

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique



Université Akli Mohand Oulhadj de Bouira
Faculté des Sciences et des Sciences Appliquées
Département de Mathématiques



Mémoire de Master

Filière : Mathématiques

Spécialité : Recherche Opérationnelle

Thème

Résolution d'un problème de contrôle optimal
par la méthode de tir.

Présenté par :

- Ahmanache Mebarka
- Nouicer Ibtissem

Devant le jury composé de :

Président	<i>M^r</i> HAMID KARIM	MAA	U. A/M/O Bouira
Examinatrice	<i>M^m</i> OUIDJA DAYA	MAA	U. A/M/O Bouira
PROMOTEUR	<i>M^r</i> AKKOUCHE ABDERRAHMANE	MCB	U. A/M/O Bouira

2021/2022

Remerciements

Un grand Merci éxeptionnel à notre promoteur AKKOUCHE pour ses conseils prodigués , son assistance pédagogique et tout ce qu'il a mis de nécessaires à notre disposition pour mener à chèf ce mémoire de fin d'étude .

Nous tenons bien sûr à remercier les membres de Jury qu'auront cet insigne honneur d'avoir accepter à présider et écouter notre exposé.

Sans omettre , nos chérs parents aussi bien les frères que les soeurs .Que ceux ou celles qui ont contribué de prés ou de loin pour contrétiser ce travail , trouvent ici l'expression de notre gratitude et remerciements.

Merci à Tous

Dédicace

Je dédie cet humble travail à tous ceux qui me sont chères.

*A ma famille **AHMANACHE** frères et soeurs et alliés avec mention particulière :pour mon père et ma mère pour leur esprit de sacrifice.*

A ceux qui m'aiment et que j'aime aussi.

*Ma pensée va aussi à la famille **Nouicer** de mon binôme à qui je dédie ce mémoire*

Dédicace

*Je dédie ce mémoire à mon père ainsi qu'à
ma mère mes frères et soeurs et toute la
Famille **Nouicer** et à tous ceux qui m'ont
dans mon parcours universitaire
Ma pensée va aussi à la famille
AHMANACHE de mon binôme à qui je
dédie ce mémoire*

Merci à Tous

Liste des tableaux

<i>3.1. Méthode d'Euler explicite : $y'(t) = -y(t) + t + 1$, pour $y(0) = 1$.....</i>	<i>46</i>
<i>3.2. Représentation de la méthode de RK.....</i>	<i>49</i>
<i>3.3. Méthode de RK d'ordre </i>	<i>49</i>
<i>3.4. Méthode de RK d'ordre 2.....</i>	<i>50</i>
<i>3.5. Méthode de RK d'ordre 4.....</i>	<i>50</i>
<i>4.1. Condition initial et les valeurs des paramètres du modèle.....</i>	<i>65</i>

Table des figures

2.1. Contrabilité	10
3.1. Méthode d'Euler explicite.....	44
3.2. Méthode d'Euler explicite : $y'(t)=-y(t)+t+1$, pour $y(0)=1$	47
4.1. Graphe du modèle SIR sans contrôle	66
4.2. Individus susceptibles avec et sans contrôle	69
4.3. Individus infectieux avec et sans contrôle	70
4.4. Individus guéris avec et sans contrôle	70
4.5. Contrôle optimal(vaccination).....	71
4.6. Individus susceptibles sans et avec contrôle	72
4.7. Individus infectieux sans et avec contrôle	73
4.8. Individus guéris sans et avec contrôle	73
4.9. Contrôles optimaux	74

Table de notation

\forall :pour tout .
 \exists :il existe.
 $Acc(x_0, t_f)$:ensemble accessible un temps t_f depuis le point x_0
 $L^\infty :([0, T], R^m)$:ensemble des applications mesurable de $[0, T]$ dans R^m , de puissance ∞ integrable
 $C^0([t_0, t_f, R^m])$: ensemble des applications de $[0, t_f]$ dans R^m de classe C^0
max :maximum
min :minimum
sup :borne supérieure
inf :borne inférieure
lim :limite
lim sup :limite supérieure
lim inf :limite inférieure
 $\|$:valeur absolue,ou module
 \mathbb{R} :ensemble des nombres réels
Vect :espace vectoriel engendré par
rg :rang
 \rightharpoonup :flèche de convergence faible.

Table des matières

1	Résolution numérique des équations différentielles	6
1.1	Généralisation sur les équations différentielles	6
1.1.1	Définitions fondamentales	6
1.2	Types d'équations différentielles	7
1.2.1	Équation différentielle à variables séparées :	7
1.2.2	ED linéaire d'ordre1 à coefficients constants,homogènes	7
1.2.3	ED linéaire d'ordre1 à coefficients constants, avec se- cond membre	8
1.2.4	ED linéaire d'ordre2 à coefficients constants, homogènes	8
1.2.5	ED linéaire d'ordre2 à coefficients constants,avec se- cond membre :	8
1.3	Problème de Cauchy :	9
1.3.1	Préliminaires :	9
1.3.2	Conditions d'existence de solution :	12
1.3.3	Théorème de Cauchy-Lipschitz	12
1.4	Méthode d'Euler explicite	12
1.5	La méthode de Runge Kutta	17
1.5.1	Principe général de la méthode	17
1.6	Les problèmes aux limites :	21
2	Introduction au contrôle optimal :	33
2.1	Formulation générale d'un problème de contrôle optimal	33
2.1.1	Classe des commandes admissibles :	37
2.2	Différents types de problème de contrôle optimal :	38
2.2.1	Problème de Lagrange	38
2.2.2	Problème de Mayer	38
2.2.3	Problème de Mayer-Lagrange	38
2.3	Controlabilité :	38

2.3.1	Ensemble accessible	39
2.3.2	Cas des systèmes linéaires	39
2.3.3	Controlabilité des systèmes linéaires autonomes	41
2.3.4	Controlabilité des systèmes linéaires non autonomes	42
2.3.5	Contrôlabilité des systèmes non linéaires	42
2.4	condition d'existence d'une solution	43
2.4.1	Pour des systèmes généraux	44
2.4.2	Pour des systèmes affines :	45
3	Condition d'optimalité	46
3.1	Principe du minimum de Pontryagin	46
3.2	Principe de Bellman	55
3.2.1	La programmation dynamique	55
3.2.2	L'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman	57
3.3	Méthodes de résolution de problèmes de contrôle optimal	62
3.3.1	Méthodes indirectes :	62
3.3.2	Méthodes directes	67
3.3.3	les caractéristiques des méthodes directes et indirectes :	69
4	Application de la méthode de Tir pour la résolution de problèmes de contrôle optimal	70
4.1	Introduction	70
4.2	Modèle épidémique de type Susceptible-Infected-Recovered (SIR)	70
4.3	Problème de contrôle optimal	71
4.3.1	La stratégie de vaccination optimale	72

Introduction generale

La théorie du contrôle est une branche interdisciplinaire de l'ingénierie et des mathématiques.

La théorie du contrôle analyse les propriétés des systèmes commandés, c'est-à-dire les systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'un contrôle [1]. L'objectif alors est de déterminer un contrôle qui permet de transférer le système d'un état initial à un état final. Cet objectif doit être réalisé en optimisant une certaine fonction coût, appelée critère, tout en satisfaisant un certain nombre de contraintes, ce qu'on appelle problème de contrôle optimal.

Les différentes approches proposées dans la littérature pour la résolution d'un problème de contrôle optimal peuvent être scindées en deux classes. La première, dite approche directe, consiste à discrétiser le problème de contrôle optimal tel qu'il est posé et de le convertir en un problème d'optimisation statique [7, 8, 14, 16] qu'on peut résoudre par des méthodes d'optimisation déterministe ou stochastique [3, 6, 9]. La deuxième approche, dite approche indirecte ou après optimisation consiste à transformer le problème de contrôle optimal en un problème aux limites qu'on résout par les méthodes appliquées à la résolution des systèmes d'équations différentielles. Ce problème aux limites qui est une condition d'optimalité est obtenu soit en utilisant le principe de Bellman ou en utilisant le principe du minimum de Pontryagin.

Le principe de Bellman [5] fournit une condition suffisante d'optimalité donnée par une équation aux dérivées partielles, appelée équation de Hamilton-Jacobi-Bellman. Tandis que le principe du minimum de Pontryagin [13] donne une condition nécessaire d'optimalité de la loi du contrôle optimal. Cette condition nécessaire est donnée par un système d'équations différentielles appelé équations de Hamilton-Pontryagin. L'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman ou les équations de Hamilton-Pontryagin soumises aux conditions initiales/ terminales ou de transversalité du problème considéré forment un

problème aux limites.

Généralement, les problèmes de contrôle optimal sont fortement non linéaires, et l'obtention d'une solution analytique des conditions d'optimalité est quasiment impossible. Pour surmonter cette difficulté, plusieurs méthodes numériques ont été développées pour obtenir une solution approchée que se soit pour l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman ou pour les équations de Hamilton-Pontryagin. Pour l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman, on peut citer la méthode d'approximation de Galerkin [4], les méthodes de collocation [2, 10,11]. Pour la solution numérique des équations de Hamilton-Pontryagin, on trouve la méthode de tir [12], la méthode de tir multiple [15] et les méthodes de collocation indirectes.

Dans ce manuscrit pour déterminer la solution d'un problème de contrôle optimal, on utilise l'approche indirecte basée sur le principe du minimum de Pontryagin, et la méthode de tir pour la résolution du problème aux limites ainsi obtenu.

Ce manuscrit de mémoire de master est organisé de la manière suivante :

Le premier chapitre porte sur la description générale du problème de contrôle optimal, telle que la formulation générale du problème et ses différents types, les différents types de contrôle optimal, les différentes sortes du critère à optimiser, les diverses contraintes à satisfaire. La notion de contrôlabilité des systèmes linéaires et non linéaires.

Le second chapitre présente les conditions d'existence d'une solution optimale ainsi que les différents principes utilisés de la théorie du contrôle optimal pour dériver les conditions nécessaires d'optimalité et les conditions suffisantes, à savoir le principe du minimum de Pontryagin et le principe de Bellman.

Le troisième chapitre est scindé en deux parties. La première partie est dédiée à la description de différentes méthodes numériques utilisées pour approcher la solution du problème de Cauchy et d'autres utilisées pour approcher la solution de problèmes aux limites. La deuxième partie est consacrée pour expliquer les diverses méthodes utilisées pour résoudre un problème de contrôle optimal, à savoir les méthodes directes et les méthodes indirectes.

Chapitre 1

Résolution numérique des équations différentielles

Introduction :

Il existe plusieurs méthodes pour la résolution des équations différentielles : les méthodes analytiques et les méthodes numériques.

La résolution numérique des équations différentielles est probablement le domaine de l'analyse numérique où les applications sont les plus nombreuses. Parmi leurs avantages, les méthodes numériques permettent d'étudier les problèmes complexes pour lesquels on ne connaît pas de solution analytique, mais qui sont d'un grand intérêt pratique. Parmi ces méthodes on citera : La méthode d'Euler, la méthode de Runge Kutta, La méthode de tir (problème aux limites).

1.1 Généralisation sur les équations différentielles

1.1.1 Définitions fondamentales

Définition 1.1.1. Une équation différentielle, en mathématique, est une relation entre une ou plusieurs fonctions inconnues et leurs dérivées. L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de différenciation auquel une des fonctions inconnues a été soumise.

Définition 1.1.2. Soit $X = \varphi(t)$ une fonction réelle d'une variable réelle définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Supposons qu'elle soit dérivable jusqu'à l'ordre n au moins et que, en tout point t de I , il existe entre x et ses n

premières dérivées une relation de la forme :

$$\phi\left(t, x, \frac{\partial x}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^n x}{\partial t^n}\right) \quad (1.1)$$

Cette équation, dans laquelle la fonction $x = \varphi(t)$ est considérée comme indéterminée est appelée "équation différentielle d'ordre n ".

Définition 1.1.3. Toute fonction $x = \varphi(t)$, $t \in I$ qui vérifie l'équation (1.1) en tout point de l'intervalle I est appelée "solution" ou "intégrale" de cette équation.

1.2 Types d'équations différentielles

1.2.1 Équation différentielle à variables séparées :

Une équation différentielle est dite à variables séparées si elle peut s'écrire sous la forme :

$$\dot{x} = g(x)f(t)$$

Pour la résoudre, on intègre les deux membres séparément, sans oublier les constantes d'intégration.

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = g(x)f(t) \Rightarrow \frac{dx}{g(x)} = f(t)dt$$

Par intégration, on obtient :

$$\int \frac{dx}{g(x)} = \int f(t)dt$$

1.2.2 ED linéaire d'ordre 1 à coefficients constants, homogènes

Forme de l'équation :

Ce sont des équations différentielles du type :

$$ay' + by = 0$$

où a et b sont des réels.

Exemple 1.2.1. L'équation $2y' + 4y = 0$, est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants, homogène. Les coefficients sont 2 et 4.

1.2.3 ED linéaire d'ordre 1 à coefficients constants, avec second membre

Forme de l'équation :

Il s'agit d'équations linéaires de type :

$$ay' + by = g(t)$$

où a, b sont des réels et g est une fonction de la variable réelle t , parfois définie seulement sur certains intervalles.

Exemple 1.2.2. L'équation :

$$6y' + 8y = \tan t$$

est linéaire d'ordre 1 à coefficients constants, avec second membre. Les coefficients sont 6 et 8 et $g(t) = \tan t, t \in R$.

1.2.4 ED linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, homogènes

Forme de l'équation :

Ce sont les équations du type :

$$ay'' + by' + cy = 0$$

où a, b, c sont des réels. On suppose que $a \neq 0$, sinon l'équation est en fait de degré 1.

Exemple 1.2.3. L'équation $3y'' + 2y' + 6y = 0$, est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, homogènes. Les coefficients sont 3, 2 et 6.

1.2.5 ED linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, avec second membre :

Forme de l'équation :

Le cas général est celui d'une équation :

$$ay'' + by' + cy = g(t)$$

où a, b et c sont des réels, et g est une fonction de la variable réelle t , définie sur une partie de R .

Exemple 1.2.4. $y'' + 2y' + 12y = t \exp t$, est linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, avec second membre. Les coefficients sont 1 et 2 et 12 et $g(t) = te^t; t \in R$.

1.3 Problème de Cauchy :

1.3.1 Préliminaires :

Cadre général :

Soit I un intervalle ouvert, d'intérieur non vide, et $t_0 \in I$. Soit D un sous ensemble de R^n . On considère une application

$$f : I \times D \longrightarrow D$$

et un point $y_0 \in D$.

Définition 1.3.1. On appelle problème de Cauchy la recherche d'un intervalle J tel que $t_0 \in J \subset I$ et d'une application $y : J \longrightarrow D$ telle que y soit dérivable et satisfait pour tout $t \in J$,

$$\begin{cases} y' = f(t, y(t)); \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

Définition 1.3.2. (solution locale)

Le couple (J, y) est appelé solution locale si $t_0 \in J \subset I$, $y \in C^1(J)$, J un voisinage de t_0 dans I , et (1.1) est satisfaite pour tout $t \in J$

Solutions maximales

Nous introduisons d'abord le concept de prolongement d'une solution. L'expression solution maximale est alors entendue implicitement au sens de la relation d'ordre fournie par le prolongement des solutions.

Définition 1.3.3. Soit $y : J \rightarrow R$, $\tilde{y} : \tilde{J} \rightarrow R$, solutions de (1.1). On dit que \tilde{y} est un prolongement de y si $\tilde{J} \supset J$ et $\tilde{y}|_J = y$.

Définition 1.3.4. On dit qu'une solution $y : J \rightarrow R$ est maximale si y n'a pas de prolongement $\tilde{y} : \tilde{J} \rightarrow R$ avec $\tilde{J} \supsetneq J$.

Solution globale

Définition 1.3.5. Une solution globale est une solution définie sur l'intervalle I tout entier.

Attention : toute solution globale est maximale, mais la réciproque est fautive.

Exemple 1.3.1. Soit $y'(t) = y^2$ (edo) sur $G = R \times R$. Cherchons la solution $t \rightarrow y(t)$.

- On a d'une part la solution $y(t) = 0$.
- Si y ne s'annule pas, (edo) s'écrit : $\frac{y'(t)}{y^2(t)} = 1$, d'où par intégration :

$$-\frac{1}{y(t)} = t + C, y(t) = -\frac{1}{t+C}.$$

cette formule définit en fait deux solutions, définies respectivement sur $] -\infty, -C]$ et $] -C, \infty[$. Ces solutions sont maximales mais non globales. Dans cet exemple $y(t) = 0$ est la seule solution globale de (edo).

Exemple 1.3.2. 1) Le problème :

$$\begin{cases} y'(t) = -2ty^2(t), \\ y(0) = 1, \\ I = R \end{cases}$$

admet une unique solution globale $(R, \frac{1}{1+t^2})$.

2) Le problème :

$$\begin{cases} y'(t) = 2ty^2(t), \\ y(0) = 1, \\ I = \mathbb{R} \end{cases}$$

admet une solution maximal $(] - 1, 1[, \frac{1}{1-t^2})$.

3)Le problème :

$$\begin{cases} y'(t) = -y^2(t), \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

avec $I = \mathbb{R}^+$, le problème admet une solution globale $y(t) = \frac{1}{1+t}$.

avec $I = \mathbb{R}$, le problème admet une solution maximale $(] - 1, \infty[, \frac{1}{1+t})$ qui est non globale.

3)Le problème :

$$\begin{cases} y'(t) = y^2(t), \\ y(0) = 1, \\ I = \mathbb{R}, \end{cases}$$

Le problème admet une solution maximale $(]-\infty, 1[, \frac{1}{1-t})$ qui est non globale .

Régularité des solutions

Rappelons qu'une fonction de plusieurs variable est dites de classe C^k si elle admet des dérivés partielles continues jusqu'à l'ordre k .

Theoreme 1.3.1. *Si $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \supset G \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^k , toute solution de (E) $y'(t) = f(t, y(t))$ est de classe C^{k+1} .*

Définition 1.3.6. :

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\| &\leq L\|x - y\| \\ \|f(x) - f(y)\| &\leq L\|x - y\| \end{aligned}$$

On désigne par $N_\epsilon(x_0)$, une boule ouverte de rayon ϵ , i.e .,

$$N_\epsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| < \epsilon\}.$$

1.3.2 Conditions d'existence de solution :

Les conditions d'existence et d'unicité d'une solution à tel problème à valeurs initiale sont données par le théorème fondamental suivant :

Theoreme 1.3.2. (Picard - Lindelof)

Soit $G \in \mathbb{R}^{n+1}$ un domaine et soit $f : G \mapsto \mathbb{R}^n$ une fonction continue satisfaisant à la condition de Lipschitz

$$|f(x, u) - f(x, v)| \leq L|u - v| \quad (1.3)$$

Pour tout $(x, u), (x, v) \in G$. Alors pour toute paire de données initiales $(x_0, u_0) \in G$ il existe un intervalle $[x_0 - a, x_0 + a]$ avec $a > 0$ tel que le problème à valeur initiale possède une solution unique dans cet intervalle .

1.3.3 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Considérons le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' = f(t; y(t)); \\ y(t_0) = y_0, t \in [t_0, t_f] \end{cases} \quad (1.4)$$

* f est continue sur $I \times \mathbb{R}^p$

* f est lipschitzienne en y , uniformément en t : $\exists L > 0$ tq :

$$\forall t \in I, \forall y_1, y_2 \in V_{\mathbb{R}^p} \|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq \|y_1 - y_2\|.$$

Alors le problème de Cauchy possède une unique solution. Cette solution est définie sur un intervalle contenant t_0 .

