لتكوين هذه المجموعات هو:

$$C_{40}^{10} = \frac{40!}{10!.(40-10)!} = \frac{40!}{10!.30!} = 847.660.528$$

- **التوافيق مع الإعادة:** إذا كانت لدينا مجموعة Ω بها n عنصر مختلف وأردنا تشكيل جميع المجموعات الجزئية الممكنة والتي يتكون كل منها من k عنصرا مختلفا حيث $(k \langle n / n, k \in N)$، تسمى هذه المجموعات بتوافقات $k \times k$ عنصر لـ: n عنصر مختلف إذا تميزت كل مجموعة عن الأخرى بحسب طبيعة العناصر التي تتكون منها فقط دون النظر إلى ترتيبها ضمن المجموعة مع إمكانية تكرار العنصر نفسه في المجموعة الواحدة. وتعطى علاقة التوافيق مع الإعادة بالصيغة التالية:

$$K_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!.(n-1)!}$$

2- الحادث Event :

2-1- تعريف الحادث: الحادث هو مجموعة جزئية من فراغ العينة Ω، وبعبارة أخرى، الحادث هو مجموعة مكونة من نتيجة بسيطة واحدة أو أكثر أو لا يحتوي على أي نتائج، فإذا احتوى الحادث على نتيجة بسيطة واحدة سمي حادثا بسيطا، أما إذا احتوى على نتيجتين أو أكثر فإنه يسمى حدثا مركبا[1]، ويرمز للأحداث عادة بالحروف A، B، C،.....

[1] - محمد صبحي أبوصالح، مرجع سابق، ص 125.

المثال رقم 19:

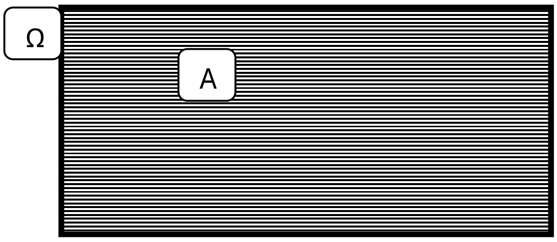
إذا تم إلقاء مكعب نرد مرة واحدة فإن فراغ العينة هو: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

نعرف الحادث A: حادث الحصول على الرقم 3 ونكتب $A = \{3\}$ هو حادث بسيط.

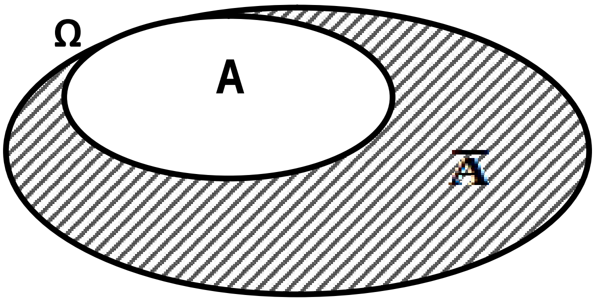
ونعرف الحادث B: حادث الحصول على رقم فردي ونكتب $B = \{1,3,5\}$ هو حادث مركب من أحداث بسيطة.

2-2- أنواع الأحداث: تتمثل أهم أنواع الأحداث في:

- **الحادث المؤكد Certain Event**: هو الحادث الذي يحتوي على جميع عناصر فراغ العينة فالحادث A يكون حادثا مؤكدا إذا كان $A = \Omega$



- **الحادث المستحيل Impossible Event** : هو الحادث الذي لا يحتوي على أي نتيجة من نتائج فراغ العينة، فالحادث A مثلا يكون مستحيلا إذا كان $A = \phi$.
- **الحادث المكمل (المتمم) Complementing Event:** الحادث المكمل للحادث A مثلا هو الحادث الذي يحتوي على جميع نتائج التجربة العشوائية التي لا يشملها الحادث الأصلي A ويرمز لذلك الحادث بالرمز $\overline{A}$ حيث $A \cup \overline{A} = \Omega$ و $\overline{A} = \Omega - A$



المثال رقم 20:

تتضمن التجربة العشوائية إلقاء قطعة نرد مرة واحدة، فإذا عرفنا الحادث A على أنه حادث الحصول على عدد فردي، فإن الحادث $\overline{A}$ هو الحادث المتمم للحادث A وهو حادث الحصول على عدد زوجي.

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

الحادث A: $A = \{1,3,5\}$

الحادث $\overline{A}$: $\overline{A} = \Omega - A = \{2,4,6\}$

- **الأحداث المتنافية وغير المتنافية**: الأحداث المتنافية هي الأحداث المانعة لبعضها البعض، فيقال أن A و B حدثان متنافيان إذا كان حدوث أحدهما يمنع حدوث الآخر، أي أنه من المستحيل وقوع الحدثين

معا أي في نفس الوقت بمعنى $A \cap B = \phi$ ، أما إذا أمكن الحصول على حدثين من آن واحد يقال أنها حوادث غير متنافية $A \cap B \neq \phi$.

المثال رقم 21:

عند إلقاء قطعة النقود فإن ظهور القيمة P ينفي ظهور الشعار F وظهور الشعار ينفي ظهور القيمة ويتحقق بالتالي $P \cap F = \phi$.

وبصفة عامة تكون الأحداث $A_1, A_2, A_3, ...A_n$ متنافية ثنائيا (مانعة لبعضها البعض) إذا كان:

$$A_i \cap A_j = \phi \,/\, \forall i \neq j$$

- **الأحداث المستقلة وغير المستقلة والشرطية**: يقال أن الحدثان A و B مستقلان إذا كان حدوث أحدهما لا يؤثر ولا يتأثر بحدوث أو عدم حدوث الآخر، وبصورة عامة تكون الأحداث $A_1, A_2, A_3 ... ... A_n$ مستقلة إذا كانت لا تؤثر ولا تتأثر ببعضها البعض، أما إذا كان وقوع حدث ما يؤثر في وقوع حدث آخر فنكون بصدد حوادث غير مستقلة، وإذا كان حادث ما مرتبط بتحقق أو عدم تحقق حدوث حادث آخر نقول عن هذا الأخير أنه حادث شرطي.

- نتائج عدة رميات متعاقبة لقطعة نرد حوادث مستقلة عن بعضها البعض، إذ أن ظهور رقم معين في إحدى الرميات مستقل تماما عن حادث ظهور رقم معين في الرمية الموالية.
- عند السحب بالإعادة فالسحبة الأولى لا تؤثر على السحبة الثانية وعليه تكون الأحداث مستقلة.

المثال رقم 22:

نقوم برمي زهرة نرد متجانسة ونركز على النتيجة التي تظهر على السطح:

1- أكتب فراغ العينة (مجموعة إمكانات التجربة).

2- عين الأحداث التالية: A: نتيجة الرمية عدد زوجي. B: نتيجة الرمية عدد فردي.

C: نتيجة الرمية عدد أقل تماما من 3 D: نتيجة الرمية عدد أقل تماما من 7.

E : نتيجة الرمية عدد أكبر من 6. F: نتيجة الرمية عدد من قوى 2.

الحل:

إن تجربة رمي زهرة نرد تخلص إلى ستة نتائج ممكنة، وهي: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

الحادث A: نتيجة الرمية عدد زوجي $A = \{2,4,6\}$

الحادث B: نتيجة الرمية عدد فردي $B = \{1,3,5\} \Rightarrow A \cup B = \Omega$

$A \cup B = \Omega \Leftarrow A = \{2,4,6\}\ , B = \{1,3,5\}$ وعليه فإن الحدثان A و B حدثان مكملان لبعضهما البعض.

الحادث C: نتيجة الرمية عدد أقل تماما من 3 $C = \{1,2\}$

الحادث D: نتيجة الرمية عدد أقل تماما من 7 أي $D = \{1,2,3,4,5,6\} = \Omega$ ومنه نقول أن الحدث D هو حدث أكيد.

الحادث E: نتيجة الرمية عدد أكبر من 6 أي $E = \{\ \} = \phi$ ومنه نقول أن الحدث E هو حدث مستحيل.

الحادث F: نتيجة الرمية عدد من قوى 2 أي $F = \{1,2,4\}$

رابعا-الاحتمال:

1- مفهوم الاحتمال: كثيرا ما نستخدم كلمة الاحتمال في حياتنا اليومية، فنقول مثلا:

- إن إمكانية سقوط المطر اليوم كبيرة جدا.
- إن الفرصة جيّدة أمام الطالب للنجاح هذا الموسم.
- احتمال فوز الفريق A على الفريق B كبير.

كل تعبير من التعابير السابقة مبني على مفهوم الاحتمال، أي ترجيح حدوث حدث معين في المستقبل غير مؤكد الوقوع، ونظرا لكون الكلام لا يتعدى تقديرات عامة فإن الأحصائيين لا يرضون بالتعبير عن الاحتمال بأنه صغير أو كبير، بل يرون ضرورة قياسه رقميا بقيمة عددية لإضفاء طابع الدقة عليه، ويقاس الاحتمال بقياس نهايته الصغرى وهي الصفر والتي تعكس الاستحالة المطلقة لتحقيق الحادث، ونهايته العليا وهي الواحد والتي تعكس الحقيقة المطلقة لتحقيق الحادث وبالتالي فإن القيمة العددية للاحتمال هي عبارة عن كسر يقع بين الصفر والواحد $P \in [0,1]$.

فإذا كان فراغ العينة Ω مجموعة منتهية أي يحتوي على عدد محدود من النقاط وكانت هذه النقاط متساوية من حيث إمكانية حدوثها

$$(\Omega = \{w_1, w_2, ...w_n\} \Rightarrow P(w_1) = P(w_2) = ... = P(w_n) = \frac{1}{n})$$

فإن احتمال حدوث الحادث A $(A \subset \Omega)$ يساوي نسبة عدد نقاط ذلك الحادث إلى عدد نقاط فراغ العينة، أي أنّ:

$$P(A) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة (الكلية)}}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

حيث: $n(A)$ عدد النقاط في A و $n(\Omega)$ عدد النقاط في Ω

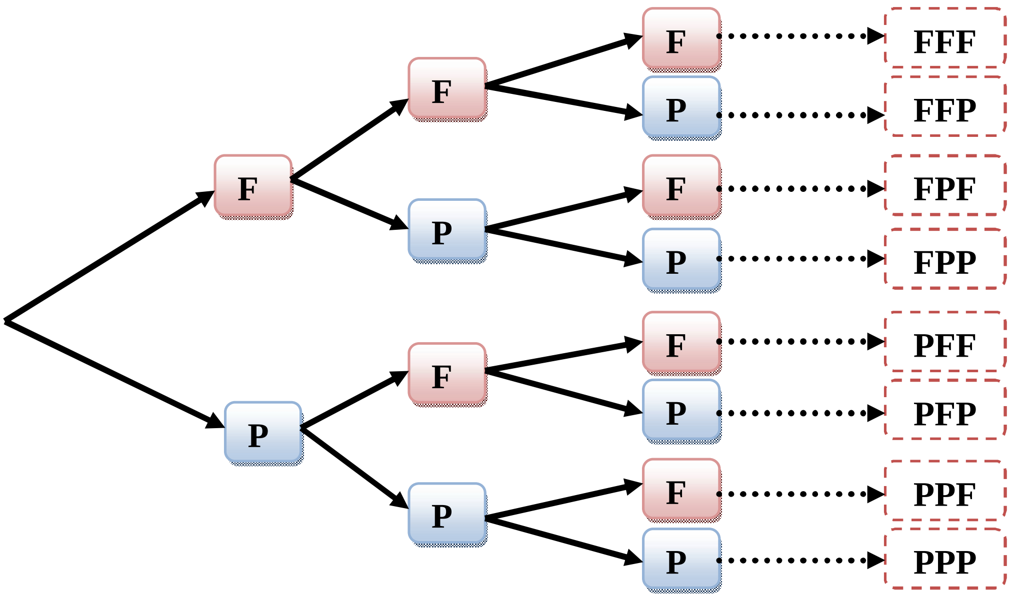
المثال رقم 23:

لتكن التجربة العشوائية المتمثلة في إلقاء قطعة معدنية متزنة ثلاث مرات، والمطلوب هو تحديد فراغ العينة لهذه التجربة العشوائية، ثم إيجاد احتمال حدوث الأحداث التالية:

- الحصول على صورة واحدة على الأقل.
- الحصول على ثلاثة وجوه متشابهة.
- الحصول على صورتين على الأكثر.

الحل:

عند إلقاء قطعة النقود ثلاث مرات فإن فراغ العينة: $n(\Omega) = 2^3 = 8$



وعليه فإن فراغ العينة Ω هو:

$$\Omega = \{FFF, FFP, FPF, FPP, PFF, PFP, PPF, PPP\}$$

- الحصول على صورة واحدة على الأقل:

$$A = \{FFF, FFP, FPF, FPP, PFF, PFP, PPF\} \Rightarrow n(A) = 7$$
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{7}{8}$$

- الحصول على ثلاثة وجوه متشابهة:

$$B = \{FFF, PPP\} \Rightarrow n(B) = 2$$
$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

- الحصول على صورتين على الأكثر:

$$C = \{FFP, FPF, FPP, PFF, PFP, PPF, PPP\}$$
$$P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{7}{8}$$

2- التعريف الرياضي للاحتمال:

إذا كانت Ω تمثل مجموعة النتائج الممكنة للتجربة العشوائية، فإن الدالة $P(A)$ (مهما يكن A حدث من Ω) تسمى احتمالا إذا حققت الشروط التالية[1]:

1/ $0 \le P(A) \le 1$ لأي حدث A ينتمي إلى Ω.

2/ $P(\phi) = 0$ و $P(\Omega) = 1$.

3/ إذا كان A وB حدثان متنافيان فإن: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ لأن:

$$A \cap B = \phi \Rightarrow P(A \cap B) = P(\phi) = 0$$

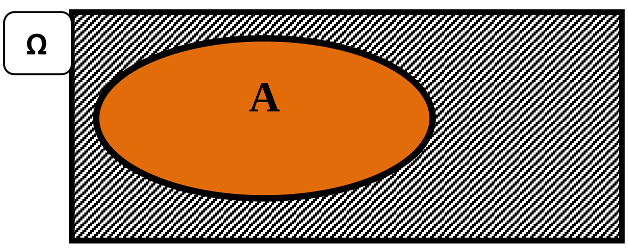
هذه الشروط الثلاثة تسمى مسلمات الاحتمال التي من خلالها يمكن تحديد مفهوم الاحتمال.

ملاحظة: إذا كانت Ω تمثل مجموعة النتائج الممكنة لتجربة عشوائية و A مجموعة الأحداث، فنسمي احتمال على (A, Ω) كل تطبيق P من A على المجال [0،1] إذا تحققت الشروط الثلاثة السابقة، ونسمي الثلاثية (P, A, Ω) فضاء احتمالي.

3- خواص:

الخاصية الأولى: لأي حادث A يكون: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

البرهان:



[1] - موراي شبيجل، جو شيلر و ألو سريقاسان: " سلسلة شوم الاحتمالات والاحصاء" ترجمة محمود علي أبو النصر و مصطفى جلال مصطفى، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، مصر ، 2004، ص 12.

لدينا: $\begin{cases} A\cup\overline{A}=\Omega \\ A\cap\overline{A}=\phi \end{cases}$ ولدينا: A و $\bar{A}$ حادثان متنافيان وعليه من المسلمتين (2) و(3) يكون:

$$P(\Omega)=P(A\cup\bar{A})=P(A)+P(\bar{A})=1$$

لأن P(Ω)=1 وعليه فإن:

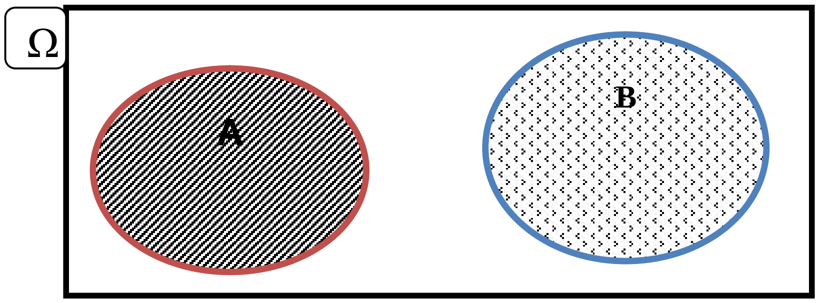
$$P(\bar{A})=1-P(A)$$

❖ **حالة حدثين**: إذا كان A و B حدثان متنافيان فإن:

$$A\cap B=\phi\Rightarrow P(A\cap B)=P(\phi)=0$$

إذن تحقق اجتماعهما يساوي مجموع احتمالها أي أن:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$



المثال رقم 23:

لدينا صندوق به 5 كرات: 2 بيضاوين، واحدة سوداء و 2 حمراويين سحبنا كرة واحدة من هذا الصندوق، لنحسب احتمال الحصول على كرة بيضاء أو سوداء؟

الحل:

- احتمال الحصول على كرة بيضاء هو: $P(B)=\frac{2}{5}$
- احتمال الحصول على كرة سوداء هو: $P(N)=\frac{1}{5}$

الكرة المسحوبة إما بيضاء أو سوداء ولا يمكن أن تكون بيضاء أو سوداء في آن واحد (الحدثان متنافيان) إذن فاحتمال الحصول على كرة بيضاء أو سوداء هو:

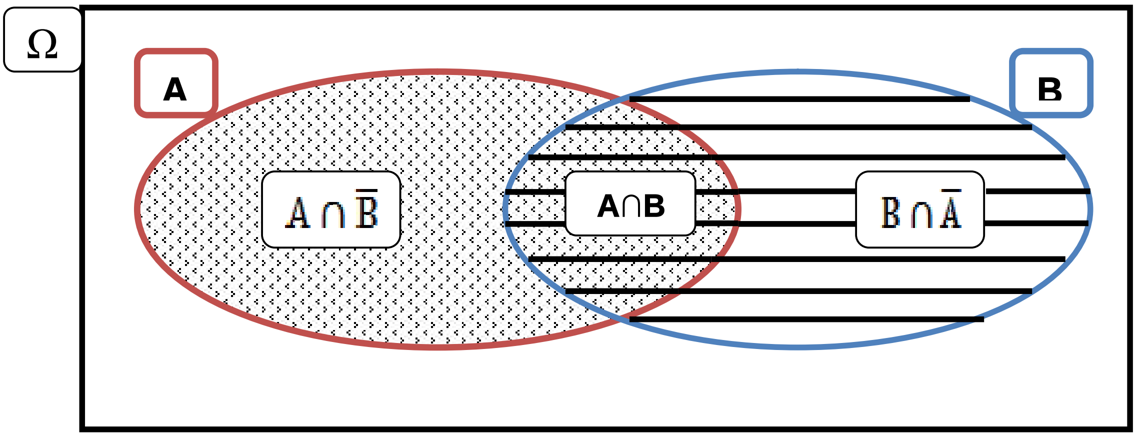
$$P(B\cup N)=P(B)+P(N)=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$$

الخاصية الثانية:

لأي حدثان كيفيان A و B يكون:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

البرهان: لدينا:



$$A\cup B=(A\cap\overline{B})\cup(A\cap B)\cup(B\cap\overline{A})$$

والأحداث $A\cap\overline{B}$ و $A\cap B$ و $B\cap\overline{A}$ هي أحداث متنافية ومنه:

$$P(A\cup B)=P(A\cap\overline{B})+P(A\cap B)+P(B\cap\overline{A})\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

ولدينا:

$$A=(A\cap\overline{B})\cup(A\cap B)$$

ومنه:

$$P(A)=P(A\cap\overline{B})+P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cap\overline{B})=P(A)-P(A\cap B)\ldots\ldots\ldots(2)$$

ولدينا:

$$B=(B\cap\overline{A})\cup(A\cap B)$$

ومنه:

$$P(B)=P(B\cap\overline{A})+P(A\cap B)\Rightarrow P(B\cap\overline{A})=P(B)-P(A\cap B)\ldots\ldots\ldots(3)$$

بتعويض (2) و (3) في المساواة (1) نجد:

$$P(A\cup B)=P(A)-P(A\cap B)+P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

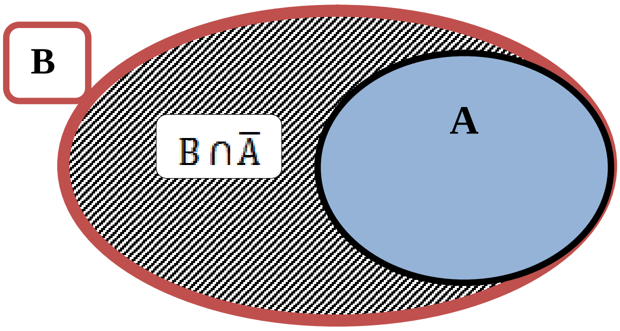
وعليه يكون:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

الخاصية الثالثة: إذا كان $A\subseteq B$ فإن:

$$\begin{cases}P(B\cap\overline{A})=P(B)-P(A)\\ P(A)\le P(B)\end{cases}$$

البرهان:



إذا كان $B \subseteq A$ فإن A و $B\cap\overline{A}$ حدثان متنافيان واتحادهما هو B أي أنّ:

$$B = A\cup(B\cap\overline{A})$$

وعليه يكون:

$$P(B) = P[A\cup(B\cap\overline{A})] = P(A) + P(B\cap\overline{A}) \Rightarrow P(B\cap\overline{A}) = P(B) - P(A)$$

ومن المسلمة (1):

$$P(B\cap\overline{A}) \geq 0 \Rightarrow P(B) - P(A) \geq 0 \Rightarrow P(B) \geq P(A)$$

وعليه فإن: $P(A) \leq P(B)$

نظرية: إذا كان B,A و C ثلاث أحداث غير متنافية:

- **قاعدة جمع الحوادث غير المتنافية:**

$$P(A\cup B\cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A\cap B) - P(A\cap C) - P(B\cap C) + P(A\cap B\cap C)$$

- **قاعدة ضرب الحوادث:**

$$P(A\cap B\cap C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A\cup B) - P(A\cup C) - P(B\cup C) + P(A\cup B\cup C)$$

المثال رقم 24:

نقوم بإلقاء قطعة نقدية معدنية متزنة ثلاث مرات، ونسجل F عند ظهور الصورة و P عند ظهور الكتابة.

1-حدد فراغ العينة.

2-أوجد الأحداث التالية وأحسب احتمال حدوثها: A : ظهور الصورة (F) مرتين على الأقل،

B : ظهور الصورة (F) في الرمية الثانية.

3-أوجد الأحداث التالية وأحسب احتمال حدوثها: $\overline{A}, A\cup B, A-B$

الحل:

1/ فراغ العينة: $n(\Omega)=2^n=2^3=8$ ومنه

$$\Omega=\{FFF, FFP, FPF, FPP, PFF, PFP, PPF, PPP\}$$

2/ احتمال حدوث الأحداث:

$$A=\{FFP, FPF, PFF, FFF\}\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{4}{8}=0,5$$

$$B=\{FFF, FFP, PFF, PFP\}\Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(\Omega)}=\frac{4}{8}=0,5$$

3/ احتمال حدوث الأحداث:

$$\overline{A}=\Omega-A=\Omega-\{FFP, FPF, PFF, FFF\}\Rightarrow P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{4}{8}=0,5$$

$$A\cup B=\{FFP, FPF, PFF, FFF, PFP\}\Rightarrow P(A\cup B)=\frac{n(A\cup B)}{n(\Omega)}=\frac{5}{8}$$

$$A\cap B=\{FFF, FFP, PFF\}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{3}{8}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$$

$$A-B=A\cap\overline{B}=\{FPF\}\Rightarrow P(A-B)=P(A\cap\overline{B})=\frac{1}{8}$$

المثال رقم 25:

عند رمي زهرة نرد متزنة مرتين متتاليتين، وعرفنا الحدث A على أنه مجموع الرقمين الظاهرين يساوي 7.

حدد فراغ العينة ثم أحسب احتمال الحدث A.

الحل: $n(\Omega)=6\times 6=36$ ومنه

$$\Omega=\{(1,1), (1,2),.....(1,6), (2,1),......(6,1),....(6,6)\}$$

وعليه فإن: $A=\{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$

$$P(A)=\frac{6}{36}=1/6$$

4- الاحتمال الشرطي Conditional Probability:

تستخدم نظرية الاحتمال الرمز P(A/B) الذي يقرأ احتمال تحقق الحدث A شرط تحقق الحدث B بصورة مسبقة، أو احتمال تحقق الحدث A علما أن الحدث B قد تحقق، هذا الاحتمال الجديد للحدث A يسمى الاحتمال الشرطي للحدث A إذا علم وقوع الحدث B و يرمز له بالرمز P(A/B).

4-1- تعريف: إذا كان A و B حدثان فإن الاحتمال الشرطي للحدث A إذا علم حدوث الحدث B يعرف كمايلي[1]:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \ldots\ldots \quad P(B) \neq 0$$

وبالمثل يكون الاحتمال الشرطي للحدث B إذا علم حدوث الحدث A هو:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \ldots\ldots \quad P(A) \neq 0$$

المثال رقم 26:

في اختبار نهاية السداسي الأول وجد أن 40% من طلبة السنة الأولى جذع مشترك نجحوا في مقياس الاحصاء و 25 % نجحوا في مقياس الرياضيات و 20% نجحوا في مقياسي الاحصاء والرياضيات.

فإذا تم اختيار أحد الطلبة عشوائيا وكان الحدث A يمثل نجاح الطالب في مقياس الاحصاء و الحدث B يمثل نجاحه في مقياس الرياضيات ، فأوجد احتمال حدوث الحوادث التالية:

- نجاح الطالب في مقياس الرياضيات إذا علمنا أنه نجح في مقياس الاحصاء.
- نجاح الطالب في مقياس الاحصاء إذا علمنا أنه نجح في مقياس الرياضيات.
- نجاح الطالب في مقياس الاحصاء إذا علمنا رسوبه في مقياس الرياضيات.
- رسوب الطالب في مقياس الرياضيات شرط رسوبه في مقياس الرياضيات.

الحل: من المعطيات نجد: $P(A \cap B) = 0.2$ ، $P(B) = 0.25$ ، $P(A) = 0.4$

- **حساب احتمال نجاح الطالب في مقياس الرياضيات إذا علمنا أنه نجح في مقياس الاحصاء:**

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.2}{0.4} = 0.5$$

- **حساب احتمال نجاح الطالب في مقياس الاحصاء إذا علمنا أنه نجح في مقياس الرياضيات:**

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.2}{0.25} = 0.8$$

[1] - موراي شبيجل، جو شيلر و ألو سريڤاسان: " سلسلة شوم الاحتمالات والاحصاء" ترجمة محمود علي أبو النصر و مصطفى جلال مصطفى، مرجع سابق، ص ص 14 ، 15.

- **حساب احتمال نجاح الطالب في مقياس الاحصاء إذا علمنا رسوبه في مقياس الرياضيات:**

$$P(A/\overline{B})=\frac{P(A\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{1-P(B)}=\frac{0.4-0.2}{1-0.25}=\frac{0.2}{0.75}=0.27$$

- **حساب احتمال رسوب الطالب في مقياس الرياضيات شرط رسوبه في مقياس الرياضيات:**

$$P(\overline{B}/\overline{A})=\frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(\overline{A})}=\frac{P(\overline{A\cup B})}{1-P(A)}=\frac{1-P(A\cup B)}{1-P(A)}$$

$$P(\overline{B}/\overline{A})=\frac{1-[P(A)+P(B)-P(A\cap B)]}{1-P(A)}=\frac{1-[0.4+0.25-0.2]}{1-0.4}=0.92$$

4- 2- قاعدة الضرب للاحتمالات الشرطية:

في بعض الأحيان نجد أنه من المناسب حساب $P(A\cap B)$ وذلك بتطبيق الصيغة التالية التي تم استنباطها من تعريف الاحتمال الشرطي:

- $P(A\cap B)=P(A)\times P(B/A)......... P(A)\neq 0$
- $P(B\cap A)=P(B)\times P(A/B)......... P(B)\neq 0$

وتستخدم هذه العلاقة في حالة السحب على التوالي و دون إعادة (دون إرجاع).

المثال رقم 27:

لنفرض أننا سنسحب كرتان على التوالي و دون إعادة من صندوق به 3 كرات حمراء و5 كرات خضراء.

المطلوب: ما احتمال سحب الكرة الأولى حمراء والثانية خضراء.

الحل:

ليكن A: حدث سحب كرة حمراء و B: حدث سحب كرة خضراء وعليه فإن:

$P(A)=\frac{3}{8}$ و $P(B)=\frac{5}{8}$

وعليه فالمطلوب هو حساب احتمال سحب الكرة الأولى حمراء والثانية خضراء، وما دام السحب على التوالي ودون إعادة فإن عملية السحب الأولى تؤثر على عملية السحب الثانية وبالتالي يكون:

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B/A)=\frac{3}{8}\times\frac{5}{7}=\frac{15}{56}$$

5- الاحتمال الكلي: في حالات كثيرة قد يكون وقوع حدث ما وليكن B مرتبط بتجربة ما لا يتحقق إلا بتحقق أحد الحوادث المتنافية: $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ والتي تشكل تجزئة لمجموعة كلية Ω.

5-1- تجزئة فضاء العينة:

إذا كانت $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ تمثل متوالية من الأحداث فإنه يقال بأن المجموعة $\{A_i\}$ حيث $i = 1,2,\ldots\ldots\ldots n$ هي تجزئة لفراغ العينة إذا وفقط إذا تحقق الشرطان التاليان:

$$\begin{cases} 1)\ldots \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega \\ 2)\ldots A_i \cap A_j = \phi \ (\forall\, i \neq j) \end{cases}$$

المثال رقم 28:

عند إلقاء قطعة نقود معدنية مرة واحدة، عندئذ يكون فراغ العينة هو: $\Omega = \{F , P\}$

إذن المجموعة $\{\{P\}, \{F\}\}$ هي تجزئة لفراغ العينة لأن:

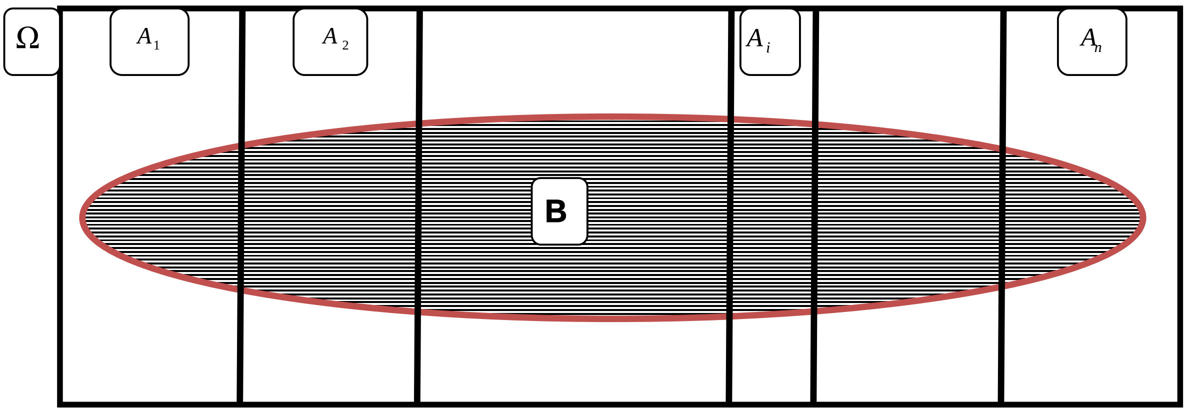
$$\begin{cases} 1)\ldots \{F\} \cup \{P\} = \Omega \\ 2)\ldots \{F\} \cap \{P\} = \phi \end{cases}$$

5-2- نظرية الاحتمال الكلي:

إذا كانت $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ تشكل تجزئة لفضاء العينة Ω، وكان احتمال أي جزء A_i موجبا لكل قيم i $(P(A_i) \rangle 0, \forall i = 1,\ldots\ldots, n)$ و كان B حدث ينتمي لنفس فراغ العينة Ω فإن:

$$\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \times P(B / A_i)}$$

البرهان:



لدينا من الشكل: $B = B \cap \Omega$

$$B = B \cap \Omega = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots\ldots \quad \ldots. \cup A_n)$$

ومنه: $B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup .... \quad .... \cup (B \cap A_n)$

والأحداث: $(B \cap A_1), (B \cap A_2), ...,(B \cap A_n)$ هي أحداث متنافية لذلك فإن:

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + ... \quad .... + P(B \cap A_n)$$

وبتطبيق قاعدة الضرب للاحتمالات الشرطية $P(B \cap A_i) = P(A_i) \times P(B / A_i)$ نجد:

$$P(B) = P(A_1) \times P(B / A_1) + P(A_2) \times P(B / A_2) + ... \quad .... + P(A_n) \times P(B / A_n)$$

وعليه يكون:

$$\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \times P(B / A_i)}$$

و تدعى هذه العلاقة بصيغة الاحتمال الكلي، وهي تلعب دور هام في حل الكثير من المسائل الاحتمالية.

المثال رقم 29:

إذا كانت بأحد المصانع ثلاث ورشات إنتاجية، حيث تنتج الورشة الأولى 40% من إنتاج المصنع، وتنتج الورشة الثانية 35% من إنتاج المصنع والباقي تنتجه الورشة الثالثة أي 25%.

❖ ما احتمال إنتاج وحدة معيبة (فاسدة) في المصنع ككل، علما بأن نسب الإنتاج المعيب في الورشات الثلاث هو على الترتيب: 5%، 3%، 2% ؟

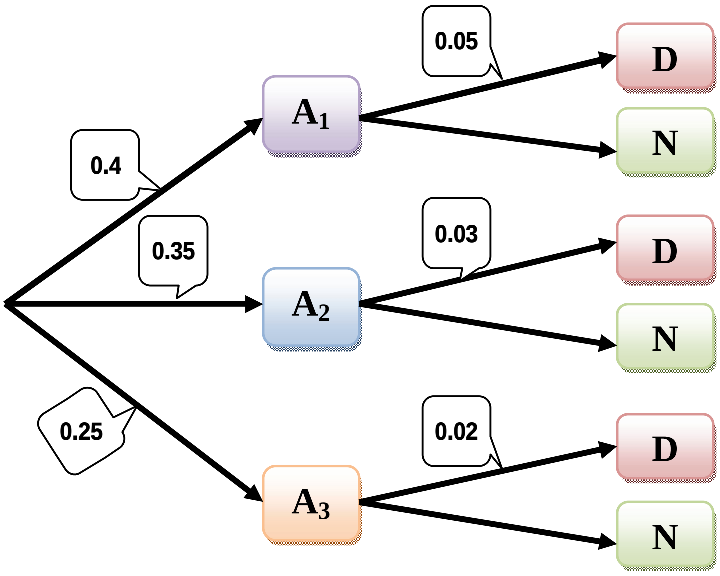
الحل:

نفرض أن D هو حدث إنتاج وحدة معيبة، و A_i حدث أن الإنتاج كان من قبل الورشة i وعليه فإن:

$P(A_1) = 0{,}40, P(A_2) = 0{,}35, P(A_3) = 0{,}25$

وأن الحدث: (D / A_i) يعني الوحدة معيبة (فاسدة) علما أنها منتجة من قبل الورشة i وبذلك يكون:

$P(D / A_1) = 0{,}05, P(D / A_2) = 0{,}03, P(D / A_3) = 0{,}02$



بتطبيق قاعدة الاحتمال الكلي:

$$P(D) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \times P(D/A_i)$$

$$P(D) = P(A_1) \times P(D/A_1) + P(A_2) \times P(D/A_2) + P(A_3) \times P(D/A_3)$$
$$= 0{,}4 \times 0{,}05 + 0{,}35 \times 0{,}03 + 0{,}25 \times 0{,}02 = 0{,}0355$$

وعليه نجد: $P(D) = 0{,}0355$

6- قاعدة بايز Bayes Theorem:

تعالج قاعدة بايز كيفية حساب الاحتمالات الشرطية لحوادث متنافية تشكل كلية مجموعة ومرافقة لحدث ما، وتفيد هذه النظرية في الإجابة على التساؤل التالي: إذا وقع الحدث B مثلا فما احتمال أنه وقع بسبب الحدث A_i .

