

REPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITÉ DE BOUIRA  
FACULTÉ DES SCIENCES ET DES SCIENCES APPLIQUÉES  
LABORATOIRE DE RECHERCHE LIMPAF DE BOUIRA  
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES  
MÉMOIRE POUR L'OBTENTION DU DIPLOME DE MASTER MATHÉMATIQUES  
Option : Recherche opérationnelle

## THÈME

---

### ÉQUATION DE KLEIN-GORDON ET SES APPLICATIONS

---

Présenté par : DJERARDA Aïcha

Devant le jury :

|                          |     |           |              |
|--------------------------|-----|-----------|--------------|
| M. BERKANI Amirouche     | MCA | U. BOUIRA | Président    |
| Mme. BOUDANE Khadidja    | MAA | U. BOUIRA | Examinatrice |
| M. BOUGHANI L'Hadi       | MAA | U. BOUIRA | Examineur    |
| M. BOUDREF Mohamed Ahmed | MCA | U. BOUIRA | Promoteur    |

Année universitaire :2021/2022

## *Remerciement*

*En préambule à ce mémoire, qui un aboutissement à de longues années d'études universitaire, je remercie **ALLAH** le tout puissant de m'avoir aidé et fourni le courage nécessaire, qui m'ont permis de surmonter les difficultés durant ce parcours universitaire.*

*Je tiens à exprimer en premier lieu, mes remerciements et le plus grand respect à mon chers promoteur, **Dr. BOUDREF MOHAMED AHMED** pour avoir accepté de diriger mon travail, pour ses précieux conseils, pour son esprit d'ouverture et sa disponibilité grâce à lui, mon travail s'est déroulé dans les meilleures conditions.*

*Mes vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qui'ils ont porté à ma recherche en acceptant d'examiner mon travail et de l'enrichir par leur propositions.*

*je tiens adressé mes remerciements à tous les professeurs du département des Mathématiques qui fournis les outils nécessaire à la réussite dans mes études.*

*Que toutes les personnes qui ont participé à ce projet de près ou de loin en soient pleinement remerciées.*

## *Merci à Tous*

## *Dédicace*

*C'est avec un grand honneur je dédie ce modeste travail :*

*À mon très cher papa, pour ces conseils, son soutien matériel et moral et pour tout ses efforts et les faveurs qu'il m'a accordé et qui m'ont donné la volonté de réaliser et de finir ce travail.*

*À ma très chère maman, à qui je dois beaucoup pour ces sacrifices, son amour, son aide et son soutien pour me voir ainsi arriver à ce que je suis devenue aujourd'hui.*

*À Mon Fiancé Mohamed.*

*À Mon chère frère Yacine.*

*À Mes chères soeurs : Selma, Sirine, Saly.*

*À mes amis :*

*Turkiya, Ahlem, Anissa, Khaoula, Zahra, Chaima, Meriam, Dallale, Randa, Sana, Yasmine, ....*

*Toute personne qui occupe une place dans mon coeur.*

*À tous les membres de ma famille et toute personne qui porte le nom **Djerarda**, je dédie ce travail à tous ceux qui ont participé à ma réussite.*

## *Merci à Tous*

## *Résumé*

Le travail de ce mémoire consiste à étudier un développement d'une étude de la réduction dimensionnelle et cela pour pouvoir l'utiliser en mécanique quantique et de construire une théorie de champ quantique renormalisable. La réduction sera à partir d'un espace-temps à 4 dimensions ( $D = 1 + 3$ ) à une variante avec un plus petit nombre de dimensions spatiales ( $D = 1 + d; d < 3$ ) à des distances suffisamment petites.

Nous allons démontrer un théorème important qui reliera l'étude de l'équation de Klein Gordon sur l'espace (à géométrie variable) à la résolution d'une équation de type Schrödinger avec un potentiel effective généré par une variation géométrique. Ce résultat sera basé sur la méthode de Fourier (dite séparation de variables) dans l'équation de Klein-Gordon et sur le fait que les espaces bidimensionnels sont conformes à plat. Nous allons montrer que dans le cas de la dimension d'espace ( $d = 2$ ) le facteur de conformité de la métrique entre le potentiel effectif dans l'équation de Schrödinger due à la raison des modifications correspondantes des variables.

Comme exemple, nous allons considérer un espace-temps à géométrie spatiale variable incluant une transition vers une réduction dimensionnelle. Cet exemple que nous allons étudier contient une combinaison entre deux régions cylindriques bidimensionnelles de rayons distincts reliées par une région de transition.

**Mots clés :** équation de Klein-Gordon, équation de Schrödinger, variété, géométrie variable, réduction dimensionnelle.

## *Abstract*

This work of this consists of studying a development of a study of dimensional reduction and this to construct a renormalizable quantum field theory. The reduction will be from a 4-dimensional space-time ( $D = 1+3$ ) to a variant with a smaller number of spatial dimensions ( $D = 1 + d; d < 3$ ) at sufficiently small distances.

We will prove an important theorem that links the study of Klein Gordon equation on space (with variable geometry) to the resolution of a Schrodinger equation with an effective potential generated by geometric variation. This result is based on the Fourier method (so-called variable separation) in Klein Gordon equation and on the fact that two-dimensional spaces are flat. We will show that in the case of the space dimension ( $d = 2$ ) the conformal factor of the metric between the effective potential in the Schrödinger equation due to the corresponding modifications of the variables.

As an example, we will consider a space-time with a variable spatial geometry including a transition to a dimensional reduction. This example which we are going to study contains a combination between two bidimensional cylindrical regions of distinct radii connected by a transition region.

**Key Words :** Klein-Gordon equation , Schrodinger equation , Manifolds, variable geometry, dimensional reduction.

# Table des matières

|  |           |
|--|-----------|
| <b>TABLE DES MATIÈRES</b>  | <b>1</b>  |
| <b>TABLE DES FIGURES</b>   | <b>2</b>  |
| <b>1 Rappels Mathématiques</b>   | <b>5</b>  |
| 1.1 Équation de Helmholtz . . . . .  | 5         |
| 1.2 Certains problèmes résolus régis par l'équation de Helmholtz . . . . .   | 9         |
| 1.2.1 Réduction des équations aux dérivés partielles à des équations différentielles ordinaires par séparation des variables . . . . . | 9         |
| 1.2.2 Passage aux coordonnées curvilignes . . . . .  | 11        |
| 1.3 Fonctions spéciales de la physique mathématique . . . . .  | 13        |
| 1.3.1 Définitions et principales propriétés . . . . .  | 13        |
| 1.3.2 Propriété d'orthogonalité des fonctions spéciales . . . . .  | 14        |
| 1.3.3 Formes explicites des fonctions spéciales et certaines propriétés . . . . .  | 15        |
| <b>2 Équation de Klein de Gordon</b>   | <b>21</b> |
| 2.1 Quelques problèmes fondamentaux en mécanique quantique . . . . .   | 21        |
| 2.2 Résolution de l'équation de Schrödinger pour le champ central . . . . .  | 22        |
| 2.2.1 Résolution de l'équation de Klein Gordon pour le champ coulombien . . . . .  | 23        |
| <b>3 Équations de Klein Gordon sur les variétés</b>  | <b>26</b> |
| 3.1 Notions de géométrie différentielle . . . . .  | 26        |
| 3.1.1 Variétés et variétés différentielles . . . . .   | 26        |
| 3.1.2 Variété abstraite et sous variété . . . . .  | 30        |
| 3.1.3 Variétés différentielles . . . . .   | 30        |
| 3.2 Résolution de l'équation de Klein-Gordon sur un cylindre de révolution . . . . .   | 31        |
| 3.3 Résolution de l'équation de Klein-Gordon dans une géométrie variable . . . . .   | 34        |
| 3.3.1 Position du problème . . . . .   | 34        |
| 3.4 Équations de Klein-Gordon dans une symétrie cylindrique . . . . .  | 35        |
| 3.4.1 Illustration . . . . .   | 35        |
| 3.4.2 Résolution . . . . .   | 37        |
| 3.4.3 Cas particulier : dimension (1+1) . . . . .  | 38        |
| 3.4.4 Interprétation analytique des solutions . . . . .  | 38        |
| 3.4.5 Généralisation aux dimensions supérieures . . . . .  | 40        |

# Table des figures

|      |   |    |
|------|---|----|
| 1    | Surface globale $S_2$ . . . . .   | 3  |
| 2    | Variété unidimensionnelle $S_0$ . . . . .   | 4  |
| 1.1  | Polynôme de Legendre . . . . .  | 17 |
| 1.2  | Polynôme d'Hermite . . . . .  | 19 |
| 1.3  | Polynômes de Laguerre . . . . .   | 20 |
| 3.1  | La projection stéréographique . . . . .   | 28 |
| 3.2  | La sphère $\mathbb{R}^n$ . . . . .  | 28 |
| 3.3  | Le tore . . . . .   | 29 |
| 3.4  | Cylindre . . . . .  | 31 |
| 3.5  | Présentation des corps cylindriques . . . . .                                     | 34 |
| 3.6  | La symétrie cylindrique . . . . .   | 36 |
| 3.7  | L'expression du $\rho$ en termes de $Z$ . . . . .                                 | 39 |
| 3.8  | La fonction $z(u; R; r; \alpha)$ lorsque $r \rightarrow 0$ . . . . .              | 40 |
| 3.9  | La fonction $\chi(u; R; r; \alpha)$ lorsque $r \rightarrow 0$ . . . . .           | 40 |
| 3.10 | $U(r)$ . . . . .  | 46 |
| 3.11 | $U(t)$ . . . . .  | 46 |
| 3.12 | $U(\theta)$ . . . . .   | 46 |
| 3.13 | $U(z)$ . . . . .  | 46 |
| 3.14 | $U(r, \theta)$ . . . . .  | 46 |
| 3.15 | $U(z, t)$ . . . . .   | 46 |
| 3.16 | La fonction $z(u, a, r, b)$ avec $r \rightarrow 0$ . . . . .                      | 48 |
| 3.17 | La fonction $\chi(u, a, r, b)$ avec $r \rightarrow 0$ . . . . .                   | 49 |
| 3.18 | La solution de l'équation de Klein Gordon dans une symétrie cylindrique . . . . . | 50 |

# Introduction Générale

Les problèmes de la physique mathématique occupent une place importante dans le domaine de la recherche en mathématique. L'étude des équations de la physique mathématique présente une importance cruciale pour modéliser ce type de problèmes .

Les classes des équations de la physique mathématique sont très variées et représentent des équations aux dérivées partielles EDP, parmi ces équations nous avons l'équation de Helmholtz qui est un type de l'équation hypergéométrique [1].

La résolution de ce type d'équations nous ramènons aux équations de Shrödinger, de Dirac, de Klein-Gordon et les solutions obtenues appartenant aux classes des fonctions spéciales [1][9] :

Les polynômes orthogonaux Jacobi, Laguerre, Hermite.

Les fonctions sphériques polynômes de Legendre.

Les fonctions cylindriques Fonction de Bessel.

Les fonctions hypergéométriques et les polynômes d'Euler.

Comme concrétisation physique [8][13][14] à ce type de problème nous admettons ce qui suit : considérons une bouteille posée verticalement, cette bouteille est composée de 3 régions  $S_{R,L}, S_{r,l}, S_{col}$  dont la surface globale  $S_2 = S_{R,L} + S_{r,l} + S_{col}$  (Il est claire que  $R > r, L > l$ ).

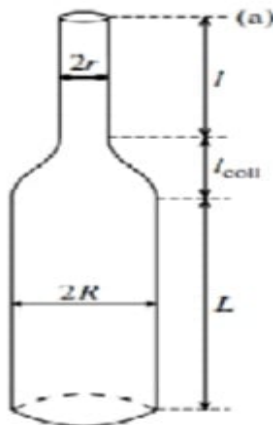


FIGURE 1 – Surface globale  $S_2$

La surface globale  $S_2$  sera considérée comme variété bidimensionnelle.

Plusieurs problèmes de la physique mathématique ont été résolus tout en considérant les régions  $S_{R,L}, S_{r,l}, S_{col}$  séparément ainsi que l'obtention des solutions analytiques exactes sur chaque surface, par exemple sur les surfaces cylindriques nous obtenons des solutions cylindriques représentées par les fonctions de Bessel.

Le problème actuel étudié dans ce mémoire est de considérer la surface  $S_2$  tout entière. Faisons passer un champ quantique à l'entrée du grand cylindre  $S_{R,L}$  et voir sa sortie au bout du petit cylindre  $S_{r,l}$ .

Le phénomène obtenu nous conduit à noter les remarques suivantes :

1. La solution obtenue sera dépendant de la surface de région  $S_{col}$ .
2. Passage à un changement brusque de rayon (à un collier horizontal).
3. Discussion du cas limite quand  $r \rightarrow 0$  (une transition de la surface bidimensionnelle du côté  $S_{R,L}$  à la variété linéaire unidimensionnelle  $S_0$  voir figure 2)

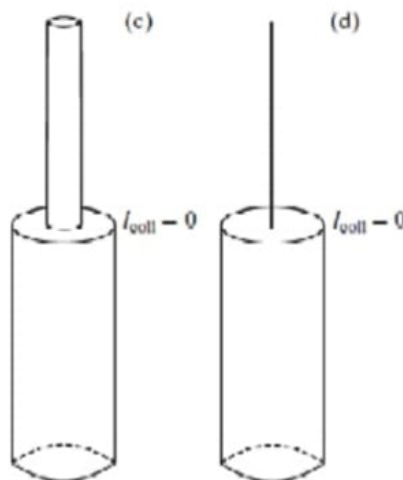


FIGURE 2 – Variété unidimensionnelle  $S_0$

À cette fin nous allons étudier le problème de la réduction dimensionnelle.

L'équation obtenue et celle de Klein-Gordon sur la surface  $S_2$  (variété spatio-temporelle), commençons par la dimension 2 et généralisons aux dimensions supérieures.

Le problème est très délicat une équation de Klein-Gordon sur une variété différentielle repose sur la géométrie variable de la structure considérée, l'astuce est de transformer ce problème en l'équation de Schrödinger avec un potentiel générée par cette variation [2][7][14].

Dire réduction dimensionnelle ça veut pas dire modification de la notion du temps mais plutôt une transformation continue de la géométrie spatiale jusqu'à avoir une réduction de la dimension de l'espace.

Ce mémoire sera organisé comme suit :

Chapitre 1 : nous allons donner des rappels mathématiques sur les équations de la physique mathématique telle que l'équation de Helmholtz ainsi que certains problèmes résolus régis par cette équation. Aussi nous allons donner les propriétés principales des fonctions spéciales à savoir les fonctions cylindriques, sphériques, hypergéométriques.

Chapitre 2 : nous allons étudier les principales propriétés de l'équation de Klein-Gordon comme équation fondamentale de la mécanique quantique.

Chapitre 3 : est le cœur de ce mémoire nous allons étudier le problème de l'équation de Klein-Gordon donnée dans une géométrie variable. À la fin de ce chapitre nous allons concrétiser l'étude par des simulations.



# Rappels Mathématiques

Dans ce chapitre nous allons donner les principales notions mathématiques sur les équations de la physique mathématique ainsi que les fonctions spéciales.

## 1.1 Équation de Helmholtz

Dans un grand nombre de problèmes importants de la physique théorique et mathématique, on est conduit à l'équation différentielle

$$u'' + \frac{\tilde{\tau}(z)}{\sigma(z)}u' + \frac{\tilde{\sigma}(z)}{\sigma^2(z)}u = 0 \tag{1.1}$$

dans laquelle  $\sigma(z)$  et  $\tilde{\sigma}(z)$  sont des polynômes de degré non supérieur à 2, et  $\tilde{\tau}(z)$  un polynôme de degré non supérieur à 1. On rencontre des équations de ce type en résolvant les équations de Laplace et d'Helmholtz en coordonnées curvilignes par séparation des variables, dans les problèmes fondamentaux de la mécanique quantique : mouvement d'une particule dans un champ à symétrie sphérique, oscillateur harmonique, recherche des solutions d'équations de Schrödinger, de Dirac et de Klein-Gordon pour le potentiel coulombien, mouvement d'une particule dans un champ électrique ou magnétique homogène ...

L'équation (1.1) apparaît également dans bon nombre de problèmes modèles de la physique atomique, moléculaire et nucléaire.

Les équations du type (1.1) admettent comme solutions particulières des fonctions spéciales appartenant aux classes suivantes :

- polynômes orthogonaux classiques (polynômes de Jacobi, de Laguerre et d'Hermite) ;
- fonctions sphériques ;
- fonctions cylindriques ;
- fonctions hypergéométriques.

Ces fonctions sont souvent appelées fonctions spéciales de la physique mathématique.

Dans ce qui suit, nous admettrons partout que le variable  $z$  et les coefficients des polynômes  $\sigma(z)$ ,  $\tilde{\sigma}(z)$  et  $\tilde{\tau}(z)$  sont susceptibles de prendre toute valeur réelle ou complexe.

Essayons de mettre l'équation (1.1) sous une forme plus simple au moyen du changement  $u = \varphi(z)y$  et d'un choix particulier de la fonction  $\varphi(z)$ , il vient

$$y'' + \left(2\frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{\tilde{\tau}}{\sigma}\right)y' + \left(\frac{\varphi''}{\varphi} + \frac{\varphi'\tilde{\tau}}{\varphi\sigma} + \frac{\tilde{\sigma}}{\sigma^2}\right)y = 0. \tag{1.2}$$

En vue de rendre (1.2) plus simple que (1.1), on donnera au coefficient de  $y'$  l'aspect  $\tau(z)/\sigma(z)$ , où  $\tau(z)$  est un polynôme de degré non supérieur à 1. La fonction  $\varphi(z)$  se définira alors par l'équation

$$\varphi'/\varphi = \pi(z)/\sigma(z), \quad (1.3)$$

dans laquelle

$$\pi(z) = \frac{1}{2}[\tau(z) - \tilde{\tau}(z)] \quad (1.4)$$

est un polynôme de degré non supérieur à 1. Puisque

$$\frac{\varphi''}{\varphi} = \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)' + \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)' + \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^2,$$

l'équation (1.2) devient

$$y'' + \frac{\tau(z)}{\sigma(z)}y' + \frac{\bar{\sigma}(z)}{\sigma^2(z)}y = 0 \quad (1.5)$$

où

$$\tau(z) = \tilde{\tau}(z) + 2\pi(z), \quad (1.6)$$

$$\bar{\sigma}(z) = \tilde{\sigma}(z) + \pi^2(z) + \pi(z)[\tilde{\tau}(z) - \sigma'(z)] + \pi'(z)\sigma(z) \quad (1.7)$$

Les fonctions  $\tau(z)$ ,  $\bar{\sigma}(z)$  sont deux polynômes de degrés non supérieurs à 1 et à 2 respectivement. L'équation (1.5) est donc de même type que (1.1). Nous avons trouver de cette façon la classe des transformations qui laissent inchangé le type de l'équation : ce sont les transformations qu'on fait subir à (1.1) en opérant le changement  $u = \varphi(z)y$ , où la fonction  $\varphi(z)$  vérifie l'équation (1.3), quel que soit le polynôme du premier degré  $\pi(z)$ .

