

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique

Université Akli Mohand Oulhadj - Bouira -

X•⊙V•εX •K||ε □:κ:|∧ :||κ•Z - X:⊙ε⊙÷t -



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة أكلي محمد أولحاج
- البويرة -

Faculté des Sciences et des Sciences Appliquées

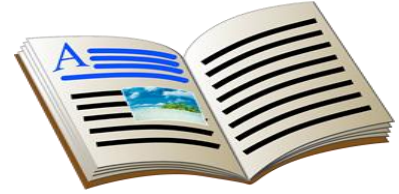
كلية العلوم والعلوم التطبيقية

Département de Génie Electrique

Polycopié de cours

En Génie Biomédical

Niveau : Troisième année



Traitement du signal

Par Dr. CHELBI Salim

Année : 2017/2018

Tables Des Matières

Table des matières	i
Introduction	vi

CHAPITRE I

ANALYSE TEMPORELLE ET FREQUENTIELLE DE SIGNAUX

I.1. Analyse temporelle des signaux	1
I.1.1. Introduction	1
I.1.2. Classification des signaux	1
I.1.3. Signaux élémentaires et usuels	2
I.1.4. Convolution et corrélation des signaux	5
I.2. Analyse spectrale des signaux	8
I.2.1. Introduction	8
I.2.2. Décomposition en séries de Fourier (forme trigonométrique réelle)	9
I.2.3. La transformée de Fourier	11
I.3. Exercices d'application	13

CHAPITRE II

ANALYSE ET SYNTHÈSE DES FILTRES ANALOGIQUES

II.1. Filtrage analogique	19
II.1.1. Introduction	19
II.1.2. Fonction de Transfert	19
II.1.3. Gain d'un filtre	19
II.1.4. Diagramme de Bode	20
II.1.5. Ordre du filtre	21
II.1.6. Types de filtres	21
II.1.7. Exemples des filtres idéals	22
II.1.8. Exemples des filtres réels	27
II.1.9. Exercices d'application	29

CHAPITRE III

ECHANTILLONNAGE ET SIGNAUX DISCRETS

III.1. Echantillonnage de signaux continus	32
III.1.1. Introduction	32
III.1.2. L'échantillonnage	32
III.1.3. Echantillonnage idéal	32
III.1.4. Quantification	34
III.1.5. Codage	34

III.2. Signaux discrets	35
III.2.1. Définition	35
III.2.2. Représentation graphique	35
III.2.4. Opérations sur les signaux discrets	38
III.3. Exercices d'application	40

CHAPITRE IV

TRANSFORMEE DE FOURIER DISCRETE TFD ET RAPIDE FFT

IV.1. Transformée de Fourier Discrète TFD	43
IV.1.1. Introduction	43
IV.1.2. Transformée de Fourier Discrète TFD	43
IV.1.3. Propriétés de la Transformée de Fourier Discrète	44
IV.2. Transformée de Fourier Rapide FFT	45
IV.2.1. Introduction	45
IV.2.2. Transformée de Fourier Discrète TFD	46
IV.3. Exercices d'application	51

CHAPITRE V

TRANSFORMEE EN Z ET FILTRAGE NUMERIQUE

V.1. Transformée en Z	53
V.1.1. Introduction	53
V.1.2. Définition	53

V.1.3. Existence de la transformée en Z	53
V.1.4. Propriétés de la transformée en Z	54
V.1.5. La transformée en Z inverse	56
V.2. Filtrage numérique	57
V.2.1. Introduction	57
V.2.2. Définition	57
V.2.3. Spécification d'un filtre numérique	57
V.2.4. Critère de stabilité des filtres numériques	58
V.2.5. Classification des filtres numériques	59
V.2.6. Exercices d'application	

60

CHAPITRE VI

LES FILTRES RIF ET LES FILTRES RII

VI.1. Les filtres à réponse impulsionnelle finie RIF	61
VI.1.1. Définition	61
VI.1.2. Synthèse des filtres RIF	61
VI.2. Les filtres à réponse impulsionnelle infinie RII	64
VI.2.1. Définition	64
VI.2.2. Synthèse des filtres RIF	64
VI.3. Exercices d'application	65

CHAPITRE VII
SIGNAUX ALEATOIRES

VII.1. Introduction	68
VII.2. Définition	68
VII.3. Propriétés fondamentales	69
VII.4. Fonction et matrice de corrélation	70
VII.5. Les signaux Gaussiens	72
VI.6. Définition d'un bruit blanc	72
VI.7. Exercices d'application	73
REFERENCES	75

Liste des figures

Figure I.1. Signal causal	1
Figure I.2. Classification des signaux	2
Figure I.3. Signal Echelon	2
Figure I.4. Signal Signe	3
Figure I.5. Signal triangle	3
Figure I.6. Signal rompe	3
Figure I.7. Fonction rectangulaire	3
Figure I.8. Impulsion Gaussienne	4
Figure I.9. Impulsion de Dirac	5
Figure I.10. Spectre unilatéral d'un signal périodique	10
Figure I.11. Spectre bilatéral d'un signal périodique	11
Figure II.1. Diagramme de Bode	20
Figure II.2. Ordre du filtre	21
Figure II.3. Filtre passe bas	22
Figure II.4. Filtre passe bas actif	23
Figure II.5. Filtre passe haut	23
Figure II.6. Filtre passe haut actif	24
Figure II.7. Filtre passe bas second ordre	24
Figure II.8. Filtre passe haut second ordre	26
Figure II.9. Filtre de Butterworth avec différents ordre	28
Figure II.10. Filtre de Chebyshev avec différents ordre	29
Figure II.11. Diagramme de Bode (module)	30
Figure II.12. Diagramme de Bode (phase)	31
Figure III.1. Signal échantillonné	32

Figure III.2. Spectre d'un signal échantillonné	33
Figure III.3. Sous échantillonné Spectre	33
Figure III.4. La quantification	34
Figure IV.5. Représentation graphique de $x[n]$	36
Figure III.6. Impulsion de Dirac	36
Figure III.7. Echelon unité	37
Figure III.8. Rampe unité	37
Figure III.9. Train d'impulsions	37
Figure III.10. Rectangle de largeur 5	37
Figure III.11. Exemple de convolution : Système simple	38
Figure IV.1. TFD d'un signal discret	43
Figure IV.2. Entrelacement temporel de la TFD	44
Figure IV.3. Papillon d'entrelacement temporel de la TFD	48
Figure IV.4. Entrelacement fréquentiel de la TFD	50
Figure IV.5. Papillon d'entrelacement fréquentiel de la TFD	50
Figure V.1. Domaine de convergence	54
Figure V.2. Réponse fréquentielle des différents filtres	58
Figure V.3. Plan complexe des z et la zone de stabilité	59
Figure VI.1. Gabarits idéal d'un filtre passe-bande	63
Figure VII.1. Bruit blanc à bande limitée	73

Liste des tables

Table II.1. polynome de Butterworth	27
Table II.2. polynome de Chebyshev	28
Table III.1. Codage bipolaire	35
Table V.1. Transformée en Z des signaux élémentaire	57

INTRODUCTION GENERALE

Le signal est une quantité physique qui varie d'une ou plusieurs variables utilisées dans plusieurs applications par différents systèmes, ces signaux peuvent être représentés dans le domaine temporel ou bien analysés dans le domaine fréquentiel.

Le traitement du signal est une technique qui élabore, détecte et interprète les signaux porteurs de l'information et cela en s'appuyant sur la théorie de signal qui donne leurs différentes caractéristiques. Ses application du traitement du signal sont nombreuses, à savoir Télécommunication, Géophysique, Reconnaissance des formes, Biomédical, Acoustique, etc.

Ces traitements du signal peuvent être réalisés par des composants analogiques (électroniques pour les signaux, optiques pour les images). Après l'étape d'échantillonnage, les techniques numériques de traitement en utilisant des filtres numérique fournissent toutefois beaucoup de possibilités et une simplicité de la mise en œuvre avec une possibilité de réglage qui leur permettent de supplanter les filtrages analogiques.

Ce polycopié est rédigé pour les étudiants de troisième année Génie Biomédicale, pour but d'exposer les principes techniques de traitement du signal analogique et numérique à savoir, la convolution, la corrélation, l'échantillonnage, le filtrage analogique et numérique avec des filtres à réponse impulsionnelle finie et des filtres à réponse impulsionnelle infinie. Cette rédaction est basée sur une bibliographie citée en fin de document. Il est donc fortement conseillé de consulter les différents ouvrages mentionnés dans la bibliographie.

CHAPITRE I

ANALYSE TEMPORELLE ET FREQUENTIELLE DE SIGNAUX

I.1. Analyse temporelle des signaux

I.1.1. Introduction :

Le signal est une quantité physique qui varie d'une ou plusieurs variables utilisés dans plusieurs applications par différents systèmes, ces derniers peuvent être affectés par des phénomènes perturbateurs appelés bruits. Ces signaux peuvent être représentés dans le domaine temporel ou bien analysés dans le domaine fréquentiel.

I.1.2. Classification des signaux :

Les signaux peuvent être classés selon les critères suivants :

1. Caractéristiques temporelle : nous pouvons citer
 - a. Signal à temps continu
 - b. Signal à temps discret
2. Signaux déterministes ou aléatoires : nous pouvons citer
 - a. Signal déterministes : il est exprimé en fonction d'une fonction mathématique et on peut le prévoir
 - b. Signal aléatoire : c'est un signal qu'on ne peut pas exprimer mathématiquement cependant, il n'est caractérisé qu'à travers les propriétés statistiques.
3. La parité des signaux
 - a. Le signal paire : c'est un signal qui est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées il est déduit par la relation suivante : $x_p(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]$
 - b. Le signal impaire : c'est un signal qui est symétrique par rapport à l'origine il est déduit par la relation suivante : $x_{imp}(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)]$
4. La causalité des signaux :
 - a. Le signal est dit causal si seulement si sa partie négative est nulle

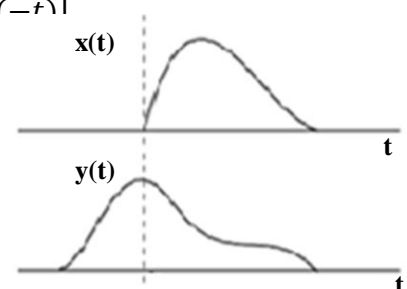


Figure 1. Signal causal

5. Signaux à énergie / puissance finie :

Tout signal à énergie finie possède une puissance moyenne nulle, ces deux paramètres sont calculés comme suit :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

Cette classification peut être résumée dans la figure suivante :

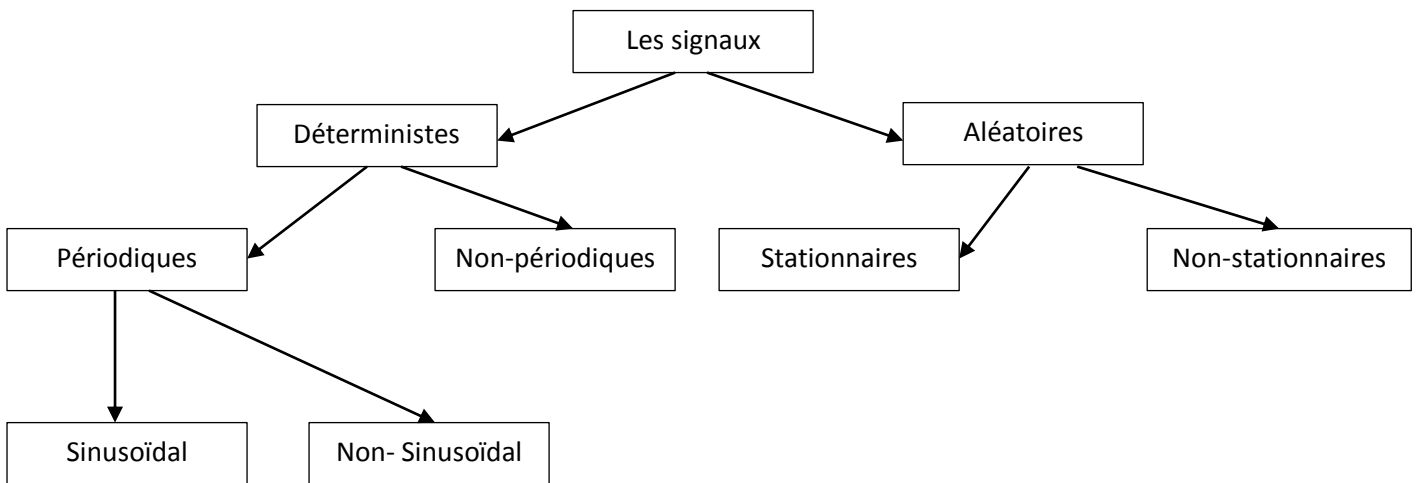


Figure2. Classification des signaux

I.1.3. Signaux élémentaires et usuels :

a. Fonction Echelon :

$$e(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

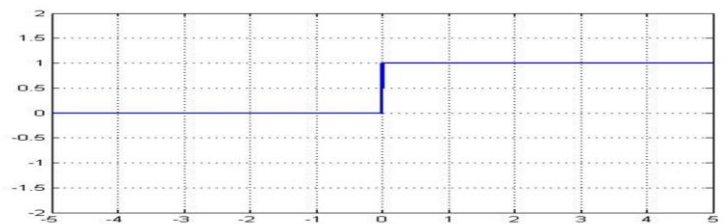


Figure 3. Signal Echelon

La principale utilisation de ce signal est la causalité de n'importe quel signal, à savoir, le produit d'un signal continu défini de moins $-\infty$ vers $+\infty$ avec un échelon permet d'éliminer la partie négative du premier et par conséquent nous donne un signal causal.

b. Fonction Signe :

$$e(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ -1 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

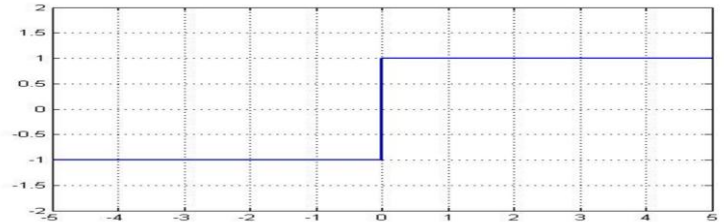


Figure 4. Signal Signe

c. Fonction triangulaire :

$$tri(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{si } |t| < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

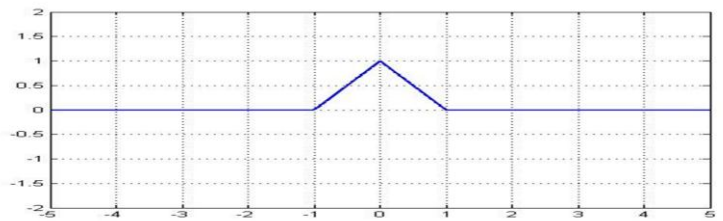


Figure 5. Signal triangle

d. Fonction rompe :

$$rompe(t) = \begin{cases} t & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

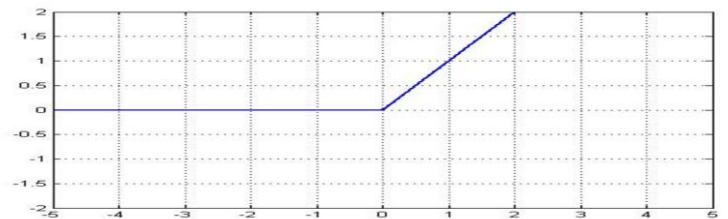


Figure 6. Signal rompe

e. Fonction rectangulaire :

$$rect(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

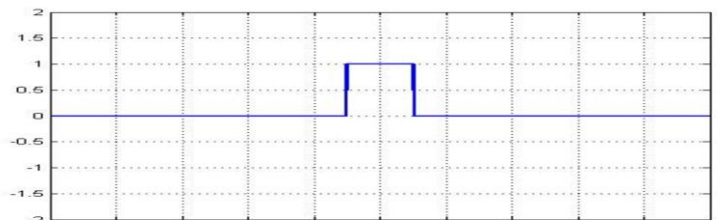


Figure 7. Fonction rectangulaire

En général, on peut représenter une fonction rectangulaire d'amplitude A et de durée T, centrée sur t_0 avec cette fonction: $x(t) = A \cdot rect\left(\frac{t-t_0}{T}\right)$

L'utilisation principale de cette fonction est de fenêtrer un signal, pour localiser un segment d'une durée bien déterminée T , cette opération consiste en une multiplication suivante :

$$x_T(t) = x(t) \cdot \text{rect}\left(\frac{t - t_0}{T}\right)$$

f. Impulsion Gaussienne :

$$\text{impGauss}(t) = e^{-\pi t^2}$$

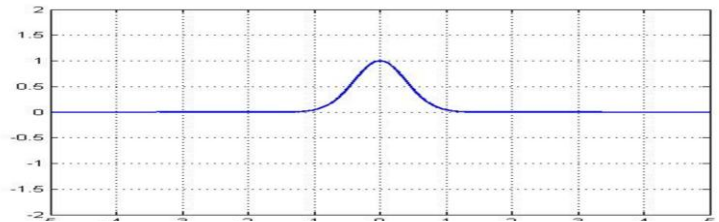


Figure 8. Impulsion Gaussienne

g. Impulsion de Dirac :

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

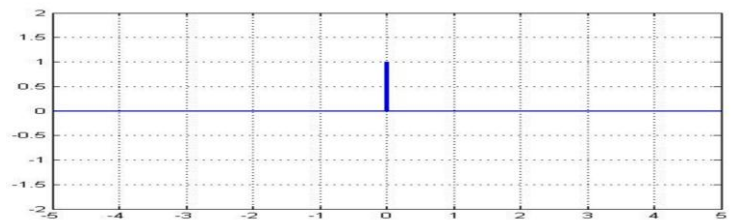


Figure 9. Impulsion de Dirac

Notons que l'origine de ce signal est une fonction rectangulaire de largeur L et d'amplitude $1/L$, et quand on fait tendre la largeur à zéros, l'amplitude va tendre à l'infinie. Lors de la représentation, nous prenons l'amplitude égale à 1.

L'utilisation principale de cette fonction est de connaître la valeur instantanée d'un signal multiplié par une impulsion de Dirac à l'instant de cette impulsion.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot \delta(t) dt = s(0)$$

En général :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = s(t_0)$$

h. Train d'Impulsions (peigne de Dirac) :

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \delta(t - kT)$$

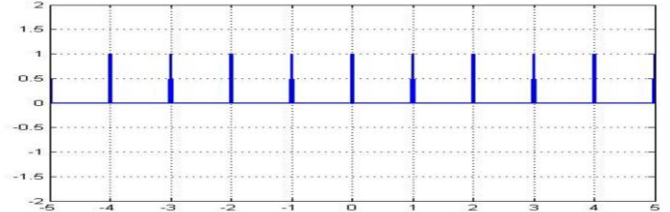


Figure 9. Impulsion de Dirac

La principale fonction de ce signal est l'opération d'échantillonnage, elle permet d'obtenir une suite d'échantillons à une cadence de fréquence d'échantillonnage $f_e = \frac{1}{T}$.