إذا كانت $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ أحداث تجزئ فراغ العينة Ω، وكان احتمال أي جزء A_i موجبا لكل قيم i $(P(A_i)\rangle 0, \forall i = 1,\ldots\ldots, n)$ وكان B أي حدث بشرط أنّ $P(B)\rangle 0$ فإن:

$$\boxed{P(A_i / B) = \frac{P(A_i) \times P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \times P(B/A_i)}}$$

البرهان:

لدينا: $P(A_i / B) = \dfrac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$ ومنه

$$P(A_i \cap B) = P(B) \times P(A_i / B) = P(A_i) \times P(B / A_i)$$

أي أنّ:

$$P(B) \times P(A_i / B) = P(A_i) \times P(B / A_i) \text{.........} \quad \text{....}(1)$$

وبقسمة طرفي المعادلة (1) على $P(B)$ علمنا أنّ: $P(B) \rangle 0$ نجد:

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i) \times P(B / A_i)}{P(B)}$$

وبما أنّ الأحداث $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_n$ تحقق شروط الاحتمال الكلي وعليه:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \times P(B / A_i)$$

ومنه:

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i) \times P(B / A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \times P(B / A_i)}$$

وتدعى هذه العلاقة بدستور (قاعدة - نظرية) بايز.

المثال رقم 30:

بالرجوع إلى المثال السابق (المثال رقم 29)، فإذا تم اختيار وحدة من الوحدات المنتجة في المصنع، فوجدت أنها فاسدة (معيبة)، أي الورشات ترجح أنها أنتجتها ؟

الحل:

- لنفرض أن الورشة الأولى هي التي أنتجت الوحدة الفاسدة وعليه يكون الاحتمال:

$$P(A_1 / D) = \frac{P(A_1) \times P(D / A_1)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \times P(D / A_i)} = \frac{0,4 \times 0,05}{0,0355} = 0,56$$

- لنفرض أن الورشة الثانية هي التي أنتجت الوحدة الفاسدة وعليه يكون الاحتمال:

$$P(A_2 / D) = \frac{P(A_2) \times P(D / A_2)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \times P(D / A_i)} = \frac{0,35 \times 0,03}{0,0355} = 0,295$$

❖ لنفرض أن الورشة الثالثة هي التي أنتجت الوحدة الفاسدة وعليه يكون الاحتمال:

$$P(A_3/D) = \frac{P(A_3)\times P(D/A_3)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\times P(D/A_i)} = \frac{0,25\times 0,02}{0,0355} = 0,14$$

بناءا على النتائج السابقة فإننا نرجح أن الورشة الأولى هي التي أنتجت هذه الوحدة الفاسدة لأن احتمالها هو الأكبر.

7- الأحداث المستقلة Independent Events:

إذا كان احتمال وقوع حدثين أو أكثر معا في آن واحد يساوي إلى حاصل ضرب احتمال وقوع كل منهما، نقول عنهما أنهما مستقلان، وعليه يقال أن الحادثان A و B مستقلان إذا تحققت أحد الشروط التالية:

$$I)\; P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$$

$$II)\; P(A/B) = P(A);........\; .P(B)\rangle 0$$

$$III)\; P(B/A) = P(B);........\; .P(A)\rangle 0$$

ولتوضيح أن الشروط الثلاثة متكافئة فإنه يكفي التوضيح بأن:

$(I) \Leftarrow (III)$ و أن $(III) \Leftarrow (II)$ و أن $(II) \Leftarrow (I)$

فإذا كان: $P(A\cap B) = P(A)\times P(B)$ فإن:

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)\times P(B)}{P(B)} = P(A);......\quad P(B)\rangle 0$$

وعليه فإن: $(II) \Leftarrow (I)$

وإذا كان: $P(A/B) = P(A)$ فإن:

$$P(B/A) = \frac{P(A/B).P(B)}{P(A)} = \frac{P(A).P(B)}{P(A)}$$

$$P(B/A) = \frac{P(A).P(B)}{P(A)} = P(B);......\quad P(B)\rangle 0\; ;\; P(A)\rangle 0$$

وبالتالي فإن: $(II) \Rightarrow (III)$

وإذا كان: $P(B/A) = P(B)$ فإن:

$$P(A \cap B) = P(B/A).P(A) = P(B).P(A);....... \quad P(A)\rangle 0$$

وعليه فإن: $(III) \Rightarrow (I)$

من الواضح أن: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ إذا كان $P(A) = 0$ أو $P(B) = 0$

وأن العلاقة $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ متماثلة في A و B، بمعنى أن:

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A) \times P(B) = P(B) \times P(A)$$

ملاحظة:

تجدر الاشارة إلى وجود اختلاف بين الأحداث المستقلة والأحداث المتنافية، فليس من الضروري أن يتضمن أحدهما الآخر:

- فإذا كان A و B حادثين متنافيين وكان $0\langle P(A)$ و $0\langle P(B)$ فإن:

$P(A \cap B) = 0 \neq P(A) \times P(B)$ وبالتالي يكون الحادثان A و B غير مستقلين.

- وإذا كان A و B حادثين مستقلين، و كان $0\langle P(A)$ و $0\langle P(B)$ فإن:

$0\langle P(A) \times P(B) \Rightarrow P(A \cap B)\rangle 0$ وبالتالي يكون الحادثان غير متنافيين.

- لكن يكون الحدثان المتنافيان مستقلان إذا وفقط إذا كان $P(A) \times P(B) = 0$ وهذا صحيح إذا وفقط إذا كان احتمال أحدهما مساوي للصفر أي إذا كان: $P(A) = 0$ **أو** $P(B) = 0$

تعميم: يمكن تعميم خاصية الاستقلالية لأكثر من حادثين، فإذا كان A ، B و C ثلاثة أحداث فإننا نقول أن A ، B و C مستقلة ثنائيا إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية**:**

$1) P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$2)\ P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$

$3)\ P(B \cap C) = P(B) \times P(C)$

إذا تحقق الشرط التالي إضافة إلى الشروط الثلاثة أعلاه نقول أن الأحداث A ، B و C مستقلة كليا:

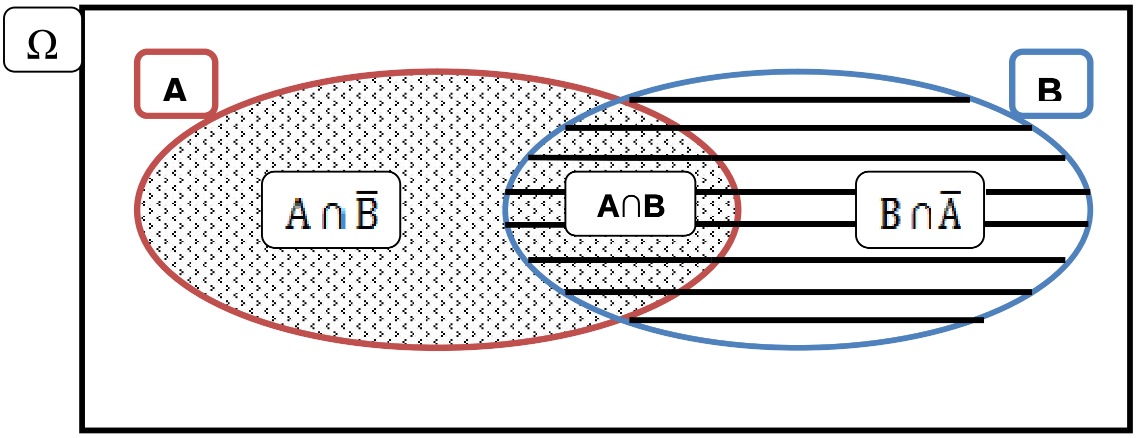
$4)\ P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$

خواص: إذا كان A و B حادثين مستقلين معرفين على فراغ العينة Ω $\left(P(A \cap B) = P(A) \times P(B)\right)$

فإن: $(A \cap \overline{B})$ و $(B \cap \overline{A})$ و $(\overline{A} \cap \overline{B})$ هي أزواج من حادثين مستقلين.

❖ **A و $\overline{B}$ حادثان مستقلان ؟** $P(A \cap \overline{B}) = P(A) \times P(\overline{B})$

البرهان:



من الشكل أعلاه يتضح أن:

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A) \times P(B)$$

لأن A و B حادثين مستقلين $P(A \cap \overline{B}) = P(A)[1 - P(B)] = P(A) \times P(\overline{B})$

وعليه فإن: A و $\overline{B}$ حادثان مستقلان ونكتب: $P(A \cap \overline{B}) = P(A) \times P(\overline{B})$

❖ **B و $\overline{A}$ حادثان مستقلان ؟** $P(B \cap \overline{A}) = P(B) \times P(\overline{A})$

من الشكل أعلاه يتضح أن:

$$P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) \times P(B)$$

لأن A و B حادثين مستقلين $P(B \cap \overline{A}) = P(B)[1 - P(A)] = P(B) \times P(\overline{A})$

وعليه فإن: B و $\overline{A}$ حادثان مستقلان أي: $P(B \cap \overline{A}) = P(B) \times P(\overline{A})$

❖ $\overline{A}$ و $\overline{B}$ **حادثان مستقلان ؟** $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \times P(\overline{B})$

حسب قانون دي مورغان فإن:

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]$$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A) \times P(B)$$

لأن A و B حدثين مستقلين

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(A) \times P(B) = [1 - P(A)][1 - P(B)]$$

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = [1 - P(A)][1 - P(B)] = P(\overline{A}) \times P(\overline{B})$$

وعليه فإن: $\overline{A}$ و $\overline{B}$ حادثان مستقلان أي **:** $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \times P(\overline{B})$

المثال رقم 31:

في تجربة إلقاء قطعة نقدية معدنية متزنة مرتين، نعرف الحادث A بأنه حادث الحصول على وجهين متشابهين، والحادث B حادث الحصول على صورة واحدة على الأقل، كما نعرف الحادث C حادث الحصول على صورة في الرمية الأولى.

المطلوب: حدد عناصر فراغ العينة، ثم بيّن إذا كانت الأحداث مستقلة ثنائيا.

الحل:

عدد عناصر فراغ العينة $n(\Omega) = 2^2 = 4$ أي أنّ: $\Omega = \{FF, FP, PF, PP\}$

$$A = \{FF, PP\} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{2}$$

$$B = \{FP, PF, FF\} \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{4}$$

$$C = \{FP, FF\} \Rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{1}{2}$$

❖ حتى يكون A و B حادثان مستقلان يجب أن تتحقق المساواة: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$$A \cap B = \{FF\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

$$P(A)\times P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}\neq\frac{1}{4}=P(A\cap B)$$

ومنه A وB حادثان غير مستقلان.

- يكون A و C حادثان مستقلان إذا تحققت المساواة: $P(A\cap C)=P(A)\times P(C)$

$$A\cap C=\{FF\}\Rightarrow P(A\cap C)=\frac{1}{4}$$

$$P(A)\times P(C)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}=P(A\cap C)$$

ومنه A وC حادثان مستقلان.

- B وC حادثان مستقلان شرط تحقق: $P(B\cap C)=P(B)\times P(C)$

$$B\cap C=\{FP\ ,FF\}\Rightarrow P(B\cap C)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$P(B)\times P(C)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}\neq\frac{1}{2}=P(B\cap C)$$

ومنه B وC حادثان غير مستقلان.

تمارين محلولة:

التمرين الأول:

لتكن المجموعة التالية: $\Omega = \{1/2,0,3,5,-2,-4\}$، ولتكن A، B و C ثلاث مجموعات جزئية من Ω

حيث: $A = \{0,3,-2\}$ ، $B = \{1/2,5,-2,-4\}$، $C = \{1/2,-4\}$

المطلوب: إيجاد المجموعات التالية: $A \cup B, A \cap B, \overline{A}, \overline{B}, \overline{A \cup B}, \overline{A \cap B}, A - B, \overline{B \cap C},$

الحل:

$A \cup B = \{0,3,-2,1/2,5,-4\}$ و $A \cap B = \{-2\}$ و $\overline{A} = \Omega - A = \{1/2,5,-4\}$ و $\overline{B} = \Omega - B = \{0,3\}$

و $\overline{A \cup B} = \Omega - (A \cup B) = \{\ \} = \phi$ و $\overline{A \cap B} = \Omega - (A \cap B) = \Omega - \{-2\} = \{1/2,0,3,5,-4\}$

و $A - B = A \cap \overline{B} = \{0,3\}$ و $\overline{B \cap C} = \Omega - (B \cap C) = \Omega - \{1/2,-4\} = \{1/2,0,3,5,-4\}$

التمرين الثاني:

تحمل حقيبة قفل رقمي يتكون من ثلاث خانات متماثلة، كل خانة يمكن أن تحمل الأرقام 0، 1، .....،9.

- كم طريقة يمكن بها تكوين رقم سري (3 أعداد) إذا كان التكرار ممكن.
- كم طريقة يمكن بها تكوين رقم سري (3 أعداد) إذا كان التكرار غير ممكن.

الحل:

- عدد الطرق التي يمكن بها تكوين رقم سري (3 أعداد) إذا كان التكرار ممكن.

لدينا: $n = 10$ و $k = 3$ $(k \langle n)$ وبما أنه رقم سري يتكون من ثلاث أعداد (في الأعداد الترتيب مهم) وعليه نستخدم ترتيبة مع التكرار (${}_rA_n^k = n^k$) وعليه فإنه يمكن تكوين: ${}_rA_{10}^3 = n^k = 10^3 = 1000$ رقم سري.

- عدد الطرق التي يمكن بها تكوين رقم سري (3 أعداد) إذا كان التكرار غير ممكن.(هنا الترتيب مهم والتكرار غير ممكن وعليه نستخدم $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$).

يمكن تكوين: $A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$ رقم سري.

التمرين الثالث: اتفق 7 أصدقاء على الذهاب إلى الملعب لمشاهدة مباراه في كرة القدم.

المطلوب: بكم طريقة يمكنهم الجلوس في صف واحد به 7 مقاعد ؟

- نفرض أنهم لم يجدوا إلا 5 مقاعد، فبكم طريقة يمكنهم الجلوس ؟

- قررت هذه المجموعة المكونة من 7 أصدقاء بعد فوز فريقهم بالمباراة تناول وجبة العشاء معا، فبكم طريقة يمكنهم الجلوس حول مائدة مستديرة بها 7 كراسي ؟

الحل:

- اتفق 7 أصدقاء على الذهاب إلى الملعب لمشاهدة مباراه في كرة القدم، وعليه عدد الطرق التي يمكنهم الجلوس بها في صف واحد به 7 مقاعد يمثل تبديلة مع عدم التكرار لأننا نهتم باختيار الكل من الكل (7 أشخاص و 7 مقاعد) والسحب على التوالي و دون إعادة أي أن الترتيب مهم والتكرار غير ممكن وبالتالي نستخدم تبديلة دون إعادة وعلاقتها هي: $P_n = n!$

$$P_n = n! = 7! = 7 \times 6 \times 5 \times ...... \times 1 = 5040 \quad \text{طريقة}$$

- نفرض أنهم لم يجدوا إلا 5 مقاعد، فهنا نهتم باختيار الجزء من الكل (5 أشخاص من بين 7 أشخاص)، وبما أن السحب على التوالي و دون إعادة، أي أنالترتيب مهم والتكرار غير ممكن وبالتالي نستخدم ترتيبة دون تكرار: $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

$$A_7^5 = \frac{7!}{(7-5)!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2520$$

- قررت هذه المجموعة المكونة من 7 أصدقاء بعد فوز فريقهم بالمباراة تناول وجبة العشاء معا، فعدد الطرق التي يمكنهم الجلوس بها حول مائدة مستديرة بها 7 كراسي يمثل تبديلة دائرية علاقتها هي: $P_{\bar{n}} = (n-1)!$

$$P_7 = (7-1)! = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 720$$

التمرين الرابع: لتكن لدينا كلمة CADENAS

- بكم طريقة يمكن ترتيب هذه الأحرف.
- بكم طريقة يمكن ترتيب هذه الأحرف حيث يظهر الحرفان (A) متتاليان.

الحل:

- **طرق ترتيب أحرف كلمة CADENAS** : تتكون الكلمة من 7 أحرف (حيث أن الأحرف:S ;N,E,D,C تتكرر مرة واحدة بينما الحرفA يتكرر مرتان)، وعليه نكون بصدد تبديلة لـ 7 أحرف مع التكرار وذلك باستخدام العلاقة التالية: $P_n^{n_1,n_2,\dots,n_k} = \dfrac{n!}{n_1!.n_2!\dots\dots.n_k!}$

$$P_7^{1,2,1,1,1,1} = \frac{7}{1!\times 2!\times 1!\times 1!\times 1!\times 1!} = \frac{7!}{2!} = 2520$$

- **طرق ظهور الحرفان (A) متتاليان:**

$$AA\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet/\bullet AA\bullet\bullet\bullet\bullet/\bullet\bullet AA\bullet\bullet\bullet/\bullet\bullet\bullet AA\bullet\bullet/\bullet\bullet\bullet\bullet AA\bullet/\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet AA$$

وعليه فعدد الحالات: $6\times P_5 = 6\times 120 = 720$ أو نعتبر الحرفان (A A) حرف واحد وعليه:

$$P_6 = 6! = 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 720$$

التمرين الخامس:

يتكون مجلس إدارة من 12 عضوا، من بينهم 9 رجال و 3 نساء، نريد تشكيل لجنة من 3 أشخاص.

- ما احتمال أن تحتوي اللجنة على امرأة واحدة فقط ؟
- إذا افترضنا أن الأشخاص الثلاثة المنتخبون يتم تعيينهم حسب ترتيب القرعة: رئيس، نائب و أمين المال، فما احتمال أن تحتوي اللجنة على رجلين على الأقل ؟

الحل:

- **احتمال أن تحتوي اللجنة على امرأة واحدة فقط:**

الملاحظ في هذه التجربة أننا نهتم باختيار الجزء من الكل (3 أشخاص من بين 12 شخص) الاختيار أو السحب يتم في هذه الحالة مرة واحدة أي أن الاهتمام يكون في تكوين لجنة من 3 أفراد ولا يهم من تم اخياره أولا والتكرار غير ممكن وبالتالي نستخدم علاقة توفيقة دون تكرار: $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

$$C_{12}^3 = \frac{12!}{3!(12-3)!} = \frac{12!}{3!9!} = \frac{12\times 11\times 10\times 9!}{(3\times 2\times 1)9!} = 220$$ لجنة ممكنة

نسمي الحادث A حادث احتواء اللجنة على امرأة واحدة فقط وعليه:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{C_3^1\times C_9^2}{C_{12}^3}=\frac{108}{220}=0.49$$

- إذا افترضنا أن الأشخاص الثلاثة المنتخبون يتم تعيينهم حسب ترتيب القرعة: رئيس، نائب و أمين المال، فاحتمال أن تحتوي اللجنة على رجلين على الأقل هو:

نلاحظ في هذه التجربة أننا نهتم باختيار الجزء من الكل (3 أشخاص من بين 12 شخص)، الاختيار أو التعيين في هذه الحالة يتم حسب ترتيب القرعة أي أن الترتيب مهم لكن التكرار غير ممكن وبالتالي نستخدم علاقة ترتيبية دون تكرار: $A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}$

$$A_{12}^3=\frac{12!}{(12-3)!}=\frac{12!}{9!}=\frac{12\times 11\times 10\times 9!}{9!}=1320$$

نسمي الحادث B حادث احتواء اللجنة على رجلين على الأقل وعليه:

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(\Omega)}=\frac{A_9^2\times A_3^1+A_9^3\times A_3^0}{A_{12}^3}=\frac{720}{1320}\approx 0.55$$

التمرين السادس:

في تجربة إلقاء قطعة نقدية معدنية متزنة ثلاث مرات، نسجل F عند ظهور الصورة و P عند ظهور الكتابة، ونعرف الأحداث كما يلي: A : ظهور الصورة (F) مرتين، B : ظهور الصورة (F) مرة واحدة، C : ظهور الصورة (F) في الرمية الأولى.

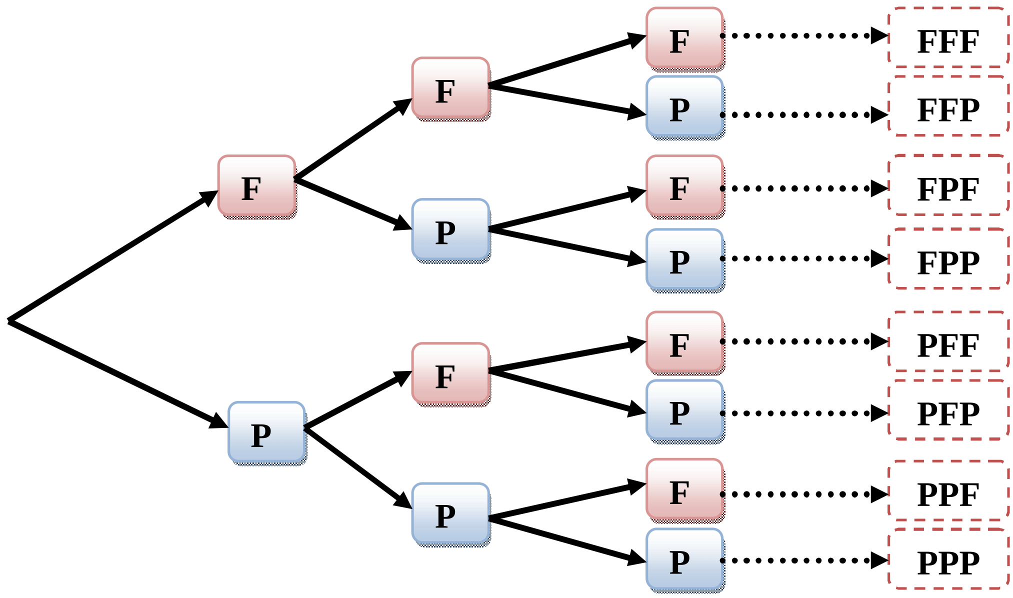
1- أرسم شجرة الحوادث الكلية، ثم استنتج فراغ العينة .
2- أوجد الأحداث السابقة وأحسب احتمال حدوثها.
3- أوجد الأحداث التالية وأحسب احتمال حدوثها:

$$A\cup B, A\cap B, A\cup C, C-A, C-B, \overline{B\cap C}, A\cap B\cap C$$

الحل:

في تجربة إلقاء قطعة نقدية معدنية متزنة ثلاث مرات، نسجل F عند ظهور الصورة و P عند ظهور الكتابة، ونعرف الأحداث كما يلي: A : ظهور الصورة (F) مرتين، B : ظهور الصورة (F) مرة واحدة، C : ظهور الصورة (F) في الرمية الأولى.

1/ شجرة الحوادث الكلية و فراغ العينة: لدينا: $n(\Omega) = 2^n = 2^3 = 8$



$$\Omega = \{FFF, FFP, FPF, FPP, PFF, PFP, PPF, PPP\}$$

2/ احتمال حدوث الأحداث:

$$A = \{FFP, FPF, PFF\} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{8}$$

$$B = \{FPP, PFP, PPF\} \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{8}$$

$$C = \{FFF, FFP, FPF, FPP\} \Rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} = \frac{4}{8} = 0{,}5$$

3/ احتمال حدوث الأحداث:

$$A \cup B = \{FFP, FPF, PFF, FPP, PFP, PPF\} \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$A \cap B = \{\ \} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = 0$$

$$A \cup C = \{FFP, FPF, PFF, FFF, FPP\} \Rightarrow P(A \cup C) = \frac{n(A \cup C)}{n(\Omega)} = \frac{5}{8}$$

$$C - A = C \cap \overline{A} = \{FFF, FPP\} \Rightarrow P(C - A) = P(C \cap \overline{A}) = P(C) - P(C \cap A) = \frac{4}{8} - \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$C - B = C \cap \overline{B} = \{FFF, FFP, FPF\} \Rightarrow P(C - B) = P(C \cap \overline{B}) = P(C) - P(C \cap B) = \frac{4}{8} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$\overline{B\cap C}=\Omega-(B\cap C)=\Omega-\{FPP\}\Rightarrow P(\overline{B\cap C})=1-P(B\cap C)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

$$A\cap B\cap C=\{\ \}\Rightarrow P(A\cap B\cap C)=0$$

التمرين السابع:

لتكن E تجربة عشوائية بها خمس نتائج ممكنة وهي: e_1,e_2,e_3,e_4,e_5 ولدينا الاحتمالات التالية:

$P(e_1)=1/8$ ، $P(e_2)=3/8$ ، $P(e_4)=1/4$ ، $P(e_5)=1/8$.

1- أحسب $P(e_3)$ ؟ 2- ليكن الحدثين: $A=\{e_1,e_3\}$ و $B=\{e_2,e_4\}$.

3-أحسب ما يلي: $P(A)$ ، $P(B)$ ، $P(A\cup B)$ ؟

الحل:

1/ حساب $P(e_3)$

$$\Omega=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}\Rightarrow P(\Omega)=P(e_1)+P(e_2)+P(e_3)+P(e_4)+P(e_5)=1$$

$$\Rightarrow P(e_3)=1-(\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8})=1/8$$

2/ حساب $P(A)$ ، $P(B)$ ، $P(A\cup B)$

$$A=\{e_1,e_3\}\Rightarrow P(A)=P(e_1)+P(e_3)=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=1/4=0{,}75$$

$$B=\{e_2,e_4\}\Rightarrow P(B)=P(e_2)+P(e_4)=\frac{3}{8}+\frac{1}{4}=5/8=0{,}625$$

$$A\cup B=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)=7/8$$

التمرين الثامن:

ليكن A و B حدثان كيفيان، فإذا كان: $P(A)=3/8$ ، $P(B)=1/2$ و $P(A\cup B)=5/8$

- أحسب ما يلي: $P(\overline{A})$ ، $P(\overline{B})$ ، $P(A\cap B)$ ، $P(A\cap \overline{B})$ ، $P(B\cap \overline{A})$ ، $P(\overline{A}\cap \overline{B})$ ، $P(\overline{A}\cup \overline{B})$ ، $P(A/B)$ ، $P(B/A)$ ، $P(\overline{A}/\overline{B})$ ، $P(A/\overline{B})$

الحل:

- $P(\overline{A})=1-P(A)=1-\dfrac{3}{8}=5/8$

- $P(\overline{B})=1-P(B)=1-\dfrac{1}{2}=1/2=0{,}5$

- $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$
  $=\dfrac{3}{8}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{8}=2/8=0{,}75$

$P(A\cap \overline{B})=P(A)-P(A\cap B)=\dfrac{3}{8}-\dfrac{1}{4}=1/8$

- $P(B\cap \overline{A})=P(B)-P(A\cap B)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}=1/2=0{,}5$

- $P(\overline{A}\cap \overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-\dfrac{5}{8}=3/8$

- $P(\overline{A}\cup \overline{B})=P(\overline{A\cap B})=1-P(A\cap B)=1-\dfrac{1}{4}=3/4$

- $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{1/4}{1/2}=1/2$

- $P(B/A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{1/4}{3/8}=2/3$

- $P(\overline{A}/\overline{B})=\dfrac{P(\overline{A}\cap \overline{B})}{P(\overline{B})}=\dfrac{3/8}{1/2}=3/4$

- $P(A/\overline{B})=\dfrac{P(A\cap \overline{B})}{P(\overline{B})}=\dfrac{1/8}{1/2}=1/4$

التمرين التاسع:

رميت قطعة نقود ثلاث مرات، فإذا رمزنا لظهور الصورة بالحرف F و ظهور الكتابة بالحرف P، وإذا علم أن الوجه في الرمية الأولى F فما احتمال أن يكون الوجهان الآخران F ، F ؟

الحل:

فراغ العينة لهذه التجربة هو: $\Omega = \{FFF, FFP, FPF, FPP, PFF, PFP, PPF, PPP\}$

لنفرض أن: A حادث ظهور الصورة (F) في الرمية الأولى وعليه: $A = \{FFF, FFP, FPF, FPP\}$

$$A = \{FFF, FFP, FPF, FPP\} \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

ولنفرض أن: B حادث ظهور الصورة (F) في الرمية الثانية والثالثة وعليه: $B = \{FFF, PFF\}$

$$B = \{FFF, PFF\} \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$A \cap B = \{FFF\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{8}$$

المعلوم أن الوجه في الرمية الأولى F وهو الحدث A وعليه فالاحتمال المطلوب حسابه هو أن يكون الوجهان الآخران F ، F وهو احتمال شرطي أي احتمال وقوع الحادث B شرط أو بمعلومية وقوع الحادث A أي:

$$P(B / A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/8}{4/8} = \frac{1}{8} \times \frac{8}{4} = \frac{1}{4}$$

التمرين العاشر:

صندوق به 3 كرات حمراء و 9 كرات بيضاء سحبت منه كرة واحدة ولوحظ لونها وطرحت جانبا ثم سحبت منه كرة أخرى.

- أوجد احتمال أن الكرة الأولى بيضاء الثانية حمراء .

الحل:

نفرض أن الحادث A يمثل الكرة الأولى المسحوبة بيضاء، وأن الحادث B يمثل الكرة الثانية المسحوبة حمراء.

إذن فالمطلوب هو حساب: $P(A \cap B)$

من قاعدة الضرب للاحتمالات الشرطية لدينا: $P(A\cap B)=P(A)\times P(B/A)$

بما أن العدد الاجمالي للكرات هو 12 كرة وعدد الكرات البيضاء 9 لذلك يكون $P(A)=\frac{9}{12}$ وأيضا $P(B/A)=\frac{3}{11}$ لأن احتمال الكرة الثانية حمراء إذا علم أن الكرة الأولى بيضاء وتم طرحها جانبا فإنه قد بقى في الصندوق 3 كرات حمراء و 8 كرات حمراء.

من قاعدة الضرب نجد: $P(A\cap B)=P(A)\times P(B/A)=\frac{9}{12}\times\frac{3}{11}=\frac{27}{132}=\frac{9}{44}$

التمرين الحادي عشر:

إذا كان لدينا ثلاث صناديق الصندوق الأول به (05) كريات بيضاء و (03) كريات سوداء ، والصندوق الثاني به (04) كريات بيضاء و (04) كريات سوداء والصندوق الثالث به كرة بيضاء و (04) كريات سوداء. نقوم باختيار صندوق عشوائيا ونسحب منه كرية عشوائيا.

المطلوب : 1/ ما احتمال أن تكون هذه الكرية سوداء ؟

2/ إذا علمنا أن الكرية سوداء فما احتمال أنها سحبت من الصندوق الأول ؟

3/ ماهو إحتمال أن تكون هذه الكرية من الصندوق الثاني مع العلم أنها بيضاء ؟

الحل:

نسمي الصناديق الثلاثة بـ A_1 ; A_2 ; A_3 ، ونرمز لسحب الكرة البيضاء بـ (B) ولسحب الكرة السوداء بـ (N)، وعليه فإن: $P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=1/3$

1/ احتمال أن تكون هذه الكرية سوداء:

هنا نقوم بتطبيق قاعدة الاحتمال الكلي: $P(N)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)\times P(N/A_i)$

$$P(N)=P(A_1)\times P(N/A_1)+P(A_2)\times P(N/A_2)+P(A_3)\times P(N/A_3)$$
$$=\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{8}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{8}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right)=\frac{67}{120}$$

2/ احتمال أن تكون الكرية سحب من الصندوق الأول إذا علمنا أنها سوداء:

هنا نقوم بتطبيق قاعدة بايز:
$$P(A_1/N)=\frac{P(A_1)\times P(N/A_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(A_i)\times P(N/A_i)}$$

$$P(A_1/N)=\frac{P(A_1)\times P(N/A_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(A_i)\times P(N/A_i)}=\frac{(1/3)\times(3/8)}{\frac{67}{120}}=\frac{1}{8}\times\frac{120}{67}=\frac{120}{536}=0.22$$

3/ احتمال أن تكون هذه الكرية من الصندوق الثاني مع العلم أنها بيضاء:

$$P(A_2/B)=\frac{P(A_2)\times P(B/A_2)}{P(A_1)P(B/A_1)+P(A_2)P(B/A_2)+P(A_3)P(B/A_3)}$$

$$P(A_2/B)=\frac{\left(\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{4}{8}\right)}{\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{5}{8}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{8}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{8}\right)}=\frac{5}{12}$$

التمرين الثاني عشر:

وظفت أمينة مكتب (A_1) بمكتب للمحاسبة حيث تولت طبع 20 % من الفواتير. يشغل المكتب عاملتين أخريين إحداهما (A_2) تطبع 30% من الفواتير والأخرى (A_3) تقوم بطبع 50% من الفواتير. ترتكب الموظفة الجديدة أخطاء في 5% من الفواتير، بينما نسبة الخطأ لدى الثانية (A_2) 2% ولدى الثالثة (A_3) 1%.

أخذت فاتورة بشكل عشوائي فتبين أن بها أخطاء. استبعدت الأولى أن تكون هي من أنجزت الفاتورة بحجة أنها لا تنجز إلا 20% من الفواتير، وردت عليها العاملات الأخريات بأن نسبة الأخطاء لديها هي الأكبر(5%).

1/ أحسب احتمال أن تكون الموظفة الجديدة (A_1) هي التي حررت الفاتورة وقارن مع احتمال أن يكون مصدر الخطأ هو الموظفتين A_2 أو A_3.

2/ أحسب مجموع الاحتمالات الثلاث.

3/ أحسب احتمال أن تكون فاتورة مختارة عشوائيا من مجموع المراسلات، أن تكون بها أخطاء.

الحل:

من المعطيات لدينا: $P(A_1)=0.2$ ، $P(A_2)=0.3$ ، $P(A_3)=0.5$

$P(B/A_1)=0.05$ ، $P(B/A_2)=0.02$ ، $P(B/A_3)=0.01$

نفرض أن الحادث B هو حادث تحرير فاتورة بها أخطاء.

1/ حساب احتمال أن تكون:

- الموظفة الجديدة (A_1) هي التي حررت الفاتورة:

$$P(A_1/B)=\frac{P(A_1)\times P(B/A_1)}{P(B)}=\frac{0.2\times 0.05}{(0.2\times 0.05)+(0.3\times 0.02)+(0.5\times 0.01)}=\frac{0.01}{0.021}=0.476$$

- الموظفة (A_2) هي التي حررت الفاتورة:

$$P(A_2/B)=\frac{P(A_2)\times P(B/A_2)}{P(B)}=\frac{0.3\times 0.02}{(0.2\times 0.05)+(0.3\times 0.02)+(0.5\times 0.01)}=\frac{0.006}{0.021}=0.286$$

- الموظفة (A_3) هي التي حررت الفاتورة:

$$P(A_3/B)=\frac{P(A_3)\times P(B/A_3)}{P(B)}=\frac{0.5\times 0.01}{(0.2\times 0.05)+(0.3\times 0.02)+(0.5\times 0.01)}=\frac{0.005}{0.021}=0.238$$

يتبين من الحساب أن الاحتمال الأكبر هو 0.476 وعليه فإننا نرجح أن تكون الموظفة الجديدة (A_1) هي التي حررت الفاتورة.

2/ حساب مجموع الاحتمالات الثلاث:

$$P(A_1/B)+P(A_2/B)+P(A_3/B)=1$$

لأنها تمثل احتمالات الأحداث المتنافية الثلاث.

3/ احتمال وجود خطأ في مراسلة ما:

يتعلق الأمر هنا بالاحتمال الكلي: $P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i) \times P(B / A_i)$

$$P(B) = P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + P(A_3)P(B/A_3)$$
$$P(B) = (0.2 \times 0.05) + (0.3 \times 0.02) + (0.5 \times 0.01) = 0.021$$

التمرين الثالث عشر:

يقوم عامل تقني بمراقبة آلتين بمصنع وهذا لاصلاح أي منهما في حالة أي عطب أو خلل ، فإذا علمت أن إحتمال وقوع خلل في الآلة الأولى هو (1/8) و الآلة الثانية هو (1/10).