L'arbitraire dans le choix de  $\pi(z)$  nous permettra de choisir, parmi les formes possibles de l'équation (1.5), celle qui est la plus simple et qui se prête le mieux à la discussion. Choisissons les coefficients du polynôme  $\pi(z)$  de telle façon que le polynôme  $\bar{\sigma}(z)$  figurant dans (1.5) soit un multiple exact de  $\sigma(z)$ , i.e

$$\bar{\sigma}(z) = \lambda\sigma(z), \quad (1.8)$$

$\lambda$  étant une constante. Cela est possible, car, en identifiant les coefficients qui affectent les puissances correspondantes de  $z$  dans les deux membres de l'égalité (1.8), on obtient trois équations pour trois constantes inconnues : la constante  $\lambda$  et deux coefficients du polynôme  $\pi(z)$ . L'équation (1.5) deviendra donc

$$\sigma(z)y'' + \tau(z)y' + \lambda y = 0. \quad (1.9)$$

Nous dirons que (1.9) est une équation du type hypergéométrique, et ses solutions, des fonctions du type hypergéométrique. Il sera donc tout naturel d'appeler l'équation (1.1) équation généralisée du type hypergéométrique.

Pour définir le polynôme  $\pi(z)$  et la constante  $\lambda$ , mettons la condition (1.8) sous la forme

$$\pi^2 + (\tilde{\tau} - \sigma')\pi + \tilde{\sigma} - k\sigma = 0,$$

où

$$k = \lambda - \pi'(z). \quad (1.10)$$

Supposant provisoirement la constante  $k$  connue, on peut expliciter  $\pi(z)$  dans l'équation du second degré :

$$\pi(z) = \frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma' - \tilde{\tau}}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma} + k\sigma}. \quad (1.11)$$

$\pi(z)$  étant un polynôme, le radicande doit être le carré d'un polynôme. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que soit nul le discriminant du polynôme du second degré sous le signe de la racine. Cette condition nous conduit à l'équation, en général du second degré, pour la constante  $k$ .

Une fois  $k$  trouvé, on cherche  $\pi(z)$  par la formule (1.11), puisque  $\varphi(z)$ ,  $\tau(z)$  et  $\lambda$  à l'aide des formules (1.3), (1.6) et (1.10). Il est évident qu'il existe plus d'une possibilité de réduire l'équation (1.1) à l'équation du type hypergéométrique (1.9), possibilités fournies par le choix de la constante  $k$  et celui du signe de  $\pi(z)$  dans la formule (1.11).

Grâce à la transformation proposée, on aura à discuter, au lieu de l'équation (1.1), une équation plus simple du type (1.9).

### Exemple 1.1.1.

Mettons sous la forme (1.9) l'équation de Bessel

$$z^2 u'' + zu' + (z^2 - v^2)u = 0$$

en faisant le changement  $u = \varphi(z)y$ . L'équation de Bessel est un cas particulier de l'équation (1.1) pour  $\sigma(z) = z$ ,  $\tilde{\tau}(z) = 1$ ,  $\tilde{\sigma}(z) = z^2 - v^2$ . Le radicande de (1.11) se présente alors sous la forme  $-z^2 + v^2 + kz$ . Annulant le discriminant de ce trinôme du second degré, on obtient l'équation pour la constante  $k$  :

$$k^2 + 4v^2 = 0,$$

d'où  $k = \pm 2iv$ . L'on a donc, en vertu de (1.11),

$$\pi(z) = \pm \sqrt{-z^2 + v^2 \pm 2ivz} = \pm(iz \pm v).$$

Ainsi donc, dans le cas considéré le polynôme  $\pi(z)$  peut se mettre sous quatre formes différentes. Plaçons-nous dans le cas où  $k = 2iv$ ,  $\pi(z) = iz + v$  par exemple. Les formules (1.3), (1.6) et (1.10) nous donnent

$$\varphi(z) = z^v e^{iz},$$

$$\tau(z) = 2iz + 2v + 1,$$

$$\lambda = k + \pi'(z) = i(2v + 1).$$

L'équation (1.9) devient finalement

$$zy'' + (2iz + 2v + 1)y' + i(2v + 1)y = 0.$$

### Remarque 1.1.1.

1. Puisque l'équation (1.1) ne change pas lorsqu'on multiplie  $\sigma(z)$  et  $\tilde{\tau}(z)$  par  $c$  et  $\tilde{\sigma}(z)$  par  $c^2$  ( $c$  étant une constante quelconque), on peut admettre que le coefficient affectant le terme de plus haut degré du polynôme  $\sigma(z)$  est égal à un nombre donné. Cette remarque reste aussi vraie pour l'équation (1.9).

**2.** Dans la suite, on peut se borner à considérer les cas où, dans les équations (1.1) et (1.9), le polynôme  $\sigma(z)$  n'admet pas de racines multiples. En effet, si le polynôme  $\sigma(z)$  admet des racines multiples, i.e.  $\sigma(z) = (z-a)^2$ , il suffit de faire le changement  $z - a = 1/s$  pour ramener l'équation (1.1) à la forme

$$\frac{d^2u}{ds^2} + \frac{2 - s\tilde{\tau}(a + 1/s)}{s} \frac{du}{ds} + \frac{s^2\tilde{\sigma}(a + 1/s)}{s^2}u = 0 \quad (1.12)$$

Les expressions  $s\tilde{\tau}(a + 1/s)$  et  $s^2\tilde{\sigma}(a + 1/s)$  sont deux polynômes de degré non supérieur à 1 et à 2 respectivement en  $s$ . Aussi l'équation (1.12) est-elle une équation du type (1.1) dont le polynôme  $\sigma(s)$  est égal à  $s$  et n'admet donc pas de racines multiples.

**3.** Il n'est pas possible de réduire l'équation (1.1) à une équation du type (1.9) par le procédé décrit si  $\sigma(z) = 1$  et si l'expression  $(\tilde{\tau}/2)^2$  est un polynôme du premier degré. Dans ce cas, pour réduire l'équation (1.1) à une forme plus simple, on peut choisir le polynôme  $\pi(z)$  dans (1.3) de la condition  $\tau(z) = 0$ . Alors  $\sigma(z)$  devient un polynôme du premier degré, et l'équation (1.5) s'écrit

$$y'' + (az + b)y = 0 \quad (1.13)$$

Par un changement linéaire  $s = az + b$ , on ramène (1.13) à un cas particulier de l'équation

$$\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{1 - 2\alpha}{s} \frac{dy}{ds} + \left[ (\beta\gamma s^{\gamma-1})^2 + \frac{\alpha^2 - v^2\gamma^2}{s^2} \right] y = 0, \quad (1.14)$$

dans laquelle  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $v$  sont des constantes. Les solutions de (1.14) s'expriment au moyen de fonctions cylindriques.

**4.** Un autre cas d'application des équations du type hypergéométrique est la solution des équations différentielles simultanées du premier ordre

$$\left. \begin{aligned} u'_1 &= a_{11}(z)u_1 + a_{12}(z)u_2 \\ u'_2 &= a_{21}(z)u_1 + a_{22}(z)u_2 \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

aux coefficients

$$a_{ik}(z) = \frac{\tau_{ik}(z)}{\sigma(z)}, \quad (1.16)$$

où  $\tau_{ik}(z)$  est un polynôme de degré non supérieur à 1, et  $\sigma(z)$  un polynôme de degré non supérieur à 2. En éliminant la fonction  $u_2(z)$  entre les équations (1.15), on obtient l'équation définissant  $u_1(z)$  :

$$u''_1 - \left( a_{11} + a_{22} + \frac{a'_{12}}{a_{12}} \right) u'_1 + \left( a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + a_{11} \frac{a'_{12}}{a_{12}} - a'_{11} \right) u_1 = 0. \quad (1.17)$$

Puise

$$\frac{a'_{12}}{a_{12}} = -\frac{\sigma'}{\sigma} + \frac{\tau'_{12}}{\tau_{12}},$$

l'équation (1.17) sera une équation du type hypergéométrique pour  $\tau'_{12} = 0$ . Si  $\tau'_{12} \neq 0$ , on peut effectuer une transformation linéaire

$$\begin{aligned} v_1 &= \alpha u_1 + \beta u_2, \\ v_2 &= \gamma u_1 + \delta u_2 \end{aligned}$$

$\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  étant des constantes. On obtient alors un système d'équation du type

$$\left. \begin{aligned} v'_1 &= \tilde{a}_{11}(z)v_1 + \tilde{a}_{12}(z)v_2, \\ v'_2 &= \tilde{a}_{21}(z)v_1 + \tilde{a}_{22}(z)v_2, \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

où les fonctions  $\tilde{a}_{ik}(z)$  sont des combinaisons linéaires des fonctions  $a_{ik}(z)$  à coefficients constants dépendant de  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ; elles s'écrivent donc

$$\tilde{a}_{ik}(z) = \frac{\tilde{\tau}_{ik}(z)}{\sigma(z)},$$

$\tilde{\tau}_{ik}(z)$  est un polynôme de degré non supérieur à 1.

En choisissant les coefficients  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  de façon à avoir  $\tilde{\tau}'_{12} = 0$  ( ce qui est toujours possible), on obtient, après avoir éliminé la fonction  $v_2(z)$  entre les équations (1.18), une équation généralisée du type hypergéométrique pour la fonction  $v_1(z)$ .

Au cas où  $\sigma(z)$  est un polynôme du premier degré, on peut passer de l'équation (1.15) à l'équation généralisée du type hypergéométrique par un procédé différent, en choisissant les constantes  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  de telle façon que le coefficient  $\tilde{a}_{12}$  soit indépendant de  $z$ , i.e  $\tilde{\tau}_{12} = v\sigma(z)$  ( $v$  étant une constante).

## 1.2 Certains problèmes résolus régis par l'équation de Helmholtz

Dans la section précédente nous avons étudié l'équation de Helmholtz, ses différentes propriétés des solutions possibles.

$$u'' + \frac{\tilde{\tau}(z)}{\sigma(z)}u' + \frac{\tilde{\sigma}(z)}{\sigma^2(z)}u = 0 \quad (1.19)$$

Dans laquelle  $\sigma(z)$  et  $\tilde{\sigma}(z)$  sont des polynômes de degré non supérieur à 2 et  $\tilde{\tau}(z)$  un polynôme de degré non supérieur à 1.

La présente section est consacré à l'application des solutions obtenues à certains problèmes importants de mécanique quantique et de physique mathématique.

### 1.2.1 Réduction des équations aux dérivés partielles à des équations différentielles ordinaires par séparation des variables

#### Schéma général de la méthode de séparation des variables

La résolution d'équations différentielles aux dérivées partielles par la méthode de Fourier (séparation de variables) se réduit à celle d'équations différentielles ordinaires. Dans bon nombre de problèmes intéressant de physique mathématique, les solutions de ces équations se laissent exprimer à l'aide des fonctions spéciales.

La méthode est appliquée lorsqu'il s'agit de chercher des solutions particulières d'une équation du type

$$Lu = 0 \quad (1.20)$$

où l'opérateur  $L$  peut s'écrire

$$L = L_1L_2 + M_1M_2 \quad (1.21)$$

Les opérateurs  $L_1, M_1$  n'agissent que sur un certain groupe de variables dont dépend la fonction  $u$ , tandis que l'action des opérateurs  $L_2, M_2$  s'étend sur les variables qui restent. Le produit des opérateurs est le résultat de leur mise en oeuvre consécutive. Tous les opérateurs  $L_i, M_i (i = 1, 2)$  sont supposés linéaires, i.e

$$L_i(C_1u + C_2v) = C_1L_iu + C_2L_iv$$

$$M_i(C_1u + C_2v) = C_1M_iu + C_2M_iv$$

( $C_1, C_2$  sont des constantes)

**Exemple 1.2.1.**

Soit

$$Lu = u_{xx} + u_{yy}$$

On a alors

$$L_1 = \partial^2 / \partial x^2$$

$$L_2 = E$$

$$M_1 = E$$

$$M_2 = \partial^2 / \partial y^2$$

où  $E$  est l'opérateur unité.

Pour les opérateurs du type (1.21), on cherche la solution particulière de (1.20) sous la forme  $u = u_1 u_2$ , où la fonction  $u_1$  ne dépend que du premier groupe de variables, et  $u_2$  dépend des variables qui restent.

Puisque

$$L_1 L_2(u_1 u_2) = L_1 u_1 \cdot L_2 u_2,$$

$$M_1 M_2(u_1 u_2) = M_1 u_1 \cdot M_2 u_2,$$

l'équation  $Lu = 0$  peut s'écrire aussi comme suit :

$$\frac{L_1 u_1}{M_1 u_1} = - \frac{M_2 u_2}{L_2 u_2}$$

Les fonctions  $\frac{L_1 u_1}{M_1 u_1}$  et  $\frac{M_2 u_2}{L_2 u_2}$  étant indépendantes l'une des variables du second groupe et l'autre des variables du premier groupe, il vient

$$\frac{L_1 u_1}{M_1 u_1} = - \frac{M_2 u_2}{L_2 u_2} = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

où  $\lambda$  est une constante. On obtient ainsi deux équations dont chacune comprend des fonctions qui ne dépendent que d'une partie des variables initiales :

$$L_1 u_1 = \lambda M_1 u_1, \quad M_2 u_2 = -\lambda L_2 u_2, \quad (1.22)$$

Puisque l'opérateur  $L$  est linéaire, D'après le principe de superposition la combinaison linéaire des solutions

$$u = \sum_i C_i u_{1i} u_{2i}$$

( $C_i$  étant des constantes)

qui correspondent aux différentes valeurs possibles de  $\lambda = \lambda_i$  est solution de l'équation (1.20). Sous certaines conditions (complétude de l'ensemble des solutions particulières), toute solution de l'équation  $Lu = 0$  se laisse écrire sous la forme  $u = \sum_i C_i u_{1i} u_{2i}$

Nous venons de réduire l'équation initiale à un ensemble d'équation comportant un moins grand nombre de variables. Les cas où l'on arrive à réduire l'équation initiale, par séparations successives des variables, à un ensemble d'équations différentielles ordinaires sont particulièrement intéressants.

### 1.2.2 Passage aux coordonnées curvilignes

Nous venons de considérer les traits généraux de la méthode de séparation des variables (méthode de Fourier) appliquée aux équations du type  $Lu = 0$  dans lesquelles  $L$  est un opérateur linéaire d'une structure particulière. Dans des problèmes concrets liés à la recherche d'une solution de l'équation  $Lu = 0$  vérifiant certaines conditions aux limites, la méthode de séparation des variables s'avère très efficace si les variables se séparent non seulement dans l'équation mais aussi dans les conditions aux limites. Pour en arriver, on utilise souvent, au lieu des coordonnées cartésiennes, d'autres variables indépendantes, susceptibles de mettre à profit la symétrie du problème. On doit choisir les coordonnées curvilignes de telle façon que

- 1) La limite du domaine opératoire soit constituée par des surfaces de coordonnées.
- 2) Le Passage aux coordonnées curvilignes rende possible la séparation des variables dans l'équation.

#### Exemple 1.2.2.

Résolution de l'équation d'Helmholtz

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

par séparation des variables ( $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  est l'opérateur de Laplace). On connaît, pour l'équation proposée, onze systèmes de coordonnées curvilignes dans lesquelles les variables se séparent, donnant généralement naissance à des équations généralisées du type hypergéométrique.

A titre d'exemple, nous chercherons des solutions particulières de l'équation d'Helmholtz par séparation des variables en prenant les coordonnées cylindriques paraboliques et celles du parabolôide de révolution. On passe des coordonnées cartésiennes aux coordonnées cylindriques paraboliques  $\xi, \eta, \varsigma$  à l'aide des formules :

$$x = \xi\eta, \quad y = \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2), \quad z = \varsigma$$

et aux coordonnées du parabolôide de révolution  $\xi, \eta, \varphi$  à l'aide des formules

$$x = \xi\eta \cos \varphi, \quad y = \xi\eta \sin \varphi, \quad z = \frac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2)$$

Dans le premier cas l'équation d'Helmholtz  $\Delta u + k^2 u = 0$  devient

$$\frac{1}{\xi^2 + \eta^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \varsigma^2} + k^2 u = 0 \quad (1.23)$$

et dans le second cas,

$$\frac{1}{\xi^2 + \eta^2} \left[ \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right] + \frac{1}{(\xi\eta)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + k^2 u = 0 \quad (1.24)$$

Cherchons la solution de (1.23) par séparation des variables, en posant

$$u = U(\xi)V(\eta)W(\varsigma). \quad (1.25)$$

Portons (1.25) dans l'équation. Il vient

$$\frac{1}{\xi^2 + \eta^2} \left[ \frac{U''(\xi)}{U(\xi)} + \frac{V''(\eta)}{V(\eta)} \right] = - \left[ \frac{W''(\varsigma)}{W(\varsigma)} + k^2 \right].$$

Le premier membre de cette égalité est indépendant de  $\xi$ , tandis que son second membre est indépendant de  $\xi$  et de  $\eta$ . D'où

$$\frac{1}{\xi^2 + \eta^2} \left[ \frac{U''(\xi)}{U(\xi)} + \frac{V''(\eta)}{V(\eta)} \right] = \lambda, \quad (1.26)$$

$$\frac{W''(\varsigma)}{W(\varsigma)} + k^2 = -\lambda, \quad (1.27)$$

où  $\lambda$  est une constante.

Ecrivant (1.26) sous la forme

$$\frac{U''(\xi)}{U(\xi)} - \lambda\xi^2 = - \left[ \frac{V''(\eta)}{V(\eta)} - \lambda\eta^2 \right],$$

on obtient à l'aide d'un raisonnement analogue

$$\frac{U''(\xi)}{U(\xi)} - \lambda\xi^2 = \mu, \quad \frac{V''(\eta)}{V(\eta)} - \lambda\eta^2 = -\mu$$

où  $\mu$  est une constante.

On aboutit finalement aux équations suivantes pour les fonctions  $U(\xi)$ ,  $V(\eta)$  et  $W(\varsigma)$  :

$$U'' - (\lambda\xi^2 + \mu)U = 0 \quad (1.28)$$

$$V'' - (\lambda\eta^2 - \mu)V = 0 \quad (1.29)$$

$$W'' + (k^2 + \lambda)W = 0 \quad (1.30)$$

D'une façon analogue, en cherchant la solution de (1.24) sous la forme

$$u = U(\xi)V(\eta)W(\varphi),$$

on aboutit aux équations suivantes pour les fonctions  $U(\xi)$ ,  $V(\eta)$  et  $W(\varphi)$  :

$$U'' + \frac{1}{\xi}U' + (k^2\xi^2 - \frac{\lambda}{\xi^2} + \mu)U = 0 \quad (1.31)$$

$$V'' + \frac{1}{\eta}V' + (k^2\eta^2 - \frac{\lambda}{\eta^2} - \mu)V = 0 \quad (1.32)$$

$$W'' + \lambda W = 0 \quad (1.33)$$

Les solutions de (1.30) et de (1.33) se laissent exprimer à l'aide de fonctions élémentaires. Par le changement de  $\mu$  en  $-\mu$  on réduit les équations (1.29) et (1.32) respectivement à (1.28) et à (1.31). Il reste donc à chercher les solutions des équations (1.28) et (1.31).

