



République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université Akli Mohand Oulhadj de Bouira  
Faculté des Sciences et des Sciences Appliquées  
Département du Mathématiques



# Mémoire de Master

Filière : Mathématiques

*Spécialité : Recherche Opérationnelle*

## Thème

---

La méthode de Monté Carlo est son application à la résolution de  
l'équation  $Ax=b$ .

---

Présenté par :

- HARMALI Lyna
- BELKACEMI Dalila

Devant le jury composé de :

<i>M<sup>r</sup></i> Beddek Said	Président	MAA	U. A/M/O Bouira.
<i>M<sup>r</sup></i> Demmouche Nacer	Examineur	MCB	U. A/M/O Bouira.
<i>M<sup>r</sup></i> Hamid karim	Examineur	MAA	U. A/M/O Bouira.
<i>M<sup>r</sup></i> Ait Yala Madjid	Encadreur	MAA	U. A/M/O Bouira.

2021/2022



## Remerciements



Tout d'abord, nous tenons à remercier **Dieu**, le généreux, le tout puissant qui nous a donnés la force et le courage, la volonté et les moyens nécessaires pour réaliser ce modeste travail.

Notre première reconnaissance va à notre encadreur **Dr. AIT YALA** d'avoir accepté de diriger ce travail, ses apports, ses conseils et ses encouragements. Nous lui disons, *Merci*.

Nous remercions tous les membres du jury qui nous ont fait l'honneur d'accepter de juger notre travail.

Nous remercions toutes celles et ceux qui ont contribué de manière directe ou indirecte à réaliser ce mémoire.

En fin, avec une grande fierté et honneur que nous tenons à présenter nous remercions à toute la famille administrative du département des mathématiques à tous ces enseignants qui nous ont permis d'acquérir des connaissances.

– **Grand Merci** –

## *Dédicaces*

*Je dédie ce modeste travail :*

*À mes chers parents ma mère et mon père, pour leurs patiences, leurs amours, leurs soutiens et leurs encouragements.*

*À mes chers frères "**Lamine**", "**Ahmad**" et "**Amir**" et mes belles sœurs "**Dalia**", "**Miridia** et "**mirna**".*

*À mes chères amis, mes compagnons de long chemin et tout les étudiants et étudiantes de ma promotion.*

*Lyna*

*Je dédie ce modeste travail :*

*A l'homme de ma vie, mon exemple éternel, celui qui s'est toujours sacrifié*

*pour me voir réussir, à toi mon père "**Ali**".*

*A maman "**Adidi**" pour son amour, et qu'elle m'a toujours accordé en*

*témoignage de ma reconnaissance envers sa confiance, ses sacrifices et sa tendresse.*

*A mon adorable petite sœur "**Lina**" qui sait toujours comment procurer la joie et le bonheur pour moi.*

*A mon cher frère "**Hammouche**" qui a toujours été là pour nous, et sa femme "**houria**".*

*A le petit enfant de la famille "**Axel Ali**" que j'aime .*

*A mon soutien moral et source de joie et de bonheur , mon chère ami "**Nani**" pour l'encouragement et l'aide qu'il m'a toujours accordé.*

*A mes grands parents, mes tantes, mes oncles et leurs femmes et les petites surtout "**Yanis**" et "**Iline**".*

*Mon binôme "**Lyna Harmali**" et sa famille.*

*Dalila*

# Résumé

L'objectif de ce mémoire est de présenter la méthode de Monté Carlo et la résolution du système d'équation linéaire algébrique  $Ax=b$  avec cette méthode.

Afin d'atteindre cet objectif nous avons abordé dans un premier temps les lois des probabilité usuelles, ensuite nous avons défini la méthode de Monté Carlo avec une application sur simple exemple. Par la suite on a présenté le problème  $Ax=b$  et quelque méthode de résolution.

A cet effet á la fin nous avons traité le problème on utilise la méthode de Monté Carlo.

# Abstract

The objective of this thesis is to present the Monte Carlo method and resolution of systems of linear algebraic equations  $Ax=b$  with this method.

In order to achieve this objective, we first approached the usual probability laws, then we defined the Monte Carlo method with an application on a simple example. Thereafter we presented the problem  $Ax=b$  and some methods of resolution.

For this purpose at the end we treated the problem we used the Monte Carlo method.



# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Rappel sur les probabilités</b>	<b>2</b>
1.1 Introduction . . . . .	2
1.2 Variables aléatoires . . . . .	2
1.2.1 Définitions . . . . .	2
1.2.2 Fonction de répartition . . . . .	3
1.2.3 Caractéristiques des variables aléatoires . . . . .	3
1.2.4 Variables aléatoires réelles discrètes . . . . .	5
1.2.5 Variables aléatoires réelles continues . . . . .	6
1.2.6 Variable aléatoire indépendantes . . . . .	9
1.2.7 inégalité de Markov . . . . .	9
1.2.8 inégalité de Chebyshev . . . . .	9
1.3 Les lois des grandes nombres . . . . .	10
1.3.1 Loi faible des grands nombres . . . . .	10
1.3.2 Loi forte des grands nombres . . . . .	10
1.3.3 Théorème de limite central . . . . .	11
1.3.4 Intervalle de confiance . . . . .	11
<b>2 La méthode de Monte Carlo</b>	<b>12</b>
2.1 Introduction . . . . .	12
2.2 Historique . . . . .	12
2.3 Définition de la méthode de Monte carlo . . . . .	13
2.4 Principe de la méthode de Monte Carlo . . . . .	13
2.5 Calcul d'intégrale par la méthode de Monte carlo . . . . .	13
2.5.1 Exemples . . . . .	14
2.6 Génération de nombres aléatoire : . . . . .	16
2.6.1 méthode de congruence . . . . .	16
2.6.2 Méthode d'inversion . . . . .	16
2.6.3 Méthode de rejet . . . . .	17

<b>3</b>	<b>La résolution de système linéaire de l'équation <math>Ax=b</math></b>	<b>18</b>
3.1	introduction . . . . .	18
3.2	position de problème . . . . .	18
3.3	L'idée générale de résolution : . . . . .	18
3.4	les méthodes de résolution : . . . . .	19
3.4.1	Les méthodes directes : . . . . .	19
3.4.2	Les méthodes itératives : . . . . .	19
3.5	la méthode de Monte Calo . . . . .	20
3.5.1	La méthode de Monte Carlo pour estimer la solution du système . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Application de méthode de Monté Carlo pour résoudre le système <math>Ax=b</math></b>	<b>23</b>
4.1	Introduction . . . . .	23
4.2	La résolution . . . . .	23
4.3	Traitement expérimental . . . . .	26
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>30</b>

# Table des figures

2.1	Calcul de la surface du cercle unité en l'englobant dans le carré $[-1, 1]^2$ et en calculant la proportion de points tombant à l'intérieur du cercle . . . . .	15
2.2	Méthode d'inversion pour une distribution normale(fonction gaussienne) . . . . .	17
2.3	l'algorithme de la méthode de rejet . . . . .	17



# Introduction générale :

La méthode de Monte Carlo a vu son essor à partir de la fin de la seconde guerre mondiale, essentiellement dans le cadre du projet américain "Manhattan" concernant le développement de l'arme nucléaire. Cette époque correspond également à la construction des premiers "ordinateurs". Le terme méthode de Monte Carlo désigne une famille de méthodes algorithmiques visant à calculer une valeur numérique approchée en utilisant des procédés aléatoires, c'est-à-dire des techniques probabilistes. Une méthode de Monte Carlo peut servir au calcul d'intégrales (simples ou multiples) et à la résolution d'équations aux dérivées partielles, de systèmes linéaires et de problèmes d'optimisation. D'une manière plus globale, elle permet d'avancer toutes les possibilités liées à une observation, en quantifiant le risque associé (ou l'incertitude statistique). Pratiquement, ces techniques sont couramment utilisées dans divers domaines (physique, ingénierie, finance...). La résolution des systèmes d'équations linéaires appartient aux problèmes les plus anciens dans les mathématiques et ceux-ci apparaissent dans beaucoup de domaines, comme en traitement numérique du signal, en optimisation linéaire, ou dans l'approximation de problème non linéaire en analyse numérique. Dans ce mémoire, les méthodes de Monte Carlo peuvent être vues comme des méthodes d'approximation, nous avons utilisé pour résoudre le système d'équation linéaire algébrique (sous la forme  $Ax=b$ ).

Notre travail est organisé en quatre chapitres :

Chapitre 1 : représenter des lois des probabilités usuelles et quelques notions probabilistes générales qu'on va utiliser.

Chapitre 2 : La méthode de Monte Carlo.

Chapitre 3 : le système d'équation  $Ax=b$  et quelques méthodes de résolution.

Chapitre 4 : application de la méthode de Monte Carlo pour résoudre le système d'équation  $Ax=b$ .

En fin, notre travail se termine par une conclusion.