المطلوب : ما إحتمال أن يتدخل العامل لإصلاح الآلة الثانية علما أنه لم يتدخل لإصلاح الأولى؟

الحل:

- نسمي وقوع التدخل لإصلاح الآلة الأولى بـــ A.
- نسمي وقوع التدخل لإصلاح الآلة الأولى بـــ B.

من المعطيات يظهر أن الآلتين مستقلتين عن بعضهما البعض (إذا كان A و B مستقلان فإن A و $\overline{B}$ مستقلان،كما أن B و $\overline{A}$ مستقلان) ومنه إذا كان الحادث A هو إصلاح الآلة الأولى فإن عدم التدخل لإصلاح هذه الآلة هو $\overline{A}$ وحادث عدم التدخل لإصلاح الآلة الثانية هو $\overline{B}$ وبالتالي إحتمال أن يتدخل العامل لإصلاح الآلة الثانية مع العلم أنه لم يتدخل لإصلاح الآلة الأولى هو :

$$P(B/\overline{A}) = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{P(B) \times P(\overline{A})}{P(\overline{A})} = P(B) = \frac{1}{10}$$

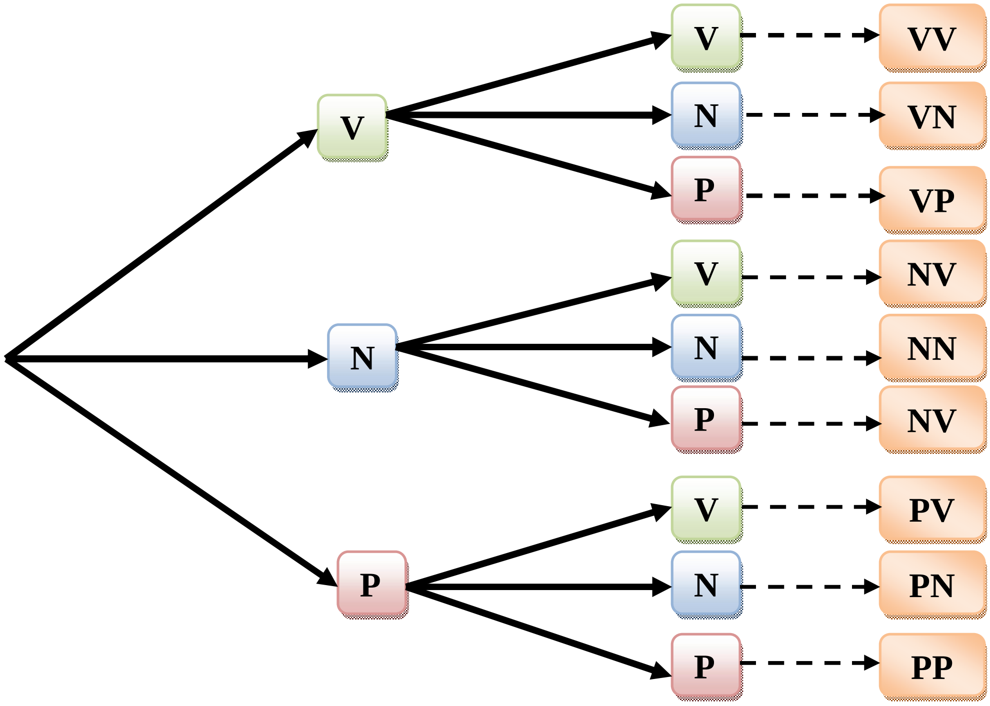
التمرين الرابع عشر:

فريق في كرة القدم يكون رابحاً V باحتمال قدره 1/2 ومتعادل N باحتمال قدره 1/5، أما احتمال الخسارة P فهو 3/10، إذا لعب هذا الفريق مباراتين: **1-** حدد مجموعة إمكانات التجربة Ω؟

2- ما احتمال حدوث خسارة واحدة على الأكثر؟ **3-** ما احتمال حدوث فوز على الأقل ؟

الحل:

1/ تحديد مجموعة إمكانات التجربة:



عدد عناصر فراغ العينة هو: $n(\Omega)=3^2=9$ $\qquad \Omega=\{VV,VN,VP,NV,NN,NP,PV,PN,PP\}$

2/ حساب احتمال حدوث خسارة واحدة على الأكثر:

ليكن A حادث حصول خسارة واحدة على الأكثر، والحادث المعاكس $\overline{A}$ هو حادث الحصول على خسارتين

$$A=\{VV,VN,VP,NV,NN,NP,PV,PN\}$$

$$\overline{A}=\{PP\}\Rightarrow P(\overline{A})=\frac{3}{10}\times\frac{3}{10}=\frac{9}{100}=0.09\Rightarrow P(A)=1-P(\overline{A})=0.91$$

3/ حساب احتمال حدوث فوز على الأقل: ليكن B حادث حصول فوز على الأقل.

$$B=\{VV,VN,VP,NV,PV\}\Rightarrow P(B)=\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{10}\right)+\left(\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{10}\times\frac{1}{2}\right)$$

$$P(B)=\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{10}\right)+\left(\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{3}{10}\times\frac{1}{2}\right)=0.25+0.1+0.15+0.1+0.15=0.75$$

الفصل الثاني:

المتغيرات العشوائية

تمهيد:

كثيرا ما تكون نتائج تجربة ما ، أي نقاط فراغ العينة قياسات وصفية أو نوعية مثل تجربة إلقاء قطعة نقدية معدنية فإن النتيجة إما تكون صورة F أو كتابة P ، وهناك تجارب كثيرة تكون نقاط فراغ العينة فيها قياسات كمية أي قيما عددية مثل رمي حجر نرد مرة واحدة مع تسجيل الرقم الذي يظهر على الوجه العلوي، وتعتبر نتائج جميع التجارب العشوائية غير معروفة بصورة مسبقة، غير أنها لا تخرج عن مجال معيّن من القيم، إذ تختلف هذه النتائج باختلاف التجربة، ويتضح أن فراغ العينة Ω الذي يتضمن جميع النتائج الممكنة للتجربة العشوائية قد يكون من الصعب كتابة عناصره، لأن هذا الفراغ قد يكون محدود أو غير محدود، منفصل أو متصل، وقد يكون أعداد (إلقاء حجر نرد $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$) أو خلاف ذلك (إلقاء قطعة نقود معدنية $\Omega = \{F, P\}$) لهذا سنهتدي إلى طريقة يمكن بها صياغة قاعدة تمكننا من تمثيل عناصر فراغ العينة Ω بأعداد ولتكن X وعلى دوال في تلك العناصر، هذه الدوال نطلق عليها تسمية متغير عشوائي.

إن الصفة التي تتغير من حالة لأخرى أو من مفردة لأخرى توصف كما كان يطلق عليها سابقا اسم البيانات والذي سيوصف ما يطلق عليه هنا اسم المتغير العشوائي، إذ أن القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X تسمى فضاء X، و المجموعات الجزئية لهذا الفضاء تسمى حوادث ولكن معبر عنها بدلالة X.

نسعى خلال هذا الفصل لتحديد مفهوم شامل للمتغير العشوائي وأنواعه مع دراسة دالة كتلة الاحتمال الخاصة بالمتغير العشوائي المنفصل ودالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي المتصل وكذا دالة التوزيع التراكمي أو ما يسميها البعض بدالة تابع الاحتمال مع تحديد كيفيات حساب التوقع الرياضي وتباين المتغير العشوائي.

أولا-تعريف المتغير العشوائي:

هناك عدّة تعاريف للمتغيرات العشوائية نحاول إيجازها من خلال التعاريف التالية:

- المتغير العشوائي هو دالة Function تمثل العلاقة بين فضاء العينة **Ω** و مجموعة الأعداد الحقيقية **R** ولها صفات وخصائص معينة محدودة ولذلك يمكن القول بأن للمتغير العشوائي والذي يرمز له بالرمز **X** قيمة عددية لكل نتيجة من نتائج التجربة العشوائية[1].
- المتغير العشوائي X هو مجموعة مقادير أو قيم لنتائج تجربة عشوائية، يكون تحققها مقترن باحتمالات معينة.
- المتغير العشوائي X هو اقتران مجال تعريفه فضاء العينة Ω ومداه مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.
- المتغير العشوائي X هو دالة حقيقية معرفة على فراغ العينة Ω في تجربة عشوائية، إذ تنقل النتائج الأصلية $(w \in \Omega)$ إلى أعداد حقيقية.

وعادة ما يرمز للمتغير العشوائي بأحد الحروف: X ، Y ، Z ، ... ولقيم ذلك المتغير العشوائي بأحد الحروف: x ، y ، z ،...

المثال رقم 1:

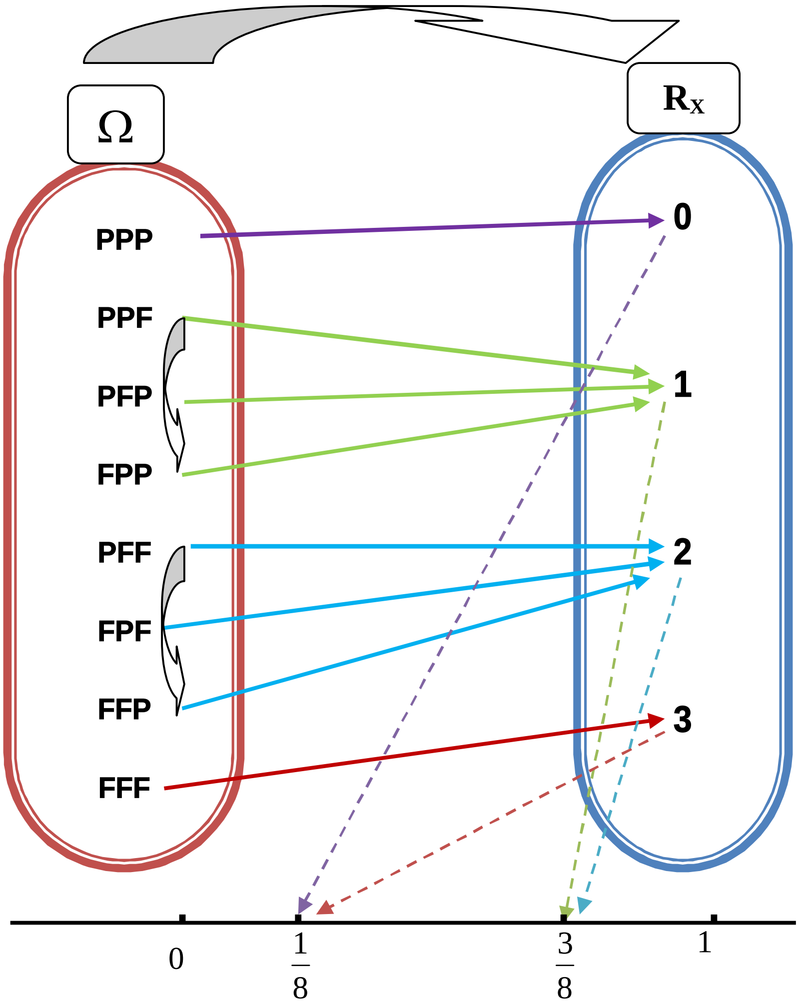
عند إلقاء قطعة نقدية معدنية متزنة ثلاث مرات فإن فراغ العينة هو:

$$\Omega = \{FFF, FFP, FPF, FPP, PFF, PFP, PPF, PPP\}$$

(هنا قد يهمنا معرفة عدد الصور F أو عدد الكتاباتP التي ستظهر عند رمي هذه القطعة، وليس معرفة النتائج المؤلفة من متوالية من الصور والكتابات)، فإذا فرضنا أن X متغير عشوائي يمثل عدد الصور (عدد F) التي ستظهر في الرميات الثلاث، فإن X يأخذ القيم: $X = 0,1,2,3$ وسيكون اهتمامنا بالأحداث المصاحبة للفضاء:

$$R_X = \{X / X = 0,1,2,3\}$$

[1] - دلال القاضي، سهيلة عبدالله، محمود البياتي: " الاحصاء للإداريين والاقتصاديين"، دار الحامد للنشر والتوزيع، الأردن، 2003، ص 168.



المتغير العشوائي X سوف يحدث احتمالات على هذه الأحداث، وفي هذا المثال لكل عنصر من عناصر فضاء العينة **Ω** نفس الفرصة في الحدوث أي أن احتمال حدوث أي منها يساوي $P(w_i)=\frac{1}{8};........i=1,....,8$ ، وعليه تكون الاحتمالات المقابلة لقيم هذا المتغير العشوائي كما يلي:

الاحتمالات المناظرة (المقابلة) لقيم المتغير X:

- $(X=0)$ فهذا يعني الحادث A: حادث الحصول على ولا صورة.

$$A=\{PPP\}\Rightarrow P(A)=\frac{1}{8}=P(X=0)$$

- $(X=1)$ أي الحادث B: حادث الحصول على صورة واحدة.

$$B=\{FPP,PFP,PPF\}\Rightarrow P(B)=\frac{3}{8}=P(X=1)$$

- $(X = 2)$ فهذا يعني الحادث C: حادث الحصول على صورتين.

$$C = \{FFP , FPF , PFF\} \Rightarrow P(C) = \frac{3}{8} = P(X = 2)$$

- $(X = 3)$ فهذا يعني الحادث D: حادث الحصول على ثلاث صور، أي:

$$D = \{FFF\} \Rightarrow P(D) = \frac{1}{8} = P(X = 3)$$

حيث أن الأحداث A ، B ، C و D مرتبطة بفضاء العينة Ω بينما الأحداث: $(X = 0)$ ، $(X = 1)$، $(X = 2)$ و $(X = 3)$ مرتبطة بالفضاء R_X، حيث أن الفراغ الجديد في هذا المثال هو $R_X \subset R$ وإن جميع الفئات الجزئية تمثل أحداث يمكن حساب احتمالاتها، وبصفة عامة يمكن استخدام الرمز $P(X = x)$ أو $P_X(x)$ عند حساب احتمال حدوث حادث في مدى المتغير العشوائي X.

ويمكن تلخيص النتائج السابقة في الجدول التالي: والذي يطلق عليه تسمية جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X:

X	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8

ثانيا- أنواع المتغيرات العشوائية:

كثيرا ما تكون نتائج تجربة ما، أي نقاط فضاء العينة قياسات وصفية أو نوعية، مثل الفضاء العيني لتجربة رمي قطعة نقود مرة واحدة فإن النتيجة إما أن تكون صورة F أو كتابة P وهي قياسات نوعية ومثل ذلك رمي قطعة النقود مرتين، وهناك تجارب كثيرة تكون نقاط فضاء العينة فيها قياسات كمية أي قيم عددية مثل رمي زهرة النرد مرة واحدة وتسجيل العدد الظاهر على الوجه العلوي، في كل جميع هذه الأنواع من التجارب نقرن قيما عددية لتلك النقاط، وعليه يمكننا أن نميز بين نوعان من المتغيرات العشوائية:

1- المتغير العشوائي المنفصل (المتقطع) Discrete Random Variable:

نقول عن متغير عشوائي X أنه من النوع المنفصل إذا احتوى فراغ إمكانات التجربة على عدد منته أو غير منته ولكنه معدود (قابل للعد) من قيم الفراغ.

1-1- قانون التوزيع الاحتمالي:

كل جدول أو معادلة يعطي جميع القيم التي يمكن أن يأخذها متغير عشوائي منفصل مع احتمال كل قيمة منها يسمى توزيعا احتماليا منفصلا، وأي معادلة تحدد احتمال كل قيمة يأخذها المتغير العشوائي تسمى توزيعا احتماليا منفصلا.

إن المتغير العشوائي المنفصل يأخذ قيما قابلة للعد، فإذا كان فراغ العينة للمتغير العشوائي المنفصل X هو $\Omega = \{w_1, w_2, \dots\dots\dots w_n\}$ وكانت قيم هذا المتغير هي: $x_1, x_2, \dots\dots\dots, x_n$ والاحتمالات المقابلة لهذه القيم هي على الترتيب: $P(X = x_1), P(X = x_2), \dots\dots\dots, P(X = x_n)$ ، فإن قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير X يمكن عرضه في الجدول التالي:

جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائيX :

X	x_1	x_2	. . . .	x_n	$\sum$
$P(X = x_i)$	$P(X = x_1)$	$P(X = x_2)$	. . . .	$P(X = x_n)$	1

كما يطلق على الدالة $P(X = x_i)$ حيث $i = 1,2,\dots\dots, n$ و المعرفة بالصيغة التالية:

$$P(X = x_i) = \begin{cases} P(X = x_i)\dots\dots\ si..i = 1,2,\dots\dots, n \\ 0\dots\dots\dots\ \dots\dots\dots\ ..Otherwise\ \ (o/w) \end{cases}$$

تسمية دالة كتلة الاحتمال للمتغير العشوائي X إذا وفقط إذا تحقق الشرطان التاليان:

$$\begin{cases} 1 / \ \forall\ i..\ 0 \leq P(X = x_i) \leq 1 \\ 2 / \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1 \end{cases}$$

- احتمال كل قيمة من قيم X غير سالب.
- مجموع الاحتمالات للقيم التي يأخذها X تساوي الواحد الصحيح.

المثال رقم 2:

لنأخذ معطيات المثال السابق (**المثال رقم1**)، حيث توصلنا من خلال هذا المثال إلى جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما في الجدول التالي:

X	0	1	2	3	$\sum$
$P(X=x_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8	1

من خلال الجدول نلاحظ أن: $0 \le P(X=x_i) \le 1$ و $\sum P(X=x_i)=1$.

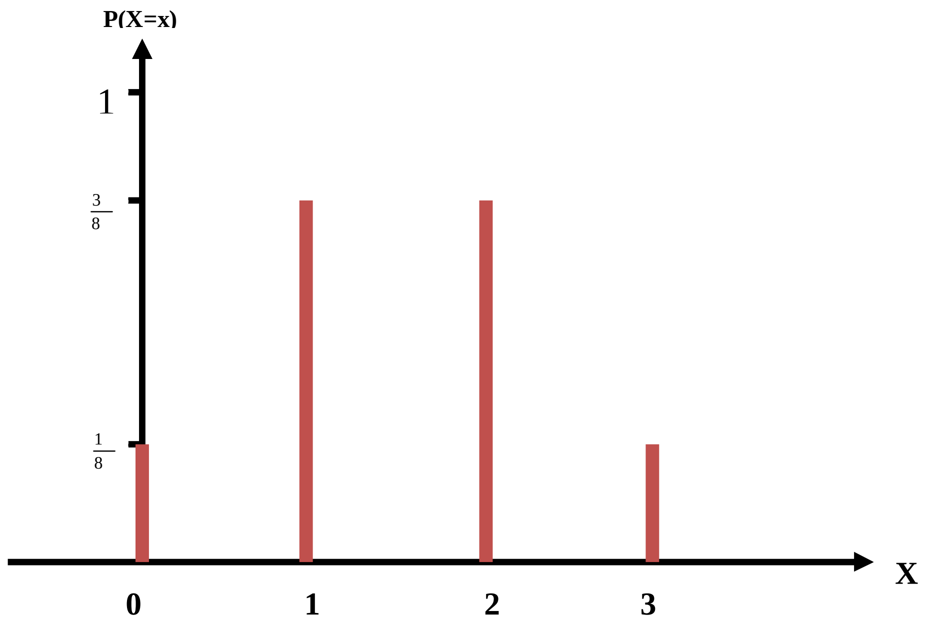
كما يمكن كتابة دالة كتلة الاحتمال للمتغير العشوائي X كما يلي:

$$P(X=x_i)=\begin{cases} 1/8 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots si..X=0 \\ 3/8 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots si..X=1 \\ 3/8 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots si..X=2 \\ 1/8 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots si..X=3 \\ \\ 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (o/w) \end{cases}$$

بما أن الشرطان متحققان، نقول أن الدالة $P(X=x_i)$ هي دالة كتلة احتمال للمتغير العشوائي X أي أنّ: X هو قانون توزيع احتمالي.

التمثيل البياني لدالة كتلة الاحتمال للمتغير العشوائي X:

لنأخذ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X **للمثال رقم 2** ونقوم بالتمثيل البياني لدالة كتلة الاحتمال التي ستكون على الشكل التالي:



يسمى الشكل البياني أعلاه بالتمثيل البياني لدالة كتلة الاحتمال للمتغير العشوائي X والذي هو عبارة عن قطع مستقيمة عمودية على المحور الأفقي ومنفصلة عن بعضها البعض لأن المتغير عشوائي منفصل، بينما يتناسب ارتفاعها مع الاحتمال المقابل لكل قيمة من قيم المتغير العشوائي.

2-1- دالة التوزيع التراكمي (دالة تابع الاحتمال) The Cumulative Distribution :

دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي X هي دالة حقيقية نطاقها الخط الحقيقي R_X ومداها المجال $[0,1]$ ويرمز لها بالرمز $F_X(x)$ وهي معرفة كما يلي[1]:

$$F_X(x_i) = P(X \le x_i) = \sum_{X \le x_i} P(X = x_i)$$

تكمن أهمية دالة التوزيع التراكمي في أنها محددة بالكامل بتوزيع X ، كما أنه يمكن استخدامها لإيجاد احتمالات الأحداث المعرفة بدلالة المتغير العشوائي ولها الخواص التالية:

- $0 \le F_X(x) \le 1$ و $-\infty \langle X \langle +\infty$
- $F_X(-\infty) = \lim_{X \to -\infty} F_X(x) = 0$

دالة التوزيع التراكمي للقيم الصغيرة جدا تساوي صفر والمقصود بالقيم الصغيرة تلك القيم التي تكون أصغر من أصغر قيمة معطاة، كما أن دالة التوزيع التراكمي للقيم الكبيرة جدا تساوي الواحد والمقصود بالقيم الكبيرة جدا تلك القيم التي تكون أكبر من أكبر قيمة معطاة.

- دالة التوزيع التراكمي دالة غير متناقصة، أي أنه إذاكان $X_1 \langle X_2$ فإن: $F_X(x_1) \le F_X(x_2)$
- دالة التوزيع التراكمي متصلة من اليمين أي أنه لجميع قيم X و $h \rangle 0$ يكون:

$$\lim_{h \to 0}\left[F_X(x+h) - F_X(x)\right] = 0$$

[1] - موراي شبيجل، جو شيلر و ألو سريبقاسان: " سلسلة شوم الاحتمالات والاحصاء" ترجمة محمود علي أبو النصر و مصطفى جلال مصطفى، مرجع سابق، ص 34.

بصورة عامة فإن دالة تابع الاحتمال لقانون التوزيع الاحتمالي تعرف كما يلي:

$$F_X(x_i) = P(X \leq x_i) = \begin{cases} 0 \ldots\ldots\ldots \ldots\ldots\ldots \ldots\ldots\ldots ..si..X \langle x_1 \\ P_1 \ldots\ldots\ldots \ldots\ldots\ldots \ldots\ldots\ldots si..x_1 \leq X \langle x_2 \\ \\ P_1 + P_2 + \ldots.. + P_k \ldots\ldots. si..x_k \leq X \langle x_{k+1} \\ \\ P_1 + P_2 + \ldots.. + P_n = 1 \ldots. si..X \geq x_n \end{cases}$$

المثال رقم 3:

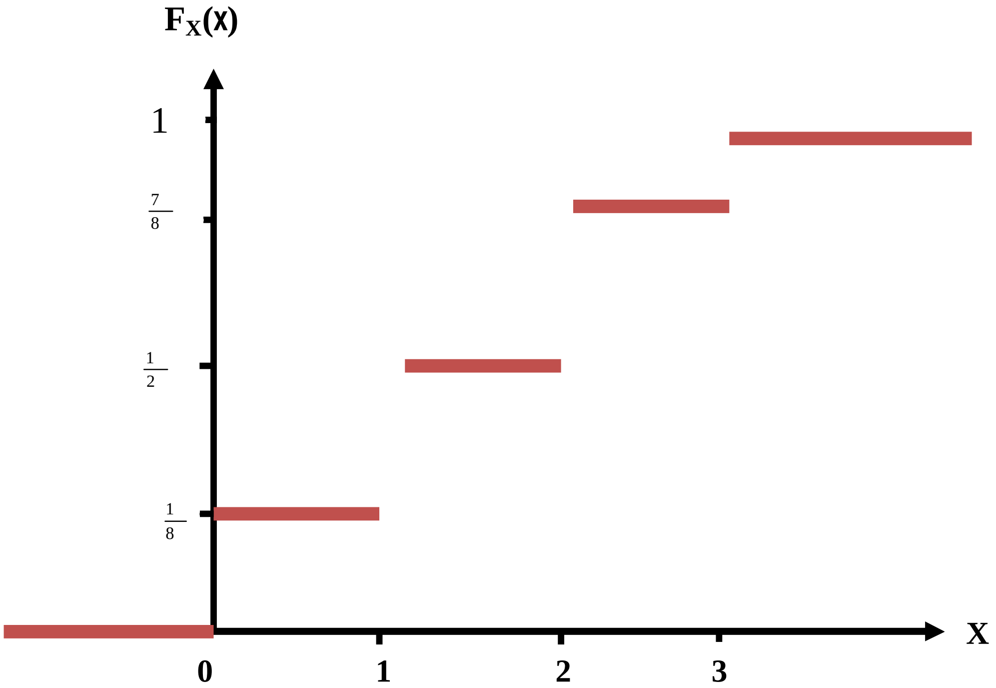
نأخذ معطيات **المثال رقم 1**، ثم نقوم بإيجاد دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي X .

من دالة كتلة احتمال المتغير العشوائي X، يمكن إيجاد دالة التوزيع التراكمي $F_X(x)$ كما يلي:

$$F_X(x_i) = P(X \leq x_i) = \begin{cases} 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ..si..X \langle 0 \\ 1/8 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots si..0 \leq X \langle 1 \\ 4/8 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots si..1 \leq X \langle 2 \\ 7/8 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots si..2 \leq X \langle 3 \\ 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ..si..X \geq 3 \end{cases}$$

التمثيل البياني لدالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي X:

التمثيل البياني لدالة التوزيع التراكمي $F_X(x)$ للمتغير العشوائي X هي عبارة عن قطع مستقيمة منفصلة موازية للمحور الأفقي (محور السينات) ومتصاعدة بتصاعد الاحتمالات (خاصية تراكم الاحتمالات)، والشكل التالي يوضح ذلك:



1-3- التوقع الرياضي، التباين والعزوم:

التوقع الرياضي (الأمل الرياضي) Mathematical Expectation:

التوقع الرياضي (القيمة المتوقعة Expected Value) للمتغير العشوائي X هو عبارة عن الوسط الحسابي مثقل بالقيم الاحتمالية المتعلقة بقيم هذا المتغير العشوائي ويرمز له بالرمز $E(X)$ وهو معطى بالعلاقة التالية:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$$

خواص التوقع الرياضي:

1- ليكن C مقدار ثابت فإن التوقع الرياضي للمقدار الثابت C هو: $E(C) = C$

$$E(C) = \sum_{i=1}^{n} C \times P(X = x_i) = C \times \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = C \times 1 = C$$

2- إذا كان X متغير عشوائي و كان a و b عددان حقيقيان فإن: $E(ax+b) = aE(x) + b$

$$E(ax+b)=\sum_{i=1}^{n}(ax+b)\times P(X=x_i)=\sum_{i=1}^{n}\left[ax\times P(X=x_i)+b\times P(X=x_i)\right]$$
$$=\sum_{i=1}^{n}ax\times P(X=x_i)+\sum_{i=1}^{n}b\times P(X=x_i)=a\sum_{i=1}^{n}x\times P(X=x_i)+b\sum_{i=1}^{n}P(X=x_i)$$
$$=a\sum_{i=1}^{n}xP(X=x_i)+b=aE(X)+b$$

3- التوقع الرياضي لمجموع (فرق) متغيرين عشوائيين يساوي مجموع (فرق) توقعهما الرياضي:

$$E(X\pm Y)=\sum_{i}\sum_{j}(x_i\pm y_j)P(X=x_i)\bullet P(Y=y_j)=\sum_{i}x_iP(X=x_i)\pm\sum_{j}y_jP(Y=y_j)$$
$$=E(X)\pm E(Y)$$

التباين Variance:

يدعى التوقع الرياضي لمربع انحراف المتغير العشوائي X عن توقعه الرياضي بتباين X ويرمز له بالرمز $V(X)$، والتباين هو مقياس لدرجة تشتت التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X ، فإذا كانت قيمة التباين صغيرة فهي مؤشر على أن التوزيع الاحتمالي متمركز حول القيمة المتوقعة $\mu=E(X)$ ، أما إذا كانت قيمته كبيرة فإن التوزيع الاحتمالي مشتت حول μ، ويعطى التباين بالعلاقة التالية:

$$V(X)=E\left[(X-E(X))^2\right]=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-E(X)\right)^2P(X=x_i)\quad \text{أو} \quad V(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2$$

حيث $E(X^2)=\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}P(X=x_i)$

خواص التباين:

1- تباين العدد الثابت غير العشوائي C يساوي صفر: $V(C)=0$

$$V(C)=E\left[\left(C-E(C)^2\right)\right]=E\left[(C-C)^2\right]=E[0]=0$$

2- إذا كان X متغير عشوائي وكان a و b عددان حقيقيان فإن: $V(aX+b)=a^2\times V(X)$

$$V(aX+b)=E\left[((aX+b)-E(aX+b))^2\right]=E\left[(aX+b-aE(X)-b)^2\right]=E\left[(aX-aE(X))^2\right]$$
$$=E\left[a^2(X-E(X))^2\right]=a^2E\left[(X-E(X))^2\right]=a^2\times V(X)$$

3- لأي متغير عشوائي X يكون: $V(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2$

$$V(X)=E\left[(X-E(X))^2\right]=E\left[(X-\mu)^2\right]=E\left[(X^2-2\mu X+\mu^2)\right]=E(X^2)-2\mu E(X)+\mu^2$$
$$=E(X^2)-2\mu^2+\mu^2=E(X^2)-\mu^2=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2$$

4- تباين مجموع متغيرين عشوائيين يساوي إلى مجموع تباينهما أي: $V(X \pm Y) = V(X) + V(Y)$

$$V(X \pm Y) = E[(X \pm Y) - E(X \pm Y)]^2 \quad \text{أو} \quad V(X \pm Y) = E[(X - E(X)) \pm (Y - E(Y))]^2$$

$$V(X \pm Y) = E[(X - E(X)) \pm (Y - E(Y))]^2$$
$$= E[X - E(X)]^2 \pm 2E[X - E(X)][Y - E(Y)] + E[Y - E(Y)]^2$$
$$= E[X - E(X)]^2 + E[Y - E(Y)]^2 = V(X) + V(Y)$$

المثال رقم 4:

أحسب التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري لمعطيات **المثال رقم 1.**

- **التوقع الرياضي (القيمة المتوقعة):**

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2) + 3 \times P(X = 3)$$
$$= 0 \times \left(\frac{1}{8}\right) + 1 \times \left(\frac{3}{8}\right) + 2 \times \left(\frac{3}{8}\right) + 3 \times \left(\frac{1}{8}\right) = \frac{3}{2}$$

$$E(X) = \mu = \frac{3}{2}$$

- **التباين:** $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ حيث: $E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 P(X = x_i)$

لدينا: $E(X) = \mu = \frac{3}{2}$

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 P(X = x_i) = 0^2 \times P(X = 0) + 1^2 \times P(X = 1) + 2^2 \times P(X = 2) + 3^2 \times P(X = 3)$$
$$= 0 \times \left(\frac{1}{8}\right) + 1 \times \left(\frac{3}{8}\right) + 4 \times \left(\frac{3}{8}\right) + 9 \times \left(\frac{1}{8}\right) = 3$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 3 - \frac{9}{4} = \frac{12 - 9}{4} = \frac{3}{4}$$

الانحراف المعياري Standard Deviation:

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.75} \approx 0,87$$

العزوم:

إن عزوم المتغير العشوائي X هي القيم المتوقعة لدوال معينة بدلالة المتغير العشوائي X الذي له دالة كتلة احتمال $P(X=x_i)$ أو دالة كثافة احتمال $f_X(x)$ ، وتنقسم العزوم إلى عزوم لا مركزية وعزوم مركزية:

❖ العزوم اللامركزية:

إذا كان X متغير عشوائي منفصل فإن العزم اللامركزي من الدرجة r للمتغير العشوائي X هو التوقع الرياضي للمتغير X^r ويعطى بالعلاقة التالية:

$$m_r = E(X^r) = \sum_{i=1}^{n} x_i^r P(X = x_i)$$

من تعريف العزوم اللامركزية نستنتج خاصيتين مرتبطتين بها:

$$r=0 \Rightarrow m_0 = E(X^0) = E(1) = 1$$

$$r=1 \Rightarrow m_1 = E(X^1) = E(X) = \mu$$

$$r = 2 \Rightarrow m_2 = E(X^2)$$

وعليه فإن:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = m_2 - m_1^2$$

❖ العزوم المركزية:

يدعى التوقع الرياضي لـ $(X-E(X))^k$ إن وجد بالعزم المركزي من الرتبة r للمتغير العشوائي X و يعطى بالعلاقة التالية:

$$M_r = E[X - E(X)]^r = \sum_{i=1}^{n} (X - E(X))^r P(X = x_i)$$

من تعريف العزوم المركزية هناك ثلاثة خواص مرتبطة بها:

$$r = 0 \Rightarrow M_0 = E[X - E(X)]^0 = 1$$

$$r = 1 \Rightarrow M_1 = E[X - E(X)]^1 = E(X) - E(X) = 0$$

$$r = 2 \Rightarrow M_2 = E[X - E(X)]^2 = E[X^2] - [E(X)]^2 = m_2 - m_1^2 = V(X)$$

كما نستنتج أنّ:

$$M_3 = m_3 - 3m_2 m_1 + 2m_1^3$$

4-1- الدالة المولدة للعزوم والدالة المولدة للاحتمال:

الدالة المولدة للعزوم La fonction génératrice des moments:

إذا كان X متغير عشوائي منفصل بدالة كتلة احتمال $P(X = x)$ فإن الدالة المولدة لعزوم هذا المتغير العشوائي تعرف بأنها الأمل الرياضي للدالة e^{tx} ، $\left(m_X(t) = E(e^{tx})\right)$، وهي معطاة بالصيغة التالية:

$$m_X(t) = E(e^{tx}) = \sum_x e^{tx} P(X = x)$$

إذا وجدت الدالة المولدة للعزوم فإنه يمكن التعرف على عزوم التوزيع الاحتمالي الذي اشتقت منه الدالة $m_X(t)$ وذلك من خلال تفاضلها وتقييم النتيجة عندما t = 0.