L'équation (1.28) est déjà une équation généralisée du type hypergéométrique. Dans l'équation (1.31), il est naturel de faire le changement  $\xi^2 = t$  qui permet de la réduire à l'équation généralisée du type hypergéométrique

$$\frac{d^2U}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{dU}{dt} + \frac{1}{4t^2} (k^2t^2 + \mu t - \lambda)U = 0. \quad (1.34)$$

Les équations (1.28) et (1.34) se réduisent respectivement à une équation d'Hermite et à une équation hypergéométrique dégénérée.



## 1.3 Fonctions spéciales de la physique mathématique

Les fonctions spéciales sont considérées comme des solutions particulières de l'équation différentielle d'un certain type apparaissant dans des nombreux problèmes de physique mathématique. Les fonctions spéciales se présentent dans plusieurs classes à savoir les fonctions sphériques, les fonctions cylindriques et les fonctions hypergéométriques.

### 1.3.1 Définitions et principales propriétés

Soit l'équation

$$\sigma(z)y'' + \tau(z)y' + \lambda y = 0 \quad n \in N \quad (1.35)$$

où  $\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma''$ . Ces polynômes se laissent expliciter à l'aide de la formule de Rodrigues

$$y_n(z) = \frac{B_n}{\rho(z)} [\sigma^n(z)\rho(z)]^{(n)} \quad (1.36)$$

où  $B_n$  est la constante de normalisation et  $\rho(z)$  vérifie l'équation différentielle

$$[\sigma(z)\rho(z)]' = \tau(z)\rho(z). \quad (1.37)$$

En résolvant (1.37), nous obtenons trois formes possibles de la fonction  $\rho(z)$  (à un facteur constant près), en fonction du degré du polynôme  $\sigma(z)$  :

$$\rho(z) = \begin{cases} (b-z)^\alpha(z-a)^\beta & \text{pour } \sigma(z) = (b-z)(z-a), \\ (z-a)^\alpha e^{\beta z} & \text{pour } \sigma(z) = z-a, \\ e^{\alpha z^2 + \beta z} & \text{pour } \sigma(z) = 1. \end{cases}$$

Ici  $a$  et  $b, \alpha$  et  $\beta$  sont des constantes (complexes dans le cas général).

Par un changement linéaire de la variable indépendante, on peut donner aux expressions de  $\sigma(z)$  et de  $\rho(z)$  les formes canoniques suivantes (à un facteur constant près) :

$$\rho(z) = \begin{cases} (1-z)^\alpha(1+z)^\beta & \text{pour } \sigma(z) = 1-z^2, \\ z^\alpha e^{-z} & \text{pour } \sigma(z) = z, \\ e^{-z^2} & \text{pour } \sigma(z) = 1. \end{cases}$$

Avec un tel changement les équations (1.35) et (1.37) se transforment en équations de même type, tandis que les polynômes correspondants du type hypergéométrique  $y_n(z)$  restent des polynômes par rapport à la nouvelle variable et se définissent comme précédemment par la formule de Rodrigues (1.36).

En fonction de la forme de  $\sigma(z)$ , on obtient les systèmes de polynômes suivants :

1)- Soient

$$\begin{aligned} \sigma(z) &= 1 - z^2, \quad \rho(z) = (1-z)^\alpha(1+z)^\beta. \text{ Alors} \\ \tau(z) &= -(\alpha + \beta + 2)z + \beta - \alpha. \end{aligned}$$

Les polynômes correspondants  $y_n(z)$  pour  $B_n(z) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}$  s'appellent polynômes de Jacobi et se notent  $P_n^{(\alpha, \beta)}(z)$  :

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(z) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-z)^{-\alpha} (1+z)^{-\beta} \frac{d^n}{dz^n} [(1-z)^{n+\alpha} (1+z)^{n+\beta}].$$

Les polynômes suivants sont des cas particuliers importants des polynômes de Jacobi :

- a) Les polynômes de Legendre  $P_n(z) = P_n^{(0,0)}(z)$ ,  
 b) Les polynômes de Tchébychev de 1<sup>re</sup> et de 2<sup>e</sup> espèces :

$$T_n(z) = \frac{n!}{(1/2)_n} P_n^{(-1/2,-1/2)}(z),$$

$$U_n(z) = \frac{(n+1)!}{(3/2)_n} P_n^{(1/2,1/2)}(z),$$

- c) Les polynômes de Gegenbauer, appelés parfois polynômes ultra-sphériques,

$$C_n^\lambda(z) = \frac{(2\lambda)_n}{(\lambda+1/2)_n} P_n^{(\lambda-1/2,\lambda-1/2)}(z).$$

Nous avons utilisé la notation

$$(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1) = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)},$$

où  $\Gamma(z)$  est la fonction gamma.

- 2) Soient  $\sigma(z) = z$ ,  $\rho(z) = z^\alpha e^{-z}$ . Alors

$$\tau(z) = -z + \alpha + 1$$

Les polynômes  $y_n(z)$  pour  $B_n = 1/n!$  s'appellent polynômes de Laguerre et se notent  $L_n^\alpha(z)$  :

$$L_n^\alpha(z) = \frac{1}{n!} e^z z^{-\alpha} \frac{d^n}{dz^n} (z^{\alpha+n} e^{-z})$$

- 3) Soient  $\sigma(z) = 1$ ,  $\rho(z) = e^{-z^2}$ . Alors  $\tau(z) = -2z$ . Les polynômes  $y_n(z)$  pour  $B_n = (-1)^n$  s'appellent polynômes d'Hermite et se notent  $H_n(z)$  :

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n} (e^{-z^2})$$

### 1.3.2 Propriété d'orthogonalité des fonctions spéciales

En imposant certaines contraintes à la fonction  $\rho(z)$ , on met en évidence quelques propriétés spéciales des polynômes  $y_n(z)$ .

#### Théorème 1.3.1.

Supposons que la fonction  $\rho(z)$  vérifie, aux extrémités d'un intervalle  $(a, b)$ , la condition

$$\sigma(z)\rho(z)z^k|_{z=a,b} = 0 \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (1.38)$$

Alors les polynômes du type hypergéométrique  $y_n(z)$  correspondant aux différentes valeurs de  $\lambda_n$  seront orthogonaux sur l'intervalle  $(a,b)$  par rapport au poids  $\rho(z)$ , i.e.

$$\int_a^b y_n(z)y_m(z)\rho(z)dz = 0 \quad (\lambda_m \neq \lambda_n).$$

**Démonstration 1.3.1.**

Considérons les équations différentielles pour les polynômes  $y_n(z)$  et  $y_m(z)$  :

$$[\sigma(z)\rho(z)y'_n]' + \lambda_n\rho(z)y_n = 0,$$

$$[\sigma(z)\rho(z)y'_m]' + \lambda_m\rho(z)y_m = 0.$$

Multiplions la première par  $y_m(z)$  et la seconde par  $y_n(z)$ . Retranchons la seconde égalité de la première et intégrons le résultat entre  $a$  et  $b$ . Puisque

$$y_m(z)[\sigma(z)\rho(z)y'_n(z)]' - y_n(z)[\sigma(z)\rho(z)y'_m(z)]' = \frac{d}{dz}\sigma(z)\rho(z)W[y_m(z), y_n(z)],$$

où  $W(u, v) = \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}$  est le wronskien, nous obtenons l'égalité suivante :

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b y_m(z)y_n(z)\rho(z)dz = \sigma(z)\rho(z)W[y_m(z), y_n(z)]\Big|_a^b.$$

Puisque le wronskien  $W[y_m(z), y_n(z)]$  est un polynôme en  $z$ , le second membre de l'égalité obtenue s'annule en vertu de la condition (1.38). Il vient donc pour  $\lambda_m \neq \lambda_n$

$$\int_a^b y_m(z)y_n(z)\rho(z)dz = 0, \tag{1.39}$$

On dit que  $y_n(z)$  sont des polynômes orthogonaux.

Les caractéristiques énoncées des polynômes de Jacobi  $P_n^{(\alpha,\beta)}(z)$ , de Laguerre  $L_n^\alpha(z)$  et d'Hermite  $H_n(z)$  sont résumées (Table 1.1)

| $y_n$                     | (a, b)                | $\rho(z)$                         | $\sigma(z)$ | $\tau(z)$                                 | $\lambda_n$               | $B_n$                   |
|---------------------------|-----------------------|-----------------------------------|-------------|---|---------------------------|-------------------------|
| $P_n^{(\alpha,\beta)}(z)$ | (-1,1)                | $(1-z)^\alpha \times (1+z)^\beta$ | $1-z^2$     | $-(\alpha + \beta + 2)z + \beta - \alpha$ | $n(n+\alpha + \beta + 1)$ | $\frac{(-1)^n}{2^n n!}$ |
| $L_n^\alpha(z)$           | (0, $\infty$ )        | $z^\alpha e^{-z}$                 | $z$         | $-z+\alpha + 1$                           | $n$                       | $\frac{1}{n!}$          |
| $H_n(z)$                  | ( $-\infty, \infty$ ) | $e^{-z^2}$                        | $1$         | $-2z$                                     | $2n$                      | $(-1)^n$                |

TABLE 1.1 – Récapitulatif sur les fonctions spéciales

**1.3.3 Formes explicites des fonctions spéciales et certaines propriétés**

Dans ce qui suit nous allons donner les propriétés essentielles des polynômes orthogonaux les plus connues

**A. Polynômes de Legendre :**

Les polynômes de Legendre  $P_n(x)$  sont orthogonaux sur l'intervalle  $(-1, 1)$  par rapport au poids  $\rho(x) = 1$ . C'est un cas particulier des polynômes de Jacobi  $P_n^{\alpha,\beta}(x)$  pour  $\alpha = \beta = 0$  et des polyômes de Gegenbauer  $C_n^v(x)$  pour  $v = 1/2$

Équation différentielle :

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0, \quad y = P_n(x)$$

Formule de Rodrigues :

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (1 - x^2)^n.$$

Représentation intégrale :

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (x + i\sqrt{1 - x^2} \sin \varphi)^n d\varphi$$

Fonction génératrice :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$$

Valeurs particulières :

$$P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n, \\ P_{2n+1}(0) = 0, \quad P_{2n}(0) = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2}$$

Carré de la norme :

$$d_n^2 = \frac{2}{2n + 1}.$$

Relations de récurrence :

$$(1 - x^2)P_n'(x) = -(n + 1)[P_{n+1}(x) - xP_n(x)], \\ P_n(x) = \frac{1}{n + 1}[P_{n+1}'(x) - xP_n'(x)] = \frac{1}{2n + 1}[P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x)], \\ (n + 1)P_{n+1}(x) - (2n + 1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0.$$

Représentation asymptotique :

$$P_n(\cos \theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \frac{\cos[(n + 1/2)\theta - \pi/4]}{\sqrt{\sin \theta}} + O(n^{-3/2}).$$

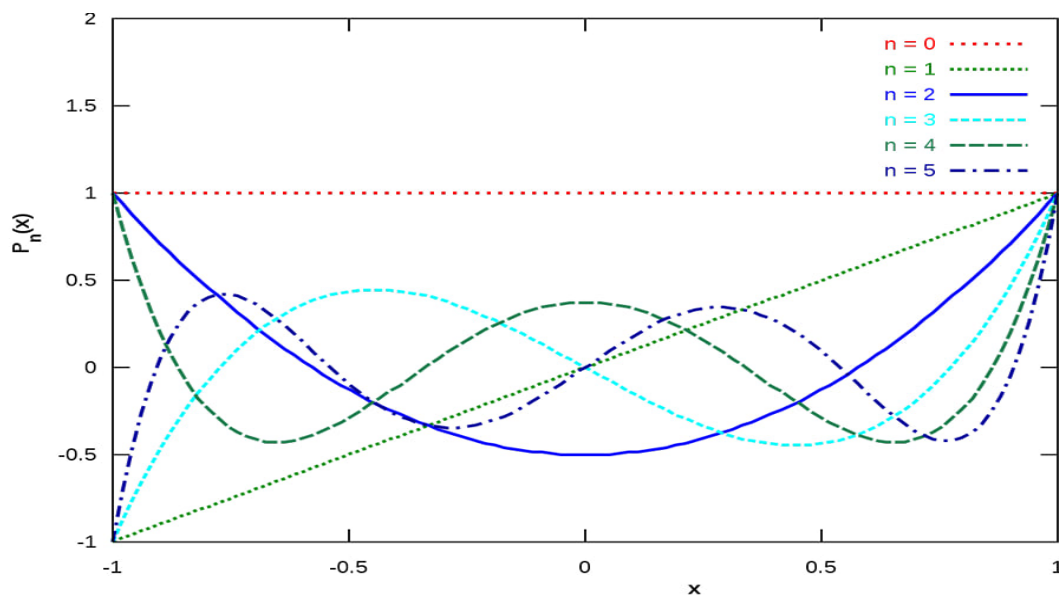


FIGURE 1.1 – Polynôme de Legendre

**B. Polynômes d’Hermite :**

Équation différentielle :

$$y'' - 2zy' + 2vy = 0$$

Solutions particulières :

- a)  $y_1 = H_v(z), \quad y_2 = H_v(-z);$   
 b)  $y_1 = e^{z^2} H_{-v-1}(iz), \quad y_2 = e^{z^2} H_{-v-1}(-iz).$

Relation avec les fonctions hypergéométriques dégénérées :

$$H_v(z) = 2^v G(-v/2, z^2) \quad (|\arg z| \leq \pi/2),$$

$$H_v(z) = \frac{2^v T(1/2)}{T((1-v)/2)} F\left(-\frac{v}{2}, \frac{1}{2}, z^2\right) + \frac{2^v T(-1/2)}{T(-v/2)} z F\left(\frac{1-v}{2}, \frac{3}{2}, z^2\right)$$

Représentation itégrale :

$$H_v(z) = \frac{1}{T(-v)} \int_0^\infty e^{-t^2 - 2zt} t^{-v-1} dt$$

**Développement en série :**

$$H_v(z) = \frac{1}{2T(-v)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n T\left(\frac{n-v}{2}\right) \frac{z^n}{n!}$$

**Formule de dérivation :**

$$H'_v(z) = 2vH_{v-1}(z).$$

**Rélation de récurrence :**

$$H_v(z) - 2zH_{v-1}(z) + 2(v-1)H_{v-2}(z) = 0.$$

**Relations fonctionnelles :**

$$H_v(z) = \frac{2^v T(v+1)}{\sqrt{\pi}} e^{z^2} \left[ e^{i\frac{\pi v}{2}} H_{-v-1}(iz) + e^{-i\frac{\pi v}{2}} H_{-v-1}(-iz) \right],$$

$$H_v(z) = e^{i\pi v} H_v(-z) + \frac{2^{v+1} \sqrt{\pi}}{T(-v)} e^{z^2 + i\frac{\pi(v+1)}{2}} H_{-v-1}(-iz),$$

$$H_v(z) = e^{-i\pi v} H_v(-z) + \frac{2^{v+1} \sqrt{\pi}}{T(-v)} e^{z^2 - i\frac{\pi(v+1)}{2}} H_{-v-1}(-iz)$$

**Représentations asymptotiques pour  $z \rightarrow \infty$  :**

$$H_v(z) = (2z)^v \left[ 1 + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \right] \left( |\arg z| \leq \frac{\pi}{2} \right),$$

$$H_v(z) = (2z)^v \left[ 1 + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \right] + \frac{2^{v+1} \sqrt{\pi}}{T(-v)} e^{z^2} (-2z)^{-v-1} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \right]$$

$$(\pi/2 \leq |\arg z| \leq \pi, \quad |\arg(-z)| < \pi/2).$$

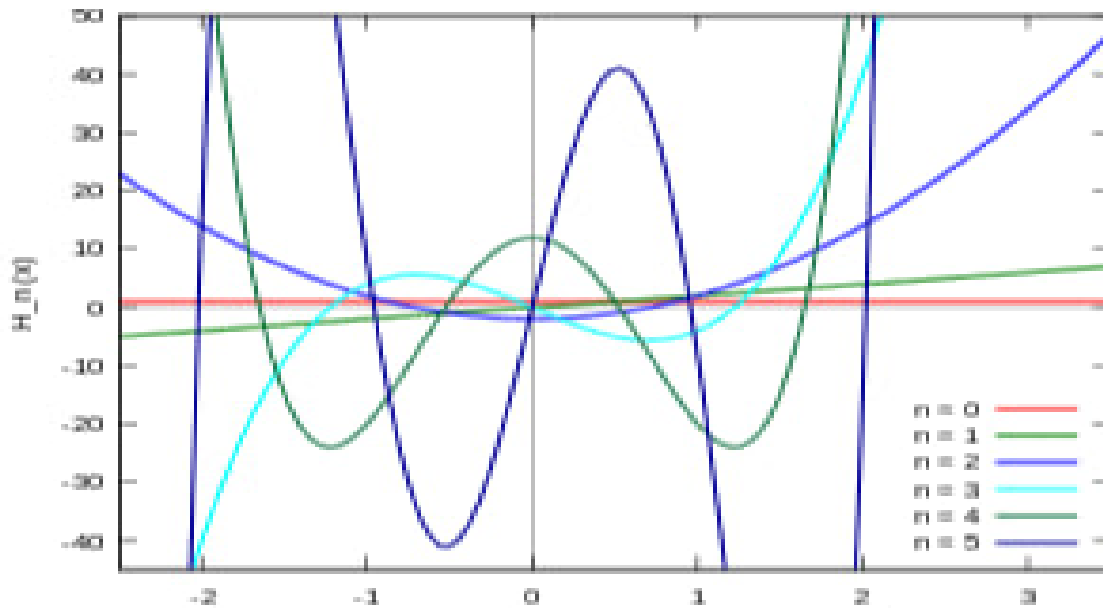


FIGURE 1.2 – Polynôme d'Hermite

### C. Polynômes de Laguerre

Équation différentielle :

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0$$

Formule de Rodriges :

$$L_n(x) = \frac{e^x}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n)$$

Représentation intégrale :

$$L_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^{-xt/(1-t)}}{(1-t)t^{n+1}} dt$$

Fonction génératrice :

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{e^{-xt/(1-t)}}{1-t}$$

Relation avec polynômes d'Hermite

$$H_{2n}(x) = (-1)^n 2^{2n} n! L_n^{(-1/2)}(x^2)$$

et

$$H_{2n+1}(x) = (-1)^n 2^{2n+1} n! L_n^{(-1/2)}(x^2)$$

Relation avec fonction hypergéométrique :

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \binom{1+\alpha}{1} M(-n, \alpha+1, x) = \frac{(\alpha+1)n}{n!} {}_1F_1(-n, \alpha+1, x)$$

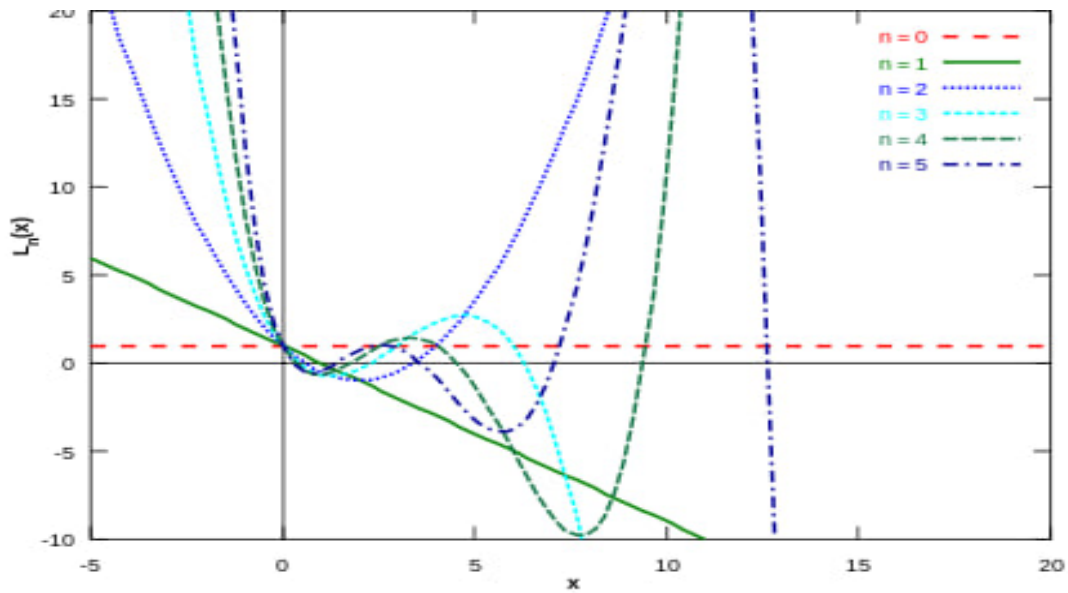


FIGURE 1.3 – Polynômes de Laguerre



## Équation de Klein de Gordon

Dans ce chapitre nous allons nous concentrer à l'étude de certains problèmes importants de la mécanique quantique utilisent l'équation de Klein Gordon et de Schrödinger.