1.4 Méthode d'Euler explicite

[16] La méthode d'Euler explicite est de loin la méthode la plus simple de résolution numérique d'équations différentielles ordinaires. Elle possède une belle interprétation géométrique et son emploi est facile. Toutefois, elle est relativement peu utilisée en raison de sa faible précision. On la qualifie d'explicite car elle ne nécessite pas de résolution d'équation non linéaire contrairement à la méthode d' Euler dite implicite.

Reprenons l'équation différentielle (1.4) et considérons plus attentivement la condition initiale $y(t_0) = y_0$. Le but est maintenant d'obtenir une approximation de la solution en $t = t_1 = t_0 + h$. Avant d'effectuer la première

itération, il faut déterminer dans quelle direction on doit avancer à partir du point (t_0, y_0) pour obtenir le point (t_1, y_1) , qui est une approximation du point $(t_1, y(t_1))$. Nous n'avons pas l'équation de la courbe $y(t)$, mais nous en connaissons la pente $y_0(t)$ en $t = t_0$. En effet, l'équation différentielle assure que : $y_0(t_0) = f(t_0), y(t_0) = f(t_0, y_0)$

On peut donc suivre la droite passant par (t_0, y_0) et de pente $f(t_0, y_0)$. L'équation de cette droite, notée $d_0(t)$, est : $d_0(t) = y_0 + f(t_0, y_0)(t - t_0)$ et est illustrée à la figure (1.1). En $t = t_1$ on a :

$$d_0(t_1) = y_0 + f(t_0, y_0)(t_1 - t_0) = y_0 + hf(t_0, y_0) = y_1$$

En d'autres termes, $d_0(t_1)$ est proche de la solution analytique $y(t_1)$, c'est-à-dire :

$y(t_1) \approx y_1 = d_0(t_1) = y_0 + hf(t_0, y_0)$ il est important de noter que, le plus souvent $y_1 \neq y(t_1)$.

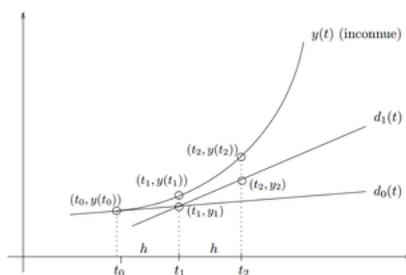


FIGURE 1.1 – Méthode d'Euler explicite

Cette inégalité n'a rien pour étonner, mais elle a des conséquences sur la suite de raisonnement.

En effet, si l'on souhaite faire une deuxième itération et obtenir une approximation de $y(t_2)$, on peut refaire l'analyse précédente à partir de point (t_1, y_1) . On remarque cependant que la pente de la solution analytique en $t = t_1$ est : $y_0(t_1) = f(t_1, y(t_1))$

On ne connaît pas exactement $y(t_1)$, mais on possède l'approximation y_1 de $y(t_1)$. On doit alors utiliser l'expression : $y_0(t_1) = f(t_1, y(t_1)) \approx f(t_1, y_1)$ et construire la droite (Figure 1.1) : $d_1(t) = y_1 + f(t_1, y_1)(t - t_1)$, qui permettra d'estimer $y(t_2)$. On constate que l'erreur commise à la première itération est réintroduite dans les calculs de la deuxième itération. On a alors :

$$y(t_2) \approx y_2 = d_1(t_2) = y_1 + hf(t_1, y_1)$$

Remarque 1.4.1. Le développement qui précède met en évidence une propriété importante de méthodes numériques de résolution d'équations différentielles. En effet, l'erreur introduite à la première itération a des répercussions sur les calculs de la deuxième itération, ce qui signifie que les erreurs se propagent d'une itération à l'autre. Il en résulte de façon générale, que l'erreur $|y(t_n) - y_n|$ augmente largement avec n

On en arrive donc à l'algorithme suivant :

Algorithme de la méthode d'Euler explicite

1. Étant donné un pas de temps h , une condition initiale (t_0, y_0) , et un nombre maximale d'itérations N .

2. pour $0 \leq n \leq N$:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

$$t_{n+1} = t_n + h$$

Écrire t_{n+1} et y_{n+1}

3. Arrêt.

Exemple 1.4.1 (17). Soit l'équation différentielle $y_0(t) = -y(t) + t + 1$, et la condition initiale $y(0) = 1$. On a donc $t_0 = 0$ et $y_0 = 1$, et l'on prend un pas de temps $h = 0.1$. De plus on a :

$$f(t, y) = -y + t + 1$$

On peut donc appliquer la méthode d'Euler explicite et obtenir successivement des approximations de $y(0, 1), y(0, 2), y(0, 3), \dots$, notées y_1, y_2, y_3, \dots , le premier pas de temps produit :

$$y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0) = 1 + 0.1f(0, 1) = 1 + 0.1(-1 + 0 + 1) = 1$$

« Le deuxième pas de temps fonctionne de manière similaire :

$$y_2 = y_1 + hf(t_1, y_1) = 1 + 0.1f(0.1, 1) = 1 + 0.1(-1 + 0.1 + 1) = 1.01$$

En parvient ensuite à :

$$y_3 = y_2 + hf(t_2, y_2) = 1.01 + 0.1f(0.2, 1.01) = 1.01 + 0.1(-1.01 + 0.2 + 1) = 1.029$$

Le tableau suivant rassemble les résultats des dix premiers pas de temps.

La solution analytique de cette équation différentielle est :

$y(t) = \exp(-t) + t$, ce qui permet de comparer les solutions numérique et analytique et de constater la croissance de l'erreur. On peut aussi comparer les résultats à la figure (1.1)

t_i	$y(t_i)$	y_u	$ y(t_i) - y_i $
0.0	1.000000	1.000000	0.000000
0.1	1.004837	1.000000	0.004837
0.2	1.018731	1.010000	0.008731
0.3	1.040818	1.029000	0.011818
0.4	1.070302	1.056100	0.014220
0.5	1.106531	1.090490	0.016041
0.6	1.148812	1.131441	0.17371
0.7	1.196585	1.178297	0.018288
0.8	1.249329	1.230467	0.018862
0.9	1.306570	1.287420	0.019150
1.0	1.367879	1.348678	0.019201

TABLE 1.1 – Méthode d'Euler explicite : $y'(t) = -y(t) + t + 1$, pour $y(0) = 1$

Les résultats précédents nous amènent à parler de précision et donc d'erreur. La figure(1.1) montre une légère différence entre la solution numérique et la solution analytique.

On peut se demander comment se comporte cette erreur en fonction de temps h . La définition qui suit aidera à apporter une réponse. Elle s'applique à la plupart des méthodes étudiées dans ce chapitre.

Définition 1.4.1. Une méthode de résolution d'équations différentielles est dite à un pas si elle est de la forme :

$$y_{n+1} = y_n + \phi h(t_n, y_n) \tag{1.5}$$

Où ϕ est une fonction quelconque. Une telle relation est appelée équation aux différences. La méthode est à un pas si, pour obtenir la solution en $t = t_{n+1}$, on doit utiliser la solution numérique au temps seulement. On désigne méthodes à pas multiples les méthodes qui exigent également la solution numérique et aux temps $t_{n-1}, t_{n-2}, t_{n-3}, \dots$

La méthode d'Euler explicite est bien sur une méthode à un pas où $\phi(t, y) = f(t, y)$. Dans cette section l'attention est principalement portée sur les méthodes à un pas. Nous pouvons maintenant définir l'ordre de convergence de ces méthodes.

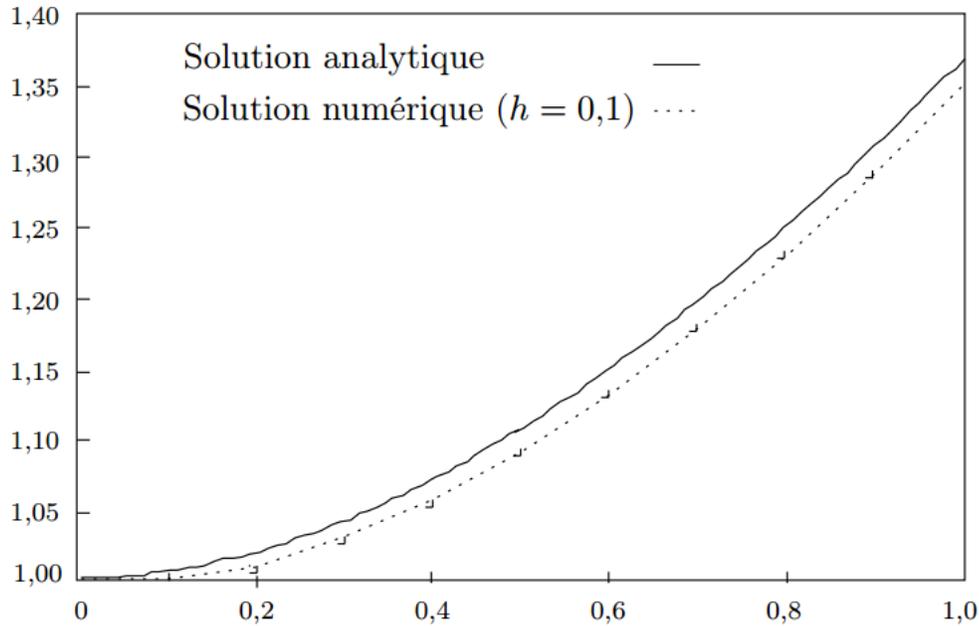


FIGURE 1.2 – Méthode d'Euler explicite : $y'(t) = -y(t) + t + 1$, pour $y(0) = 1$

Définition 1.4.2. On dira qu'un schéma à un pas converge à l'ordre p si :

$$\max_{1 \leq n \leq N} (y(t_n) - y_n) = O(h^p) \quad (1.6)$$

L'ordre de convergence d'une méthode à un pas dépend de l'erreur commise à chaque pas de temps via l'erreur de troncature locale que nous allons maintenant définir

Définition 1.4.3. L'erreur de troncature locale au point $t = t_n$ est définie par :

$$T_{n+1}(h) = (y(t_{n+1}) - y(t_n))/h - (\phi(t_n, y(t_n))) \quad (1.7)$$

L'erreur de troncature locale mesure la précision avec laquelle la solution analytique vérifie l'équation aux différentielle (1.5)

1.5 La méthode de Runge Kutta

1.5.1 Principe général de la méthode

On considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' = f(t, y(t)), \\ y(0) = y_0, t \in [t_0, t_f]. \end{cases}$$

L'idée est de calculer par récurrence les points (t_n, y_n) en utilisant des points intermédiaires $(t_{n,i}, y_{n,i})$ avec :

$$t_{n,i} = t_n + c_i h_n, 1 \leq i \leq q, c_i \in [0, 1]$$

A chacun de ces points, on associe la pente correspondante :

$$p_{n,i} = f(t_{n,i}, y_{n,i})$$

Soit y une solution exacte de l'équation, on a :

$$y(t_{n,i}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n,i}} f(t, y(t)) dt = y(t_n) + h_n \int_0^{c_i} f(t_n + u h_n, y(t_n + u h_n)) du$$

Ceci grâce au changement de variable $t = t_n + u h_n$.

$$\text{De même, } y(t_{n+1}) = y(t_n) + h_n \int_0^1 f(t_n + u h_n, y(t_n + u h_n)) du$$

On se donne alors pour chaque $i = 1, 2, \dots, q$ une méthode d'intégration approchée :

$$\int_{t_0}^{c_i} g(t) dt \approx \sum_{1 \leq j \leq i} a_{ij} g(c_j); \quad (1.8)$$

On donne également une méthode d'intégration approchée sur $[0, 1]$:

$$\int_{t_0}^1 g(t) dt \approx \sum_{1 \leq j \leq q} b_j g(c_j); \quad (1.9)$$

En appliquant ces méthodes à $g(u) = f(t_n + u h_n, y(t_n + u h_n)) du$

$$y(t_{n,i}) \approx y(t_n) + h_n \sum_{1 \leq j \leq i} a_{ij} f(t_{n,j}, y(t_{n,j})),$$

$$y(t_{n+1}) \approx y(t_n) + h_n \sum_{1 \leq j \leq q} b_j f(t_{n,j}, y(t_{n,j})),$$

La méthode de Runge-Kutta correspondante est définie par l'algorithme :

$$\begin{cases} t_{n,i} = t_n + c_i h_n; \\ y_{n,i} = y_n + h_n \sum a_{ij} p_{n,j}, 1 \leq i \leq q; \\ p_{n,i} = f(t_{n,i}, y_{n,i}); \end{cases}$$

(M_1)	C_1	0	\dots	0
(M_1)	C_1	a_{21}	\dots	0
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
$(M - q)$	C_q	a_{q1}	\dots	0
(M)	\cdot	b_1	\dots	b_q

TABLE 1.2 – Représentation de la méthode de RK

0	0
	1

TABLE 1.3 – Méthode de RK

$$\begin{cases} t_{n+1} = t_n + h_n; \\ y_{n+1} = y_n + \sum_{1 \leq j \leq q} b_j p_{n,j} \end{cases}$$

On la représente traditionnellement par le tableau (1.2) :
Où les méthodes d'intégration approchées correspondent aux lignes. On pose par convention

$$a_{ij} = 0 \text{ pour } j \geq i.$$

Exemple 1.5.1. Pour $q=1$, le seul choix possible est (voir le tableau (1.2)) :
On a ici : $c_1 = 0$; $a_{11} = 0$; $b_1 = 1$. L'algorithme est donné par :

$$\begin{cases} p_{n,1} = f(t_n, y_n) \\ t_{n+1} = t_n + h_n; \\ y_{n+1} = y_n + h_n p_{n,1} \end{cases} \quad (1.10)$$

Il s'agit de la méthode d'Euler

Exemple 1.5.2. Pour $q=2$; On considère les tableaux de la forme (voir tableau 1.4) :

L'algorithme s'écrit ici :

0	0	0
a	a	0
	$1 - \frac{1}{2a}$	$\frac{1}{2a}$

TABLE 1.4 – Méthode de RK d'ordre 2

0	0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0
1	0	0	1	0
	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{2}$

TABLE 1.5 – Méthode de RK d'ordre 4

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{n,1} = f(t_n, y_n) \\ t_{n,2} = t_n + \alpha h_n, \\ y_{n,2} = y_n + \alpha h_n p_{n,1}, \\ p_{n,2} = f(t_{n,2}, y_{n,2}), \\ t_{n+1} = t_n + h_n, \\ y_{n+1} = y_n + h_n \left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right) p_{n,1} + \frac{1}{2\alpha} p_{n,2} \end{array} \right. \quad (1.11)$$

Ou encore, sous forme condensée :

$$y_{n+1} = y_n + h_n \left(\left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right) f(t_n, y_n) + \frac{1}{2\alpha} f(t_n + \alpha h_n, y_n + \alpha h_n f(t_n, y_n)) \right)$$

Exemple 1.5.3. Méthode de Runge-Kutta "classique" (q = 4) :

Il s'agit de la méthode définie par le tableau (1.5) :

L'algorithme correspondant s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{n,1} = f(t_n, y_n) \\ t_{n,2} = t_n + \frac{1}{2}h_n, \\ y_{n,2} = y_n + \frac{1}{2}h_n p_{n,1}, \\ p_{n,2} = f(t_{n,2}, y_{n,2}), \\ y_{n,3} = y_n + \frac{1}{2}h_n p_{n,2}, \\ p_{n,3} = f(t_{n,2}, y_{n,3}), \text{ noterquet}_{n,3} = t_{n,2}, \\ t_{n+1} = t_n + h_n, \text{ noterquet}_{n,4} = t + 1, y_{n,4} = y_n + h_n p_{n,3}, \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}h_n (p_{n,1} + 2p_{n,2} + 2p_{n,3} + p_{n,4}), \end{array} \right. \quad (1.12)$$

Exemple 1.5.4. Soit de nouveau l'équation différentielle :

$$y'(t) = -y(t) + t + 1; (y(0)=1)$$

il suffit maintenant d'évaluer les différentes constantes k_i . À la première itération ($h=0.1$), on a :

$$k_1 = 0.1f(0.1) = 0.1(-1 + 0 + 1) = 0$$

$$k_2 = 0.1f(0 + 0.05, 1 + 0) = 0.1(-1 + 0.05 + 1) = 0.005$$

$$k_3 = 0.1f(0 + 0.05, 1 + 0.0025) = 0.1(-1.0025 + 0.05 + 1) = 0.00475$$

$$k_4 = 0.1f(0 + 0.1, 1 + 0.00475) = 0.1(-1.00475 + 0.1 + 1) = 0.009525$$

ce qui entraîne que :

$$y_1 = 1 + \frac{1}{6}(0 + 2(0.005) + 2(0.0045) + 0.009525) = 1.0048375$$

Une deuxième itération produit :

$$k_1 = 0.1f(0.1, 1.0048375) = 0.1(-1.0048375 + 0.1 + 1) = 0.00951625$$

$$k_2 = 0.1f(0.15, 1.009595625) = 0.1(-1.009595625 + 0.15 + 1) = 0.014040438$$

$$k_3 = 0.1f(0.15, 1.011857719) = 0.1(-1.011857719 + 0.15 + 1) = 0.0138142281$$

$$k_4 = 0.1f(0.2, 1.018651728) = 0.1(-1.018651728 + 0.2 + 1) = 0.0181348272$$

ce qui entraîne que :

$$y_2 = 1.0048375 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2K_3 + k_4) = 1.0187309014$$

Le tableau qui suit compare la solution numérique et la solution exacte, et donne l'erreur absolue.

t_i	$y(t_i)$	y_i	$ y(t_i) - y_i $
0.0	1.0	1.0	0.0
0.1	1.0048374180	1.0048375000	0.819×10^{-7}
0.2	1.0187307798	1.0187309014	0.148×10^{-6}
0.3	1.0408182207	1.0408184220	0.210×10^{-6}
0.4	1.0703200460	1.0703202889	0.242×10^{-6}
0.5	1.1065306597	1.1065309344	0.274×10^{-6}
0.6	1.1488116361	1.1488119343	0.298×10^{-6}
0.7	1.1965853034	1.1965856186	0.314×10^{-6}
0.8	1.2493289641	1.2493282897	0.325×10^{-6}
0.9	1.3065696598	1.3065699912	0.331×10^{-6}
1.0	1.3678794412	1.3678797744	0.333×10^{-6}

On constate que l'erreur se situe autour de 10^{-1} , ce qui se compare avantageusement avec les erreurs obtenues à l'aide de méthodes d'ordre moins élevé. On remarque également une légère croissance de l'erreur au fil des itérations, ce qui indique encore une fois une propagation de l'erreur d'une itération à une autre

1.6 Les problèmes aux limites :

Introduction :

En analyse, un problème aux limites est constitué d'une équation différentielle donc on cherche une solution prenant de plus des valeurs imposées en des limites du domaine de résolution .