I.1.4. Convolution et Corrélation des signaux :

I.1.4.1. La convolution

a. Définition :

Soit f et g deux fonctions, le produit de convolution entre les deux fonctions f et g est calculé par l'intégral ci-dessous :

$$h(t) = f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau$$

Cet intégral traduit un recouvrement entre les deux fonctions $f(\tau)$ et $g(t-\tau)$ qui est inversée et décalée de l'origine.

b. Propriétés de la convolution :

Commutativité : $x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$

Distributivité : $[x(t) + y(t)] * z(t) = [x(t) * z(t)] + [y(t) * z(t)]$

Associativité : $[x(t) * y(t)] * z(t) = x(t) * [y(t) * z(t)]$

Élément neutre : L'élément neutre de la convolution est l'impulsion de Dirac

$$\delta(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) \cdot x(t - \tau) d\tau = x(t)$$

De même $\delta(t - t_0) * x(t) = x(t - t_0)$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \delta_T(t - nT) * x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(t - nT)$$

Dérivation : $[x(t) * y(t)]' = x(t)' * y(t) = x(t) * y(t)'$

Théorème de Plancherel

Soit $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux et $X(f)$, $Y(f)$ respectivement leurs transformée de Fourier, alors nous avons ces deux relations :

$$TF\{x(t) * y(t)\} = X(f) \cdot Y(f)$$

$$TF\{x(t) \cdot y(t)\} = X(f) * Y(f)$$

I.1.4.2. La corrélation

a. Définition :

Soit f et g deux signaux à énergie finie, la fonction d'intercorrélation $C_{xy}(\tau)$ est définie par l'intégrale suivante :

$$C_{fg} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot g^*(t - \tau) dt$$

Ce produit scalaire mesure le degré de similitude en forme et en position des signaux peuvent être évolués au cours des temps τ .

$C_{fg}(\tau)$ restitue l'énergie d'interaction entre $f(t)$ et $g(t - \tau)$. En effet, Si $C_{fg}(\tau) = 0$, alors ces deux signaux sont décorrélés.

Notant que $C_{fg}(\tau)$ est la fonction d'intercorrélation entre des deux différents signaux f et g , de même on peut définir la fonction d'autocorrélation $C_{ff}(\tau)$ si nous somme devant un traitement qui s'effectue sur le même signal.

b. Propriétés de la corrélation :

-Lorsque $\tau = 0$, la fonction d'autocorrélation est égale à l'énergie du signal

$$C_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)^2 dt = E_x$$

-La fonction d'intercorrélation vérifie la relation suivante :

$$C_{xy}(\tau) = C_{yx}^*(-\tau)$$

Si nous avons un signal réel, sa fonction d'autocorrélation sera une fonction paire

$$C_{xx}(\tau) = C_{xx}(-\tau)$$

-Pour les signaux à énergie infinie, les fonctions d'intercorrélation et d'autocorrélation seront définies comme suit :

$$C_{xx} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot x(t - \tau) dt$$

$$C_{xy} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \cdot y(t - \tau) dt$$

-La relation entre la corrélation et la convolution est la suivante :

$$C_{xy}(\tau) = x(-\tau) * y(\tau)$$

-La densité spectrale et interspectrale :

La densité spectrale d'énergie (DSE) :

Soit $x(t)$, $X(f)$ respectivement un signal réel et à énergie finie et sa transformée de Fourier, on définit la densité spectrale $S_{xx}(f)$ de $x(t)$, le carré du module de la transformée de Fourier $X(f)$.

$$S_{xx}(f) = |X(f)|^2$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

La densité spectrale d'énergie traduit la répartition de l'énergie de $x(t)$ par rapport à la fréquence. De même nous aurons la densité interspectrale d'énergie (DIE) entre deux différents signaux $x(t)$ et $y(t)$

$$S_{xy}(f) = X(f) \cdot Y(f)^*$$

Avec : * est le complexe conjugué.

$$TF\{C_{xy}(\tau)\} = S_{xy}(f)$$

La densité spectrale de puissance (DSP) :

Soit $y(t)$, $Y(f)$ respectivement un signal réel et à énergie infinie, c'est-à-dire à puissance moyenne finie et sa transformée de Fourier, on définit la densité spectrale $S_{yy}(f)$ de $y(t)$, comme suit :

$$S_{yy}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |Y_T(f)|^2$$

Avec : $Y_T(f) = TF\{y_T(t)\}$ et $y_T(t) = y(t) \cdot \text{rect}_T(t)$

De même nous aurons la densité interspectrale de puissance (DIE) entre deux différents signaux $x(t)$ et $y(t)$ à puissance moyenne finie non nulle :

$$S_{xy}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} [X_T(f) \cdot Y_T(f)]$$

Avec :

$$X_T(f) = TF\{x_T(t)\} \text{ et } x_T(t) = x(t) \cdot \text{rect}_T(t)$$

$$Y_T(f) = TF\{y_T(t)\} \text{ et } y_T(t) = y(t) \cdot \text{rect}_T(t)$$

I.2. Analyse spectrale des signaux

I.2.1. Introduction :

La décomposition en série de Fourier et la transformée de Fourier permet de donner une représentation des signaux pour la théorie de l'information en exprimant ces signaux en fonctions de leurs harmoniques.

I.2.2. Décomposition en séries de Fourier (forme trigonométrique réelle)

Soit $s(t)$ un signal périodique de période T et continu, sa décomposition en série de Fourier selon la forme trigonométrique permet de le représenter en sommes de sinusoides qui permet de passer facilement du domaine temporel au domaine fréquentiel.

Pour tout signal $s(t)$ réel avec $s(t) = s(t + n T_0)$, on peut écrire :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n2\pi f_0 t) + b_n \sin(n2\pi f_0 t)] \quad (1)$$

Avec : a_0 est la valeur moyenne de $s(t)$

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) dt \quad , \text{ valeur moyenne du signal}$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) \cos(n2\pi f_0 t) dt \quad \text{Pour } n \geq 1$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) \sin(n2\pi f_0 t) dt \quad \text{Pour } n \geq 1$$

Remarque :

On appelle le signal de pulsation ($2\pi f_0$) le fondamental, et les signaux de pulsation ($n2\pi f_0$) les harmoniques de rang n .

Si $s(t)$ est paire alors $b_n=0$.

Si $s(t)$ est impaire alors $a_n=0$.

L'expression (1) peut être formulée :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n2\pi f_0 t + \varphi_n) \quad (2)$$

$$\text{Avec : } C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \text{et} \quad \varphi_n = \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

Le spectre ne fréquence du signal $s(t)$ est composé de plusieurs raies à savoir, de la valeur moyenne a_0 , du fondamental à la fréquence f_0 d'amplitude C_1 et des différents harmoniques situées à des fréquences multiples de f_0 d'amplitudes C_n .

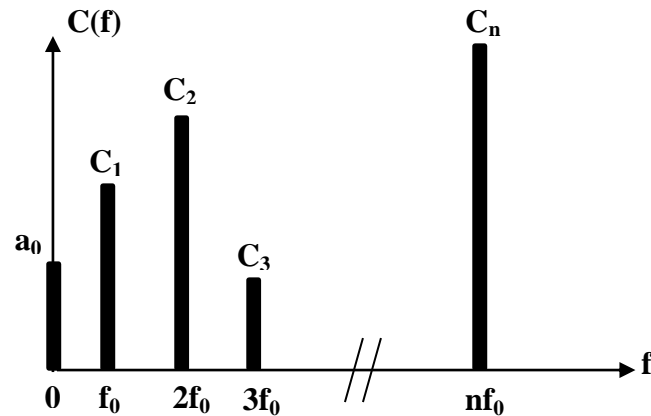


Figure 10. Spectre unilatéral d'amplitude d'un signal périodique

1. Expression sous forme complexe :

En introduisant la notation complexe de $\cos(n2\pi f_0 t)$ et $\sin(n2\pi f_0 t)$, il est possible d'obtenir une écriture complexe de la décomposition en série de Fourier.

Posant :

$$\cos(n2\pi f_0 t) = \frac{e^{jn2\pi f_0 t} + e^{-jn2\pi f_0 t}}{2}$$

$$\sin(n2\pi f_0 t) = \frac{e^{jn2\pi f_0 t} - e^{-jn2\pi f_0 t}}{2j}$$

L'expression (1) sera reformulée comme suit :

$$s(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} S_n e^{jn2\pi f_0 t}$$

Avec : $S_n = \frac{1}{T} \int_T s(t) \cdot e^{-jn2\pi f t} dt$, sont les coefficients de Fourier

Les coefficients complexes S_n sont reliés aux coefficients a_n et b_n par la relation suivante :

$$S_n = \frac{1}{2}(a_n - j b_n) \quad \text{et} \quad S_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + j b_n) \quad \text{pour} \quad n \geq 1 \quad \text{et} \quad S(0)=a_0$$

S_n sont des valeurs complexes des composantes du spectre du signal $s(t)$, son module et sa phase sont représenté respectivement ci-dessous :

$$S_n = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{C_n}{2}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

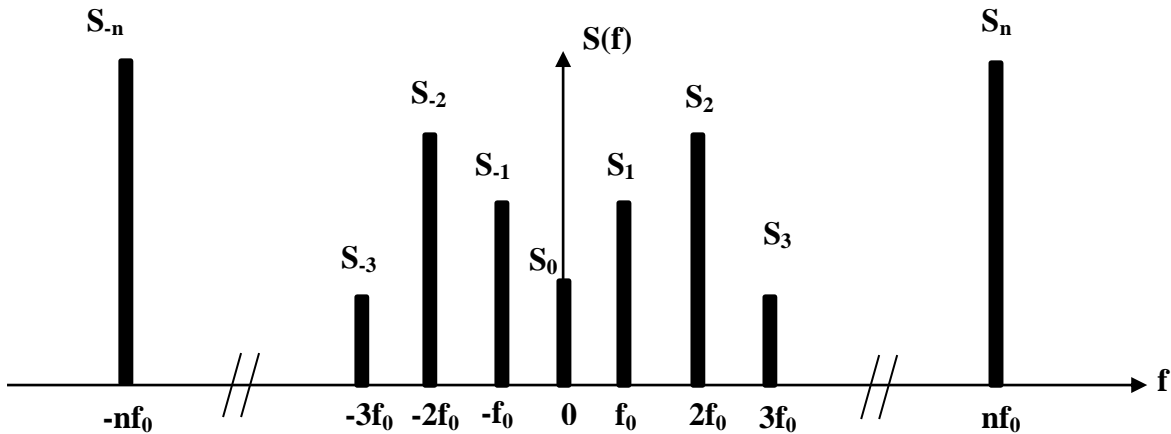


Figure 11. Spectre bilatéral d'amplitude d'un signal périodique

Si $s(t)$ est paire alors $b_n = 0$ et $S_n = S_{-n}$

Si $s(t)$ est impaire alors $a_n = 0$ et $S_n = -S_{-n}$

Le spectre bilatéral d'un signal est toujours paire, le spectre unilatéral d'un signal est impaire.

2. Théorème de Parseval :

Ce théorème établit une relation entre l'énergie du signal $s(t)$ et ses coefficients de Fourier décrivant la répartition de l'énergie ou bien la puissance selon les différentes harmoniques de signal.

$$\int_T |s(t)|^2 dt = \sum_{-\infty}^{+\infty} |C_n|^2$$

Notant que le retard du signal dans l'espace temporel n'influe pas sur son spectre fréquentiel

I.2.3. La transformée de Fourier

1. Introduction

Contrairement à la décomposition en série de Fourier qui représente les harmoniques des signaux strictement périodiques, la transformée de Fourier donne la représentation spectrale des signaux déterministe non périodique.

2. Définition

Soit $s(t)$ un signal déterministe, borné, sa transformée de Fourier $S(f)$ est donnée comme suit :

$$\begin{array}{ccc}
 s(t) & \longrightarrow & \boxed{\text{T.F}} & \longrightarrow & S(f) \\
 & & \text{\scriptsize } S(f) = TF\{s(t)\} & & \\
 & & S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt & &
 \end{array}$$

La transformée de Fourier inverse de $S(f)$ est calculée comme suit :

$$\begin{array}{ccc}
 S(f) & \longrightarrow & \boxed{\text{T.F inverse}} & \longrightarrow & s(t) \\
 & & \text{\scriptsize } s(t) = TF^{-1}\{S(f)\} & & \\
 & & s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) \cdot e^{+j2\pi ft} df & &
 \end{array}$$

3. Propriétés

a. Linéarité :

$x(t)$ et $y(t)$ deux signaux :

$$TF\{a \cdot x(t) + b \cdot y(t)\} = a \cdot TF\{x(t)\} + b \cdot TF\{y(t)\}$$

b. Dualité :

Soit $x(t)$ un signal et $X(f)$ sa transformée de Fourier.

Le signal temporel $X(t)$ à pour une transformée de Fourier $x(-f)$

c. Translation :

Soit le signal $s(t) = x(t + \tau)$.

$$S(f) = TF\{x(t + \tau)\} = X(f) \cdot e^{i2\pi f\tau}$$

d. Dilatation et contraction temporelle :

$$S(f) = TF\{x(a \cdot t)\} = \frac{1}{|a|} \cdot X\left(\frac{f}{a}\right)$$

e. Dérivation :

Soit $s(t)$ la dérivée du signal $s(t)$, $\mathbf{s(t) = \frac{d x(t)}{dt}}$

$$\mathbf{S(f) = TF\{s(t)\} = j2\pi f \cdot X(f)}$$

f. La convolution dans le domaine spectral :

Soit deux signaux $x(t)$ et $y(t)$, le produit de convolution entre deux signaux dans le domaine temporel et le produit de leurs spectres dans le domaine fréquentiel.

$$\mathbf{TF\{x(t) \cdot y(t)\} = X(f) \cdot Y(f)}$$

4. Théorème de Parseval-Plancherel :

Ce théorème établit une relation entre l'énergie du signal $s(t)$ calculée en intégrant dans les deux domaines temporel et fréquentiel.

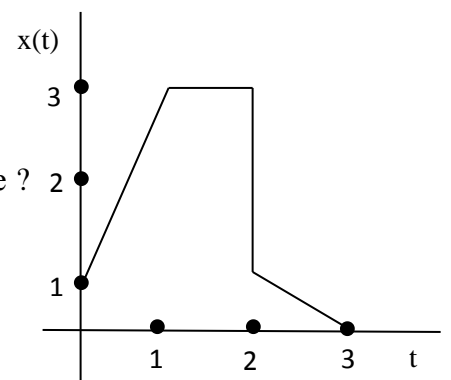
Soit le signal $s(t)$ et sa transformée de Fourier $S(f)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(f)|^2 df$$

I.3. Exercices d'application :**Exercice1 :**

Soit le signal $x(t)$:

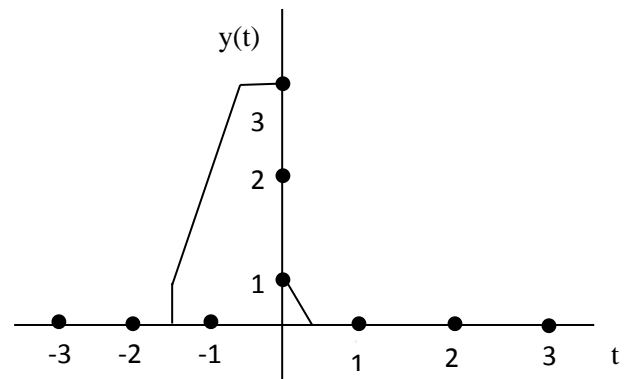
- 1) Donner l'expression analytique du signal $x(t)$, et quelle est sa nature ?
- 2) représenter $y(t) = x(\frac{3}{2}t + 2)$
- 3) Déterminer l'énergie du signal $x(t)$, E_x



Solution :

1) L'expression analytique de $x(t)$:

$$x(t) = \begin{cases} 2t + 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 3 & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \\ -t + 3 & \text{si } 2 \leq t \leq 3 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



2) L'expression analytique de $y(t)$:

$$y(t) = \begin{cases} 3t + 5 & \text{si } -\frac{4}{3} \leq t \leq -\frac{2}{3} \\ 3 & \text{si } -\frac{2}{3} \leq t \leq 0 \\ -\frac{3}{2}t + 1 & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{2}{3} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

3) L'énergie du signal $x(t)$ est : $E_x = \frac{41}{3}$

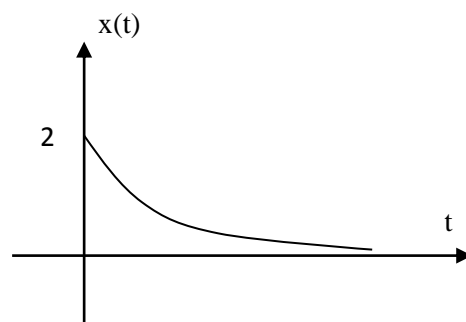
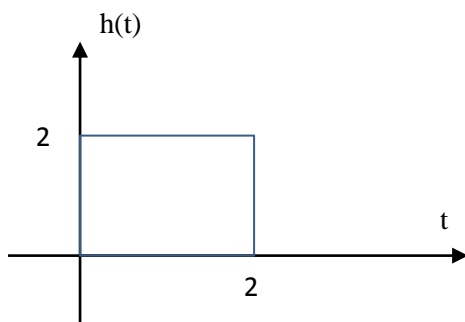
Exercice2 :

Soit deux fonctions $h(t)$ et $x(t)$ définies comme suit :

$$h(t) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$x(t) = \begin{cases} 2 \cdot e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

- 1) Représenter les deux fonctions
- 2) Déterminer le produit de convolution $y(t) = h(t) * x(t)$

Solution :

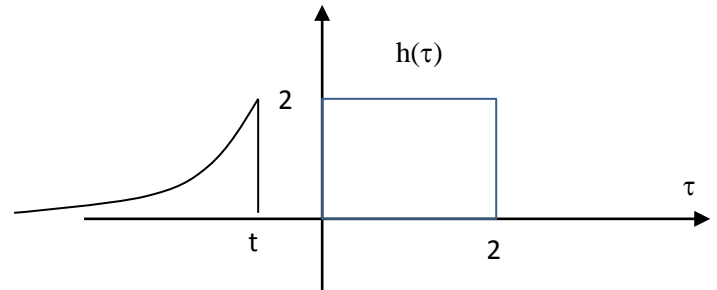
$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot x(t - \tau) d\tau$$

$$= x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau$$

1^{er} cas : $t < 0$

Pas d'intersection entre les deux signaux

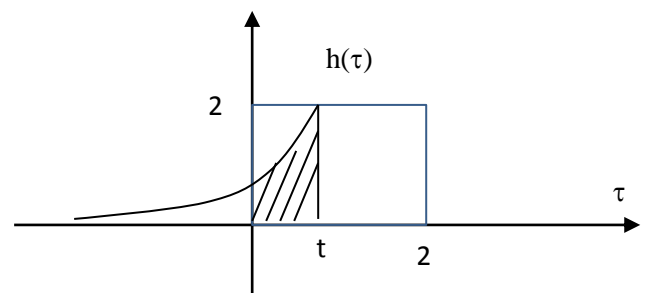
$$y(t) = 0$$



2^{eme} cas : $0 \leq t < 2$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot x(t - \tau) d\tau$$

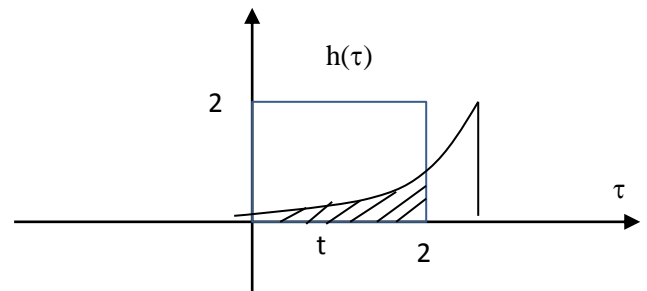
$$y(t) = \int_0^t 2 \cdot e^{-(t-\tau)} d\tau = 4 \cdot e^{-t} (e^t - 1)$$