# Rappel sur les probabilités

## 1.1 Introduction

Les probabilistes ont besoin dans leurs domaines à les modèles probabilistes et des langages statistiques, à cet effet nous allons présenter les lois de probabilité les plus utilisées dans les diverses applications. Nous avons fait les lois des variables aléatoires discrètes et celles des variables continues. Les deux théorèmes mathématiques qui ont une place particulière en théorie des probabilités et en statistiques : la loi des grands nombres et le théorème central limite. Ils interviennent dans l'étude des phénomènes aléatoires comparant un grand nombre de variables aléatoires indépendantes de même loi.

## 1.2 Variables aléatoires

Lorsqu'on envisage d'observer une expérience aléatoire et lui associer un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , il arrive que l'on s'intéresse plutôt à une fonction numérique du résultat attendu qu'au résultat lui-même, mais l'objectif reste de pouvoir assigner des probabilités à des événements concernant cette fonction du résultat. La fonction étudiée doit donc satisfaire certaines conditions de mesurabilité : si  $X(\cdot)$  est une telle fonction définie sur  $\Omega$  à valeurs réelles, des événements concernant  $X(\cdot)$ , comme  $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = a\}$ ,  $\{\omega \in \Omega : X(\omega) > a\}$   $a \in \mathbb{R}$ , doivent être dans  $\mathcal{F}$  pour qu'on puisse leur assigner des probabilités parce que  $P$  n'est pas définie pour des événements n'appartenant pas à  $\mathcal{F}$ . Cependant la quasi-totalité des événements concernant  $X(\cdot)$ , que l'on puisse formuler peuvent s'exprimer par des opérations ensemblistes élémentaires des événements  $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  et donc il suffit d'exiger que ceux-ci soient membres de  $\mathcal{F}$  pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , une fonction vérifiant une telle condition est dite définie sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

### 1.2.1 Définitions

**Définition 1 : (Variable aléatoire)**

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace de probabilité. une fonction  $X(\cdot)$  définie sur  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  est dite variable aléatoire sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  si  $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\} \in \mathcal{F}$  pour tout  $a \in \mathbb{R}$ .

**Définition 3 : (Tribu engendrée par une variable aléatoire)**

La tribu  $\mathcal{F}(X)$  engendrée par une variable aléatoire  $X$  définie sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  est la plus petite tribu contenant les événements de la forme  $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

**Définition 2 : (Probabilité)**

Soit  $X$  une variable aléatoire sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , on appelle distribution de probabilité de  $X$ . La fonction ensembliste  $P_X(\cdot)$  définie sur  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  à valeur dans  $[0, 1]$  par :

$$P_X(\cdot) : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$$

$$B \rightarrow P_X(\cdot) = P(\omega \in \Omega : X(\omega) \in B) = P(X^{-1}(B))$$

.

**1.2.2 Fonction de répartition**

La fonction de répartition de la variable aléatoire réelle  $X$  est définie par

$$F_X(x) = P(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}$$

**Propriétés**

- i.  $0 \leq F_X \leq 1$ .
- ii.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ .
- iii.  $F_X$  est croissante,  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y \Rightarrow F_X(x) \leq F_X(y)$
- iv.  $F_X$  est continue à droite.
- v.  $P(a \leq X < b) = F_X(b) - F_X(a)$ .

**1.2.3 Caractéristiques des variables aléatoires****L'espérance**

Espérance d'une variable aléatoire  $E(X)$  correspond à la moyenne des valeurs possibles de  $X$  pondérées par les probabilités associées à ces valeurs, c'est un paramètre de position qui correspond au moment d'ordre 1 de la variable aléatoire  $X$ .

- Si  $X$  est une variable aléatoire discrète de loi de probabilité  $(x_i, p_i)_i$ , définie sur un nombre fini ( $n$ ) d'événements élémentaires alors

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

- Si  $X$  est une variable aléatoire de densité  $f_x$ , on appelle espérance de  $X$ , le réel  $E(X)$  définie par

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

**Propriétés**

- i. L'espérance est linéaire : pour tout  $a, b \in \mathbb{R}$ , et pour toutes variable aléatoire réelle  $X$  et  $Y$

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

- ii. Si  $X$  est une variable aléatoire réelle constante  $a \in \mathbb{R}$  c'est-à-dire pour tout  $\omega \in \Omega$ ,  $X(\omega) = a$  alors

$$P(X = a) = 1 \quad \text{et} \quad E(X) = a$$

- iii. L'espérance d'une variable aléatoire réelle positive est positive. En particulier, si  $X \geq Y$  ce qui signifie que pour tout  $\omega \in \Omega$ ,  $X(\omega) \geq Y(\omega)$ , alors  $E(X - Y) \geq 0$  donc  $E(X) \geq E(Y)$ .

**La variance**

La variance d'une variable aléatoire  $V(X)$  est l'espérance mathématique de carré de l'écart à l'espérance mathématique. C'est un paramètre de dispersion qui correspond à un moment centré d'ordre 2 de la variable aléatoire  $X$ .

- Si  $X$  est une variable aléatoire ayant une espérance  $E(X)$ , on a

$$V(X) = E([X - E(X)]^2)$$

- Si  $X$  est une variable aléatoire discrète de la loi de probabilité  $(x_i, p_i)_i$ , définie sur un nombre fini ( $n$ ) d'évènements élémentaires alors la variance est égale à

$$V(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 p_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - E(X)^2$$

- Si  $X$  est une variable aléatoire continue donnée par sa densité  $f_X$  alors la variance de  $X$  est le nombre réel positif tel que

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - E(X)^2$$

**Propriétés**

- $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$
- $V(aX + b) = a^2 V(X)$  pour tout  $a, b \in \mathbb{R}$ . En particulier,  $V(X + b) = V(X)$

**L'écart type**

La racine carrée de  $V(X)$ , notée  $\sigma_x$  est appelée écart type de  $X$

$$\sigma(x) = \sqrt{V(X)}$$

**Définition (Moments) :**

Soit  $X$  est une variable aléatoire et  $p \in \mathbb{N}^*$  telle que  $E(|X|^p) < \infty$

- ◆ Le moment d'ordre  $p$  de  $X$  est  $E(X^p) < \infty$ .
- ◆ Le moment factoriel d'ordre  $p$  de  $X$  est  $E(X(x-1)\dots(X-p+1))$
- ◆ Le moment centré d'ordre  $p$  de  $X$  est le moment d'ordre  $p$  de  $X - E(X)$

#### 1.2.4 Variables aléatoires réelles discrètes

##### Définition :

Une variable aléatoire réelle  $X$  à valeurs dans un ensemble  $\mathcal{X}$  fini ou dénombrable est appelée variable aléatoire réelle discrète. Dans ce cas, la loi de  $X$  est déterminée par l'ensemble des probabilités

$$P_x = P(\mathcal{X} = x), \quad x \in \mathcal{X}$$

Ainsi, pour toute partie  $A$  de  $\mathcal{X}$ , on a alors

$$P_x(A) = P(X \in A) = \sum_{x \in A} P(X = x) \quad \text{et} \quad P_x(\mathcal{X}) = \sum_{x \in \mathcal{X}} P(X = x) = 1$$

##### Exemples de variable discrète

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle discrète prenant ses valeurs dans un ensemble  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , éventuellement infini. Alors la loi de  $X$  est caractérisée par l'ensemble des probabilités  $P_i$  tels que

$$P(X = x_i) = P_i \quad \text{avec} \quad 0 \leq P_i < 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n P_i = 1$$

##### — Loi de Bernoulli

On dit qu'une variable aléatoire réelle  $X$  à valeurs dans  $\{0, 1\}$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $p \in [0, 1]$ , notée  $\beta(p)$ , si

$$P(X = 1) = 1 - P(X = 0) = p$$

\*son espérance est  $E(X) = p$

\*son variance est  $V(X) = p(1 - p)$

##### — Loi binomiale

On dit qu'une variable aléatoire réelle  $X$  à valeurs dans  $\{0, 1, 2, \dots, n\}$  suit une loi de binomiale de paramètre  $(n, p)$ , notée  $\beta(n, p)$  si

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} \quad 0 \leq k \leq n$$

\*son espérance est  $E(X) = np$

\*son variance est  $V(X) = np(1 - p)$

— **Loi géométrique**

On dit qu'une variable aléatoire réelle  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$  suit une loi géométrique de paramètre  $p \in [0, 1]$  notée  $\mathcal{G}(p)$  si

$$P(X = k) = p(1 - p)^{1-k} \quad k \in \mathbb{N}^*$$

\*son espérance est  $E(X) = \frac{1}{p}$   
 \*son variance est  $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$

— **Loi de poisson**

On dit qu'une variable aléatoire réelle  $X$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$  suit une loi de poisson de paramètre  $\lambda > 0$ , notée  $\mathcal{P}(\lambda)$  si

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad k \in \mathbb{N}$$

\*son espérance et variance sont :  $E(X) = V(X) = \lambda$

**1.2.5 Variables aléatoires réelles continues****Définition 1**

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle qui prend un nombre infini non dénombrable de valeurs, si  $F_X$  est une fonction continue, on dit que  $X$  est une variable aléatoire réelle continue. Dans ce cas, la loi de  $X$  est déterminée par l'ensemble des probabilités  $P(a < X < b)$  pour tout  $a < b$ .