### 2.1 Quelques problèmes fondamentaux en mécanique quantique

Dans le chapitre précédent nous avons étudié l'équation de Helmholtz de type

$$u'' + \frac{\tilde{\tau}(x)}{\sigma(x)}u' + \frac{\tilde{\sigma}(x)}{\sigma^2(x)}u = 0 \quad (2.1)$$

Ici  $\sigma(x)$  et  $\tilde{\sigma}(x)$  sont des polynômes de degré non supérieur à 2, et  $\tilde{\tau}(x)$ , un polynôme de degré non supérieur à 1. Dans le présent paragraphe, nous allons résoudre quelques problèmes les plus courants de mécanique quantique par cette méthode. Remarquons que les équations différentielles du type (2.1) se rencontrent dans des problèmes aussi importants que le mouvement d'une particule dans un champ central, l'oscillateur harmonique, les équations de Schrödinger, de Dirac et de Klein Gordon appliquées au potentiel coulombien, le mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique ou magnétique homogène .... En outre, on est conduit à des équations de ce type dans bon nombre de problèmes modèles de physique atomique, moléculaire et nucléaire liés à l'étude des processus de diffusion, d'interaction des neutrons avec les noyaux lourds, à l'analyse du spectre de rotation et de vibration des molécules (par exemple dans la résolution des équations de Schrödinger aux potentiels de Morse, de Kratzer, de Wood-Saxon, de Pöschl-Teller).

En cherchant les valeurs propres de l'énergie  $E$  et les fonctions propres des équations de Schrödinger, de Dirac ou de Klein-Gordon, on ramène l'équation initiale par séparation des variables à l'équation (2.1) sur un intervalle  $(a, b)$ . L'énergie  $E$  intervient comme paramètre dans les coefficients de (2.1). Les solutions des équations initiales pour les états liés sont soumises à des restrictions supplémentaires, qui se traduisent généralement par les conditions suivantes imposées aux solutions de l'équation (2.1) : la fonction  $u(x)\sqrt{\tilde{p}(x)}$  doit être bornée et de carré intégrable sur  $(a, b)$ . Ici la fonction  $\tilde{p}(x)$  est solution de l'équation  $(\sigma\tilde{p})' = \tilde{\tau}\tilde{p}$ ; elle apparaît quand on met (2.1) sous la forme auto-adjointe :

$$(\sigma\tilde{p}u')' + \tilde{p}(x)\frac{\tilde{\sigma}(x)}{\sigma(x)}u = 0.$$

Ce problème peut être résolu de la façon suivante. Tout d'abord il convient de faire le changement  $u = \varphi(x)y$  afin de réduire (2.1) à l'équation du type hypergéométrique

$$\sigma(x)y'' + \tau(x)y' + \lambda y = 0$$

en procédant de façon que la fonction  $\tau(x) = \tau(\tilde{x}) + 2\pi(x)$  admette sur l'intervalle  $(a, b)$  une dérivée négative et une racine, en supposant que  $\sigma(x) > 0$  pour  $x \in (a, b)$ . Les valeurs propres de l'énergie se cherchent à partir de l'équation

$$\lambda + n\tau' + \frac{n(n-1)}{2}\sigma'' = 0 \quad (n = 0, 1, \dots)$$

et les fonctions propres  $y_n(x)$  sont des polynômes de degré  $n$

$$y_n(x) = \frac{B_n}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n} [\sigma^n(x)\rho(x)]$$

orthogonaux sur  $(a, b)$  par rapport au poids  $\rho(x)$  ( $B_n$  étant une constante de normalisation).

Examinons quelques problèmes caractéristique de mécanique quantique qui se laissent résoudre par la méthode proposée.

## 2.2 Résolution de l'équation de Schrödinger pour le champ central

Le problème fondamental de la mécanique quantique de l'atome est celui du mouvement de l'électron dans un champ d'attraction central. L'importance de ce problème tient à ce que l'hypothèse du champ central utilisé à la description du mouvement des électrons de l'atome s'avère très fructueuse pour le calcul des différentes propriétés des structures atomiques. Une telle description permet de se faire une idée plus nette des particularités du comportement des atomes et de déterminer leurs états énergétiques sans avoir à résoudre le problème mécanique quantique des  $N$  corps qui présente des difficultés aussi insurmontables.

Pour définir la fonction d'onde  $\psi$  d'une particule mobile dans un champ à symétrie centrale  $U$ , on doit résoudre l'équation de Schrödinger

$$\Delta\psi + \frac{2M}{\hbar^2}[E - U(r)]\psi = 0 \quad (2.2)$$

( $\hbar$  est la constante de Planck,  $M$  la masse de la particule,  $U(r)$  l'énergie potentielle).

Cherchons les solutions particulières de (2.2) par séparation des variables en coordonnées sphériques, en posant

$$\psi(r) = F(r)Y(\theta, \varphi).$$

En procédant dans le même ordre qu'avec l'équation de Laplace, on obtient les équations suivantes pour les fonctions  $F(r)$  et  $Y(\theta, \varphi)$  :

$$\Delta_{\theta, \varphi} Y + \lambda Y = 0, \quad (2.3)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dF}{dr} \right) + \left[ \frac{2M}{\hbar^2} (E - U(r)) - \frac{\lambda}{r^2} \right] F(r) = 0. \quad (2.4)$$

On a vu plus haut que l'équation (2.3) n'admet de solutions bornées et univoques pour  $0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ , que si  $\lambda = l(l+1)$ , auquel cas  $Y(\theta, \varphi) = Y_{l,m}(\theta, \varphi)$  est une fonction sphérique.

Puisque

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dF}{dr} \right) = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (rF),$$

on peut, en faisant le changement  $R(r) = rF(r)$ , réduire (2.4) à l'équation

$$R'' + \left[ \frac{2M}{\hbar^2} (E - U(r)) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R = 0. \quad (2.5)$$

Pour les états du spectre discret la fonction d'onde  $\psi(r)$  doit vérifier la condition de normalisation

$$\int |\psi(r)|^2 r^2 dr d\Omega = 1.$$

Puisque

$$\int |Y_{lm}(\theta, \varphi)|^2 d\Omega = 1,$$

la condition de normalisation  $R(r)$  s'écrira

$$\int_0^\infty R^2(r) dr = 1. \quad (2.6)$$

La fonction  $F(r) = \frac{1}{r}R(r)$  est supposée bornée pour  $r \rightarrow 0$ .

### 2.2.1 Résolution de l'équation de Klein Gordon pour le champ coulombien

Considérons d'abord l'équation de Klein-Gordon qui définit le mouvement d'une particule chargée de charge  $-e$  ( $e > 0$ ), de spin entier et de masse  $M$  dans un champ coulombien d'énergie potentielle  $U(r) = -Ze^2/r$ . Un tel problème se pose par exemple quand on étudie le mouvement des mésons  $\pi$  dans le champ des noyaux atomiques. Dans un système d'unités où la masse de la particule  $M$ , la constante de Planck  $h$  et la vitesse de la lumière  $c$  sont égales à 1, l'équation de Klein-Gordon prend la forme

$$\Delta\psi + \left[ \left( E + \frac{\mu}{r} \right)^2 - 1 \right] \psi = 0 \quad \left( \mu = \frac{Ze^2}{hc} \approx \frac{Z}{137} \right) \quad (2.7)$$

Pour les états liés on a  $0 < E < 1$ .

Nous chercherons des solutions particulières de (2.7) par séparation des variables en coordonnées sphérique, en posant  $\psi(r) = F(r)Y(\theta, \varphi)$ . Procédant dans le même ordre qu'avec l'équation de Laplace, nous obtiendrons les équations suivantes pour les fonctions  $F(r)$  et  $Y(\theta, \varphi)$  :

$$\Delta_{\theta, \varphi} Y + \lambda Y = 0, \quad (2.8)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dF}{dr} \right) + \left[ \left( E + \frac{\mu}{r} \right)^2 - 1 - \frac{\lambda}{r^2} \right] F(r) = 0 \quad (2.9)$$

On a vu plus haut que l'équation (2.8) n'admet de solutions bornées et univoques pour  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  que si  $\lambda = l(l+1)$ , auquel cas  $Y(\theta, \varphi) = Y_{l,m}(\theta, \varphi)$  est une fonction sphérique. L'équation (2.9) se réduit par le changement  $R(r) = rF(r)$  à

$$R'' + \left[ \left( E + \frac{\mu}{r} \right)^2 - 1 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] R = 0 \quad (2.10)$$

L'équation (2.10) est une équation généralisée du type hypergéométrique avec  $\sigma(r) = r$ ,  $\tilde{\tau}(r) = 0$ ,  $\tilde{\sigma}(r) = (Er + \mu)^2 - r^2 - l(l+1)$ .

La fonction  $R(r)$  doit vérifier la condition de normalisation

$$\int_0^\infty R^2(r) dr = 1 \quad (2.11)$$

et être bornée pour  $r \rightarrow 0$ . Remarquons qu'en résolvant l'équation de Schrödinger correspondante, on demande que soit bornée pour  $r \rightarrow 0$  la fonction  $\frac{1}{r}R(r)$ , ce qui constitue une condition plus restrictive.

L'équation (2.10) admet une singularité pour  $r \rightarrow 0$ . Voyons ce que devient  $R(r)$  quand  $r \sim 0$ . Puisqu'on a pour  $r \rightarrow 0$

$$\left(E + \frac{\mu}{r}\right)^2 - 1 - \frac{l(l+1)}{r^2} \approx \frac{\mu^2 - l(l+1)}{r^2},$$

de comportement de la fonction  $R(r)$  se définira approximativement dans le voisinage du point  $r = 0$  par l'équation d'Euler

$$R'' + \frac{\mu^2 - l(l+1)}{r^2}R = 0$$

dont les solutions se présentent sous la forme

$$R(r) = C_1 r^{v+1} + C_2 r^{-v-1},$$

où

$$v = -1/2 + \sqrt{(l+1/2)^2 - \mu^2}$$

(il sera supposé par la suite que  $\mu < l + 1/2$ ). Comme la fonction  $R(r)$  doit rester bornée pour  $r \rightarrow 0$ , on a  $C_2 = 0$ , i.e  $R(r) \approx C_1 r^{v+1}$  pour  $r \rightarrow 0$ .

En effet, nous avons dans le cas considéré  $\tilde{\rho}(r) = 1/r$ , en sorte que la fonction  $\sqrt{\tilde{\rho}(r)}R(r)$ , doit rester bornée pour  $r \rightarrow 0$  et de carré intégrable sur l'intervalle  $(0, \infty)$  en raison de comportement de  $R(r)$  pour  $r \rightarrow 0$  et conformément à la condition de normalisation (2.11).

Ramenons(2.10) à l'équation du type hypergéométrique

$$\sigma(r)y'' + \tau(r)y' + \lambda y = 0$$

en posant  $R(r) = \varphi(r)y(r)$ , où  $\varphi(r)$  est solution de l'équation

$$\varphi'/\varphi = \pi(r)/\Sigma(r).$$

Le polynôme  $\pi(r)$  se définira alors par l'expression

$$\pi(r) = 1/2 \pm \sqrt{(l+1/2)^2 - \mu^2 - 2\mu E r + (1 - E^2)r^2 + k r}.$$

La constante  $k$  sera choisie de telle façon que l'expression sous le radical admette des racines multiples. Le polynôme  $\pi(r)$  se présentera donc sous l'une des formes suivantes :

$$\pi(r) = 1/2 \pm \begin{cases} \sqrt{1 - E^2}r + v + \frac{1}{2} & \text{pour } k = 2\mu E + (2v + 1)\sqrt{1 - E^2}, \\ \sqrt{1 - E^2}r - v - \frac{1}{2} & \text{pour } k = 2\mu E - (2v + 1)\sqrt{1 - E^2}, \end{cases}$$

De toutes les formes possibles de  $\pi(r)$ , on doit choisir celle pour laquelle la fonction  $\tau(r) = \tilde{\tau}(r) + 2\pi(r)$  a sa racine sur l'intervalle  $(0, +\infty)$  et une dérivée négative. Ces conditions seront vérifiées par la fonction  $\tau(r) = 2(v + 1 - ar)$ , où  $a = \sqrt{1 - E^2}$ , ce qui correspond à

$$\pi(r) = v + 1 - ar, \quad \varphi(r) = r^{v+1}e^{-ar},$$

$$\lambda = 2[\mu E - (v + 1)a], \quad \rho(r) = r^{2v+1}e^{-2ar},$$

$$\left( a = \sqrt{1 - E^2}, \quad v = -\frac{1}{2} + \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - \mu^2} \right)$$

Les valeurs propres de l'énergie  $E$  se cherchent à partir de l'équation

$$\lambda + n\tau' + \frac{n(n-1)}{2}\sigma'' = 0;$$

on obtient

$$E = E_n = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu}{n+v+1}\right)^2}} \quad (n = 0, 1, \dots) \quad (2.12)$$

Les fonctions propres correspondantes  $y = y_n(r)$  se présentent alors comme suit :

$$y_n(r) = \frac{B_{nl}}{r^{2v+1}e^{-2ar}} \frac{d^n}{dr^n} (r^{n+2v+1}e^{-2ar})$$

et se confondent à un facteur près avec les polynômes de Laguerre  $L_n^{2v+1}(x)$ , où  $x = 2ar$ . Les fonctions propres  $R(r) = R_{nl}(r)$  s'écriront

$$R_{nl}(r) = C_{nl}x^{v+1}e^{-x/2}L_n^{2v+1}(x).$$

On vérifie sans peine que les fonctions  $R_{nl}(r)$  satisfont à la condition  $\int_0^\infty R_{nl}^2(r)dr < \infty$  formulée au départ. La constante  $C_{nl}$  se trouve de la condition de normalisation (2.11), exactement comme dans le cas de l'équation de Schrödinger correspondante.

Examinons le passage à la limite non relativiste. Dans ce cas la constante  $\mu$  est petite. Evaluons les autres quantités pour  $\mu \rightarrow 0$  :

$$v \approx l, E \approx 1 - \frac{\mu^2}{2(n+l+1)^2}, \quad a = \sqrt{1 - E^2} \approx \frac{\mu}{n+l+1},$$

$$R_{nl}(r) \approx C_{nl}x^{l+1}e^{-x/2}L_n^{2l+1}(x), \quad x = \frac{2\mu}{n+l+1}r.$$

Ces formules se confondent avec celles obtenues dans le n°2 pour l'équation de Schrödinger : en effet, la quantité  $\mu r$  dans notre système d'unités correspond à  $Zr$  dans le système atomique, et l'énergie

$$E = 1 - \frac{\mu^2}{2(n+l+1)^2}$$

renferme l'énergie de repos de la particule  $E_0 = 1$

# Équations de Klein Gordon sur les variétés

Dans ce chapitre nous allons rappeler les équations de Klein-Gordon du point de vue de la mécanique quantique relativiste[6], un rappel sur la géométrie différentielle plus exactement les notions de base sur les variétés.

Ainsi que nous allons voir les équations de Klein-Gordon en géométrie variable et les méthodes analytiques de résolution .

Finalement, une simulation Matlab des résultats obtenus sera donnée.

## 3.1 Notions de géométrie différentielle

Dans cette partie nous allons exposer quelques notions de bases sur les variétés topologiques, les variétés différentielles ainsi que quelques exemples les plus utilisés.

### 3.1.1 Variétés et variétés différentielles

La notion de variété est assez difficile à définir avec précision. Cette section donnera les propriétés les plus remarquables des variétés, et les exemples d'illustration.

#### Carte Atlas

##### Définition 3.1.1. [11]

Une variété topologique de dimension  $n$  est un espace topologique séparé (vérifie l'axiome de Hausdorff) dont tout point est contenu dans un ouvert homéomorphe (i.e. existe une application bijective et bicontinue) à un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

##### Remarque 3.1.1.

Deux variétés homéomorphes ont la même dimension d'après le théorème d'invariance du domaine.

1- Le graphe de la fonction  $f(x) = |x|$  (ou celui de n'importe quelle application continue  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ) est une variété topologique de dimension 1.

2- La réunion  $X$  des droites d'équations  $y = x$  et  $y = -x$ , dans  $\mathbb{R}^2$  n'est pas une variété topologique.

##### Définition 3.1.2. [3]

Une carte d'une variété topologique  $X$  est la donnée d'un couple  $(U, \varphi)$  formé d'un ouvert  $U$  de  $X$  (le domaine de la carte) et d'un homéomorphisme  $\varphi$  de  $U$  sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Donc une carte est une application

$$\varphi : W \rightarrow U$$

où  $W$  est un sous ensemble de  $X$  et  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , telle que cette application est bijective.