Condition d'existence d'une solution :

Le théorème suivant nous donne une condition d'existence d'une solution unique pour le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} y'' = f(t, y, y'), t \in [a, b] \\ y(a) = \alpha, y(b) = \beta \end{cases}$$

Theoreme 1.6.1. [18] *Supposons que la fonction dans le problème aux limites : $y'' = f(x(t), y, y')$ pour $a \leq t \leq b$ avec $y(a) = \alpha$ et $y(b) = \beta$ est continue sur ensemble*

$$D = \{(t, y, y') | \text{pour } a \leq t \leq b \text{ avec } -\infty < y < \infty \text{ et } -\infty < y' < \infty\}$$

et que les dérivées partielles F_y et $F_{y'}$ sont aussi continues sur D si :

- i) $F_y(t, y, y')$, pour tout $(t, y, y') \in D$
- ii) une constante M existe , $|F_{y'}(t, y, y')| \leq M$ pour tout $(t, y, y') \in D$.

alors le problème aux limites a une solution unique .

Problème aux limites linéaire :

L'équation différentielle $y'' = f(t, y, y')$ est linéaire lorsque les fonctions $p(t), q(t), r(t)$ existent avec

$$f(t, y, y') = p(t)y' + q(t)y + r(t)$$

Des problèmes de ce type suivent fréquemment et dans cette situation théorème 1 peut être simplifiée .

corollaire : supposons que le problème aux limites linéaire satisfait

$$y'' = f(t, y, y') \text{ pour } a \leq t \leq b \text{ avec } y(a) = \alpha \text{ et } y(b) = \beta$$

i) $p(t), q(t)$ et $r(t)$ sont continue sur $[a, b]$

ii) $q(t) > 0$ sur $[a, b]$

pour approximer la solution unique de ce problème linéaire ne concéderons d'abord le problème de valeur

$$y'' = p(t)y' + q(t)y + r(t) \text{ avec } a \leq t \leq b \text{ avec } y(a) = \alpha \text{ et } y'(a) = 0 \tag{1.13}$$

$$\text{et } y'' = p(t)y' + q(t)y \text{ avec } a \leq t \leq b, y(a) = 0 \text{ et } y'(a) = 1. \tag{1.14}$$

soit $y_1(t)$ la solution de (1.13) et soit $y_2(t)$ la solution (1.14)

supposons que $y_2(b) \neq 0$ (que $y_2(b)$) soit en conflit avec les hypothèse de corollaire précédent défini

$$y(t) = y_1(t) \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2'(t) \tag{1.15}$$

est $y(t)$ alors la solution de la frontière linéaire (1.9) pour le voir notez d'abord que

$$y'(t) = y_1'(t) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2'(t)$$

et

$$y''(t) = y_1''(t) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2''(t)$$

la substitution de $y_1''(t)$ et $y_2''(t)$ dans cette équation donne :

$$y'' = p(t)y_1' + q(t)y_1 + r(t) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)}(p(t)y_2' + q(t)y_2) =$$

$$p(t)\left(\frac{y_1' + \beta - y_1(b)}{y_2(b)}y_2'\right) + q(t)\left(\frac{y_1 + \beta - y_1(b)}{y_2(b)}y_2\right) + r(t) = p(t)y'(t) + q(t)y(t) + r(t)$$

en outre

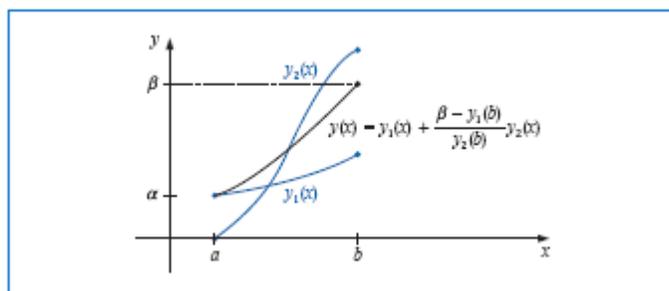
$$y(a) = y_1(a) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)}y_2(a) = \alpha + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)}.0 = \alpha$$

et

$$y(b) = y_1(b) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)}y_2(b) = y_1(b) + \beta - y_1(b) = \beta$$

Méthode de tir linéaire :

la méthode de tir pour les équations linéaires sont basées sur le remplacement de la frontière linéaire , le problème de valeur par les deux problèmes de valeurs initiales (1.13) et (1.14). De nombreuses méthodes sont disponibles approximer les solutions y_1 et y_2 , et une fois ces approximations sont disponible , la solution au problème des valeurs limites sont approchées est utiliser l'équation (1.14) graphiquement , la méthode à l'apparence montées à la figure



l'algorithme 1 utilise la technique de Runge Kutta du quatrième ordre pour trouver les approximations $y_1(t)$ et $y_2(t)$ mais d'autres techniques pour approximer les solutions à la valeur initial problème peuvent être remplacés à l'étape 4.

l'algorithme a la caractéristique supplémentaire d'obtenir des approximations pour la dérivée de la solution du problème aux limites ainsi que la solution de problème lui-même l'utilisation de l'algorithme n'est pas limitée aux problèmes pour lesquels les hypothèses du corollaire peut être vérifiée ,

cela fonctionnera pour de nombreux problèmes qui ne satisfont pas ces hypothèses .

approcher la solution du problème aux limites

$$-y'' + p(t)y' + r(t) = 0$$

pour $a \leq t \leq b$ avec $y(a) = \alpha$ et $y(b) = \beta$

Algorithme 1

étape 1 : définir

$$h = (b - a)/N;$$

$$u_{1,0} = \alpha;$$

$$u_{2,0} = 0;$$

$$v_{1,0} = 0;$$

$v_{2,0} = 1$. étape 2 : pour $i = 0, \dots, N - 1$ faire les étapes 3 et 4 .

(la méthode Runge-Kutta pour les systèmes est utilisée aux étapes 3 et 4)

étape 3 : pour $t = a + ih$.

étape 4 : pour $k_{1,1} = hu_{2,i}$;

$$k_{1,2} = h[p(t)u_{2,i} + q(t)u_{1,i} + r(t)];$$

$$k_{2,1} = h[u_{2,i} + \frac{1}{2}k_{1,2}];$$

$$k_{2,2} = h[p(t + h/2)(u_{2,i} + \frac{1}{2}k_{1,2}) + q(t + h/2)(u_{1,i} + \frac{1}{2}k_{1,1}) + r(t + h/2)];$$

$$k_{3,1} = h[u_{2,i} + \frac{1}{2}k_{2,2}];$$

$$k_{3,2} = h[p(t + h/2)(u_{2,i} + \frac{1}{2}k_{2,2}) + q(t + h/2)(u_{1,i} + \frac{1}{2}k_{2,1}) + r(t + h/2)];$$

$$k_{4,1} = h[u_{2,i} + k_{3,2}];$$

$$k_{4,2} = h[p(t + h)(u_{2,i} + k_{3,2} + q(t + h)(u_{1,i} + k_{3,1}) + r(t + h))];$$

$$u_{1,i+1} = u_{1,i} + \frac{1}{6}[k_{1,1} + 2k_{2,1} + 2k_{3,1} + k_{4,1}];$$

$$u_{2,i+1} = u_{2,i} + \frac{1}{6}[k_{1,2} + 2k_{2,2} + 2k_{3,2} + k_{4,2}];$$

$$k'_{1,1} = hv_{2,i};$$

$$k'_{1,2} = h[p(t)v_{2,i} + q(t)v_{1,i}];$$

$$k'_{2,1} = h[v_{2,i} + \frac{1}{2}k'_{1,2}];$$

$$k'_{2,2} = h[p(t + h/2)(v_{2,i} + \frac{1}{2}k'_{1,2}) + q(t + h/2)(v_{1,i} + \frac{1}{2}k'_{1,1})];$$

$$k'_{3,1} = h[v_{2,i} + \frac{1}{2}k'_{2,2}];$$

$$k'_{3,2} = h[p(t + h/2)(v_{2,i} + \frac{1}{2}k'_{2,2}) + q(t + h/2)(v_{1,i} + \frac{1}{2}k'_{2,1})];$$

$$k'_{4,1} = h[v_{2,i} + k'_{3,2}];$$

$$k'_{4,2} = h[p(t + h)(v_{2,i} + k'_{3,2} + q(t + h)(v_{1,i} + k'_{3,1}))];$$

$$v_{1,i+1} = v_{1,i} + \frac{1}{6}[k'_{1,1} + 2k'_{2,1} + 2k'_{3,1} + k'_{4,1}];$$

$$v_{2,i+1} = v_{2,i} + \frac{1}{6}[k'_{1,2} + 2k'_{2,2} + k'_{4,2}].$$

étape 5 Définir

$$w_{1,0} = \alpha;$$

$$w_{2,0} = \frac{\beta - u_{1,N}}{v_{1,N}};$$

SORTIE $(a, w_{1,0}, w_{2,0})$.

étape 6 pour $i=1, \dots, N$

Définir

$$W_1 = u_{1,i} + w_{2,0}v_{1,i};$$

$$W_2 = u_{2,i} + w_{2,0}v_{2,i};$$

$$t = a + ih;$$

SORTIE (t, W_1, W_2) . (la sortie est $x_i, w_{1,i}, w_{2,i}$.)

étape 7 arrêt .(Le processus est terminé).

La méthode de tir pour problème non linéaire :

La technique de tir pour le problème non linéaire aux limites de second ordre

$$y'' = f(t, y, y'') \quad (1.16)$$

Pour $a \leq t \leq b$ avec $y(a) = \alpha$ et $y(b) = \beta$

Est similaire à la technique linéaire , sauf que la solution d'un problème non linéaire ne peut pas être exprimé comme une combinaison linéaire des solution à deux problèmes de valeur initiale. A la place , nous approchons la solution du problème aux limites en utilisant les solutions d'un sequence de problème de valeur initiale impliquant un paramètre 1 ces problèmes on la forme :

$$y'' = f(t, y, y') \text{ pour } a \leq t \leq b , \text{ avec } y(0) = \alpha \text{ et}$$

$$y'(a) = t \quad (1.17)$$

pour ce faire , nous choisissons les paramètres de manière à garanti que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} y(b, t_k) = y(b) = \beta$$

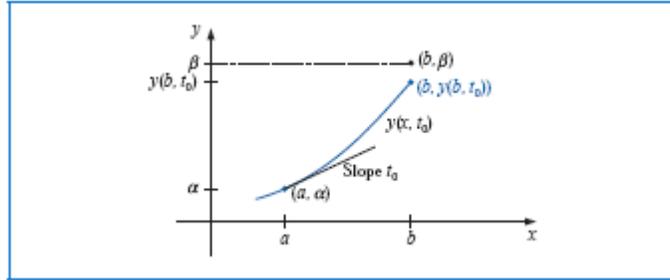
où $y(x, t)$ désigne la solution du problème de valeur initiale (1.14) avec $t = t_k$ et $y(x)$ désigne la solution du problème aux limite (1.13).

cette technique est appelée méthode de tir par analogie à la procédure de tir objets sur une cible fixe .

Nous commençons avec un paramètre à qui déterminer l'élévation initiale à laquelle l'objet est tiré depuis le point (a, a) et le long de la courbe décrit par la solution du problème de la valeur initiale :

$$y'' = f(t, y, y') , \text{ pour } a \leq t \leq b \text{ avec}$$
$$y(a) = \alpha \text{ et } y'(a) = t_0$$

Si $y(b, t_0)$ n'est pas suffisamment proche de nous corrigeons notre approximation on choisissant élévations , et ainsi de suite jusqu'à ce que $y(b, t_k)$ soit



suffisamment proche de frapper (voir figure) pour déterminer la paramètre t_k , supposons un problème aux limite (1.19), satisfait les hypothèses du théorème 1, si $y(x, t)$ désigne la solution de la valeur initiale problème(1.20), nous déterminons ensuite avec $y(b, t) - \beta = 0$

Il s'agit d'une équation non linéaire dans la variable t , des problèmes de ce type ont été, et un certain nombre de méthodes sont disponibles pour utiliser la méthode de la sécante pour résoudre le problème nous devons choisir des approximations initiales t_0 et t_1 , puis générer les termes restants de la suite en :

$$t_k = t_{k-1} - \frac{y(b, t_{k-1}) - \beta}{\frac{dy}{dt}(b, t_{k-1})}, k = 2, 3, \dots$$

Itération de Newton :

Pour utiliser la méthode de Newton plus puissante pour générer la séquence $\{t_k\}$, une seule initiale t_0

$$t_k = t_{k-1} - \frac{y(b, t_{k-1}) - \beta}{\frac{dy}{dt}(b, t_{k-1})} \quad (1.18)$$

et cela nécessite la connaissance $(\frac{dy}{dt})(b, t_{k-1})$ cela présente une difficulté car une représentation explicite pour $y(b, t)$ n'est pas connue, nous ne connaissons que les valeurs $y(b, t_0)$, $y(b, t_1), \dots, y(b, t_{k-1})$.

Supposons que nous récrivions le problème de valeur initial (1.18), en signant que la solution dépend à la fois de x et de paramètre t

$$y''(x, t) = f(t, y(x, t), y'(x, t)), \text{ pour } a \leq x \leq b, \text{ avec } y(a, t) = \alpha \text{ et } y(b, t) = \beta \quad (1.19)$$

Nous avons retenu la notation prime pour indiquer la différenciation par rapport à t , nous avons besoin pour déterminer $\frac{dy}{dt}(b, t)$ quand $t = t_{k-1}$, on prend d'abord la dérivée partielle de (1.19). En ce qui concerne, cela implique que

$$\frac{\partial y''}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial f}{\partial t}(x, y(x, t), y'(x, t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x, t), y'(x, t)) \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x, t), y'(x, t)) \frac{\partial y}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y(x, t), y'(x, t)) \frac{\partial y'}{\partial t}(x, t).$$

Puisque x et t sont indépendants, nous avons $\frac{\partial x}{\partial t} = 0$ et l'équation se simplifie en par

$$\frac{\partial y''}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(x, t), y'(x, t)) + \frac{\partial f}{\partial y'}(t, y(x, t), y'(x, t)) \frac{\partial y'}{\partial t}(x, t) \quad (1.20)$$

pour $a \leq t \leq b$ les conditions initiales donnent

$$\frac{\partial y}{\partial t}(a, t) = 0 \text{ et } \frac{\partial y'}{\partial t}(a, t) = 1.$$

Si nous simplifions la notation en utilisant $z(x, t)$ pour dénoter $(\frac{\partial y}{\partial t})(x, t)$ et supposons que l'ordre de différenciation de x et t peut être inversé (1.20) avec les conditions initiales devient le problème de la valeur initial

$$z''(x, t) = \frac{f}{y}(t, y, y')z(x, t) + \frac{f}{y'}(t, y, y')z'(x, t), \text{ pour } a \leq t \leq b \quad (1.21)$$

avec $z(a, t) = 0$ et $z'(a, t) = 1$ la méthode de Newton nécessite donc que deux problème de valeurs initiale (1.19) et (1.21), être résolu à chaque itération, puis à partir de l'équation (1.17) nous avons :

$$t_k = t_{k-1} - \frac{y(b, t_{k-1} - \beta)}{z(b, t_{k-1})} \quad (1.22)$$

Bien sur, aucun de ces problème de valeurs initiale ne sont pas résolus exactement les solution sont approximation

méthode de tir non linéaire avec la méthode de Newton :

approcher la solution du problème de valeur aux limites non linéaire $y'' = f(t, y, y')$ pour $a \leq t \leq b$, avec $y(a) = \alpha$ et $y(b) = \beta$ entrée points limites a, b ; condition aux limites α, β ; nombre de sous-intervalles $N \geq 2$; tolérance tel; nombre maximum détermination M .

Sortie approximation $w_{1,i}$ à $y(x_i)$; $w_{2,i}$ à $y'(x_i)$ pour chaque $i = 0, 1, \dots, N$ ou

un message que le nombre maximum d'itération a été dépassé .

étape 1

Définir $h = (b - a)/N$;

$k=1$;

$TK = (\beta - \alpha)/(b - a)$. (Remarque : TK peut également être saisi)

étape 2 :pendent que ($k \leq M$) effectuez les étapes 3 à 10

étape 3

Définir $w_{1,0} = \alpha$;

$w_{2,0} = TK$;

$u_1 = 0$

$u_2 = 1$

étape 4 :

pour $i=1, \dots, N$ do steps 5 and 6.

(la méthode Runge -kutta pour les systèmes est utilisé aux étapes 5 et 6)

étape 5 :

Définir $x = a + (i - 1)h$.

étape 6 :

Définir $k_{1,1} = hw_{2,i-1}$;

$k_{1,2} = h(w_{2,i-1} + \frac{1}{2}k_{1,1})$;

$k_{2,2} = hf(x + h/2, w_{1,i-1} + \frac{1}{2}k_{1,1}, w_{2,i-1} + \frac{1}{2}k_{1,2})$;

$k_{3,1} = h(w_{2,i-1} + \frac{1}{2}k_{2,2})$;

$k_{3,2} = hf(x + h/2, w_{1,i-1} + \frac{1}{2}k_{2,1}, w_{2,i-1} + \frac{1}{2}k_{2,2})$;

$k_{4,1} = h(w_{2,i-1} + k_{3,2})$;

$k_{4,2} = hf(x + h, w_{1,i-1} + k_{3,1}, w_{2,i-1} + k_{3,2})$;

$w_{1,i} = w_{1,i-1} + (k_{1,1} + 2k_{2,1} + 2k_{3,1} + k_{4,1})/6$;

$w_{2,i} = w_{2,i-1} + (k_{1,2} + 2k_{2,2} + 2k_{3,2} + k_{4,2})/6$;

$k'_{1,1} = hu_2$;

$k'_{1,2} = h[f_y(x, w_{1,i-1}, w_{2,i-1}u_1)u_1 + f_{y'}(x, w_{1,i-1}, w_{2,i-1}u_1)u_2]$;

$k'_{2,1} = h[u_2 + \frac{1}{2}k'_{1,2}]$

$k'_{2,2} = h[f_y(x+h/2, w_{1,i-1}, w_{2,i-1})(u_1 + \frac{1}{2}k'_{1,1}) + f_{y'}(x+h/2, w_{1,i-1})(u_2 + \frac{1}{2}k'_{1,2})]$;

$k'_{3,1} = h(u_2) + \frac{1}{2}K'_{2,2}$;

$k'_{3,2} = h[f_y(x+h/2, w_{1,i-1}, w_{2,i-1})(u_1 + \frac{1}{2}k'_{2,1}) + h[f_{y'}(x+h/2, w_{1,i-1}, w_{2,i-1})(u_2 + \frac{1}{2}k'_{2,2})]$;

$k'_{4,1} = h[u_2 + k'_{3,2}]$;

$k'_{4,2} = h[f_y(x+h, w_{1,i-1}, w_{2,i-1})(u_1 + k'_{3,1}) + f_{y'}(x+h, w_{1,i-1}, w_{2,i-1})(u_2 + k'_{3,2})]$;

$u_1 = u_1 + \frac{1}{6}[k'_{1,1} + 2k'_{2,1} + 2k'_{3,1} + k'_{4,1}]$;

$u_2 = u_2 + \frac{1}{6}[k'_{1,2} + 2k'_{2,2} + 2k'_{3,2} + k'_{4,2}]$.

étape 7 : si $|w_{1,N} - \beta| \leq$ puis effectuez les étape 8 et 9

étape 8 : pour $i = 0, 1, \dots, N$

posé $x = a + ih$;

SORTIE $(x, w_{1,i}, w_{2,i})$.

étape 9 : (La procédure est terminée)

arrêt

étape 10 : $TK = TK - \frac{w_{1,N} - \beta}{u_1}$;

(la méthode de Newton est utilisée pour calculer TK.)

$k = k + 1$.