**Définition 2**

Si l'on peut écrire la fonction de répartition d'une variable continue sous la forme

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^t f_X(x) dx$$

où  $f_x$  est une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , alors on dit que  $f_X$  est la densité de probabilité de variable aléatoire réelle  $X$ .

Ceci implique que l'on a pour tout  $a < b$

$$P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(x) dx$$

Cette intégrale étant positive pour tout  $a < b$ , il en résulte que  $f_x \geq 0$ , de plus puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(X) = 1$  on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$$

Une densité de probabilité est donc une fonction positive ou nulle, d'intégrale 1 et qui caractérise la loi d'une variable aléatoire réelle continue.

De plus, en tout point  $x_0 \in \mathbb{R}$  où  $F_X$  est dérivable, on a

$$f_X(x_0) = F'_X(x_0)$$

### Exemples de variable continue

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle continue, alors la loi de  $X$  est caractérisé par l'ensemble des probabilités

$$P(a < X < b) = \int_a^b f_X(x) dx$$

où  $f_X$  est la densité de probabilité de  $X$  et  $a$  et  $b$  sont deux nombres réelles éventuellement infinis.

#### — Loi uniforme

On dit que la variable aléatoire  $X$  suit une loi uniforme, lorsque sa densité de probabilité est une fonction constante sur  $[a, b]$ , ( $a < b$  sont deux réels) .

#### Propriété 1

la fonction de densité de probabilité de la loi uniforme sur l'intervalle  $[a, b]$  est définie par

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad \text{pour tout } x \in [a, b]$$

#### Propriété 2

Soit  $X$  une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle  $I = [a, b]$  , alors pour tout intervalle  $J = [c, d]$  contenu dans  $I$  on a :

$$P(X \in J) = P(c \leq X \leq d) = \frac{d-c}{b-a} = \frac{\text{longueur de } J}{\text{longueur de } I}$$

\*son espérance est  $E(X) = \frac{a+b}{2}$

\*son variance est  $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

#### — Loi exponentielle

On dit que  $X$  une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$ , notée  $\varepsilon(\lambda)$  si la loi de  $X$  a pour densité

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

\*son espérance est  $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

\*son variance est  $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

### — Loi Gamma

Soient  $a > 0, \lambda > 0$ , on dit que  $X$  une variable aléatoire qui suit la loi Gamma de paramètre  $\{a, \lambda\}$ , notée  $\gamma(a, \lambda)$  si la loi de  $X$  a pour densité

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^a x^{a-1} \exp(-\lambda x)}{\Gamma(a)} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La loi Gamma généralisé la loi exponentielle.

**Remarque :** on rappelle que la fonction Gamma est définie par

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} \exp(-x) \quad \text{pour tout } a > 0$$

### — Loi normale centrée réduite

Loi normale centrée réduite est une loi continue d'une variable aléatoire  $X$  à valeurs dans  $X(\Omega) = \mathbb{R}$  tout entier, notée  $\mathcal{N}(0, 1)$  définie à partir de la densité

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Il existe par contre pas l'expression simple de sa fonction de répartition autre que la formule intégrale

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad F(a) = \int_{-\infty}^a f(t) dt$$

### — Loi normale de paramètre $(\mu, \sigma)$

Soient  $\mu \in \mathbb{R}$  et  $\sigma > 0$ , on dit que  $X$  une variable aléatoire qui suit la loi normale de paramètre  $(\mu, \sigma)$ , notée  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$  si la loi de  $X$  a pour densité

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad x \in \mathbb{R}$$

\*son espérance est  $E(X) = \mu$

\*son variance est  $V(X) = \sigma^2$

### Théorème

Soit  $X$  une variable aléatoire qui suit la loi normale  $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$  et variable aléatoire définie par

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$



Alors  $Z$  suit une loi normale centrée réduite  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

— **Loi de  $\chi^2$**

On dit que  $X$  une variable aléatoire qui suit la loi  $\chi^2$  ("Khi-deux") à  $k$  degré(s) de liberté si

$$f_k(x) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma(\frac{k}{2})} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \quad \text{pour tout } x > 0$$

### 1.2.6 Variable aléatoire indépendantes

**Définition**

Deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont dites indépendantes si et seulement si :

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B), \quad A, B \in \mathbb{R}$$

on peut montrer que l'indépendance est équivalente à

$$P(X \leq a, Y \leq b) = P(X \leq a)P(Y \leq b), \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

ou encore en termes de fonction de répartition :

$$F_{X,Y}(X \leq a, Y \leq b) = F_X(X \leq a)F_Y(Y \leq b) \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

### 1.2.7 inégalité de Markov

Si  $X$  est une variable aléatoire, non négative alors  $a > 0$  :

$$P(x \geq a) \leq \frac{E(x)}{a}$$

.

**Démonstration**

soit  $I : [0, \infty) \rightarrow \{0, 1\}$  fonction indicatrice de  $[a, \infty)$ , c'est à dire :

$$I(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } X \geq a \\ 0 & X < a \end{cases}$$

**Rappel :**  $E(I(x)) = \int_0^{+\infty} I(x)f(x)dx = \int_0^{\infty} f(x)dx = P(X \geq a)$

puisque  $X \geq 0$ ,  $I(X) \leq \frac{X}{a}$

$$P(X \geq a) = E(I(x)) \leq E\left(\frac{X}{a}\right) = \frac{E(x)}{a}$$

### 1.2.8 inégalité de Chebyshev

Soit  $X$  variable aléatoire, avec une moyenne finie  $\mu$  et une variance  $\sigma^2$ , alors  $\forall k > 0$

$$P(|X - \mu| \leq \frac{\sigma^2}{K^2})$$

**Démonstration :**

$$|X - \mu| \geq K \iff |X - \mu|^2 \geq K^2$$

En utilisant l'inégalité de Markov avec  $a = K^2$  et  $X = |X - \mu|^2$ , on obtient :

$$P(|X - \mu| \geq K) = P(|X - \mu|^2 \geq K^2) \leq \frac{E(|X - \mu|^2)}{K^2} = \frac{\sigma^2}{K^2}$$

**Exemple**

Supposons qu'un bateau de pêche, totalisé 50 poisson chaque semaine (en moyenne).

Question : Quelle est la probabilité qu'il pêche plus de 15 poisson pour une semaine donnée.

Solution :  $X =$  nombre de poissons pêchés.

On a  $E(X) = 50$

$$P(X \geq 15) \leq \frac{E(X)}{75} = \frac{50}{75} = \frac{2}{3}$$

**1.3 Les lois des grandes nombres**

Les méthodes de Monté Carlo sont basées sur les lois des grands nombres

- La loi faible des grands nombres.
- La loi forte des grands nombres.

**1.3.1 Loi faible des grands nombres**

Soient  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires indépendantes, de même loi, et admettant une variance. On note  $\mu = \mathbb{E}(X_1)$  Alors pour tout

$$P\left(a \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \mu > \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

. Dans ce cas, on dit que la moyenne arithmétique  $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$  converge en probabilité vers l'espérance mathématique lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . [5]

**1.3.2 Loi forte des grands nombres**

Soit  $(X_i, i \geq 1)$  une suite de réalisations de la variable aléatoire  $X$ . On suppose que  $\mathbb{E}(|X|) < +\infty$ . Alors, pour presque tout  $\omega$  ( $\exists N \in \Omega$  avec  $p(N) = 0$  et  $\omega \notin N$ )

$$(\mathbb{E}(X)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} (X_1(\omega) + \dots + X_n(\omega))$$

. [5]

### 1.3.3 Théorème de limite central

Le théorème de limite central (aussi appelé théorème limite central) établit la convergence en loi de la somme d'une suite de variables aléatoires vers la loi normale. Intuitivement, ce résultat affirme qu'une somme de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées tend vers une variable aléatoire gaussienne. [5]

**Théorème :**

Soit  $X_1, X_2, \dots, X_n$  une suite de variables aléatoires indépendantes, avec  $E(X_i) = \mu_i$  et  $V(X_i) = \sigma_i^2$  pour  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Alors la variable aléatoire

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}}$$

suit approximativement une loi normale  $N(0, 1)$  si  $n$  est grand.

### 1.3.4 Intervalle de confiance

En mathématique, un intervalle de confiance encadre une valeur réelle que l'on cherche à estimer à l'aide de mesures prises par un procédé aléatoire.

Les intervalles de confiance sont souvent élaborés à partir d'un échantillon, c'est-à-dire une série de mesures indépendantes sur une population, notamment pour estimer des indicateurs statistiques comme la moyenne, la médiane ou la variance.

Un intervalle de confiance est modélisé par un couple de variables aléatoires qui encadrent un paramètre réel.