الدالة المولدة للاحتمال La fonction génératrice de probabilité:

إذا كان X متغير عشوائي منفصل بقيم صحيحة غير سالبة $(x \geq 0)$ وبدالة كتلة احتمال معروفة $P(X = x)$، فإنه لأي عدد حقيقي $(t \geq 0)$ تعرف الدالة المولدة للاحتمال بالصيغة التالية:

$$\varphi_X(t) = E(t^x) = \sum_{x=0}^{\infty} t^x P(X = x) \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots |t| \leq 1$$

خواص:

الخاصية الأولى: **إن الدالة المولدة لاحتمال المتغير العشوائي X تحدد دالة كتلة احتماله:**

$$\varphi_X(t) = P(X = 0) + \sum_{x=1}^{\infty} t^x P(X = x)$$

وعليه فإن: $\varphi_X(0) = P(X = 0)$

وإنّ: $P(X = k) = P(X = x) = \frac{1}{k!}\varphi_x^k(0) \ldots\ldots k = 1,2,\ldots\ldots\ldots$

حيث: $\varphi_x^k(0) = \frac{d^k \varphi_x(t)}{dt^k}\Big|_{t=0}$

الخاصية الثانية: **إذا كان a و b عددان صحيحان موجبان، وكان y=ax+b فإن:**

$$\varphi_Y(t) = E(t^y) = E(t^{ax+b}) = E(t^{ax} \times t^b) = t^b.E(t^{ax}) = t^b.\varphi_X(t^a)$$

الخاصية الثالثة: **علاقة الدالة المولدة للعزوم بالدالة المولدة للاحتمال هي:**

$$m_X(t) = E(e^{tx}) = E\left[(e^t)^x\right] = \varphi_X(e^t)$$

2- المتغير العشوائي المتصل (المستمر) Continuous Random Variable:

نقول عن متغير عشوائي X أنه من النوع المتصل إذا احتوى فراغ إمكانات التجربة على عدد غير معدود وغير محدود من قيم الفراغ.

2-1- دالة كثافة الاحتمال (Probability Density Function):

المتغير العشوائي المستمر أو المتصل يأخذ مجالا معينا من مجموعة الأعداد الحقيقية، ولذلك فإن توزيعه الاحتمالي سيمثل صيغة أو دالة مستمرة تسمى بدالة كثافة الاحتمال تعطي هيئة التوزيع لذلك المجال المعين بحيث أن من خصائص دالة الكثافة الاحتمالية والتي يرمز لها بالرمز $f_X(x)$ [1]:

$$\begin{cases} \bullet \; f_X(x) \geq 0 \\ \bullet \; \int_R f_X(x)\,dx = 1 \end{cases}$$

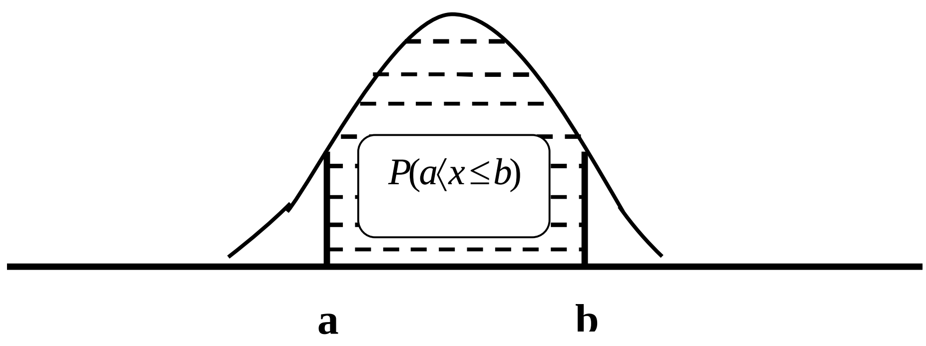
ونعني بذلك أن دالة كثافة الاحتمال تكون دائما موجبة وأن المساحة تحت المنحنى تساوي واحد. أما عن إيجاد الاحتمالات الخاصة بهذا التوزيع فتكون باستخدام الصيغة التالية:

$$P(a \langle x \leq b) = \int_a^b f_X(x)\,dx \;,\ldots\ldots\; a \langle b$$

كما يمكن حساب هذا الاحتمال بدلالة دالة التوزيع التراكمي وذلك على النحو التالي:

$$P(a \langle x \leq b) = \int_{-\infty}^{b} f_X(x)\,dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = F_X(b) - F_X(a)$$

حيث $-\infty \langle a \leq b \langle +\infty$ ويمكن القول بأن هذه من الاحتمالات تمثل مساحات تحت المنحنى من النقطة a إلى النقطة b كما هو موضح في الشكل التالي:



[1]- دلال القاضي وآخرون، مرجع سابق، ص 173.

يقال أن للمتغير العشوائي X توزيع متصل (مستمر) إذا وجدت دالة غير سالبة $f_X(x)$ معرفة على الخط الحقيقي Rx، حيث أنه لأي فترة $A \subseteq R_X$ يكون:

$$P(X \in A) = \int_A f_X(x).dx$$

إذا كان X متغير عشوائي متصل فإنه يمكن حساب قيمة الاحتمال لأي مجال جزئي $[x_1, x_2]$ ضمن المدى العام لتغير المتغير العشوائي X ضمن $[a,b]$:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x).dx$$

ولا بد لكل دالة كثافة احتمال أن تفي بالشرطين التاليين:

$$\begin{cases} 1 - f_X(x) \geq 0 ,....... \quad \forall X \in R_X \\ 2 - \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1 \end{cases}$$

ملاحظة:

عند حساب الاحتمالات $P(x_1 \leq X \leq x_2)$ فإن الرمزين ($\rangle$ و $\leq$) أو ($\langle$ و $\geq$) يمكن استبدال أحدهما بالآخر لأن ذلك لا يغير القيمة العددية للاحتمال.

المثال رقم 5:

لتكن الدالة $f_X(x)$ المعرفة كما يلي:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} .... si ... 0 \leq x \leq 2 \\ 0 ....(o/w) \end{cases}$$

المطلوب:

أثبت أنّ الدالة $f_X(x)$ هي دالة كثافة احتمال ومثلها بيانيا، ثم أحسب $P(1/2 \leq X \leq 3/2)$ و $P(X \langle 1/3)$

الحل:

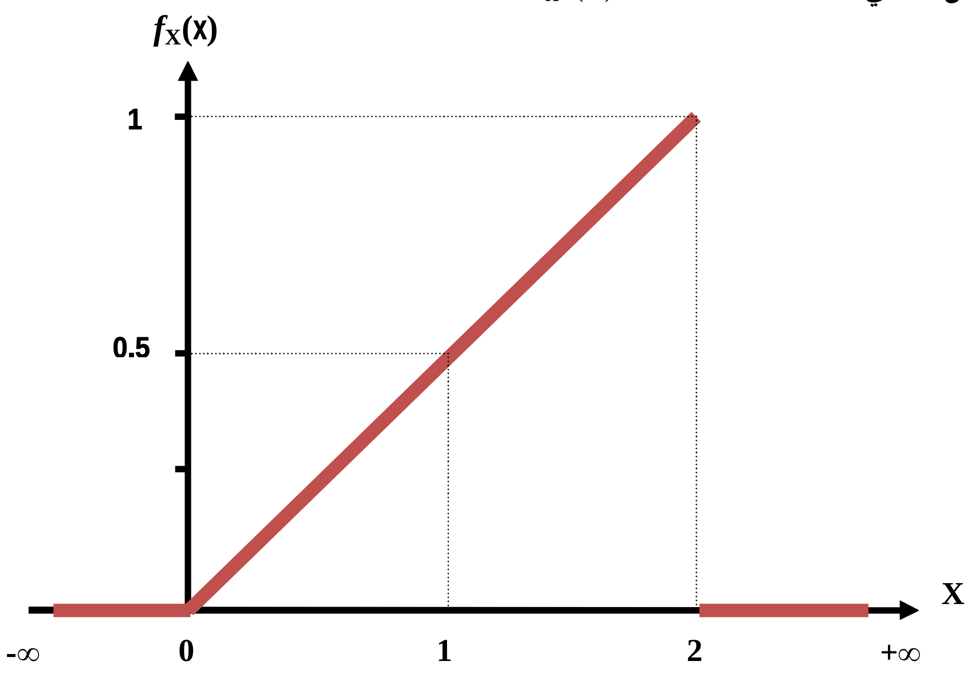
1- لجميع قيم X الدالة $f_X(x)$ هي دالة موجبة **(** $\forall X \in R_{X,\dots}\ f_X(x) \geq 0$ **).**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{2}\left(\frac{x}{2}\right)dx + \int_{2}^{+\infty} 0\,dx = \left|\frac{x^2}{4}\right|_0^2$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = \left|\frac{x^2}{4}\right|_0^2 = \left(\frac{2^2}{4} - 0\right) = \left(\frac{4}{4} - 0\right) = 1$$

بما أن الشرطان (1) و (2) محققان فإن الدالة $f_X(x)$ هي دالة كثافة احتمال.

- **التمثيل البياني لدالة كثافة الاحتمال $f_X(x)$:**



حساب الاحتمال:

$$P(1/2 \leq X \leq 3/2) = \int_{1/2}^{3/2} f_X(x)\,dx = \int_{1/2}^{2}\left(\frac{X}{2}\right)dx + \int_{2}^{3/2} 0\,dx = \left|\frac{X^2}{4}\right|_{1/2}^{2}$$

$$= \left(\frac{2^2}{4} - \frac{(1/2)^2}{4}\right) = 1 - \left(\frac{1/4}{4}\right) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} \approx 0{,}94$$

$$P(X \langle 1/3) = \int_{-\infty}^{1/3} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{1/3}\left(\frac{x}{2}\right)dx = \left|\frac{x^2}{4}\right|_0^{1/3}$$

$$= \left(\frac{(1/3)^2}{4} - 0\right) = \frac{1/9}{4} = \frac{1}{36} = \approx 0{,}028$$

2-2- دالة التوزيع التراكمي The Cumulative Distribution :

إذا كان X متغير عشوائي متصل ومحدد بقانون التوزيع الاحتمالي $f_X(x)$ فإن دالة توزيعه التراكمي معرفة كما يلي:

$$F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

وهذا يعني احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي X قيمة أصغر أو يساوي x .

إن دالة التوزيع التراكمي $F_X(x)$ هي دالة مستمرة على الخط الحقيقي R_X وتأخذ قيمها في المجال [0,1]، وهي دالة متزايدة، حيث إذا كان a و b عددان حقيقيان (مع a < b) فإن:

$$P(a \le X \le b) = F_X(b) - F_X(a)$$

المثال رقم 6:

لنأخذ معطيات المثال 5 **والمطلوب**: إيجاد دالة التوزيع التراكمي ومثلها بيانيا، ثم أحسب $P(1/2 \le X \le 3/2)$

الحل:

- **دالة التوزيع التراكمي $F_X(x)$:**

$$F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

$$si..x\langle 0 \Rightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$$

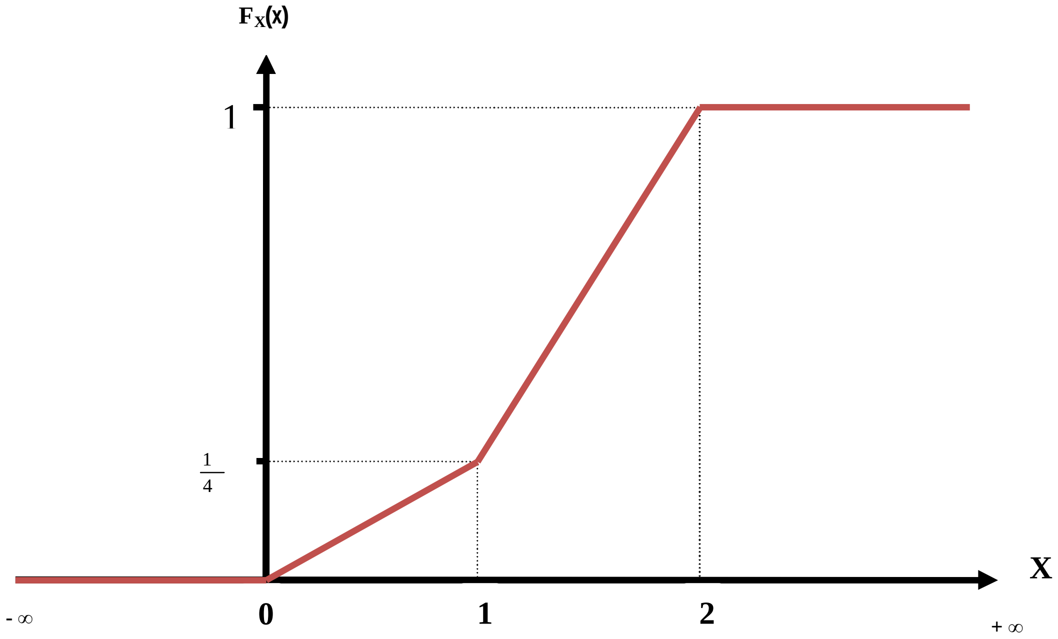
$$si..0 \le x \le 2 \Rightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} \frac{t}{2}dt = \left|\frac{t^2}{4}\right|_0^x = \frac{x^2}{4}$$

$$si..x\rangle 2 \Rightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t).dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{2} \frac{t}{2}dt + \int_{2}^{x} 0dt = \left|\frac{t^2}{4}\right|_0^2 = \left(\frac{2^2}{4} - 0\right) = 1$$

وعليه نجد:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \,.......... \quad .... \; si \;...\; x\langle 0 \\ \dfrac{x^2}{4} .... \quad si\; ..\; 0 \le x \le 2 \\ 1\; .... \quad ..... \; si\; ..\; x\rangle 2 \end{cases}$$

▪ التمثيل البياني لدالة التوزيع التراكمي $F_X(x)$:



$$P(1/2 \leq X \leq 3/2) = F_X(3/2) - F_X(1/2) = 1 - \left(\frac{(1/2)^2}{4}\right)$$

$$= 1 - \left(\frac{1/4}{4}\right) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} = 0{,}94$$

2-3- التوقع الرياضي، التباين والعزوم:

التوقع الرياضي (الأمل الرياضي) Mathematical Expectation :

ليكن X متغير عشوائي متصل بدالة كثافة احتمال $f_X(x)$ ، فإن التوقع الرياضي للمتغير العشوائي X معطى بالعلاقة التالية:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \times f_X(x)\,dx$$

خواص التوقع الرياضي:

1- ليكن C مقدار ثابت فإن التوقع الرياضي للمقدار الثابت C هو: $E(C) = C$

لأن الدالة هي دالة كثافة احتمال $f_X(x)$ $E(C) = \int_{-\infty}^{+\infty} C \times f_X(x)dx = C\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = C \times 1 = C$

2- إذا كان X متغير عشوائي و كان a و b عددان حقيقيان فإن: $E(ax+b) = aE(x)+b$

$$E(ax+b) = \int_{-\infty}^{+\infty} (ax+b)\, f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ax \times f_X(x)dx + b \times f_X(x)dx\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} ax \times f_X(x)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} b \times f_X(x)dx = a\int_{-\infty}^{+\infty} x \times f_X(x)dx + b\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx$$

$$= aE(X) + b$$

التباين Variance:

إذا كان X متغير عشوائي متصل فإننا نعرف تباين المتغير X والذي يرمز له بالرمز $V(X)$ بالعلاقة التالية:

$$V(X) = E\left[(X - E(X))^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (X - E(X))^2 f_X(x)dx$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

حيث:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 . f_X(x)dx$$

خواص التباين:

1- تباين العدد الثابت غير العشوائي C يساوي صفر: $V(C) = 0$

$$V(C) = E\left[(C - E(C))^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (C - E(C))^2 f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (C - C)^2 f_X(X)dx = 0$$

2- إذا كان X متغير عشوائي وكان a و b عددان حقيقيان فإن: $V(aX+b)=a^2\times V(X)$

$$V(aX+b)=E\left[\left((aX+b)-E(aX+b)\right)^2\right]=E\left[\left(aX+b-aE(X)-b\right)^2\right]$$
$$=E\left[\left(aX-aE(X)\right)^2\right]=E\left[a^2\left(X-E(X)\right)^2\right]=a^2E\left[\left(X-E(X)\right)^2\right]=a^2\times V(X)$$

المثال رقم 7:

لنأخذ معطيات المثال رقم 5 **والمطلوب**: إيجاد التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري.

الحل:

- **التوقع الرياضي**:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\times f_X(x)dx=\int_{-\infty}^{0}x(0)dx+\int_{0}^{2}x\left(\frac{x}{2}\right)dx+\int_{2}^{+\infty}x(0)dx$$
$$=\int_0^2\left(\frac{x^2}{2}\right)dx=\left|\frac{x^3}{6}\right|_0^2=\left(\frac{2^3}{6}-0\right)=\frac{4}{3}$$

- **التباين**:

$$V(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2$$

حيث: $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2.f_X(x)dx$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\times f_X(x)dx=\int_{-\infty}^{0}x^2(0)dx+\int_{0}^{2}x^2\left(\frac{x}{2}\right)dx+\int_{2}^{+\infty}x^2(0)dx$$
$$=\int_0^2\left(\frac{x^3}{2}\right)dx=\left|\frac{x^4}{8}\right|_0^2=\left(\frac{2^4}{8}-0\right)=2$$

$$V(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2=2-\left[\left(\frac{4}{3}\right)^2\right]=\frac{18-16}{9}=\frac{2}{9}=0.22$$

- **الانحراف المعياري:** $\sigma_X=\sqrt{V(X)=}\sqrt{0.22}\approx 0,47$

العزوم: إن عزوم المتغير العشوائي X هي القيم المتوقعة لدوال معينة بدلالة المتغير العشوائي X الذي له دالة كثافة احتمال $f_X(x)$

❖ **العزوم اللامركزية:**

إذا كان X متغير عشوائي متصل فإن العزم اللامركزي من الدرجة r للمتغير العشوائي X هو التوقع الرياضي للمتغير X^r ويعطى بالعلاقة التالية:

$$m_r = E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f_X(x)dx$$

من تعريف العزوم اللامركزية نستنتج خاصيتين مرتبطتين بها:

$$r = 0 \Rightarrow m_0 = E(X^0) = E(1) = 1$$

$$r = 1 \Rightarrow m_1 = E(X^1) = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} X \times f_X(x)dx = \mu$$

$$r = 2 \Rightarrow m_2 = E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} X^2 \times f_X(x)dx$$

وعليه فإن: $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = m_2 - m_1^2$

❖ **العزوم المركزية** : يعرّف العزم المركزي من الدرجة r للمتغير العشوائي المتصل X كما يلي:

$$M_r = E[X - E(X)]^r = \int_{-\infty}^{+\infty} (X - E(X))^r f_X(x)dx$$

من تعريف العزوم المركزية هناك ثلاثة خواص مرتبطة بها:

$$r = 0 \Rightarrow M_0 = E[X - E(X)]^0 = 1$$

$$r = 1 \Rightarrow M_1 = E[X - E(X)]^1 = E(X) - E(X) = 0$$

$$r = 2 \Rightarrow M_2 = E[X - E(X)]^2 = E[X^2] - [E(X)]^2 = m_2 - m_1^2 = V(X)$$

4-2- الدالة المولدة للعزوم La fonction génératrice des moments:

إذا كان X متغير عشوائي متصل بدالة كثافة احتمال $f_X(x)$ فإن الدالة المولدة لعزوم هذا المتغير العشوائي معرفة كما يلي:

$$m_X(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)dx$$

تمارين محلولة:

التمرين الأول: إذا كان المطلوب اختيار طالبين بطريقة عشوائية من بين 3 طلاب و 3 طالبات، وكان المتغير العشوائي X يمثل عدد الطلبة ذكور الذين سيتم اختيارهم.

- أوجد التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير العشوائي، ودالة توزيعه التراكمي.
- أوجد التوقع الرياضي والانحراف المعياري لهذا المتغير.

الحل:

- **التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X:**

X: متغير عشوائي يمثل عدد الطلبة ذكور الذين سيتم اختيارهم من بين 6 طلبة (3 طلاب و 3 طالبات).

عدد الطرق التي يمكن بها اختيار طالبين من بين 6 طلبة هو: $C_6^2 = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6\times5\times4!}{2\times1\times4!} = 15$ حالة، وعليه فإن فضاء العينة يتضمن 15 نقطة ولكل عنصر نفس الفرصة في الظهور وذلك لأن المعاينة عشوائية ، وإن القيم الممكنة لهذا المتغير X هي: 0، 1، و 2 ، وعليه تكون الاحتمالات المقابلة لهذه القيم كما يلي:

- X=0 هو الحادث A: حادث عدم اختيار أي طالب ذكر:

$$P(X=0) = P(A) = \frac{C_3^0 \times C_3^2}{C_6^2} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

- X=1 هو الحادث B: حادث اختيار طالب واحد ذكر:

$$P(X=1) = P(B) = \frac{C_3^1 \times C_3^1}{C_6^2} = \frac{3\times3}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

- X=2 هو الحادث C: حادث اختيار طالبين من الذكور:

$$P(X=2) = P(C) = \frac{C_3^2 \times C_3^0}{C_6^2} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

وعليه فإن التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X موضح في الجدول التالي:

جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X:

X	0	1	2	$\sum$
P(X=x)	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

- **دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي X:**

يمكن إيجاد دالة التوزيع التراكمي $F_X(x)$ كما يلي:

$$F_X(x_i) = P(X \le x_i) = \begin{cases} 0 \text{.........................} si..X \langle 0 \\ 1/5 \text{.........................} si..0 \le X \langle 1 \\ 4/5 \text{.........................} si..1 \le X \langle 2 \\ 1 \text{.........................} si..X \ge 2 \end{cases}$$

- **التوقع الرياضي (القيمة المتوقعة):**

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = 0 \times P(X=0) + 1 \times P(X=1) + 2 \times P(X=2)$$
$$= 0 \times \left(\frac{1}{5}\right) + 1 \times \left(\frac{3}{5}\right) + 2 \times \left(\frac{1}{5}\right) = \frac{3+2}{5} = 1$$

$$E(X) = \mu = 1$$

- **التباين:** $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ حيث: $E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 P(X = x_i)$

لدينا: $E(X) = \mu = 1$

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 P(X = x_i) = 0^2 \times P(X=0) + 1^2 \times P(X=1) + 2^2 \times P(X=2)$$
$$= 0 \times \left(\frac{1}{5}\right) + 1 \times \left(\frac{3}{5}\right) + 4 \times \left(\frac{1}{5}\right) = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{3+4}{5} = \frac{7}{5}$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \left(\frac{7}{5}\right) - (1)^2 = \frac{7-5}{5} = \frac{2}{5}$$

الانحراف المعياري: $\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.4} \approx 0,63$

التمرين الثاني:

ليكن لدينا وعاء يحتوي على 4 كرات خضراء و 6 كرات حمراء، نقوم بسحب 3 كرات على التوالي و دون إعادة من هذا الوعاء، نعرف X المتغير العشوائي الذي يمثل عدد الكرات الحمراء المسحوبة.

1- أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X ومثله بيانياً.

2- أوجد دالة التوزيع التراكمي $F_X(x)$ ومثلها بيانياً.

الحل:

- **التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X:**

X: متغير عشوائي يمثل عدد الكرات الحمراء الممكن سحبها (سحب 3 كرات) من بين 4 كرات خضراء و 6 كرات حمراء حيث أن السحب على التوالي و دون إعادة.

عدد الطرق التي يمكن بها سحب 3 كرات من بين 10 كرات حيث السحب على التوالي و دون إعادة ، في هذه الحالة نكون بصدد ترتيبة دون إعادة وعليه عدد الطرق هو: $A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10\times9\times8\times7!}{7!} = 720$ حالة،

وإن القيم الممكنة لهذا المتغير X هي: 0، 1، 2 و 3، وعليه تكون الاحتمالات المقابلة لهذه القيم كما يلي:

- X=0 هو الحادث A: حادث عدم الحصول على أي كرة حمراء:

$$P(X=0) = P(A) = \frac{A_6^0 \times A_4^3}{A_{10}^3} = \frac{24}{720}$$

- X=1 هو الحادث B: حادث الحصول على كرة حمراء واحدة:

لأن الترتيب مهم فهناك ثلاث حالات للحصول على كرة حمراء واحدة، إما أن تسحب الكرة الحمراء في السحب الأول أو الثاني أو الثالث لذلك قمنا بالضرب في القيمة 3.

$$P(X=1) = P(B) = 3\times\left(\frac{A_6^1 \times A_4^2}{A_{10}^3}\right) = \frac{3\times6\times12}{720} = \frac{216}{720}$$

X=2 هو الحادث C: حادث الحصول على كرتين حمراوين:

لأن الترتيب مهم فهناك ثلاث حالات للحصول على كرتين حمراوين، إما الأولى والثانية أو الأولى والثالثة أو الثانية والثالثة لذلك قمنا بالضرب في القيمة 3.

$$P(X=2)=P(C)=3\times\left(\frac{A_6^2\times A_4^1}{A_{10}^3}\right)=\frac{3\times30\times4}{720}=\frac{360}{720}$$

- X=3 هو الحادث D: حادث الحصول على ثلاث كرات حمراء:

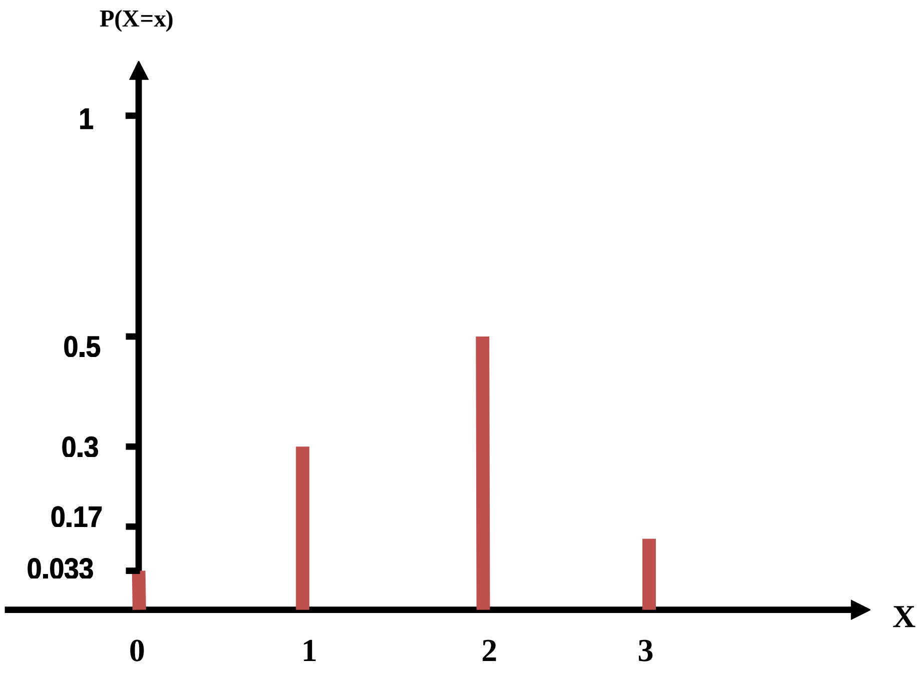
$$P(X=3)=P(D)=\left(\frac{A_6^3\times A_4^0}{A_{10}^3}\right)=\frac{120}{720}$$

وعليه فإن التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X موضح في الجدول التالي:

جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X:

X	0	1	2	3	$\sum$
P(X=x)	$\frac{24}{720}$	$\frac{216}{720}$	$\frac{360}{720}$	$\frac{120}{720}$	1

التمثيل البياني لدالة كتلة احتمال المتغير العشوائي X:

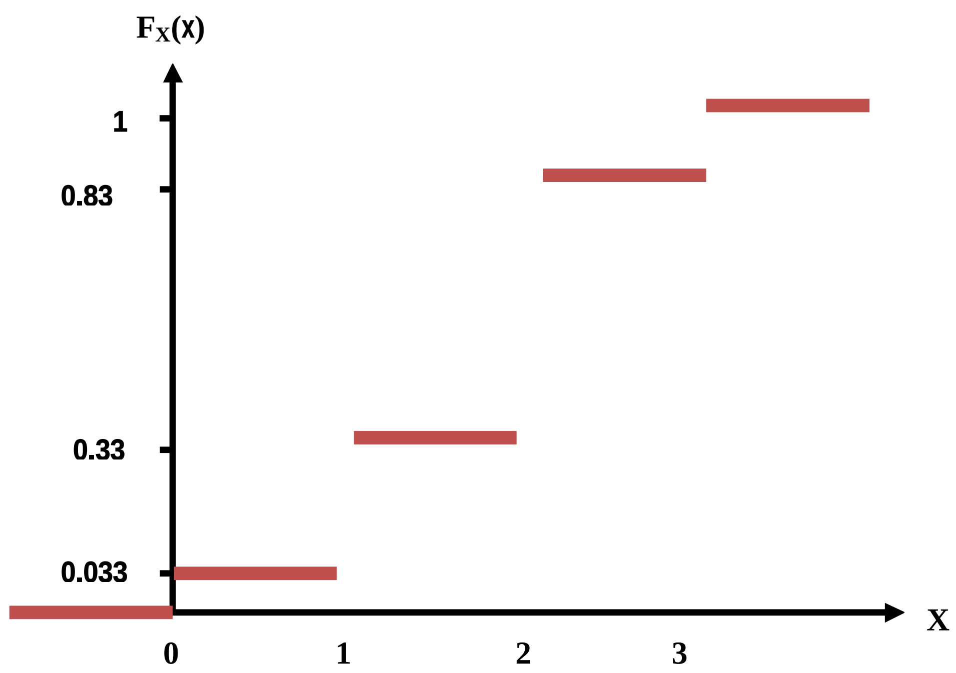


- **دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي X:**

يمكن إيجاد دالة التوزيع التراكمي $F_X(x)$ كما يلي:

$$F_X(x_i)=P(X\le x_i)=\begin{cases}0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots si..X\langle 0\\ \dfrac{24}{720}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots si..0\le X\langle 1\\ \dfrac{240}{720}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots si..1\le X\langle 2\\ \dfrac{600}{720}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots si..2\le X\langle 3\\ 1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots si..X\ge 3\end{cases}$$

التمثيل البياني لدالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي**X** :



التمرين الثالث: لتكن تجربة إلقاء قطعة نقد مرتين متتابعتين، حيث نعرف المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد مرات الحصول على الوجه (F) في هذه التجربة.

المطلوب:

- أوجد الحالات الكلية الممكنة لهذه التجربة.

- إستخرج دالة كتلة الاحتمال، دالة التوزيع التراكمي ومثلهما بيانيا.

- أحسب الأمل الرياضي ، التباين و الانحراف المعياري.

- أحسب العزمين المركزيين الأول و الثاني، ثم العزمين اللامركزيين الأول و الثاني، ثم قارن بين العزم المركزي الثاني و التباين.

- أوجد الدالة المولدة للعزوم ، ثم إستخرج منها العزم الابتدائي الأول والثاني.

الحل:

- **الحالات الكلية الممكنة للتجربة العشوائية هي:**

$$\Omega = \{FF, FP, PF, PP\}$$

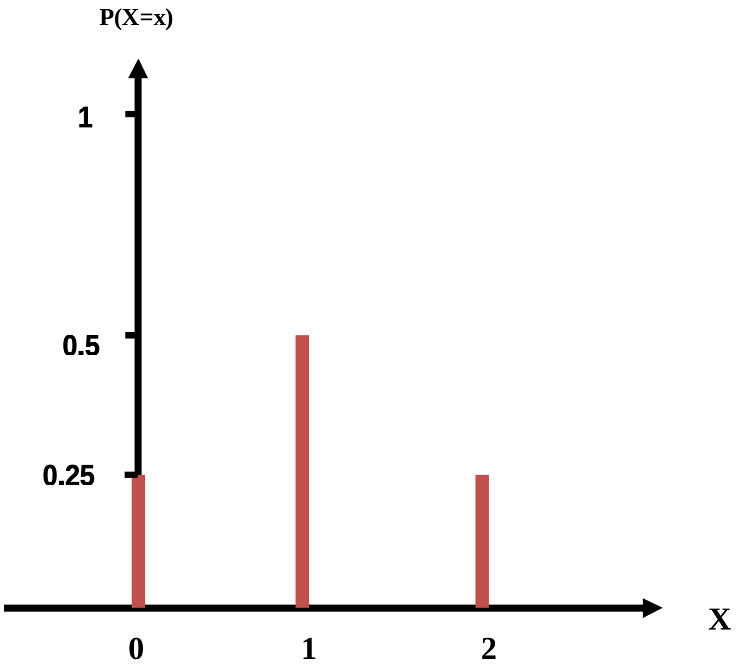
قيم المتغير العشوائي تظهر من خلال الجدول التالي:

العينة	FF	FP	PF	PP
X_i	2	1	1	0

و منه قيم المتغير $X=\{0 ; 1 ; 2\}$ و دالة كتلة الاحتمال للمتغير العشوائي X هي:

$X=x_i$	0	1	2
$P(X=x_i)$	1/4	2/4	1/4

وفيما يخص التمثيل البياني لدالة الكتلة الاحتمالية فيكون كالتالي:

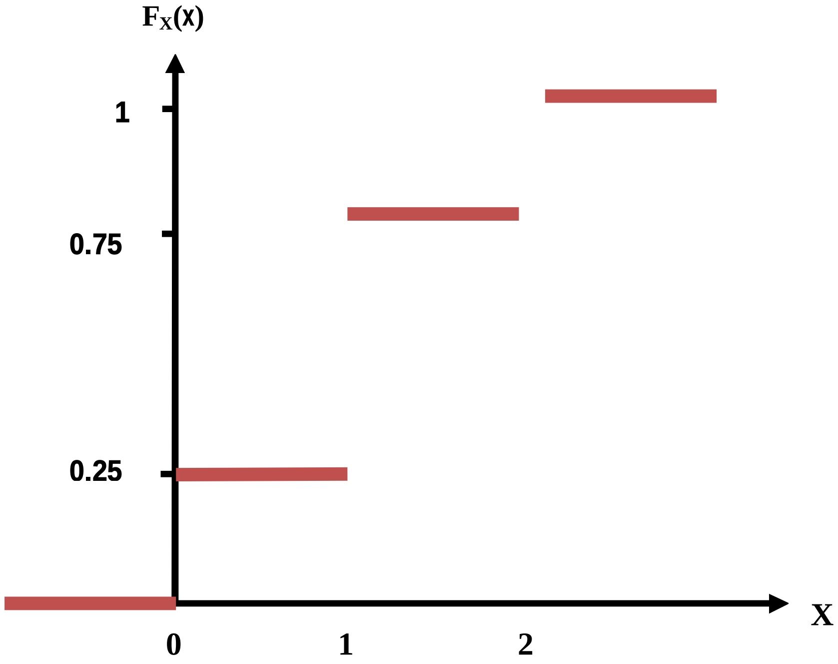


- **دالة التوزيع التراكمي $F_X(x)$ للمتغير العشوائي X :**

من دالة كتلة الاحتمال يمكن إيجاد دالة التوزيع التراكمي بالشكل التالي:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{1}{4} & 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3}{4} & 1 \le x < 2 \\ \frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1 & x \ge 2 \end{cases}$$

التمثيل البياني لدالة التوزيع التراكمي $F_X(x)$:



- حساب الأمل الرياضي:

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_iP(X=x_i)=0\times P(X=0)+1\times P(X=1)+2\times P(X=2)$$
$$=0\times\left(\frac{1}{4}\right)+1\times\left(\frac{2}{4}\right)+2\times\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{2+2}{4}=1$$

$$E(X)=\mu=1$$

- التباين: $V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$ حيث: $E(X^2)=\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}P(X=x_i)$

لدينا: $E(X)=\mu=1$

$$E(X^2)=\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}P(X=x_i)=0^2\times P(X=0)+1^2\times P(X=1)+2^2\times P(X=2)$$
$$=0\times\left(\frac{1}{4}\right)+1\times\left(\frac{2}{4}\right)+4\times\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{2+4}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

$$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\left(\frac{3}{2}\right)-(1)^2=\frac{3-2}{2}=\frac{1}{2}$$

الانحراف المعياري: $\sigma_X=\sqrt{V(X)}=\sqrt{0.5}\approx 0{,}71$

- **حساب العزوم المركزية M_1 و M_2:**

$$M_r = E[X - E(X)]^r = \sum_{i=1}^{n} (X - E(X))^r P(X = x_i)$$

$$M_1 = \sum_{i=1}^{n} (X - E(X))^1 P(X = x_i) = (0-1) \times P(X = 0) + (1-1) \times P(X = 1) + (2-1) \times P(X = 2)$$
$$= (-1) \times \left(\frac{1}{4}\right) + 0 \times \left(\frac{2}{4}\right) + 1 \times \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{-1+1}{4} = 0$$

$$M_2 = \sum_{i=1}^{n} (X - E(X))^2 P(X = x_i) = (0-1)^2 \times P(X = 0) + (1-1)^2 \times P(X = 1) + (2-1)^2 \times P(X = 2)$$
$$= 1 \times \left(\frac{1}{4}\right) + 0 \times \left(\frac{2}{4}\right) + 1 \times \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1+1}{4} = 0.5$$

- **حساب العزوم اللامركزية m_1 و m_2:**

$$m_r = E(X^r) = \sum_{i=1}^{n} x_i^r P(X = x_i)$$

$$m_1 = E(X^1) = \sum_{i=1}^{n} x_i^1 P(X = x_i) = 0^1 \times P(X = 0) + 1^1 \times P(X = 1) + 2^1 \times P(X = 2)$$
$$= 0 \times \left(\frac{1}{4}\right) + 1 \times \left(\frac{2}{4}\right) + 2 \times \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{2+2}{4} = 1$$
$$m_2 = E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 P(X = x_i) = 0^2 \times P(X = 0) + 1^2 \times P(X = 1) + 2^2 \times P(X = 2)$$
$$= 0 \times \left(\frac{1}{4}\right) + 1 \times \left(\frac{2}{4}\right) + 4 \times \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{2+4}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = m_2 - m_1^2 = \frac{3}{2} - (1)^2 = \frac{3-1}{2} = \frac{1}{2}$$

- **حساب الدالة المولدة للعزوم :**

$$m_X(t) = E(e^{tx}) = \sum_{x} e^{tx} P(X = x)$$

$$m_X(t)=E(e^{tx})=\sum_x e^{tx}P(X=x)=e^{0t}\left(\frac{1}{4}\right)+e^{1t}\left(\frac{2}{4}\right)+e^{2t}\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{4}e^0+\frac{2}{4}e^t+\frac{1}{4}e^{2t}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left(2e^t+e^{2t}\right)$$

إستخراج m_2 من الدالة المولدة للعزوم، يكون بعد حساب المشتق الثاني و جعل t=0 في نهاية المشتقة:

$$m_1=\frac{\partial^1 m_X(t)}{\partial t^1}\Bigg|_{t=0}=\frac{2}{4}e^t+\frac{1}{4}e^{2t}\Bigg|_{t=0}=\frac{2}{4}e^0+\frac{2}{4}e^{2\times 0}=\frac{2}{4}+\frac{2}{4}=1$$

$$m_2=\frac{\partial^2 m_X(t)}{\partial t^2}\Bigg|_{t=0}=\frac{2}{4}e^t+\frac{2}{4}e^{2t}\Bigg|_{t=0}=\frac{2}{4}e^0+\frac{4}{4}e^{2\times 0}=\frac{2}{4}+\frac{4}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

التمرين الرابع:

لدينا حجر نرد أوجهه غير متماثلة، ودالة كتلة احتمال للمتغير العشوائي X معرفة كما هو مبيّن في الجدول التالي:

X	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	$2c$	c	$1/3$	$1/5$	c	$3c$

1- أوجد قيمة الثابت c .