étape 11 : SORTIE (nombre maximum d'itération dépassé) ;

(la procédure à échoué)

ARRÊT

La valeur $t_0 = t_k$ sélectionnée à l'étape 1 est la pente de la droite passant par (a, α) et (b, β) si le problème satisfait les hypothèse de la théorème 1 tout choix de convergent , mais un bon choix de t_0 améliorer a la convergence et la procédure même travailler pour de nombreux problèmes qui ne satisfont pas ces hypothèses .

Exemple 1.6.1. Application de la méthode du tir au problème modèle

$y'' = y + 1$

a) On commence par résoudre l'équation linéaire homogène du seconde ordre

$$y'' = y.$$

La solution est une combinaison linéaire d'exponentielles :

$$y = Ae^x + Be^{-x}.$$

$y = -1$ est une solution particulière de l'équation avec seconde membre .La solution complète de l' équation différentielle s'écrit donc

$$y = -1 + Ae^x + Be^{-1}$$

Les valeurs des constantes A et B sont imposées par les conditions aux limites :

$$\begin{cases} y(0) = A + B - 1 = 1, \\ y(1) = Ae + B/e - 1 = 2, \end{cases}$$

un système linéaire dont la solution vaut

$$A = \frac{2-3e}{1-e^2} \simeq 0,96334 ; B = e \frac{3-2e}{1-e^2} \simeq 1,036658.$$

b) On associe au problème avec conditions aux limites le problème à conditions initiales :

$$z'' = z + 1; z(0) = 1; z'(0) = \lambda$$

La solution générale de l'équation différentielle a la même forme qu'en (a) :

$$z = -1 + Ce^x + De^{-x}$$

mais elle doit maintenant vérifier les conditions initiales

$$\begin{cases} z(0) = C + D - 1 = 1. \\ z'(0) = C - D = \lambda. \end{cases}$$

On tire

$$C = \frac{\lambda+2}{2}, D = \frac{2-\lambda}{2}.$$

On impose ensuite que $z(x; \lambda)$ respecte la condition en $x=1$:

$$-1 + \frac{\lambda+2}{2}e + \frac{2-\lambda}{2}\frac{1}{e} = 2$$

C'est une équation linéaire en λ dont la solution est

$$\lambda = 2\frac{3e-e^2+1}{e^2-1}$$

En reportant cette valeur dans les expressions de C et D, on s'aperçoit que $C=A$ et $D=B$

c) L'équation différentielle reste la même, seules les conditions aux limites changent. On trouve facilement

$$u = -1 + e^x + e^{-x}, v = -1 + \frac{3}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}.$$

La fonction w est une combinaison linéaire de solution d'une équation elle-même linéaire : elle satisfait donc aussi cette équation. On sait que $u(0) = v(0) = 1$; on a donc $w(0) = u(0) = 1$. Pour que $w(1)$ vérifie la deuxième condition aux limites, il faut que

$$u(1) + \lambda[v(1) - u(1)] = -1 + e + \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2}(e - \frac{1}{e}) = 2$$

Cette équation admet la solution

$y'(0)$	$y(1)$
0.3	1.978
0.4	2.081

$$\lambda = 2^{\frac{3e-e^2+1}{e^2-1}}$$

d) La méthode d'Euler appliquée avec $h=0,3333$ donne

On peut, à partir de ces données, pratiquer une interpolation linéaire pour trouver la "bonne" valeur de $y'(0)$. On calcule $y'(0) \simeq 0.321$ ce qui conduit à $y(1) = 1.999$

Exemple 1.6.2. soit l'équation différentielle suivante :

$$y''(x) = -\frac{2}{x}y'(x) + \frac{1}{x^2}$$

avec les conditions aux limites $y(1) = 0$ et $y(2) = 0,693147$. On a dans ce cas :

$$a_2(x) = -\frac{2}{x}, a_1(x) = 0 \text{ et } a_0(x) = \frac{1}{x^2}$$

Le tableau qui suit présente la solution de cette équation différentielle. On peut démontrer facilement que la solution analytique de cette équation est $y(x) = \ln x$, ce qui permet de calculer l'erreur absolue qui figure dans la dernière colonne du tableau :

x	$y_1(x) = u_1(x)$	$y_2(x) = v_1(x)$	y(x)	Erreur
1.0	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.0000×10^{-6}
1.1	0.00440251	0.09090702	0.09530975	0.4299×10^{-6}
1.2	0.01565698	0.16666359	0.18232096	0.5997×10^{-6}
1.3	0.03159742	0.23076568	0.26236363	0.6324×10^{-6}
1.4	0.05076044	0.28571054	0.33647164	0.5924×10^{-6}
1.5	0.07213427	0.33332955	0.40546459	0.5143×10^{-6}
1.6	0.09500609	0.37499626	0.47000321	0.4173×10^{-6}
1.7	0.11886594	0.41176106	0.53062794	0.3123×10^{-6}
1.8	0.14334454	0.44444091	0.58778646	0.2057×10^{-6}
1.9	0.16817191	0.47368079	0.64185379	0.1008×10^{-6}
2.0	0.19314933	0.49999670	0.69314718	0.4400×10^{-6}

On a employé la méthode de Runge-kutta d'ordre 4 pour le calcul de $y_1(x)$ et de $y_2(x)$. On note que :

$$y_1(b) = y_1(2, 0) = 0,19314933 \text{ et } y_2(b) = y_2(2, 0) = 0,49999670$$

Ce qui permet le calcul de $y(x)$ à l'aide de l'équation

Conclusion :

La modélisation des problèmes de contrôle se fait généralement par des équations différentielles. Ceci procure aux équations différentielles un rôle moyen dans la théorie du contrôle. La résolution numérique des équations différentielles est le domaine de l'analyse numérique où les applications sont les plus nombreuses.

Chapitre 2

Introduction au contrôle optimal :

Introduction :

Ce chapitre est structuré de la manière suivante : la section 1.1 est dédiée à la description d'un modèle général du problème de contrôle optimal. Dans la section 1.2 nous allons étudier les différents types de contrôle optimal. Dans la section 1.3 nous traitons la contrôlabilité des systèmes linéaires et non linéaires, et dans la dernière section 1.4 nous abordons la notion d'existence de trajectoires optimales.

2.1 Formulation générale d'un problème de contrôle optimal

Les étapes principales pour la formulation d'un problème de contrôle optimal sont : la modélisation du système à contrôler, la spécification du critère à optimiser et les contraintes à satisfaire.

Notre discussion sera limitée à l'étude des systèmes décrits par des équations différentielles ordinaires. Ainsi, si

$$x_1, x_2, \dots, x_n(t) \tag{2.1}$$

Sont les variables caractérisant l'état du système à l'instant t , et

$$u_1, u_2(t), \dots, u_m(t) \tag{2.2}$$

Sont les variables du contrôle qui agissent sur l'évolution du processus au temps t , alors le système à contrôler peut être décrit par les n équations différentielles du premier ordre suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n, u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n, u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n, u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t) \end{aligned}$$

On définit alors :

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in R^n$$

comme le vecteur d'état du système ,et

$$u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \in R^m$$

comme le vecteur de contrôle . Le système différentiel peut s'écrire alors :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), t \in [t_0, t_f] \quad (2.3)$$

où $f : R^n \times R^m \times R \rightarrow R^n$.

Mesure de performance ou critère à optimiser :

A fin d'évaluer quantitativement la performance du système , on sélectionne une mesure de performance .Un contrôle optimal est défini comme celui qui minimise (ou maximise) la mesure de performance .Dans certains cas , l'énoncé du problème peut clairement indiquer ce qu'il faut sélectionner pour une mesure de performance , alors que dans d'autres problèmes la sélection est une question subjective.

– Par exemple , l'instruction ” transférer le système du point A au point B aussi rapidement possible” indique clairement que le temps écoulé est la mesure de performance à minimiser .

– D'autre part , l'affirmation ” maintenir la position et la vitesse du système près de zéro avec une petite dépense d'énergie” ne suggère pas une mesure de performance unique . Dans tels problème ,le concepteur peut être amener à essayer plusieurs mesures de performance avant d'en choisir celle qu'il considère comme performance optimale.

Dans ce qui suit , on supposera que la performance d'un système est évaluée

par une mesure de performance de la forme :

$$J(u(t)) = h(x(t_f, t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt \quad (2.4)$$

Cette formule comporte deux parties : $h(x(t_f, t_f))$ est le cout terminal (partie terminale), c'est une sorte de pénalité liée à la fin dévolution du système au temps final $t = t_f$. Autrement dit, cette partie exprime l'objectif à optimiser à l'instant final. La seconde partie,

$$\int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt$$

exprime les objectifs à optimiser sur l'horizon du contrôle, elle dépend de l'état et de contrôle, et aussi du temps.

$$\begin{aligned} \min_{u(t)} & h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt \\ & \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), t \in [t_0, t_f] \\ & x(t_0) = x_0 \in M_0 \subset R^n, \\ & x(t_f) = x_{t_f} \in M_1 \subset R^n, \\ & u(t) \in U \subset R^m. \end{aligned}$$

Les critères de performance les plus utilisés

Contrôle en temps-minimum

Le but est de conduire le système d'un état initial x_0 à un état final x_f en minimisant le temps. Le critère s'écrit :

$$\min t_f = \int_{t_0}^{t_f} dt \quad (2.5)$$

Poursuite

Il s'agit de maintenir l'état $x(t)$ très proche d'un état désiré $x^d(t)$ dans l'intervalle de temps $[t_0, t_f]$.

Le critère correspondant est :

$$J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} [(x^d(t) - x(t))^t Q(t)(x^d(t) - x(t)) + u^t(t) R(t) u(t)] \quad (2.6)$$

Régulation

La régulation est un cas particulier de la poursuite , dans ce cas on a $x^d(t) = 0, \forall t \in [t_0, t_f]$ et le critère est donné comme suit :

$$J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} [x(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)]dt \quad (2.7)$$

Contrôle en énergie minimale

Le contrôle en énergie minimale consiste à conduire le système d'un état initial x_0 à un état final x_f en minimisant l'effort du contrôle . Le critère utilisé se formule de la façon suivante :

$$J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} [u^T(t)R(t)u(t)]dt \quad (2.8)$$

En somme , la problématique générale du contrôle optimal est la suivante : soit M un sous ensemble de R^m .

Considérons le système de contrôle général donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t), t \in [t_0, t_f] \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases} \quad (2.9)$$

avec $x(t) \in M, u(t) \in U$, et f est une application définie sur $M \times U \times [t_0, t_f]$ à valeur dans R^n .

Soit f^0 une fonction de classe C^1 sur $M \times U \times [t_0, t_f]$, et g une fonction continue sur M .Notons par U_{ad} l'ensemble des contrôles admissibles , alors pour tout contrôle $u \in U_{ad}$, on définit le cout de la trajectoire associée $x(t)$ sur l'intervalle $[t_0, t_f]$ par :

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} f^0(x(t), u(t), t)dt + g(t_f, x(t_f)) \quad (2.10)$$

Soient M_0 et M_1 deux ensembles de M ,alors le problème de contrôle optimal est de déterminer les trajectoires $x(t)$ solution de $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$ telle que $x(t_0) \in M_0, x(t_f) \in M_1$ et minimisant le cout $J(u)$.

Dans certains problèmes de contrôle optimal des contraintes sur les variables d'état et de contrôle sont à prendre en considération .En général, on distingue deux types de contraintes : instantanées et intégrales . Notons aussi

que les conditions terminales (initiales et finales) représentent réellement des contraintes définies aux bornes de l'horizon de contrôle .Les contraintes instantanées sont données comme suit :

$$\forall t \in [t_0, t_f], c_t(x(t), u(t), t) \geq 0, c_t \in R^n \quad (2.11)$$

Les contraintes intégrales prennent la forme suivante :

$$\forall t \in [t_0, t_f], \int_{t_0}^{t_f} c_i(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \geq 0, c_i \in R^n \quad (2.12)$$

Elles sont le plus souvent liées à une limitation des ressources (par exemple un réservoir contient une quantité limitée de produit à utiliser)ou à une limitation des résultats de nos actions : le même réservoir ne peut pas être rempli au-delà de sa contenance ou il y a risque de débordement .

2.1.1 Classe des commandes admissibles :

U est l'ensemble des contrôles admissibles qui peut être borné ou de type Bang-Bang.

$$U = u(t), t \in I = [t_0, t_f] \quad (2.13)$$

Commande bornée :

Dans beaucoup de problèmes de contrôles, on peut minorer et majorer les $u_j(t)$ par des constantes. Dans la suite, nous considérons ce type de problème avec $a_j \leq u_j \leq b_j$.

Notons que l'on peut remplacer u_j par v_j on posant :

$$u_j = \frac{1}{2}(a_j + b_j) + \frac{1}{2}(a_j - b_j)v_j$$

et ainsi v_i est aussi intégrable et l'on a $-1 \leq v_j \leq 1$. Donc lorsque U est borné, il est toujours pratique de se ramener à des commandes entre -1 et 1.

Commande Bang-bang :

On suppose que U est un polyèdre (cube) $[-1, 1]^m$ dans R^m .un contrôle $u \in U$ est appelé contrôles Bang-bang si pour chaque instant t et chaque indice $i = 1, \dots, m$ on a $|u_i(t)| = 1$. En d'autres termes, une commande Bang-bang est une commande qui possède au moins un switch.

2.2 Différents types de problème de contrôle optimal :

On distingue trois formes de problèmes importante :

2.2.1 Problème de Lagrange

C'est le problème dont le critère à minimiser est donné par la fonctionnelle suivante :

$$\min_u J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt$$

c-à-d :

$$h(x(t_f), (t_f)) = 0$$

2.2.2 Problème de Mayer

Lorsque $f_0 \equiv 0$ dans l'expression de la fonctionnelle J , on parlera d'un problème de Mayer. On aura donc l'expression

$$J(u) = F(t_0, x(t_0), t_f, x(t_f))$$

$F : R \times R^n \times R \times R^n \rightarrow R$ étant une fonction réelle. Egalement, il sera supposé que $J(u) = F(t_0, x(t_0), t_f, x(t_f))$ et ses dérivées partielles par rapport à x , existent et sont continues sur $R \times R^n \times R \times R^n \rightarrow R$.

2.2.3 Problème de Mayer-Lagrange

Le problème est dit de Mayer-Lagrange si la fonctionnelle cout est donnée par

$$J(u(t)) = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt + h((x(t_f), (t_f)) = 0$$

2.3 Controlabilité :

Définition 2.3.1. Le système contrôlé $\dot{x} = f(x(t), u(t), t, x(t_0) = x_0)$ est dit contrôlable si pour tous points $x_0 \in M_0$ et $x_1 \in M_1$, il existe un contrôle $u(\cdot)$ telle que la trajectoire associée relie x_0 à x_1 en temps fini.

2.3.1 Ensemble accessible

considérons le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t), t \in [t_0, t_f] \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases} \quad (2.14)$$

Définition 2.3.2. L'ensemble des points accessibles à partir de x_0 en temps t_f est :

$$Acc(x_0, t_f) = \{x(t_f), u \in U\}$$

où $x(\cdot)$ est la solution du système (2.14) associée au contrôle u . Autrement dit, $Acc(x_0, t_f)$ est l'ensemble des extrémités des solutions du système (2.14), en temps t_f , lorsque le contrôle u varie.

Définition 2.3.3. Le système (2.14) est dit contrôlable en temps t_f si :
 $Acc(x_0, t_f) = R^n$.

Il est dit contrôlable en temps quelconque depuis x_0 si

$$R^n = \cup_{t_f \geq 0} Acc(x_0, t_f).$$

2.3.2 Cas des systèmes linéaires

Considérons le système

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), t \in I = [t_0, t_f], x(t_0) = x_0 \quad (2.15)$$

la solution du système (2.15) en temps t est

$$x(t) = R(t)x_0 + \int_{t_0}^t R(t)R^{-1}(s)B(s)u(s)ds, t \in I = [t_0, t_f], x(t_0) = x_0$$

où $R(\cdot)$ est la résolvante, solution du système :

$$\begin{cases} \dot{R}(t) &= A(t)R(t), \\ R(t_0) &= Id, \end{cases}$$

où Id est la matrice identité.

Theoreme 2.3.1. *Le système (2.15) est contrôlable en temps T si et seulement si la matrice*

$$D = \int_{t_0}^{t_f} R^{-1}(t)B(t)B(t)'R(t)^{-1'}dt$$

*est inversible . D est appelé matrice de contrôlabilité.
où B' est la transposée de B .*

Système linéaire autonome

Le système linéaire autonome est un système invariant dans le temps décrit par

$$\dot{x} = f(x, u)$$

Autrement dit le système $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$ est dit autonome lorsque les matrices A et B ne dépendent pas de t .

Dans ce cas , la matrice $R(t) = e^{tA}$.Et la solution x du système associé au contrôle u s'écrit :

$$\forall t \in I, x(t) = e^{At}(x_0 + B \int_{t_0}^{t_f} e^{-As}(u(s)ds))$$

Theoreme 2.3.2. *Le système autonome :*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), t \in I = [t_0, t_f]$$

est dit contrôlable si la matrice

$$K = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]$$



FIGURE 2.1 – Controlabilité

La notion de controlabilité à été introduite en 1960 par Kalman pour des systèmes linéaires de la forme $\dot{x} = Ax + Bu$. Pour les systèmes non linéaires, le problème mathématique de contrôlabilité est beaucoup plus compliqué. Il constitue un domaine de recherche actif.

2.3.3 Controlabilité des systèmes linéaires autonomes

Le théorème suivant nous donne une condition nécessaire et suffisante de controlabilité dans le cas où A et B ne dépendent pas de t.

Theoreme 2.3.3. *On suppose que $\Omega = R^n$ le système $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ est contrôlable en temps t_f si et seulement si la matrice :*

$C = (B, AB, \dots, A^{n-1}B)$ est de rang n

L'essentiel de la preuve est continue de lemme suivant

$$\phi : L^\infty([t_0, t_f], R^m) \longrightarrow R^n$$

$$u \longrightarrow \int_{t_0}^{t_f} e^{(t_f-t)A} Bu(t) dt$$

est surjective .

Exemple 2.3.1. Considerons le systeme dynamique lineaire autonome suivant :
où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour vérifier la controlabilité de ce système, il suffit de calculer le déterminant de la matrice de Kalman.

Par conséquent, la matrice de Kalman est donnée par :

$$K = (B, AB) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de K est égal à : $\det(K) = -1 \neq 0$, donc le $\text{rang}(K) = 2$, d'où le système est controlable.

2.3.4 Controlabilité des systèmes linéaires non autonomes

Theoreme 2.3.4. *Le système $\dot{x} = Ax(t) + Bu(t)$ est contrôlable en temps t_f si et seulement si la matrice $C(t) = \int_{t_0}^{t_f} M(s)^{-1}B(s)B(s)^tM(t)^{-1}dt$ est matrice de controlabilité et inversible.*

Remarque 2.3.1. La matrice C est appelée matrice de controlabilité elle ne dépend pas de la condition initiale x_0 mais elle dépend de temps final t_f .

2.3.5 Contrôlabilité des systèmes non linéaires

Considérons le système de contrôle non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t), t \in [t_0, t_f] \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases} \quad (2.16)$$

où $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$ sont respectivement la variable d'état et la variable de contrôle, $(x(t), u(t)) \in O$, où O est un sous-ensemble ouvert de $R^n \times R^m$.

La contrôlabilité des systèmes non linéaires est une généralisation de la contrôlabilité des systèmes de contrôle optimal linéaires. Mais, on ne dispose pas de condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité pour un système non linéaire. On a une condition suffisante de contrôlabilité locale qu'on peut obtenir par linéarisation.