# La méthode de Monte Carlo

## 2.1 Introduction

Lorsque la résolution mathématique d'un problème donnée n'est pas possible, on fait appel à des méthodes d'approximation. La méthode de Monte Carlo l'une des ces méthodes. L'utilisation de cette méthode recouvre presque tous les domaines. On distingue deux grands domaines où la méthode de Monte Carlo peut être utilisée :

**Problème déterministes** : ce sont des problèmes de nature déterministe faisant appel aux calculs numériques, on cite comme exemple :

- Estimation des surfaces
- Calcul des intégrales multiples.
- Résolution des équations différentielles.
- Résolution des systèmes des équations algébriques.
- Résolution des problèmes d'optimisation combinatoire.

**Phénomènes et processus aléatoire** : on cite comme des exemples à ces problèmes :

- Mouvements des particules.
- Systèmes stochastiques de la gestion ou de la production.
- Reconnaissances de forme (analyse d'image, parole,...).

Dans ce chapitre, nous allons présenter la méthode Monte Carlo.

## 2.2 Historique

Le nom de la méthode provient de la ville Monte Carlo dans la principauté de Monaco. La ville est associée aux roulettes de chance, un simple générateur de nombres aléatoires. C'est en 1949 que le physicien gréco-américain Nicholas Metropolis et le mathématicien américain d'origine polonaise Stanislaw Ulam publient l'article fondateur de cette méthode de calcul et lui donnent son nom.

Parmi les problèmes efficacement traités par la méthode de Monte Carlo, il y a les calculs d'intégrales et les problèmes de diffusion de collision et de mouvement de particules dans un milieu matériel. Ceci est rendu possible par la propriété essentielle de pouvoir simuler une grande variété de fonction de distribution. L'idée de procéder à des tirages aléatoires pour évaluer des intégrales

compliquées était dans l'air du temps parmi la communauté des physiciens, mais l'apport majeur de Metropolis et Ulam fut de proposer la technique d'échantillonnage préférentiel, qui améliore largement l'efficacité de la méthode. Pour l'anecdote, c'est dans le cadre des recherches du projet Manhattan sur le développement de la bombe atomique que ces chercheurs avaient commencé à développer leur idées.

Des développements importants des méthodes de Monte Carlo furent l'algorithme de Metropolis-Hastings pour la simulation de certaines variables aléatoires en physique statistique, algorithme qui à son tour fut la base de la méthode du recuit simulé en 1983 pour trouver des extrema globaux de fonctions définies sur des espaces de grande dimension. [3]

### 2.3 Définition de la méthode de Monte Carlo

Le terme méthode de Monte Carlo désigne toute méthode visant à calculer une valeur numérique en utilisant des procédés aléatoires, c'est-à-dire des techniques probabilistes. Le nom de ces méthodes fait allusion aux jeux de hasard pratiqués à Monte-Carlo. Les méthodes de Monte-Carlo sont particulièrement utilisées pour calculer des intégrales en dimensions plus grandes que 1. Elles sont également couramment utilisées en physique des particules, où des simulations probabilistes permettent d'estimer la forme d'un signal ou la sensibilité d'un détecteur. La comparaison des données mesurées à ces simulations peut permettre de mettre en évidence des caractéristiques inattendues.

### 2.4 Principe de la méthode de Monte Carlo

Pour utiliser une méthode de Monte Carlo on doit tout d'abord mettre sous la forme d'une espérance, à l'issue de cette étape, il reste à calculer cette quantité par une espérance  $\mathbb{E}(X)$  de la variable aléatoire  $X$ . Pour ce calcul, il convient de savoir simuler une variable aléatoire selon la loi de  $X$  on dispose alors d'une suite  $(X_i)_{1 \leq i \leq N}$  de  $N$  réalisations de la variable aléatoire  $X$ . On approxime alors  $\mathbb{E}(X)$  par :

$$\mathbb{E}(X) \approx \frac{1}{N}(X_1 + \dots + X_n)$$

[4]

### 2.5 Calcul d'intégrale par la méthode de Monte Carlo

Les méthodes de Monte Carlo reposent sur une approximation probabiliste et non déterministe. En ce sens on ne résout pas l'objet mathématique mais on cherche à l'approcher moyennant la loi forte des grands nombres. Nous traiterons les intégrales de la forme :

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

et  $f$  une fonction intégrable sur  $[a, b]$ .

La méthode de Monte Carlo pour l'intégration consiste à trouver une variable aléatoire  $Z$  telle que  $I = \mathbb{E}(Z)$ . Ce qui permet d'estimer  $I$  en utilisant la loi forte des grands nombres. L'erreur commise est contrôlée par le théorème central limite dès que  $Z$  est de carré intégrable. Si aucune primitive de  $f(x)$  n'est connue, l'intégrale ne peut pas être calculée analytiquement. Mais si  $f(x)$  peut être facilement calculée en tout point de l'intervalle  $[a, b]$ , on peut obtenir une bonne approximation de la valeur de cette intégrale par les méthodes numériques.

Il existe de nombreuses méthodes d'intégration numérique. La plus simple consiste à diviser l'intervalle par  $N$  rectangles adjacents. La hauteur de chaque rectangle est égale à la valeur de  $f(X)$  pour  $X$  pris au milieu de la base du rectangle. La somme des aires de ces rectangles est une approximation de l'aire sous la courbe représentant  $f(X)$ , c'est à dire l'intégrale  $I$  recherchée :

$$I \simeq \sum_{t=1}^N h f(x_t) = h \sum_{t=1}^N f(x_t) = \frac{b-a}{N} \sum_{t=1}^N f(x_t)$$

si  $f(x_i)$  a un comportement suffisamment régulier, et si les rectangles sont suffisamment étroits, alors l'aire ainsi calculée sera une bonne approximation de la valeur de l'intégrale.

### 2.5.1 Exemples

#### Calcul d'une surface

Les méthodes de Monte Carlo permettent d'estimer une surface. De manière équivalente, on peut estimer un volume, en considérant un espace à trois dimensions au lieu de deux. Le domaine bidimensionnel  $S$  considéré est supposé être borné, c'est-à-dire qu'il existe des réels  $a, b, c, d$  tels que  $S \subset [a, b] \times [c, d]$ . Comment estimer sa surface  $|S|$ ? On échantillonne deux variables aléatoires indépendantes  $Y_1$  et  $Y_2$ , selon des lois uniformes sur respectivement  $[a, b]$  et  $[c, d]$ . Le point  $Y = (Y_1, Y_2)$  est donc un point suivant une loi uniforme sur  $[a, b] \times [c, d]$ .

On définit alors  $X = 1(Y \in S)$  la variable aléatoire valant 1 si le point  $Y$  est dans la surface et 0 sinon.

L'algorithme d'estimation consiste donc à considérer un échantillon de  $n$  valeurs  $X_i$  indépendantes.

La proposition de points dans la surface  $S$ ,

$\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$  est un estimateur sans biais.

$$\mathbb{E}[X] = \int_a^b \int_c^d 1((Y_1, Y_2) \in S) \frac{dY_2}{d-c} \frac{dY_1}{b-a} = \frac{|S|}{(b-a)(d-c)}$$

$\mathbb{E}[X]$  est donc le rapport entre la surface de  $S$  et la surface du domaine d'échantillonnage considéré  $[a, b] \times [c, d]$ . Un estimateur de la surface est donc

$$(b-a)(d-c)\bar{X}_n = (b-a)(d-c) \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

#### Exemple :

Considérons l'estimation de  $\pi$  via la surface d'un cercle de rayon  $R = 1$  (dont on rappelle que la surface est  $\pi R^2$  quand le rayon est  $R$ ). Ce cercle est compris dans le carré  $[-1, 1]^2$ . La figure (2.1) décrit le domaine d'échantillonnage et quelques points d'échantillonnage

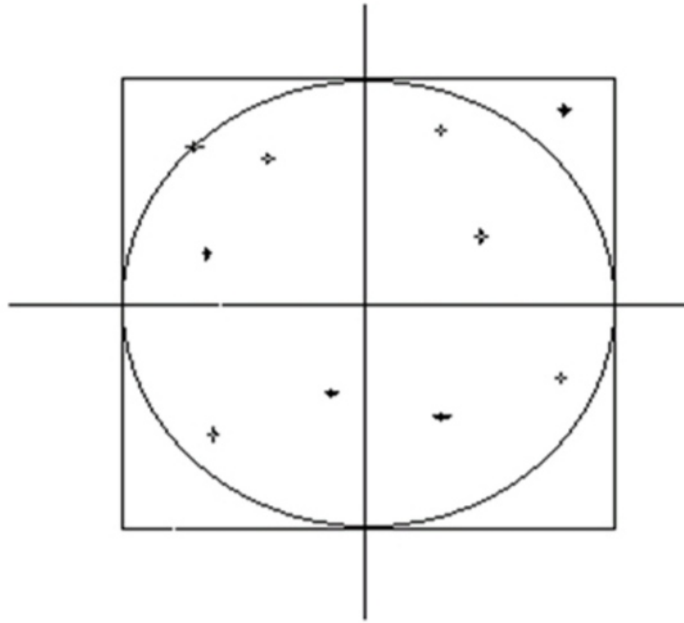


FIGURE 2.1 – Calcul de la surface du cercle unité en l’englobant dans le carré  $[-1, 1]^2$  et en calculant la proportion de points tombant à l’intérieur du cercle