3^{eme} cas : $2 > t$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot x(t - \tau) d\tau$$

$$y(t) = \int_0^2 2 \cdot 2e^{-(t-\tau)} d\tau = 4 \cdot e^{-t} (e^2 - 1)$$



En récapitulant, $y(t)$ aura comme expression analytique suivante :

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 4e^{-t}(e^t - 1) & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ 4e^{-t}(e^2 - 1) & \text{si } t > 2 \end{cases}$$

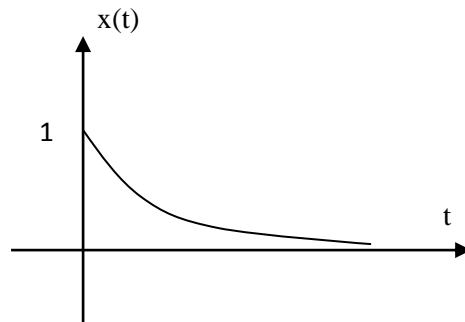
Exercice 3:

Soit le signal $x(t)$ défini comme suit :

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

- 1) Représenter $x(t)$
- 2) Déterminer la fonction d'autocorrélation $C_{xx}(\tau)$

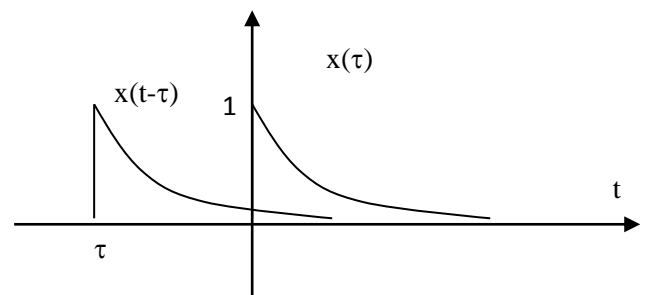
Solution :



1^{er} cas : $\tau < 0$

$$C_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x(t - \tau) dt$$

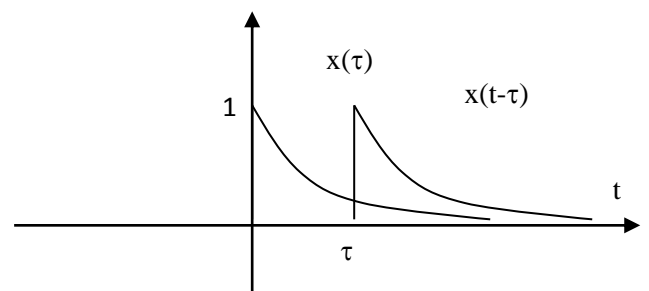
$$C_{xx}(\tau) = \int_0^{+\infty} e^{-at} \cdot e^{-a(t-\tau)} dt$$



$$C_{xx}(\tau) = \frac{1}{2a} e^{a\tau}$$

2^{eme} cas : $\tau \geq 0$

$$C_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x(t - \tau) dt$$

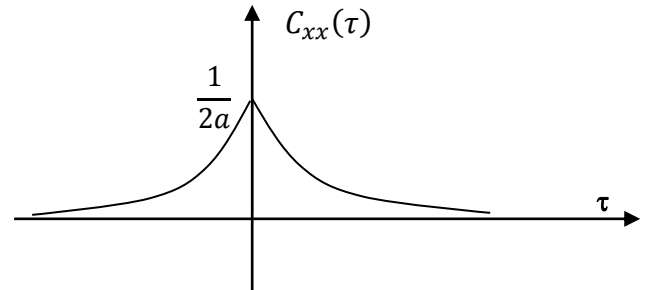


$$C_{xx}(\tau) = \int_{\tau}^{+\infty} e^{-at} \cdot e^{-a(t-\tau)} dt$$

$$C_{xx}(\tau) = \frac{1}{2a} e^{-a\tau}$$

En récapitulant, $C_{xx}(\tau)$ aura comme expression analytique suivante :

$$C_{xx}(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2a} e^{a\tau} & \text{si } \tau < 0 \\ \frac{1}{2a} e^{-a\tau} & \text{si } \tau \geq 0 \end{cases}$$



En regardant la représentation de la fonction d'autocorrélation $C_{xx}(\tau)$, à $\tau = 0$, nous avons le maximum de ressemblance.

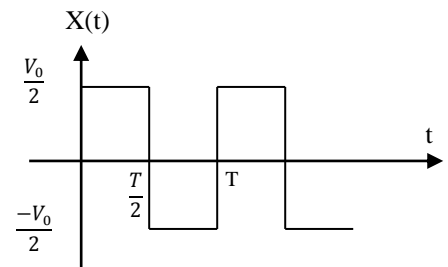
Exercice 4:

Soit le signal $x(t)$ représenté comme suit :

- 1) Calculer la valeur moyenne ainsi la puissance moyenne

Du signal $x(t)$

- 2) Calculer sa décomposition en série de Fourier.



Solution :

- 1) La valeur moyenne de $x(t)$ est :

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt = 0$$

- 2) La puissance moyenne de $x(t)$:

$$p_m = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = \frac{V_0^2}{4} w$$

- 3) Les coefficients a_n et b_n

Comme le signal est impaire, $a_n=0$.

$$b_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) \sin(n2\pi ft) dt = \frac{V_0}{n\pi} [1 - \cos(n\pi)]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n \text{ est paire} \\ n \text{ est impaire} \end{array} \quad \begin{array}{l} b_n = 0 \\ b_n = \frac{2V_0}{n\pi} \end{array} \right\}$$

Exercice 5:

Soit deux signaux : $x(t) = \text{Rect}\left(\frac{t}{T}\right)$, $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

- 1) Calculer la transformée de Fourier de $y(t)$.
- 2) Dédurre la transformée de Fourier de $x(t)$.

Solution :

1) Nous avons $x(t) = \varepsilon\left(t + \frac{T}{2}\right) - \varepsilon\left(t - \frac{T}{2}\right)$

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dx} = \delta\left(t + \frac{T}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

Alors : $Y(f) = TF\{y(t)\} = TF\left\{\delta\left(t + \frac{T}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{T}{2}\right)\right\}$

$$Y(f) = e^{j\pi f T} - e^{-j\pi f T}$$

2) La transformée de $x(t)$ sera comme suit :

$$Y(f) = j2\pi f \cdot X(f)$$

$$X(f) = \frac{Y(f)}{j2\pi f} = \frac{e^{j\pi f T} - e^{-j\pi f T}}{j2\pi f} = T \cdot \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}$$

$$X(f) = T \cdot \text{sinc}(fT)$$

CHAPITRE II

ANALYSE ET SYNTHÈSE DES FILTRES ANALOGIQUES

II.1. Filtrage analogique

II.1.1. Introduction :

Un filtre est un circuit qui modifie les composantes spectrales du signal, en effet il laisse passer une partie des fréquences du signal formant une bande passante et bloque d'autres fréquences constituant une bande d'atténuation ou bande d'arrêt.

II.1.2. Fonction de Transfert :

Pour le régime sinusoïdal permanent, on peut trouver plusieurs fonctions de transfert selon les deux grandeurs électrique d'entrée et de sortie.

$$T_u = \frac{U_s}{U_e} \quad , \quad T_i = \frac{I_s}{I_e} \quad , \quad T_z = \frac{U_s}{I_e} \quad , \quad T_y = \frac{I_s}{U_e}$$

Dans cette partie, nous considérons par défaut les fonctions de transfert en tension.

II.1.3. Gain d'un filtre :

La fonction de transfert en tension d'un filtre nommée $H(j\omega)$ est un rapport entre la tension de sortie et celle de l'entrée, ce sont des valeurs complexes.

$$H(j\omega) = \frac{U_s}{U_e}$$

En l'exprimant en fonction de son module et sa phase, on aura :

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| \cdot e^{j\varphi}$$

Avec : $|H(j\omega)|$ est le module, $\varphi = \arg[H(j\omega)]$ est la phase.

Le gain du filtre est exprimé en décibel, il est calculé par la relation suivante :

$$G_{dB} = 20 \cdot \log(|H(j\omega)|)$$

II.1.4. Diagramme de Bode :

Le diagramme de Bode permet de faire une représentation graphique du gain en dB et la phase d'une fonction de transfert en fonction des pulsations, permettant de voir le comportement d'un filtre quelconque.

Notant que l'échelle des abscisses est logarithmique permettant de représenter le gain et la phase sur une grande plage de fréquence.

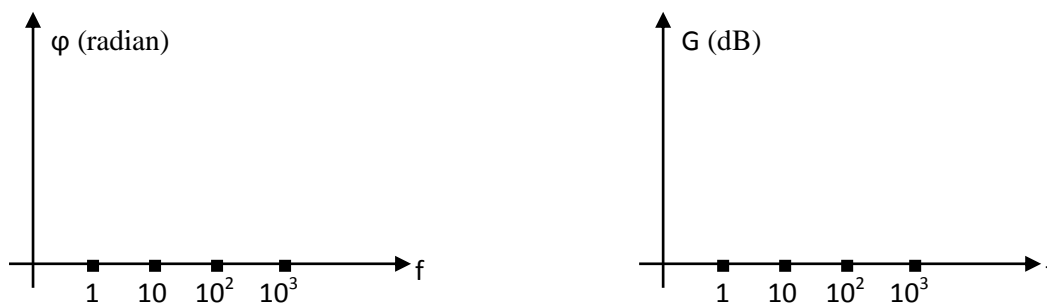


Figure II.1. Diagramme de Bode

1. fréquence de coupure :

La fréquence de coupure d'un filtre réel est la fréquence à laquelle l'amplitude de sortie est à $\frac{1}{\sqrt{2}}$ de la valeur maximale :

$$|H(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}} |H(j\omega)|_{max}$$

Le terme $\frac{1}{\sqrt{2}}$ correspond à une diminution de la moitié de la puissance émise.

Le gain à la fréquence de coupure est donné par la relation suivante :

$$G_c = 20 \cdot \log(|H(j\omega)|_c) = 20 \cdot \log\left(\frac{|H(j\omega)|_{max}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$G_c = 20 \cdot \log(|H(j\omega)|_{max}) - 20 \log(\sqrt{2})$$

$$G_c = G_{max} - 3dB$$

II.1.5. Ordre du filtre :

L'ordre d'un filtre n détermine l'efficacité avec laquelle on supprime les fréquences par rapport à la fréquence de coupure. Plus l'ordre d'un filtre augmente, plus la pente de la transition entre les régions d'atténuation et l'amplification est forte ce qui rend son efficacité élevée.

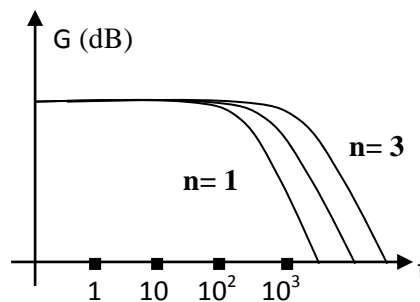


Figure II.2. Ordre du filtre

II.1.6. Types de filtres

On distingue deux familles de filtres :

- a. **Les filtres passifs** : conçus à partir de composants passifs (résistance, inductance et capacité). Ils ne permettent pas d'amplifier (la puissance de sortie est nécessairement inférieure à la puissance d'entrée).
- b. **Les filtres actifs** : réalisés à partir d'un ou plusieurs amplificateurs opérationnels, transistors et composants passifs. Ils nécessitent une alimentation spécifique, permettent d'amplifier le signal.

On peut classer ces filtres en deux catégories, les filtres idéals et les filtres réels où on a une bande de transition entre les bandes passantes et d'arrêt. Leurs spécifications sont données à l'aide d'un gabarit précisant les différentes bandes citées précédemment.

II.1.7. Exemples des filtres idéals :

a. Filtre passe bas 1^{re} ordre (passif)

Pour déterminer la fonction de transfert, il faut se rappeler que l'impédance de la capacité est $\frac{1}{j\omega C}$ est d'appliquer le diviseur de tension :

$$V_s = \frac{1/j\omega C}{1/j\omega C + R} V_e$$

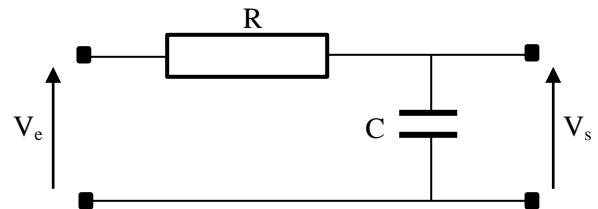


Figure II.3. Filtre passe bas

$$h(j\omega) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

De cette formule, on peut tirer le module et la phase de la fonction de transfert.

Le module est : $H(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}}$

La phase est : $\varphi(\omega) = -\text{Arctan}(RC\omega)$

L'expression de la fonction de transfert peut s'écrire de la forme suivante :

$$h(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

Avec la pulsation de coupure est $\omega_c = \frac{1}{RC}$ et la fréquence de coupure est $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$

Exemple d'un filtre actif

En utilisant un amplificateur opérationnel, ce montage a les mêmes caractéristiques que le filtre passif précédent. Cependant, il est suivi par un amplificateur à haute impédance d'entrée et très faible impédance de sortie qui n'influe pas sur les composants qui suivront.

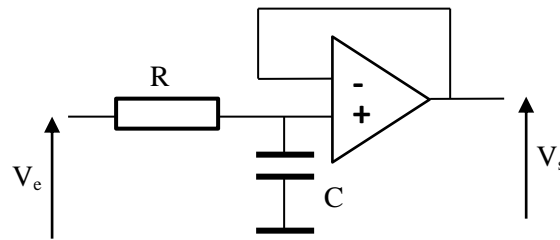


Figure II.4. Filtre passe bas actif

b. Filtre passe haut 1^{er} ordre

Appliquant le diviseur de tension

$$V_s = \frac{R}{1/jC\omega + R} V_e$$

$$h(j\omega) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

$$\text{Le module est : } H(j\omega) = \frac{RC\omega}{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}}$$

$$\text{La phase est : } \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(RC\omega)$$

L'expression de la fonction de transfert peut s'écrire de la forme suivante :

$$h(j\omega) = \frac{j \frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$$

Avec la pulsation de coupure est $\omega_c = \frac{1}{RC}$ et la fréquence de coupure est $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$

Exemple d'un filtre actif

En utilisant un amplificateur opérationnel, on aura un filtre passe haut actif

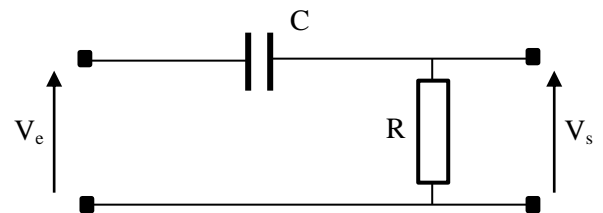


Figure II.5. Filtre passe haut

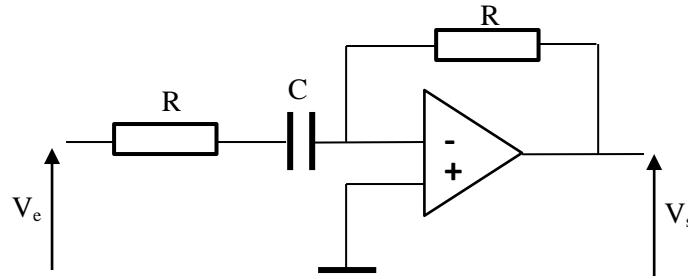


Figure II.6. Filtre passe haut actif

$$h(j\omega) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{-jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

$$\text{Le module est : } H(j\omega) = \frac{RC\omega}{\sqrt{1+R^2C^2\omega^2}}$$

$$\text{La phase est : } \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(RC\omega)$$

c. Filtre passe bas de second ordre :

Le filtre passe bas de second ordre est réalisé en plaçant en cascade deux filtre passe bas de premier ordre.

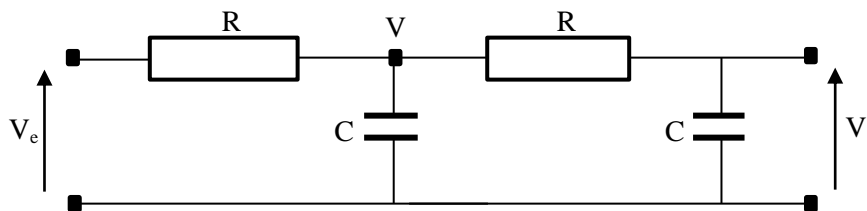


Figure II.7. Filtre passe bas second ordre

Appliquant le diviseur de tension sur les deux circuits indépendamment :

$$V_s = \frac{1/jC\omega}{1/jC\omega + R} V$$

$$V = \frac{1/jC\omega}{1/jC\omega + R} V_e$$

En combinant entre les deux équations précédentes, on aura :

$$V_s = \left[\frac{1/jCw}{1/jCw + R} \right]^2 V_e$$

$$H(jw) = \frac{V_s}{V_e} = \left[\frac{1/jCw}{1/jCw + R} \right]^2$$

Après développement, on aura l'expression finale de la fonction de transfert présentée ci-dessous:

$$H(jw) = \frac{1}{1 + 2j\xi \frac{w}{w_c} - \frac{w^2}{w_0^2}}$$

Avec ξ est le facteur d'amortissement du filtre, le module et la phase de $H(jw)$ est comme suit :

Le module est :
$$|H(jw)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{w^2}{w_c^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{w^2}{w_c^2}}}$$

La phase est :
$$\varphi(w) = -\text{Arctan} \left[\frac{2\xi \frac{w}{w_c}}{1 - \left(\frac{w}{w_c}\right)^2} \right]$$

Alors le gain $G(w) = -20\log\left(\sqrt{\left(1 - \frac{w^2}{w_c^2}\right)^2 + 4\xi^2 \frac{w^2}{w_c^2}}\right)$

Lorsque $w = w_c$, on aura :

$$G(w_c) = -20\log(2\xi) \quad \text{et la phase } \varphi(w_c) = -\frac{\pi}{2}$$

d. Filtre passe haut de second ordre :

Le filtre passe haut de second ordre est réalisé en plaçant en cascade deux filtre passe haut de premier ordre.

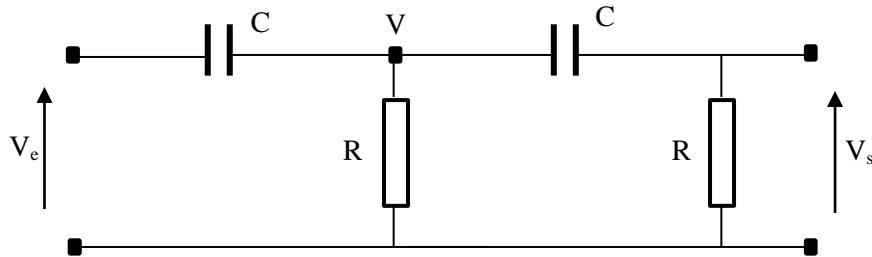


Figure II.8. Filtre passe haut second ordre

Appliquant le diviseur de tension sur les deux circuits indépendamment :

$$V_s = \frac{R}{1/jC\omega + R} V$$

$$V_s = \frac{R}{1/jC\omega + R} V_e$$

En combinant entre les deux équations précédentes, on aura :

$$V_s = \left[\frac{R}{1/jC\omega + R} \right]^2 V_e$$

$$H(j\omega) = \frac{V_s}{V_e} = \left[\frac{R}{1/jC\omega + R} \right]^2$$

Après développement, on aura l'expression finale de la fonction de transfert présentée ci-dessous:

$$H(j\omega) = \frac{\frac{j^2\omega^2}{\omega_0^2}}{1 + 2j\xi \frac{\omega}{\omega_c} + \frac{j^2\omega^2}{\omega_0^2}}$$

Remarque :

Les expressions des différents filtres en second ordre peuvent être reformulées en faisant apparaître un paramètre Q appelé facteur de qualité qui est en fonction du facteur d'amortissement ξ comme suit :

$$Q = \frac{1}{2\xi}$$

Le facteur de qualité est relié à la bande passante par la relation suivante :

$$Q = \frac{f_c}{\Delta f}$$

Avec Δf est la bande passante du filtre.