Définition 2.3.4. On dit que le système (2.17) est localement contrôlable au point x_0 s'il existe un voisinage ν de x_0 tel que pour tout $x_1 \in \nu$, il existe un temps fini t_f et un contrôle admissible $u(\cdot) : [t_0, t_f] \rightarrow U$ tel que $x_1 = x(t_f, x_0, u(\cdot))$.

Définition 2.3.5. Une trajectoire du système de contrôle (2.17) est une fonction $(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) : [t_0, t_f] \rightarrow O$ tel que $t_f > 0$, $\bar{x}(t) \in C^0([t_0, t_f]; R^n)$, $\bar{u}(t) \in L^\infty([t_0, t_f]; R^m)$, \exists un ensemble compact $K \subset O$ tel que $(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) \in K$ pour presque tout $t \in [t_0, t_f]$, on ait :

$$\bar{x}(t_2) = \bar{x}(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} f(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t)dt, \forall (t_1, t_2) \subset [t_0, t_f] \quad (2.17)$$

Définissons maintenant la notion de contrôlabilité le long d'une trajectoire.

Définition 2.3.6. Soit $(\bar{x}(t), \bar{u}) : [t_0, t_f] \rightarrow O$ une trajectoire du système de contrôle $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$ est localement contrôlable le long de la trajectoire $(\bar{x}, \bar{u}(t))$ si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $(a, b) \in R^n \times R^n$ avec $|a - \bar{x}(0)| < \eta$ et $|b - \bar{x}(t_f)| < \eta$, il existe une trajectoire $(x, u) : [t_0, t_f] \rightarrow O$ tel que :

$$\begin{aligned} x(t_0) &= a, x(t_f) = b, \\ |u(t) - \bar{u}(t)| &\leq \epsilon, t \in [t_0, t_f]. \end{aligned}$$

Introduisons maintenant la notion de système de contrôle linéarisé le long d'une trajectoire .

Définition 2.3.7. Le système de contrôle linéarisé le long d'une trajectoire $(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) : [t_0, t_f] \rightarrow O$ est le système de contrôle linéaire donné par

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}(t), \bar{u}(t))x(t) + \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}(t), \bar{u}(t))u(t), t \in [t_0, t_f] \quad (2.18)$$

En utilisant les définitions (2.4)-(2.7), on introduit le résultat suivant qui donne une condition sur la contrôlabilité locale des systèmes non linéaires.

Theoreme 2.3.5. Soit $(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) : \rightarrow O$ une trajectoire du système de contrôle non linéaire $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$. Supposons que le système de contrôle linéarisé le long de la trajectoire $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$ est contrôlable, alors le système de contrôle non linéaire $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$ est localement contrôlable le long de la trajectoire $(\bar{x}(t), \bar{u})$

2.4 condition d'existence d'une solution

[1] Dans cette section, on donne des résultats généraux d'existence de contrôles optimaux pour les problème de contrôle optimal non linéaires. Ces résultats sont donnés par les théorèmes suivants.

2.4.1 Pour des systèmes généraux

Theoreme 2.4.1. *Considérons le système de contrôle*

$$\dot{x} = f(t, x(t), u(t)),$$

où f est C^1 de R^{1+n+m} dans R^n , les contrôles u sont à valeurs dans un compact $\Omega \subset R^m$, et où éventuellement on a des contraintes sur l'état

$$c_1(x) \leq 0, \dots, c_r(x) \leq 0$$

où c_1, \dots, c_r sont des fonctions continues sur R^n . Soit M_0 et M_1 deux compacts de R^n tels que M_1 est accessible depuis M_0 . Soit U l'ensemble des contrôles à valeurs dans Ω joignant M_0 à M_1 . Soient f^0 une fonction de classe C^1 sur R^{1+n+m} , et g une fonction continue sur R^n . On considère le coût

$$C(u) = \int_0^{t(u)} f^0(x(t), u(t)) dt + g(t(u), x(t(u))),$$

Où $t(u) \geq 0$ est tel que $x(t(u)) \in M_1$. On suppose que -il existe un réel positif b tel que toute trajectoire associée à un contrôle $u \in U$ est uniformément bornée par b sur $[0, t(u)]$, i.e.

$$\exists b > 0 | \forall u \in U, \forall t \in [0, t(u)], \|x_u(t)\| \leq b \quad (2.19)$$

-pour tout $(t, x) \in R^{1+n}$, l'ensemble des vecteurs vitesses augmentées

$$\tilde{V}(t, x) = \{f^0(t, x, u) | u \in \Omega\} \quad (2.20)$$

est convexe.

Alors il existe un contrôle optimal u sur $[0, t(u)]$ tel que la trajectoire associée joint M_0 à M_1 en temps $t(u)$ et en coût minimal.

Bien entendu pour un problème de contrôle optimal à temps final fixé on impose $t(u) = T$ (et en particulier on suppose que la cible M_1 est accessible depuis M_0 en temps t_f).

Remarque 2.4.1. On peut montrer un résultat plus général où l'ensemble de départ M_0 et la cible M_1 dépend du temps t , ainsi que le domaine des contraintes n sur le contrôle

2.4.2 Pour des systèmes affines :

On a pour les systèmes affines le résultat suivant.

Proposition : Considérons le système affiné dans R^n

$$\dot{x} = f_0(x) + \sum_{i=1}^m u_i u_i f_i(x), x(t_0) = x_0, x(t_f) = x_1 \quad (2.21)$$

avec le coût

$$C_{t_f}(u) = \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=0}^m u_i^2(t) dt \quad (2.22)$$

où $t_f > 0$ est fixé et la classe U des contrôles admissibles est le sous-ensemble de $L^2([t_0, t_f], R^m)$ tel que

- $\forall u \in U$ x_u est bien définie sur $[t_0, t_f]$.

- $\exists B_{t_f} | \forall u \in U \forall t \in [t_0, t_f] ||x_u(t)|| \leq B_{t_f}$

Si x_1 est accessible depuis x_0 en temps t_f , alors il existe un contrôle optimal reliant x_0 à x_1 .

Preuve : Considérons une suite de contrôles $(u_i^n)(t)_{N \in n}$ transférant x_0 en x_1 telle que leur coût tend vers la borne inférieure des coûts des contrôles reliant x_0 à x_1 Soit $x^{(n)}$ la trajectoire associée au contrôle $u^{(n)}$, i.e.

$$x^{(n)}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t_f} (f_0(x^{(n)}(t)) + \sum_{i=0}^m u_i^{(n)}(t)(f_i(x^{(n)}(t)))) dt$$

Les $u_i^{(n)}$ sont bornés dans $L^2([t_0, t_f], R^m)$, et par compacité faible,

$$\exists (n_k)_{k \in N} | u_i^{n_k} \rightharpoonup x \in H^1$$

Or $H^1 \hookrightarrow C^0$, donc $x^{(n_{k_p})}$ converge uniformément vers x sur $[t_0, t_f]$. On conclut alors aisément par passage à la limite que

$$x(t_f) = x_1.$$

Chapitre 3

Condition d'optimalité

Introduction :

Pour dériver les conditions d'optimisation d'optimalité d'un problème de contrôle optimal on utilise soit le principe de Bellman basé sur la programmation dynamique ou bien le principe du minimum de Pontryagin basé sur la théorie de calcul des variations.

Le principe de Bellman conduit à une équation aux dérivées partielles connues sous le nom équation de Hamiltonien-Jacobi-Bellman .

Le principe du minimum de Pontryagin conduit à un système d'équations différentielles d'ordre 1 , connu sous le nom : système de Hamilton-Pontryagin.

3.1 Principe du minimum de Pontryagin

Le principe du minimum de Pontryagin représente le résultat central de la théorie du contrôle optimal qui est une généralisation du calcul des variations. On considère le système contrôlé dans R^n :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad (3.1)$$

Où $f : R \times R^n \times R^m \rightarrow R^n$ est de classe C^1 et le contrôle est une applications mesurables définies sur un intervalle $[0, t_e(u)]$ de R^+ à valeurs dans $U \subseteq R^m$ (U l'ensemble des contrôles admissibles u)

On définit la fonctionnelle de coût :

$$J(t, u) = \int_{t_0}^{t_f} f_0(s, x(s), u(s)) ds + g(t, x(t))$$

$f^0 : R \times R^n \times R^m \longrightarrow R^n$ et $g : R \times R^n \longrightarrow R$ sont de classe C^1 , $x(\cdot)$ est la trajectoire solution de (3.1) associée au contrôle u .

On considère de problème de contrôle optimal suivant : déterminer une trajectoire reliant M_0 à M_1 et minimisant le cout .Le temps final peut être fixé ou non.

Si le contrôle $u \in U$ associé à la trajectoire $x(\cdot)$ est optimal sur $[t_0, t_f]$, alors il existe une application $p(\cdot) : [t_0, t_f] \longrightarrow R^n$ absolument continue appelée vecteur adjoint , et un réel $p^0 \leq 0$, tels que le couple $(p(\cdot), p^0)$ est non tous nul , et tels que , pour presque tout $t \in [t_0, t_f]$,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p_0, u(t)) \\ \dot{p}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p_0, u(t)) \end{cases} \quad (3.2)$$

Le Hamiltonien H est la fonction définie comme suit :

$$H(t, x(t), p, p_0, u) = \langle p, f(t, x, u) \rangle + p_0 f^0(t, x, u)$$

On à la condition de maximisation presque partout sur $[t_0, t_f]$

$$H(t, x(t), p(t), p_0, u(t)) = \max_{v \in \Omega} H(t, x(t), p(t), p_0, v), \quad (3.3)$$

Si de plus le temps final pour joindre la cible M_1 n'est pas fixé, on a la condition au temps final t_f .

$$\max_{v \in \Omega} H(t, x(t), p(t), p^0, v) = -p_0 \frac{\partial g}{\partial t}(t_f, x(t_f)) \quad (3.4)$$

Si de plus M_0 et M_1 (ou juste l'un des deux ensembles) sont des variétés de R^n ayant des espaces tangents en $x(t_0) \in M_0$ et $x(t_f) \in M_1$.

alors le vecteur adjoint peut être construit de manière à varier les conditions de transversalité aux deux extrémités (ou juste l'une des deux).

$$p_0 \perp T_{x(t_0)}M_0 \quad (3.5)$$

et

$$p(t_f) - p_0 \frac{\partial g}{\partial t}(t_f, x(t_f)) \perp T_{x(t_f)}M_1 \quad (3.6)$$

Remarque 3.1.1. Si le contrôle u est continu au temps t_f , la condition (3.3) peut s'écrire :

$$H(t_f, x(t_f), p(t_f), p^0, u(t_f)) = -p^0 \frac{\partial g}{\partial t}(t_f, x(t_f)) \quad (3.7)$$

Remarque 3.1.2. Si la variété M_1 s'écrit sous la forme

$$M_1 = \{x \in R^n / F_1(x) = \dots = F_p(x) = 0\},$$

où les F_i sont des fonctions de classe C^1 sur R^n (indépendantes puisque M_1 est une variété), alors la condition (3.1) se met sous la forme

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in R / p(t_f) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla F_i(x(t_f)) + p^0 \frac{\partial g}{\partial x}(t_f, x(t_f)) \quad (3.8)$$

Remarque 3.1.3. Dans les conditions du théorème, on a de plus pour presque tout $t \in [t_0, t_f]$:

$$\frac{dH}{dt}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) \quad (3.9)$$

En particulier si le système augmenté est autonome, i.e. si f et \dot{f} ne dépendent pas de t , alors H ne dépend pas de t , et on a :

$$\forall t \in [t_0, t_f], \max_{v \in \Omega} H(t, x(t), p(t), p^0, v) = cst$$

Notons que cette égalité est alors valable par tout sur $[t_0, t_f]$ (en effet cette fonction de t est lipschitzienne).

Remarque 3.1.4. La convention $p^0 \leq 0$ conduit au principe du maximum. La convention $p^0 \geq 0$ conduirait au principe du minimum, i.e. ; la condition (3.3) serait une condition de minimum.

Définition 3.1.1. Une extrémale du problème de contrôle optimal est un quadruple $(x(\cdot), p(\cdot), p^0(\cdot), u(\cdot))$ solution des équations (3.19) et (3.20). Si $p(\cdot)^0 = 0$, On dit que l'extrémale est anormale, et si $p^0(\cdot) \neq 0$ l'extrémale est dite normale.

Cas sans contraintes sur le contrôle :

Dans le cas où l'ensemble des fonctions de contrôles admissible $u(t)$ ne contient pas des fonctions discontinues i.e $u(t) : [t_0, t_f] \rightarrow R^m$ est continue Alors on retrouve le principe du minimum faible , la condition de maximum devient :

Theoreme 3.1.1. *Si le contrôle $u \in R^m$ associé à la trajectoire $x(\cdot)$ est optimal sur $[t_0, t_f]$ Alors il existe une fonction $p(\cdot) : [t_0, t_f] \rightarrow R^m$ continue et non nulle appelée vecteur adjoint , tq :*

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}; \forall t \in [t_0, t_f]$$
$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0, \forall t \in [t_0, t_f], (\text{Le principe de minimum faible})$$

Définition 3.1.2. Les conditions (3.5) et (3.6) sont appelées conditions de transversalité sur les vecteurs adjoints. La condition (3.3) est appelée condition de transversalité sur le Hamiltonien. Elles sont ici écrites de manière très générale, et dans les deux paragraphes suivants nous allons les réécrire dans des cas plus simples.

Theoreme 3.1.2. *Le problème important du temps minimal correspond à $f^0 = 1$ et $g = 0$, ou bien à $f^0 = 0$ et $g(t, x) = t$. Dans les deux cas les conditions de transversalité obtenues sont bien les mêmes.*

Remarque 3.1.5. Il existe des versions plus générales du principe du maximum, pour des dynamiques non lisses ou hybrides.

Condition de transversalité

* Conditions de transversalité sur le vecteur adjoint :

Dans ce paragraphe le temps final pour atteindre la cible peut être fixé ou non.

Réécrivons les conditions (3.5) et (3.6) dans les deux cas importants suivants.

Problème de Lagrange : Dans ce cas le coût s'écrit

$$J(t, u) = \int_{t_0}^{t_f} f^0(s, x(s), u(s)) ds$$

ie $g = 0$.les conditions de transversalité (3.9)et (3.10) sur le vecteur adjoint s'écrivent alors

$$p(0) \perp T_{x(0)}M_0, p(t_f) \perp T_{x(t_f)}M_1$$

Remarque 3.1.6. Si par exemple $M_0 = x_0$, la condition (3.5) devient vide .Si au contraire $M_0 = R^n$, i.e si le point initial n'est pas fixé , on obtient $p(0)=0$.

De même ,si $M_1 = R^n$, on obtient $p(T) = 0$.Autrement dit si le point final est libre alors le vecteur adjoint au temps final est nul.

problème de Mayer :Dans ce cas le coût s'écrit

$$J(t, u) = g(t, x(t)),$$

i.e $f^0 = 0$.Les conditions de transversalité (3.5) et (3.6)ne se simplifient pas a priori.

Mais dans le cas particulier important où $M_1 = R^n$, autrement dit le point final $x(t)$ est libre , la condition (3.6) devient

$$p(t) = p^0 \frac{\partial g}{\partial x}(t, x(t)).$$

Si de plus g ne dépend pas du temps , on a coutume d'écrire $p(t) = p^0 \Delta g(x(t))$, autrement dit le vecteur adjoint au temps final est égal , à la constante p^0 près, au gradient de g pris au point final .

* **condition de transversalité sur le Hamiltonien :**

La condition (3.4) n'est valable que si le temps final pour atteindre la cible n'est pas fixé .Dans ce paragraphe nous nous plaçons donc dans ce cas.

La seule simplification notable de cette condition est le cas où la fonction g ne dépend pas du temps t (ce qui est vrai par exemple pour un problème de Lagrange), et la condition de transversalité (3.4)sur le Hamiltonien devient alors

$$\max_{v \in \Omega} H(t, x(t), p(t), p^0, v) = 0$$

ou encore , si u est continu au temps t ,

$$H(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) = 0.$$

Autrement dit le Hamiltonien s'annule au temps final.

Remarque 3.1.7. Si le système augmenté est de plus autonome , alors on a le long d'une extrémale

$$\forall t \in [t_0, t_f], \max_{v \in \Omega} H(t_f, x(t_f), p(t_f), p^0, v) = 0$$

Généralisation des conditions de transversalité :

Pour écrire les conditions de transversalité associées à un problème de contrôle plus général, il faut écrire les relations adéquates en termes de multiplicateurs de Lagrange .

Par exemple considérons un problème de Lagrange avec des conditions aux limites mélangées , i.e on cherche une trajectoire solution de

$$\dot{x} = f(t, x(t), u(t)),$$

minimisant le coût

$$J(t, u) = \int_{t_0}^{t_f} f^0(t, x(t), u(t)) dt$$

et vérifiant les conditions aux limites

$$(x(t_0), x(t_f)) \in M,$$

Où M est une sous-variété de $R^n \times R^n$.

On peut alors montrer que dans ce cas les conditions de transversalité (3.5)et (3.6) sur le vecteur adjoint s'écrivent

$$(-p(t_0), p(t_f)) \perp T_{x(t_0), x(t_f)} M$$

Un cas important de conditions mélangées est le cas des trajectoires périodiques , i.e $x(t_0) = x(t_f)$ non fixé .Dans ce cas on a

$$M = (x, x) | x \in R^n.$$

Exemples :

Exemple 3.1.1. :

$$\begin{cases} J(T, u) = -x(2) - y(2) + \frac{1}{2} \int_0^2 u^2 dt \longrightarrow \min_u \\ \dot{x} = y \\ \dot{y} = u \\ x(0) = 1, y(0) = 2 \\ u \in U, t \in I = [0, 2] \end{cases}$$

L'Hamiltonien de ce système est :

$$H(x, u, p_x, p_y, t) = p_x y + p_y u + p^0 * \frac{1}{2} u^2$$

où p_x et p_y sont les composantes du vecteur adjoint .Elles sont solutions du système

$$\begin{cases} \dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \\ \dot{p}_y &= -\frac{\partial H}{\partial y} = -p_x \end{cases}$$

ce système est équivalent à

$$\begin{cases} \dot{p}_x(t) = cst = c_1, \\ \dot{p}_y(t) = -c_1 t + c_2 \end{cases}$$

Avec c_1 et c_2 deux réels.

Reprenons l'expression de l'Hamiltonien.