Nous appelons  $\varphi(x)$  l'image sur la carte  $U$  du point  $x \in W \subset X$ . Soient les cartes

$$\varphi_i : W_i \rightarrow U_i \text{ et } \varphi_j : W_j \rightarrow U_j$$

Si elle n'est pas vide l'intersection  $W_i \cap W_j$  des ensembles  $W_i, W_j$  possède des images sur les deux cartes :

$$U_{ij} = \varphi_i(W_i \cap W_j)$$

$$U_{ji} = \varphi_j(W_i \cap W_j)$$

On passe d'une carte à l'autre par une application de domaines d'espaces linéaires

$$\begin{cases} \varphi_{ij} : U_{ij} \rightarrow U_i \\ \varphi_{ij}(x) = \varphi_i(\varphi_j^{-1}(x)) \end{cases}$$

### Définition 3.1.3.

Deux cartes  $\varphi_i : W_i \rightarrow U_i$  et  $\varphi_j : W_j \rightarrow U_j$  sont dites compatibles si

- 1- les ensembles  $U_{ij}$  et  $U_{ji}$  sont ouverts (ou peut être vides).
- 2- les applications  $\varphi_{ij}$  et  $\varphi_{ji}$  (définies si  $W_i \cap W_j \neq \emptyset$ ) sont des difféomorphismes des domaines de  $\mathbb{R}^n$ .

### Remarque 3.1.2.

Une carte est une portion de la variété analogue à une portion d'espace vectoriel, les changements de cartes indiquent comment ces portions de variétés se raccordent entre elles. Ainsi, pour décrire un cercle il est possible de prendre comme cartes deux arcs qui se chevauchent, le changement de cartes constitue une information sur le recollement au niveau de la zone de chevauchement.

### Définition 3.1.4.

Un atlas de  $X$  est une famille  $(U_i, \varphi_i)$ ,  $i \in I$  (pas forcément finie) de cartes, dont les domaines  $U_i$  recouvrent  $X$ .

### Définition 3.1.5.

Deux atlas sur  $X$  sont équivalents si leur union est de nouveau un atlas (i.e. si une carte quelconque du premier atlas est compatible avec une carte quelconque du second).

Cette terminologie parle d'elle même : la surface de la terre est une sphère  $S^2$  que l'on peut considérer comme une variété de dimension 2. Les cartes sont les présentations planes, forcément partielles (un espace compact ne pouvant être homéomorphe à un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ) et un atlas est important si on peut représenter toute la terre.

La projection stéréographique de la terre montre un exemple de base de cartes et d'atlas (voir figure 3.1). La famille des cercles contenus par la sphère et tangents au point  $N$  (pôle nord) est représentée sur la carte inférieure par une famille de droites parallèles, et sur la carte supérieure par une famille de cercles tangents.

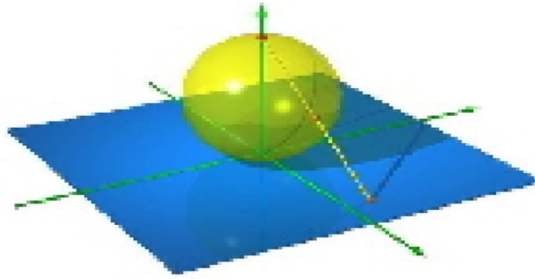


FIGURE 3.1 – La projection stéréographique

**Remarque 3.1.3.**

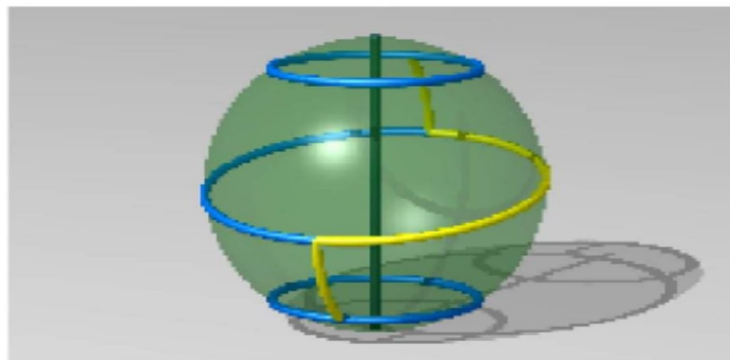
Il n'est généralement pas possible de décrire une variété à l'aide d'une seule carte, parce que la structure globale de la variété est différente de la structure simple de l'espace modèle. Par exemple, aucune carte plate ne peut décrire convenablement la Terre entière. Les variétés apparaissent comme des espaces topologiques et leurs topologies sont uniquement déterminées par la donnée de leurs atlas respectifs.

**Remarque 3.1.4.**

Suivant la nature des applications de changement de cartes, la variété possède une structure plus ou moins forte : variété topologique, variété différentielle, variété localement plate. Pour une variété topologique, la donnée d'un atlas équivaut simplement la donnée d'une topologie dont les ouverts suffisamment petits s'identifient à l'espace plat. Pour les structures plus fines citées, l'introduction de cartes est indispensable pour les définir.

**Exemple 3.1.1.**

- 1- Un espace linéaire  $\mathbb{R}^n$  où un sous domaine  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .
- 2- La sphère  $\mathbb{R}^n$  définie dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  par  $x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1$  et notamment  $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ .

FIGURE 3.2 – La sphère  $\mathbb{R}^n$ 

- 3- Le tore :  $T^2 = S^2$  (voire figure 3.3).



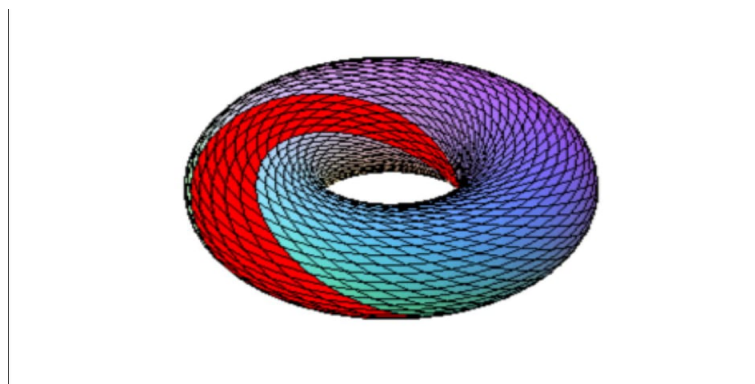


FIGURE 3.3 – Le tore

4- L'espace projectif  $\mathbb{R}P^n = (x_0, \dots, x_n)$ .

5- Les courbes sont des variétés de dimension  $n$ .

### Remarque 3.1.5.

Deux remarques sont à noter :

1- Sur une surface il faut deux coordonnées.

2- Il existe de nombreuses variétés de dimension supérieure à 2, qu'il est difficile de représenter graphiquement.

### Remarque 3.1.6.

On peut approcher les variétés de deux façons :

1- En les construisant par recollement d'autres espaces simples, comme les enfants s'amuse à construire avec du papier des tétraèdres, des cubes et autres polyèdres en dessinant la figure d'un patron sur une feuille, en découpant convenablement les bords, en pliant et en recollant ou comme on construit un vêtement en coutant l'ensemble des morceaux de tissus. Par exemple, les mathématiciens obtiennent un cercle en repliant un segment sur lui-même, un cylindre ou un cône en repliant une bande plane sur elle-même. Un autre exemple classique est le ruban de Möbius illustré ci-contre (en toute rigueur, c'est un exemple de variété à bord). Il est également possible de rajouter des anses à une sphère.

2- En leur appliquant une trame dont la métrique dépend de la position. Par exemple, pour les coordonnées sphériques terrestres (altitude, latitude et longitude), un changement de longitude correspond à une distance qui dépend de la latitude (un degré de longitude correspond à une distance plus longue à l'équateur qu'ailleurs). On parlera dans ce cas de variété riemannienne.

### 3.1.2 Variété abstraite et sous variété

De nombreux sous-ensembles particuliers du plan et de l'espace de dimension 3 peuvent être munis d'une structure de variétés : le cercle, le cylindre, la sphère, le ruban de Möbius,..., on les appelle sous-variétés ou variétés plongées.

Il existe en outre une notion de variétés abstraites, qui sont construites sans qu'on les considère comme des sous-variétés. Un exemple plus important est celui de la bouteille de Klein, elle est de dimension 2.

Le théorème de plongement de *Whitney* montre que toute variété abstraite de dimension  $n$  peut être réalisée comme une sous-variété d'un espace de dimension suffisamment grand, à savoir de dimension  $2n$ . Ainsi la bouteille de Klein (de dimension 2) ne peut être plongée dans l'espace à 3 dimensions, mais forme une sous-variété de l'espace à 4 dimensions.

### 3.1.3 Variétés différentielles

Autant de façons nous permettent de définir la notion de variétés différentielles [3][11].

#### Définition 3.1.6.

Une variété différentielle  $M$  est composée d'un ensemble  $M$  et de la structure de variété différentiable qui lui a été conférée.

#### Remarque 3.1.7.

On obtient diverses classes de variétés selon la classe de différentiabilité des applications  $\varphi$  (qui définissent les atlas).

#### Définition 3.1.7.

Une variété de classe  $C^r_{(r \geq 1)}$  est appelée variété différentielle ou lisse. Elle est dite fermée lorsqu'elle est compacte et sans bord.

#### Théorème 3.1.1. [3]

Les sous-espaces d'une variété différentielle sont ses sous-variétés, et nous avons

Une courbe est une sous-variété de dimension 1.

Une surface est une sous-variété de dimension 2.

#### Définition 3.1.8.

On dit qu'une partie de  $\mathbb{R}^n$  est une sous-variété de dimension  $p$  si elle ressemble au voisinage de chacun de ses points à un sous-espace affine de dimension  $p$  (i.e. plan tangent). Ainsi, une sous-variété de dimension 1 est une partie de  $\mathbb{R}^n$  tel que, si on "Zoom" sur n'importe quel de ses points on finira par avoir l'impression qu'il s'agit d'un morceau de droite.

## 3.2 Résolution de l'équation de Klein-Gordon sur un cylindre de révolution

Dans cette section, nous allons considerer une équation de Klein-Gordon de masse nulle ( $M \in (0; 1)$ ) sur une région cylindre de révolution[9][12].

La méthode de résolution sera basée sur la méthode de fourier dite (séparation des variables) .

Considérons un champs traversant une région cylindrique (Voir figure (3.4)) :  $\Omega = S \times (0; L)$

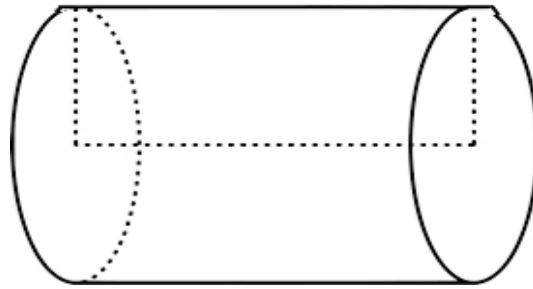


FIGURE 3.4 – Cylindre

où  $S = x^2 + y^2 < R^2$ ,  $x \in R$ ,  $y \in R$

Ce champs est régit par une équation de Klein-Gordon de masse nulle ( $M \in (0; 1)$ )

$$\Delta u - u_{tt} = M^2 u \quad (3.1)$$

passons aux coordonnées cylindriques

$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{array} \right\} . \quad (3.2)$$

D'après l'équation (3.1) on obtient

$$u''_{rr} + \frac{1}{r}u'_r + \frac{1}{r^2}u''_{\theta\theta} + u''_{zz} - u''_{tt} = M^2 u \quad (3.3)$$

Les conditions supposés seront comme suit :

$$C.I \left\{ \begin{array}{l} u(r, \theta, z, 0) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(r, \theta, z, 0) = f(r, \theta, z) \end{array} \right.$$

$$C.F1 \left\{ \begin{array}{l} u(r, \theta, 0, t) = 0 \\ u(r, \theta, L, t) = 0 \end{array} \right.$$

$$C.F2 \left\{ \begin{array}{l} u(R^*, \theta, z, t) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y}(r, 0, z, t) = 0 \\ u(r, 2\pi, z, t) = 0 \end{array} \right.$$

Séparons les variables :

Posons

$$u(r, \theta, z, t) = V(r, \theta)H(z, t)$$

après séparation, on obtient

$$\frac{V''_{rr} + \frac{1}{r}V'_r + \frac{1}{r^2}V''_{\theta\theta}}{V} = M^2 - \frac{H''_{zz} - H''_{tt}}{H} = \lambda^2$$

$$V''_{rr}(r, \theta) + \frac{1}{r}V'_r(r, \theta) + \frac{1}{r^2}V''_{\theta\theta}(r, \theta) - \lambda^2V(r, \theta) = 0 \quad (3.4)$$

$$H''_{zz}(z, t) - H''_{tt}(z, t) + (\lambda^2 - M^2)H(z, t) = 0 \quad (3.5)$$

Examinons de l'équation (3.5) :

$$H''_{zz} - H''_{tt} + (\lambda^2 - M^2)H = 0$$

Séparons les variables :  $H(z, t) = Z(z)T(t)$

$$\implies Z''(z)T(t) - Z(z)T''(t) + (\lambda^2 - M^2)Z(z)T(t) = 0$$

$$\implies \frac{Z''(z)}{Z(z)} - \frac{T''(t)}{T(t)} + \lambda^2 - M^2 = 0$$

$$\implies \frac{Z''(z)}{Z(z)} + \lambda^2 - M^2 = \frac{T''(t)}{T(t)} = -\mu^2$$

$$Z''(z) + (\lambda^2 - M^2 + \mu^2)Z(z) = 0 \quad (3.6)$$

$$T''(t) + \mu^2T(t) = 0 \quad (3.7)$$

Séparons les variables dans l'équation (3.4),

Posons  $V(r, \theta) = R(r)\varphi(\theta)$

$$R''\varphi + \frac{1}{r}R'\varphi + \frac{1}{r^2}R\varphi'' - \lambda^2R\varphi = 0$$

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\varphi''}{\varphi} - \lambda^2 = 0$$

$$\frac{r^2R''(r) + rR'(r)}{R(r)} - r^2\lambda^2 = -\frac{\varphi''}{\varphi} = \sigma^2$$

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) - \left(\frac{\sigma^2}{r^2} + \lambda^2\right)R(r) = 0 \quad (3.8)$$

$$\varphi''(\theta) + \sigma^2\varphi(\theta) = 0 \quad (3.9)$$

Examinons l'équation (3.7)

$$T''(t) + \mu^2T(t) = 0$$

On a

$$T(t) = A \cos \mu t + B \sin \mu t$$

$$T(t) = B \sin \mu t$$

Examinons l'équation (3.6)

$$Z(z) = C \cos[\sqrt{\lambda^2 - M^2 + \mu^2}z] + D \sin[\sqrt{\lambda^2 - M^2 + \mu^2}z]$$

On a

$$\begin{aligned}
 U(r, \theta, 0, t) = 0 &\iff c = 0, \text{ et } D \neq 0 \\
 U(r, \theta, L, t) = 0 &\iff \sin \sqrt{\lambda^2 - M^2 + \mu^2} L = 0 \\
 &\iff \sqrt{\lambda^2 - M^2 + \mu^2} L = n\pi, n \in \mathbb{N} \\
 &\iff \lambda^2 - M^2 + \mu^2 = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \\
 &\iff \lambda^2 + \mu^2 = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} + M^2
 \end{aligned}$$

Posons  $\mu^2 = \mu_k^2, k \in \mathbb{N}$

$$\text{Donc } \lambda^2 = \lambda_{n,k}^2 = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} + M^2 - \mu_k^2$$

Examinons l'équation (3.9)

$$\begin{aligned}
 \varphi''(\theta) + \sigma^2 \varphi(\theta) &= 0, \\
 \varphi(\theta) &= E \cos(\sigma\theta) + F \sin(\sigma\theta)
 \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial y}(r, 0, z, t) = 0 &\iff F = 0, E \neq 0, \varphi(\theta) = E \cos \sigma\theta \\
 u(r, 2\pi, z, t) = 0 &\iff \cos \sigma 2\pi = 0 \\
 &\iff \sigma 2\pi = (2m + 1) \frac{\pi}{2} \\
 \sigma_m &= \frac{2m + 1}{4}, m \in \mathbb{N}
 \end{aligned}$$

Donc

$$\varphi_m(\theta) = E \cos\left(\frac{2m + 1}{4}\theta\right)$$

Examinons l'équation (3.8)

$$R''(r) + \frac{1}{r}R'(r) - \left(\lambda^2 + \frac{\sigma^2}{r^2}\right)R(r) = 0$$

La solution sera

$$\begin{aligned}
 R(r) &= A_0 I_{\sigma_m}(\lambda r) + A_n K_{\sigma_m}(\lambda r) \\
 u(R^*, \theta, z, t) = 0 &\iff A_0 I_{\sigma_m}(\lambda R^*) + A_1 K_{\sigma_m}(\lambda R^*) = 0 \\
 A_0 \neq 0 \quad A_1 &\neq 0 \\
 \lambda R^* &= \Omega_{n,k} \\
 \lambda_{n,k} &= \frac{\Omega_{n,k}}{R^*}
 \end{aligned}$$

$$R_{n,k,m}(r) = A_0 I_{\sigma_m}\left(\frac{\Omega_{n,k}}{R^*}r\right) + A_1 k_{\sigma_m}\left(\frac{\Omega_{n,k}}{R^*}r\right)$$

Remarque : Nous devons définir  $\Omega_{n,k}$ !

Formellement la solution générale du problème sera sous la forme d'une série

$$u(R, \theta, z, t) = \sum_n \sum_k \sum_m A_{n,k,m} \sin \mu_n t \sin\left(\frac{k\pi}{L}z\right) \cos\left(\frac{2m + 1}{4}\theta\right) \cdot \left( A I_{\frac{2m + 1}{4}}\left(\frac{\Omega_{n,k}}{R^*}r\right) + B K_{\frac{2m + 1}{4}}\left(\frac{\Omega_{n,k}}{R^*}r\right) \right)$$

Pour garder le caractère oseillant du problème on pose  $B = 0$ .