II.1.8. Exemples des filtres réels :

a. Filtres de Butterworth :

Les filtres de Butterworth sont les filtres construits à l'aide des polynômes de Butterworth, et cela afin d'approximer les fonctions de transfert des filtres passe bas. Le module de sa fonction de transfert est de la forme suivante :

$$H_n(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega}{\omega_c})^{2n}}} \quad \text{ou bien} \quad H_n(p) = \frac{1}{\sqrt{1+(-1)^n s^{2n}}}$$

Quelque soit l'ordre du filtre, la fréquence de coupure du filtre sera 1.

Ci-dessous, les dénominateurs des fonctions de transfert passe bas de Butterworth en fonction de la variable de Laplace (jusqu'au degré 5).

Degré (n)	Polynôme de dénominateur
1	$1 + p$
2	$p^2 + 1.41 p + 1$
3	$(p + 1)(p^2 + p + 1)$
4	$(p^2 + 0.765 p + 1)(p^2 + 1.848 p + 1)$
5	$(p + 1)(p^2 + 0.618p + 1)(p^2 + 1.618 p + 1)$

Table II.1. polynome de Butterworth

Le digramme de Bode de ce filtre avec différents ordres est représenté dans la figure suivante :

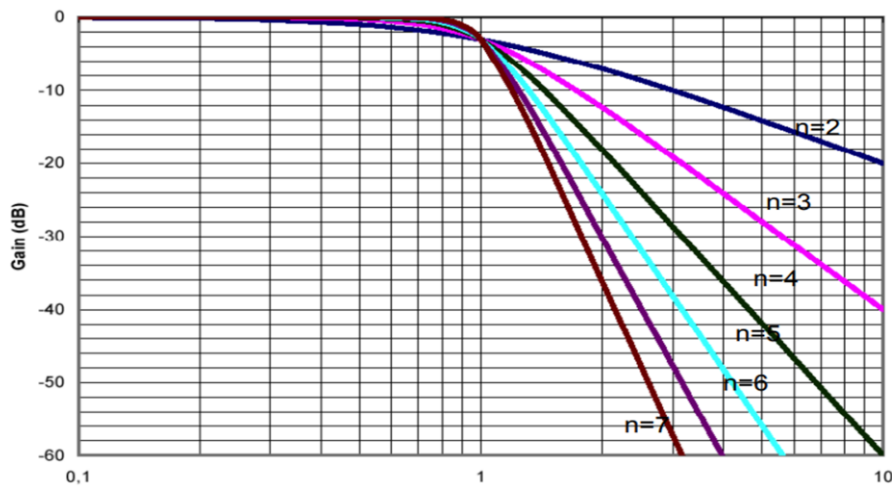


Figure II.9. Filtre de Butterworth avec différents ordre

b. Filtre de Chebyshev

Les filtres de Chebyshev sont les filtres construits à l'aide des polynômes de Chebyshev, leurs module de la fonction de transfert est de la forme suivante :

$$H(w) = \frac{H_0}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 C_n^2\left(\frac{w}{w_c}\right)}}$$

Avec $\begin{cases} C_n(u) = \cos(n \arccos(u)) & \text{pour } 0 < u < 1 \text{ ou } 0 < w < w_0 \\ C_n(u) = \text{ch}(n \text{ arcch}(u)) & \text{pour } u > 1 \text{ ou } w > w_0 \end{cases}$

Le paramètre ε définit la relation entre l'atténuation en bande passante par la formule suivante :

$$\varepsilon^2 = 10^{\Delta f / 10} - 1$$

Avec Δf en dB.

Ci-dessous, les dénominateurs des fonctions de transfert passe bas de Chebyshev en fonction de la variable de Laplace avec $\varepsilon = 0.5089$ et $\Delta f = 1.0dB$

Degré (n)	Polynôme de dénominateur
1	$1.965 + p$
2	$p^2 + 1.098 p + 1.103$
3	$(p + 0.494)(p^2 + 0.494p + 0.994)$
4	$(p^2 + 0.279 p + 0.987)(p^2 + 0.674 p + 0.279)$
5	$(p + 0.289)(p^2 + 0.179p + 0.988)(p^2 + 0.468 p + 0.429)$

Table III.2. polynome de Chebyshev

Le digramme de Bode de ce filtre avec différents ordres respectant les paramètres précédents est représenté dans la figure suivante :

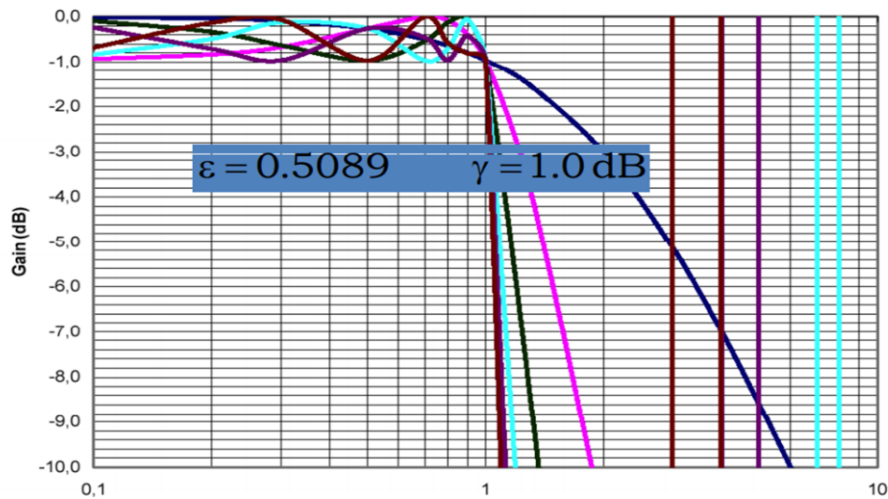


Figure II.10. Filtre de Chebyshev avec différents ordre

II.1.9. Exercices d'application

Exercice 1:

Calculer $x(t)$ la transformée inverse de $X(p)$ donnée comme suit :

$$X(p) = \frac{p^2 + p + 1}{p^2(p + 1)^3}$$

Solution :

Soit la décomposition en élément simple de $X(p)$

$$X(p) = \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{C}{(p + 1)^3} + \frac{D}{(p + 1)^2} + \frac{E}{(p + 1)}$$

Après calcul on aura les valeurs des inconnues comme suit :

$$A = 1, B = -2, C = 1, D = 1 \text{ et } E = 2$$

$$X(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{2}{p} + \frac{1}{(p + 1)^3} + \frac{1}{(p + 1)^2} + \frac{2}{(p + 1)}$$

On utilisant le tableau précédant, nous auront l'expression suivante de $x(t)$

$$x(t) = \left(t - 2 + \frac{t^2}{2} \cdot e^{-t} + t \cdot e^{-t} + 2 \cdot e^{-t} \right) \cdot \varepsilon(t)$$

Exercice 2:

Déterminer le diagramme de Bode du filtre passe bas, premier ordre.

Solution :

La forme générale de la fonction de transfert du filtre passe bas premier ordre est :

$$h(j\omega) = \frac{K}{1 + jRC\omega}$$

Avec K est un facteur d'amplification.

Le gain est comme suit :

$$G_{dB} = 20 \log(|H(j\omega)|) = 20 \log(k) - 10 \log\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right)$$

La phase est calculée comme suit :

$$\varphi(\omega) = -\text{Arctan}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

$$\begin{cases} \omega \ll \omega_c & G_{dB} = 20 \log(k) & \text{et} & \varphi(\omega) = 0 \\ \omega \gg \omega_c & G_{dB} = 20 \log(k) + 20 \log(\omega_c) - 20 \log(\omega) & \text{et} & \varphi(\omega) = -\pi/2 \\ \omega = \omega_c & G_{dB} = 20 \log(k) - 3dB & \text{et} & \varphi(\omega) = -\pi/4 \end{cases}$$

Le diagramme de Bode (module et phase) est représenté dans les deux figures suivantes :

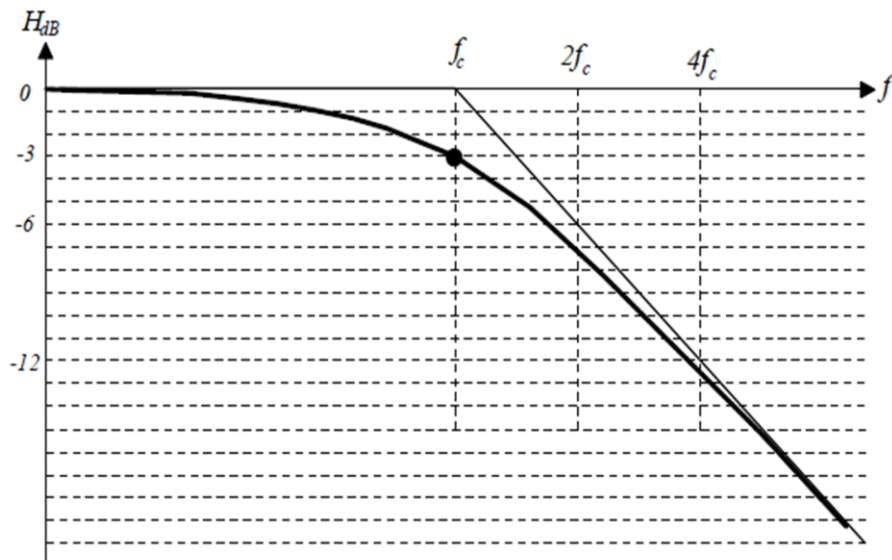


Figure II.11. Diagramme de Bode (module)

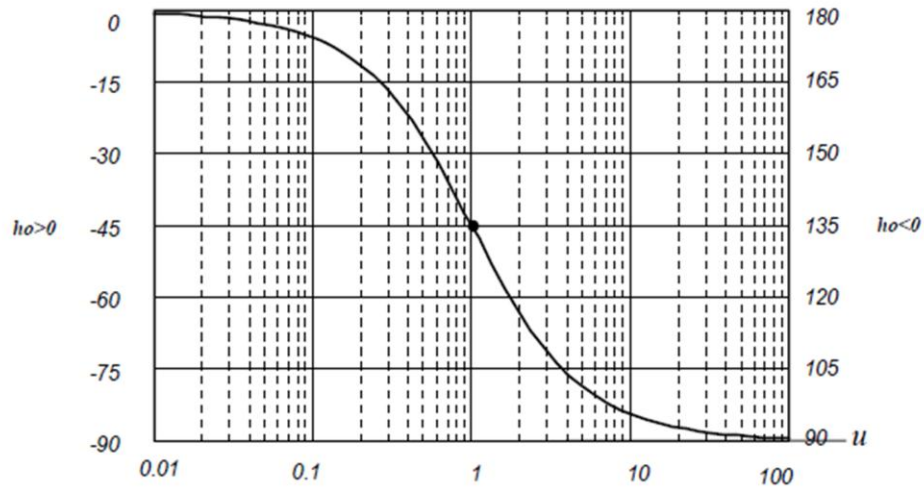


Figure II.12. Diagramme de Bode (phase)

Exercice 3:

Déterminer l'ordre du filtre passe bas de Butterworth qui donne une atténuation de 40dB à la fréquence: $\omega = 2\omega_c$

Solution :

De l'expression du module de filtre, nous aurons

$$|H_n(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\frac{\omega}{\omega_c})^{2n}} \quad \text{Avec} \quad \frac{\omega}{\omega_c} = 2$$

$$10^{-4} = \frac{1}{1 + (2)^{2n}} \quad , \text{ donc } n \text{ est exprimé comme suit : } n = \frac{\log(10^4 - 1)}{2 \log(2)}$$

Nous trouvons à la fin $n = 6.64$ à savoir l'ordre du filtre est **n=7**

CHAPITRE 3

ECHANTILLONNAGE ET SIGNAUX DISCRETS

III.1. Echantillonnage de signaux continus

III.1.1. Introduction :

Les systèmes numériques de traitement sont utilisés de plus en plus vu les différents avantages offerts à savoir : fiabilité, versatilité et la reproductibilité. Le traitement du signal numérique demande une opération de numérisation

des signaux analogiques en passant par ces trois opérations :

- L'échantillonnage pour discrétiser le signal analogique.
- La quantification pour affecter une valeur à chaque échantillon.
- Le codage pour donner à chaque valeur un code.

III.1.2. L'échantillonnage :

Le principe de l'échantillonnage est de transformer un signal à temps continu en un signal à temps discret en prélevant des valeurs instantanées du signal à des instants bien précis.

Soit $s(t)$ un signal continu et $s_e(t)$ son signal échantillonné avec une période d'échantillonnage T_e , et la fréquence d'échantillonnage f_e

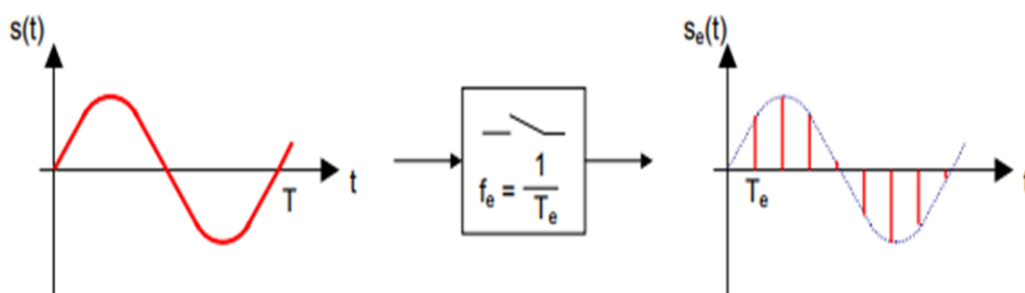


Figure III.1. Signal échantillonné

III.1.3. Echantillonnage idéal :

L'échantillonnage idéal est conçu par une multiplication d'un signal continu $s(t)$ par un peigne de Dirac de période T_e .

$$s_e(t) = s(t) \cdot \delta_{T_e}(t) = s(t) \cdot \sum_{n \rightarrow -\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) = s(nT_e) \cdot \sum_{n \rightarrow -\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e)$$

1. Spectre d'un signal échantillonné

Le spectre du signal échantillonné est calculé comme suit :

$$S_e(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{+\infty} S(f) * \delta(f - nf_e) = S_e(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{n \rightarrow -\infty}^{+\infty} S(f - nf_e)$$

D'après l'équation précédente, on constate que le spectre du signal échantillonné est un spectre infini suite à une périodisation du spectre du signal d'origine $S(f)$ autour des multiples de la fréquence d'échantillonnage f_e avec $f_e = \frac{1}{T_e}$

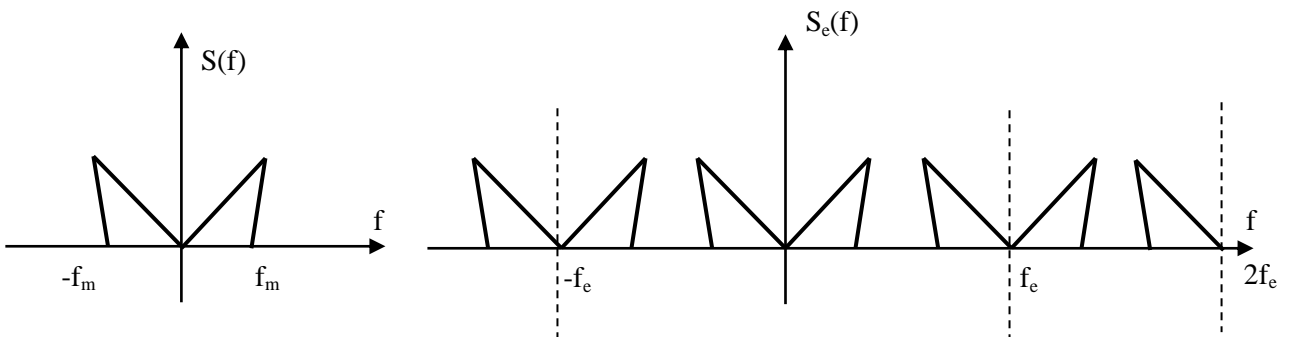


Figure III.2. Spectre d'un signal échantillonné

2. Fréquence d'échantillonnage

Soit $s(t)$ un signal à échantillonner avec f_M sa fréquence maximale qui est supérieur à $\frac{f_e}{2}$, la restitution du signal $s(t)$ est quasiment impossible suite à un recouvrement spectral lors de l'échantillonnage, ce phénomène est appelé sous-échantillonnage, (figure 3).

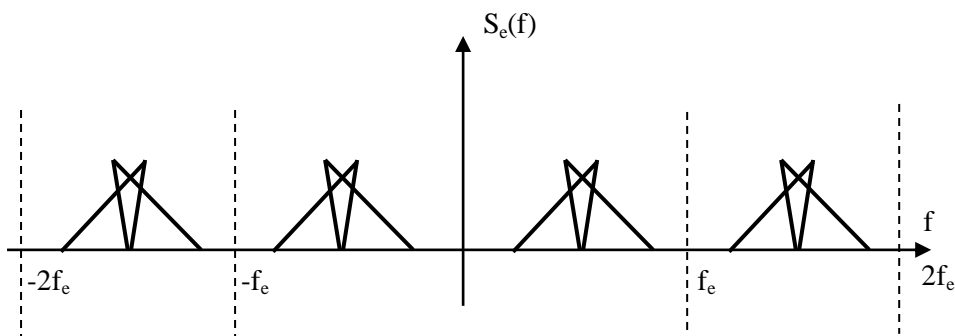


Figure III.3. Sous échantillonné Spectre

3. Théorème de Shannon :

La reconstruction correcte du signal nécessite impérativement que la fréquence d'échantillonnage f_e soit au moins deux fois plus grande que plus grande des fréquences f_M du spectre du signal est cela afin d'éviter le recouvrement spectral.

$$f_e > 2 f_M$$

III.1.4. Quantification

1. Définition

La quantification est une opération d'attribution à une valeur réelle x du signal échantillonné une autre valeur x_q appartenant à un ensemble de valeurs bien espacées par un écart uniforme appelé pas de quantification lorsqu'il s'agit d'une quantification uniforme (linéaire).

2. Quantification uniforme

La quantification uniforme utilise un pas constant de quantification « q » entre chaque valeur x_q .

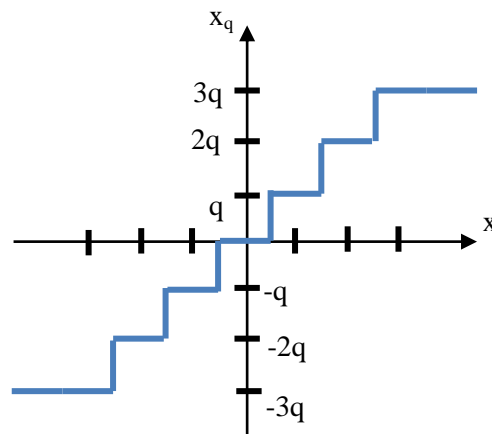


Figure III.4. La quantification

III.1.5. Codage

Le codage consiste à attribuer à un ensemble de valeurs un code binaire, on peut trouver deux modes de codage, à savoir :

1. Codage unipolaire :

Le codage le plus utilisé est le code binaire, un mot binaire s'écrit : $b_1 b_2 \dots b_n$ avec b_1 est le bit poids fort et b_n est le bit de poids faible.