On pose $p^0 = -1$

$$H = p_x y + p_y u - \frac{1}{2} u^2$$

Conditions de transversalité :

$$\begin{cases} p_x(2) = 1, \\ p_y(2) = 1. \end{cases}$$

En remplaçant dans le système

$$\begin{cases} p_x(2) = c_1 = 1, \\ p_y(2) = -2 + c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = 3. \end{cases}$$

Donc on a

$$\begin{cases} p_x(2) = 1, \\ p_y(2) = -t + 3. \end{cases}$$

Condition de maximisation

$$\frac{\partial H}{\partial u} = p_y(t) - u(t) = 0 \Rightarrow p_y(t)$$

De là , le contrôle optimal est

$$u^*(t) = -t + 3.$$

calculons les trajectoires associées au contrôle u^*

$$\dot{y}(t) = u(t) = -t + 3 \Rightarrow y(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 3t + c_3.$$

$$\dot{x} = y(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 3t + c_3 \Rightarrow x(t) = -\frac{1}{6}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + c_3t + c_4.$$

condition initiale $x(0) = 1$, $y(0) = 2$

$$y(0) = c_3 = 2 \text{ et } x(0) = c_4 = 1$$

De là , la solution du système est

$$\begin{cases} u^*(t) &= -t + 3, \\ x^*(t) &= -\frac{1}{6}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + 2t + 1. \\ y^*(t) &= -\frac{1}{2}t^2 + 3t + 2 \end{cases}$$

Exemple 3.1.2. :

$$\begin{cases} J(T, u) = \int_0^2 (-2x(t) + 4u(t))dt \longrightarrow \min_u \\ \dot{x}(t) = x(t) + u(t), t \in [0, 2] \\ x(0) = 5, x(2) \text{ libre.} \\ u \in [0, 2], t \in I = [0, 2] \end{cases}$$

L'Hamiltonien associée au problème est :

$$H(x(t), u(t), p(t)) = -2x(t) + 4u(t) + p(t)x(t) + p(t)u(t)$$

On appliquons le principe de minimum de pontryagin , on aura

$$\begin{aligned} \min_{u \in [0, 2]} H(t, x(t), p(t), u) &= \min_{u \in [0, 2]} -2x(t) + 4u(t) + p(t)x(t) + p(t)u(t) \\ &= -2x(t) + p(t)x(t) + \min_{u \in [0, 2]} u(t)(4 + p(t)) \end{aligned}$$

Alors l'expression du contrôle optimal est

$$u(t) = \begin{cases} 2, \text{ si } (4 + p(t)) < 0 \\ 0, \text{ si } (4 + p(t)) > 0 \\ ?, \text{ si } (4 + p(t)) = 0 \end{cases}$$

Les équations d'état et d'état adjoint :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \frac{\partial H}{\partial p} = x(t) + u(t), \\ \dot{p}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x} = 2 - p(t). \end{cases}$$

$x(t_f) = x(2)$ est libre alors $p(2) = 0$ donc on résout l'équation d'état adjoint :
la solution homogène :

$$\dot{p}(t) = -p(t) \Leftrightarrow \frac{\dot{p}(t)}{p(t)} = -1 \Rightarrow \ln p(t) = -t + c \Rightarrow p(t) = ce^{-t}$$

variation de la constante

$$p(t) = c(t)e^{-t}$$

$$\dot{p}(t) = \dot{c}(t)e^{-t} - c(t)e^{-t} \dots (*)$$

on remplace $p(t)$ sur (*) :

$$\dot{c}(t)e^{-t} - c(t)e^{-t} = 2 - c(t)e^{-t}$$

nous donne

$$\dot{c}(t) = 2 \Rightarrow c(t) = 2e^t + c_1$$

$$p(t) = 2 + c_1e^{-t}$$

déterminons c_1 :

$$p(2) = 0 \Leftrightarrow 2 + c_1e^{-2} = 0 \Rightarrow c_1 = -2e^2$$

$$\text{Ainsi : } p(t) = 2 - 2e^{2-t}$$

soit :

$$\varphi(t) = p(t) + 4 = 6 - 2e^{2-t}$$

le signe de φ sur $[0, 2]$:

$$\varphi < 0 \text{ si } t \in [0, 2 - \ln 3]$$

$$\varphi > 0 \text{ si } t \in]2 - \ln 3, 2]$$

d'où

$$u^*(t) = \begin{cases} 2, & \text{si } t \in [0, 2 - \ln 3] \\ 0, & \text{si } t \in]2 - \ln 3, 2] \end{cases}$$

La fonction $\varphi(t) = p(t) + 4$ s'annule en un seul point $t = 2 - \ln 3$. ce point n'influe pas sur l'expression du contrôle optimal.

Déterminons x^* :

sur $[0, 2 - \ln 3]$:

$$\Rightarrow = \begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + 2 \\ x(0) = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^* = 7e^t - 2$$

sur $]2 - \ln 3, 2]$

$$\Rightarrow = \begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) \\ x(2 - \ln 3) = 7e^{2 - \ln 3} - 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^*(t) = (7e^2 - 6)e^{t-2}$$

3.2 Principe de Bellman

3.2.1 La programmation dynamique

Le principe de programmation dynamique pour les problèmes de contrôle optimal à été introduit par Bellman en 1952 et conduit à une équation au dérivées partielles, connue sous le nom, équation Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) qui est une condition suffisante pour l'optimalité du contrôle optimal. Le principe s'annonce comme suit :

Si un contrôle $u(t)$ est optimal entre t_0 et t_f pour la condition initial $x(t_0)$, alors il est aussi optimal entre t et t_f , $t > 0$ avec la condition initiale au temps t .

Enoncé du problème

Dans ce mémoire, nous considérons le problème suivant de la forme :

$$\begin{aligned} \min_{u(t)} J(x(t), u(t)) &= g(t_f, x(t_f)) + \int_{t_0}^{t_f} f(t, x(t), u(t)) dt \\ &\text{sujet à} \\ \dot{x}(t) &= g(t, x(t), u(t)), \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned}$$

Où $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$ sont respectivement l'état et le vecteur de contrôle. $f : R^n \times R^m \times R \rightarrow R$ et $g : R^n \times R^m \times R \rightarrow R$ est un champ de vecteur non linéaire continuellement différentiable avec tous ses arguments.

Équation du Hamilton-Jacobi Bellman

Selon le principe de la programmation dynamique, soit $V(x, t)$ fonction de valeur définie comme suit :

$$V(x, t) = \min_{u(\tau), t \leq \tau \leq t_f} \left\{ \int_t^{t_f} g(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + h(t_f, x(t_f)) \right\} \quad (3.10)$$

En subdivisant l'intervalle $[t, t_f]$, on obtient :

$$V(x, t) = \min_{u(\tau), t \leq \tau \leq t_f} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} g(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + \int_{t+\Delta t}^{t_f} g(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + h(t_f, x(t_f)) \right\} \quad (3.11)$$

Selon le principe d'optimalité nous avons :

$$V(x, t) = \min_{u(\tau), t \leq \tau \leq t_f} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} g(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + V(x(t + \Delta t), t + \Delta t) \right\} \quad (3.12)$$

où $V(x(t + \Delta t), t + \Delta t)$ est le cout minimum du processus pour l'intervalle de temps $t + \Delta t \leq t \leq t_f$ avec l'état initial $x(t + \Delta t)$.

en utilisant la série de Taylor (d'ordre 1) pour $V(x(t + \Delta t), t + \Delta t)$ à propose du point $V(x(t), t)$ on obtient :

$$V(x, t) = \min_u \left\{ \int_t^{t+\Delta t} g d\tau + \left(\frac{\partial V}{\partial t}(x(t), t) \right) + \frac{\partial V}{\partial x}(x(t), t) \right\}^T (x(t + \Delta t)) + o(\Delta t), \quad (3.13)$$

Pour Δt petit, équation (3.17) devient :

$$V(x, t) = \min_u \left\{ \int_t^{t+\Delta t} g d\tau + \left(\frac{\partial V}{\partial t}(x(t), t) \right) + \frac{\partial V}{\partial x}(x(t), t) \right\}^T (x(t + \Delta t)) \iff V(x(t), t) - V(x(t), t) - \frac{\partial V}{\partial t} + \min_u \{ g \Delta t + \frac{\partial V}{\partial x} (a(x(t), u(t), t) \Delta t + o(\Delta t)) \}$$

en divisant par Δt et en prenant la limite comme $\Delta t \rightarrow 0$ on obtient l'équation différentielle partielle non linéaire suivante appelée d'équation Hamilton-Jacobi-Bellman.

$$0 = -\frac{\partial V}{\partial t} + \min_u \{ g(x(t), u(t), t) + \frac{\partial V}{\partial x} a(x(t), u(t), t) \}$$

présentation de la fonction Hamiltonien :

$$H(x(t), u(t), \frac{\partial V}{\partial x}, t) = g(x(t), u(t), t) + \frac{\partial V}{\partial x}(a(x(t), u(t), t)) \quad (3.14)$$

La minimisation de la fonction Hamiltonien conduit à l'expression de loi de contrôle u , en fonction de $x(t)$, $\frac{\partial V}{\partial x}$ et t défini par :

$$u(t) = \Psi(x(t), \frac{\partial V}{\partial x}, t) \quad (3.15)$$

En substituant l'expression de la loi de contrôle optimale dans la fonction Hamiltonien (3.19), donnée :

$$H(x(t), u(t), t) = H(x(t), \Psi(x(t), \frac{\partial V}{\partial x}, t), t) \quad (3.16)$$

Et l'équation HJB devient :

$$-\frac{\partial v}{\partial t} = H(x(t), \frac{\partial V}{\partial x}, t), t) \quad (3.17)$$

pour trouver la condition aux limites de cette équation différentielle partielle, définissez $t = t_f$ dans la fonction de valeur (3.12) on obtient :

$$V(x(t_f), t_f) = h(x(t_f), t_f) \quad (3.18)$$

3.2.2 L'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman

Dans notre exposition initiale à la programmation dynamique, nous avons approximé des systèmes fonctionnant en continu par des systèmes discrets. Cette approche conduit à une relation de récurrence qui convient parfaitement à une solution informatique numérique. Dans cette section, nous considérerons une approche alternative qui conduit à une équation différentielle partielle non linéaire.

Le processus décrit par l'équation d'état

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (3.19)$$

doit être contrôlé pour minimiser la mesure de la performance

$$J(x, u) = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \quad (3.20)$$

Où h et g sont des fonctions spécifiées, t_0 et t_f sont fixes, et τ est une variable muette d'intégration.

$$J(x(t), t, u(\tau))_{t \leq \tau \leq t_f} = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau, \quad (3.21)$$

Où t peut être n'importe quelle valeur inférieure ou égale à t_f , et $x(t)$ peut être n'importe quelle valeur d'état admissible. Notez que la mesure de performance dépendra des valeurs numériques pour $x(t)$ et t , et de l'historique de contrôle optimal dans l'intervalle $[t, t_f]$.

Essayons maintenant de déterminer le contrôle qui minimise (3.22) pour tout $x(t)$ admissible, et pour tout $t \leq t_f$. la fonction de coût minimum est alors

$$J^*(x(t), t) = \min_{u(\tau)_{t \leq \tau \leq t_f}} \left\{ \int_t^{t_f} g(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + h(x(t_f), t_f) \right\}, \quad (3.22)$$

En subdivisant l'intervalle, on obtient

$$J^*(x(t), t) = \min_{u(\tau)_{t \leq \tau \leq t_f}} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} g d\tau + \int_{t+\Delta t}^{t_f} g d\tau + h(x(t_f), t_f) \right\}, \quad (3.23)$$

Le principe d'optimalité exige que

$$J^*(x(t), t) = \min_{u(\tau)_{t \leq \tau \leq t_f}} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} g d\tau + J^*(x(t + \Delta t), t + \Delta t) \right\}, \quad (3.24)$$

Où $J^*(x(t + \Delta t), t + \Delta t)$ est le coût minimum du processus pour l'intervalle de temps $t + \Delta \leq \tau \leq t_f$ avec la statistique "initiale" $x(t + \Delta t)$.

En supposant que les dérivées partielles secondes de J^* existent et sont bornées, nous pouvons développer $J^*(x(t + \Delta t), t + \Delta t)$ dans une série de Taylor autour du point $(x(t), t)$ pour obtenir

$$J^*(x(t), t) = \min_{u(\tau)_{t \leq \tau \leq t_f}} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} g d\tau + J^*(x(t), t) + \left[\frac{\partial J^*}{\partial t}(x(t), t) \right] \Delta t + \left[\frac{\partial J^*}{\partial t}(x(t), t) \right]^{t_f} [x(t + \Delta t) - x(t)] \right\}, + \text{termes d'ordre supérieur}$$

Maintenant pour les petits Δt

$$J^*(x(t), t) = \min_{u(t)} \{g(x(t), u(t), t)\Delta t + J^*(x(t), t) + J_t^*(x(t), t)\Delta t + J_x^{*t_f}(x(t), t)[a(x(t), u(t), t)]\Delta t + o(\Delta t)\} \quad (3.25)$$

Où $o(\Delta t)$ désigne les termes contenant $[\Delta t]^2$ et les ordres supérieurs de Δt qui résultent de l'approximation de l'intégrale et de la troncature du développement en série de Taylor .Ensuite, en supprimant les termes impliquant $J^*(x(t), t)$, et $J_t^*(x(t), t)$

$$J_x^* \equiv \frac{\partial J^*}{\partial x} = [\frac{\partial J^*}{\partial x_1} \frac{\partial J^*}{\partial x_2} \dots \frac{\partial J^*}{\partial x_n}]_{t_f} \text{ et } J_t^* \equiv \frac{\partial J^*}{\partial t}$$

A partir de la minimisation (puisque'ils ne dépendent pas de $u(t)$), on obtient

$$0 = J^*(x(t), t)\Delta t + \min_{u(t)} \{g(x(t), u(t), t)\Delta t + J_x^{*T}(x(t), t)[a(x(t), u(t), t)]\Delta t + o(\Delta t)\}$$

Diviser par Δt et prendre la limite comme $\Delta t \rightarrow 0$ donne

$$0 = J_t^*(x(t), t) + \min_{u(t)} \{g(x(t), u(t), t) + J_x^*(x(t), t)[a(x(t), u(t), t)]\}.$$

pour trouver la valeur limite de cette équation aux dérivées partielles , poser $t = t_f$; de l'équation (3.24) dont

$$J_t^*(x(t), t) = h(x(t_f), t_f) \quad (3.26)$$

Nous définissons l'hamiltonien H comme

$$H(x(t), u(t), J_x^*, t) \equiv g(x(t), u(t), t) + J_x^{*t_f}(x(t), t)[a(x(t), u(t), t)] \quad (3.27)$$

et

$$H(x(t), u^*(t), J_x^*, t, J_x^*, t) = \min_{u(t)} H(x(t), u(t), J_x^*, t) \quad (3.28)$$

Puisque le contrôle de minimisation dépendra de x , J_x^* et t . En utilisant ces définitions, nous avons obtenu l'équation de Hamilton-Jacobi

$$0 = J_t^*(x(t), t) + H(x(t), u^*(x(t), J_x^*, t), J_x^*, t) \quad (3.29)$$

Cette équation est l'analogie en temps continu de l'équation de récurrence de Bellmen .

Exemple 3.2.1. Système du premier ordre est décrit par l'équation différentielle

$$\dot{x} = x(t) + u(t) \quad (3.30)$$

$\lim_{|\frac{\Delta t}{\Delta t}| \rightarrow 0}$ tel que $\Delta t \rightarrow 0$

On cherche à trouver la loi de commande qui minimise la mesure de performance

$$J = \frac{1}{2}x^2(t_f) + \int_0^{t_f} \frac{1}{4}u^2(t)dt. \quad (3.31)$$

Le temps final t_f est spécifié, et les valeurs d'état et de contrôle admissibles ne sont contraintes par aucune frontière

Remplacer $g = \frac{1}{2}u^2(t)$ et $a = x(t) + u(t)$ par l'équation (3.27) on trouve que l'hamiltonien est(en omettant les arguments de J_x^*)

$$H(x(t), u(t), J_x^*, t) = \frac{1}{2}u^2(t) + J_x^*[x(t) + u(t)] \quad (3.32)$$

et puisque le contrôle est sans contrainte, une condition nécessaire que le contrôle optimal doit satisfaire est

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \frac{1}{2}u(t) + J_x^*(x(t), t) = 0 \quad (3.33)$$

Observe ceci

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = \frac{1}{2} > 0 \quad (3.34)$$

Ainsi , le contrôle qui satisfait l'équation (3.33) minimise H .Depuis (3.34)

$$u^*(t) = -2J_x^*(x(t), t) \quad (3.35)$$

qui, lorsqu'il est substitué dans l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman , donne

$$\begin{aligned} 0 &= J_t^* + \frac{1}{4}[-2J_x^*]^2 + [J_x^*]x(t) - 2[J_x^*]^2 \\ &= J_t^* - [J_x^*]^2 + [J_x^*]x(t) \end{aligned} \quad (3.36)$$

la valeur limite est de (3.35)

$$J^*(x(t_f), t_f) = \frac{1}{4}x^2(t_f) \quad (3.37)$$

Une façon de résoudre l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman est de deviner à partir de pour voir s'il peut être fait pour satisfaire l'équation différentielle et les conditions aux limites. Supposons une solution de la forme

$$J^*(x(t), t) = \frac{1}{2}k(t)x^2(t) \quad (3.38)$$

Où $k(t)$ représente une fonction scalaire inconnue de t qui doit être déterminée. Notez que :

$$J^*(x(t), t) = k(t)x(t) \quad (3.39)$$

Ce qui, avec l'équation (3.35) , implique que

$$u^*(t) = -2k(t)x(t) \quad (3.40)$$

Si une fonction $k(t)$ peut être trouvée telle que (3.36) et (3.37) est satisfaite , le contrôle optimal est une rétroaction linéaire de l'état - en effet , c'était la motivation pour choisir la forme (3.28)

En faisant $k(T) = 1/2$, la solution supposée correspond à la condition aux limites spécifiée par l'équation (3.37).

En remplaçant (3.39) par J_x^* et

$$J_t^*(x(t), t) = \frac{1}{2}\dot{k}(t)x^2(t)$$

En équation (3.36) donne

$$0 = \frac{1}{2}\dot{k}(t)x^2(t) - k^2(t)x^2(t) + k(t)x^2(t) \quad (3.41)$$

Puisque cette équation doit être satisfaite pour tout $x(t)$,

$$\frac{1}{2}\dot{k}(t) - k^2(t) + k(t) = 0 \quad (3.42)$$

$k(t)$ est une fonction scalaire de t ; donc , la solution peut être obtenue par séparation des variables avec le résultat

$$k(t) = \frac{\epsilon^{(t_f-t)}}{\epsilon^{(t_f-t)} + \epsilon^{-(t_f-t)}} \quad (3.43)$$

La loi de commande optimale est alors

$$u^*(t) = -2J_x^*(x(t), t) = -2k(t)x(t) \quad (3.44)$$

Notez que lorsque $t \rightarrow \infty$, la rétroaction linéaire variant dans le temps se rapproche de la rétroaction constante ($k(t) \rightarrow \infty$), et que le système contrôlé

$$\dot{x}(t) = x(t) - 2x(t) = -x(t) \quad (3.45)$$

est stable. Si ce n'était pas le cas, la mesure de la performance serait infinie

3.3 Méthodes de résolution de problèmes de contrôle optimal

Introduction :

On distingue deux types de méthodes numériques en contrôle optimal : les méthodes directes et les méthodes indirectes.

Les méthodes directes consistent à discrétiser l'état et le contrôle, et réduisent le problème à un problème d'optimisation non linéaire (programmation non linéaire, ou "non linear programming").

Les méthodes indirectes consistent à résoudre numériquement, par une méthode de tir ("shooting method"), un problème aux valeurs limites obtenu par application du principe du maximum.

Dans ce chapitre, on s'intéresse d'abord aux méthodes indirectes, puis aux méthodes directes. Dans une dernière section, on compare les méthodes, et on décrit les méthodes hybrides qui sont un mélange des deux approches.