2- أوجد دالة تابع الاحتمالات $F_X(x)$.

3- ما احتمال الحصول على عدد زوجي.

الحل:

1- إيجاد قيمة الثابت c :

بما أن الدالة هي دالة كتلة احتمال فالشرط الثاني محقق وعليه:

$$\sum_{i=1}^{n}P(X=x_i)=1\Leftrightarrow 2c+c+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+c+3c=1$$

$$\Leftrightarrow 7c=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\Leftrightarrow 7c=\frac{15-5-3}{15}\Leftrightarrow 7c=\frac{7}{15}\Rightarrow c=\frac{1}{15}$$

وعليه يكون جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما يلي:

X	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{5}$

2- دالة تابع الاحتمالات $F_X(x)$:

دالة تابع الاحتمال $F_X(x)$ للمتغير العشوائي X هي:

$$F_X(x)=\begin{cases}0 \ldots\ldots\ldots\ldots \; si \ldots\; x<1\\ 2/15 \ldots\ldots\ldots \; si \ldots\; 1\le x<2\\ 3/15 \ldots\ldots\ldots \; si \ldots\; 2\le x<3\\ 8/15 \ldots\ldots \; si \ldots\; 3\le x<4\\ 11/15 \ldots\ldots \; si \ldots\; 4\le x<5\\ 12/15 \ldots\ldots\ldots \; si \ldots\; 5\le x<6\\ 1 \ldots\ldots\ldots\ldots \; si \ldots\; x\ge 6\end{cases}$$

3- احتمال الحصول على عدد زوجي:

ليكن A حادث الحصول على عدد زوجي:

$$P(A)=P(X=2)+P(X=4)+P(X=6)=\frac{1}{15}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{1+3+3}{15}=\frac{7}{15}\approx 0.47$$

التمرين الخامس:

ليكن المتغير العشوائي X المعرف بدالة تابع احتماله $F_X(x)$ كما يلي:

$$F_X(x)=\begin{cases}0 \ldots\ldots\ldots\ldots \; si \ldots\; x<-5\\ 2/15 \ldots\ldots\ldots \; si \ldots\; -5\le x<-3\\ 7/15 \ldots\ldots\ldots \; si \ldots\; -3\le x<0\\ 13/15 \ldots\ldots \; si \ldots\; 0\le x<2\\ 1 \ldots\ldots\ldots\ldots \; si \ldots\; x\ge 2\end{cases}$$

1- أوجد دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X .

2- أحسب الاحتمالات التالية: $P(-3<X\le 2)$ ، $P(X<0)$ ، $P(X\ge -3)$.

3- أوجد العزم اللامركزي من الدرجة الأولى والثانية، ثم استنتج تباين المتغير العشوائي X .

الحل:

1- إيجاد دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X :

من دالة التوزيع التراكمي يمكن إيجاد دالة التوزيع الاحتمالي أو دالة كتلة الاحتمال وذلك بإجراء الفروقات، حيث أن قيم المتغير العشوائي في هذا المثال هي: $X = -5,-3,0,2$

وعليه يكون جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كما يلي:

X	-5	-3	0	2	$\sum$
$P(X = x)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{15}$	1

2- **أحسب الاحتمالات التالية:** $P(-3 \langle X \leq 2)$ ، $P(X \langle 0)$ ، $P(X \geq -3)$.

$$P(-3 \langle X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 2) = \frac{2}{5} + \frac{2}{15} = \frac{8}{15}$$

$$P(X \langle 0) = P(X = -5) + P(X = -3) = \frac{2}{15} + \frac{1}{3} = \frac{7}{15}$$

$$P(X \geq -3) = P(X = -3) + P(X = 0) + P(X = 2) = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{15} = \frac{13}{15}$$

3- إيجاد العزم اللامركزي من الدرجة الأولى والثانية، ثم استنتاج تباين المتغير العشوائي X :

$$m_r = E(X^r) = \sum_{i=1}^{n} x_i^r P(X = x_i)$$

$$m_1 = E(X^1) = \sum_{i=1}^{n} x_i^1 P(X = x_i) = (-5)^1 \times P(X = -5) + (-3)^1 \times P(X = -3) + 0^1 \times P(X = 0)$$

$$+ 2^1 \times P(X = 2) = (-5) \times \left(\frac{2}{15}\right) + (-3) \times \left(\frac{1}{3}\right) + 0 \times \left(\frac{2}{5}\right) + 2 \times \left(\frac{2}{15}\right) = \frac{-10-15+4}{15} = \frac{-21}{15}$$

$$m_2 = E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 P(X = x_i) = (-5)^2 \times P(X = -5) + (-3)^2 \times P(X = -3) + 0^2 \times P(X = 0)$$

$$+ 2^2 \times P(X = 2) = 25 \times \left(\frac{2}{15}\right) + 9 \times \left(\frac{1}{3}\right) + 0 \times \left(\frac{2}{5}\right) + 4 \times \left(\frac{2}{15}\right) = \frac{25+9+8}{15} = \frac{42}{15}$$

$$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=m_2-m_1^2=\frac{42}{15}-\left(\frac{-21}{15}\right)^2=\frac{630-441}{225}=\frac{189}{225}=0.84$$

التمرين السادس:

ليكن المتغير العشوائي X ذو الدالة التالية :

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{x}{8}.......\ si...0\le x\le 4\\ 0..........\ ......(o/w)\end{cases}$$

المطلوب:

1- أثبت أن $f_X(x)$ دالة كثافة إحتمالية و مثلها بيانيا.

2- أوجد دالة التوزيع التراكمي ومثلها بيانيا.

الحل:

1- حتى تكون الدالة $f_X(x)$ دالة كثافة إحتمالية لابد من تحقق الشرطان التاليان:

$$\begin{cases}\bullet\ f_X(x)\ge 0\\ \bullet\ \int_R f_X(x)dx=1\end{cases}$$

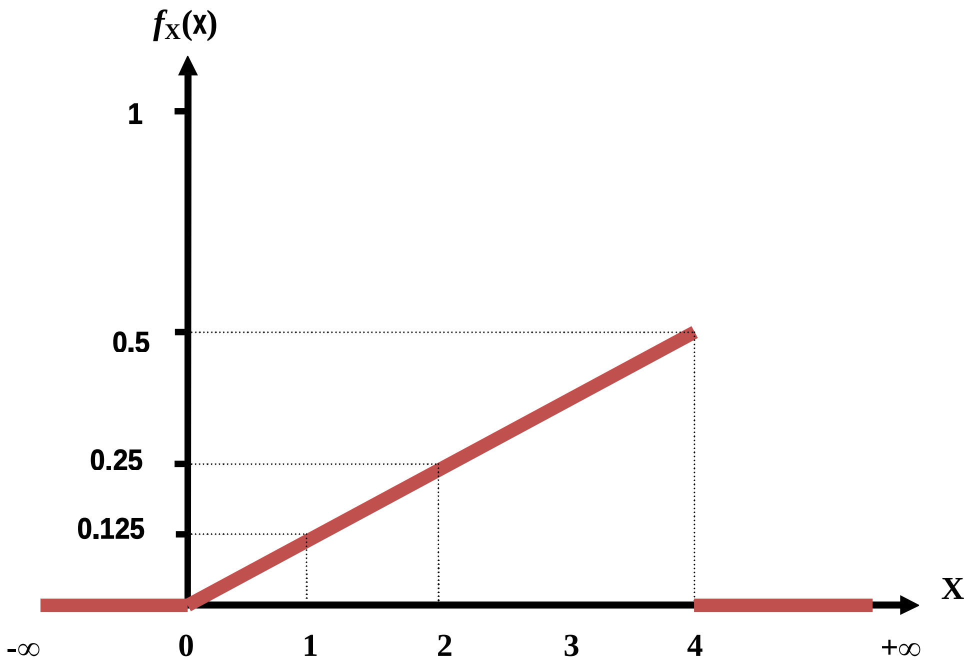
الشرط الأول: الملاحظ من البيانات أنه مهما تكن قيم X فإن: $f_X(x)\ge 0$ $(\forall x\in\Re;\ f_X(x)\ge 0)$ **.**

الشرط الثاني: $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx=1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx=\int_{-\infty}^{0} f_X(x)dx+\int_{0}^{4} f_X(x)dx+\int_{4}^{+\infty} f_X(x)dx=\int_{-\infty}^{0}0dx+\int_{0}^{4}\frac{x}{8}dx+\int_{4}^{+\infty}0dx$$

$$=0+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^4+0=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\times(4)^2\right)=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\times 16\right)=\frac{1}{8}\times 8=1$$

إذن بما أن الشرطان محققان فإن الدالة $f_X(x)$ دالة كثافة إحتمالية و تمثيلها البياني يكون كالآتي:



2- دالة التوزيع التراكمي $F_X(x)$:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$$si..x\langle 0 \Rightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$$

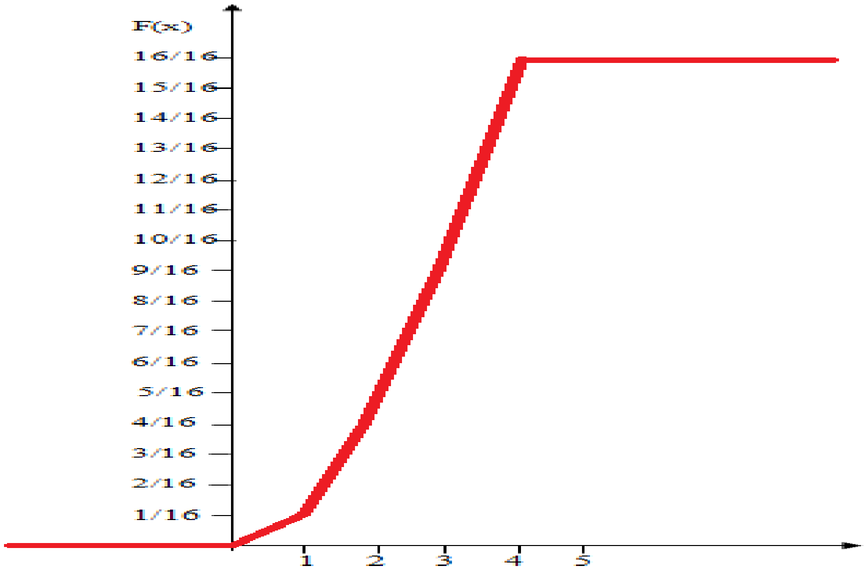
$$si..0 \leq x \leq 4 \Rightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} \frac{t}{8}dt = \left|\frac{t^2}{16}\right|_0^x = \frac{x^2}{16}$$

$$si..x\rangle 4 \Rightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t).dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{4} \frac{t}{8}dt + \int_{4}^{x} 0dt = \left|\frac{t^2}{16}\right|_0^4 = \left(\frac{4^2}{16} - 0\right) = 1$$

وعليه نجد:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \,.......... \quad .... \ si \ ... \ x\langle 0 \\ \dfrac{x^2}{16} .... \quad si \ .. \ 0 \leq x \leq 4 \\ 1 \,.......... \quad ..... \ si \ .. \ x \rangle 4 \end{cases}$$

3- التمثيل البياني لدالة التوزيع التراكمي $F_X(x)$:



التمرين السابع:

لتكن دالة كثافة الاحتمال التالية :

$$f_X(x) = \begin{cases} x .... \; si ... 0 \langle x \leq 1 \\ 2 - x ..... \; si ... 1 \leq x \langle 2 \\ 0 .... \; ......(o/w) \end{cases}$$

المطلوب:

1- أوجد التوقع الرياضي و التباين.

2- أوجد العزم المركزي الثاني ثم تحقق من قيمته مع التباين.

3- أوجد الدالة المولدة للعزوم.

الحـــل:

1- حساب التوقع الرياضي:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\times f_X(x)dx=\int_{-\infty}^{0} x(0)dx+\int_{0}^{1} x(x)dx+\int_{1}^{2} x(2-x)dx+\int_{2}^{+\infty} x(0)dx$$

$$=\int_{0}^{1} x^2dx+\int_{1}^{2}(2x-x^2)dx=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1+\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2$$

$$=\frac{1}{3}+\left(4-\frac{8}{3}-1+\frac{1}{3}\right)=\frac{1+12-8-3+1}{3}=\frac{1}{3}$$

- **التباين:**

$$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

حيث: $E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2.f_X(x)dx$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\times f_X(x)dx=\int_{-\infty}^{0} x^2(0)dx+\int_{0}^{1} x^2(x)dx+\int_{1}^{2} x^2(2-x)dx+\int_{2}^{+\infty} x(0)dx$$

$$=\int_{0}^{1} x^3dx+\int_{1}^{2}(2x^2-x^3)dx=\frac{1}{4}x^4\Big|_0^1+\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_1^2$$

$$=\frac{1}{4}+\left(\frac{16}{3}-\frac{16}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{3+64-48-8+3}{12}=\frac{14}{12}=\frac{7}{6}$$

$$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{7}{6}-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{21-2}{18}=\frac{19}{18}=1.05$$

2-حساب العزم المركزي الثاني M_2 :

قمنا في السؤال الأول بحساب التباين حيث وجدنا:

$$m_1 = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \times f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x(0)dx + \int_{0}^{1} x(x)dx + \int_{1}^{2} x(2-x)dx + \int_{2}^{+\infty} x(0)dx$$

$$= \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (2x - x^2)dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 + \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{3} + \left(4 - \frac{8}{3} - 1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{1+12-8-3+1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$m_2 = E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \times f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x^2(0)dx + \int_{0}^{1} x^2(x)dx + \int_{1}^{2} x^2(2-x)dx + \int_{2}^{+\infty} x(0)dx$$

$$= \int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 (2x^2 - x^3)dx = \frac{1}{4}x^4\Big|_0^1 + \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{4} + \left(\frac{16}{3} - \frac{16}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3+64-48-8+3}{12} = \frac{14}{12} = \frac{7}{6}$$

وعليه فإن:

$$M_2 = m_2 - m_1^2 = \frac{7}{6} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1.05$$

كما يمكن حساب العزم المركزي الثاني M_2 من العلاقة:

$$M_r = E[X - E(X)]^r = \int_{-\infty}^{+\infty} (X - E(X))^r f_X(x)dx$$

حساب الدالة المولدة للعزوم:

الدالة المولدة لعزوم المتغير العشوائي X معرفة كما يلي:

$$m_X(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)dx$$

$$m_X(t)=\int_{-\infty}^{0} e^{tx}(0)dx+\int_{0}^{1} e^{tx}(x)dx+\int_{1}^{2} e^{tx}(2-x)dx+\int_{2}^{+\infty} e^{tx}(0)dx$$

$$=\int_{0}^{1} xe^{tx}dx+\int_{1}^{2}\left(2e^{tx}-xe^{tx}\right)dx=\int_{0}^{1} xe^{tx}dx+\int_{1}^{2} 2e^{tx}dx-\int_{1}^{2} xe^{tx}dx$$

من أجل البحث عن التكامل نستخدم التكامل بالتجزئة كالآتي:

نسمي (x=v) ونسمي (e^x=u) فنحصل على ما يأتي :

$$\int xe^{tx}=xe^{tx}-\int e^{tx}dx$$

إذن:

$$m_X(t)=\int_{0}^{1} xe^{tx}dx+\int_{1}^{2} 2e^{tx}dx-\int_{1}^{2} xe^{tx}dx$$

$$=xe^{x}\Big|_0^1-\int_{0}^{1} e^{tx}dx+2\int_{1}^{2} e^{tx}dx-xe^{x}\Big|_1^2+\int_{1}^{2} e^{tx}dx$$

$$=xe^{tx}\Big|_0^1-e^{tx}\Big|_0^1+2e^{tx}\Big|_1^2-xe^{tx}\Big|_1^2+e^{tx}\Big|_1^2$$

$$=e^{t}-\left(e^{t}-1\right)+\left(2e^{2t}-2e^{t}\right)-\left(2e^{t}-e^{t}\right)+\left(e^{2t}-e^{t}\right)$$

$$=1-2e^{t}+e^{2t}$$

التمرين الثامن: لتكن الدالة التالية:

$$f_X(x) = \begin{cases} ke^{-3x} .... \; si ... x \rangle 0 \\ 0 .... \; ......(o/w) \end{cases}$$

المطلوب:

1- أوجد قيمة k التي تجعل الدالة $f_X(x)$ تعمل كدالة كثافة احتمال، ثم أوجد: $P(0.5 \langle X \langle 1)$.

2- أوجد دالة التوزيع التراكمي $F_X(x)$ ثم تأكد من حساب $P(0.5 \langle X \langle 1)$.

الحل:

1- قيمة k التي تجعل الدالة $f_X(x)$ تعمل كدالة كثافة احتمال:

حتى تكون الدالة $f_X(x)$ تعمل كدالة كثافة احتمال يجب تحقق الشرطان:

$$\begin{cases} \bullet \; f_X(x) \geq 0 \\ \bullet \; \int_R f_X(x)dx = 1 \end{cases}$$

الشرط الأول: الملاحظ من البيانات أنه مهما تكن قيم X فإن: $f_X(x) \geq 0$ $\left(\forall x \in \Re; \; f_X(x) \geq 0\right)$. يبقى فقط التأكد من قيمة k .

الشرط الثاني: $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{+\infty} ke^{-3x}dx = 1$$

$$\int_{0}^{+\infty} ke^{-3x}dx = 1 \Rightarrow k\int_{0}^{+\infty} e^{-3x}dx = 1 \Rightarrow k \times \left(\frac{e^{-3x}}{-3}\right)\Bigg|_{0}^{+\infty} = 1$$

$$\Rightarrow k\left[0 - \left(\frac{1}{-3}\right)\right] = 1 \Rightarrow \frac{k}{3} = 1 \Rightarrow k = 3$$

وعليه فإن الدالة $f_X(x)$ هي دالة كثافة احتمال وتكتب كما يلي:

$$f_X(x) = \begin{cases} 3e^{-3x} .... \; si ... x \rangle 0 \\ 0 .... \; ......(o/w) \end{cases}$$

- **حساب الاحتمال:**

$$P(0.5\langle X\langle 1)=\int_{0.5}^{1}3e^{-3x}dx=3\int_{0.5}^{1}e^{-3x}dx=3\times\frac{1}{-3}e^{-3x}\Big|_{0.5}^{1}=-e^{-3x}\Big|_{0.5}^{1}=-e^{-3}+e^{-1.5}=0.173$$

2- دالة التوزيع التراكمي $F_X(x)$:

$$F_X(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$$

$$si..x\langle 0\Rightarrow F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{-\infty}^{x}0\,dt=0$$

$$si..x\rangle 0\Rightarrow F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t).dt=\int_{-\infty}^{0}0\,dt+\int_{0}^{x}3e^{-3t}dt$$

$$=\left|-e^{-3t}\right|_{0}^{x}=-e^{-3x}+1=1-e^{-3x}$$

وعليه نجد:

$$F_X(x)=\begin{cases}0.......... \ .... si...x\le 0\\ 1-e^{-3x}.......... \ si..x\rangle 0\end{cases}$$

- **حساب الاحتمال:**

$$P(0.5\langle X\langle 1)=F_X(1)-F_X(0.5)=(1-e^{-3})-(1-e^{-1.5})=0.173$$

الفصل الثالث:
قوانين التوزيعات
الاحتمالية المنفصلة

تمهيد:

تطرقنا في الفصل السابق إلى المتغيرات العشوائية و ركزنا على أنواعها التي تنقسم إلى متغيرات عشوائية منفصلة وأخرى متغيرات عشوائية متصلة وتعرفنا على بعض خصائصها كدالة كتلة الاحتمال، دالة كثافة الاحتمال، التوقع الرياضي والتباين والدالة المولدة للعزوم و غيرها.

ولكون المتغيرات العشوائية لها تطبيقات متعددة مختلفة اتفق على استخدام توزيعات احتمالية متعددة تخدم هذه التطبيقات، لذلك سنناقش خلال هذا الفصل بعض التوزيعات الاحتمالية الخاصة بالمتغير العشوائي المنفصل والتي تستخدم بشكل واسع في التطبيقات الاحصائية والاحتمالات ومن هذه التطبيقات تجارب التوزيع المنتظم، تجارب بيرنولي وتجارب ذي الحدين، تجارب التوزيع فوق الهندسي والتوزيع الهندسي وكذا توزيع بواسون وسوف نقوم بوصف جل هذه التوزيعات الاحتمالية المنفصلة بشكل موجز نتعرض من خلاله لتحديد دالة كتلة الاحتمال، دالة التوزيع التراكمي مع تحديد التوقع الرياضي والتباين والدالة المولدة للعزوم إن وجدت لهذه التوزيعات الاحتمالة المنفصلة.

أولا- التوزيع المنتظم المنفصل Discrete Uniform Distribution:

يعد التوزيع المنتظم المنفصل من أبسط التوزيعات المنفصلة، حيث يستخدم في التجارب التي تتضمن نتائجها نفس الفرصة في الحدوث، فمثلا عند إلقاء زهرة نرد مرة واحدة وتعريف المتغير العشوائي X بأنه عدد النقاط التي تظهر على الوجه العلوي، فإن هذا المتغير العشوائي يتوزع وفق التوزيع المنتظم المنفصل.

1- دالة كتلة الاحتمال للتوزيع المنتظم المنفصل:

إذا كان X متغير عشوائي منفصل بدالة احتمال معرفة كما يلي[1]:

$$P(X = x_i) = \begin{cases} \frac{1}{N} \text{..........} \quad .si \text{....} \; x = 1;2;3 \text{....} \; N \\ \\ 0 \text{..........} \quad \text{..........} \quad \text{....}(o/w) \end{cases}$$

حيث N عدد صحيح موجب.

و حتى تكون الدالة $P(X = x_i)$ دالة كتلة إحتمال يجب تحقق الشرطان التاليان:

$$\begin{cases} 1 / \forall \; i .. \; 0 \leq P(X = x_i) \leq 1 \\ 2 / \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1 \end{cases}$$

- **الشرط الأول**: يظهر أن الدالة $P(X = x_i)$ هي دالة غير سالبة لجميع قيم X .
- **الشرط الثاني**: $\sum_{x=1}^{N} P(X = x) = \sum_{x=1}^{N} \frac{1}{N} = N \times \frac{1}{N} = 1$

وعليه نقول أن الدالة $P(X = x_i)$ هي دالة كتلة احتمال للتوزيع المنتظم المنفصل للمتغير العشوائي X ونكتب اختصارا : $X \rightarrow U_{(1,....N)}$

[1]- علي عبد السلام العماري، علي حسين العجيلي، مرجع سابق، ص 309.

2- دالة التوزيع التراكمي للتوزيع المنتظم المنفصل:

دالة التوزيع التراكمي للتوزيع المنتظم المنفصل تكتب كما يلي:

$$F_X(x) = P(X \le x) = \sum_{k=1}^{X} P(X = x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{N} = \frac{X}{N};........X = 1,2,.....N$$

كما يمكن كتابتها على الشكل[1]:

$$F_X(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0.......... \; .si...X \langle 1 \\ \frac{X}{N}.......... \; si...X = 1,2....N \\ 1.......... \; ..siX \ge N \end{cases}$$

3- التوقع الرياضي، التباين والدالة المولدة للعزوم للتوزيع المنتظم المنصل:

3-1- التوقع الرياضي:

إذا كان X متغير عشوائي يتوزع وفق التوزيع المنتظم المنفصل بمعلمة N فإن: $E(X) = \mu = \frac{N+1}{2}$

$$E(X) = \sum_{X=1}^{N} X \times P(X = x) = \sum_{X=1}^{N} X \times \frac{1}{N} = \frac{1}{N}\sum_{X=1}^{N} X = \frac{1}{N} \times \frac{N(N+1)}{2} = \frac{N+1}{2}$$

إذن: $E(X) = \mu = \frac{N+1}{2}$

3-2- التباين:

تعطى الصياغة الرياضية لتباين المتغير العشوائي X الذي يتبع التوزيع المنتظم المنفصل كمايلي:

$$V(X) = \frac{N^2 - 1}{12}$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

[1]- علي عبد السلام العماري، علي حسين العجيلي، مرجع سابق، ص 310.

$$E(X^2)=\sum_{X=1}^{N}X^2\times\frac{1}{N}=\frac{1}{N}\sum_{X=1}^{N}X^2=\frac{1}{N}\left[\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}\right]=\frac{(N+1)(2N+1)}{6}$$

$$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{(N+1)(2N+1)}{6}-\left(\frac{N+1}{2}\right)^2=\frac{(N+1)(N-1)}{12}=\frac{N^2-1}{12}$$

ومنه:

$$V(X)=\sigma^2=\frac{N^2-1}{12}$$

3-3- الدالة المولدة للعزوم:

إذا كان X متغير عشوائي منفصل بدالة كتلة احتمال $P(X=x)$ فإن الدالة المولدة لعزوم هذا المتغير العشوائي تعرف بأنها الأمل الرياضي للدالة e^{tx} ، $\left(m_X(t)=E(e^{tx})\right)$، وهي معطاة بالصيغة التالية:

$$m_X(t)=E(e^{tx})=\sum_{x}e^{tx}P(X=x)$$

تعطى الصياغة الرياضية للدالة المولدة لعزوم المتغير العشوائي X الذي يتبع التوزيع المنتظم المنفصل كمايلي[1]:

$$m_X(t)=E(e^{tx})=\sum_{X=1}^{N}e^{tX}\frac{1}{N}=\frac{1}{N}\sum_{X=1}^{N}e^{tX}$$

نضع $y=e^t$ فنجد:

$$m_X(t)=\frac{1}{N}\sum_{X=1}^{N}e^{tX}=\frac{1}{N}\sum_{X=1}^{N}y^X=\frac{1}{N}\left[y+y^2+.........+y^N\right]$$

المجموع داخل القوس هو مجموع حدود متتالية هندسية منتهية، أساسها y ومجموعها:

$$\sum_{X=0}^{N-1}y^X=\frac{1-y^N}{1-y}$$

$$m_X(t)=\frac{1}{N}\left[\frac{1-y^N}{1-y}\right]=\frac{1}{N}\left[\frac{e^t\left(1-e^{Nt}\right)}{N\left(1-e^t\right)}\right]=\left[\frac{e^t\left(e^{Nt}-1\right)}{N\left(e^t-1\right)}\right]$$

[1]- علي عبد السلام العماري، علي حسين العجيلي، مرجع سابق، ص ص 311، 312.

$$m_X(t) = \left[\frac{e^t\left(e^{Nt}-1\right)}{N\left(e^t-1\right)}\right] \text{..........}\ t \rangle 0$$

المثال رقم 1:

أوجد التوزيع المنتظم المنفصل لعينات عشوائية حجمها 04 تم إختيارها من 06 طلاب ؟

ثم أوجد دالة التوزيع التراكمي و التوقع الرياضي ، ثم الدالة المولدة للعزوم ؟

الحل:

الحالات الكلية الممكنة من هذا السحب هي: $C_6^4 = \frac{6!}{4! \times 2!} = 15$

إذن دالة كتلة الاحتمال للتوزيع المنتظم المنفصل هي:

$$P(X=x) = \begin{cases} \frac{1}{15} \text{..........}\ .si \text{....}\ X = 1,2, \text{......}\ 15 \\ 0 \text{..........}\ \text{..........}\ .(o/w) \end{cases}$$

ودالة التوزيع التراكمي $F_X(x)$ هي:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 \text{..........}\ .si \text{...}\ X \langle 1 \\ \frac{1}{15} \text{..........}\ si \text{...}\ 1 \leq X \langle 2 \\ \frac{2}{15} \text{..........}\ .si \text{...}\ 2 \leq X \langle 3 \\ \text{..........} \\ \text{..........}\ . \\ \frac{14}{15} \text{..........}\ ..si \text{...}\ 14 \leq X \langle 15 \\ \frac{15}{15} = 1 \text{.........}\ si \text{....}\ X \geq 15 \end{cases}$$

حساب الأمل الرياضي:

$$E(X)=\frac{N+1}{2}=\frac{15+1}{2}=8$$

حساب التباين:

$$V(X)=\sigma^2=\frac{N^2-1}{12}=\frac{(15)^2-1}{12}=\frac{56}{3}$$

حساب الدالة المولدة للعزوم:

$$m_X(t)=\frac{e^t}{N}\left[\frac{e^{Nt}-1}{e^t-1}\right]=\frac{e^t}{15}\left[\frac{e^{15t}-1}{e^t-1}\right]$$

ثانيا- توزيع بيرنولي Bernouli Distrubution:

يعتبر توزيع بيرنولي من أبسط التوزيعات المنفصلة في التجارب التي تكون لها نتيجتان ممكنتان فقط ومتنافيتان، مثل نتائج تجربة إلقاء قطعة نقدية معدنية فإن النتيجة قد تكون وجه F أو رقم P، أو عند سحب كرة من صندوق به m كرة حمراء و n كرة بيضاء، أو تجربة إختيار مريض من بين الأشخاص الذين كانت عملياتهم الجراحية ناجحة أو فاشلة، فإذا رمزنا لإحتمال نجاح التجربة بـ P فإن إحتمال فشلها هو q=(1-P) .

ويكون المتغير العشوائي X الذي يمثل نجاح التجربة أو فشلها، بحيث يأخذ القيمة $X=0$ إذا فشلت هذه التجربة و $X=1$ عند نجاحها.

1- دالة كتلة احتمال توزيع بيرنولي:

إن دالة كتلة احتمال توزيع بيرنولي تكتب على الصيغة التالية[1]:

$$P(X=x)=\begin{cases} p^X q^{1-X} \text{..........} \quad \text{...}si\text{...}\, X=0,1 \\ \\ 0\text{..........} \quad \text{..........} \quad \text{....}(o/w) \end{cases}$$

[1] - *DRESS . F : « Les Probabilités et La Statistique » , Edition DUNOD, Paris,2012 , P 18.*

حيث: $p+q=1$

دالة كتلة احتمال لتوزيع بيرنولي تكتب اختصارا : $X \rightarrow Ber\ (P)$

2-دالة التوزيع التراكمي لتوزيع بيرنولي:

تكتب دالة التوزيع التراكمي لتوزيع بيرنولي كما يلي:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \ldots\ldots\ldots \quad \ldots si \ldots X \langle 0 \\ q \ldots\ldots\ldots \quad \ldots si \ldots 0 \le X \langle 1 \\ 1 \ldots\ldots\ldots \quad \ldots.. si \ldots X \ge 1 \end{cases}$$

3- التوقع الرياضي، التباين والدالة المولدة للعزوم:

3-1- التوقع الرياضي:

إذا كان المتغير العشوائي X يتوزع وفق توزيع بيرنولي بمعلمة P فإن: $E(X)=\mu=p$

$$E(X)=\sum_{X=0}^{1} X \times P(X=x) = \sum_{X=0}^{1} X \times p^X q^{1-X} = 0 \times q + 1 \times p = p$$

$$E(X)=\mu=p$$

3-2- التباين:

تباين المتغير العشوائي X الذي يتبع توزيع بيرنولي معطى بالعلاقة التالية: : $V(X)=pq$

$$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$E(X^2)=\sum_{X=0}^{1} X^2 \times P(X=x) = \sum_{X=0}^{1} X^2 \times p^X q^{1-X} = 0^2 p^0 q^{1-0} + 1^1 p^1 q^{1-1} = p$$

$$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2 = p-(p)^2 = p-p^2 = p(1-p) = pq$$

$$V(X)=pq$$

3-3- الدالة المولدة للعزوم:

الدالة المولدة لعزوم المتغير العشوائي X الذي يتبع توزيع بيرنولي هي:

$$m_X(t) = E(e^{tx}) = \sum_x e^{tx} P(X = x) = q + pe^t$$

تعطى الصياغة الرياضية للدالة المولدة لعزوم المتغير العشوائي X الذي يتبع توزيع بيرنولي كما يلي:

$$m_X(t) = E(e^{tx}) = \sum_{X=0}^{1} e^{tX} P(X = x) = \sum_{X=0}^{1} e^{tX} p^X q^{1-X}$$

$$m_X(t) = e^{0t} p^0 q^{1-0} + e^{1t} p^1 q^{1-1} = q + pe^t$$

$$m_X(t) = q + pe^t$$

المثال رقم 2:

إذا كان احتمال أن يتخرج طالب من جامعة ما بعد الدراسة هو 0.4.

المطلوب: أوجد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X ، ثم أحسب كل من التوقع الرياضي والتباين، ثم أوجد الدالة المولدة للعزوم .