2. Codage bipolaire :

Différents codes peuvent être utilisés, à savoir, le code binaire signé, le code binaire décalé et le complément à 2, voire la table suivante :

D	Signé	Binaire décalé	Complément à 2
3	011	111	011
2	010	110	010
1	001	101	001
0	000/100	100	000
-1	101	011	111
-2	110	010	110
-3	111	001	101
-4	-	000	100

Table III.1. Codage bipolaire

III.2. Signaux discrets

III.2.1. Définition :

Une fois le signal analogique est échantillonné, on aura une séquence ordonnée de valeurs entières ou réelles à un entier $n \in \mathbb{Z}$ qui représente l'histoire en fonction du temps d'un signal.

$$x_e(t) \rightarrow x[n]$$

III.2.2. Représentation graphique

Pour représenter graphiquement un signal numérique, on utilise un diagramme constitué de bâton par analogie avec un graphe d'une fonction analogique mais dans le domaine numérique on ne représente que les valeurs dont l'abscisse est un entier.

Exemple :

Soit $x[n]$, un signal discret définit comme suit :

$$X[n] = \{x[-3], x[-1], x[0], x[1], x[3]\} = \{1, 2, -3, 2, 3\}$$

1. Déterminer la longueur de x
2. écrire $x[n]$ en fonction de $\delta[n]$
3. Représenter $x[n]$

Solution :

1. La longueur de x est : 5
2. $x[n]$ en fonction de $\delta[n]$

$$x[n] = \delta[n + 3] + 2\delta[n + 1] - 3\delta[n] + 2\delta[n - 1] + 3\delta[n - 3]$$

3. La représentation graphique est :

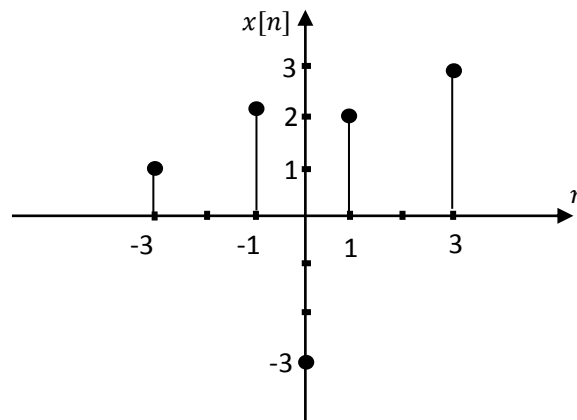


Figure III.5. Représentation graphique de $x[n]$

III.2.3. Signaux élémentaires et usuels :

1. L'impulsion unité (Dirac : $\delta[n]$)

$$\begin{cases} \delta[n] = 0 & \text{si } n \neq 0 \\ \delta[n] = 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

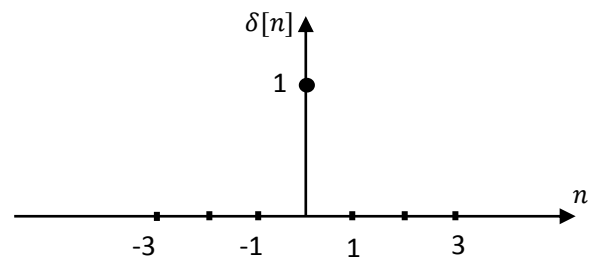


Figure III.6. Impulsion de Dirac

2. Echelon unité ($\varepsilon[n]$)

$$\begin{cases} \varepsilon[n] = 1 & \text{si } n \geq 0 \\ \varepsilon[n] = 0 & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

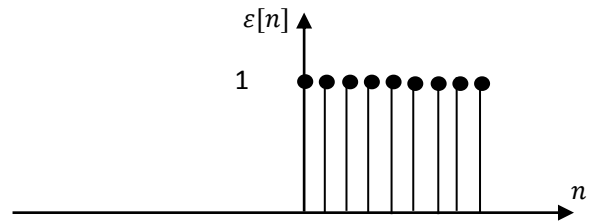


Figure III.7. Echelon unité

3. Rampe unité ($r[n]$)

$$\begin{cases} r[n] = n & \text{si } n \geq 0 \\ r[n] = 0 & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

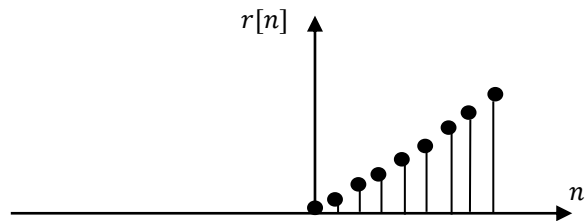


Figure III.8. Rampe unité

4. Train d'impulsion (peigne de Dirac : $e[n]$)

$$e[n] = 1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

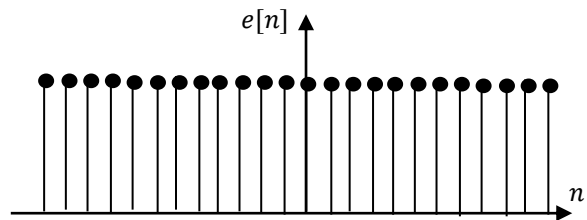


Figure III.9. Train d'impulsions

L'expression de $e[n]$ est la suivante :

$$e[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - k]$$

5. Suite rectangulaire ($rect_a[n]$)

$$rect_a \begin{cases} 1 & \text{pour } -a \leq n \leq a \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

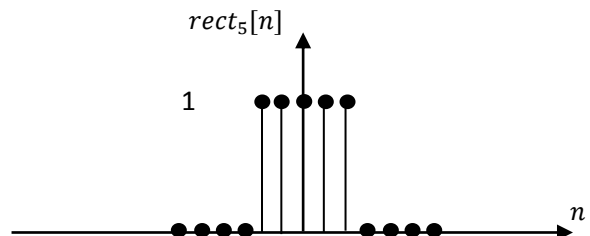


Figure III.10. Rectangle de largeur 5

Notant que :

$$rect_a[n] = \varepsilon[n + a] - \varepsilon[n - a - 1]$$

III.2.4. Opérations sur les signaux discrets

Les opérations les plus utilisées sur les signaux discrets et sont à la bases de tous les traitements des signaux sont : Le produit de convolution et la corrélation. La première opération est à l'origine du filtrage linéaire et la seconde opération est un outil dans la reconnaissance des signaux.

1. Produit de convolution

La est une opération mathématique qui est utilisées dans divers domaines, elle combine deux signaux pour avoir un troisième. On utilise le symbole * pour représenter la convolution, on a une entrée $x[n]$ appliquée à un système $h[n]$ produira une sortie, voir la figure 11.

$$y[n] = x[n] * h[n].$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] * h[n - k]$$

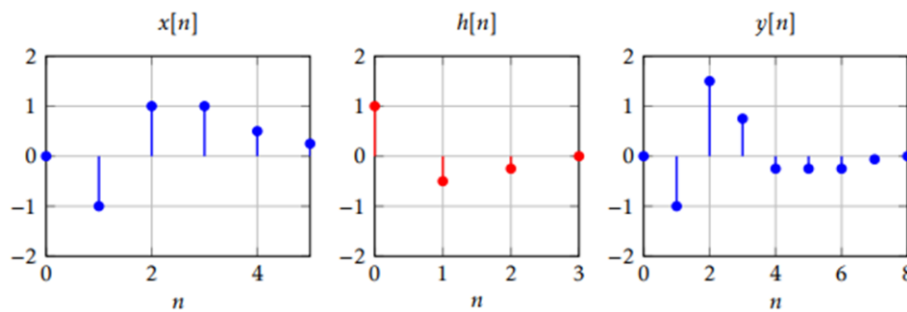


Figure III.11. Exemple de convolution : Système simple

2. Convolution de séquences finies

Il existe plusieurs méthodes de la convolution de séquences finies, soit $x[n]$, $h[n]$ deux séquences finies qui donnent naissance par la convolution un signal $y[n]$. Tout en respectant les règles suivantes :

- L'indice de début de $y[n]$ est la somme de ceux du début de $x[n]$ et $h[n]$
- L'indice de fin de $y[n]$ est la somme de ceux de la fin de $x[n]$ et $h[n]$
- La longueur de $y[n]$ est la somme des deux longueurs de $x[n]$ et $h[n]$ moins 1.

a. Méthode de la somme des colonnes

On met les deux vecteurs $x[n]$ et $h[n]$ l'un au-dessous de l'autre, en suite on multiplie chaque valeur de $h[n]$ par une valeur de $x[n]$, à la fin on fait la somme des colonnes.

Exemple :

La convolution de $h[n] = [1,2,2,3]$ par $x[n] = [2,2,3]$.

$$\begin{array}{r}
 \hline
 h[n] = 1 \quad 2 \quad 2 \quad 3 \\
 x[n] = 2 \quad 2 \quad 3 \\
 \hline
 \quad \quad 2 \quad 4 \quad 4 \quad 6 \\
 \quad \quad \quad 2 \quad 4 \quad 4 \quad 6 \\
 \quad \quad \quad \quad 3 \quad 6 \quad 6 \quad 9 \\
 \hline
 y[n] = [2 \quad 6 \quad 11 \quad 16 \quad 12 \quad 9] \\
 \hline
 \end{array}$$

b. Méthode de la bande glissante

Cette méthode inspire de la précédente méthode, on va replier $x[n]$, pour obtenir $x[-n]$, ensuite le déplacer devant $h[n]$ en multipliant les valeurs de $x[n]$ avec $h[n]$ puis en faisant la somme.

Exemple :

La convolution de $h[n] = [1,2,2,3]$ par $x[n] = [2,2,3]$.

$ \begin{array}{r} 1 \quad 2 \quad 2 \quad 3 \\ 3 \quad 2 \quad 2 \\ \hline 2 \\ \hline Y[0] = \text{somme} = 2 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 1 \quad 2 \quad 2 \quad 3 \\ 3 \quad 2 \quad 2 \\ \hline 2 \quad 4 \\ \hline Y[1] = \text{somme} = 6 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 1 \quad 2 \quad 2 \quad 3 \\ 3 \quad 2 \quad 2 \\ \hline 3 \quad 4 \quad 4 \\ \hline Y[2] = \text{somme} = 11 \end{array} $
$ \begin{array}{r} 1 \quad 2 \quad 2 \quad 3 \\ 3 \quad 2 \quad 2 \\ \hline 6 \quad 4 \quad 6 \\ \hline Y[3] = \text{somme} = 16 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 1 \quad 2 \quad 2 \quad 3 \\ 3 \quad 2 \quad 2 \\ \hline 6 \quad 6 \\ \hline Y[4] = \text{somme} = 12 \end{array} $	$ \begin{array}{r} 1 \quad 2 \quad 2 \quad 3 \\ 3 \quad 2 \quad 2 \\ \hline 9 \\ \hline Y[5] = \text{somme} = 9 \end{array} $

La sortie est : $y[n] = [2 \ 6 \ 11 \ 16 \ 12 \ 9]$

3. La corrélation :

La corrélation est une méthode pour mesurer la similitude entre deux signaux ou pour les comparer.

L'autocorrélation entre le même signal : $R_{xx}[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n].x[n-k]$

L'intercorrélation entre deux signaux : $R_{xy}[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n].y[n-k]$

Notant que la corrélation est la convolution de $x[n]$ et $y[-n]$

III.3. Exercice d'application :

Exercice 1 :

Soit un signal sinusoïdal $s(t)$ défini comme suit :

$$s(t) = \sin(2\pi ft)$$

Avec : $f = \frac{1}{T}$ et T est la période du signal.

$S_e(t)$ est le signal échantillonné avec une période d'échantillonnage $T_e = 0.1 \text{ ms}$

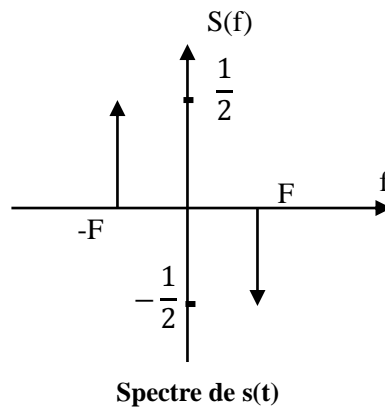
1. Soient $S(f)$ et $S_e(f)$ respectivement la transformée de Fourier de $s(t)$ et $S_e(t)$
 - a. Représenter $S(f)$
 - b. Donner l'expression de la transformée de Fourier de $S_e(t)$: $S_e(f)$
 - c. Représenter $S_e(f)$ pour $-2 \leq n \leq 2$

Solution :

On a un signal sinusoïdal de période T , son échantillonnage donne naissance à un signal échantillonné avec une période d'échantillonnage $T_e = 0.1 \text{ ms}$, (voir figure 1).

- a. On a : $S(f) = \frac{1}{2j} [\delta(f - F) - \delta(f + F)]$ d'où $S(f) = \frac{1}{2j} [\delta(f + F) - \delta(f - F)]$

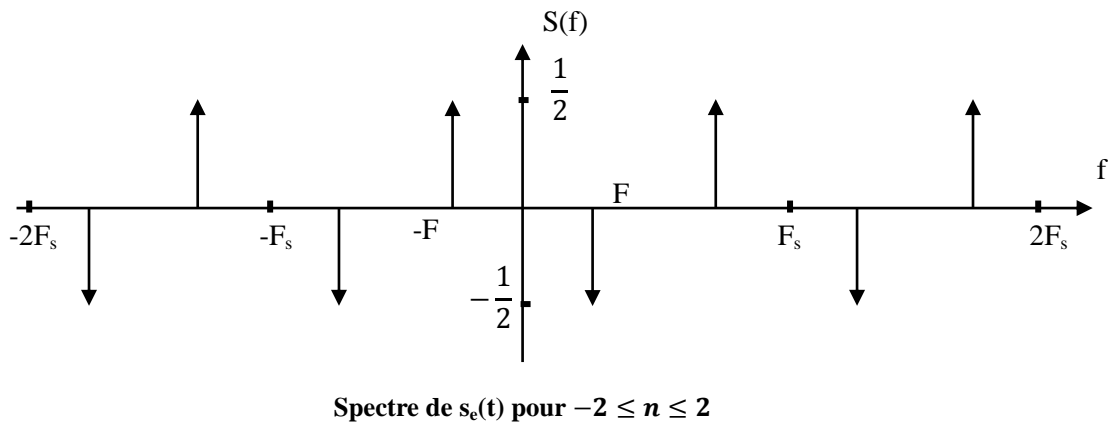
Sa représentation est la suivante :



b. L'expression de $S_e(f)$:

$$S_e(f) = \sum_{n \rightarrow -\infty}^{+\infty} F_e \cdot S(f - n f_e)$$

Sa représentation est la suivante :



Exercice 2 :

Calculer l'intercorrélation entre ces deux séquences numérique :

$$X[n] = [1, 2, 2, 3]$$

$$H[n] = [2, 2, 3]$$

Solution :

On a $R_{xy}[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot y[n - k]$

$$R_{xy}[0] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot y[n] = 2 + 4 + 6 = 12 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & \end{bmatrix}$$

$$R_{xy}[1] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot y[n-1] = 4 + 4 + 9 = 17 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & \end{bmatrix}$$

$$R_{xy}[2] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot y[n-1] = 4 + 6 = 10 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$R_{xy}[3] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot y[n-1] = 6 \quad \begin{bmatrix} & 1 & 2 & 2 & 3 \\ & & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$R_{xy}[-1] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot y[n] = 2 + 6 = 8 \quad \begin{bmatrix} & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & & \end{bmatrix}$$

$$R_{xy}[-2] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot y[n] = 3 \quad \begin{bmatrix} & & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & & & \end{bmatrix}$$

Le résultat est $R_{xy}[k] = [3, 8, 12, 17, 10, 6]$

CHAPITRE IV

TRANSFORMEE DE FOURIER DISCRETE TFD ET RAPIDE FFT

IV.1. Transformée de Fourier Discrète TFD

IV.1.1. Introduction :

La transformée de Fourier discrète (TFD), est un traitement dans le domaine numérique qui transforme une séquence de N échantillons régulièrement répartis dans le temps issue d'échantillonnage d'un signal, et qui donne N points régulièrement espacés dans le domaine des fréquentiel.

IV.1.2. Transformée de Fourier Discrète (TFD)

La transformée de Fourier discrète (TFD) est une forme de la transformée de Fourier d'une fonction $x(t)$ qu'on a vu précédemment mais cette fonction est échantillonnées à des intervalles réguliers pour un nombre N finies de valeurs. La fonction échantillonnée $x(t)$ peut être exprimée par $x[n]$ avec $0 \leq n \leq N - 1$.

Par analogie, on peut définir la transformée de Fourier discrète inverse $X[k]$ avec $0 \leq k \leq N - 1$.

La transformée de Fourier Discrète (TFD) est calculée comme suit :

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot \exp(-j2\pi kn/N)$$

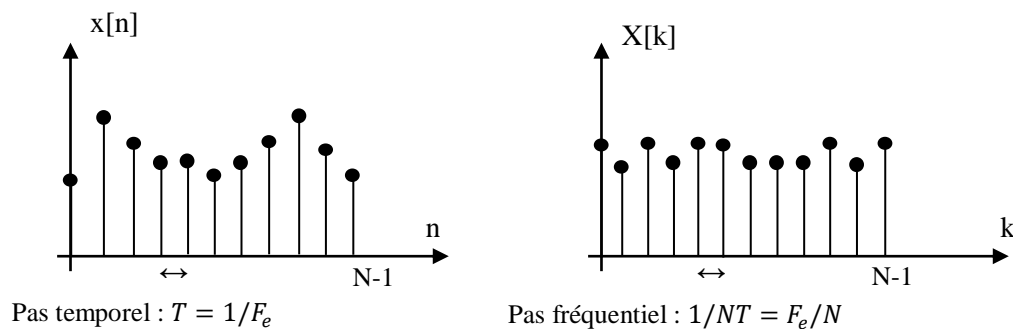


Figure IV.1. TFD d'un signal discret

La figure 1, illustre la relation qui existe entre les pas temporels et fréquentiels.

La transformée de Fourier Discrète inverse (TFDI) est calculée comme suit :

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot \exp(-j2\pi kn/N)$$

IV.1.3. Propriétés de la Transformée de Fourier Discrète

Les principales propriétés de la TFD sont énumérées ci-dessous :

1. Linéarité :

La TFD est une transformation linéaire, soit $x_1[n]$ et $x_2[n]$ deux séquences discrète finie, alors :

$$TFD\{a \cdot x_1[n] + b \cdot x_2[n]\} = a \cdot X_1[k] + bX_2[k]$$

2. Longueurs des séquences numériques

Soient N_1, N_2 respectivement les durées de $x_1[n]$ et $x_2[n]$, la durée N du signal $x[k]$ est donné par : $N = \max[N_1, N_2]$

Si $N_1 > N_2$, les deux TFD sera calculée avec $N = N_1$, notant que $x_2[k]$ sera la TFD de $x_2[n]$ prolongée par $N_1 - N_2$ échantillons nuls.

3. Décalage en temps-fréquence

Soit $x[n]$ une séquence numérique, $X(k)$ sa transformée de Fourier discrète.

$$x(n - n_0) \leftrightarrow e^{-2j\pi \frac{kn_0}{N}} X(k)$$

Avec n_0 un décalage temporel.