3.3.1 Méthodes indirectes :

Méthode de tir simple :

Considérons le contrôle optimal suivant :

$$\begin{cases} \int_{t_0}^{t_f} f_0(t, x, u) dt, \\ \dot{x} = f(t, x, u), \\ x(t_0) = x_0 \in M_0, x(t_f) = x_f \in M_1, \end{cases}$$

$u \in U$ On suppose que t_f (temps final) est fixé

Le principe du maximum donne une condition nécessaire d'optimalité et affirme que toute trajectoire optimale est la projection d'une extrémale.

Si l'on est capable, à partir de la condition de maximum, d'exprimer le contrôle extrémal en fonction de $(x(t), p(t))$, alors le système extrémal est un système différentiel de la forme $\dot{z}(t) = F(t, z(t))$, où $z(t) = (x(t), p(t))$, et les conditions initiales, finales, et les conditions de transversalité, se mettent sous la forme $R(z(0), z(t_f)) = 0$.

Finalement, on obtient le problème aux valeurs limites

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = F(t, z(t)), \\ R(z(0), z(t_f)) = 0. \end{cases} \quad (3.46)$$

Notons $z(t, z_0)$ la solution du problème de Cauchy

$$\dot{z}(t) = F(t, z(t)), z(0) = z_0$$

et posons

$$G(z_0) = R(z_0, z(t_f, z_0)). \text{ (c'est la méthode de tir)}$$

Le problème (3.46) aux valeurs limites est alors équivalent à $G(z_0) = 0$, i.e. il s'agit de déterminer un zéro de la fonction G . Ceci peut se résoudre par une méthode de Newton.

Remarque 3.3.1. Si le temps final t_f est libre, on peut se ramener à la formulation précédente en considérant t_f comme une inconnue auxiliaire. On augmente alors la dimension de l'état en considérant l'équation supplémentaire $\frac{dt_f}{dt} = 0$. On peut utiliser le même artifice si le contrôle est bang-bang, pour déterminer les temps de commutation. Il peut cependant s'avérer préférable, lorsque le temps final est libre, d'utiliser la condition de transversalité sur le Hamiltonien.

Les avantages de la méthode de tir simple :

Méthode rapide de haute précision .

Ne requiert pas d'hypothèse sur la structure de contrôle . Une grande précision et une bonne rapidité de convergence.

Inconvénient de la méthode de tir simple :

La nécessité de disposer d'un point initial correct permettant la convergence

de l'algorithme.

Méthode de tir multiple :

Par rapport à la méthode de tir simple, la méthode de tir multiple découpe l'intervalle $[0, t_f]$ en N intervalles $[t_i, t_{i+1}]$, et se donne comme inconnu les valeurs $z(t_i)$ au début de chaque sous-intervalle. Il faut prendre en compte les conditions de recollement en chaque temps t_i (conditions de continuité).

L'intérêt est d'améliorer la stabilité de la méthode. De manière plus précise, considérons un problème de contrôle optimal général. L'application du principe du maximum réduit le problème à un problème aux valeurs limites du type.

$$\dot{z}(t) = F(t, z(t)) = \begin{cases} F_0(t, z(t)) \text{ si } t_0 \leq t \leq t_1 \\ F_1(t, z(t)) \text{ si } t_1 \leq t \leq t_2 \\ \dots \\ F_s(t, z(t)) \text{ si } t_s \leq t \leq t_f \end{cases} \quad (3.47)$$

Où $z = (x, p) \in R^{2n}$ (p est le vecteur adjoint), et $t_1, t_2, \dots, t_s \in [t_0, t_f]$ peuvent être des temps de commutation, dans le cas où le problème inclut des contraintes sur l'état, se peut être des temps de jonction avec un arc frontière, ou bien des temps de contact avec la frontière. On a en plus des conditions de continuité sur l'état et le vecteur adjoint aux points de commutation. Dans le cas de contraintes sur l'état, on a des conditions de saut sur le vecteur adjoint, et des conditions sur la contrainte c en des points de jonction ou de contact. De plus on a des conditions aux limites sur l'état, le vecteur adjoint (conditions de transversalité), et sur le Hamiltonien si le temps final est libre.

Remarque 3.3.2. A priori le temps final t_f est inconnue. Par ailleurs dans la méthode de tir multiple le nombre s de commutations doit être fixé; on le détermine lorsque c'est possible par une analyse géométrique du problème. La méthode de tir multiple consiste à subdiviser l'intervalle $[t_0, t_f]$ en N sous-intervalles, la valeur de $z(t)$ au début de chaque sous-intervalle étant inconnue. Plus précisément, soit $t_0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_k < t_f$ une subdivision fixée de l'intervalle $[t_0, t_f]$. En tout point σ_j la fonction z est continue. On peut considérer σ_j comme un point de commutation fixé. en lequel on a

$$\begin{cases} z = (\sigma_j^+) \\ \sigma_j = \sigma_j^* \text{ fixe.} \end{cases} \quad (3.48)$$

On définit maintenant les noeuds

$$\{\tau_1, \dots, \tau_m\} = \{t_0, t_f\} \cup \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\} \cup \{t_1, \dots, t_s\}. \quad (3.49)$$

Finalement on est conduit au problème des valeurs limitées

$$\dot{z}(t) = F(t, z(t)) = \begin{cases} F_1(t, z(t)) \text{ si } \tau_1 \leq t \leq \tau_2 \\ F_2(t, z(t)) \text{ si } \tau_2 \leq t \leq \tau_3 \\ \dots \\ F_{m-1}(t, z(t)) \text{ si } \tau_s \leq t \leq \tau_f \end{cases} \quad (3.50)$$

$$\bullet \forall j \in \{2, \dots, m-1\}, r_j(\tau_j, z(\tau_j^-), z(\tau_j^+)) = 0$$

$$\bullet r_m(\tau_m, z(\tau_1^-), z(\tau_m^+)) = 0$$

où $\tau_1 = t_0$ est fixé, $\tau_m = t_f$, et les r_j représentent les conditions intérieures ou limites précédentes.

$$r_m(\tau_m, z(\tau_1^-), z(\tau_m^+)) = 0$$

où $\tau_1 = t_0$ est fixé, $\tau_m = t_f$, et les r_j représentent les conditions intérieures ou limites précédentes.

Remarque 3.3.3. On améliore la stabilité de la méthode en augmentant le nombre de noeuds .C'est là en effet le principe de la méthode de tir multiple, par opposition à la méthode de tir simple où les erreurs par rapport à la condition initiale évoluent exponentiellement en fonction de $t_f - t_0$.Bien sûr dans la méthode de tir multiple il y a beaucoup plus d'inconnues que dans la méthode de tir simple, mais éventuellement l'intégration du système (3.57) peut se paralléliser.

$z_j^+ = z(\tau_j^+)$, et soit $z(t, \tau_{j-1}, z_{j-1}^+)$ la solution du problème de Cauchy $\dot{z}(t) = F(t, z(t))$, $z(\tau_{j-1}) = z_{j-1}^+$

On a

$$z(\tau_j^-) = z(\tau_j^-, \tau_{j-1}, z_{j-1}^+)$$

Les conditions intérieures et frontières s'écrivent

$$\forall j \in \{2, \dots, m-1\}, r_j(\tau_j, z(\tau_j^-, \tau_{j-1}, z_{j-1}^+), z_j^+) = 0,$$

$$r_m(z_1^+, \tau_m, z_2^+, \tau_2, \dots, z_{m-1}^+, \tau_{m-1})^T \in R^{(2n+1)(m-1)}$$

(Où $z \in R^{2n}$). Alors les conditions (3.49) sont vérifiées si

$$G(z) = \begin{pmatrix} r_m(\tau_m, z_1^+, z(\tau_m^-, \tau_{m-1}, \tau_{m-1}^+)) \\ r_2(\tau_2, z_2^+, z(\tau_1^-, \tau_1, \tau_2^+)) \\ \vdots \\ r_{m-1}(\tau_m, z_m^+, z(\tau_{m-2}^-, \tau_{m-2}, \tau_{m-1}^+)) \end{pmatrix} = 0 \quad (3.51)$$

On est donc ramené à déterminer un zéro de la fonction G , qui est définie sur un espace vectoriel dont la dimension est proportionnelle au nombre de points de commutation et de points de subdivision. L'équation $G=0$ peut alors être résolue itérativement par une méthode de type Newton (voir la sous section suivante).

Rappels sur les méthode de Newton[19]

Il s'agit de résoudre numériquement $G(z) = 0$, où $G : R^p \rightarrow R^p$ est une fonction de classe C^1 . L'idée de base est la suivante. Si z_k est proche d'un zéro z de G , alors

$$0 = G(z) = G(z_k) + dG(z_k).(z - z_k) + o(z - z_k).$$

On est alors amené à considérer la suite définie par récurrence

$$z_{k+1} = z_k - (dG(z_k))^{-1}.G(z_k)$$

Un point initial $z_0 \in R^p$ étant choisi, et on espère que z_k converge vers le zéro z . Ceci suppose donc le calcul de l'inverse de la matrice jacobienne de G , ce qui doit être évité numériquement. Il s'agit alors, à chaque étape, de résoudre l'équation :

$$G(z_k) + dG(z_k).dk = 0$$

Où dk est appelé direction de descente, et on pose $z_{k+1} = z_k + dk$. Il existe de nombreuses variantes de la méthode Newton : méthode de descente, de quasi-Newton, de Newton quadratique, de Broyden, ... Cette méthode permet, en

général, une détermination très précise d'un zéro. Son inconvénient principal est la petitesse du domaine de convergence. Pour faire converger la méthode, il faut que le point initial z_0 soit suffisamment proche de la solution recherchée z . Ceci suppose donc que pour déterminer le zéro z il faut avoir au préalable une idée approximative de la valeur de z .

Du point de vue du contrôle optimal, cela signifie que, pour appliquer une méthode de tir, il faut avoir une idée a priori de la trajectoire optimale cherchée.

Ceci peut sembler paradoxal, mais il existe des moyens de se donner une approximation, même grossière, de cette trajectoire optimale. Il s'agit là en tout cas d'une caractéristique majeure des méthodes de tir : elles sont très précises mais requièrent une connaissance a priori (plus ou moins grossière) de la trajectoire optimale cherchée.

3.3.2 Méthode directes

Les méthodes directes sont les méthodes les plus évidente lorsqu'on aborde un problème de commande optimale. En discrétisant l'état et la commande dans le problème donné, on se ramène à un problème d'optimisation non-linéaire en dimension finie (N variables). La forme :

$$x_{i+1} = x_i + h_i * f(t_i, x_i, u_i)$$

représente la version discrète de l'équation d'état $\dot{x} = f(t, u(t))$, discrétisée en utilisant par exemple la méthode d'Euler explicite. Pour résoudre ce problème, on suppose que le temps est subdivisé de manière égale, tel que : $t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_f$, le pas de discrétisation étant noté $h = t_{i+1} - t_i$. On suppose que la commande reste constante par morceau durant le pas de temps h , les contraintes sur la commande ou sur l'état sont appliquées sur les valeurs discrétisées.

Les méthodes directes consistent à transformer le problème de contrôle optimal en un problème d'optimisation non linéaire en dimension finie.

Discrétisation totale : tir direct

C'est la méthode la plus évidente lorsqu'on aborde un problème de contrôle optimal. En discrétisant l'état et le contrôle, on se ramène à un un problème d'optimisation non linéaire en dimension finie (ou problème de programmation non linéaire) de la forme :

$$\min_{Z \in C}, \tag{3.52}$$

où

$$Z = (x_1, \dots, x_N, u_1, \dots, u_n)$$

, et

$$C = \{Z | g_i(Z) = 0, i_1, \dots, r, g_j(Z) \leq 0, j \in r + 1, \dots, m\} \quad (3.53)$$

Plus précisément, la méthode consiste à choisir les contrôles dans un espace de dimension fini, et à utiliser une méthode d'intégration numérique des équations différentielles. Considérons donc une subdivision $t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_f$ de l'intervalle $[t_0, t_f]$. Réduisons l'espace des contrôles en considérant (par exemple) les contrôles constants par morceaux selon cette subdivision. Par ailleurs, choisissons une discrétisation de l'équation différentielle, par exemple choisissons ici (pour simplifier) la méthode d'Euler explicite. On obtient alors, en posant $h_i = t_{i+1} - t_i$,
 $x_{i+1} = x_i + h_i f(t_i, x_i, u_i)$.

Remarque 3.3.4. Il existe une infinité de variantes. D'une part, on peut discrétiser l'ensemble des contrôles admissibles par des contrôles constants par morceaux, ou affines par morceaux, ou des splines, etc. D'autre part, il existe de nombreuses méthodes pour discrétiser une équation différentielle ordinaire : méthode d'Euler (explicite ou implicite), point milieu, Heun, Runge-Kutta, Adams-Moulton, etc. De plus l'introduction d'éventuelles contraintes sur l'état ne pose aucun problème

La discrétisation précédente conduit donc au problème de programmation non linéaire

$$x_{i+1} = x_i + h_i f(t_i, x_i, u_i), i = 0, \dots, N - 1$$

$$\min C(x_0, x_1, \dots, x_N, u_0, u_1, \dots, u_N),$$

$$u_i \in \Omega, i = 0, \dots, N - 1$$

Remarque 3.3.5. Cette méthode est très simple à mettre en œuvre. De plus l'introduction d'éventuelles contraintes sur l'état ne pose aucun problème.

3.3.3 les caractéristiques des méthodes directes et indirectes :

méthode directe	méthode indirecte
mise en oeuvre simple, sans connaissance a priori	connaissance à priori de la structure de la trajectoire optimale
peu sensible au choix de la condition initiale	très sensible au choix de la condition initiale
facilité de la prise en compte de contraintes sur l'état	difficulté théorique de la prise en compte de contraintes sur l'état
contrôles globalement optimaux en boucles fermés	contrôles (localement) optimaux en boucles ouvertes
précision numérique basse ou moyenne	très grande précision numérique
efficace en basse dimension	efficace en toute dimension
gourmandise en mémoire	calculs parallélisable
problème de minima locaux	petit domaine de convergence

Conclusion :

- * En conclusion , on utilisera plutôt une méthode direct si
 - on n'a pas besoin d'une grande précision de calcul.
 - La dimension d'espace est assez petite .
 - On n'a aucune idée à priori de la trajectoire optimale recherchée .Par exemple on ne soit rien sur la structure des commutations .
- * On utilisera plutôt une méthode indirect .
 - Si la dimension d'espace est assez grande .
 - Si on a besoin de calculer la trajectoire optimal de manière très précise.
 - Dans un deuxième temps ,après avoir appliqué une méthode direct qui a donnée une première approximation de la solution optimal

Chapitre 4

Application de la méthode de Tir pour la résolution de problèmes de contrôle optimal

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on utilise la méthode de tir pour obtenir une solution approchée d'un problème de contrôle optimal non linéaire. Le problème s'agit de contrôler la propagation d'une épidémie dans une population, et l'objectif est de déterminer la meilleure stratégie pour éradiquer cette maladie infectieuse. Les stratégies sont la vaccination et vaccination-traitement de la population. Pour ce faire, on introduit d'abord le principe du minimum de Pontryagin pour dériver les conditions d'optimalité qui sont données par un problème aux limites non linéaire, ensuite on applique la méthode de tir pour avoir la solution de ce dernier.

4.2 Modèle épidémique de type Susceptible-Infected-Recovered (SIR)

Considérons une population touchée par une épidémie que l'on cherche à enrayer. On note au temps t par :

- $x_1(t)$: le nombre d'individus susceptibles d'être infectés.
- $x_2(t)$: le nombre d'individus infectieux, qui peuvent contaminer les

autres.

— $x_3(t)$: le nombre d'individus guéris.

Supposons qu'il y ait un taux de contact constant entre les susceptibles et les infectieux et qu'une proportion constante de ces contacts entraîne une transmission. Le modèle mathématique est donné comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\beta x_1(t) x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = \beta x_1(t) x_2(t) - \gamma x_2(t), \\ \dot{x}_3(t) = \gamma x_2(t), \end{cases} \quad (4.1)$$

avec les conditions initiales :

$$x_1(0) = N_1 \geq 0, \quad x_2(0) = N_2 \geq 0, \quad x_3(0) = N_3 \geq 0. \quad (4.2)$$

Pour les résultats numériques du système 4.1, nous utilisons les valeurs initiales et la valeur des paramètres du modèle qui sont données dans la Table 4.1, et les résultats obtenus sont représentés sur la Figure 4.1, qui montre qu'il y a peu d'individus qui sont guéris, et le nombre d'individus susceptibles diminue mais le nombre d'individus infectieux augmente.

$N_1 = 20$	Population initiale de $x_1(t)$, qui sont susceptibles
$N_2 = 15$	Population initiale de $x_2(t)$, qui sont infectieux
$N_3 = 10$	Population initiale de $x_3(t)$, qui sont guéris
$\beta = 0.01$	Taux de changement de la population des susceptibles aux infectieux
$\gamma = 0.02$	Taux de changement de la population infectieuse à la population immunitaire

TABLE 4.1 – Conditions initiales et les valeurs des paramètres du modèle

Dans la section suivante, on introduit le problème de contrôle afin d'essayer d'éradiquer l'épidémie dans la population.

4.3 Problème de contrôle optimal

Dans cette section, nous proposons de développer une stratégie efficace pour contrôler la propagation de la maladie infectieuse dans une population. Nous cherchons à réduire le nombre d'individus susceptibles et infectieux et à augmenter le nombre d'individus guéris. Premièrement, nous contrôlons les individus susceptibles en développant une stratégie de vaccination optimale, et la deuxième stratégie consiste à contrôler à la fois les individus susceptibles et infectieux en utilisant la vaccination et le traitement.

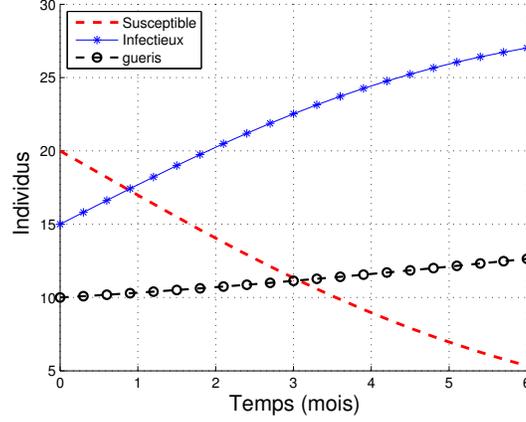


FIGURE 4.1 – Graphe du modèle SIR sans contrôle

4.3.1 La stratégie de vaccination optimale

Pour formuler le problème de contrôle optimal qui décrit la stratégie de vaccination, nous introduisons dans le modèle (4.1) une variable de contrôle $u(t) \in U_{ad}$ qui est la fraction d'individus susceptibles d'être vaccinés pour se protéger contre une éventuelle infection par unité de temps. L'objectif est de minimiser le nombre d'individus susceptibles et infectieux et le coût d'application du contrôle $u(t)$. Ainsi, le problème de contrôle optimal peut s'écrire comme suit :

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = \int_0^{t_f} (x_1(t) + x_2(t) + u^2(t)) dt, \quad (4.3)$$

$$\dot{x}_1(t) = -\beta x_1(t) x_2(t) - x_1(t) u(t), \quad (4.4)$$

$$\dot{x}_2(t) = \beta x_1(t) x_2(t) - \gamma x_2(t), \quad (4.5)$$

$$\dot{x}_3(t) = \gamma x_2(t) + x_1(t) u(t), \quad (4.6)$$

où $U_{ad} = \{u \text{ tel que } u(t) \text{ est mesurable, } 0 \leq u(t) \leq 1, t \in [0, t_f]\}$ est l'ensemble des contrôle admissible, et soit \mathcal{X} l'ensemble des états atteignables. Le problème de contrôle optimal est de déterminer la fonction vectorielle $x = (x_1^*, x_2^*, x_3^*) \in \mathcal{X}$ associée au contrôle admissible $u^*(t) \in U_{ad}$ sur intervalle du temps $[0, t_f]$, en minimisant la fonction cout (4.3), i.e.,

$$J(x^*(t), u^*(t)) = \min_{(x(t), u(t)) \in \mathcal{X} \times U_{ad}} J(x(t), u(t)). \quad (4.7)$$

Existence de contrôle optimal

En se référant à , on donne les conditions qui assure l'existence de la solution du problème de contrôle (4.3)–(4.6). Posons les hypothèses suivantes :

- **H1.** L'ensemble des contrôles et les états correspondant est non vide.
- **H2.** L'ensemble des contrôles admissibles U_{ad} est fermé et convexe.
- **H3.** Chaque second membre des équations (4.4)–(4.6) est continument différentiable.
- **H4.** Il existe une constante $\rho > 1$, $w_1 > 0$ and $w_2 > 0$ telle que la fonction objectif est convexe par rapport au contrôle u et satisfait :

$$J(u(t)) \geq w_2 + w_1 (|u(t)|^2)^{\rho/2}. \quad (4.8)$$

Sous ces hypothèses, on a le théorème suivant :

Théorème 4.3.1. Si les hypothèses **H1**- **H4** sont satisfaites, alors il existe un contrôle optimal $u^*(t)$ tel que :

$$J(u^*(t)) = \min_{u(t) \in U} J(u(t)), \quad (4.9)$$

sujet au système de contrôle (4.3)–(4.6) avec les conditions initiales (4.2).