Le tableau 2.1 décrit des résultats de simulation obtenus pour différentes tailles d’échantillons. On remarque qu’il faut une taille importante pour avoir une estimation correcte, mais que la précision est meilleure que pour l’estimateur. Il est intéressant de noter que  $\pi$  n’est pas inclus dans l’intervalle de confiance pour  $10^2$  points. Cela peut se produire dans 5% des cas, selon les statistiques de la loi normale. L’intervalle n’est qu’une garantie statistique

N	Estimation	Intervalle de confiance
$10^2$	27200	[23524;30876]
$10^3$	31720	[30715;32725]
$10^4$	31520	[31200;31840]
$10^6$	31406	[31374;31439]

TABLE 2.1 – Estimation de la surface  $\pi$  d’un cercle de rayon 1 et intervalle de confiance à 95% pour différentes tailles n d’échantillon

### Estimation d’une valeur d’intégrale

Nous présentons dans ce paragraphe une application de la méthode de Monte Carlo, au cas du calcul d’une intégral.

Imaginons que l’on cherche à calculer une intégrale de la forme :

$$I = \int_{[0,1]^d} f(u_1, \dots, u_d) du_1 \dots du_d$$

- i. Mise sous forme d’espérance : on pose  $X = f(U_1 \dots U_d)$ , où  $U_1 \dots U_d$  sont des réalisations de la loi uniforme sur l’intervalle  $[0, 1]$ , alors

$$E(x) = E(f(U_1 \dots U_d)) = \int_{[0,1]^d} f(u_1, \dots, u_d) du_1 \dots du_d$$

- ii. Simulation de la variable aléatoire : on suppose que l'on dispose d'une suite  $(U_i, i \geq 1)$  sont des réalisations de la loi uniforme sur  $[0, 1]$ . On pose alors  $X_1 = f(U_1 \dots U_d), X_2 = f(U_{d+1} \dots U_{2d})$ , etc. Alors la suite  $(X_i, i \geq 1)$  sont des réalisations de la loi  $X$  et une bonne approximation de  $I$  est donnée par :

$$\frac{1}{N}(X_1 + \dots + X_n)$$

### Remarque

Cette méthode est facilement programmable, et ne dépend pas de la régularité de  $f$  (on lui demande juste d'être mesurable). Souvent on cherche à évaluer une intégrale plus générale :

$$I = \int_{R^d} g(x)f(x)dx = \int_{R^d} g(x_1 \dots x_d)f(x_1 \dots x_d)dx_1 \dots dx_d$$

Avec  $f(x)$  positive, et  $\int f(x)dx = 1$ . Alors  $I = E(g(X))$  où  $X$  est une variable aléatoire à valeur dans  $R^d$  de loi  $f(x)dx$ .

## 2.6 Génération de nombres aléatoire :

La méthode Monte Carlo est basée sur l'utilisation des nombres aléatoires, l'outil de base de la génération de nombre aléatoires en général consiste en une séquence de nombres aléatoires indépendants et distribués selon une fonction de distribution. Plusieurs méthodes numériques sont utilisées pour générer ces nombres aléatoires.

### 2.6.1 méthode de congruence

Une des formules les plus utilisées pour engendrer une suite de nombres pseudo-aléatoires à distribution uniforme est la méthode de congruence. Elle est basée sur la séquence itérative :

$$x_i = ax_{i-1} + c[\text{modulo } m]$$

Ceci signifie que le nombre  $x_i$  est égale au reste de la division par  $m$  de  $ax_{i-1} + c$ , où  $m, a$ , et  $c$  sont des constantes. La séquence de nombres générés par cette relation a une période égale à  $m$  sous certaines conditions vérifiées par les constantes. On a donc intérêt à ce que la période soit la plus longue possible. La plupart des calculateurs utilisent cet algorithme pour donner des séquence de nombres pseudo-aléatoires à distribution uniforme  $[0, 1]$ .

### 2.6.2 Méthode d'inversion

Elle est utilisée pour générer des distribution pour des densités non uniforme dont l'inverse de la fonction de répartition est connue. Soit  $F$  une fonction de répartition définie sur un intervalle  $[a, b]$

$$F^{-1} = \inf \{t : F(t) \geq \mu\} \text{ Pour tout } \mu \in ]0, 1[$$

Étant donné une variable aléatoire, notée  $U$ , qui suit la loi uniforme sur l'intervalle  $[0, 1]$  alors la variable aléatoire  $X = F^{-1}(U)$  suit une distribution donnée par la fonction de répartition  $F$ .



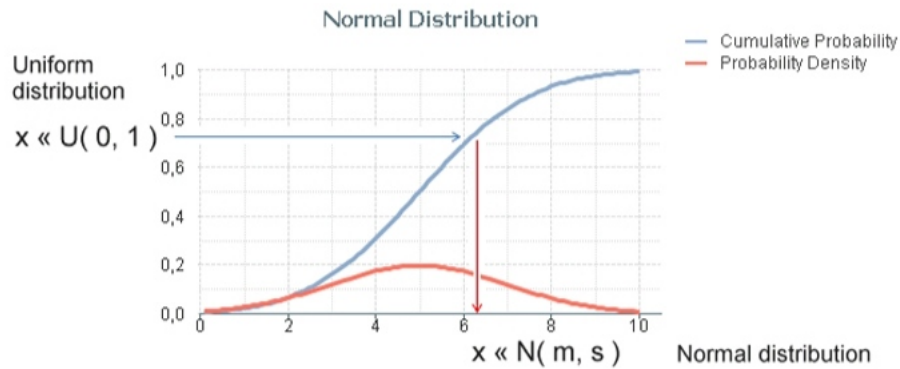


FIGURE 2.2 – Méthode d’inversion pour une distribution normale (fonction gaussienne)

Ainsi, à partir de nombres pseudo-aléatoires  $u_1, \dots, u_n$  simulés suivant une loi uniforme sur l’intervalle  $[0, 1]$ , nous obtenons, en posant  $x_i = F^{-1}(u_i)$ , des nombres pseudo-aléatoires  $x_1, \dots, x_n$  simulant les réalisations d’une variable aléatoire de fonction de répartition  $F(x)$ .

### 2.6.3 Méthode de rejet

Lorsque l’on dispose d’une méthode pour simuler une variable aléatoire de fonction de densité  $g(x)$ , on peut à partir de là simuler une variable aléatoire continue d’une autre fonction de densité  $f(x)$ . La méthode consiste à simuler d’abord la variable  $y$  ayant la densité  $g$  puis on accepte cette valeur générée avec une probabilité proportionnelle à  $\frac{f(y)}{g(y)}$ .

Soit un constante  $c \geq 1$  telle que  $\frac{f(y)}{g(y)} \leq c$  pour tout  $x$  et soit  $\alpha(x) = \frac{f(x)}{cg(x)} \in [0, 1]$ .

Soit  $Y_1$  une variable aléatoire de densité  $g$  et  $U_1$  une variable aléatoire de loi uniforme indépendant de  $Y_1$ . Si  $U_1 \leq \alpha(Y_1)$ , on pose  $X = Y_1$ . Si non, on rejette  $X_1$  et on simule une autre variable aléatoire  $Y_2$  de même densité  $g$  :

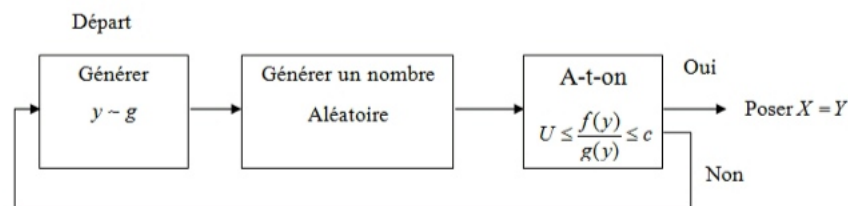


FIGURE 2.3 – l’algorithme de la méthode de rejet



très simple lorsque :

- A diagonale ;
- A orthogonale ;
- A tridiagonale ;
- A triangulaire supérieure ou inférieure ;

### 3.4 les méthodes de résolution :

Il existe deux grandes familles de méthode e résolution :

#### 3.4.1 Les méthodes directes :

Qui permettent d'obtenir la solution en un nombre fini d'opérations soit par triangularisation ou soit par décomposition de la matrice A. [1]

Les principales méthodes sont :

- L'élimination de Gauss,
- La décomposition LU,
- La décomposition de Cholesky,
- La décomposition QR.

Ces méthodes sont utilisées pour les matrices pleines et les petits systèmes .

#### 3.4.2 Les méthodes itératives :

Qui consistent à construire une suite  $(x_n)_n$  qui converge vers la solution.