4. Produit de convolution circulaire

Soient $x_1[n], x_2[n]$ deux séquences numériques de période N , $X_1(k), X_2(k)$ respectivement leurs transformées de Fourier discrète.

$$x_1[n] * x_2[n] = \sum_{i=0}^{N-1} x_1[i] * x_2[n - i] \leftrightarrow X_1(k) \cdot X_2(k)$$

5. Théorème de Parseval

Ce théorème traduit la conservation de la puissance d'un signal échantillonné dans les deux domaines temporel et fréquentiel

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

6. Propriétés de symétrie

$$x(n) \in R \leftrightarrow X(k) = X^*(N - k)$$

7. La parité

Soit $x[n]$ une séquences discrète finie et $X[k]$ sa transformée de Fourier Discrète, $X[k]$ peut être exprimée sous forme complexe :

$$X[k] = |X[k]| \cdot e^{j\theta(k)}$$

$$X[k] = A(k) + jB(k)$$

Avec : $|X[k]|$ est le spectre d'amplitude

$\theta(k) = \arctan\left(\frac{B(k)}{A(k)}\right)$ est le spectre de phase.

- Si $x[n]$ paire alors $TFD\{x[n]\} = A(k)$ c'est la partie réelle
- Si $x[n]$ impaire alors $TFD\{x[n]\} = jB(k)$ c'est la partie imaginaire
- Si $x[n]$ paire alors $TFD\{x[n]\} = G(k)$ est réelle et paire
- Si $x[n]$ impaire alors $TFD\{x[n]\} = G(k)$ est imaginaire et impaire

IV.2. Transformée de Fourier Rapide FFT

IV.2.1. Introduction :

Vu la lenteur et le nombre d'itérations demandée lors du calcul de la transformée de Fourier Discrète d'un signal échantillonné. En effet, La transformée de Fourier rapide notée FFT (Fast Fourier Transforme) est apparu afin de remédier à ce problème et réduire le nombre d'opération arithmétiques.

IV.2.2. Transformée de Fourier Discrète (TFD)

La transformée de Fourier Rapide est une forme de réorganisation du calcul des matrices de la transformée de Fourier Discrète (TFD).

Soit $X(k)$ est la TFD du signal numérique $x(n)$, N est le nombre de sèquence de la TFD $X(k)$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \exp\left(\frac{-j2\pi kn}{N}\right), k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \cdot \exp\left(\frac{j2\pi kn}{N}\right), n = 0, 1, \dots, N-1$$

Avec $x[n]$ et $X[k]$ peuvent être des nombres complexes

La formule de TFD peut être reformulée par une expression matricielle :

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_N^1 & W_N^2 & \dots & W_N^{N-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \dots & W_N^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}$$

Notant que W_N le twiddle factor à $e^{-2j\frac{\pi}{N}}$

D'après l'expression précédente, la TFD est un produit matrice par un vecteur où chaque élément est un complexe. Le nombre de multiplications est N^2 avec $N(N-1)$ additions complexes.

Il existe plusieurs algorithmes de la FFT, le plus connu est celui de Cooley-Tukey appelé aussi entrelacement temporel (décimation in time). La réduction du nombre de multiplications est de l'ordre de $\frac{N}{2} \log_2(N)$.

On trouve deux versions de cet algorithme, à savoir, FFT avec entrelacement temporel et la FFT avec entrelacement fréquentiel.

a. FFT avec entrelacement temporel :

Lors du calcul de la transformée de Fourier discrète, le traitement effectué est sur N termes d'indice. Et cela englobe les termes d'indices pairs et les termes d'indices impairs.

$$X[k] = \sum_{n \text{ paire}} x[n].W_N^{nk} + \sum_{n \text{ impaire}} x[n].W_N^{nk}$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n].W_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n+1].W_N^{(2n+1)k}$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n].W_{N/2}^{nk} + W_N^{nk} \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n+1].W_{N/2}^{nk}$$

$$X[k] = G[k] + W_N^{nk}.H[k]$$

Avec : $G[k]$ est la TFD sur les $N/2$ points d'indices pairs

$H[k]$ est la TFD sur les $N/2$ points d'indices impairs

Notant qu'on peut réduire d'avantage la complexité de calcul des échantillons $N/2$ à $N-1$ et cela en effectuant la TFD de $X[k + N/2]$ et utiliser les propriétés de symétrie de la transformée de Fourier Discrète. Cette simplification est appelée méthode de papillon de la transformée de Fourier Rapide.

$$X\left[k + \frac{N}{2}\right] = \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n].W_{N/2}^{n(k+\frac{N}{2})} + W_N^{n(k+\frac{N}{2})} \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n+1].W_{N/2}^{n(k+\frac{N}{2})}$$

$$X\left[k + \frac{N}{2}\right] = G[k] + W_N^{nk}.H[k]$$

Ces équations précédentes illustrent deux TFD d'ordre $N/2$, l'une pour des termes d'indices pairs et l'autre pour les termes d'indices impairs, voire la figure.3 :

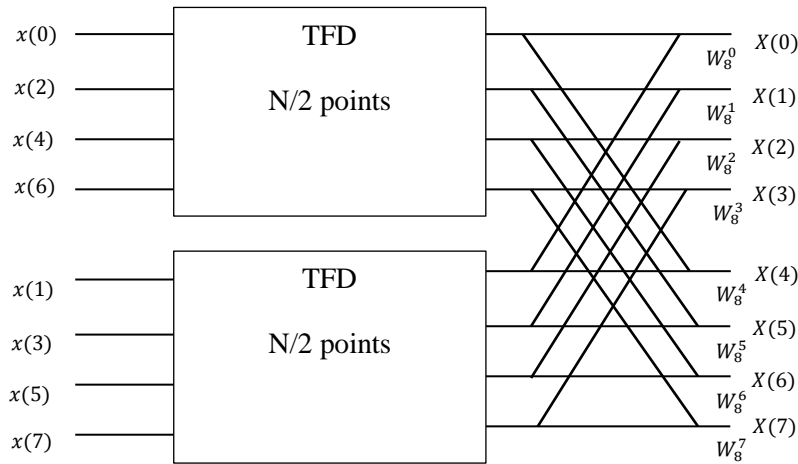


Figure IV.2. Entrelacement temporel de la TFD

On peut simplifier d'avantage les calculs en divisant les N/2 points du départ en deux TFD d'ordre N/4 jusqu'à arriver à une TFD sur deux points et à la fin on va avoir $\log_2(N)$.

L'opération élémentaire de l'entrelacement temporel de la TFD est appelée papillon et est représentée sous sa forme générale dans la figure suivante :

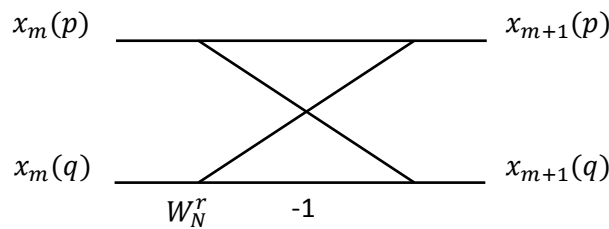


Figure IV.3. Papillon d'entrelacement temporel de la TFD

$$\begin{cases} X_{m+1}[p] = X_m[p] + W_N^r \cdot X_m[q] \\ X_{m+1}[q] = X_m[p] - W_N^r \cdot X_m[q] \end{cases}$$

Notant qu'un papillon demande 1 multiplication, 1 addition et 1 soustraction. Cependant, dans le graphe complet de N points, on aura $\frac{N}{2} \cdot \log_2(N)$ papillons ce qui engendre :

- $\frac{N}{2} \cdot \log_2(N)$ multiplication de nombre complexes ($2N \cdot \log_2(N)$ si sont des nombres réels)
- $N \cdot \log_2(N)$ additions et soustractions de nombres complexes ($3N \cdot \log_2(N)$ si sont des nombres réels)

b. FFT avec entrelacement fréquentiel:

Cet algorithme est identique au précédent, cependant les données temporelles $x[n]$ restent dans leurs ordres naturels mais les résultats $X[k]$ sont en désordre.

L'idée est de décomposer le calcul de la TFD d'ordre $N = 2^i$ en i étapes successives, mais le regroupement des données se réalisera différemment.

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n]. W_N^{nk} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x[n]. W_N^{nk}$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n]. W_N^k + W_N^{kN/2} \sum_{n=0}^{N/2-1} x[n + N/2]. W_N^{nk}$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N/2-1} \left\{ x[n] + (-1)^k x\left[n + \frac{N}{2}\right] \right\}. W_N^{nk}$$

En effectuant une séparation des indices pairs et impairs, on aura :

$$X[2p] = \sum_{n=0}^{N/2-1} (x[n] + x[n + N/2]). W_N^{2pk}$$

$$X[2p + 1] = \sum_{n=0}^{N/2-1} (x[n] - x[n + N/2]). W_N^{2pk} . W_N^n$$

$$X[2p] = \sum_{n=0}^{N/2-1} (x[n] + x[n + N/2]). W_{N/2}^{pk}$$

$$X[2p + 1] = \sum_{n=0}^{N/2-1} \left\{ (x[n] - x[n + N/2]). W_{N/2}^{pk} \right\}. W_N^n$$

Par analogie à la FFT avec l'entrelacement temporel, les équations précédentes nous conduisent à calculer deux TFD d'ordre inférieur selon la figure suivante :

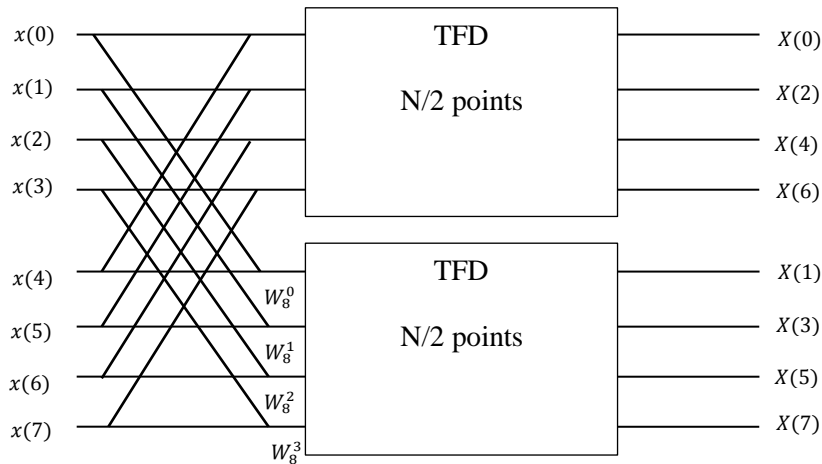


Figure IV.4. Entrelacement fréquentiel de la TFD

On peut également simplifier les calculs en divisant les N/2 points du départ en deux TFD d'ordre N/4 jusqu'à arriver à une TFD sur deux points comme dans la TFD avec un entrelacement temporel.

L'opération élémentaire de l'entrelacement temporel de la TFD est appelée papillon et est représentée sous sa forme générale dans la figure suivante :

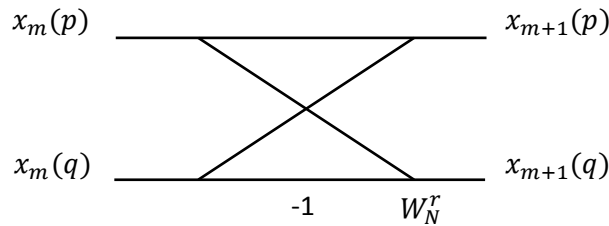


Figure IV.5. Papillon d'entrelacement fréquentiel de la TFD

$$\begin{cases} X_{m+1}[p] = X_m[p] + X_m[q] \\ X_{m+1}[q] = (X_m[p] - X_m[q]) \cdot W_N^r \end{cases}$$

Notant que la seule différence entre les deux méthodes de papillon réside dans le calcul d'adresse de la table de W^k lors des étapes suivies et qui est plus simple et facile à programmer dans l'entrelacement fréquentiel et les échantillons résultants à la sortie qui seront en désordre.

IV.3. Exercices d'application :**Exercice 1 :**

Calculer la TFD de la séquence numérique suivante :

$$x[n] = [1, 0, 0, 1] \quad \text{pour } n \geq 0$$

Solution :

Pour la séquence $x[n]$, la longueur $N = 4 (k = 0 \rightarrow N - 1)$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \exp\left(\frac{-j2\pi kn}{N}\right) = \sum_{n=0}^3 x[n] \cdot \exp\left(\frac{-j2\pi kn}{4}\right)$$

$$X[0] = x(0) + x(1) + x(2) + x(3) = 2$$

$$X[1] = 1 + \exp\left(\frac{-j3\pi}{2}\right) = 1 + j$$

$$X[2] = 0$$

$$X[3] = 1 - j$$

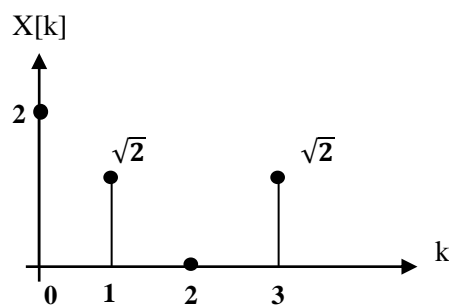
Les modules et les phases sont :

$$X[0] = 2 \langle 0^\circ \rangle$$

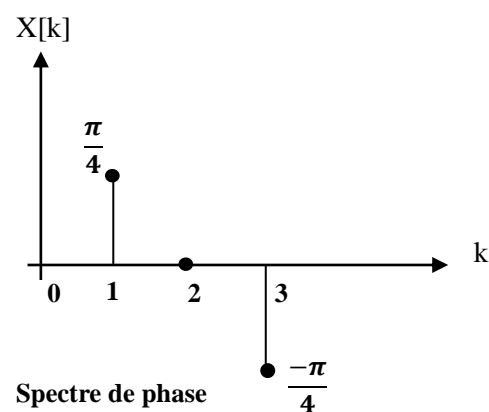
$$X[1] = \sqrt{2} \langle 45^\circ \rangle$$

$$X[2] = 0$$

$$X[3] = \sqrt{2} \langle -45^\circ \rangle$$



Spectre d'amplitude



Spectre de phase

TFD de $x[n]$

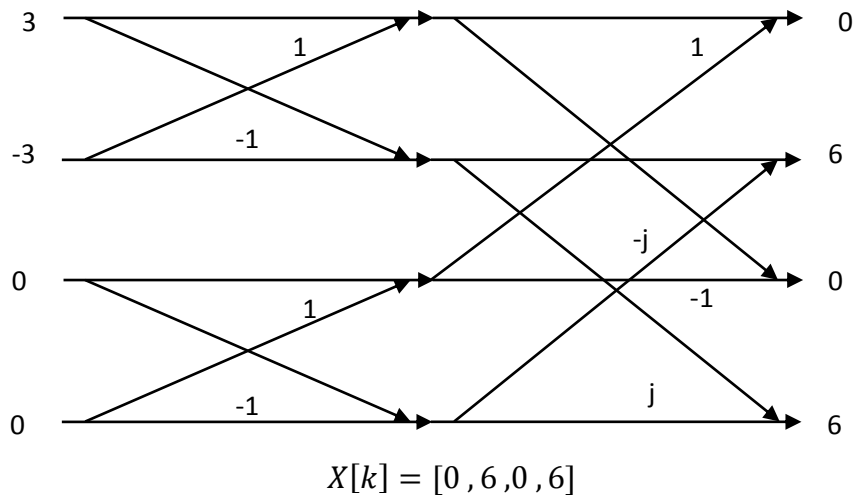
Exercice 2 :

Trouver la FFT de $x[n] = 3\cos(0.5n\pi)$ en utilisant la méthode graphique papillon en entrelacement temporel avec : $N = 4$.

Solution : On a $N=4$, et $x[n] = 3\cos(0.5n\pi)$

Alors : $x[0] = 3, x[1] = 0, x[2] = -3, x[3] = 0$

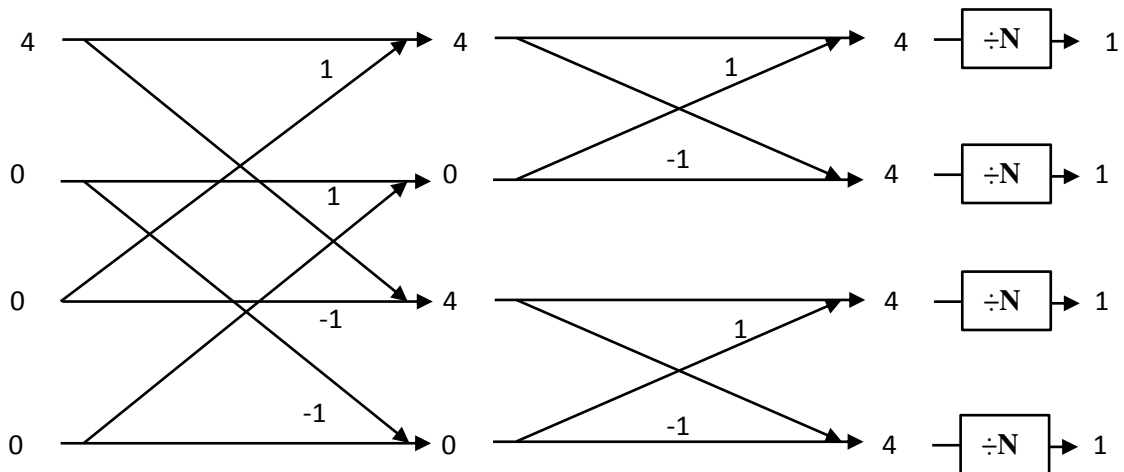
$x[n] = [3, 0, -3, 0]$



Exercice 3:

Trouver la FFT de $x[n] = [4, 0, 0, 0]$ en utilisant la méthode graphique papillon en entrelacement fréquentiel.

Solution : On a $N=4$, et $x[n] = [4, 0, 0, 0]$



Le résultat de la FFT par décimation fréquentielle de $x[n]$ est : $X[k] = [1, 1, 1, 1]$

CHAPITRE V

TRANSFORMÉE EN Z ET FILTRAGE NUMÉRIQUE

V.1. Transformée en Z

V.1.1. Introduction :

La transformée en Z est utilisée essentiellement pour l'étude des signaux et des systèmes de traitement numérique du signal, cette transformation peut être considérée comme une généralisation de la transformée de Fourier à laquelle elle peut s'identifier dans un cas particulier et peut répondre à ses limitations. A savoir, la transformée en Z peut représenter un signal possédant une infinité d'échantillons par un ensemble fini de nombres afin de le restituer complètement.

V.1.2. Définition :

Soit $x(n)$ un signal discret, sa transformée en Z, $X(z)$ est définie par :

$$X(z) = Z[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n].z^{-n}$$

Avec Z est une variable complexe et $X(z)$ est une fonction complexe.

Notant que les signaux discrets sont la plus part du temps causaux, alors on définit la transformée en Z unilatérale :

$$X(Z) = Z[x(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} x[n].z^{-n}$$

V.1.3. Existence de la transformée en Z :

Z est une variable complexe impliquant que $X(z)$ possède un domaine de convergence en Z (ROC : Region Of Convergence) qui est habituellement un anneau centré sur l'origine et compris entre deux rayons R_1 et R_2 .

$$R_1 < |z| < R_2$$

Rappelons que la région de convergence dépend de la nature du signal qui est caractérisé par les limites R_1 et R_2 , délimitant la région de convergence, (figure1).

Il est évident que si $R_1 > R_2$ le signal n'est pas convergent.