الحل:

بما أن للطالب حالتين هما إما النجاح أو الفشل (إما التخرج من الجامعة ونيل الشهادة أو عدم التخرج وعدم نيل الشهادة)، فالمتغير العشوائي X يمكن أن يأخذ قيمتين هما $X = 1$ وهي تمثل نجاح الطالب (تخرجه) وإما $X = 0$ وهي فشل الطالب (رسوبه)، و من هذه المعطيات يمكن تطبيق قانون التوزيع الاحتمالي لبرنولي وهو الموافق لهذه التجربة وقانونه يكتب كمايلي:

$$P(X = x) = \begin{cases} (0.4)^X (0.6)^{1-X} \text{..........} \ldots si \ldots X = 0,1 \\ \\ 0 \text{..........} \text{..........} \ldots .(o/w) \end{cases}$$

ومنه يمكن حساب التوقع الرياضي و التباين و الدالة المولدة للعزوم إنطلاقا من العلاقات السابقة، حيث:

$$E(X) = p = 0.4$$

$$V(X) = pq = 0.4 \times 0.6 = 0.24$$

$$m_X(t) = q + pe^t = 0.6 + 0.4e^t$$

ثالثا- توزيع ذي الحدين (التوزيع الثنائي)Binomial Distribution:

يعتبر توزيع ذي الحدين من أهم التوزيعات الاحتمالية المنفصلة لبساطة علاقته الرياضية وسهولة إستخدامه، ويستعمل أساسا في التجربة العشوائية التي لها الخواص التالية [1]:

- التجربة تتألف من عدد من المحاولات ونفرضه n والذي يمثل حجم العينة.
- أن المحاولات مستقلة عن بعضها البعض.
- لكل محاولة نتيجتين فقط هما هما النجاح أو الفشل.
- إحتمال النجاح متساوي وثابت لجميع المحاولات، وسيتم افتراض أن إحتمال نجاح المحاولة P وبذلك فإن احتمال فشلها سيكون q=1-p.

و على افتراض أن X متغير عشوائي يمثل عدد حالات النجاح لمثل تلك التجارب فإننا نحصل على قيم لهذا المتغير العشوائي X و احتمالات مناسبة له بالشكل الذي يشير إلى أن هذا المتغير هو من النوع المنفصل.

عندما يكون عدد المحاولات n مساوي للواحد $n = 1$ فإن التجربة تسمى تجربة بيرنولي، أما عندما يكون n أكبر من الواحد $n \rangle 1$ فإن التجربة تدعى بتجربة ذي الحدين ويرمز لهذا التوزيع بالرمز: $X \to B(n, p)$

حيث أن: $n \geq 1$ يمثل حجم العينة أو عدد المحاولات. وأن: $0 \leq p \leq 1$ يمثل احتمال نجاح المحاولة.

من بين تجارب توزيع ذي الحدين نذكر:

- إلقاء قطعة نقدية معدنية n مرة و المتغير العشوائي X يمثل عدد الصور F أو عدد الأرقام P الممكن الحصول عليها.

---

[1]- دلال القاضي وآخرون، مرجع سابق، ص 181.

- إختيار عدد من العناصر في صندوق به m_1 عنصر تالف و m_2 عنصر سليم مع X يمثل عدد العناصر السليمة المستخرجة.
- سحب k كرة مع الاعادة من صندوق به n كرة بيضاء و m كرة سوداء، حيث المتغير العشوائي X يمثل عدد الكرات البيضاء الممكن سحبها.

1- دالة كتلة احتمال توزيع ذي الحدين:

دالة كتلة الاحتمال للمتغير العشوائي X الذي يتوزع وفق توزيع ذي الحدين تأخذ الصيغة التالية [1]:

$$P(X = x) = \begin{cases} C_n^X p^X q^{n-X} \text{..........} \text{ ...}si\text{...}X = 0,1,\text{....}n \\ \\ 0\text{..........} \text{ ....} \text{ ....}(o/w) \end{cases}$$

حتى تكون الدالة السابقة دالة كتلة إحتمال للمتغير العشوائي لتوزيع ذي الحدين (التوزيع الثنائي) لابد من تحقق الشرطان التاليان:

$$\begin{cases} 1 / \forall \; i .. \; 0 \leq P(X = x_i) \leq 1 \\ 2 / \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1 \end{cases}$$

- **الشرط الأول**: يظهر أن الدالة $P(X = x_i)$ هي دالة غير سالبة لجميع قيم X ، أي أن الشرط الأول محقق لأن: $C_n^X \geq 0\text{.....}et\text{.....}p^X \geq 0 \Rightarrow C_n^X p^X q^{n-X} \geq 0$

- **الشرط الثاني**:

$$\sum_{X=0}^{n} P(X = x) = \sum_{X=0}^{n} C_n^X p^X q^{n-X}$$

[1] - *CANTONI . E et autres : « Maitriser l'aléatoire : exercices résolus de probabilités et statistique », Springer , France , 20 06 , P 23.*

يكتب منشور نيوتن على الصياغة التالية [1]:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^0 b^n + C_n^1 a^1 b^{n-1} + ... + C_n^n a^n b^0$$

$$(a+b)^n = \sum_{X=0}^{n} C_n^X a^X b^{n-X}$$

وبالتالي نلاحظ أنه يمكننا تطبيق هذا المنشور على قانون توزيع ذي الحدين ليصبح:

$$(p+q)^n = \sum_{X=0}^{n} C_n^X p^X q^{n-X}$$

لدينا $p+q=1$ و بالتالي يصبح: $(p+q)^n = \sum_{X=0}^{n} C_n^X p^X q^{n-X} = 1$

وعليه يكون الشرط الثاني محقق كذلك.

2-دالة تابع الاحتمال لتوزيع ذي الحدين(التوزيع الثنائي):

تكتب دالة تابع الاحتمال (دالة التوزيع التراكمي) للمتغير العشوائي X الذي يتبع توزيع ذي الحدين (الثنائي) كما يلي [2]:

$$F_X(x) = P(X \le x_i) = \sum_{X=0}^{X} C_n^X p^X q^{n-X}$$

كما يمكننا أيضا كتابتها وفق العلاقة التالية:

[1] - *CHAMOUN Chamoun : « Eléments des Statistiques et de Probabilités », OPU , Algérie , 2010 ,* P129.

[2] - عبد الحميد ربيع غيطان: " نظرية الاحتمالات " ، الجزء الثاني، دار الكتب الأكاديمية ،مصر ، 2004 ، ص 36.

$$F_X(x)=P(X\le x_i)=\begin{cases}0......................si...X\langle 0\\ \sum_{X=0}^{n-1}C_n^X p^X q^{n-X}......si...X=1,2,......n-1\\ 1......................si...X\ge n\end{cases}$$

3- التوقع الرياضي، التباين، الدالة المولدة للعزوم:

3-1- التوقع الرياضي:

إذا كان X متغير عشوائي يتوزع وفق توزيع ذي الحدين بمعلمتين n و p فإن: $E(X)=\mu=np$

$$E(X)=\sum_{X=0}^{n}X\times P(X=x)=\sum_{X=0}^{n}XC_n^X p^X q^{n-X}$$

$$E(X)=\sum_{X=0}^{n}X\times\frac{n!}{X!(n-X)!}p^X q^{n-X}=\sum_{X=0}^{n}X\times\frac{n!}{X(X-1)!(n-X)!}p^X q^{n-X}$$

$$E(X)=np\sum_{X=0}^{n}\frac{(n-1)!}{(X-1)!(n-X)!}p^{X-1}q^{n-X}$$

$$E(X)=np(p+q)^{n-1}=np$$

$$E(X)=np$$

3-2- التباين:

إذا كان X متغير عشوائي يتوزع وفق توزيع ذي الحدين بمعلمتين n و p فإن: $V(X)=npq$

$$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$E(X^2)=E[X(X-1)]+E(X)$$

$$E\left[X\left(X-1\right)\right]=\sum_{X=0}^{n} X\left(X-1\right)C_{n}^{X}\, p^{X} q^{n-X} = n(n-1)\,p^{2}\sum_{X=2}^{n} C_{n-2}^{X-2}\, p^{X-2} q^{n-X}$$

$$= n(n-1)\,p^{2}\left(p+q\right)^{n-2} = n(n-1)\,p^{2}$$

$$E(X^{2})=E\left[X\left(X-1\right)\right]+E(X)=n(n-1)p^{2}+np$$

$$V(X)=E(X^{2})-\left[E(X)\right]^{2}=n(n-1)\,p^{2}+np-\left(np\right)^{2}$$

$$=np\left[np-p+1-np\right]=np\left(1-p\right)=npq$$

$$V(X)=npq$$

3-3- الدالة المولدة للعزوم:

إذا كان X متغير عشوائي يتوزع وفق توزيع ذي الحدين بمعلمتين n و p فإن الدالة المولدة لعزوم هذا المتغير هي:

$$m_{X}(t)=E(e^{tx})=\sum_{x} e^{tx} P(X=x)=\left(q+pe^{t}\right)^{n}$$

تعطى الصياغة الرياضية للدالة المولدة لعزوم المتغير العشوائي X الذي يتبع توزيع ذي الحدين كما يلي:

$$m_{X}(t)=E(e^{tx})=\sum_{X=0}^{n} e^{tX} P(X=x)=\sum_{X=0}^{n} e^{tX} C_{n}^{X}\, p^{X} q^{n-X}$$

$$m_{X}(t)=\sum_{X=0}^{n} C_{n}^{X}\left(pe^{t}\right)^{X} q^{n-X}=\left(q+pe^{t}\right)^{n}$$

$$m_{X}(t)=\left(q+pe^{t}\right)^{n}$$

المثال رقم 3:

إذا كان 40% من المصابين بمرض كورونا يتم شفائهم، فإذا تم إختيار عينة عشوائية من 06 أشخاص يعانون من هذا المرض، فإذا اعتبرنا أن المتغير العشوائي X يمثل عدد الأشخاص الذين يتم شفائهم من هذا المرض.

- أوجد دالة هذا التوزيع.
- أوجد $P(X=1)$ و $P(1\leq X\langle 3)$.

- أوجدالتوقع الرياضي والتباين.
- أوجد الدالة المولدة للعزوم.

الحل:

بما أن التجربة تحتمل نتيجتين فقط (شفاء المريض باحتمال $p = 0.4$ أو عدم شفائه باحتمال $q = 1 - p = 0.6$) و الاختيار يكون لمجموعة عناصر فإننا نستخدم توزيع ذي الحدين، حيث:

$$X \to B(6,0.4)$$

وعليه تكون دالة كتلة الاحتمال كما يلي:

$$P(X = x) = \begin{cases} C_6^X (0.4)^X (0.6)^{6-X} .... \; ... si ... X = 0,1,.... 6 \\ \\ 0.......... \; .... \; ....(o/w) \end{cases}$$

من أجل إيجاد مثلا $X = 1$:

$$P(X = 1) = C_6^1 (0.4)^1 (0.6)^{6-1} = 0.187$$

$$P(1 \leq X \langle 3) = P(X = 1) + P(X = 2)$$
$$= C_6^1 (0.4)^1 (0.6)^{6-1} + C_6^2 (0.4)^2 (0.6)^{6-2} = 0.187 + 0.311 = 0.498$$

حساب التوقع الرياضي:

$$E(X) = np = 6 \times 0.4 = 2.4$$

حساب التباين:

$$V(X) = npq = 6 \times 0.4 \times 0.6 = 1.44$$

حساب الدالة المولدة للعزوم:

$$m_X(t) = \left(0.6 + 0.4 e^t\right)^6$$

رابعا- التوزيع فوق الهندسي The Hypergeometric Distribution:

يستخدم هذا التوزيع مع المجتمعات الصغيرة، حيث يأخذ فقط بعمليات السحب التي لا يمكننا فيها الإرجاع أو الإعادة ويطبق على مجتمع محدود يتضمن نوعين من العناصر فقط، حيث أنه يأخذ عينة ثابتة يتم إختيارها بشكل متتال و بدون إعادة و يكون الهدف من وراء هذه التجربة هو معرفة عدد عناصر أحد النوعين بالعينة التي تم اختيارها.

1- دالة كتلة احتمال التوزيع فوق الهندسي:

لو افترضنا أننا نود إيجاد عدد الوحدات المعيبة في عينة عشوائية مؤلفة من n من الوحدات المسحوبة من مجموعة من N من الوحدات المنتجة من بينها M من الوحدات المعيبة و $N - M$ من الوحدات الصالحة فإن العينة سيتم سحبها بطريقة حيث أن أي من محاولات السحب المتتابعة للوحدات المتبقية سيكون لها نفس احتمال السحب.

وبذلك فإن احتمال أن القطعة الأولى المسحوبة ستكون معيبة هو $\frac{M}{N}$ ، أما في السحبة الثانية فهو $\frac{M-1}{N-1}$ أو $\frac{M}{N-1}$ معتمدا على ما تم الحصول عليه في السحبة الأولى.

لذلك فإن المحاولات في هذه الحالة ستكون غير مستقلة عن بعضها، كما كان الحال بالنسبة لتوزيع ذي الحدين علاوة على أن توزيع ذي الحدين يستخدم في حالة السحب بالارجاع، أما لحل حالات السحب دون إرجاع فسيكون كما يلي:

عدد حالات النجاح (الحصول على قطع معيبة) x سيتم اختيارها من الوحدات المعيبة M من المجتمع بعدد من الطرق مساوي إلى C_M^x أما الفشل فهو $n - x$ ويمثل القطع غير المعيبة فسيتم اختيارها من الوحدات غير المعيبة $N - M$ من المجتمع بعدد الطرق مساوي إلى C_{N-M}^{n-x}.

ولذلك فإن كل الطرق الممكنة للسحب سواء كانت الوحدات معيبة أو صالحة فسيتم بعدد من الطرق مساوي إلى: $C_M^x\, C_{N-M}^{n-x}$ وسينسب إلى عدد الطرق الكلية C_N^n للسحب ليصبح لدينا الشكل العام للتوزيع فوق الهندسي[1] وفقا إلى:

$$P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{C_M^x\, C_{N-M}^{n-x}}{C_N^n} \ldots\ldots\ si \ldots x = 0,1,2 \ldots.., \ n \\ \\ 0 \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots(\ o/w\ ) \end{cases}$$

هذه الدالة يطلق عليها تسمية دالة كتلة احتمال التوزيع فوق الهندسي، وتكتب اختصارا:

$$X \rightarrow H\,(n; M\ ; N\ )$$

2- التوقع الرياضي وتباين التوزيع فوق الهندسي:

2-1- التوقع الرياضي:

إذا كان X متغير عشوائي يتوزع وفق التوزيع فوق الهندسي بمعلمات n ، M و N فإن:

$$E(X) = \frac{n \times M}{N}$$

$$E(X) = \sum_{X=0}^{n} X \times P(X = x) = \sum_{X=0}^{n} \frac{C_M^x C_{N-M}^{n-x}}{C_N^n} = \frac{M}{C_N^n} \sum_{X=1}^{n} C_{M-1}^{x-1} C_{N-M}^{n-x}$$

بوضع: $a = M - 1$ ، $s = n - 1$ ، $y = x - 1$

$$E(X) = \frac{M}{C_N^n} \sum_{y=0}^{n} C_a^y C_{N-a-1}^{n-x} = \frac{M}{C_N^n} C_{N-1}^n = \frac{n \times M}{N}$$

[1] - دلال القاضي وآخرون، مرجع سابق، ص ص 186 ، 187.

2-2-التباين:

إذا كان X متغير عشوائي يتوزع وفق التوزيع فوق الهندسي بمعلمات n ، M و N فإن:

$$V(X)=\left(\frac{N-n}{N-1}\right)n\times\frac{M}{N}\times\left(1-\frac{M}{N}\right)$$

$$V(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2$$

$$E(X^2)=E\left[X\left(X-1\right)\right]+E(X)$$

$$E\left[X\left(X-1\right)\right]=\sum_{X=0}^{n}X(X-1)\frac{C_M^xC_{N-m}^{n-x}}{C_N^n}=\frac{M(M-1)}{C_N^n}p^2\sum_{X=2}^{n}C_{M-2}^{x-2}C_{N-M}^{n-x}$$

$$=\frac{M(M-1)}{C_N^n}C_{N-2}^{n-2}=\frac{M(M-1)n(n-1)}{N(N-1)}$$

ومنها يتضح أن:

$$V(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2=\frac{M(M-1)n(n-1)}{N(N-1)}+\frac{nM}{N}-\frac{n^2M^2}{N^2}$$

$$=\frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}=\left(\frac{N-n}{N-1}\right)n\times\frac{M}{N}\times\left(1-\frac{M}{N}\right)$$

المثال رقم 4:

لدينا قسم به 20 طالب من الجنسين ذكور وإناث، منهم 8 طلبة ذكور والباقي طالبات، أرادت الإدارة تكوين عينة من 3 طلبة مكونة بذلك لجنة لتمثيل هذا القسم، فإذا كان X متغير عشوائي يمثل عدد الطلبة ذكور في هذه اللجنة. - أوجد دالة التوزيع الخاصة بهذا المتغير .

-أوجد إحتمال أن يكون في اللجنة طالبين من جنس ذكر.

الحل:

لدينا السحب بدون إعادة و النتيجتين إما اختيار طالب من الذكور أو طالبة أنثى وبالتالي نقوم بتطبيق قانون التوزيع فوق الهندسي.

$$P(X=x)=\begin{cases}\dfrac{C_8^x C_{12}^{3-x}}{C_{20}^3} \ldots\ldots\ si \ldots x=0;1;2;3 \\ \\ 0 \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots(o/w)\end{cases}$$

- **إحتمال أن يكون في اللجنة طالبين من جنس ذكر:**

$$P(X=2)=\frac{C_8^2 C_{12}^{3-2}}{C_{20}^3}=\frac{C_8^2 C_{12}^1}{C_{20}^3}=\frac{28\times 12}{1140}=\frac{336}{1140}=0.29$$

3- تقريب التوزيع فوق الهندسي بتوزيع ذي الحدين:

إذا كانت N كبيرة مقارنة n فإنه لايوجد فرق بين المعاينة بدون إعادة أو بالاعادة، وفي الواقع إذا كانت $N\to\infty$ و $M\to\infty$ حيث $\frac{M}{N}\to p$ فإن[1]:

$$\frac{C_M^x C_{N-M}^{n-x}}{C_N^n}\to C_n^x p^x q^{n-x}$$

بشرط $\frac{n}{N}\to 0$ وعليه فإن: $E(X)\to np$ و $V(X)\to np(1-p)$

وقد وجد أن هذا التقريب جيد عندما يكون: $N\rangle 50$ و $\frac{n}{N}\le 0.1$

[1] - علي عبد السلام العماري وعلي حسين العجيلي، مرجع سابق، ص ص 331 ، 332.

ومتى كان $\frac{n}{N}$ ليس صغيرا فإن: $V(X)=\left(\frac{N-n}{N-1}\right)np(1-p)$

المثال رقم 5:

يحتوي مستودع لتخزين قطع الغيار على 100 قطعة، 10 % من هذه القطع غير صالحة للاستخدام أي معيبة بعد عملية فحصها، نقوم بسحب 10 قطع عشوائيا من هذا المستودع.

المطلوب:

- ما قانون التوزيع الاحتمالي الخاص بهذ التجربة العشوائية مع العلم أن إهتمام سحبنا هو عدد القطع المعيبة (غير الصالحة للاستخدام) ؟

- لأي توزيع يمكننا تقريب هذا التوزيع الاحتمالي؟

- إذا كانت شروط التقريب متوفرة طبق هذا التقارب من خلال حساب إحتمال سحب 05 قطع غيار معيبة؟

الحل:

من خلال المعطيات لدينا صنفين من قطع الغيار (قطع معيبة وأخرى صالحة) وكذلك السحب بدون إرجاع و بالتالي قانون التوزيع الاحتمالي الملائم هو قانون توزيع فوق الهندسي، حيث أن عدد القطع غير الصالحة الاجمالية هو $M=NP=100\times 0.1=10$ ونكتب:

$$P(X=x)=\begin{cases}\frac{C_{10}^{x}C_{90}^{10-x}}{C_{100}^{10}}\text{.......} & si\ ...\ x=0;1;2;......\ 10\\ 0\text{..........}\ \text{..........}\ \text{..........} & ..(o/w)\end{cases}$$

نلاحظ أن: $\frac{n}{N}=\frac{10}{100}\leq 0{,}1$ و N وعليه يمكننا تقريب هذا التوزيع إلى توزيع ذي الحدين.

- إحتمال سحب 05 قطع غير صالحة:

- **التوزيع فوق الهندسي:**

$$P(X=5)=\frac{C_{10}^{5}C_{90}^{5}}{C_{100}^{10}}=0.0016$$

- **توزيع ذي الحدين:**

$$P(X=5)=C_{10}^{5}(0.1)^{5}(0.9)^{5}=0.0014$$

خامسا- التوزيع الهندسي Geometric Distribution:

يعد التوزيع الهندسي من التوزيعات المهمة في التطبيقات الاحصائية، حيث يستخدم بشكل خاص في الدراسات المتعلقة بالاحصاء السكاني، معدلات النمو، معدلات الوفيات والولادة ...إلخ.

يخص هذا التوزيع الحالات التي نود فيها الحصول على عدد من المحاولات للوصول إلى أول نجاح للمحاولة، بمعنى أن عدد المحاولات في تجربة توزيع ذي الحدين ثابت، بينما في هذا التوزيع سيكون غير محدد وبذلك فإن أو نجاح سيتم في المحاولة x مسبوقا بعدد من المحاولات الفاشلة بالعدد $x-1$ [1]، حيث أن احتمال النجاح p يبقى ثابت في كل محاولة (هنا عدد المحاولات n متغير عشوائي بينما في تجربة ذي الحدين عدد المحاولات n ثابت)، وكان المتغير العشوائي X يمثل عدد المحاولات المطلوبة لوقوع أول حالة نجاح فإن X يتوزع وفق التوزيع الهندسي. ومن الأمثلة على هذا التوزيع: إلقاء قطعة نقدية معدنية تكرارا حتى ظهور أول صورة، سحب عناصر من صندوق به قطع معيبة وأخرى صالحة بشكل متتالي ومع الإعادة حتى الحصول على أول قطعة صالحة ...إلخ.

1- دالة كتلة احتمال التوزيع الهندسي:

إذا كان X متغير عشوائي يمثل عدد المحاولات المطلوبة للحصول على أول حالة نجاح في متوالية من المحاولات المستقلة لتجربة ما وكان احتمال النجاح p ثابت من محاولة لأخرى، فإن X يتوزع وفق التوزيع الهندسي بدالة كتلة احتمال معرفة بالصيغة التالية:

$$P(X=x)=\begin{cases} pq^{x-1}..........si..x=1;2;........\infty \\ 0..............(o/w) \end{cases}$$

[1] - دلال القاضي وآخرون، مرجع سابق، ص 188.

مع $0 \langle p \langle 1$

2- التوقع الرياضي وتباين التوزيع الهندسي:

2-1- التوقع الرياضي:

إذا كان المتغير العشوائي X يتوزع وفق التوزيع الهندسي بمعلمة p فإن:

$$E(X) = \mu = \frac{1}{p}$$

$$E(X) = \sum_{X=1}^{\infty} X \times P(X = x) = \sum_{X=1}^{\infty} X \times pq^{X-1} = p\sum_{X=1}^{\infty} X \times q^{X-1}$$

لدينا العلاقة التالية: $\sum_{X=1}^{\infty} X\alpha^{X-1} = \frac{1}{(1-\alpha)^2}$

$$E(X) = p\sum_{X=1}^{\infty} X \times q^{X-1} = p\left[\frac{1}{(1-q)^2}\right] = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

2-2 التباين:

إذا كان X متغير عشوائي يتوزع وفق التوزيع الهندسي بمعلمة p فإن: $V(X) = \sigma^2 = \frac{q}{p^2}$

$$V(X) = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2$$

$$E(X^2) = E\left[X(X-1)\right] + E(X)$$

$$E\left[X(X-1)\right] = \sum_{X=2}^{\infty} X(X-1)p\ q^{X-1} = p\sum_{X=2}^{\infty} X(X-1)q^{X-1}$$

$$= pq\sum_{X=2}^{\infty} X(X-1)q^{X-2}$$

لدينا العلاقة التالية: $\sum_{X=2}^{\infty} X(X-1)\alpha^{X-2} = \frac{2}{(1-\alpha)^3}$

$$E[X(X-1)] = pq\sum_{X=2}^{\infty} X(X-1)q^{X-2} = pq\left[\frac{2}{(1-q)^3}\right] = \frac{2pq}{p^3} = \frac{2q}{p^2}$$

$$E(X^2) = E[X(X-1)] + E(X) = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{2q+p}{p^2} = \frac{2q+(1-q)}{p^2} = \frac{1+q}{p^2}$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1+q}{p^2} - \left[\frac{1}{p^2}\right] = \frac{1+q-1}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

$$V(X) = \frac{q}{p^2}$$

المثال رقم 6:

يحتوي صندوق على 3 كرات خضراء و 5 كرات حمراء، نقوم بسحب كرة واحدة مع الإعادة من هذا الصندوق. فإذا عرفنا المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد المحاولات لسحب كرة خضراء.

المطلوب: - حدد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.

- إنطلاقا من تحديد قانون التوزيع الخاص بهذا المتغير، أوجد كل من التوقع الرياضي و التباين.

الحل:

من شروط التجربة هو سحب كرة واحدة مع تسجيل إن كانت خضراء أم حمراء وهذه التجربة تشبه تجربة بيرنولي، وبما أن التجربة تتكرر عدة مرات و X متغير عشوائي يمثل عدد المحاولات لسحب كرة خضراء (هنا عدد المحاولات غير معلوم واحتمال نجاح التجربة ثابت أي احتمال الحصول على كرة خضراء $P(V) = \frac{3}{8}$ بينما احتمال الفشل هو احتمال الحصول على كرة حمراء $P(R) = \frac{5}{8}$) وعليه فإن X يتوزع وفق التوزيع الهندسي، حيث:

$$P(X=x)=\begin{cases}\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{5}{8}\right)^{x-1} \ldots\ldots\ si..x=1;2;\ldots\ldots\ \infty \\ 0\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ (o/w)\end{cases}$$

- حساب التوقع الرياضي: $E(X)=\frac{1}{p}=\frac{1}{\frac{3}{8}}=\frac{8}{3}$

- حساب التباين: $V(X)=\frac{q}{p^2}=\frac{5/8}{(3/8)^2}=\frac{5}{8}\times\frac{(8\times 8)}{9}=\frac{40}{72}\approx 0.56$

سادسا- توزيع بواسون Poisson Distribution:

يعتبر من التوزيعات المناسبة للمحاولات التي لا يكون لها حد أعلى وكذلك للحالات التي تظهر فيها الحاجة لتحديد عدد المرات أو الحالات لفترة زمنية محددة [1]، قد تكون هذه الفترة الزمنية ثانية، دقيقة، ... إلخ، كما قد يستعمل في المسائل التي قد تتعلق بحدوث ظواهر في مناطق محددة، هذه المناطق قد تكون مثلا صفحة في كتاب أو متر مربع في مساحة...إلخ. ومن الأمثلة عن تجارب توزيع بواسون مثلا عدد المكالمات الهاتفية التي تتلقاها وحدة الحماية المدنية خلال ساعة، عدد حوادث السيارات على طريق معين في يوم ما، أو عدد الأخطاء المطبعية في كتاب يحتوي على عدد من الصفحات ... إلخ.

توزيع بواسون يستخدم لوصف سلوك الأحداث النادرة بمعنى الأحداث التي تكون فيها فرصة نجاح الحدث صغيرة جدا.

1- دالة كتلة احتمال توزيع بواسون:

نقول أن للمتغير العشوائي X توزيع بواسون بمعلمة λ حيث ($0<\lambda$) إذا كانت دالة كتلته الاحتمالية تكتب كمايلي[2]:

[1] - دلال القاضي وآخرون، مرجع سابق، ص 185.

[2] - غزال عبد العزيز عامر : " الاقتصاد القياسي وتحليل السلاسل الزمنية (النظرية-الطرق-التطبيقات)"، مطابع الشرطة للطباعة والنشر والتوزيع، القاهرة، 2015، ص 257.

$$P(X=x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}.......\ si..x=0;1;2;........\\ 0..........\ ....\ ....\ (o/w)\end{cases}$$

ونكتب اختصارا: $X \rightarrow P(\lambda)$

2- التوقع الرياضي وتباين توزيع بواسون :

2-1- التوقع الرياضي:

إذا كان المتغير العشوائي X يتوزع وفق توزيع بواسون بمعلمة λ فإن: $E(X)=\mu=\lambda$

$$E(X)=\sum_{X=0}^{\infty}X\times P(X=x)=\sum_{X=0}^{\infty}X\,\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}=e^{-\lambda}\sum_{X=1}^{\infty}\frac{\lambda\lambda^{x-1}}{(x-1)!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{X=1}^{\infty}\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$

لدينا العلاقة التالية: $\sum_{X=0}^{\infty}\frac{a^{x}}{x!}=e^{a}$ و مع وضع $y=x-1$ يكون:

$$E(X)=\lambda e^{-\lambda}\sum_{X=1}^{\infty}\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{\lambda^{y}}{y!}=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda$$

2-2- التباين:

إذا كان X متغير عشوائي يتوزع وفق توزيع بواسون بمعلمة λ فإن: $V(X)=\sigma^{2}=\lambda$

$$V(X)=E(X^{2})-\left[E(X)\right]^{2}$$

$$E(X^{2})=E\left[X\left(X-1\right)\right]+E(X)$$

$$E\left[X\left(X-1\right)\right]=\sum_{X=0}^{\infty}X\,(X-1)\,\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

$$=e^{-\lambda}\sum_{X=2}^{\infty}\frac{X\,(X-1)\lambda^{2}\lambda^{x-2}}{X\,(X-1)(X-2)!}=\lambda^{2}e^{-\lambda}\sum_{X=2}^{\infty}\frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!}$$

بوضع $y=x-2$ يكون:

$$E[X(X-1)] = \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{X=2}^{\infty}\frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} = \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{\lambda^{y}}{y!} = \lambda^2 e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda^2$$

$$E(X^2) = E[X(X-1)] + E(X) = \lambda^2 + \lambda$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

2-3- الدالة المولدة للعزوم:

تعطى الصياغة الرياضية للدالة المولدة لعزوم المتغير العشوائي X الذي يتبع توزيع بواسون كما يلي:

$$m_X(t) = E(e^{tx}) = \sum_{X=0}^{\infty} e^{tx} P(X=x) = \sum_{X=0}^{\infty} e^{tx}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

$$= e^{-\lambda}\sum_{X=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^{t})^{x}}{x!} = e^{-\lambda}e^{\lambda e^{t}} = e^{\lambda(e^{t}-1)} = \exp[\lambda(e^{t}-1)]$$

المثال رقم 7:

يتلقى مركز الحجز في شركة الخطوط الجوية الجزائرية في المتوسط 300 مكالمة هاتفية خلال ساعة.

المطلوب:

- أي قانون سيتبعه المتغير العشوائي X الذي يعبر عن عدد المكالمات.
- ما إحتمال أن يتلقى المركز خلال دقيقتين ما يلي:

أ- ثلاث مكالمات.

ب- على الأكثر مكالمتين.

الحل:

من خلال المعطيات المتوفرة (عدد المكالمات خلال ساعة) فإننا سنعتمد على قانون بواسون، لأن هذا القانون يستعمل في المسائل التي تتعلق بحدوث الظواهر في الفترات الزمنية المحددة.

و قانونه يكتب كما يلي:

$$P(X=x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-300}\,300^{x}}{x!} & \text{.......}\ si..x=0;1;2;\text{........}\\ 0\text{..........} & \text{..........}\ \ \text{..........}\ \ (o/w)\end{cases}$$

- إحتمال أن يتلقى المركز خلال دقيقتين ثلاث مكالمات:

300 ــــــــــــــــ 60 د

λ ــــــــتــــــ 2 د

$$\Rightarrow \lambda=\frac{600}{60}=10$$

$$P(X=x)=\frac{e^{-10}\,10^{3}}{3!}=0.0076$$

- إحتمال أن يتلقى المركز خلال دقيقتين على الأكثر مكالمتين:

$$P(X=x)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$$

$$=\frac{e^{-10}\,10^{0}}{0!}+\frac{e^{-10}\,10^{1}}{1!}+\frac{e^{-10}\,10^{2}}{2!}=0.00269$$

3- تقريب توزيع ذي الحدين إلى توزيع بواسون:

يعتبر توزيع بواسون حالة خاصة من توزيع ذي الحدين وذلك عندما يكون إحتمال النجاح صغير جدا $(p\to 0)$ وعدد المحاولات n كبير جدا $(n\to\infty)$ حيث: $(\lambda\approx np)$ ثابتة.

فإذا كان X متغير عشوائي يتوزع وفق توزيع ذي الحدين و توفرت الشروط التالية [1]:

- عدد المحاولات n كبير جدا $(n\geq 50)$.
- إحتمال النجاح p صغير جدا $(p\leq 0.1)$.
- حاصل الضرب np أقل من 5 أي أن: $(np\leq 5)$.

إذا تحققت الشروط السابقة يمكن أن يتوزع X توزيعا قريبا من توزيع بواسون ونكتب:

$$\lambda=np\quad , \quad P(X=x)=C_n^x\,p^x q^{n-x}\cong\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

[1]- علي عبد السلام العماري، علي حسين العجيلي، مرجع سابق، ص 348.

المثال رقم 8:

تنتج آلة في مصنع معين قطع غيار منها نسبة معينة من قطع الغيار فاسدة تبلغ نسبتها 10 % من الإنتاج الكلي للآلة.

- ما إحتمال أن تكون من بين 50 قطعة منتجة 10 فاسدة وهذا بالاعتماد على تقارب التوزيعين ذي الحدين إلى توزيع بواسون.

الحل:

- **توزيع ذي الحدين:**

$$P(X=10)=C_{50}^{10}\left(0.1\right)^{10}\left(0.9\right)^{40}=0.0151$$

- **توزيع بواسون:**

شروط تقريب توزيع ذي الحدين إلى توزيع بواسون محققة وعليه يكون:

$$\left(\lambda \approx np = 50 \times 0.1 = 5\right)$$

$$P(X=10)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}=\frac{e^{-5}5^{10}}{10!}=0.0181$$

نلاحظ أن قيم الاحتمال متقاربة، لكن كلما كان إحتمال النجاح صغير جدا $(p \to 0)$ وعدد المحاولات كبير جدا $(n \to \infty)$ كان هناك تقارب في قيم الاحتمالات.

تمارين مقترحة:

التمرين الأول: نقوم برمي قطعة نقدية معدنية متجانسة مرة واحدة في تجربة عشوائية، ونعرف المتغير العشوائي X الذي يتمثل في ظهور الصورة F . **والمطلوب:**

- تحديد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير X.
- حساب التوقع الرياضي و التباين.

التمرين الثاني: في تجربة عشوائية نقوم بإلقاء قطعة نقدية معدنية غير متناظرة ثلاث مرات، حيث احتمال ظهور الصورة F هو: $P(F) = \frac{1}{4}$.

نعرف المتغير العشوائي X بعدد الصور التي يمكن الحصول عليها.

- حدد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.
- أحسب التوقع الرياضي والتباين.
- ما احتمال الحصول على صورتين على الأكثر ؟

التمرين الثالث: إذا علمت أن عشر السيارات التي ينتجها مصنع ما بها خلل، فإذا اشترى أحد معارض بيع السيارات 4 سيارات فأوجد:

- التوزيع الاحتمالي لعدد السيارات التي بها خلل.
- بفرض أن المعرض يحقق ربح مقداره 20.000 دينار جزائري عن كل سيارة سليمة وخسارة مقدارها 10.000 دينار جزائري عن كل سيارة بها خلل، فما هي القيمة المتوقعة للربح أو الخسارة ؟

التمرين الرابع: يحتوي صندوق على 3 قطع غيار معيبة و 7 قطع غيار صالحة للاستعمال (سليمة)، إذا قمنا باختيار 3 قطع غيار من الصندوق وبدون إعادة ، وكان المتغير العشوائي X يمثل عدد قطع الغيار المعيبة بالعينة التي ام اختيارها.