Pour trouver le coefficient  $A_{n,k,m}$  on utilise

$$\frac{\partial u}{\partial t}(r, \theta, z, 0) = f(r, \theta, z)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(r, \theta, z, 0) = \sum_n \sum_k \sum_m A_{n,k,m} \mu_n \sin\left(\frac{k\pi}{L}z\right) \cos\left(\frac{2m+1}{4}\theta\right) I_{\frac{2m+1}{4}}\left(\frac{\Omega_{n,k}}{R^*}r\right) = f(r, \theta, z)$$

$$A_{n,k,m} = \frac{1}{\mu_n} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^L f(r, \theta, z) \sin\left(\frac{k\pi}{L}z\right) \cos\left(\frac{2m+1}{4}\theta\right) I_{\frac{2m+1}{4}}\left(\frac{\Omega_{n,k}}{R^*}r\right) dz d\theta dr$$

$$\times \left[ \frac{1}{\int_0^L \sin^2\left(\frac{k\pi}{L}z\right) dz \int_0^{2\pi} \cos^2\left(\frac{2m+1}{4}\theta\right) d\theta \int_0^R I_{\frac{2m+1}{4}}^2\left(\frac{\Omega_{n,k}}{R^*}r\right) dr} \right]$$

### 3.3 Résolution de l'équation de Klein-Gordon dans une géométrie variable

#### 3.3.1 Position du problème

Nous imaginons une bouteille (posée verticalement, par exemple) comme celle présentée dans la figure 3.5 ci-après :

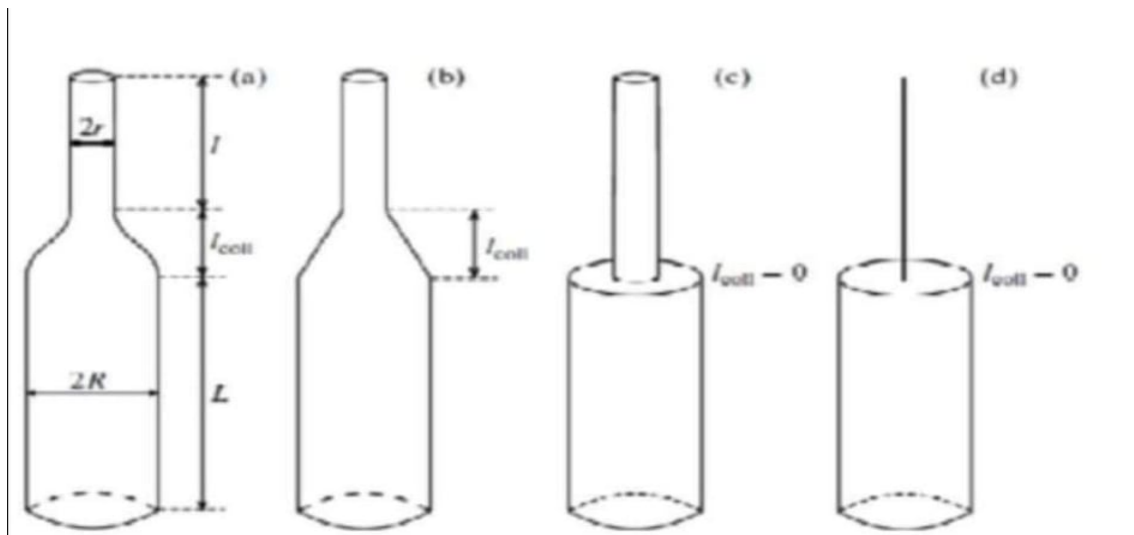


FIGURE 3.5 – Présentation des corps cylindriques

- (a) bouteille à long corps et à long cou.
- (b) bouteille à col conique.
- (c) bouteille à col horizontal.
- (d) bouteille avec un collier horizontal et au cou comme fil.

L'exemple est constitué d'un corps cylindrique principal  $B$  de rayon relativement grand  $R$  et une longueur  $L$ . Le goulot de la bouteille est de longueur  $l$  et de rayon  $r$  inférieur à  $R$  est relié à la partie principale par un collier (une région de transition rétrécie  $S_{col}$  de rayon variable et de petite longueur  $l_{col}$ ). Cette région a une forme cônica. Supposons maintenant qu'il existe une où plusieurs équations mathématiques décrivant un processus quelconque sur la surface externe bidimensionnelle  $S_2$  de la bouteille.

On peut penser un problème de valeur limite stationnaire pour l'équation aux dérivées partielles du second ordre, ainsi qu'à un processus dynamique tel que la propagation des ondes avec rayonnement où la conductivité thermique, et ainsi de suite.

Un certain nombre de problèmes avec des solutions analytiques exactes sur les surfaces  $S_{R,L}$  et  $S_{r,l}$  de parties cylindriques peuvent être résolues. Beaucoup d'entre eux pourraient être résolus pour toute la variété bidimensionnelle

$$S_2 = S_{R,L} + S_{r,l} + S_{col} \quad (3.10)$$

pour des formes assez simples et différentiables de région de transition  $S_{col}$ .

Les processus non stationnaires sont très intéressants, comme une onde solitaire se propageant d'une façon croissante à cause d'une perturbation de courte durée sur le bord intérieur du fond.

Plusieurs remarques doivent être posées[8] :

1. la dépendance des paramètres de la solution sur la forme de la surface  $S_{col}$  de la région du collier (voir figure 3.4).

2. Passage à un changement brusque de rayon (à un collier horizontal) ( $l_{col} \rightarrow 0$ ) (voir figure 3.5, c).

3. Le cas limite  $r \rightarrow 0$ , i.e. une transition de la surface bidimensionnelle du cou  $S_{r,l}$  à la variété linéaire unidimensionnelle  $S_{0,l} \rightarrow L_l$  (voir figure 3.5, d).

Nous allons développer la proposition d'utiliser la réduction dimensionnelle de l'espace temps en quatre dimensions celle avec un nombre réduit de dimensions ( $1 + d$ );  $d < 3$  à une énergie suffisamment élevée.

À cette fin, nous étudions l'équation de Klein-Gordon sur des variétés spatio-temporelles de différentes dimensions. Ici, l'astuce pour transformer le problème de Klein-Gordon sur la géométrie variable en l'équation de Schrödinger avec le potentiel généré par cette variation est utile.

L'approche utilisée dans ce chapitre n'implique aucune modification de la notion du temps. Nous allons utiliser plutôt une transformation continue de la géométrie spaciale jusqu'à avoir une réduction de la dimension de l'espace [3][4][10].

## 3.4 Équations de Klein-Gordon dans une symétrie cylindrique

### 3.4.1 Illustration

Soit l'équation de Klein-Gordon :

$$\begin{cases} \square\phi - M^2\phi = 0 \\ \text{avec} \\ \square = -\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_u(\sqrt{|g|}g^{uv}\partial_v) \end{cases} \quad (3.11)$$

Considérons la surface de deux cylindres de rayon  $R$  et  $r$  avec  $r < R$ , reliés par une partie d'un cône. On considère maintenant l'équation de Klein-Gordon (3.11) sur cette surface avec fonction profil  $\rho(z)$  (voir Figure 3.5) est donnée par

$$\rho(z) = \begin{cases} R = \text{const}, & z \in [z_R; \infty) \\ ztg(\alpha), & z \in [z_r; z_R] \\ r = \text{const}, & z \in (-\infty; z_r] \end{cases} \quad (3.12)$$

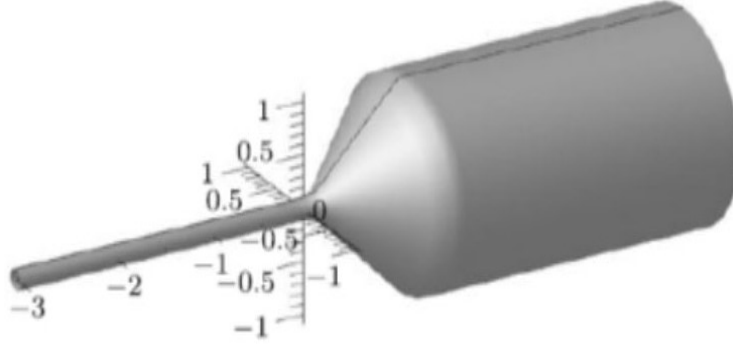


FIGURE 3.6 – La symétrie cylindrique

Dans une variété bidimensionnelle  $\sum_{\phi z}^2$  avec symétrie cylindrique. En coordonnées cartésiennes, elle est définie par une fonction profil  $\rho(z)$  en tant que surface de rotation dans la variété euclidienne tridimensionnelle  $R_{X^1, X^2, X^3}^3$  avec

$$\left. \begin{aligned} X^1 &= \rho(z) \cos \phi \\ X^2 &= \rho(z) \sin \phi \\ X^3 &= z \end{aligned} \right\}$$

La restriction de l'intervalle tridimensionnel

$$(dL)^2 = (dX^1)^2 + (dX^2)^2 + (dX^3)^2$$

sur la variété bidimensionnelle  $\sum_{\phi z}^2$  s'écrit comme suit

$$\left. \begin{aligned} (dl)^2 &= \gamma_{mn} dX^m dX^n = \rho^2 d\phi^2 + (1 + (\rho')^2) dz^2 \\ \rho' &= \frac{d\rho}{dz} \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

Le laplacien est explicité sous la forme

$$\Delta_2 = \frac{1}{\rho^2} \left( \partial_{\phi\phi}^2 + \frac{\rho}{\sqrt{1 + (\rho')^2}} \partial_z \frac{\rho}{\sqrt{1 + (\rho')^2}} \partial_z \right) \quad (3.14)$$

En utilisant la séparation de variables de Fourier

$$\varphi(t, \phi, z) = T(t)\Phi(\phi)Z(z),$$

nous obtenons trois équations différentielles

$$T''(t) + \omega^2 T(t) = 0 \quad (3.15)$$

$$\Phi''(\phi) + m^2 \Phi(\phi) = 0 \quad (3.16)$$

avec  $\omega, m$  sont des constantes de séparation, et une équation non triviale qu'on appellera la  $Z$ -équation est donnée par

$$\frac{1}{\rho\sqrt{1 + (\rho')^2}} \partial_z \left( \frac{\rho}{\sqrt{1 + (\rho')^2}} \partial_z Z(z) \right) + \left( \omega^2 - M^2 - \frac{m^2}{\rho^2(z)} \right) Z(z) = 0 \quad (3.17)$$



avec le potentiel centrifuge  $\frac{m^2}{\rho^2(z)}$  ( $m \neq 0$ ).

Nous remarquons que ce terme présente l'exemple le plus simple d'une force d'inertie avec une signification physique. De telles forces sont inévitables pour le mouvement dans un espace temps-courbé. Ils apparaissent dans la région de transition entre les parties de l'espace ayant de différentes dimensions topologiques.

### 3.4.2 Résolution

Tout d'abord, l'équation (3.15) aura comme solution

$$T(t) = e^{-i\omega t} \quad (3.18)$$

par contre, l'équation (3.16) aura la solution sous forme

$$\Phi(\phi) = e^{im\phi}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.19)$$

Ainsi que la  $Z$ -équation prendra une solution sous forme

$$Z(z) = Z(z, \omega, \phi) \quad (3.20)$$

L'équation (3.17) est compliquée pour la résoudre, pour cela une propriété mathématique utile pour étudier ses solutions est présentée dans le théorème ci-après :

#### Théorème 3.4.1. [5]

*L'équation stationnaire (3.7) peut être transformée en une équation différentielle ordinaire de type Schrödinger*

$$U''(u) + (E - V(u))U(u) = 0 \quad (3.21)$$

La possibilité de réduire les solutions de l'équation de Klein-Gordon aux solutions d'une équation de type Schrödinger se présente du fait de la séparation de variables dans l'équation de Klein-Gordon. De plus, on utilise le fait que toute métrique bidimensionnelle  $\gamma_{mn}$  est conforme à plat.

Transformons la coordonnée  $z$  en  $u$  et la fonction du profil (que nous appelle parfois fonction poids) $\rho(z)$  en  $\chi^2(u) = \rho^2(z(u))$

$$\left. \begin{aligned} z \rightarrow u & : u(z) = \int \frac{\sqrt{1 + (\rho'(z))^2} dz}{\rho(z)} \\ u \rightarrow z & : z(u) = \int \sqrt{\chi^2(u) - \left(\frac{d\chi}{du}\right)^2} du \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

Alors on obtient le laplacien  $\Delta_2$  comme suit

$$\Delta_2 = \chi^{-2}(\partial_{\phi\phi}^2 + \partial_{uu}^2) \quad (3.23)$$

avec  $\chi^2(u)$  est un facteur de conformité bidimensionnel.

En terme de la variable  $u$  l'équation (3.7) aura la forme

$$U''(u) + (-m^2 - (M^2 - \omega^2)\chi^2(u))U(u) = 0 \quad (3.24)$$

par identification avec l'équation (3.11) on obtient

$$E = 0, \quad V(u) = (M^2 - \omega^2)\chi^2(u) + m^2 \text{ et } Z(z) = U(u(z))$$

Ainsi, l'étude de l'équation de Klein-Gordon, sur les variétés courbées revient à la résolution de l'équation de Schrödinger (avec le potentiel  $V(u)$  défini par une géométrie variable).

**Remarque 3.4.1.**

Nous notons qu'il n'y a pas de paramètre spectral dans l'équation (3.14) comme l'énergie mécanique habituelle dans (3.11) contenue dans le terme  $E - V$ . Plutôt, le paramètre spectral spécifique  $\omega$  de ce problème apparait dans le facteur  $M^2 - \omega^2$  dans la fonction potentielle  $V(u)$  : Ce détail modifie légèrement les spectres bien connus des problèmes quantiques présentés dans la littérature.

**3.4.3 Cas particulier : dimension (1+1)**

Pour un espace unidimensionnel avec la coordonnée  $Z$  et le laplacien  $\Delta_1 = \partial_{zz}^2$ , la fonction d'onde aura la forme

$$\varphi_1^{Q\pm}(t; z) = \begin{cases} C_1 e^{-i\omega t} e^{\pm i\sqrt{\omega^2 - M^2} z}, & Q = +1 \implies \text{particules} \\ C_2 e^{i\omega^* t} e^{\pm i\sqrt{\omega^{*2} - M^2} z}, & Q = -1 \implies \text{antiparticules} \end{cases} \quad (3.25)$$

L'indice additionnel  $\pm$  désigne le signe de la quantité de mouvement

$$p_z = \pm K = \pm\sqrt{\omega^2 - M^2},$$

ou une quantité de complexe conjuguée

$$p_z^* = \pm K^* = \pm\sqrt{\omega^{*2} - M^2},$$

Avec  $Re\omega \geq 0$ , on a la combinaison relativiste standard[6][13].

$$-i(\omega t - p_z z) = -ipx$$

dans les solutions pour les particules, et

$$i(\omega^* t - p_z^* z) = (-ipx)^*$$

dans les solutions conjuguées pour les antiparticules.

**3.4.4 Interprétation analytique des solutions**

Considérons maintenant l'équation de Klein-Gordon sur la surface  $\sum_{\phi z}^2$  avec fonction profil (poids)  $\rho(z)$  est donnée par :

$$\rho(z) = \begin{cases} R = const, & z \in [z_R; \infty) \\ ztg(\alpha), & z \in [z_r; z_R] \\ r = const, & z \in (-\infty; z_r] \end{cases} \quad (3.26)$$

et la solution sera donnée par

$$z(u; R; r; \alpha) = \begin{cases} Ru, & u \geq u_R \\ Ru_R e^{u \sin \alpha - \cos \alpha}, & u \in [u_r; u_R] \\ r \left( u + \frac{\log\left(\frac{R}{r}\right)}{\sin \alpha} \right), & u \leq u_r \end{cases} \quad (3.27)$$

avec

$$u_R = ctg\alpha \quad \text{et} \quad u_r = ctg\alpha - \frac{\log\left(\frac{R}{r}\right)}{\sin \alpha}$$

et la fonction profil sera :

$$\chi(u; R; r; \alpha) = \begin{cases} R, & u \geq u_R \\ R e^{u \sin \alpha - \cos \alpha}, & u \in [u_r; u_R] \\ r, & u \leq u_r \end{cases} \quad (3.28)$$

**cas special** Une section des variétés continues constituée de deux cylindres de rayons  $R = 1$  et  $r = [0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4]$  reliés par une partie de cône dont l'angle de divergence est  $\alpha = \frac{\pi}{7}$

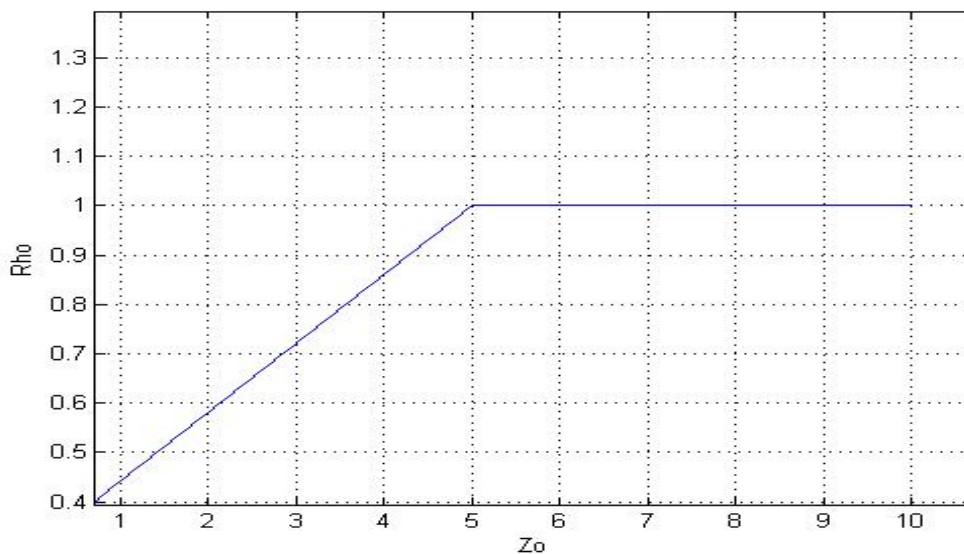


FIGURE 3.7 – L'expression du  $\rho$  en termes de  $Z$

Ici,  $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  est la moitié de l'angle du sommet du cône,  $Z_R = R \operatorname{ctg} \alpha > 0$ , et  $z_r = r \operatorname{ctg} \alpha > 0$ .

Les fonctions  $z(u)$  et  $\chi(u)$  sont obtenues de (3.12) (voir Figures 3.8 et 3.9).