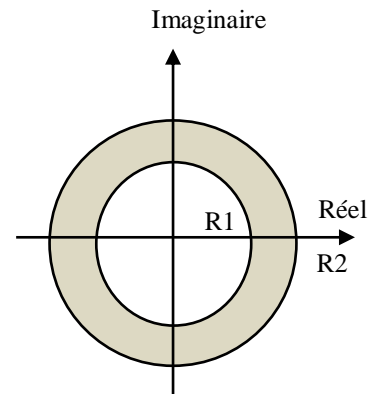


Figure V.1. Domaine de convergence

V.1.4. Propriétés de la transformée en Z :

a. Linéarité :

Soient deux signaux numériques $x(n)$ et $y(n)$, leurs transformées en z sont respectivement $X(z)$ et $Y(z)$. Soit $w(n)$ un signal tel que :

$$w(n) = a.x(n) + b.y(n)$$

La transformée en Z de $w(n)$ est la suivante :

$$W(z) = a.X(z) + b.Y(z)$$

Notant que la région de convergence du résultat $W(z)$ est l'intersection des régions de convergence de $X(z)$ et $Y(z)$.

b. Théorème de retard :

Soient $(n), x'(n)$, deux signaux discrets de transformée en Z respectivement, $X(z), X'(z)$. Soit k un indice temporel tel que :

$$y(n) = x(n - k)$$

La transformée en Z, $X'(z)$ est calculée comme suit :

$$X'(z) = Z[x(n - k)] = Z^{-k}X(z)$$

Notant que la région de convergence est inchangée.

c. Théorème de l'avance :

Soit $x(n)$ un signal discret causal de transformée en Z (unilatérale), $X(z)$. Soit k un indice temporel tel que :

$$Z[x(n + k)] = Z^{+k}X(z) - \sum_{n=0}^{k-1} x(n) Z^{k-n}$$

d. Facteur d'échelle :

Soit $x(n)$ un signal discret de transformée en Z, $X(z)$. Sa région de convergence est

$r_1 < |z| < r_2$. Soit $y(n)$ un signal discret tel que : $y(n) = a^n \cdot x(n)$ sa transformée en Z est :

$$Y(z) = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

Sa région de convergence est : $|a|r_1 < |z| < |a|r_2$

e. Inversion de l'axe temporel :

Soit $x(n)$ un signal discret de transformée en Z, $X(z)$. Sa région de convergence est

$r_1 < |z| < r_2$. Soit le signal $y(n) = x(-n)$, sa transformée en Z est la suivante :

$$Y(z) = X\left(\frac{1}{z}\right)$$

Sa région de convergence est : $\frac{1}{r_2} < |z| < \frac{1}{r_1}$

f. Dérivation dans l'espace en Z :

Soit $x(n)$ un signal discret de transformée en Z, $X(z)$. Soit le signal $y(n) = n \cdot x(n)$, sa transformée en Z est la suivante :

$$Y(z) = Z[n \cdot x(n)] = -z \frac{d}{dz} X(z)$$

Notant que la région de convergence reste inchangée.

g. Théorème de la valeur initiale et finale :

Soit $x(n)$ un signal discret de transformée en Z, $X(z)$.

$$x(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} X(z)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = x(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} X(z) = \lim_{z \rightarrow 1} 1 - z^{-1} X(z)$$

h. Théorème de la convolution linéaire discrète :

Soient $x(n), y(n)$, deux signaux discrets de transformée en Z respectivement, $X(z), Y(z)$.

Soit $w(n) = x(n) * y(n)$, sa transformée en Z est la suivante :

$$W(z) = X(z).Y(z)$$

V.1.5. La transformée en Z inverse :

La transformée en Z inverse d'un signal est obtenue en utilisant la liste de la transformée en Z des signaux élémentaires connus (table.1), ou bien en déduisant les signaux temporel à partir de transformées dérivées des opérateurs et propriétés citée précédemment. Cependant, la transformée ne peut pas toujours s'écrire comme une combinaison de transformées élémentaires, d'où la nécessité d'utiliser les techniques générales de transformation inverse :

1. L'intégration sur un contour fermé avec le calcul des résidus
2. Le développement en puissance de z et de z^{-1}
3. Le développement en fractions élémentaires

$x(t)$	$x(n)$	Transformée en Z $X(z)$
	$\delta(n)$	1
	$\delta(n - k)$	Z^{-k}
$u(t)$	$u(n)$	$\frac{z}{z-1}$
t	n	$\frac{T.z}{[z-1]^2}$
$\frac{1}{2}t^2$	$\frac{1}{2}(nT)^2$	$\frac{T^2.z.[z+1]}{2.[z-1]^3}$
$\frac{t}{aT}$	a^n	$\frac{z}{z-a}$
$e^{-a.t}$	e^{-anT}	$\frac{z}{z-e^{-a.T}}$

$\sin w_0 t$	$\sin w_0 nT$	$\frac{Z \sin w_0 T}{Z^2 - 2Z \cos w_0 T + 1}$
$\cos w_0 t$	$\cos w_0 nT$	$\frac{Z (Z - \cos w_0 T)}{Z^2 - 2Z \cos w_0 T + 1}$

Table V.1. La transformée en Z de quelques signaux élémentaires

V.2. Filtrage numérique

V.2.1. Introduction :

L'opération « filtrage » est l'opération la plus utilisée en traitement numérique du signal, c'est une opération linéaire. En effet, un filtre convertit un signal numérique d'entrée $x(n)$ en un autre signal numérique de sortie $y(n)$ leurs composantes spectrales sont atténuées ou supprimées sans être supprimées ou décalées.

V.2.2. Définition :

Un filtre numérique est un algorithme de calcul qui relie une suite d'échantillons $x(n)$ avec une autre suite d'échantillons $y(n)$ par la relation suivante :

$$y(n) = \sum_{i=0}^{i=M} b_i x(n-i) + \sum_{j=0}^N a_j y(n-j)$$

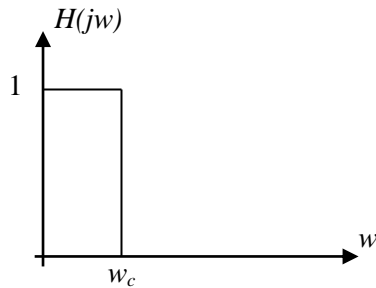
La sortie à l'instant n dépend de l'entrée à l'instant k et des précédentes mais également des sorties précédentes. De la relation précédente, on remarque bien la linéarité du système.

V.2.3. Spécification d'un filtre numérique :

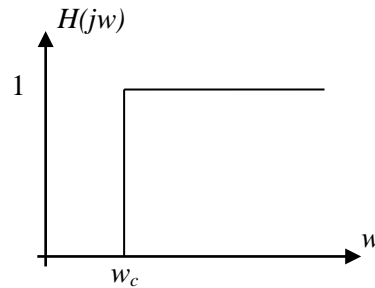
Avant de concevoir un filtre numérique, il va falloir définir ses spécifications. En effet, c'est déterminer les plages de fréquences passantes et celle qui seront atténuées. Il existe quatre filtres de bases :

- Les filtres passe-bas qui laissent passer les fréquences inférieures à une fréquence de coupure f_c et bloquent celles qui lui sont supérieures.

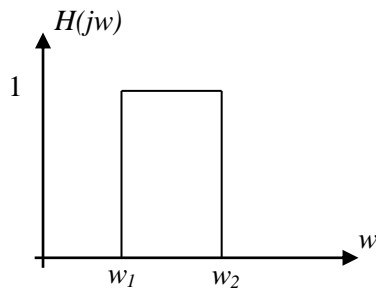
- b. Les filtres passe-haut qui laissent passer les fréquences supérieures à une fréquence de coupure f_c et bloquent celles qui lui sont supérieures.
- c. Les filtres passe-bande qui laissent passer un intervalle de fréquences $[f_1, f_2]$ autour d'une fréquence f_0 et bloquant les autres.
- d. Les filtres réjecteur-bande qui bloquent un intervalle de fréquences $[f_1, f_2]$ autour d'une fréquence f_0 et laissent passer les autres.



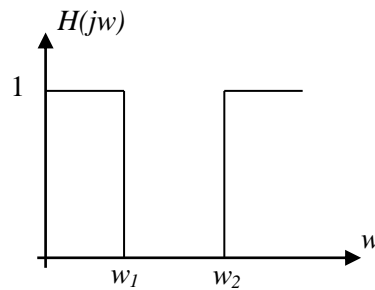
a. Filtre passe-bas



b. Filtre passe-haut



c. Filtre passe-bande



d. Filtre réjecteur-de-bande

Figure V.2. Réponse fréquentielle des différents filtres

Notant que les filtres représentés précédemment sont idéaux, dans les conditions réelles le passage entre les zones passantes et les zones atténuées est effectué par des zones de transition traduisant le degré de la sélectivité du filtre. Les bandes passantes sont atténuées ne sont également pas idéales, elles contiennent des ondulations dont l'amplitude est exprimée par les paramètres d'ondulation en bande passante et d'atténuation.

V.2.4. Critère de stabilité des filtres numérique :

Par analogie aux filtres analogiques, la stabilité des systèmes numériques peut être déduite par la position des pôles dans le plan complexe des z.

Soit $H(z)$ la transformée en Z d'un système numérique, deux cas se présentent pour sa décomposition en éléments simples :

- $\frac{A}{(1-az^{-1})}$ pour un pôle situé en $z = a$
- $\frac{B+Cz^{-1}}{(1-2bz^{-1}+a^2z^{-2})}$ pour des pôles imaginaires conjugués situés en $z_{1,2} = \beta \pm j\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$
Avec $|z_{1,2}| = \alpha$

Les transformées inverses des deux expressions précédentes sont respectivement :

- $A a^n U(n)$ avec $U(n)$ est la séquence échelon
- $B [a^n \{ \cos(n\omega T) + K \sin(n\omega T) \}] U(n)$ avec $\cos(\omega T) = \beta/\alpha$ et $K = \frac{(\frac{C}{B}) + b}{a \sin(\omega T)}$

Les deux suites précédentes convergent à condition que a et α soient inférieurs à l'unité. En effet, un système numérique soit stable si le module des pôles reste inférieur à l'unité.

Dans le plan complexe des z le lieu des pôles d'un système stable se trouve à l'intérieur de rayon unité.

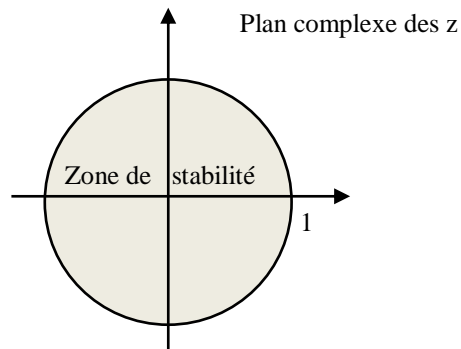


Figure V.3. plan complexe des z et la zone de stabilité

V.2.5. Classification des filtres numériques :

Les filtres numériques peuvent être classés selon plusieurs critères :

- 1- La longueur de la réponse impulsionnelle donnant naissance à deux types de filtres, Filtre à réponse impulsionnelle infinie (RII) et Filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF).

- 2- Le type de représentation, et la structure appropriée qui impliquent deux types de filtres à savoir, filtres récurrents et filtres non récurrents.

V.2.6. Exercices d'application

Exercice1 :

Calculer la transformée en Z des fonctions discrètes suivantes. Vérifier que les théorèmes de la valeur initiale est finale sont appliqués.

$$x(n) = 0.8^n u(n)$$

$$y(n) = n 0.8^n u(n)$$

Solution :

Les transformées en Z sont :

$$X(z) = \frac{z}{z - 0.8}$$

$$Y(z) = -z \frac{d\left(\frac{z}{z - 0.8}\right)}{dz} = -z \frac{-0.8}{(z - 0.8)^2} = \frac{0.8 z}{(z - 0.8)^2}$$

CHAPITRE VI

LES FILTRES RIF ET LES FILTRES RII

VI.1. Les filtres à réponse impulsionnelle finie RIF :

VI.1.1. définition :

Les filtres à réponse impulsionnelle finie ont les coefficients a_j sont nuls, alors la relation précédentes sera la suivante :

$$y(n) = \sum_{i=0}^{i=M} b_i x(n-i)$$

La sortie $y(n)$ à l'instant n , ne dépend que de l'entrée et des coefficients b_i , la fonction de transfert $H(z)$ s'écrit :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{i=0}^{i=M} b_i Z^{-i}$$

On constate que $H(z)$ est aussi la transformée en Z de la réponse impulsionnelle $h(n)$; $H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) Z^{-k}$, par analogie, on aura $b_i = h(i)$ et les coefficients $h(k)$ sont nuls pour $k > M$. Ces filtres sont des filtres stables car la sortie revient toujours à zéro après suppression de l'excitation.

VI.1.2. Synthèse des filtres RIF :

Cette synthèse consiste à calculer la valeur des coefficients b_j du filtre RIF afin que sa réponse en fréquence $H_N(jf)$ qui est périodique de période F_e , ce qui la rend développable en série de Fourier.

Notant que $H(jf)$ coïncide avec la fonction analogique $H_A(jf)$ souhaitée qui est la représentation de la fonction $H_N(jf)$ dans le domaine $-\frac{F_e}{2} < f < \frac{F_e}{2}$.

$$H_N(jf) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j2\pi n f T_e}$$

Avec C_n sont les coefficients de la série de Fourier et ils sont calculés comme suit :

$$C_n = \frac{1}{F} \int_{-\infty}^{\infty} H_A(jf) e^{jn\omega T_e} df = T_e \cdot F^{-1}(H_A(jf))_{t=nT_e} = T_e \cdot h_A(-nT_e)$$

a- Calcul des coefficients d'un filtre RIF par le calcul des coefficients de la série de Fourier

En posant $b_k = C_{p-k}$ et p doit être entier et $P = \frac{M-1}{2}$ impose M impair.

Le domaine d'utilisation du filtre numérique étant $-\frac{F_e}{2} < f < \frac{F_e}{2}$ et

$$C_n = \frac{1}{F_e} \int_{-\infty}^{\infty} H_N(jf) e^{jn\omega T_e} df$$

La fonction $H_N(jf)$ étant paire pour $|f| < \frac{F_e}{2} \rightarrow C_n = \frac{2}{F_e} \int_0^{\frac{F_e}{2}} H_N(jf) \cos(n\omega T_e) df$, avec

$$C_n = C_{-n}$$

Pour un filtre passe-bas idéal $H_N(jf) = H_A(f) = 1$ pour $f < f_c$ et $H_N(jf) = 0$ pour $f_c < f < \frac{F_e}{2}$

$$C_n = \frac{2}{F_e} \int_0^{f_c} \cos(n\omega T_e) df = \frac{2}{F_e} \left[\frac{\sin(n\omega T_e)}{2\pi n T_e} \right]_0^{f_c} = \frac{2}{F_e} \frac{\sin(n\omega T_e)}{2\pi n T_e}$$

$$C_n = \frac{\sin(n\omega T_e)}{\pi n}$$

b- Calcul des coefficients d'un filtre RIF par la technique d'échantillonnage en fréquence

Cette méthode est utilisée uniquement pour la conception des filtres ayant des gabarits idéals : passe-bas, passe-bande, coupe-bande, passe-haut à gabarits rectangulaires.

Les valeurs de b_k sont calculés à partir de la fonction de transfert souhaitée $H(f)$.

$$y(n) = \sum_{i=0}^{M-1} b_i x(n-i), \text{ avec } M \text{ est le nombre de termes.}$$

$$y(n) = \sum_{i=0}^{M-1} b_i x(n-i) = [b_0 \cdot x(n) + b_1 \cdot x(n-1) + \dots + b_{M-1} \cdot x(n-M-1)]$$

La fonction numérique d'un filtre passe-bande est la suivante :

$$b_k = \frac{1}{M} \sum_{m=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} \left| H\left(\frac{m}{MT_e}\right) \right| e^{jJm} \cdot e^{j2\pi \frac{km}{M}}$$

$$\Delta f = \frac{F_e}{M} = \frac{1}{MT_e} \quad \text{et} \quad J_m = -m\pi \frac{M-1}{M}$$

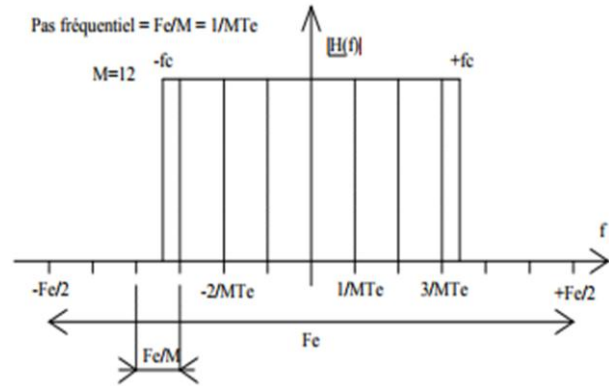


Figure VI.1. Gabarits idéal d'un filtre passe-bande

Pour un filtre à phase linéaire, le module de la transmittance $\left| H\left(\frac{m}{MT_e}\right) \right|$ du filtre vaut 1 à l'intérieur de la bande passante souhaitée et 0 à l'extérieur. Les valeurs extrêmes de m correspondant à une transmittance non nulle par l'équation suivante :

$$m_{max} = M \frac{F_c}{F_e} , \text{ comme } m \text{ est un entier, alors : } m_{max} = \text{arrondi}\left(M \frac{F_c}{F_e}\right) . \text{ d'où :}$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{M} \sum_{m=-\frac{M}{2}}^{\frac{M}{2}-1} \left| H\left(\frac{m}{MT_e}\right) \right| e^{jJm} \cdot e^{j2\pi \frac{km}{M}} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{m=-m_{max}}^{m_{max}} 1 e^{jJm} \cdot e^{j2\pi \frac{km}{M}} + \frac{1}{M} \sum_{m=-\frac{N}{2}}^{-(m_{max}+1)} 0 + \frac{1}{M} \sum_{m=m_{max}+1}^{\frac{M}{2}-1} 0 \end{aligned}$$

c. méthode de la fenêtre :

Les principales étapes de cette méthode sont les suivantes :

- On choisit d'abord une réponse fréquentielle d'un filtre analogique idéal $H_A(f)$.
- On détermine la transformée de Fourier inverse la réponse impulsionnelle

$$h(t) = FFT^{-1}\{H_A(f)\}.$$

- On échantillonne cette réponse impulsionnelle pour avoir $h(n)$.
- On multiplie cette réponse impulsionnelle par une fenêtre.
- On rend la réponse impulsionnelle causale en la retardant.
- Les valeurs successives trouvées de la réponse impulsionnelle seront les coefficients du filtre recherché $b(n) = h(n)$.

VI.2. Les filtres à réponse impulsionnelle infinie (RII)

VI.2.1. Définition :

Ces filtres sont nommés filtres récurrents, les coefficients a_j sont différents de zéros d'où la dépendance de la sortie $y(n)$ avec tous les échantillons $x(n)$ passés.

La fonction de transfert $H(z)$ est la suivante :

$$y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^M b_i x(n-i) \right] z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^N a_j y(n-j) \right] z^{-n}$$

$$y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_i \left[\sum_{i=0}^M x(n-i)z^{-n} \right] + \sum_{n=0}^{\infty} a_j \left[\sum_{j=1}^N y(n-j)z^{-n} \right]$$

La fonction de transfert sera comme suit :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 - \sum_{j=1}^N a_j z^{-j}}$$

La réponse impulsionnelle de ces filtres est donc infinie, c'est pour cela que ces filtres peuvent devenir instables.

VI.2.2. synthèse des filtres RII:

La synthèse des filtres à réponse impulsionnelle de durée infinie est appliquée en transposant numériquement la fonction de transfert de filtres continus. Dans la plupart des cas pratiques, les résultats obtenus sont satisfaisants malgré les différences aperçus lors de la transposition.

a- Méthode de l'invariante impulsionnel :

Considérant uniquement la réponse impulsionnelle du filtre numérique qui doit correspondre à l'échantillonnage de la réponse impulsionnelle d'un filtre continu :

$$h(t) \rightarrow h(n\Delta T)$$

Cette technique n'est applicable que si la fréquence d'échantillonnage est définie $\frac{1}{\Delta T}$ et elle ne peut pas être appliquée au filtre de type passe-haut.

b- Transformation bilinéaire :

La transformation bilinéaire consiste à remplacer « p » dans la fonction de transfert du filtre en fonction dans le domaine de Laplace par : $\frac{2}{\Delta T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$,

Cette transformation permet d'avoir un filtre numérique qui possède approximativement la même réponse temporelle qu'un filtre analogique.