- حدد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X .
- أوجد الاحتمالات التالية: $P(0 \langle X \leq 2)$ ، $P(X \rangle 1)$.
- أحسب التوقع الرياضي والتباين.

التمرين الخامس: نرمي قطعة نقدية معدنية متزنة **n** مرة.

1- إذا كان $n = 1$ ، نعرف المتغير العشوائي X بالوجه الذي نحصل عليه.

ما قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X ثم أحسب $E(X^2)$.

2- نعتبر المتغير العشوائي Y الذي يمثل عدد الكتابات P التي يمكن الحصول عليها إذا كان $n = 10$.

حدد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي Y ثم أحسب: $P(Y \langle 2)$ ، $E(Y)$ و $V(Y)$

3- نعتبر المتغير العشوائي Z الذي يمثل عدد المحاولات المطلوبة لظهور الصورة لأول مرة.

ما قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي Z . ثم احسب التوقع الرياضي والتباين مع حساب الاحتمال ظهور الصورة في الرمية العاشرة.

التمرين السادس:

خلال تدريبات الطيران العسكري، صرح قائد القوات الجوية أن طائراته العسكرية تصيب النقاط المستهدفة بمعدل 5 أهداف يوميا.

نفرض أن عدد النقاط المستهدفة يوميا تتبع توزيع بواسون ، وإذا صح تصريح القائد العسكري أجب على ما يلي:

- ما احتمال إصابة هدفين على الأكثر خلال يوم ما ؟
- ما احتمال إصابة ثلاثة أهداف على الأقل خلال يومين ؟

التمرين السابع:

في تجربة عشوائية نقوم بإلقاء حجر نرد متوازن عدة مرات حتى الحصول علة وجه معين.

المطلوب:

- حدد قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.
- ما احتمال أن تحتاج إلى 4 محاولات على الأقل لظهور وجه علوي لحجر النرد يحمل الرقم 5.
- ما هو توقع عدد المحاولات وتباينها.

التمرين الثامن:

إذا كان احتمال أن يعاني شخص معين كرد فعل سيئ لإعطائه حقنة من دواء معين هو: 0.001.

المطلوب: أحسب احتمال أنه من بين 2000 شخص:

- يوجد بالضبط 3 يعانون من حقنة هذا الدواء.
- أكثر من 2 يعانون من الحقن بهذا الدواء.

الفصل الرابع:
قوانين التوزيعات الاحتمالية

تمهيد:

المتغير العشوائي المتصل هو متغير عشوائي مجموعة القيم الممكنة له عبارة عن فترة أو إتحاد عدد من الفترات، حيث أننا لا نستطيع عد تلك القيم لكن يمكن قياسها بشكل تقريبي، والاحتمال في حالة المتغير العشوائي المتصل عبارة عن مساحة تحت منحنى التوزيع الاحتمالي بين أي نقطتين، و المعروف أن المساحة فوق نقطة واحدة تساوي الصفر، وهذا يعني أن من صفات المتغير العشوائي المتصل أن احتمال مساواته لأي قيمة معينة بحد ذاتها يكون صفر، ويكون الاحتمال عبارة عن مساحة تحت منحنى المعادلة وليس بجمع النقاط لأن احتمال كل نقطة يساوي صفر.

خلال هذا الفصل والخاص بالتوزيعات الاحتمالية المتصلة سنركز على أهم التوزيعات المستخدمة في التحليل الاحصائي كالتوزيع المنتظم المتصل، التوزيع الطبيعي وهو من التوزيعات الهامة في مجال الاحصاء الاستدلالي، وكل من دوال بيتا وقاما الهامتين واللتان تستخدمان في مجموعة من التوزيعات مثل توزيع كاي- مربع وتوزيع فيشر و توزيع ستيودنت، وسنقوم بتوضيح كيفية استخراج كل من التوقع الرياضي وتباين كل توزيع من التوزيعات السابقة والدالة المولدة للعزوم إن وجدت.

أولا- التوزيع المنتظم المتصل (المستمر):

1- دالة كتلة احتمال التوزيع المنتظم المتصل:

إذا كان X متغير عشوائي معرف على المجال $[a,b]$ فإن دالة كثافته الاحتمالية تكون على الصيغة التالية[1]:

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}\text{.........}\ si\ldots a\le x\le b\\ 0\text{..........}\ \text{........}(\ o/w)\end{cases}$$

وعليه نقول أن المتغير العشوائي X يتوزع وفق التوزيع المنتظم بمعلمتين a و b ويرمز لذلك اختصارا بالرمز:

$$X\rightarrow U[a,b]$$

2- دالة التوزيع التراكمي للتوزيع المنتظم المتصل:

تعطى دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي X الذي يتبع التوزيع المنتظم المتصل كمايلي[2]:

$$F_X(x)=\begin{cases}0\text{..........}\ \text{.....}\ si\ldots x\langle a\\ \dfrac{x-a}{b-a}\text{........}\ si\ldots a\le x\le b\\ 1\text{..........}\ \text{.....}\ si\ldots x\ge b\end{cases}$$

3- التوقع الرياضي، التباين والدالة المولدة لعزوم التوزيع المنتظم المتصل:

3-1- التوقع الرياضي:

إذا كان X متغير عشوائي يتبع التوزيع المنتظم المتصل بمعلمتين a و b فإن: $E(X)=\dfrac{a+b}{2}$

---

[1] - غزال عبد العزيز عامر ، مرجع سابق، ص279.

[2] - غزال عبد العزيز عامر، مرجع سابق، ص279.

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} Xf_X(x)dx=\int_a^b X\times\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\left[\frac{X^2}{2}\right]_a^b$$

$$=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2}$$

$$E(X)=\frac{a+b}{2}$$

3-2- التباين:

إذا كان X متغير عشوائي يتوزع وفق التوزيع المنتظم المتصل بمعلمتين a و b فإن:

$$V(X)=\frac{(a-b)^2}{12}$$

$$V(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} Xf_X(x)dx=\int_a^b X^2\left(\frac{1}{b-a}\right)dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b X^2dx=\frac{1}{b-a}\left[\frac{X^3}{3}\right]_a^b$$

$$=\frac{1}{b-a}\left(\frac{b^3-a^3}{3}\right)=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}=\frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$V(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2=\frac{a^2+ab+b^2}{3}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$=\frac{4a^2+4ab+4b^2-3a^2-6ab-3b^2}{12}=\frac{(a-b)^2}{12}$$

3-3- الدالة المولدة للعزوم:

تستخرج الصياغة الرياضية للدالة المولدة لعزوم ا لمتغير العشوائي الذي يتبع التوزيع المنتظم المتصل كمايلي:

$$m_X(t)=E(e^{tx})=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{tx}f_X(x)dx=\int_a^b e^{tx}\left(\frac{1}{b-a}\right)dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b e^{tx}dx$$

$$=\frac{1}{b-a}\left[\frac{e^{tx}}{t}\right]_a^b=\frac{1}{b-a}\left(\frac{e^{bt}-e^{at}}{t}\right)=\frac{e^{bt}-e^{at}}{t(b-a)}\text{.........}\ t\rangle 0$$

المثال رقم 1 :

ليكن المتغير العشوائي X الذي يتبع التوزيع المنتظم المتصل، حيث: $-2\le x\le 2$

المطلوب:

- أكتب دالة كتلة الاحتمال، ثم أحسب التوقع الرياضي، التباين مع تحديد الدالة المولدة للعزوم.

- حساب الاحتمال التالي: $P(X\langle 1)$ ؟

الحل:

دالة كتلة احتمال التوزيع المنتظم المتصل:

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}\text{.........}\ si\text{...}-2\le x\le 2\\ 0\text{..........}\ \text{........}(\ o/w)\end{cases}$$

$$E(X)=\frac{a+b}{2}=\frac{2-2}{2}=0$$

$$V(X)=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{(-2-2)^2}{12}=\frac{16}{12}=\frac{4}{3}$$

$$m_X(t)=E(e^{tx})=\frac{e^{bt}-e^{at}}{t(b-a)}=\frac{e^{2t}-e^{-2t}}{t(2+2)}=\frac{e^{2t}-e^{-2t}}{4t}\text{.........}\ t\rangle 0$$

$$P(X \langle 1) = \int_{-2}^{1} \frac{1}{4} dx = \left[\frac{X}{4} \right]_{-2}^{1} = \frac{1}{4} - \left(\frac{-2}{4} \right) = \frac{3}{4}$$

ثانيا- التوزيع الطبيعي The Normal Distribution:

التوزيع الطبيعي هو من أهم التوزيعات الاحتمالية، فهو يمثل أغلب الظواهر الطبيعية والاقتصادية وغيرها ويرجع ذلك للأسباب التالية[1]:

- العديد من الظواهر التي تظهر في التجارب العملية تتوزع توزيعا طبيعيا.
- تتقارب التوزيعات سواء كانت منفصلة أو متصلة من التوزيع الطبيعي.

1- دالة كتلة احتمال التوزيع الطبيعي:

إذا كان X متغير عشوائي يتوزع وفق التوزيع الطبيعي فإن دالة كثافة احتماله لها الصيغة التالية [2]:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$$

حيث : X متغير عشوائي حقيقي $-\infty \langle X \langle +\infty$

e هو الأساس اللوغارتمي الطبيعي $e = 2.718$

π هو مقدار ثابت $\pi = 3.1416$

σ هو الانحراف المعياري و هو قيمة موجبة.

و منه نقول أن الدالة السابقة هي دالة كثافة احتمال المتغير العشوائي X الخاضع للتوزيع الطبيعي على أساس القيمتين $(\mu;\sigma)$ و نكتب اختصارا : $X \rightarrow N(\mu;\sigma^2)$

---

[1] - علي عبد السلام العماري، علي حسين العجيلي، مرجع سابق، ص 359.

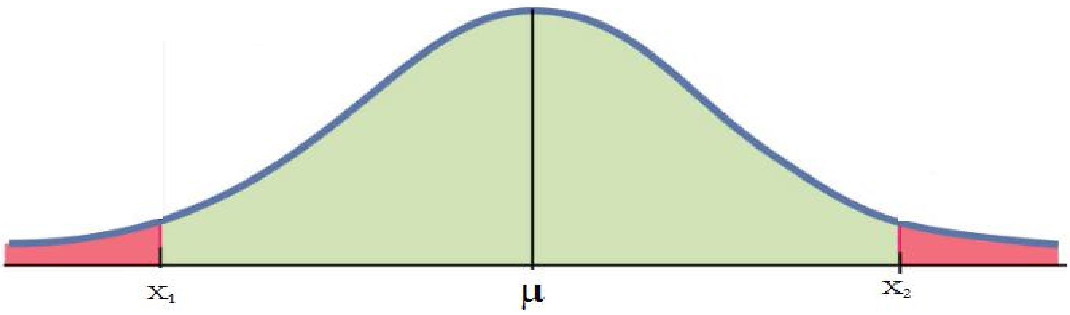
[2] - دومينيك سالفاتور: " الإحصاء و الاقتصاد القياسي "، ترجمة سعدية حافظ منتصر، الدار الدولية للنشر والتوزيع، القاهرة، 2011، ص 65.

- **التمثيل البياني لدالة كثافة احتمال التوزيع الطبيعي:**

منحنى التوزيع الطبيعي ناقوس الشكل ومتماثل حول المتوسط ويمتد طرفاه إلى مالا نهاية من الجانبين دون أن يلامسا المحور الأفقي، وبالتحديد إن تمثيل دالة كثافة الاحتمال متماثل حول $(X = \mu)$ أي أن:

$$f(\mu - X) = f(\mu + X)$$

وهذا يعني أن المتوسط يساوي المنوال ونقطتي الانقلاب في منحنى الدالة هما $(X_1 = \mu - \sigma)$ و $(X_2 = \mu + \sigma)$ وأنهما يقعان على بعد ثابت على يمين ويسار المنوال.



2-التوقع الرياضي، التباين والدالة المولدة لعزوم التوزيع الطبيعي:

2-1- التوقع الرياضي:

إذا كان X متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي بمعلمتين μ و σ^2 فإن: $E(X) = \mu$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} X f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} X \times \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(X-\mu)^2} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{X}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

بوضع: $Y = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ نجد:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma Y+\mu)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{Y^2}{2}}dy$$

$$=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}Ye^{-\frac{Y^2}{2}}dy+\mu\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{Y^2}{2}}dy$$

لدينا[1]: $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{Y^2}{2}}dy=1\Rightarrow\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{Y^2}{2}}dy=\sqrt{2\pi}$

الدالة $g(Y)=Ye^{-\frac{Y^2}{2}}$ دالة فردية أي أن: $g(-Y)=-g(Y)$ وعليه فإن:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}Ye^{-\frac{Y^2}{2}}dy=0$$

نجد: $E(X)=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\times 0+\mu\times 1=\mu$

2-2- التباين:

إذا كان X متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي بمعلمتين μ و σ^2 فإن: $V(X)=\sigma^2$

$$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}X^2 f_X(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}X^2\times\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(X-\mu)^2}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{X^2}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

بوضع: $Y=\frac{X-\mu}{\sigma}$ نجد:

[1] - جبار عبد مضحي: " مقدمة في نظرية الاحتمالات"، دار المسيرة للنشر والتوزيع، عمان الأردن، 2011، ص 162.

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma Y+\mu)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{Y^2}{2}}dy$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}Y^2e^{-\frac{Y^2}{2}}dy+2\mu\sigma\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}Ye^{-\frac{Y^2}{2}}dy+\mu^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{Y^2}{2}}dy$$

وحيث أن: $\int_{-\infty}^{+\infty}Ye^{-\frac{Y^2}{2}}dy=0$ و $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{Y^2}{2}}dy=1$

وبالتالي:

$$E(X^2)=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}Y^2e^{-\frac{Y^2}{2}}dy+2\mu\sigma\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}Ye^{-\frac{Y^2}{2}}dy+\mu^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{Y^2}{2}}dy$$

$$=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}Y^2e^{-\frac{Y^2}{2}}dy+2\mu\sigma\times(0)+\mu^2\times(1)=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}Y^2e^{-\frac{Y^2}{2}}dy+\mu^2$$

بوضع: $\mu=Y$ و $dv=Ye^{-\frac{Y^2}{2}}dy$ نجد أن: $v=-e^{-\frac{Y^2}{2}}$ و $d\mu=dY$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}Y^2e^{-\frac{Y^2}{2}}dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-Ye^{-\frac{Y^2}{2}}\right]_{-\infty}^{+\infty}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{Y^2}{2}}dy=0+1=1$$

ومنها نجد:

$$E(X^2)=\sigma^2+\mu^2$$

وعليه فإن:

$$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\sigma^2+\mu^2-\mu^2=\sigma^2$$

2-3- الدالة المولدة للعزوم:

تستخرج الصياغة الرياضية للدالة المولدة لعزوم المتغير العشوائي الذي يتبع التوزيع الطبيعي كما يلي:

$$m_X(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{X}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left[tx - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]} dx$$

بإكمال المربع داخل القوس نحصل على:

$$tx - \frac{(x-\mu)^2}{\sqrt{2\pi}} = \mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2} - \frac{\left[x - (\mu + \sigma^2 t)\right]^2}{2\sigma^2}$$

وعليه فإن: $m_X(t) = ce^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$

حيث: $c = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[x-(\mu+\sigma^2 t)\right]^2} dx$

ومن الحقيقة أن: $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$

وعليه فإن الدالة المولدة للعزوم للتوزيع الطبيعي لها الصيغة التالية:

$$m_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} \;..........\;....\; -\infty \langle\, t \langle +\infty$$

ثالثا- التوزيع الطبيعي المعياري:

إن إيجاد الدالة الأصلية للدالة $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$ صعب جدا ولذلك غالبا ما يتم الاعتماد على النشر المحدود لسلسلة تايلور في جوار نقط متتالية، ولأجل ذلك تم وضع جداول خاصة بقيم التوزيع الطبيعي بعد معرفة قيم المعلمتين μ و σ اللذان يختلفان ويتغيران من متغير عشوائي لآخر، وهذا شبه مستحيل لأنه يجب علينا تكوين ما لانهاية من الجداول حسب قيم μ و σ، ولهذا أختيرت قيمتين وحيدتين لـ: μ و σ حيث $\mu = 0$ و $\sigma = 1$ لتعويض جميع المتغيرات العشوائية إلى متغير عشوائي واحد ذو متوسط $\mu = 0$ و إنحراف معياري $\sigma = 1$ وبالتالي يمكن تلخيص كل الجداول في جدول واحد للتوزيع الطبيعي والذي يتم من خلاله حساب جميع الاحتمالات الممكنة.

1- دالة كثافة احتمال التوزيع الطبيعي المعياري:

عندما يكون متوسط التوزيع الطبيعي يساوي الصفر وتباينه يساوي الواحد فإنه يسمى التوزيع الطبيعي المعياري، وعادة يرمز لدالة كثافة احتمال التوزيع الطبيعي المعياري بالرمز ϕ ولدالة التوزيع التراكمي بالرمز Φ [1].

تعرف القيمة المعيارية والتي يرمز لها بالرمز Z على أنها[2]: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

وبذلك فإن Z تتوزع توزيعا طبيعيا معياريا، إذا كان X يتوزع توزيعا طبيعيا بالوسط μ والتباين σ^2 أي أن الانحراف المعياري σ ونكتب عندئذ: $Z \to N(0,1)$

وعليه فإن دالة كثافة احتمال المتغير العشوائي الطبيعي المعياري تعطى كما يلي:

$$\phi(Z) = f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}} .... \quad ... -\infty \langle Z \langle +\infty$$

[1] - علي عبد السلام العماري، علي حسين العجيلي، مرجع سابق، ص 366.

[2] - دلال القاضي وآخرون، مرجع سابق، ص 192.

2- التوقع الرياضي وتباين التوزيع الطبيعي المعياري:

2-1- التوقع الرياضي:

تستخرج الصياغة الرياضية للتوقع الرياضي للمتغير العشوائي الذي يتبع التوزيع الطبيعي المعياري كما يلي:

لدينا $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ إذن:

$$E(Z) = E\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma} E\left(X - \mu\right) = \frac{1}{\sigma}\left[E(X) - \mu\right]$$

$$= \frac{1}{\sigma}\left[\mu - \mu\right] = 0$$

2-2- التباين:

تستخرج الصياغة الرياضية للتوقع الرياضي للمتغير العشوائي الذي يتبع التوزيع الطبيعي المعياري كما يلي:

لدينا $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ إذن:

$$V(Z) = V\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2} V\left(X - \mu\right) = \frac{1}{\sigma^2}\left[V(X)\right]$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\left[\sigma^2\right] = 1$$

المثال رقم 2:

إذا علمت أن فترة حياة جهاز الحاسوب يخضع لتوزيع طبيعي بمتوسط $\mu = 12$ سنة و إنحراف معياري $\sigma = 2,4$ سنوات.

- ما إحتمال أن يصل عمر الجهاز مدة 16 سنة ؟
- ما إحتمال أن تكون مدة حياة هذا الجهاز مابين 14 و 17 سنة ؟
- ما إحتمال أن تكون مدة حياة هذا الجهاز مابين 6 و 8 سنوات ؟

الحل:

إحتمال أن يصل عمر الجهاز 16 سنة:

$$P(X \le 16) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{16-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \le \frac{16-12}{2,4}\right)$$

$$P(Z \le 1.67) = \Phi(1.67)$$

بعدها نقوم بإستخراج $\Phi(1.67)$ من جدول التوزيع الطبيعي المعياري وفق الجدول التالي:

Tables of the Normal Distribution

Probability Content from -oo to Z

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
[illegible]	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	[illegible]	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
[illegible]	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	[illegible]	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
[illegible]	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	[illegible]	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
[illegible]	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	[illegible]	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
[illegible]	[illegible]	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
[illegible]	[illegible]	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

إذن: $P(X \le 16) = P(Z \le 1.67) = \Phi(1.67) = 0.9525$

إحتمال أن يتراوح عمر الجهاز ما بين 14 و 17 سنة:

$$P(14 \le X \le 17) = P\left(\frac{14-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{17-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(\frac{14-12}{2,4} \le Z \le \frac{17-12}{2,4}\right) = P(0,83 \le Z \le 2,08)$$

$$= \Phi(2,08) - \Phi(0,83) = 0,9812 - 0,7967 = 0,1845$$

إحتمال أن يتراوح عمر الجهاز ما بين 6 و 8 سنوات:

$$P(6 \leq X \leq 8) = P\left(\frac{6-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{8-\mu}{\sigma}\right)$$
$$= P\left(\frac{6-12}{2,4} \leq Z \leq \frac{8-12}{2,4}\right) = P(-2,5 \leq Z \leq -1,67)$$
$$= \Phi(-1,67) - \Phi(-2,5) = (1-0,9525) - (1-0.9938) = 0,0413$$

لأن: $\Phi(-1) = 1 - \Phi(1)$

3-تقريب توزيع ذي الحدين باستخدام التوزيع الطبيعي:

خلال عرضنا لقانون توزيع ذي الحدين أشرنا إلى أنه عندما يكون عدد المحاولات n كبير نجد أن حساب الاحتمال باستخدام دالة كثافة الاحتمال يكون معقد وغير عملي، ولتفادي هذه الصعوبة يمكن إستخدام التوزيع الطبيعي للحصول على قيم تقريبية لتلك الاحتمالات، حيث يكون هذا التقريب جيد عندما يكون $n \rangle 20$ و $np \geq 5$ وبالتالي $np \rangle 5$[1]، غير أنه كلما كانت قيمة P قريبة من الصفر أو الواحد فإن هذا التقريب يكون غير جيد مهما كانت قيمة n .

- **قاعدة التقريب:**

إذا كان المتغير العشوائي X يخضع لتوزيع ذي الحدين بمعلمتين n و p ، حيث $n \rangle 20$ و $np \geq 5$ فيمكننا تقريب هذا التوزيع بالتوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu = np$ وتباين $\sigma^2 = npq$

لكن بما أن التوزيع الطبيعي توزيع متصل وتوزيع ذي الحدين توزيع منفصل وجد العالم ياتس (Yates) أن التقريب يكون أكثر دقة و واقعية إذا أجري تصحيح للقيمة X من خلال إضافة أو طرح القيمة (0.5) وتسمى هذه القيمة بمعامل التصحيح ونكتب[2]:

إذا كان لدينا العددان a و b فإن:

---

[1]- علي عبد السلام العماري، علي حسين العجيلي، مرجع سابق، ص ص378، 379.

[2] - محمد صبحي أبو صالح: " مبادئ الاحصاء"،دار اليازوري، الأردن، 2000، ص 237.

$$P(a \le X \le b) = P(a - 0.5 \le Y \le b + 0.5)$$
$$= P\left(\frac{(a - 0.5) - np}{\sqrt{npq}} \le Z \le \frac{(b + 0.5) - np}{\sqrt{npq}}\right)$$
$$= \Phi\left[\frac{(b + 0.5) - np}{\sqrt{npq}}\right] - \Phi\left[\frac{(a - 0.5) - np}{\sqrt{npq}}\right]$$

المثال رقم 3:

في تجربة إلقاء قطعة نقدية معدنية متكاملة التوازن 10 مرات، نعرف المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الصور في هذه التجربة.

المطلوب: ما إحتمال الحصول على ما بين 6 و 8 صور وهذا بإستخدام التوزيع ذي الحدين، وتقريبه بالتوزيع الطبيعي؟

الحل:

- **حساب الاحتمال** $P(6 \le X \le 8)$ **بواسطة توزيع ذي الحدين:**

$$P(6 \le X \le 8) = P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8)$$
$$= C_{10}^{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{4} + C_{10}^{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{3} + C_{10}^{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}$$
$$= 0.205 + 0.117 + 0.044 = 0.366$$

- **حساب الاحتمال** $P(6 \le X \le 8)$ **بواسطة التقريب إلى التوزيع الطبيعي**:

عند التقريب بالتوزيع الطبيعي يجب أن نبدأ من 5.5 و حتى 8.5 أي أنها تقرب بالاحتمال $P(5.5 \le X \le 8.5)$ حيث X هنا يخضع للتوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu = np = 10 \times \frac{1}{2} = 5$ و تباين $\sigma^2 = npq = 10 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 2.5$ وعليه يكون:

$$P(6 \leq X \leq 8) = P(6 - 0.5 \leq Y \leq 8 + 0.5)$$
$$= P(\frac{(5.5) - (10 \times 0.5)}{\sqrt{10 \times 0.5 \times 0.5}} \leq Z \leq \frac{(8.5) - (10 \times 0.5)}{\sqrt{10 \times 0.5 \times 0.5}})$$
$$= \Phi\left[\frac{(8.5) - 5}{\sqrt{2.5}}\right] - \Phi\left[\frac{(5.5) - 5}{\sqrt{2.5}}\right] = \Phi(2.22) - \Phi(0.32)$$
$$= 0.9868 - 0.6217 = 0.3651$$

نلاحظ أن الفرق بين الإجابتين هو: 0.001 تقريبا، وهذا يعني مطابقة المنحنى الطبيعي على المدرج الاحتمالي لذي الحدين كان جيدا، كما أن الدقة تزداد في المطابقة كلما كانت n كبيرة وكانت قيمة الاحتمال p قريبة من 0.5.

رابعا- دوال التوزيعات بيتا (Betta) وقاما (Gamma):

تعتبر الدالتان بيتا و قاما دالتان هامتان، حيث تلعبان دور كبير في التعريف بالتوزيعات الاحتمالية المتصلة الباقية مثل توزيع كاي مربع χ^2 و توزيع ستودنت t و توزيع فيشر F.

1- دالة بيتا الرياضية:

تعرف دالة بيتا الرياضية وفق الصياغة الرياضية التالية[1]:

$$\beta(a;b) = \int_0^1 X^{a-1}(1 - X)^{b-1}dx$$

هذه الدالة معرفة بالوسطين $(a;b)$ وتكامل هذه الدالة تقاربي حيث $(a;b)$ عددان موجبان.

1-1- خواص دالة بيتا الرياضية:

- الدالة بيتا متناظرة بالنسبة للوسطين $(a;b)$ وبالتالي : $\beta(a;b) = \beta(b;a)$
- $\beta\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right) = \pi$

[1] - غزال عبد العزيز عامر ، مرجع سابق، ص ص 282، 284.

- علاقة الدالة بيتا بالدالة قاما هي: $\beta(a;b)=\dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$

1-2- دالة توزيع بيتا:

نقول عن X أنه متغير عشوائي يخضع لتوزيع بيتا إذا كانت دالة كثافة الاحتماله تكتب بالشكل التالي[1]:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta(a;b)}X^{a-1}(1-X)^{b-1}..........si...X\in[0;1]\\ 0..........\,..........\,..........\,..........\,...(o/w)\end{cases}$$

1-3- التوقع الرياضي وتباين توزيع بيتا:

- **التوقع الرياضي:**

تستخرج الصياغة الرياضية للتوقع الرياضي للمتغير العشوائي الذي يتبع توزيع بيتا كما يلي:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}Xf_X(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}X\frac{1}{\beta(a;b)}X^{a-1}(1-X)^{b-1}dx$$

$$=\int_0^1 X\frac{1}{\beta(a;b)}X^{a-1}(1-X)^{b-1}dx=\int_0^1\frac{1}{\beta(a;b)}X^{a}(1-X)^{b-1}dx$$

لدينا: $\beta(a;b)=\int_0^1 X^{a-1}(1-X)^{b-1}dx$

و لدينا: $\beta(a+1;b)=\int_0^1 X^{a}(1-X)^{b-1}dx$

$$E(X)=\frac{1}{\beta(a;b)}\beta(a+1;b)=\frac{\beta(a+1;b)}{\beta(a;b)}$$

[1] - *K.Redjdal : « Cours de Probabilités », OPU , Algérie , 2004 , P 210.*

ومن خواص دالتي قاما وبيتا وهي:

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \quad \text{و} \quad \beta(a;b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

نجد:

$$E(X) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \times \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b+1)}$$

$$= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \times \frac{a\Gamma(a)\Gamma(b)}{(a+b)\Gamma(a+b)} = \frac{a}{a+b}$$

- **التباين:**

تستخرج الصياغة الرياضية لتباين المتغير العشوائي الذي يتبع توزيع بيتا كما يلي:

$$V(X) = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2$$

$$V(X) = \int_0^1 X^2 \frac{1}{\beta(a;b)} X^{a-1}(1-x)^{b-1}dx - \left(\frac{a}{a+b}\right)^2$$

نتبع نفس طريقة حساب التوقع الرياضي لنصل في الأخير إلى أن التباين هو:

$$V(X) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$$

2- دالة قاما الرياضية:

تعرف دالة قاما الرياضية وفق الصياغة الرياضية التالية[1]:

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} X^{n-1}e^{-X}dx \,..........\quad .et\,...\,n \rangle 0$$

[1]- غزال عبد العزيز عامر ، مرجع سابق، ص 282.

حيث وسيط هذه الدالة هو n وهو عدد موجب.

2-1- خواص دالة قاما الرياضية:

- إذا كان $n \rangle 1$ فإن:

- $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$
- $\Gamma(n+1) = n!$

- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi$

2-2- دالة توزيع قاما:

نقول عن X أنه متغير عشوائي يخضع لتوزيع Γ إذا كانت دالة كثافة احتماله معطاة بالشكل التالي[1]:

$$f(x) = G(n) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n)} e^{-X} X^{n-1} .... si ... X \rangle 0 \\ 0 .... si ... X \leq 0 \end{cases}$$

2-3- التوقع الرياضي، التباين والدالة المولدة لعزوم توزيع قاما:

- **التوقع الرياضي:**

تستخرج الصياغة الرياضية للتوقع الرياضي للمتغير العشوائي الذي يتبع توزيع قاما كما يلي:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} X f_X(x) dx = \int_0^{+\infty} X \frac{1}{\Gamma(n)} e^{-X} X^{n-1} dx = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{+\infty} e^{-X} X^{n} dx$$

لدينا:

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} e^{-X} X^{n-1} dx \Rightarrow \Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} e^{-X} X^{n} dx$$

[1]- عبد الحميد ربيع غيطان: " نظرية الاحتمالات "، الجزء الثاني، دار الكتب الأكاديمية، مصر ، 2004 ، ص94.

إذن:

$$E(X) = \frac{1}{\Gamma(n)}\Gamma(n+1) = \frac{n\Gamma(n)}{\Gamma(n)} = n$$

$$E(X) = n$$

- **التباين:**

تستخرج الصياغة الرياضية لتباين المتغير العشوائي الذي يتبع توزيع قاما كما يلي:

$$V(X) = E(X-\mu)^2 = E(X^2) - \left[E(\mu)\right]^2$$

$$V(X) = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^{+\infty} X^2 e^{-X} X^{n-1} dx - (n)^2 = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^{+\infty} e^{-X} X^{n+1} dx - n^2$$

ونواصل في العمليات الحسابية لنصل إلى:

$$V(X) = n$$

- **الدالة المولدة للعزوم:**

تستخرج الدالة المولدة للعزوم وفق الطريقة التالية:

$$m_X(t) = E(e^{tX}) = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^{+\infty} e^{tX} e^{-X} X^{n-1} dx = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^{+\infty} X^{n-1} e^{-X(1-t)} dx$$

نضع: $Y = X(1-t) \Rightarrow X = \dfrac{Y}{1-t}$

$$m_X(t)=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^{+\infty}\left(\frac{Y}{1-t}\right)^{n-1}e^{-Y}\frac{1}{1-t}dx=\frac{1}{(1-t)^n\Gamma(n)}\int_0^{+\infty}Y^{n-1}e^{-Y}dy$$

$$=\frac{1}{(1-t)^n\Gamma(n)}\Gamma(n)=\frac{1}{(1-t)^n}$$

$$m_X(t)=\frac{1}{(1-t)^n}$$

خامسا- توزيع كاي مربع (Ch~2) (χ^2):

يعد توزيع كاي مربع من بين أهم التوزيعات الاحتمالية المتصلة، والتي تستعمل بشكل خاص في تطبيقات مجال الاحصاء الاستنتاجي، كاختبارات جودة المطابقة والتجانس والاستقلالية والتباين وغيرها[1].

1- دالة كثافة احتمال توزيع كاي مربع (χ^2):

تعطى دالة كثافة احتمال توزيع كاي مربع χ^2 ذو المتغير العشوائي X كمايلي[2]:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}e^{-\frac{X}{2}}X^{\frac{n}{2}-1}\text{..........} si\ldots X\rangle 0\\ 0\text{.......... ....}si\ldots X\le 0\end{cases}$$

حيث : n عدد صحيح موجب يمثل عدد درجات الحرية.

e هو مقدار ثابت يمثل أساس اللوغاريتم الطبيعي و هو يقارب 2.7182

Γ هو دالة قاما الرياضية.

[1]- علي عبد السلام العماري، علي حسين العجيلي، مرجع سابق، ص387.

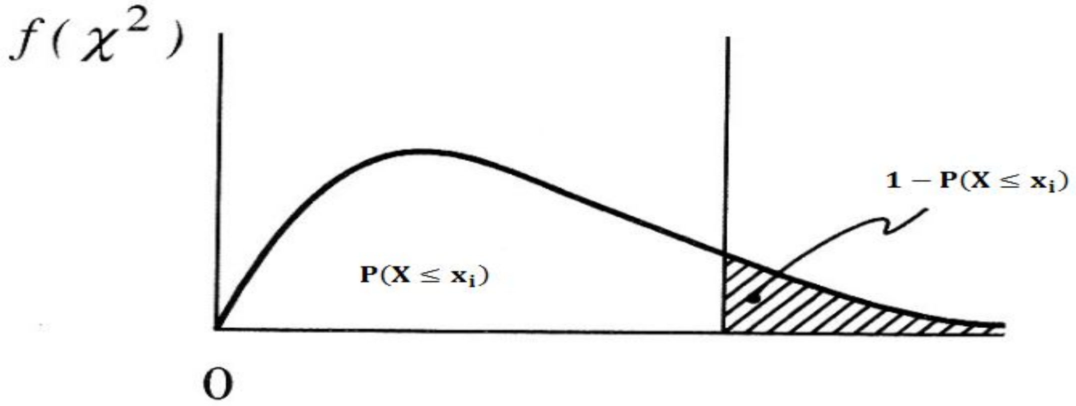
[2] - *KHALDI Khaled : « Probabilités », OPU , Algérie , 2005 , P 72.*

2- دالة التوزيع التراكمي لتوزيع كاي مربع (χ^2):

تعرف دالة التوزيع التراكمي لتوزيع كاي مربع χ^2 كمايلي:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_0^X f(x)dx = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^X e^{-\frac{X}{2}} X^{\frac{n}{2}-1}dx$$

ويعكس هذا الاحتمال المسافة الإجمالية المتواجدة بين خط منحنى دالة كثافة الاحتمال ومحور الفواصل، من النقطة $x = 0$ إلى غاية القيمة X وفق الشكل التالي:



3- التوقع الرياضي، التباين والدالة المولدة لعزوم توزيع كاي مربع:

- **التوقع الرياضي:**

تستخرج الصياغة الرياضية للتوقع الرياضي للمتغير العشوائي الذي يتبع توزيع كاي- مربع كما يلي:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} Xf_X(x)dx = \int_0^{+\infty} X\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}e^{-\frac{X}{2}}X^{\frac{n}{2}-1}dx$$

نتبع نفس الخطوات المستخدمة في توزيع قاما لنصل إلى أن التوقع الرياضي يكتب بالصياغة التالية:

$$E(X) = 0$$

- **التباين:**

تستخرج الصياغة الرياضية لتباين المتغير العشوائي الذي يتبع توزيع كاي- مربع كما يلي:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$V(X) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{+\infty} X^2 e^{-\frac{X}{2}} X^{\frac{n}{2}-1} dx - n^2$$

ونتبع نفس الخطوات المستخدمة في توزيع قاما لنصل إلى أن التباين يكتب بالصياغة التالية:

$$V(X) = 2n$$

- **الدالة المولدة للعزوم:**

تستخرج الصياغة الرياضية للدالة المولدة لعزوم المتغير العشوائي الذي يتبع توزيع كاي- مربع كما يلي:

$$m_X(t) = E(e^{tX}) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{+\infty} e^{tX} e^{-\frac{X}{2}} X^{\frac{n}{2}-1} dx$$

نتبع نفس الخطوات المستخدمة في توزيع قاما لنصل إلى أن الدالة المولدة للعزوم تكتب بالصياغة التالية:

$$m_X(t) = \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{\frac{n}{2}}$$

4- تقريب توزيع مربع-كاي إلى التوزيع الطبيعي المعياري:

عندما تؤول n إلى مالانهاية $n \to \infty$ فإنه يمكن تحويل أو تقريب توزيع مربع-كاي وفق متغيره الجديد $\frac{\chi_n^2 - n}{\sqrt{2n}}$ إلى التوزيع الطبيعي المعياري $N(0;1)$ ، ونكتب أن دالة التوزيع الاحتمالي للتوزيعين متساوية ونكتبها كمايلي [1]:

---

[1]- عبد الحميد ربيع غيطان، مرجع سابق ، ص 164.

$$F_{\chi_n^2}(X) \cong F_n\left(\frac{X-n}{\sqrt{2n}}\right)$$

المثال رقم 4:

إذا كان X متغير عشوائي يتبع توزيع كاي- مربع بالدرجة الحرية المعطاة.