Les principales méthodes sont :

- Méthode de Jacobi,
- Méthode de Gauss-Seidel
- Méthode du gradient conjugué.
- Méthode de Monte-Carlo

Ces méthodes sont utilisées pour les matrices creuses et les grands systèmes.

**Remarque** Le choix entre les méthodes directes et les méthodes itératives dépend du type (ou forme) de la matrice du système.

#### La méthode de Jacobi

On remarque que si les éléments diagonaux da A sont non nuls, le système linéaire  $Ax=b$  est équivalent à :

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}x_j)$$

,  $i = 1, \dots, n$

Pour une donnée initiale  $X^{(0)}$  choisie, on calcule  $X^{(k+1)}$  par

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}x_j^{(k)})$$

$i = 1, \dots, n$ .

Cela permet d'identifier le scission suivant pour A :

$$A = D - E - F$$

D : diagonale de A

E : triangulaire inférieure avec des 0 sur la diagonale

F : triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale

La matrice d'itération de la méthode de Jacobi est donnée par :

$$B_j = D^{-1}(E + F) = I - D^{-1}A$$

L'algorithme de Jacobi nécessite le stockage des deux vecteurs  $x_j^{(k)}$  et  $x_j^{(k+1)}$ .

### la méthode de Gauss-Seidel

Pour cette méthode on a

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

$i = 1, \dots, n$ .

Il s'écrit aussi

$$X^{(k+1)} = (D - E)^{-1}(b + Fx^{(k)})$$

Dans ce cas, le scission de A est

$$P = D - E, N = F,$$

et la matrice d'itération associée est

$$B_{GS} = (D - E)^{-1}U$$

L'algorithme de Gauss-Seidel ne nécessite qu'un vecteur de stockage,  $X^{(k)}$  étant remplacé par  $X^{(k+1)}$  au cours de l'itération. Il est en général plus rapide que l'algorithme de Jacobi.

## 3.5 la méthode de Monte Carlo

On considère le système d'équations algébriques linéaires :

$$Ax = b \tag{3.1}$$

où  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est une matrice inversible donnée et  $b \in \mathbb{R}^n$  est un vecteur donné,  $b = (b_1, \dots, b_n)^t$ . On s'intéresse à estimer la solution  $x = (x_1, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$  du système (3.1), en utilisant les méthodes de Monte Carlo. Pour cela, nous écrivons le système dans le formulaire suivante :

$$x = Tx + c \tag{3.2}$$

où  $T = (t_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $c = (c_1, \dots, c_n)^t$  et  $I-T$  est une matrice inversible.

### Série de Neumann

Une série de Neumann est une série d'opération de la forme

$$\sum_{k=0}^{\infty} N^k$$

où  $N$  est un opérateur et  $N^k$  désigne une itération de  $N$  répétée  $k$  fois. Elle étend l'idée de série géométrique.

La solution  $x$  admet la représentation en série de Neumann :

$$x = c + Tc + T^2c + T^3c + \dots \quad (3.3)$$

On suppose que  $\sum_{j=1}^n |t_{ij}| < 1$ ,  $i = 1, \dots, n$  qui est une condition suffisante pour la convergence des séries de Neumann vers la solution.

La première méthode de Monte Carlo pour résoudre des systèmes d'équations linéaires a été proposée par von Neumann et Ulam, et étendu par Forsythe et Leibler. La méthode est efficace quand on s'intéresse à estimer une composante de la solution.

#### 3.5.1 La méthode de Monte Carlo pour estimer la solution du système

Il existe également une méthode de Monte Carlo pour résoudre des systèmes d'équations linéaires, qui permet d'estimer la solution entière, en construisant des estimateurs sans biais pour les composants de la solution. [2]

Pour résoudre le système (3.2), soit  $P = (P_{ij})_{i,j=1}^{n+1} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$  une matrice, dont les éléments satisfont les conditions :

- i.  $P_{ij} \geq 0$  tel que  $t_{ij} \neq 0 \Rightarrow P_{ij} \neq 0$  ;
- ii.  $\sum_{j=1}^n P_{ij} \geq 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  ;
- iii.  $P_{i,n+1} = 1 - \sum_{j=1}^n P_{ij}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  ;
- iv.  $P_{n+1,j} = 0$ ,  $j < n + 1$  ;
- v.  $P_{n+1,n+1} = 1$  ;

On utilise aussi la notation  $p_{i,n+1}$  pour  $P_{i,n+1}$ . De plus, définissons les points :

$$W_{ij} = \begin{cases} \frac{t_{ij}}{p_{ij}} & p_{ij} \neq 0 \\ 0 & p_{ij} = 0 \end{cases}, i, j = 1, \dots, n$$

La matrice  $P$  décrit une chaîne de Markov d'états  $\{1, \dots, n + 1\}$  où  $n + 1$  est un état absorbant et  $p_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, n + 1$  est la probabilité de transition en une étape de l'état  $i$  à l'état  $j$ . Une telle chaîne de Markov est aussi appelée marche aléatoire, car elle est homogène et finie.

Soit  $\gamma = (i_0, i_1, \dots, i_k, n + 1)$  une trajectoire qui commence à l'état initial  $i_0 < n + 1$  et passe avec succès par la séquence d'états  $(i_1, \dots, i_k)$ , pour finalement passer à l'état absorbant  $i_{k+1} = n + 1$ . Considérons un vecteur  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  où  $\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  est la probabilité qu'une trajectoire commence à l'état  $i$ , c'est-à-dire

$$P(i_0 = i) = \alpha_i, \quad \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, n, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$$

La probabilité de suivre la trajectoire  $\gamma$  est  $P(\gamma) = \alpha_{i_0} p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{k-1} i_k} p_{i_k}$ .

Définir les estimateurs  $\theta_i$  et  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  sur l'espace de trajectoires comme suit. Pour une trajectoire  $\gamma = (i_0, i_1, \dots, i_k, n+1)$ , les valeurs de ces les estimateurs sont définis comme suite :

$$\theta_i(\gamma) = W_k(\gamma) \frac{\delta_{i_k i}}{p_{i_k}}, \quad \alpha_i \geq 0, i = 1, \dots, n, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$$

où  $W_m$ ,  $m = 0, \dots, k$  sont des variables aléatoires dont les valeurs sont :

$$W_0(\gamma) = \frac{c_{i_0}}{\alpha_{i_0}},$$

$$W_m(\gamma) = W_{m-1}(\gamma) \omega_{i_{m-1} i_m} = \frac{c_{i_0}}{\alpha_{i_0}} \omega_{i_0 i_1} \omega_{i_1 i_2} \dots \omega_{i_{m-1} i_m}, \quad m = 1, \dots, k$$

Les valeurs ci-dessus sont prises avec probabilité  $P(\gamma)$  ( $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker, c'est-à-dire  $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$  et  $0$  sinon)

On peut trouver que  $\theta_i$  et  $\delta_i$  sont des estimateurs sans biais de  $x_i$ , c'est-à-dire

$$E(\theta_i) = E(\delta_i) = x_i, \quad i = 1, \dots, n$$

L'algorithme de Monte Carlo pour estimer la solution du système (3.2) est le suivant :

**Algorithme :** Algorithme de Monte Carlo pour estimer la solution  $x$  :

- i. Données d'entrée : la matrice  $T$  et  $P$ , les vecteurs  $c$  et  $\alpha$ , l'entier  $n$ .
- ii. Générer  $N$  trajectoires  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ .
- iii. Calculez l'estimation de Monte Carlo de la solutions :

$$\hat{x} = \left[ \frac{\theta_1(\gamma_1) + \dots + \theta_1(\gamma_n)}{N}, \dots, \frac{\theta_1(\gamma_1) + \dots + \theta_1(\gamma_n)}{N} \right]^t \quad (3.4)$$

ou, l'estimation :

$$\tilde{x} = \left[ \frac{\lambda_1(\gamma_1) + \dots + \lambda_1(\gamma_n)}{N}, \dots, \frac{\lambda_1(\gamma_1) + \dots + \lambda_1(\gamma_n)}{N} \right]^t \quad (3.5)$$

# Application de méthode de Monté Carlo pour résoudre le système $Ax=b$

## 4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons aborder une application numérique afin d'étayer les différents aspects théoriques de notre travail.