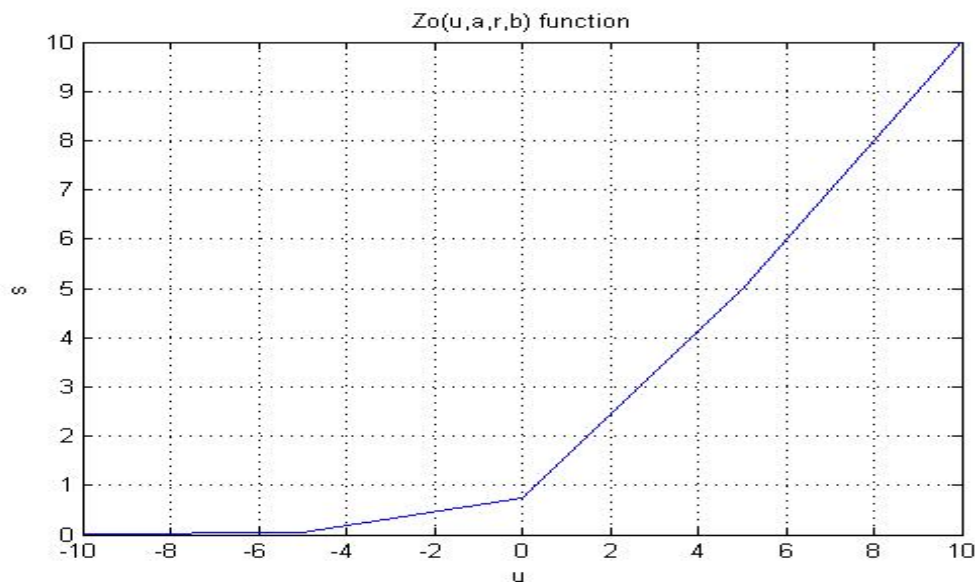


FIGURE 3.8 – La fonction  $z(u; R; r; \alpha)$  lorsque  $r \rightarrow 0$

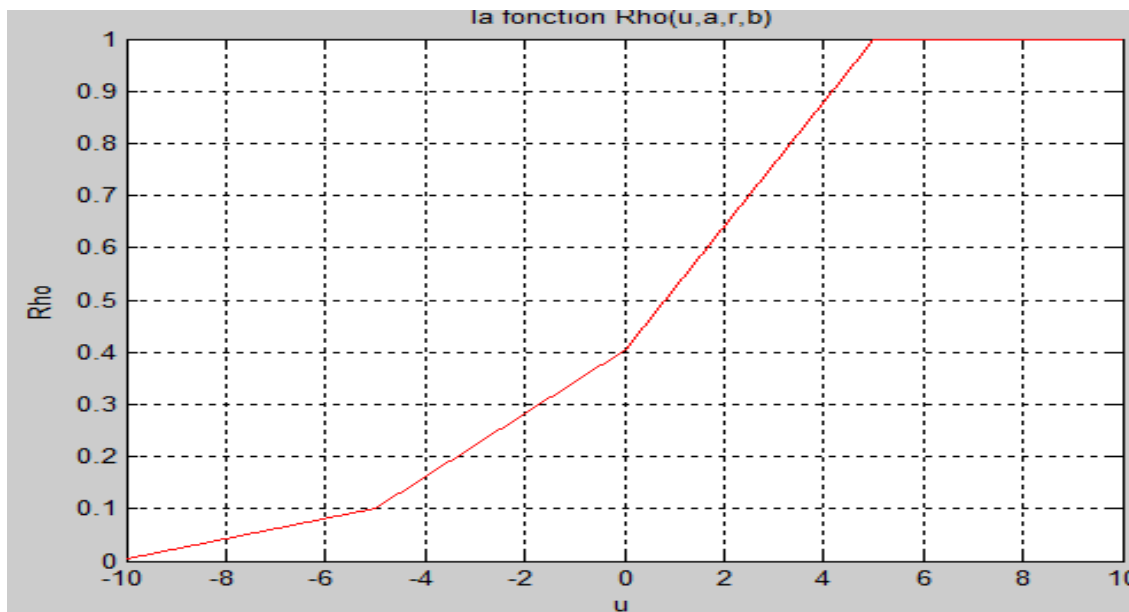


FIGURE 3.9 – La fonction  $\chi(u; R; r; \alpha)$  lorsque  $r \rightarrow 0$

### 3.4.5 Généralisation aux dimensions supérieures

La généralisation des résultats aux cas des dimensions supérieures présente un acquis théorique pour le développement du problème traité dans ce mémoire. Dans ce qui suit, deux tentatives de généralisation, une pour le cas de dimension trois, et l'autre pour le cas de la dimension supérieure à trois[11].

#### A. Cas tridimensionnel

Considérons une variété  $(1 + 3)$  dimensionnelle  $\sum_{t\phi_1\phi_2z}^{(1,3)}$  comme étant un hypersurface dans un espace pseudo euclidien  $(1 + 5)$  dimensionnel noté  $E_{x^0x^1x^2x^3x^4x^5}^{(1,5)}$  avec signature  $\{+, -, -, -, -, -\}$  cette variété définie

par les équations

$$\sum_{t\phi_1\phi_2z}^{(1,3)} = \begin{cases} x^0 = t, & x^1 = \rho_1(z) \cos \phi_1, & x^3 = \rho_2(z) \cos \phi_2, \\ x^5 = z, & x^2 = \rho_1(z) \cos \phi_1, & x^4 = \rho_1(z) \cos \phi_1 \end{cases}$$

Pour tout  $t, z \in \mathbb{R}$  et  $\phi_{1,2} \in [0, 2\pi]$

**Remarque 3.4.2.**

Il est claire lorsqu'on pose  $x^4 = x^5 = 0$ , nous obtenons le cas (1 + 2)dimensionnel traité avant.

Nous allons donner la méthode de séparation de variables au cas tridimensionnel relitevement à notre problème. En coordonnées  $\phi_1, \phi_2$  et  $z$  le laplacien tridimensionnel sera :

$$\Delta_3 = \frac{1}{\rho_1^2(z)} \partial_{\phi_1}^2 + \frac{1}{\rho_2^2(z)} \partial_{\phi_2}^2 + \frac{1}{\rho_1^2(z)\rho_2^2(z)} \left( \frac{\rho_1(z)\rho_2(z)}{\rho_3(z)} \partial_z \left( \frac{\rho_1(z)\rho_2(z)}{\rho_3(z)} \partial_z \right) \right) \quad (3.29)$$

L'introduction de la nouvelle variable

$$u = u(z) = \int \frac{\rho_3(z)}{\rho_1(z)\rho_2(z)} dz = \int \frac{\sqrt{1 + \rho_1'^2(z) + \rho_2'^2(z)}}{\rho_1(z)\rho_2(z)} dz \quad (3.30)$$

Nous conduit à écrire le laplacien par la formule

$$\Delta_3 = \chi_1'^2(u) \partial_{\phi_1}^2 + \chi_2'^2(u) \partial_{\phi_2}^2 + \chi_1'^2(u) \chi_2'^2(u) \partial_u^2 \quad (3.31)$$

avec

$$\chi_i^2(u) = \rho_i^2(z(u)), \quad i = \overline{1, 2}$$

Considèrons l'équation de Klein-Gordon

$$(\square - M^2)\varphi = 0 \text{ avec } \square = -\partial_t^2 + \Delta_3 \quad (3.32)$$

En utilisant la séparation de variables

$$\varphi(t, \phi_1, \phi_2, z) = T(t)\Phi_1(\phi_1)\Phi_2(\phi_2)Z(z)$$

on obtient quatres équations différentielles

$$T'' + \omega^2 T = 0 \quad (3.33)$$

$$\Phi_1'' + m_1^2 \Phi_1 = 0 \quad (3.34)$$

$$\Phi_2'' + m_2^2 \Phi_2 = 0 \quad (3.35)$$

ainsi qu'une EDP appelée la  $Z$ -équation

$$\frac{1}{\rho_1^2(z)\rho_2^2(z)} \left( \frac{\rho_1(z)\rho_2(z)}{\rho_3(z)} \partial_z \left[ \frac{\rho_1(z)\rho_2(z)}{\rho_3(z)} \partial_z z \right] \right) \left( \omega^2 - M^2 - \frac{m_1^2}{\rho_1^2(z)} - \frac{m_2^2}{\rho_2^2(z)} \right) Z = 0 \quad (3.36)$$

La solution de (3.26) sera de la forme

$$Z(z) = Z(z; \omega; m_1; m_2)$$

Après avoir porter la variable  $u = u(z)$ , l'équation (3.26) sera une équation de Schrödinger de forme

$$\psi''(u) + (E - V(u))\psi(u) = 0 \quad (3.37)$$

telle que

$$\psi''(u) + (-[M^2 - \omega^2]\chi_1^2(u)\chi_1^2(u) - m_1^2\chi_1^2(u) - m_2^2\chi_2^2(u))\psi(u) = 0 \quad (3.38)$$

par identication, on obtient

$$E = 0$$

$$V = (M^2 - \omega^2)\chi_1^2(u)\chi_2^2(u) + m_1^2\chi_1^2 + m_2^2\chi_2^2$$

$$Z(z) = \psi(u(z))$$

on procède donc à la résolution des équations (3.23), (3.24), (3.25), (3.26).

## B. Cas multidimensionnel

Il est facile d'obtenir une généralisation aux cas  $d > 3$ , pour cela considérons une variété  $(1+d)$  dimensionnelle notée  $\sum_{t,\phi_1,\dots,\phi_{d-1},z}^{(1,d)}$  comme un hypersurface dans un espace pseudo-euclidien  $(1+(2d-1))$  dimensionnel qu'on le note  $E_{x^0,x^1,\dots,x^{2d-1}}^{(1,2d-1)}$  avec signature  $\{+, -, -, -, -, -\}$  définie par les équations

$$\sum_{t,\phi_1,\phi_2,z}^{(1,d)} = \begin{cases} x^0 = t & x^1 = \rho_1(z) \cos \phi_1 \dots x^{2d-3} = \rho_{d-1}(z) \cos \phi_{d-1} \\ x^{2d-1} = z & x^2 = \rho_1(z) \cos \phi_1 \dots x^{2d-2} = \rho_{d-1}(z) \cos \phi_{d-1} \end{cases} \quad (3.39)$$

en supposant  $t \in (-\infty, \infty)$ ,  $z \in (-\infty, \infty)$ , et  $\phi_1 \dots \phi_{d-1} \in [0; 2\pi]$ . Il est évident d'après (3.29) que la variété  $\sum_{t,\phi_1,\dots,\phi_{d-1},z}^{(1,d)}$  a une structure

$$\sum_{t,\phi_1,\dots,\phi_{d-1},z}^{(1,d)} = R_t^{(1)} \otimes T_{\phi_1 \dots \phi_{d-1}}^{(d-1)} \otimes R_z^{(1)}, T_{\phi_1 \dots \phi_{d-1}}^{(d-1)}$$

avec le tore

$$T_{\phi_1 \dots \phi_{d-1}}^{(d-1)} = S_{\phi_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes S_{\phi_{d-1}}^{(1)}$$

La géométrie de ce tore  $(d-1)$  dimensionnel reflète les conditions aux limites multi-périodiques sur les champs  $\Psi$  dans le problème à résoudre

$$\Psi(t, \phi_1, \dots, \phi_{d-1}, z) = \Psi(t, \phi_1 + 2n_1\pi, \dots, \phi_{d-1} + 2n_{d-1}\pi, z)$$

où  $n_1, \dots, n_{d-1}$  étant des entiers arbitraires.

La restriction de l'intervalle pseudo-euclidien 2d-dimensionnel

$${}^{(2d)}ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - \dots - (dx^{2d-1})^2$$

sur la variété (3.29) induit à un simple pseudo-intervalle riemannien  $(1+d)$ dimensionnel

$$ds^2 = dt^2 - (\rho_1(z))^2 d\phi_1^2 - \dots - (\rho_{d-1}(z))^2 d\phi_{d-1}^2 - (\rho_d(z))^2 dz^2 \quad (3.40)$$

où  $\rho_z(z) = \sqrt{1 + \rho_1'(z)^2 + \dots + \rho_{d-1}'(z)^2}$ . Pour  $d > 3$  l'espace  $d$  dimensionnel avec l'intervalle riemannien

$$dl^2 = (\rho_1(z))^2 d\phi_1^2 + \dots + (\rho_{d-1}(z))^2 d\phi_{d-1}^2 + (\rho_d(z))^2 dz^2 \quad (3.41)$$

possède un tenseur de *Weyl* et une courbure scalaire non nulle assez complexe.

Dans les coordonnées  $\phi_1, \dots, \phi_{d-1}, z$  le laplacien ddimensionnel sera sous forme

$$\Delta_d = \frac{1}{\rho_1^2(z)} \partial_{\phi_1}^2 + \dots + \frac{1}{\rho_{d-1}^2(z)} \partial_{\phi_{d-1}}^2 + \frac{1}{\rho_1^2(z) \dots \rho_{d-1}^2(z)} \left( \frac{\rho_1(z) \dots \rho_{d-1}(z)}{\rho_d(z)} \partial_z \left( \frac{\rho_1(z) \dots \rho_{d-1}(z)}{\rho_d(z)} \partial_z \right) \right) \quad (3.42)$$

L'introduction de la nouvelle variable

$$u = u(z) = \int \frac{\rho_d(z)}{\rho_1(z) \dots \rho_{d-1}(z)} dz = \int \frac{\sqrt{1 + \rho_1'^2(z) + \dots + \rho_{d-1}'^2(z)}}{\rho_1(z) \dots \rho_{d-1}(z)} dz \quad (3.43)$$

simplifie le laplacien  $d$ -dimensionnel comme suit :

$$\Delta_d = \frac{1}{\chi_1^2(u)} \partial_{\phi_1}^2 + \frac{1}{\chi_2^2(u)} \partial_{\phi_2}^2 + \frac{1}{\chi_1^2(u) \dots \chi_{d-1}^2(u)} \partial^2 u \quad (3.44)$$

où

$$\chi_{\alpha=1, \dots, d}(u) = \rho_{\alpha=1, \dots, d}(z(u))$$

Après la séparation des variables dans l'équation de Klein-Gordon correspondant au type (3.22), nous obtenons la  $Z$ -équation non triviale suivante :

$$\frac{1}{\rho_1^2(z) \dots \rho_{d-1}^2(z)} \left( \frac{\rho_1(z) \dots \rho_{d-1}(z)}{\rho_d(z)} \partial_z \left( \frac{\rho_1(z) \dots \rho_{d-1}(z)}{\rho_d(z)} \partial_z \right) \right) + \left( \omega^2 - M^2 - \frac{m_1^2}{\rho_1^2(z)} - \dots - \frac{m_{d-1}^2}{\rho_{d-1}^2(z)} \right) Z = 0 \quad (3.45)$$

La solution de (3.35) sera notée  $Z(z) = Z(z, \omega, m_1, \dots, m_{d-1})$ .

Les termes  $m_1^2/\rho_1^2(z), \dots, m_{d-1}^2/\rho_{d-1}^2(z)$  décrivent l'énergie potentielle des forces d'inertie de type centrifuge qui agissent lorsque  $m_1, \dots, m_{d-1} \neq 0$ .

En utilisant la variable  $u$  nous obtenons à la place de l'équation (3.35) l'équation de type Schrödinger (3.27) avec le potentiel

$$V(u) = \chi_1^2(u) \dots \chi_{d-1}^2(u) \left( (M^2 - \omega^2) + \frac{m_1^2}{\chi_1^2(u)} + \dots + \frac{m_{d-1}^2}{\chi_{d-1}^2(u)} \right). \quad (3.46)$$

## Annexe

# Programme informatique Matlab de l'équation de Klein-Gordon

Sur un coup de tête, nous écrivons des programmes en Matlab pour simuler l'équation de Klein-Gordon

## Resolution de l'équation de Klein-Gordon sur un cylinder de résolution

```
function [A]=Usolution(l,R)
M=[0 :2 :4];
t=[0 100 200];
for k=1 :3
for m=1 :3
for n=1 :3
b=((2*m)+1)/4;
x=sqrt(((n*pi)^2/l^2) + M.^2 - ((k*pi)^2/l^2));
syms z
a=int(sin((k*pi*z)/l).^2, 0, l);
syms o
c=int((cos(b*o).^2), 0, (2*pi));
end
end
end
I=besseli(b,x);    On calcule les solutions de l'équation de Bessel
syms r
e=int((I.*r).^2, 0, R)
f=1./(a*c*e);
syms r
p=int(I.*r,0,R);
syms z o r
v=int(int(int((r*cos(z)*sin(o))*((sin((k*pi*z)/l))^2) * ((cos(b*o))^2) * p, 0, l), 0, 2*pi), 0, R);
the function f we use are r*cos(z) * sin(o)
for k=1 :3
```



```

g=1./(((k*pi)^2)/(l^2)) * v * f; On calcule la constante  $A_{n,k,m}$ 
end
z=[0 2 6];
o=[0 pi 2*pi];
r=[0 10 20];
for h=1 :3
for k=1 :3
for m=1 :3
A=g.*sin((k*pi)^2/l^2) * t(h) * (sin((k * pi * z(h))/l)) * (cos((((2 * m) + 1)) * o(h)/4)). * p;
end
end
end
end
l=2;
R=6;
[A]=Usolution(l,R)
t=[0 100 200];
o=[0 pi 2*pi];
z=[0 2 6];
plot(r,A);
xlabel('r');
ylabel('A');
title('U(r)')
plot(t,A);
xlabel('t');
ylabel('A');
title('U(t)')
plot(o,A);
xlabel('o');
ylabel('A');
title('U(o)')
plot(z,A);
xlabel('z');
ylabel('A');
title('U(z)')
plot3(r,o,A);
xlabel('r');
ylabel('o');
zlabel('A');
title('U(r,o)')
plot3(z,t,A);
xlabel('z');
ylabel('t');
zlabel('A');
title('U(z,t)')