- أوجد $\chi^2_{(0.01;5)}$.
- أوجد $P\left(\chi^2_{(13)} \langle 9.926\right)$.
- أوجد $P\left(\chi^2_{(28)} \leq -10\right)$.
- أوجد $P\left(\chi^2_{(21)} \geq 13.240\right)$.

من جدول توزيع كاي- مربع المبين كالآتي نقوم بإستخراج القيم:

n \ p	0.90	0.80	0.70	0.50	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01
1	0,0158	0,0642	0,148	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635
2	0,211	0,446	0,713	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210
3	0,584	1,005	1,424	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,341
4	1,064	1,649	2,195	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277
5	1,610	2,343	3,000	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086
13	7,042	8,634	9,926	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688
14	7,790	9,467	10,821	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141
20	12,443	14,578	16,266	19,337	22,775	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566
21	13,240	15,445	17,182	20,337	23,858	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932
22	14,041	16,314	18,101	21,337	24,939	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289

- $\chi^2_{(0.01;5)} = 15.086$
- $P\left(\chi^2_{(13)} \langle 9.926\right) = 1 - P\left(\chi^2_{(13)} \geq 9.926\right) = 1 - 0.7 = 0.3$
- $P\left(\chi^2_{(28)} \leq -10\right) = 0 \Rightarrow X \in [0;+\infty[$
- $P\left(\chi^2_{(21)} \geq 13.240\right) = 0.9$

سادسا- توزيع ستودنت:

أشتق توزيع ستودنت t من التوزيعين كاي- مربع و التوزيع الطبيعي، حيث إذا كان لدينا متغيرين عشوائيين X و Y مستقلين، حيث X متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي المعياري $N(0;1)$ و Y متغير عشوائي يتبع توزيع كاي– مربع $\chi^2_{(n)}$ ، فإن المتغير العشوائي T الممثل لهذين المتغيرين هو: $T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$ يتبع هذا المتغير توزيع ستودنت بدرجة حرية n ونكتب:

$$T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \to t_{(n)}$$

1- دالة كثافة احتمال توزيع ستودنت:

تعطى دالة كثافة احتمال توزيع ستودنت ذو المتغير العشوائي T كما يلي[1]:

$$f(T) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{T^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \ldots\ldots\ldots\ldots T \in \Re$$

حيث : π هي قيمة ثابتة $(\pi = 3.1416)$

n عدد صحيح موجب.

Γ دالة توزيع قاما.

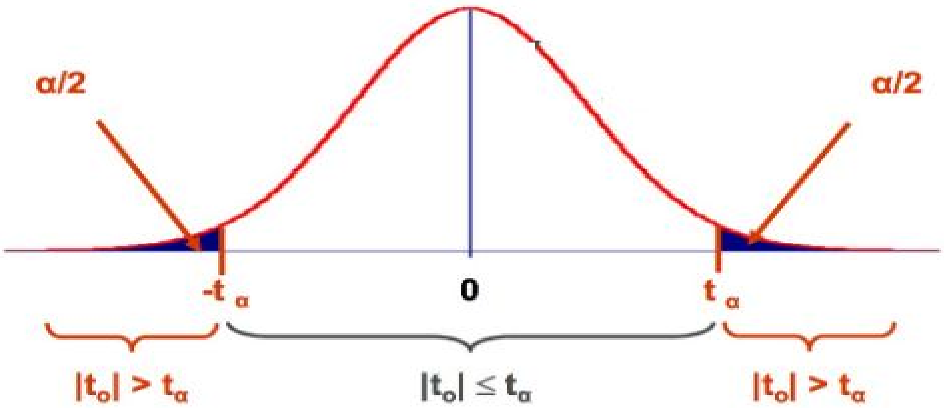
ونكتب: $T \to t_{(n)}$

[1] - K.Redjdal ; Op-cit ; P 212

2- خواص دالة كثافة احتمال توزيع ستودنت:

- إن دالة كثافة توزيع ستودنت متماثلة أي أن: $f(t) = f(-t)$ ولهما شكل يشبه شكل التوزيع الطبيعي.
- إن دالة كثافة توزيع ستودنت تقترب من الصفر $f(T) \to 0$ إذا كانت T تقترب من ∞ $(T \to \infty)$ وعندما تكون n كبيرة فإن توزيع ستودنت (t) يقترب من التوزيع الطبيعي.

3- التمثيل البياني لدالة كثافة احتمال توزيع ستودنت:



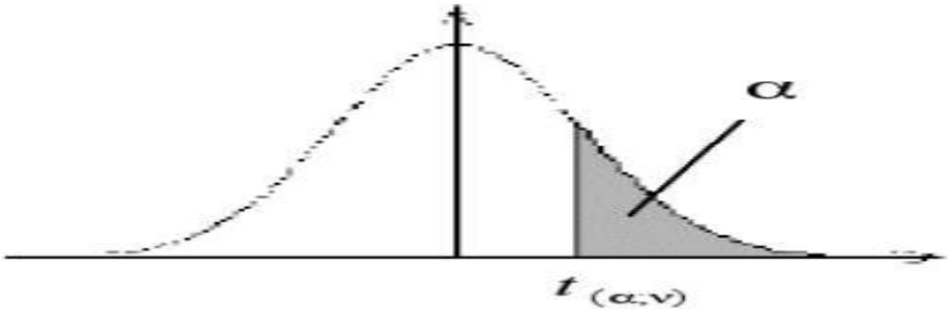
أما حساب الاحتمال فيتم بالطريقة التالية:

$$P(T \geq t_{(\alpha;n)}) = \int_{t_{(\alpha;n)}}^{\infty} f(T)dt = \alpha$$

حيث هذه القيمة يتم إستخراجها من جدول توزيع ستيودنت t وفق α مستوى المعنوية وهو السطر الأفقي، و n مستوى المعنوية الموجودة في السطر العمودي الموجودين في جدول الملحق (03) مع أخذ بعين الاعتبار أن[1]:

$$-t_{(\alpha;n)} = t_{(1-\alpha;n)}$$

[1]- علي عبد السلام العماري، علي حسين العجيلي، مرجع سابق، ص391.



4- التوقع الرياضي وتباين توزيع ستيودنت:

- **التوقع الرياضي** يعطى كما يلي : $E(T) = 0$
- **التباين** يعطى كما يلي : $V(T) = n(n-2)$

5- تقريب توزيع ستودنت إلى التوزيع الطبيعي المعياري:

عندما تؤول n إلى مالانهاية $(n \to \infty)$ فإنه يمكن تحويل أو تقريب توزيع ستودنت إلى التوزيع الطبيعي المعياري $N(0;1)$ [1] .

المثال رقم 5:

بالاعتماد على الملحق رقم 03 أوجد القيمتين: $t_{(0.05;20)}$ و $t_{(0.95;20)}$.

الحل:

نلاحظ من جدول الملحق 03 أن:

$$t_{(0.05;20)} = 1.725$$

القيمة $\alpha = 0.95$ غير موجودة ي الجدول و بالتالي نستخدم القاعدة:

$$-t_{(\alpha;n)} = t_{(1-\alpha;n)} \Rightarrow t_{(\alpha;n)} = -t_{(1-\alpha;n)}$$

$$t_{(0.95;20)} = -t_{(1-0.95;20)} = -t_{(0.05;20)} = -1.725$$

[1]- عبد الحميد ربيع غيطان، مرجع سابق ، ص 198.

سابعا- توزيع فيشر:

يعتبر توزيع فيشر F من بين التوزيعات الإحصائية الهامة، حيث يستخدم في الإحصاء الاستنتاجي لإجراء العديد من اختبارات الفروض المتعلقة بتحليل التباين وتصميم التجارب وإختبار معنوية معادلة الانحدار وغيرها من الاختبارات ويعرف هذا التوزيع كما يلي[1]:

إذا كان X و Y متغيرين عشوائيين مستقلين، وكان X متغير عشوائي يتبع توزيع كاي- مربع بدرجة حرية m $\left(\chi^2_{(m)}\right)$ و Y يتبع نفس التوزيع بدرجة حرية n $\left(\chi^2_{(n)}\right)$ فإن F متغير عشوائي $\left(F = \frac{X/m}{Y/n}\right)$ له توزيع F بدرجة حرية m و n و نكتب : $F \to f(m;n)$

1- دالة كثافة احتمال توزيع فيشر:

تعطى دالة كثافة احتمال توزيع فيشر كمايلي:

$$h_f(F) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{m+n}{2}\right)\left(\dfrac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{m}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} \times \dfrac{f^{\frac{m}{2}-1}}{\left(1+\dfrac{m}{n}f\right)^{\left(\frac{m+n}{2}\right)}} \text{..........} si \ldots f \rangle 0 \\ 0 \text{.......... ....} si \ldots f \le 0 \end{cases}$$

يعتبر هذا التوزيع ملتويا إلتواء موجب وتقل درجة الالتواء كلما زادت درجات حرية البسط m أو المقام n أو كليهما معا.

2- خواص دالة كثافة احتمال توزيع فيشر:

- كلما إقترب f إلى مالانهاية $(f \to \infty)$ فإن دالة الكثافة تقترب إلى الصفر $h_f(F) \to 0$.

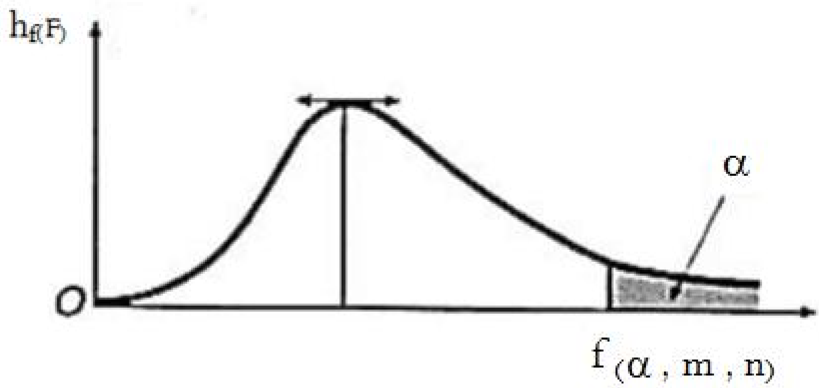
---

[1]- عبد الحميد ربيع غيطان، مرجع سابق، ص ص180،179.

- إذا كانت $m\rangle 2$ وكلما كانت $(f \to 0)$ فإن دالة الكثافة تقترب إلى الصفر $h_f(F) \to 0$.

- $F_{(\alpha;m;n)} = F^{-1}_{(1-\alpha;n;m)}$

3- التمثيل البياني لدالة كثافة احتمال توزيع فيشر:



نرمز للطرف الأعلى من توزيع F بالرمز $F_{(\alpha;m;n)}$ وهذا يعني أن:

$$P\left(F_{(m;n)}\right) \geq f_{(\alpha;m;n)} = \int_{f_{(\alpha;m;n)}}^{\infty} h_f(F)\,df = \alpha$$

وقيم $F_{(\alpha;m;n)}$ يتم إستخراجها من جدول توزيع فيشر وفق مستوى المعنوية α و درجتي الحرية m و n ، حيث أن الملحق 04 هو خاص بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$، و درجة الحرية m ممثلة في الجدول بـ V_1، و درجة الحرية n ممثلة بـ V_2 .

4- التوقع الرياضي وتباين توزيع فيشر:

- **التوقع الرياضي** يعطى كما يلي: $n\rangle 2$ و $E(f) = \dfrac{n}{n-2}$

- **التباين** يعطى كما يلي: $V(f) = \dfrac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$

المثال رقم 6:

بالاعتماد على الملحق رقم 04 أوجد القيمتين : $F_{(0.05\,;\,2\,;10\,)}$ و $F_{(0.95\,;\,2\,;10\,)}$

الحل:

نلاحظ من جدول الملحق 03 أن:

$$F_{(0.05\,;\,2\,;10\,)} = 4.10$$

القيمة $\alpha = 0.95$ غير موجودة في الجدول و بالتالي نستخدم القاعدة :

$$F_{(\alpha\,;m\,;n)} = F^{-1}_{(1-\alpha\,;n\,;m)} \Rightarrow F_{(0.95\,;2\,;10\,)} = F^{-1}_{(0.05\,;2\,;10\,)} = \frac{1}{4.10} = 0.24$$

تمارين مقترحة:

التمرين الأول:

تخضع أوزان عبوات إحدى أنواع الحلوى للتوزيع الطبيعي بمتوسط85 غ وانحراف معياري 2.5 غ.

المطلوب:

- ما احتمال أن يكون وزن إحدى العبوات المختارة عشوائيا تزيد عن 90 غ ؟
- ما احتمال أن وزن إحدى العبوات المختارة عشوائيا تقل عن 82 غ ؟

التمرين الثاني:

إذا كانت العلامات النهائية للطلبة في إحدى الوحدات الخاصة بمجموعة مقاييس تخضع للتوزيع الطبيعي بمتوسط 68 وانحراف معياري 12.

وإذا كان أعلى 15% من الطلبة يحصلون على تقدير ممتاز ، فماهي أقل علامة تحصل على تقدير ممتاز ؟

التمرين الثالث:

إذا كانت أطوال الجنود في أحد الجيوش موزعة حسب التوزيع الطبيعي بمتوسط 170سم وانحراف معياري 5سم.

المطلوب:

- ما احتمال أن يزيد طول جندي أختير عشوائيا عن 176سم ؟
- ما نسبة عدد الجنود الذي تزيد أطوالهم على 173سم ؟
- ما نسبة عدد الجنود الذين تقل أطوالهم عن 162سم ؟

التمرين الرابع:

آلة لصناعة المسامير تنتج مسامير ذات أطوال محتلفة، حيث طول المسمار يتغير عشوائياً بمتوسط u غير ثابت و إنحراف معياري ثابت هو 0.5 سم.

المطلوب: - ما احتمال الحصول على مسمار ذو طول $u = 7$ لما $X = 6{,}5$ ؟

- كم هو عدد المسامير التي يمكن الحصول عليها ذات طول أكبر من 8 سم لما $u = 7,5$ في عينة بها 2000 مسمار؟

التمرين الخامس:

إذا علمت أن إحتمال ظهور صورة في تجربة إلقاء قطعة نقدية معدنية 15 مرة هو (0.4) ، وأن X هو عدد الصور التي يمكن الحصول عليها .

المطلوب:

- أحسب احتمال $P(X = 4)$ و $P(7 \le X \le 9)$ بإستخدام توزيع ذي الحدين ثم بإستخدام التقريب بالتوزيع الطبيعي ؟

التمرين السادس:

أحسب احتمال الحصول على عدد الصور بين 3 و 6 من رمي قطعة نقدية معدنية متكاملة التوازن 10 مرات:

- باستخدام توزيع ذي الحدين.
- باستخدام التوزيع الطبيعي.

التمرين السابع:

إذا كان متوسط أجر عمال مؤسسة عمومية 04 وحدات نقدية وفق إنحراف معياري $\sigma = 0,5$ وحدة نقدية، فما هي نسبة العمال الذين يتقاضون أجرا يتراوح ما بين 2.5 و 3 وحدات نقدية في الساعة علما أن الأجور تتوزع توزيعا طبيعيا ؟

التمرين الثامن:

أثبت مايلي:

1/ $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

2/ $\beta(a,b) = \beta(b,a)$

3/ $\Gamma(n+1) = n!$ et $\Gamma(1) = 1$

التمرين التاسع:

أثبت أن الدالة التالية هي دالة كثافة احتمال:

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{X}{2}} X^{\frac{n}{2}-1} dx$$

التمرين العاشر:

إنطلاقا من جداول التوزيعات المتوفرة في الملاحق أوجد ما يلي:

$t_{(0,05;15)}$; $t_{(0,95;30)}$; $t_{(0,99;8)}$; $t_{(0,01;120)}$; $t_{(0,01;10)}$; $t_{(0,95;15)}$

$F_{(0,05;2;14)}$; $F_{(0,95;3;20)}$; $F_{(0,95;7;10)}$; $F_{(0,99;8;5)}$; $F_{(0,01;5;8)}$

$\chi^2{}_{(0,05;150)}$; $\chi^2{}_{(0,95;150)}$; $\chi^2{}_{(0,05;6)}$; $\chi^2{}_{(0,01;15)}$; $\chi^2{}_{(0,99;15)}$

التمرين الحادي عشر:

- في توزيع χ^2 ذي درجات حرية 15 أوجد:

; $P\left(\chi^2 \langle 7.261\right)$; $P\left(\chi^2 \langle 5.229\right)$ $P\left(6.262 \langle \chi^2 \langle 27.488\right)$

- في توزيع t على درجات حرية 12 أوجد:

$P(t \rangle 2.681)$; $P(t \langle 3.055)$; $P(-2.179 \langle t \langle 2.179)$;

$P(-1.782 \langle t \langle 1.782)$

خاتمة

تم بعون الله إتمام مطبوعة محاضرات في الاحصاء 2، هذه المطبوعة موجهة خصيصا لطلبة السنة الأولى جذع مشترك (1 LMD) في العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، وتحتوي هذه الأخيرة على أربعة فصول وفق البرنامج المقرر من طرف وزارة التعليم العالي والبحث العلمي. نهدف من خلالها إلى مساعدة الطالب على التحكم أكثر في استخدام بعض القوانين والمؤشرات الاحصائية المستعملة في تحليل البيانات الخاصة بالظواهر الاقتصادية والاجتماعية لأن الإحصاء الرياضي هو فرع من فروع علم الإحصاء الذي يرتكز على نظرية الاحتمال التي بدأت مع ظهور ألعاب الحظ وتطورت وفق مناهج علمية من خلال استخدامها لأساليب رياضية وعلمية في بناء نماذج رياضية كتفسيرات لظواهر اقتصادية، اجتماعية و غيرها.

اعتمدنا في كل فصل على سرد الجانب النظري الخاص بكل فرع من فروع الفصل والتركيز أحيانا على براهين القوانين الخاصة بالاحتمالات وحساب بعض المؤشرات الاحصائية، مع تطعيم ذلك بأمثلة تطبيقية تساعد الطالب على الفهم أكثر وتزيد من مهاراته واستيعابه للقوانين والتطبيقات خاصة منها التي يحتاجها الطالب في مساره الدراسي، كما ختمنا كل فصل بمجموعة من التمارين المحلولة نتطرق فيها لتمارين وطرق حل أخرى تختلف عن تلك الموجودة في الأمثلة التطبيقية أو تمارين مقترحة للحل من أجل اختبار نسبة الاستيعاب للطالب من خلال اطلاعه على المحاضرات والأمثلة التطبيقية.

وفي الأخير نتمنى أن تكون هذه المطبوعة إضافة للرصيد المكتبي للجامعة، كما يسعدنا أن نتلقى ملاحظاتكم واقتراحاتكم البناءة من أجل إثراء هذا العمل.

المراجع

أولا - المراجع باللّغة العربية:

1- جبار عبد مضحي: " مقدمة في نظرية الاحتمالات"، دار المسيرة للنشر والتوزيع، الأردن، 2011.

2- حسن ياسين طعمة: " الاختبارات الاحصائية أسس وتطبيقات"، ط 2، دار صفاء للنشر والتوزيع، الأردن، 2015.

3- دلال القاضي، سهيلة عبد الله و محمود البياتي: " الاحصاء للإداريين والاقتصاديين"، دار الحامد، الأردن، 2005.

4- دومينيك سالفاتور: " الإحصاء و الاقتصاد القياسي"، ترجمة سعدية حافظ منتصر، الدار الدولية للنشر والتوزيع، مصر، 2011.

5- السعدي رجال: " نظرية الاحتمالات و مبادئ الحساب الاحتمالي : دروس وتمارين"، الجزء الأول، ط2، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2005.

6- سيمور ليبشتز: " نظريات ومسائل في الاحتمالات، سلسلة ملخصات شوم"، ترجمة عبد العظيم أنيس، ط2، الدار الدولية للتوزيع و النشر، مصر، 2000.

7- عبد الحميد ربيع غيطان: " نظرية الاحتمالات"، الجزء الأول، دار الكتب الأكاديمية، مصر ، 2004.

8- عبد الحميد ربيع غيطان: " نظرية الاحتمالات"، الجزء الثاني، دار الكتب الأكاديمية، مصر ، 2004.

9- علي عبد السلام العماري، علي حسين العجيلي: " الإحصاء و الاحتمالات: النظرية و التطبيق"، منشورات (ELGA)، مالطا، 2000.

10- علي نصر الدين الوكيل: " مبادئ رياضيات الحاسب"، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، مصر، 2000.

11- غزال عبد العزيز عامر: " الاقتصاد القياسي وتحليل السلاسل الزمنية (النظرية-الطرق-التطبيقات)"، مطابع الشرطة للطباعة والنشر والتوزيع، مصر، 2015.

12- مجدي الطويل: " الاحتمالات : النظرية والتطبيق"، دار النشر للجامعات، مصر ، 2009.

13- محمد صبحي أبو صالح: " الموجز في الطرق الاحصائية "، دار اليازوري، الأردن، 2004.

14- محمد صبحي أبو صالح: " مبادئ الاحصاء"،دار اليازوري، الأردن، 2000.

15- مديحة السيد محمد موسى: " أساسيات الاحصاء الرياضي وتطبيقاتها "، دار الكتاب الحديث، مصر، 2008.

16- موراي شبيجل، جو شيلر و ألو سرييقاسان: " سلسلة شوم الاحتمالات والاحصاء" ترجمة محمود علي أبو النصر و مصطفى جلال مصطفى، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، مصر ، 2004.

ثانيا- المراجع باللّغات الأجنبية:

1- *Ahmed CHIBAT ; Notions sur Le Calcul des Probabilités ; La Collection Mathématique de l'Université Mentouri Constantine .*

2- *Bernard Verlant, Geneviève Saint-Pièrre ; Statistiques et Probabilités ;Edition BERTI ; Alger ; 2008.*

3- *BOGAERT P , « Probabilités pour scientifiques et ingénieurs» Edition de Boeck, Belgique , 2006.*

4- *CANTONI . E et autres ; Maitriser l'aléatoire : exercices résolus de probabilités et statistique ; Springer ; France ; 2006 .*

5- *CHAMOUN Chamoun ; Eléments des Statistiques et de Probabilités ; OPU ; Algérie ; 2010 .*

6- *DRESS . F ; Les Probabilités et La Statistique ; Edition DUNOD ; Paris ; 2012.*

7- *K.Redjdal ; Cours de Probabilités ; OPU ; Algérie ; 2004 ;*

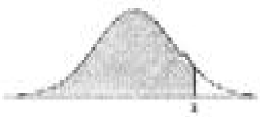
8- *KHALDI Khaled ; Probabilités ; OPU ; Algérie ; 2005*

9- *ROSS M . S. « Initiation aux Probabilités » Trad par HOFER .C , Presses Polytechnique romandes , Lausanne , Suisse , 1987.*

الملاحق

الملحق 01: التوزيع الطبيعي المعياري (Z)

Tables of the Normal Distribution



Probability Content from -oo to Z

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

الملحق 02: توزيع كاي- مربع (χ^2)

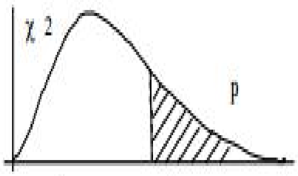


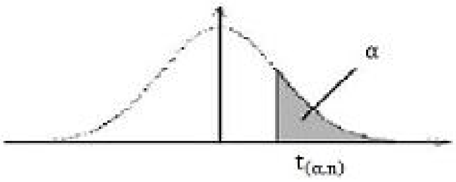
TABLE DU CHI-DEUX : $\chi^2(n)$

n \ p	0.90	0.80	0.70	0.50	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01
1	0,0158	0,0642	0,148	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635
2	0,211	0,446	0,713	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210
3	0,584	1,005	1,424	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,341
4	1,064	1,649	2,195	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277
5	1,610	2,343	3,000	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086
6	2,204	3,070	3,828	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812
7	2,833	3,822	4,671	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475
8	3,490	4,594	5,527	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090
9	4,168	5,380	6,393	8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666
10	4,865	6,179	7,267	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209
11	5,578	6,989	8,148	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725
12	6,304	7,807	9,034	11,340	14,011	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217
13	7,042	8,634	9,926	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688
14	7,790	9,467	10,821	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141
15	8,547	10,307	11,721	14,339	17,322	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578
16	9,312	11,152	12,624	15,338	18,418	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000
17	10,085	12,002	13,531	16,338	19,511	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409
18	10,865	12,857	14,440	17,338	20,601	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805
19	11,651	13,716	15,352	18,338	21,689	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191
20	12,443	14,578	16,266	19,337	22,775	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566
21	13,240	15,445	17,182	20,337	23,858	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932
22	14,041	16,314	18,101	21,337	24,939	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289
23	14,848	17,187	19,021	22,337	26,018	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638
24	15,659	18,062	19,943	23,337	27,096	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980
25	16,473	18,940	20,867	24,337	28,172	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314
26	17,292	19,820	21,792	25,336	29,246	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642
27	18,114	20,703	22,719	26,336	30,319	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963
28	18,939	21,588	23,647	27,336	31,391	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278
29	19,768	22,475	24,577	28,336	32,461	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588
30	20,599	23,364	25,508	29,336	33,530	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892

Pour n > 30, on peut admettre que $\sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2n-1} \approx N(0,1)$

الملحق 03: توزيع ستيودنت (t)

$$P\left(T \geq t_{(\alpha,n)}\right) = \int_{t_{(\alpha,n)}}^{\infty} f(T)dt = \alpha$$

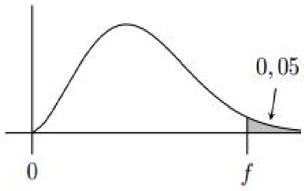


	α										
n	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.0025	0.0010	0.0005
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66	127.3	318.3	636.6
2	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.09	22.33	31.60
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.21	12.92
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.104	3.485	3.767
24	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745
25	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.057	3.421	3.690
28	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.047	3.408	3.674
29	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.038	3.396	3.659
30	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
40	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
50	0.679	0.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	2.937	3.261	3.496
60	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	2.915	3.232	3.460
80	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	2.887	3.195	3.416
100	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	2.871	3.174	3.390
120	0.677	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	2.860	3.160	3.373
∞	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	2.807	3.090	3.291

الملحق 04: توزيع فيشر (F)

Valeurs de f telles que $\mathbb{P}[F \geqslant f] = 0,05$

où F suit la loi de Fisher-Snedecor à ν_1, ν_2 degrés de liberté
ν_1 : nombre de ddl du numerateur
ν_2 : nombre de ddl du denominateur



ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	18	20	22	24	25
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,76	8,74	8,73	8,71	8,70	8,69	8,67	8,66	8,65	8,64	8,63
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,94	5,91	5,89	5,87	5,86	5,84	5,82	5,80	5,79	5,77	5,77
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,70	4,68	4,66	4,64	4,62	4,60	4,58	4,56	4,54	4,53	4,52
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00	3,98	3,96	3,94	3,92	3,90	3,87	3,86	3,84	3,83
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,60	3,57	3,55	3,53	3,51	3,49	3,47	3,44	3,43	3,41	3,40
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,31	3,28	3,26	3,24	3,22	3,20	3,17	3,15	3,13	3,12	3,11
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,10	3,07	3,05	3,03	3,01	2,99	2,96	2,94	2,92	2,90	2,89
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,94	2,91	2,89	2,86	2,85	2,83	2,80	2,77	2,75	2,74	2,73
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,82	2,79	2,76	2,74	2,72	2,70	2,67	2,65	2,63	2,61	2,60
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,72	2,69	2,66	2,64	2,62	2,60	2,57	2,54	2,52	2,51	2,50
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,63	2,60	2,58	2,55	2,53	2,51	2,48	2,46	2,44	2,42	2,41
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,57	2,53	2,51	2,48	2,46	2,44	2,41	2,39	2,37	2,35	2,34
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,51	2,48	2,45	2,42	2,40	2,38	2,35	2,33	2,31	2,29	2,28
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,46	2,42	2,40	2,37	2,35	2,33	2,30	2,28	2,25	2,24	2,23
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,41	2,38	2,35	2,33	2,31	2,29	2,26	2,23	2,21	2,19	2,18
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,37	2,34	2,31	2,29	2,27	2,25	2,22	2,19	2,17	2,15	2,14
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,34	2,31	2,28	2,26	2,23	2,21	2,18	2,16	2,13	2,11	2,11
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,31	2,28	2,25	2,22	2,20	2,18	2,15	2,12	2,10	2,08	2,07
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,28	2,25	2,22	2,20	2,18	2,16	2,12	2,10	2,07	2,05	2,05
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,26	2,23	2,20	2,17	2,15	2,13	2,10	2,07	2,05	2,03	2,02
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,24	2,20	2,18	2,15	2,13	2,11	2,08	2,05	2,02	2,01	2,00
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,22	2,18	2,15	2,13	2,11	2,09	2,05	2,03	2,00	1,98	1,97
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,20	2,16	2,14	2,11	2,09	2,07	2,04	2,01	1,98	1,96	1,96
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,18	2,15	2,12	2,09	2,07	2,05	2,02	1,99	1,97	1,95	1,94
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,17	2,13	2,10	2,08	2,06	2,04	2,00	1,97	1,95	1,93	1,92
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,15	2,12	2,09	2,06	2,04	2,02	1,99	1,96	1,93	1,91	1,91
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,14	2,10	2,08	2,05	2,03	2,01	1,97	1,94	1,92	1,90	1,89
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,13	2,09	2,06	2,04	2,01	1,99	1,96	1,93	1,91	1,89	1,88
31	4,16	3,30	2,91	2,68	2,52	2,41	2,32	2,25	2,20	2,15	2,11	2,08	2,05	2,03	2,00	1,98	1,95	1,92	1,90	1,88	1,87
32	4,15	3,29	2,90	2,67	2,51	2,40	2,31	2,24	2,19	2,14	2,10	2,07	2,04	2,01	1,99	1,97	1,94	1,91	1,88	1,86	1,85
33	4,14	3,28	2,89	2,66	2,50	2,39	2,30	2,23	2,18	2,13	2,09	2,06	2,03	2,00	1,98	1,96	1,93	1,90	1,87	1,85	1,84
34	4,13	3,28	2,88	2,65	2,49	2,38	2,29	2,23	2,17	2,12	2,08	2,05	2,02	1,99	1,97	1,95	1,92	1,89	1,86	1,84	1,83
35	4,12	3,27	2,87	2,64	2,49	2,37	2,29	2,22	2,16	2,11	2,07	2,04	2,01	1,99	1,96	1,94	1,91	1,88	1,85	1,83	1,82
36	4,11	3,26	2,87	2,63	2,48	2,36	2,28	2,21	2,15	2,11	2,07	2,03	2,00	1,98	1,95	1,93	1,90	1,87	1,85	1,82	1,81
37	4,11	3,25	2,86	2,63	2,47	2,36	2,27	2,20	2,14	2,10	2,06	2,02	2,00	1,97	1,95	1,93	1,89	1,86	1,84	1,82	1,81
38	4,10	3,24	2,85	2,62	2,46	2,35	2,26	2,19	2,14	2,09	2,05	2,02	1,99	1,96	1,94	1,92	1,88	1,85	1,83	1,81	1,80
39	4,09	3,24	2,85	2,61	2,46	2,34	2,26	2,19	2,13	2,08	2,04	2,01	1,98	1,95	1,93	1,91	1,88	1,85	1,82	1,80	1,79
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,04	2,00	1,97	1,95	1,92	1,90	1,87	1,84	1,81	1,79	1,78
41	4,08	3,23	2,83	2,60	2,44	2,33	2,24	2,17	2,12	2,07	2,03	2,00	1,97	1,94	1,92	1,90	1,86	1,83	1,81	1,79	1,78
42	4,07	3,22	2,83	2,59	2,44	2,32	2,24	2,17	2,11	2,06	2,03	1,99	1,96	1,94	1,91	1,89	1,86	1,83	1,80	1,78	1,77
43	4,07	3,21	2,82	2,59	2,43	2,32	2,23	2,16	2,11	2,06	2,02	1,99	1,96	1,93	1,91	1,89	1,85	1,82	1,79	1,77	1,76
44	4,06	3,21	2,82	2,58	2,43	2,31	2,23	2,16	2,10	2,05	2,01	1,98	1,95	1,92	1,90	1,88	1,84	1,81	1,79	1,77	1,76
45	4,06	3,20	2,81	2,58	2,42	2,31	2,22	2,15	2,10	2,05	2,01	1,97	1,94	1,92	1,89	1,87	1,84	1,81	1,78	1,76	1,75
46	4,05	3,20	2,81	2,57	2,42	2,30	2,22	2,15	2,09	2,04	2,00	1,97	1,94	1,91	1,89	1,87	1,83	1,80	1,78	1,76	1,75
47	4,05	3,20	2,80	2,57	2,41	2,30	2,21	2,14	2,09	2,04	2,00	1,96	1,93	1,91	1,88	1,86	1,83	1,80	1,77	1,75	1,74
48	4,04	3,19	2,80	2,57	2,41	2,29	2,21	2,14	2,08	2,03	1,99	1,96	1,93	1,90	1,88	1,86	1,82	1,79	1,77	1,75	1,74
49	4,04	3,19	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,08	2,03	1,99	1,96	1,93	1,90	1,88	1,85	1,82	1,79	1,76	1,74	1,73
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,03	1,99	1,95	1,92	1,89	1,87	1,85	1,81	1,78	1,76	1,74	1,73
55	4,02	3,16	2,77	2,54	2,38	2,27	2,18	2,11	2,06	2,01	1,97	1,93	1,90	1,88	1,85	1,83	1,79	1,76	1,74	1,72	1,71
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,95	1,92	1,89	1,86	1,84	1,82	1,78	1,75	1,72	1,70	1,69
65	3,99	3,14	2,75	2,51	2,36	2,24	2,15	2,08	2,03	1,98	1,94	1,90	1,87	1,85	1,82	1,80	1,76	1,73	1,71	1,69	1,68
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,14	2,07	2,02	1,97	1,93	1,89	1,86	1,84	1,81	1,79	1,75	1,72	1,70	1,67	1,66
75	3,97	3,12	2,73	2,49	2,34	2,22	2,13	2,06	2,01	1,96	1,92	1,88	1,85	1,83	1,80	1,78	1,74	1,71	1,69	1,66	1,65
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,13	2,06	2,00	1,95	1,91	1,88	1,84	1,82	1,79	1,77	1,73	1,70	1,68	1,65	1,64