## 4.2 La résolution

Considérons un système linéaire de  $n$  équations à  $n$  inconnues

$$X_1, X_2, \dots, X_n, \text{ soit } MX = B \text{ avec } X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_N \end{pmatrix} \text{ matrice colonne des inconnues, } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_N \end{pmatrix}$$

matrice colonne de constantes  $b_i$ ,  $M$  étant la matrice  $N * N$  du système avec des coefficients donnés réels. En prenant  $M = Id - A$ , le système peut toujours se réécrire :

$$X = AX + B, A \text{ étant une matrice de dimensions } N * N \text{ de coefficients } a_{ij}.$$

Par exemple, pour  $N = 2$ , le système

$$\begin{cases} 0.9x_1 - 0.2x_2 = 0.7 \\ -0.2x_1 + 1.3x_2 = 1.1 \end{cases}$$

équivalent au système :

$$\begin{cases} x_1 = 0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.7 \\ x_2 = 0.2x_1 - 0.3x_2 + 1.1 \end{cases}$$

ou

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & -0.3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 1.1 \end{pmatrix}$$

C'est sous la forme  $X = AX + B$  que nous écrirons dorénavant le système, avec une contrainte : pour que la méthode de Monte Carlo fonctionne, on doit prendre la norme de  $A$  inférieure à 1 ( $\|A\| < 1$ ) (tel que  $\|A\| = \sum_{i=1}^n |A_{ij}|$ ), ce qui signifie que la somme des coefficients en valeur

absolue sur chaque ligne de A doit être inférieure à 1. A partir de là, on construit une matrice P de dimensions  $(N + 1) * (N + 1)$  avec comme coefficients :

\*  $P_{ij} = v_{ij}a_{ij}$  (pour i et j de 1 à N) où  $v_{ij} = \pm 1$  selon que  $a_{ij}$  est positif ou négatif, de façon que tous les  $p_{ij}$  soient positifs (ils sont aussi inférieurs à 1)

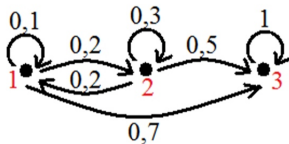
\*  $p_{iN+1} = 1 - \sum_{j=1}^n P_{ij}$  pour i de 1 à N, et sur la dernière ligne N+1, des 0 sauf un 1 en dernier.

Dans l'exemple de la matrice A précédente, cela donne :

$$P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec  $v_{11} = v_{12} = v_{21} = 1$  et  $v_{22} = -1$

Ainsi construite, la matrice P va pouvoir être vue comme une matrice de probabilités. Pour cela considérons une particule circulant sur un graphe orienté. Celui-ci possède N+1 nœuds numérotés de 1 à N+1, et tous reliés entre eux deux à deux par des flèches, sauf le nœud N+1 qui n'est relié qu'à lui-même (il constitue une frontière absorbante, la particule qui y arrive y reste). La probabilité de passer du nœud i au nœud j est justement le coefficient  $P_{ij}$  de la matrice P. Comme la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1, cela signifie que le passage du nœud i à n'importe quel nœud est un événement sûr, de probabilité 1. La dernière ligne de la matrice P indique que le nœud N+1 constitue bien une fin de trajectoire pour la particule.



Prenons un exemple de trajectoire avec la matrice P ( $N = 2$ ) précédente : 1223. Cela signifie que la particule part du nœud 1 pour aller vers le nœud 2, puis elle revient en 2, et enfin elle va vers 3, et c'est fini. La probabilité d'avoir cette trajectoire est  $P_{12}P_{22}P_{23} = 0.2 * 0.3 * 0.5 = 0.03$ .

Prenons une trajectoire T démarrante au nœud i (i de 1 à N) et se terminant au nœud N + 1, et associons-lui une variable aléatoire  $X(T)$ . Si la trajectoire s'écrit sous forme de succession des nœuds i j k l m, où i est le nœud de départ, et m le dernier nœud absorbant N + 1, on prend :

$$X(T) = b_i + v_{ij}b_j + v_{ij}v_{jk}b_k + v_{ij}v_{jk}v_{kl}b_l$$

où les coefficients du type b sont ceux du système linéaire initial. La probabilité associée à  $X(T)$  est  $P_{ij}P_{jk}P_{kl}P_{lm}$ . Cette définition de  $X(T)$  se généralise à toute trajectoire T, quelle que soit sa longueur.

Plus précisément, appelons  $X(T_i)$ , ou  $X_i$ , la variable aléatoire associée à une trajectoire  $T_i^1$  quand celle-ci part du nœud i (i de 1 à N). On a alors la propriété suivante :



**Les valeurs moyennes (espérances) des  $X_i$  sont égales aux solutions  $x_i$  du système initial :  $E(X_i) = x_i$ .**

On admettra ici que l'existence de ces espérances est assurée dès que la norme de la matrice  $A$  est inférieure à 1, comme on l'a supposé au début.

### Démonstration de la propriété

Pour simplifier l'écriture, nous allons supposer que  $N = 2$ , et prendre  $i = 1$ , ce qui signifie que la particule part du nœud 1.

Par définition,  $E(X_i) = \sum_{T_i} X(T_i)P(T_i)$ , la sommation étant étendue à toutes les trajectoires  $T_1$  démarrant au nœud 1. Après son départ en 1, la particule va vers le nœud suivant qui peut être 1, 2 ou 3. Maintenant regroupons les trajectoires en trois catégories  $T_{11}, T_{12}, T_{13}$ , selon le numéro du nœud qui suit le nœud de départ. S'il y a une infinité de chemins  $T_{11}$  et  $T_{12}$ , il n'y a qu'un chemin  $T_{13}$ , On a alors :

$$E(X_1) = \sum_{T_{11}} X(T_{11})P(T_{11}) + \sum_{T_{12}} X(T_{12})P(T_{12}) + X(T_{13}) + P(T_{13})$$

Pour un chemin  $T_{11}$ , par exemple 11213, on a :

$$\begin{aligned} X(T_{11}) &= b_1 + v_{11}b_1 + v_{11}v_{12}b_2 + v_{11}v_{12}v_{21}b_1 = b_1 + v_{11}(b_1 + v_{12}b_2 + v_{12}v_{21}b_1) \\ &= b_1 + v_{11}X(T_1) \end{aligned}$$

où  $T_1$  est le reste de la trajectoire  $T_{11}$  à partir du deuxième nœud, avec  $P(T_{11}) = P_{11}P(T_1)$ . Ainsi :

$$\begin{aligned} E(X_1) &= \sum_{T_1} (b_1 + v_{11}X(T_1))P_{11}P(T_1) + \sum_{T_2} (b_1 + v_{12}X(T_2))P_{12}P(T_2) + b_1P_{13} \\ &= \sum_{T_1} v_{11}P_{11}X(T_1)P(T_1) + \sum_{T_2} v_{12}P_{12}X(T_2)P(T_2) + b_1(\sum_{T_1} P_{11}P(T_1) + \sum_{T_2} P_{12}P(T_2) + P_{13}) \\ &= v_{11}P_{11} \sum_{T_1} X(T_1)p(T_1) + v_{12}P_{12} \sum_{T_2} X(T_2)p(T_2) + b_1(p_{11} \sum_{T_1} p(T_1) + p_{12} \sum_{T_2} p(T_2) + p_{13}) \end{aligned}$$

Mais

$$\sum_{T_1} X(T_1)p(T_1) = E(X_1), \quad \sum_{T_2} X(T_2)p(T_2) = E(X_2)$$

et

$$\sum_{T_1} p(T_1) = 1, \quad \sum_{T_2} p(T_2) = 1$$

Finalement :

$$E(X_1) = v_{11}p_{11}E(X_1) + v_{12}p_{12}E(X_2) + b_1(p_{11} + p_{12} + p_{13})$$

Et comme  $p_{11} + p_{12} + p_{13} = 1$

$$E(X_1) = v_{11}p_{11}E(X_1) + v_{12}p_{12}E(X_2) + b_1$$

$$E(X_1) = a_{11}E(X_1) + a_{12}E(X_2) + b_1$$

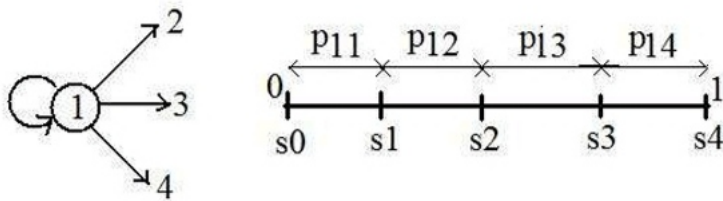
ce qui prouve que les espérances  $E(X_1)$  et  $E(X_2)$  vérifient la première équation du système initial, et on ferait de même pour les autres équations. On vient de trouver la solution du système, à savoir  $E(X_1)$ ,  $E(X_2)$ .

### 4.3 Traitement expérimental

#### Conditions initiales, avec la fonction `init()`

On commence par se donner la matrice  $P$  de probabilités, en prenant les  $p_{ij}$  au hasard, pour  $i$  et  $j$  de 1 à  $N$ , mais dans les limites d'une somme inférieure à 1 sur chaque ligne, puis en complétant chaque ligne par la probabilité complémentaire  $p_i N + 1$ . Remarquons que la dernière ligne  $N+1$  n'est pas utile. Ensuite, on prend au hasard les  $v_{ij}$  ( $i$  et  $j$  de 1 à  $N$ ) égaux à  $\pm 1$ , ce qui permet d'obtenir la matrice  $A$  du système que l'on veut résoudre. Enfin, on se donne les  $b_i$  ( $i$  de 1 à  $N$ ) au hasard. On a alors toutes les données correspondant au système à résoudre.