```

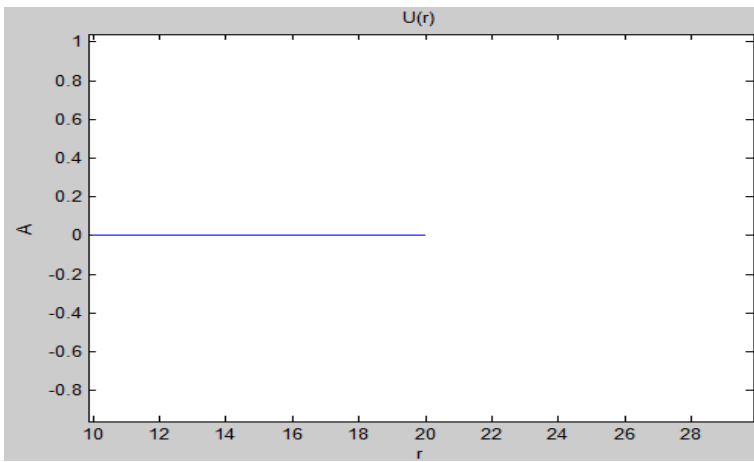


FIGURE 3.10 –  $U(r)$

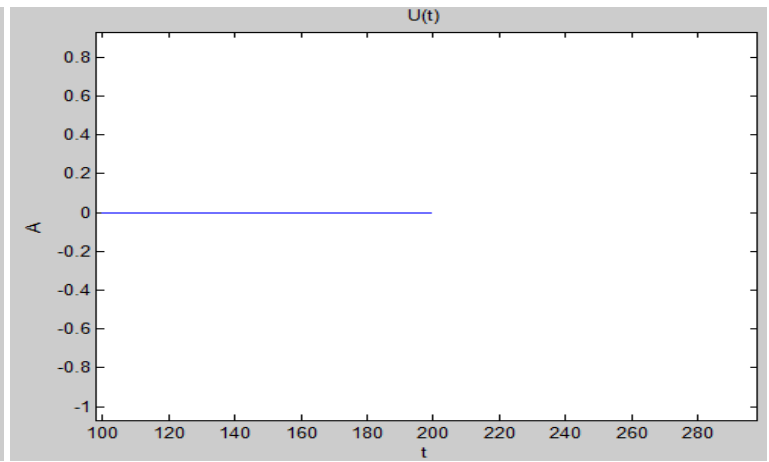


FIGURE 3.11 –  $U(t)$

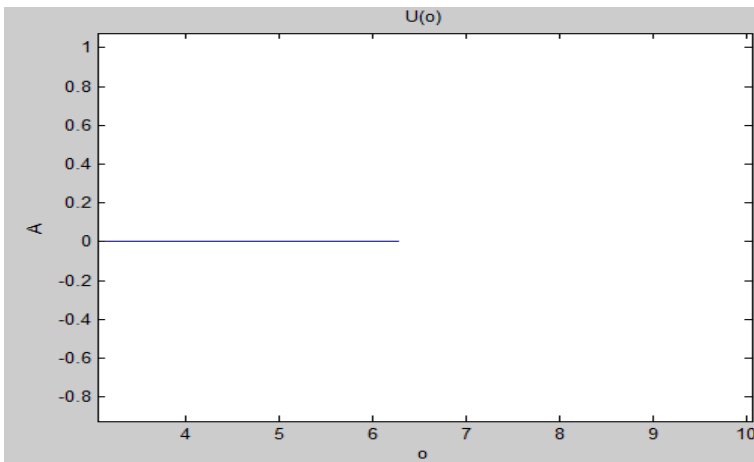


FIGURE 3.12 –  $U(\theta)$

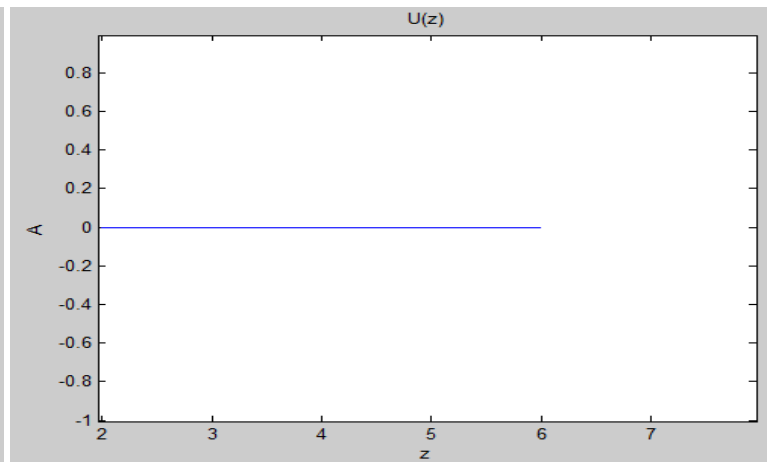


FIGURE 3.13 –  $U(z)$

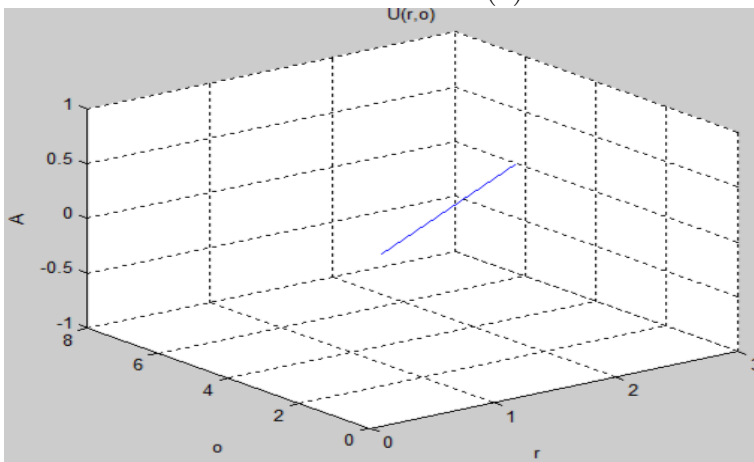


FIGURE 3.14 –  $U(r, \theta)$

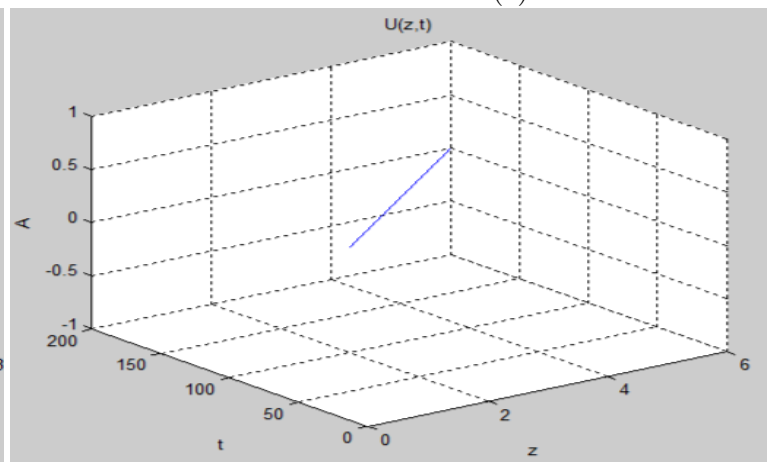


FIGURE 3.15 –  $U(z, t)$

## Solution de l'équation de Klein Gordon en symétrie cylindrique

```

function [s] = Zo(u,a,r,b)
c=atan(b);
for i=1 :5
d(i)=log(a./r(i))/sin(b);
e(i)=c-d(i)
f(i)=u(i)*sin(b)-cos(b);
j(i)=exp(f(i));
k(i)=a*c*j(i)
l(i)=u(i)+d(i);
m(i)=r(i).*l(i)
if (u(i)>c)
s(i)=a*u(i)
else if (u(i)<=c) u<=e(i)
s(i)=k(i)
else
s(i)=m(i);
end
end
end
end

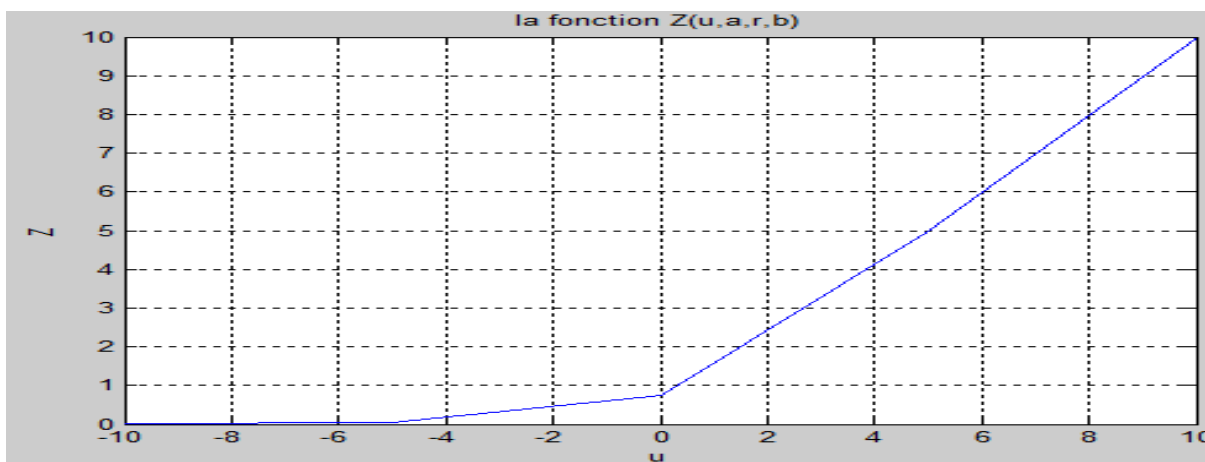
```

### Cas special

```

u=[-10 :5 :10];
a=1;
b=pi/7;
r=[0 :0.1 :0.4];
s=Zo(u,a,r,b)
plot(u,s)
xlabel('u')
ylabel('Zo')
title('Z(u,a,r,b)function')
grid on

```

FIGURE 3.16 – La fonction  $z(u,a,r,b)$  avec  $r \rightarrow 0$ 

## La fonction $\rho$

```

function t = Rho(u,a,r,b)
c=atan(b);
for i=1 :5
d(i)=log(a./r(i))/sin(b)
e(i)=c-d(i)
f(i)=u(i)*sin(b)-cos(b)
j(i)=exp(f(i))
x(i)=a.*j(i)
if (u(i)<c)
t(i)=a;
else if (u(i)>=c && u(i)<=e)
t(i)=x(i);
else
t(i)=r(i);
end
end
end
end
end

```

## Cas special

```

u=[-10 :5 :10];
a=1;
b=pi/7;
r=[0 :0.1 :0.4];
t=Rho(u,a,r,b)
plot(u,t,'r')
xlabel('u')
ylabel('Rho')

```

```
title('Rho(u,a,r,b)function')
grid on
```

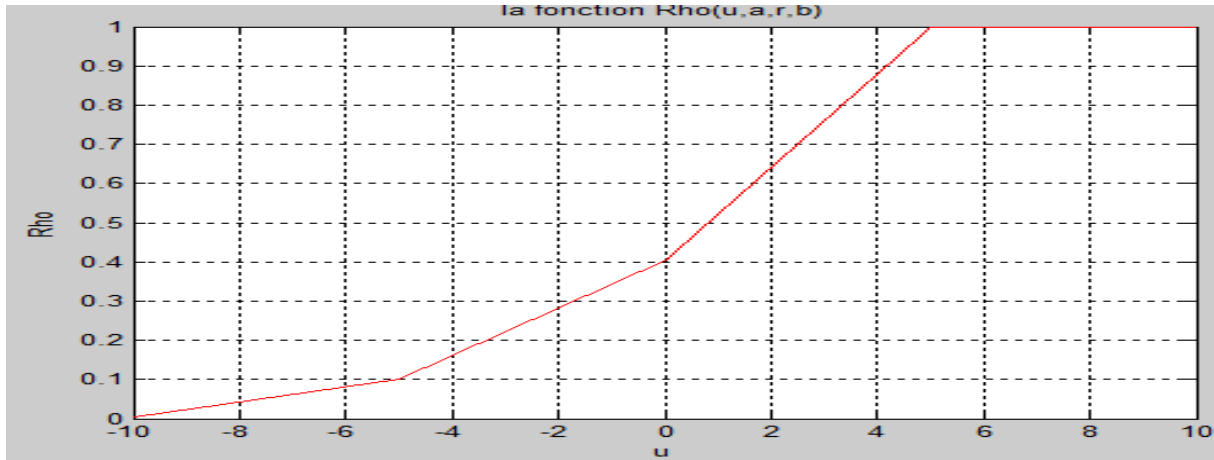


FIGURE 3.17 – La fonction  $\chi(u, a, r, b)$  avec  $r \rightarrow 0$

### Cas special

```
u=[-10 :5 :10];
a=1;
b=pi/7;
r=[0 :0.1 :0.4];
s=Zo(u,a,r,b)
t=Rho(u,a,r,b)
plot(s,t)
grid on
xlabel('Zo')
ylabel('Rho')
```

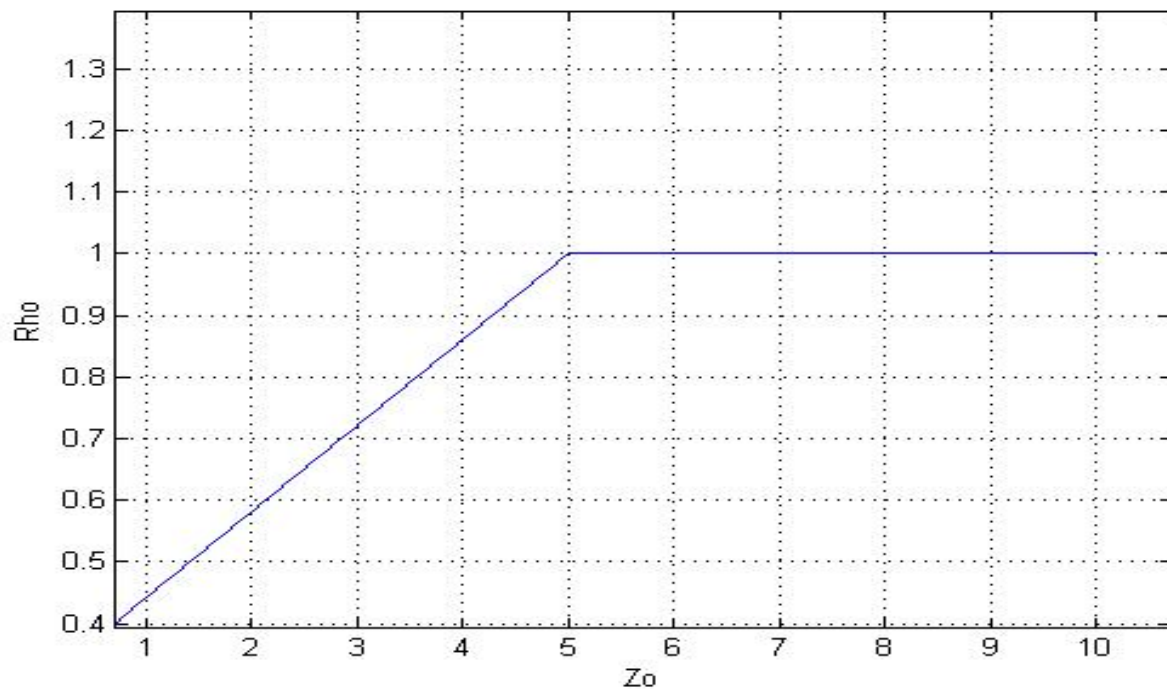


FIGURE 3.18 – La solution de l'équation de Klein Gordon dans une symétrie cylindrique

## Conclusion générale

Ce manuscrit est une contribution à l'étude des équations de Klein-Gordon sur des variétés bidimensionnelles. Le concept mathématique donné est basé sur des notions de variétés et sous-variétés, comme exemple, nous avons considéré une variété bidimensionnelle constituée de deux cylindres des rayons différents, reliés par une région conique (sorte d'une bouteille).

Les remarques suivantes sont à noter :

**1.** Nous avons démontré un théorème utile reliant l'étude de l'équation de Klein-Gordon sur des espaces à géométrie variable à la résolution d'une équation de type Schrödinger avec un potentiel effectif généré par la variation géométrique. Ce résultat est basé sur la séparation de variables de Fourier dans l'équation de Klein-Gordon et sur le fait que les espaces bidimensionnels sont conformes à plat.

**2.** Comme conséquence, nous concluons que les spectres d'excitation de champ obtenu pourraient servir comme **empreintes** du profil  $\rho(z)$  de la région de transition (cône). Les spectres non triviaux obtenus pour des excitations scalaires ressemblent qualitativement à certains spectres réels de résonances de particules élémentaires.

**3.** L'étude de la géométrie variable dans des espaces plus réalistes ( $d = 3$ ) est certainement importante, ce cas est proche des problèmes de la physique des ondes.

**4.** Les généralisations apportées aux dimensions supérieures présentera une ouverture vers plusieurs axes de recherches, ainsi que l'étude des variétés correspondantes sera un exploit mathématique.

# Bibliographie

- [1] Abrahmowitz. M and Stegun. I. A, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*(NBS Appl. Math. Ser, Vol.55), Dover, New York(1964).
- [2] Areteva I. Ya, *Regge Regime in QCD and asymmetric Lattice Gauge theory*, Phys. Lett. B 325, 171 – 182, 1994.
- [3] Arnold V. *Équations différentielles ordinaires*, Ed. Mir Moscou, 1974.
- [4] Bogoliubov. N. N and Shikov. D. V, *introduction to the theory of Quantized Fields [in Russian]*, Nauka, Moscow(1984), English transl.prev.ed, Wiley, New York(1980).
- [5] Boudref. M. A, *Équation de Klein gordon sur les variétés*. Edition Amazon, 6 Mars, 2020.
- [6] Drell S. and Bjorken J, *Relativistic quantum mechanics*, McGraw Hill Book company, 1964.
- [7] Fiziev. P. P, *Riemannian(1+d)-Dim Space-Time Manifolds with Nonstandard Topology wich Admit Dimensional Reduction to Any Lower Dimension and Transformation of the Klein-Gorodn Equation to the 1-Dim Schrodinger Like Equation*, arXiv :1012.3520.
- [8] Fizie. P. P and Shirkov. D. V, *Amusing properties of Klein-Gordon solutions on manifolds with variable geometry* , Talk at Intl. Workshop ”Bogoliubov Readings” , September 22 – 25, 2010, Joint Inst. Nucl. Res.
- [9] Houchmandzadeh. B, *Mathématique pour la physique*, 1<sup>ère</sup> version, Septembre 2008.
- [10] Horeva P, *Phys, Rev. D : Part Fields* 79, 084008, 2009.
- [11] Lafontaine J, *Introduction aux variétés différentielles*, Collection Grenoble Sciences, EDP, 1996.
- [12] Marigo. J. J, *Placité et Rupture. Programme d’approfondissement*, Hal archives-ouverts. France 2016
- [13] Shirkov D. V. Nucl, *Phys, B* 371, 467 – 481, 1992.
- [14] Shirkov. D. V, *Phys. Part. Nucl.Lett*, 7, 379-383(2010), arXiv :1004.1510v3[hep-th](2010).



## *Résumé*

Le travail de ce mémoire consiste à étudier un développement d'une étude de la réduction dimensionnelle et cela pour pouvoir l'utiliser en mécanique quantique et de construire une théorie de champ quantique renormalisable. La réduction sera à partir d'un espace-temps à 4 dimensions ( $D = 1 + 3$ ) à une variante avec un plus petit nombre de dimensions spatiales ( $D = 1 + d; d < 3$ ) à des distances suffisamment petites.

Nous allons démontrer un théorème important qui reliera l'étude de l'équation de Klein Gordon sur l'espace (à géométrie variable) à la résolution d'une équation de type Schrödinger avec un potentiel effectif généré par une variation géométrique. Ce résultat sera basé sur la méthode de Fourier (dite séparation de variables) dans l'équation de Klein-Gordon et sur le fait que les espaces bi-dimensionnels sont conformes à plat. Nous allons montrer que dans le cas de la dimension de l'espace ( $d = 2$ ) le facteur de conformité de la métrique entre le potentiel effectif dans l'équation de Schrödinger due à la raison des modifications correspondantes des variables.

Comme exemple, nous allons considérer un espace-temps à géométrie spatiale variable incluant une transition vers une réduction dimensionnelle. Cet exemple que nous allons étudier contient une combinaison entre deux régions cylindriques bidimensionnelles de rayons distincts reliées par une région de transition.

**Mots clés :** équation de Klein-Gordon, équation de Schrödinger, variété, géométrie variable, réduction dimensionnelle.

## *Abstract*

This work of this thesis consists of studying a development of a study of dimensional reduction and this to construct a renormalizable quantum field theory. The reduction will be from a 4-dimensional space-time ( $D = 1+3$ ) to a variant with a smaller number of spatial dimensions ( $D = 1 + d; d < 3$ ) at sufficiently small distances.

We will prove an important theorem that links the study of Klein Gordons equation on space (with variable geometry) to the resolution of a Schrödinger equation with an effective potential generated by geometric variation. This result is based on the Fourier method (so-called variable separation) in Klein Gordons equation and on the fact that two-dimensional spaces are flat. We will show that in the case of the space dimension ( $d = 2$ ) the conformal factor of the metric between the effective potential in the Schrödinger equation due to the corresponding modifications of the variables.

As an example, we will consider a space-time with a variable spatial geometry including a transition to a dimensional reduction. This example which we are going to study contains a combination between two bidimensional cylindrical regions of distinct radii connected by a transition region.

**Key Words :** Klein-Gordon equation, Schrodinger equation, Manifolds, variable geometry, dimensional reduction.