VI.3. Exercice d'application :**Exercice 1 :**

Soit un filtre décrit par la relation suivante : $y(n) = \frac{x(n)+y(n-1)}{2}$. quelle est sa nature ?

Solution :

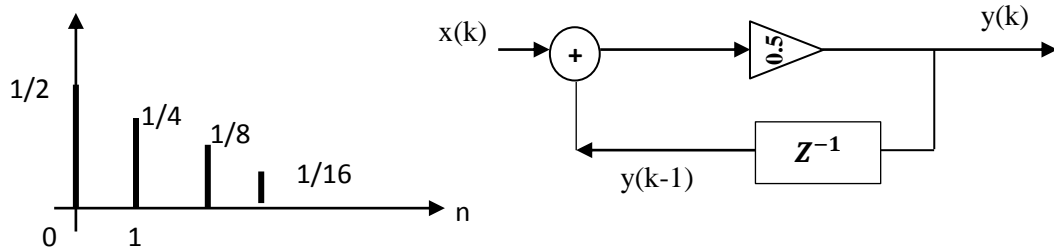
La transformée en Z de ce filtre est comme suit :

$$H(z) = \frac{1}{2 - z^{-1}}$$

La transformée en Z inverse de $H(z)$ détermine l'élément $h(n)$ de la réponse impulsionnelle :

$$h(n) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

c'est un réponse impulsionnelle infinie, et le système est stable. En effet, $h(n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. la réponse impulsionnelle de ce filtre est représentée ci-dessous :



Exercice 2 :

Soit un filtre numérique d'entrée $x(n]$ et de sortie $y(n]$, tel que :

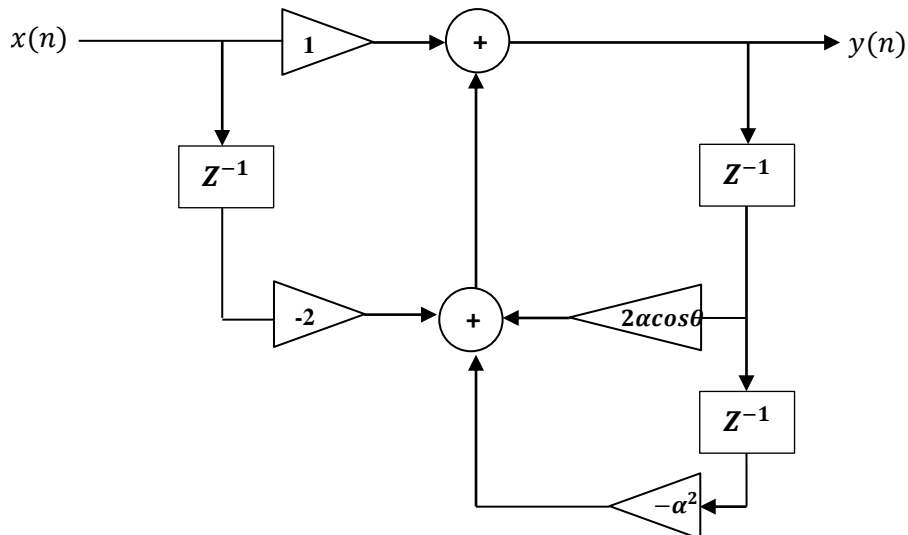
$$y(n) = x(n) - 2x(n - 1) + 2\alpha \cos(\theta) y(n - 1) - \alpha^2 y(n - 2)$$

Avec α est un réel positif non nul.

- 1- Représenter la structure du filtre, est ce que ce filtre est à réponse impulsionnelle finie ou infinie ?
- 2- Calculer la fonction de transfert $H(z)$ du filtre.
- 3- Déterminer les pôles et les zéros du filtre ? A quelle condition le filtre est-il stable ? Dessiner le diagramme pôles-zéros dans le cas où $\alpha = 0.8$ et $\theta = \pi/4$.

Solution :

1- La structure du filtre est la suivante :



D'après la figure précédente, le filtre est récursif ce qui le classe parmi les filtre à réponse impulsionnelle infinie.

2- La transformée en Z de l'équation aux différences :

$$y(z) = x(z) - 2 TZ\{x(n-1)\} + 2\alpha \cos(\theta) TZ\{y(n-1)\} - \alpha^2 TZ\{y(n-2)\}$$

$$y(z) = x(z) - 2 Z^{-1}x(z) + 2\alpha \cos(\theta) Z^{-1}y(z) - \alpha^2 Z^{-2}y(z)$$

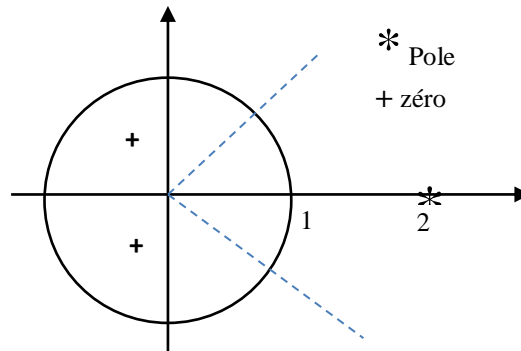
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - 2Z^{-1}}{1 - 2\alpha \cos(\theta) Z^{-1} + \alpha^2 Z^{-2}}$$

3- D'après la fonction de transfert calculé précédemment, on a :

Un zéro : $z = 2$

Les pôles : $\frac{2\alpha \cos(\theta) \pm j2\alpha \sin(\theta)}{2} = \alpha e^{\pm j\theta}$

Le filtre est stable si seulement $\alpha < 1$



CHAPITRE VII

SIGNAUX ALEATOIRES

VII.1. Introduction :

Les signaux sont classés en différentes catégories, à savoir, les signaux déterministes qui peuvent être exprimés par des fonctions mathématiques et prédits de manière certaine à n'importe quel moment et les signaux aléatoires qui sont moins prévisibles et sont reproduits par des modèles probabiliste.

VII.2. Définition :

Un signal est dit aléatoire si on associe à chaque réalisation possible une opération une fonction $X(t, w)$, où t est le temps de la réalisation et w est l'expérience réalisée, on parlera dans ce cas du moment. Soit on le définit par deux représentations et cela soit en fixant le temps t et $X(t, w)$ est une variable aléatoire soit on fixe w et $X(t, w)$ se comporte comme une fonction temporelle déterministe appelée trajectoire du signal aléatoire.

1. Notion de moyenne ou espérance mathématique :

Le moment d'un signal est donné comme suit :

$$m_X(t_1) = E\{X(t_1, w)\} = \int x_1 P_{X_1}(x_1) dx_1$$

$$m_X^{(n)}(t_1) = E\{X(t_1, w)^{(n)}\} = \int x_1^n P_{X_1}(x_1) dx_1$$

Notant que $E\{ \}$ désigne l'espérance mathématique ou moyenne et t_1 est l'instant de la réalisation x_1 , après généralisation, on aura :

$$E\{X(t, w)\} = \int X(t) P(X(t, w)) dt$$

2. Notion de covariance :

C'est une fonction à deux variables permettant de quantifier une relation entre les variables aléatoires X_1, X_2 .

$$C_X(t_1, t_2) = E\{X(t_1)X(t_2)^*\} = \iint x_1, x_2^* P_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

Si l'argument de l'espérance mathématique fait intervenir le produit de deux variables aléatoires et est homogène à un carré, on parlera de caractérisation d'ordre 2.

NB. La distribution conjointe $P_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$ ne peut pas être exprimée en fonction des distributions $P_{X_1}(x_1)$ et $P_{X_2}(x_2)$ sauf s'ils sont indépendantes. On aura :

$$P_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = P_{X_1}(x_1) \cdot P_{X_2}(x_2)$$

Et la fonction de covariance sera comme suit :

$$C_X(t_1, t_2) = E\{X(t_1)X(t_2)^*\} = E\{X(t_1)\} \cdot E\{X(t_2)^*\}$$

$$C_X(t_1, t_2) = m_X(t_1) \cdot m_X(t_2)^*$$

$X(t, w)$ est connue à deux instants, t_1, t_2 si on a une loi conjointe des variables aléatoires $X(t_1, w), X(t_2, w)$.

VII.3. propriétés fondamentales :

1. Stationnarité :

C'est une propriété particulière pour l'analyse des signaux aléatoires, un signal est dit stationnaire si ses propriétés statistiques sont invariantes par translation de l'origine des temps.

$$\forall t \in R, E\{X(t)\} = m, \text{ avec } m \text{ est une constante}$$

$$\forall t \in R, \forall \tau \in R, C_X(t, t - \tau) = C_X(\tau).$$

Si le signal possède une moyenne et une covariance invariantes dans le temps, on dit que ce signal est stationnaire au sens large ou stationnaire au second ordre.

2. Ergodicité :

L'ergodisme est un postulat, c'est une propriété utilisée mais non démontrée. Un signal aléatoire est dit ergodique si les moyennes temporelles existent et sont indépendantes de l'échantillon.

Le théorème de Birkoff démontre que si un signal aléatoire est stationnaire et ergodique, alors les moments temporels sont identiques aux moments statistiques.

$$E\{x(t)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t, w) dt$$

$$E\{X(t_1)X(t_2)^*\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t, w)x^*(t - \tau, w) dt$$

3. Densité spectrale de puissance :

Par analogie aux signaux déterministes, on peut faire une représentation fréquentielle d'un signal aléatoire stationnaire. Le théorème de Wiener-Kinchine permet de calculer le densité spectrale d'un signal aléatoire en appliquant la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation

$$S_{xx}(f) = TF\{R_{xx}(\tau)\}$$

La puissance du signal aléatoire stationnaire et ergodique est obtenue par la relation suivante :

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t, w)x^*(t, w) dt$$

$$P = R_{xx}(0)$$

$$P = E[|x(t)|^2]$$

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f) df$$

VII.4. Fonction et matrice de corrélation

$X(t)$ est un signal aléatoire complexe et vectoriel de dimension n et stationnaire à l'ordre 2.

$$x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ \dots \ \dots \ x_{n-1}(t) \ x_n(t)]^T$$

Par analogie, la moyenne de $x(t)$ est un vecteur de même dimension, qui est donné comme suit :

$$m(t) = E[x(t)]$$

$$m(t) = [E[x_1(t)] \ E[x_2(t)] \ \dots \ \dots \ \dots \ E[x_{n-1}(t)] \ E[x_n(t)]]^T$$

La matrice Γ de corrélation est déterminée par la relation suivante :

$$\Gamma(\tau) = E[x(t) x^H(t - \tau)]$$

$$\Gamma(\tau) = \begin{bmatrix} E[x_1(t) x_1^H(t - \tau)] & E[x_1(t) x_2^H(t - \tau)] & E[x_1(t) x_n^H(t - \tau)] \\ E[x_2(t) x_1^H(t - \tau)] & \dots & E[x_2(t) x_n^H(t - \tau)] \\ \dots & \dots & \dots \\ E[x_n(t) x_1^H(t - \tau)] & \dots & E[x_n(t) x_n^H(t - \tau)] \end{bmatrix}$$

La composante H représente la transposée conjuguée, c'est une matrice possédant les propriétés suivantes :

$\Gamma(\tau)$ est une matrice paire.

$\Gamma(\tau)$ est une matrice hermitienne si on est dans le domaine complexe et symétrique si on est dans le domaine réel.

$\Gamma(0)$ est une matrice dite non négative, à savoir :

$$\forall u \in \mathcal{C}^{n \times 1}, u^H \Gamma(0) u \geq 0$$

Le dernier point se vérifie de la manière suivante :

$$u^H \Gamma(0) u = u^H E(x x^H) u$$

$$u^H \Gamma(0) u = E(u^H x x^H u)$$

$$u^H \Gamma(0) u = E((u^H x)(u^H x)^H)$$

$$u^H \Gamma(0) u = E(\|u^H x\|^2) \geq 0$$

Par analogie, on peut définir la matrice covariance par :

$$\gamma(\tau) = E[x(t) x^H(t - \tau)] - E(x(t)).E(x(t))^H$$

En général, lorsque t tend vers l'infini, la valeur de $\gamma(\tau)$ tend vers 0. Le signal $x(t)$ devient indépendant de $x(t - \tau)$ et cela à partir d'une certaine valeur de t .

VII.5. Les signaux Gaussiens :

Le signal aléatoire Gaussien est issu de la variable aléatoire gaussienne. Le signal aléatoire Gaussien est très important en traitement du signal vu sa facilité d'emploi, il est défini par sa moyenne et sa matrice de covariance Γ . Ces signaux sont représentés par le symbole $N(m, \Gamma)$

Sa densité de probabilité appelée aussi fonction de répartition est donnée par :

$$p(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{-1/2} (\det \Gamma)^{-1} \exp\left[-\frac{1}{2}((x - m_x)^T \Gamma^{-1}(x - m_x))\right]$$

Où $m_x = E[x(w)] = [m_x(t_1), m_x(t_2), \dots, \dots, \dots, m_x(t_n)]^T$

$$m_x = m_x[1,1, \dots, 1]^T \text{ Si le signal est stationnaire}$$

La matrice covariance est donnée comme suit :

$$\Gamma = E[x_c(t_1, w) x_c^*(t_1, w)]$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} E[x_c(t_1, w) x_c^*(t_1, w)] & E[x_c(t_1, w) x_c^*(t_2, w)] & E[x_c(t_1, w) x_c^*(t_n, w)] \\ E[x_c(t_2, w) x_c^*(t_1, w)] & \dots & E[x_c(t_2, w) x_c^*(t_n, w)] \\ \dots & \dots & \dots \\ E[x_c(t_n, w) x_c^*(t_1, w)] & \dots & E[x_c(t_n, w) x_c^*(t_n, w)] \end{bmatrix}$$

Avec x_c est un signal centré qui est donné par cette relation: $x_c = x - m_x$

VII.6. Définition d'un bruit blanc :

On appelle bruit blanc un signal aléatoire stationnaire $b(t)$ de densité spectrale constante, généralement centré. On notera :

$$S_{bb}(f) = \frac{N_0}{2}$$

Sa fonction d'autocorrélation est comme suit :

$$R_{bb}(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$$

Avec : $\delta(\tau)$ est la distribution de Dirac en 0.

Le bruit blanc n'existe pas physiquement. En effet, sa puissance est infinie d'où son approximation au bruit à bande limitée appelé aussi bruit blanc coloré qui est défini par la relation suivante :

$$\begin{cases} S_{bb}(f) = \frac{N_0}{2} & |f| < B \\ S_{bb}(f) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

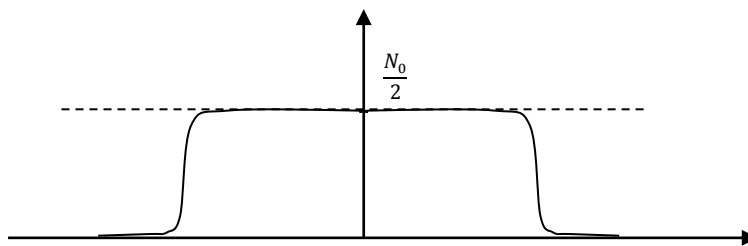


Figure VII.1. Bruit blanc à bande limitée

Exercice d'application :

Soit la variable aléatoire normale X de moyenne m et de variance σ^2

1. Ecrire la densité de probabilité $P(x)$ de X
2. Ecrire la probabilité qu'une réalisation appartienne à l'intervalle $[m - k\sigma, m + k\sigma]$ avec $k > 0$, sous forme d'une intégrale.
3. Soit la fonction $Q(x)$ définie par :

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

Avec $Q(1) = 0.1587$, $Q(2) = 0.0228$, $Q(3) = 0.0014$, quelle est la probabilité qu'une réalisation x de X appartienne à chacun des trois intervalles $[m - \sigma, m + \sigma]$, $[m - 2\sigma, m + 2\sigma]$ et $[m - 3\sigma, m + 3\sigma]$, que remarquez-vous ?

Solution :

1. La densité de probabilité d'une variable aléatoire normale X de moyenne m et de variance σ^2 est la suivante :

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$$

2. La probabilité qu'une réalisation x de X soit dans l'intervalle $[m - k\sigma, m + k\sigma]$ avec $k > 0$ est la suivante :

$$P(m - k\sigma < x < m + k\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{m-k\sigma}^{m+k\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} dx$$

Posant comme changement de variable : $u = \frac{x-m}{\sigma}$, $du = \frac{dx}{\sigma}$

L'intégrale est la suivante :

$$P(m - k\sigma < x < m + k\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-k}^{+k} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

3. La probabilité qu'une réalisation x de x appartienne à chacun des trois intervalles $[m - \sigma, m + \sigma]$, $[m - 2\sigma, m + 2\sigma]$ et $[m - 3\sigma, m + 3\sigma]$ est la suivante :

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

La probabilité qu'une réalisation appartienne au premier intervalle est :

$$P(m - \sigma < x < m + \sigma) = 1 - 2Q(1) = 0.6826$$

On aura donc :

$$P(m - \sigma < x < m + \sigma) = 1 - 2Q(1) = 0.6826$$

$$P(m - 2\sigma < x < m + 2\sigma) = 1 - 2Q(2) = 0.9544$$

$$P(m - 3\sigma < x < m + 3\sigma) = 1 - 2Q(3) = 0.9973$$

La probabilité qu'une réalisation x de X appartienne au troisième intervalle est la plus grande par rapport aux deux autres intervalles.

REFERENCES

- [1] F. De Coulon, « Théorie et traitement des signaux ». Dunod, 1984.
- [2] M. Benidir, « Théorie et Traitement du signal, tome 1 : Représentation des signaux et des Systèmes : Cours et exercices corrigés ». Dunod, 2004.
- [3] G.Blanchet and M.Charbit, « Digital signal and image processing using MATLAB » . Iste, 2006.
- [4] F.Cottet, « Aide-mémoire de Traitement des signaux ». Paris : Francis Lefebvre, 2000
- [5] M.Bellanger, « Traitement numérique du signal, théorie et pratique ». Dunod , 2006.
- [6] E.Tisserand, P.Jean-François, P.Schweitzer, « Analyse et traitement des signaux ». Dunod, 2008.
- [7] Gaillard, Paul, Lengellé, Régis, « Analyse et traitement du signal : signaux déterministes et aléatoires, filtrage, estimation avec exercices et problèmes corrigés ». Ellipses, 2006. Paris
- [8] Neffati, Tahar, « Traitement du signal analogique: cours ». Paris, Ellipses, 1999
- [9] Enden, A.W.M. van den Verhoeckx, Niek A.M, « Traitement numérique du signal : une Introduction ». Masson, 2003.
- [10] Ouahabi, Abdeldjalil, « Fondements théoriques du traitement du signal ». Connaissance du monde, 1993. Alger

WEBOGRAPHIE

- [A] Frédéric Launay, cours traitement du signal
https://www.liaslab.fr/perso/fredericlaunay/Cours/T1/Traitement%20du%20signal_etudiant.pdf
- [B] Christophe Odet, Hugues Benoit-Cattin. Traitement analogique du signal, CNAM
<https://www.creatis.insa-lyon.fr/~chris/TSanalogique.pdf>
- [C] T.Dumartin, Rappels traitement du signal, note de cours
http://www.geea.org/IMG/pdf/Cours_TS.pdf