Il reste à préparer le mouvement aléatoire de la particule. On sait qu'à partir de chaque  $n$  (de 1 à  $N$ ) il y a des jonctions vers les nœuds de 1 à  $N+1$ , chacune avec sa propre probabilité  $p_{ij}$  (de  $i$  vers  $j$ ). Pour chaque nœud  $i$ , on prend l'intervalle  $[0,1]$  et on le découpe en intervalles successifs de longueur  $p_{ij}$  avec  $j$  de 1 à  $N+1$ . Les graduations obtenues sont appelées seuil  $[i][j]$  avec  $j$  allant de 0 à  $N+1$ .



Sur le dessin ci-joint, où  $N = 3$ , on a pris l'exemple du nœud 1, avec le découpage de l'intervalle  $[0, 1]$  et ses graduations de  $s_0$  à  $s_4$  (il s'agit des seuils).

Pourquoi fait-on cela ? Pour pouvoir obtenir les trajectoires aléatoires de la particule. Il suffira de tirer un nombre au hasard entre 0 et 1, et de déterminer dans quel intervalle il se trouve. Par exemple, s'il se trouve dans l'intervalle  $[s_2, s_3]$  pour le nœud 1, la particule ira du nœud 1 vers le nœud 3.

```

void init(void) /* toutes les variables ont été déclarées en global */
{ srand(time(NULL));
  for(i=1;i<=N;i++) /* la matrice P */
  { do
    { somme=0.;
      for(j=1;j<=N;j++)
        { p[i][j]=(float)rand()/((float)RAND_MAX+1.); somme+=p[i][j]; }
      }
    while (somme>0.9);
    p[i][N+1]=1.-somme;
  }
  /* la matrice A */
  for(i=1;i<=N;i++) for(j=1;j<=N;j++) v[i][j]=2*(rand()%2)-1;
  for(i=1;i<=N;i++) for(j=1;j<=N;j++) a[i][j]=v[i][j]*p[i][j];
  /* les b_i */
  for(i=1;i<=N;i++) b[i]=(rand()%10)*(2*(rand()%2)-1);
  afficher

  for(i=1;i<=N;i++) /* calcul des seuils de probabilité*/
  { cumul=0.; seuil[i][0]=0.;
    for(j=1;j<=N+1;j++) { cumul+=p[i][j]; seuil[i][j]=cumul; }
  }
}

```

### Programme principal

Maintenant, à partir de chaque nœud de 1 à N, pris à tour de rôle, on lance des trajectoires, au nombre de NBEXP. Chaque trajectoire est placée dans un tableau  $t[]$ , indexé de 0 à lastindex. Pour déterminer le passage d'un nœud au suivant sur la trajectoire, on prend un nombre au hasard  $h01$  sur  $[01[$ , et l'on cherche le numéro du seuil situé juste après lui, ce qui donnera le numéro du nœud suivant. La trajectoire se poursuit jusqu'à ce que l'on arrive au nœud final  $N + 1$ . Pour chaque trajectoire obtenue, on calcule la variable aléatoire correspondante  $X$ , puis on cumule les résultats obtenus pour les  $X$  de chaque trajectoire. Il suffira de diviser le cumul des  $X$ , noté  $\text{cumulX}$ , par le nombre des trajectoires NBEXP, pour avoir la valeur moyenne de  $X$ ,  $E(X)$ , ce qui donne, comme on l'a vu, les solutions du système d'équations. Enfin, pour tester la validité des résultats, on calcule les seconds membres de chaque équation  $(AX + B)$ , avec les solutions expérimentales trouvées, ce qui redonne dans le membre de gauche les valeurs des solutions. La comparaison des deux valeurs obtenues pour chaque solution indique le degré de précision des résultats.

```

#define N 8
#define NBEXP 5000 /* nombre de trajectoires à partir de chaque nœud */
void init(void);
float p[ N+2][N+2],v[ N+1][N+1], seuil[N+1][N+2],cumul,b[N+1];
int t[10000],lastindex ,i,j,k ,traj;;
float sum[N+1],a[N+1][N+1], h01,X,cumulv,cumulX,x[N+1],somme;

int main()
{
  init();
  for(i=1;i<=N;i++)
  { srand(time(NULL));
    cumulX=0.;
    for(traj=1;traj<=NBEXP; traj++)
      { t[0]=i; k=0;
        do
          { h01=(float)rand()/((float)RAND_MAX+1.);
            j=0; while(seuil[t[k]][j]<h01) j++;
              k++; t[k]=j;
            }
          while (t[k]!=N+1);
          lastindex=k;
          X=b[i]; cumulv=1.;
          for(j=1;j<lastindex;j++) { cumulv*=v[t[j-1]][t[j]]; X+=cumulv*b[t[j]]; }
          cumulX+=X;
        }
      x[i]=cumulX/(float)NBEXP;
    }
  /* affichage */
  for(i=1;i<=N;i++)
    { sum[i]=0; for(j=1;j<=N;j++) sum[i]+=a[i][j]*x[j]; sum[i]+=b[i]; }
  for(i=1;i<=N;i++) printf("\n%6.2f  %6.2f",x[i],sum[i]);
  getch(); return 0;
}

```

Un exemple de résultats, ici pour  $N=8$ 

La matrice de probabilités P, sans sa dernière ligne, avec ses  $N+1$  colonnes

```

0.03  0.01  0.14  0.09  0.01  0.10  0.37  0.09  0.18
0.05  0.05  0.04  0.03  0.02  0.25  0.22  0.02  0.31
0.02  0.38  0.04  0.29  0.05  0.06  0.01  0.00  0.15
0.05  0.13  0.04  0.03  0.04  0.08  0.09  0.13  0.40
0.15  0.15  0.03  0.12  0.01  0.12  0.08  0.08  0.26
0.05  0.26  0.09  0.03  0.12  0.09  0.08  0.00  0.28
0.02  0.09  0.03  0.16  0.21  0.30  0.05  0.03  0.12
0.00  0.03  0.14  0.14  0.08  0.21  0.05  0.05  0.30

```

La matrice A, avec ses  $N$  lignes et  $N$  colonne  $N+1$  les  $b_i$  (en ne gardant qu'un chiffre derrière la virgule) : L solution pour les  $N=8$  inconnues, avec les deux valeurs approchées obtenues pour

```

-0.0  -0.0  0.1  0.1  -0.0  0.1  0.4  0.1  -6.00
-0.1  -0.1  0.0  0.0  -0.0  0.3  -0.2  -0.0  2.00
0.0   0.4  -0.0  0.3  0.1  0.1  0.0  -0.0  -2.00
-0.1  0.1  -0.0  0.0  0.0  -0.1  0.1  0.1  -2.00
-0.1  0.1  -0.0  -0.1  -0.0  -0.1  0.1  0.1  -8.00
-0.1  0.3  -0.1  0.0  0.1  0.1  0.1  0.0  1.00
-0.0  0.1  0.0  -0.2  -0.2  0.3  -0.0  -0.0  0.00
0.0   0.0  -0.1  -0.1  0.1  -0.2  -0.1  0.0  3.00

```

chacune

```

-5.08  -4.99
 2.02   2.01
-1.82  -1.84
-1.19  -1.28
-6.36  -6.45
 1.56   1.49
 2.19   2.06
 2.69   2.63

```

## Conclusion

Les systèmes d'équations algébriques jouent un rôle très important dans la modélisation des différents problèmes en mathématiques et ses applications. A cet effet, plusieurs méthodes et approches notamment itératives ont été présentés dans la littérature afin de résoudre ces systèmes. Dans ce mémoire, nous avons abordé tout particulièrement la résolution de l'équation  $Ax=b$  par la méthode de Monte Carlo, cette méthode est une classe de techniques d'approximation stochastique basées sur l'utilisation de procédés aléatoires. Ainsi dans le premier chapitre, nous avons exposé les différents concepts et définitions élémentaires sur la théorie des probabilités nécessaires pour l'introduction de notre travail. Le deuxième chapitre a été consacré à la présentation de la méthode de Monte Carlo. La résolution du système linéaire a été introduite au troisième chapitre. Et afin d'étayer les différents aspects théoriques de notre travail, une application a été présentée dans le quatrième et dernier chapitre. Ce travail se termine par une conclusion générale.

# Bibliographie

- [1] Paola,Goatin,Analyse numérique,univ du Sud Toulon var, ISITV 1 année.
- [2] STUDIA UNIV ."BAUS-BONYAI",MATHEMATICA,Volume LI,nubmer1,March 2006,Mote Carlo methods for systems of linear equations.NATALIA,ROSCA
- [3] Bouabdallah,Siham,méthode de Monte Carlo théorie et application sur les risque de crédit,2018
- [4] Belkasmi ,Imene, méthode de Monte Carlo quantique par diffusion,2021.
- [5] Tchatchi,Fatima,contribution a la planficationdes puits de forage base sur l méthode de Monte Carlo,2015.