Conditions nécessaires d'optimalité

En appliquant le principe du minimum de Pontruagin pour le problème de contrôle optimal (4.3) – (4.6), on dérive les conditions d'optimalité. Soit $\mathcal{H}(x(t), p(t), u(t))$ la fonction Hamiltonienne définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x_1(t), x_2(t), x_3(t), p_1(t), p_2(t), p_3(t), u(t)) &= x_1(t) + x_2(t) + u^2(t) \\ &+ p_1(t) (-\beta x_1(t) x_2(t) - x_1(t) u(t)), \\ &+ p_2(t) (\beta x_1(t) x_2(t) - \gamma x_2(t)) \\ &+ p_3(t) (\gamma x_2(t) + x_1(t) u(t)) \end{aligned} \quad (4.10)$$

où $p(t) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t))$ est le vecteur adjoint, et les conditions nécessaires d'optimalité sont :

$$\dot{x}_1(t) = -\beta x_1(t) x_2(t) - 0.5 x_1(t)^2 (p_1(t) - p_3(t)), \quad (4.11)$$

$$\dot{x}_2(t) = \beta x_1(t) x_2(t) - \gamma x_2(t), \quad (4.12)$$

$$\dot{x}_3(t) = \gamma x_2(t) + 0.5 x_1(t)^2 (p_1(t) - p_3(t)), \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_1(t) = & -1 + \beta x_2(t) p_1(t) + 0.5 x_1(t) (p_1(t) - p_3(t)) p_1(t) - \beta x_2(t) p_2(t) \\ & - 0.5 x_1(t) (p_1(t) - p_3(t)) p_3(t), \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\dot{p}_2(t) = -1 + \beta x_1(t) p_1(t) - \beta x_1(t) p_2(t) + \gamma p_2(t) - \gamma p_3(t), \quad (4.15)$$

$$\dot{p}_3(t) = 0. \quad (4.16)$$

avec les conditions aux limites :

$$x(0) = x_0, \quad p(t_f) = 0, \quad (4.17)$$

et le contrôle optimal $u(t)$ est donné comme suit :

$$u(t) = \max \left\{ 0, \min \left\{ 1, \frac{x_1(t) (p_1(t) - p_3(t))}{2} \right\} \right\}, \quad (4.18)$$

Ainsi, le problème aux limites à résoudre est équivalent à :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(y(t), t), \\ y(0) = (x_1(0), x_2(0), x_3(0), p_1(0), p_2(0), p_3(0))^T, \\ y(t_f) = (x_1(t_f), x_2(t_f), x_3(t_f), p_1(t_f), p_2(t_f), p_3(t_f))^T. \end{cases} \quad (4.19)$$

Le problème de Cauchy associé est :

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= f(y(t), t), \\ y(0) &= y_0 = (x_1(0), x_2(0), x_3(0), p_1(0), p_2(0), p_3(0))^T. \end{aligned}$$

et on définit la fonction de tir suit :

$$G(y_0) = y(t_f, y_0) - y(t_f). \quad (4.20)$$

Résoudre le problème aux limites (4.19), est équivalent à déterminer un zéro de la fonction de tir $G(y_0)$.

Simulation numérique et interprétation des résultats

Pour obtenir la solution du système (4.11)–(4.16), on applique la méthode de tir, et les résultats obtenus sont représentés sur les Figures 4.2-4.5. Sur les Figure.4.2–Figure.4.4, on a tracé les courbes solutions des susceptibles, des infectieux et des guéris des deux systèmes (4.1) et (4.11)-(4.16), respectivement sans et avec contrôle.

En utilisant la stratégie de vaccination des individus susceptibles, nous voyons sur la Figure.4.2 que le nombre d'individus susceptibles diminue significativement dès la première application du vaccin. Sur la Figure.4.4, on observe que la population des guéris augmente. Tandis que sur la Figure. 4.3, les individus infectieux déclinent rapidement. Dans la Figure.4.5, nous avons tracé le contrôle optimal qui représente le taux de la vaccination des individus susceptibles.

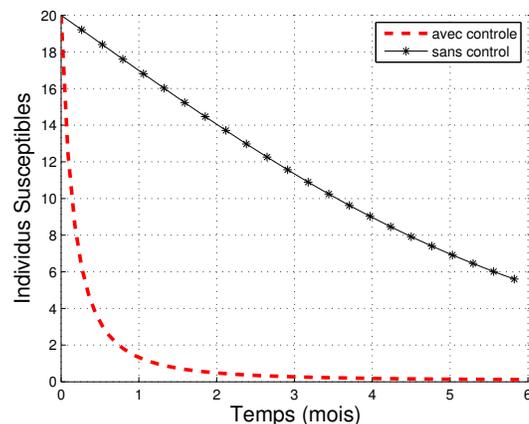


FIGURE 4.2 – Individus susceptibles avec et sans controle

Dans la première stratégie, nous n'avons utilisé qu'une seule variable de contrôle, qui représente la vaccination des individus susceptibles. Cependant, utiliser uniquement la vaccination des individus susceptibles peut être difficile pour éradiquer l'infection avec succès, nous adoptons donc une nouvelle stratégie en prenant en compte une autre variable de contrôle qui est le traitement des individus infectés, et le problème de contrôle optimal peut être

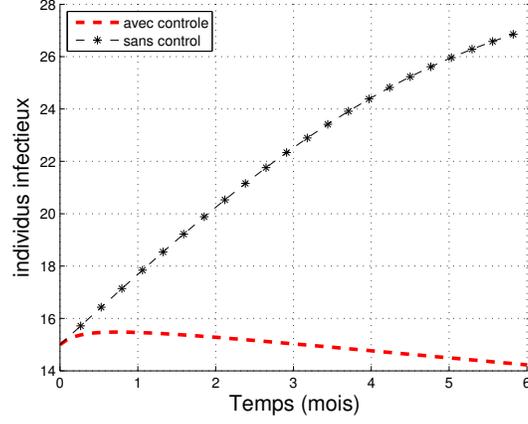


FIGURE 4.3 – Individus infectieux avec et sans controle

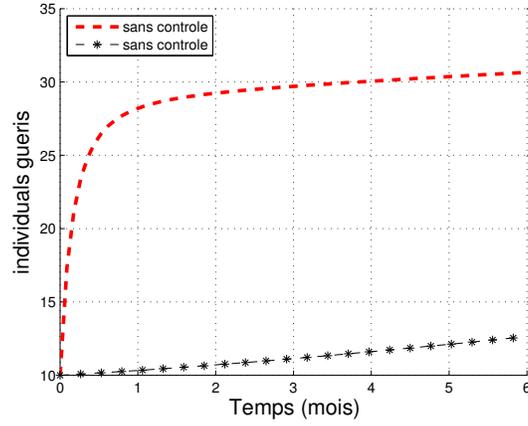


FIGURE 4.4 – Individus guéris avec et sans controle

formulé comme suit :

$$\min_{u(t)} J(u(t)) = \int_0^{t_f} (x_1(t) + x_2(t) + u_1^2(t) + u_2^2(t)) dt, \quad (4.21)$$

$$\dot{x}_1(t) = -\beta x_1(t) x_2(t) - x_1(t) u_1(t), \quad (4.22)$$

$$\dot{x}_2(t) = \beta x_1(t) x_2(t) - \gamma x_2(t) - x_2(t) u_2(t), \quad (4.23)$$

$$\dot{x}_3(t) = \gamma x_2(t) + x_1(t) u_1(t) + x_2(t) u_2(t), \quad (4.24)$$

Ici $U_{ad} = \{ (u_1(t), u_2(t)), \text{ tel que } u_1(t) \text{ and } u_2(t) \text{ sont mesurables avec } 0 \leq$

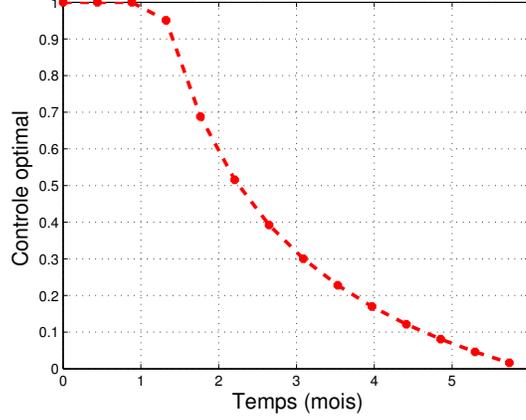


FIGURE 4.5 – Contrôle optimal (Vaccination)

$u_1(t) \leq 1$ and $0 \leq u_2(t) \leq 1$ for $t \in [0, t_f]$ } est l'ensemble des contrôles.

Conditions d'optimalité

En appliquant le principe du minimum de Pontryagin, les conditions d'optimalité sont données comme suit :

$$\dot{x}_1(t) = -\beta x_1(t) x_2(t) - 0.5 x_1(t)^2 (p_1(t) - p_3(t)), \quad (4.25)$$

$$\dot{x}_2(t) = \beta x_1(t) x_2(t) - \gamma x_2(t) - 0.5 x_2(t)^2 (p_2(t) - p_3(t)), \quad (4.26)$$

$$\dot{x}_3(t) = \gamma x_2(t) + 0.5 x_1(t)^2 (p_1(t) - p_3(t)) + 0.5 x_2(t)^2 (p_2(t) - p_3(t)), \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_1(t) = & -1 + \beta x_2(t) p_1(t) + 0.5 x_1(t) (p_1(t) - p_3(t)) p_1(t) - \beta x_2(t) p_2(t) \\ & - 0.5 x_1(t) (p_1(t) - p_3(t)) p_3(t), \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\dot{p}_2(t) = -1 + \beta x_1(t) p_1(t) - \beta x_1(t) p_2(t) + \gamma p_2(t) - \gamma p_3(t) \quad (4.29)$$

$$+ 0.5 x_2(t) p_2(t) (p_2(t) - p_3(t)) - 0.5 x_2(t) p_3(t) (p_2(t) - p_3(t)), \quad (4.30)$$

$$\dot{p}_3(t) = 0, \quad (4.31)$$

et les contrôles optimaux sont :

$$u_1(t) = \max \left\{ 0, \min \left\{ 1, \frac{x_1(t) (p_1(t) - p_3(t))}{2} \right\} \right\}, \quad (4.32)$$

$$u_2(t) = \max \left\{ 0, \min \left\{ 1, \frac{x_2(t) (p_2(t) - p_3(t))}{2} \right\} \right\}. \quad (4.33)$$

Simulation numérique et interprétation des résultats

Les résultats de simulation obtenus pour le problème de contrôle optimal (4.21)–(4.24) sont représentés sur les Figure.4.6–Figure.4.9. Dans la Figure.4.6, nous comparons les courbes de solution pour les individus susceptibles pour différentes stratégies, sans contrôle, avec un contrôle et le cas avec deux contrôles. De même, dans la Figure.4.7, nous comparons l'évolution de la population infectée dans le cas sans contrôle, avec un seul contrôle et en présence de deux contrôles. On constate que lorsque la vaccination et le traitement sont appliqués à la même période, le nombre d'individus susceptibles et infectieux diminue fortement dès la première fois. Ainsi, nous voyons que la dernière stratégie donne plus de nombre de guéris que l'autre stratégie comme le montre la Figure.4.8.

Les contrôles optimaux, vaccination et traitement, sont représentés sur la Figure.4.9, qui montre que la vaccination et le traitement sont donnés à forte dose dans les 40 premiers jours pour éradiquer la maladie infectieuse.

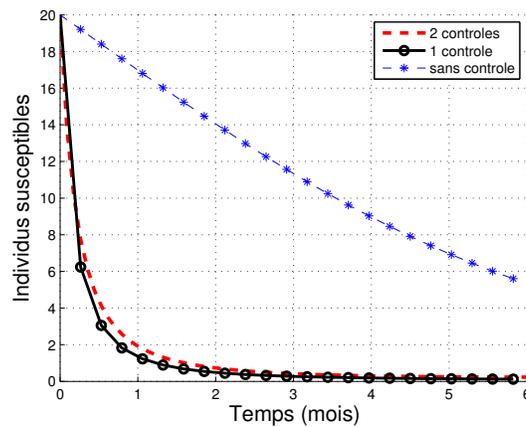


FIGURE 4.6 – Individus susceptibles sans et avec contrôle

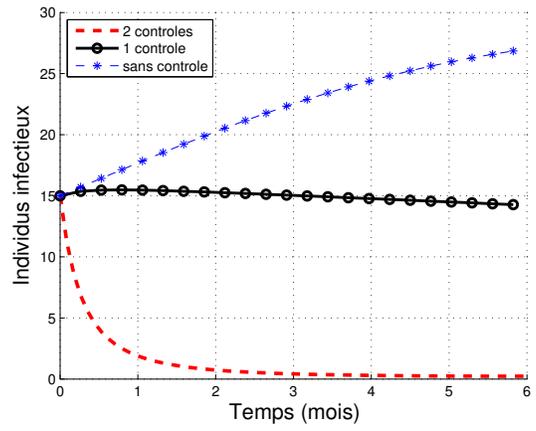


FIGURE 4.7 – Individus infectieux sans et avec contrôle

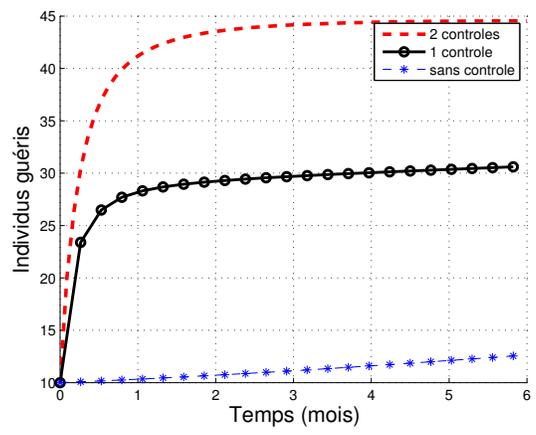


FIGURE 4.8 – Individus guéris sans et avec contrôle

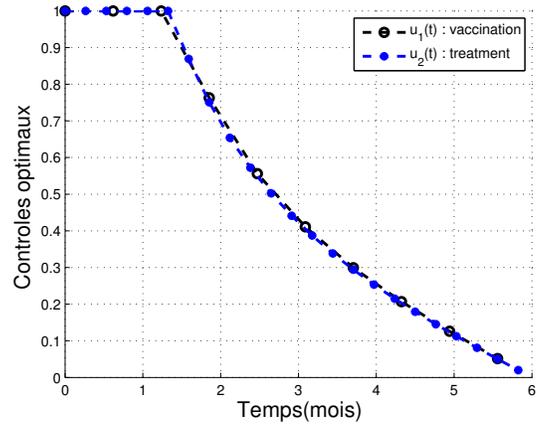


FIGURE 4.9 – Contôles optimaux (vaccination et Traitment)

Conclusion générale

La problématique traitée dans ce mémoire s'inscrit dans le cadre du contrôle optimal des systèmes d'écrits par les équations différentielles. Le travail est principalement axé sur le principe du minimum de Pontryagin et la méthode de tir.

Ainsi, après avoir présenté une synthèse sur la théorie du contrôle optimal des systèmes d'écrits par les équations différentielles, la contrôlabilité, les conditions d'existence de solutions, les différents principes pour la dérivation des conditions d'optimalité, à savoir le principe du minimum de Pontryagin et le principe de Bellman basé sur la programmation dynamique, un état de l'art sur les méthodes numériques pour la résolution des équations différentielles que se soit les problèmes à valeurs initiales et les problèmes aux limites a été présenté. Puis, l'étude est axée sur les différentes méthodes de résolutions des problèmes de contrôle optimal à savoir les méthodes directes et les méthodes indirectes.

Dans ce mémoire, pour obtenir la solution du problème de contrôle optimal, nous avons appliqué la technique indirecte basée sur le principe du minimum de Pontryagin et la méthode de tir. Le principe du minimum de Pontryagin donne un système d'équations différentielles d'ordre un soumises à des conditions aux limites qui constitue un problème aux limites à deux bouts, et la méthode de tir pour déterminer la solution du problème ainsi obtenu.

Pour montrer l'applicabilité de la méthode pour la résolution de problème de contrôle optimal, nous avons traité un problème de contrôle optimal d'une épidémie de type SIR (Susceptible-Infected-Recovered), où l'objectif est de déterminer la meilleur stratégie pour stopper la propagation de la maladie en utilisation la stratégie de vaccination et puis de l'éradiquer en utilisant la stratégie de vaccination-traitement avec un cout minimum.

Les résultats de simulation obtenus révèlent clairement l'efficacité de cette méthode pour le traitement de ce type de problèmes de contrôle optimal.

En perspective, Il est intéressant d'appliquer la méthode de tir pour des problèmes plus compliqués, tel que les problèmes de contrôle optimal avec des contraintes sur l'état.

Bibliographie

- [1] .E.Trelat control optimal :théorie et application .université Paris- Sud laboratoire EN-EDP mathématiques UMR 8628 Bat U25 , 91405 osay odex 2005.
- [2] .F.Bauer, L.Grune, and W .Semmler.Adaptive spline interpolation for Hamilton-Jacobi-Bellman equations .Applied Numerical Mathematics , 56 :1196-1210,2006.
- [3] .M.S.Bazaraa ,H.D.Sherali ,and C.M.Shetty .Nonlinear Programming : Theory and Algorithms .Wiley - Interscience , 3 ed ,2006
- [4] .R.W.Beard , G.Saridis, and J.T . Wen .Galerkin , approximations of the generalized Hamilton -Jacobi- Bellman equation .Automatica, 33 :2159-2177,1997.
- [5] .R.Bellman .Dynamic Programming ,Princeton University Press , Princeton ,New Jersey ,1957.
- [6] .D.Bertsekas .Nonlinear Programming Belmont ,Massachusetts :Athena Scientific Publishers,2004.
- [7] .J.T .Betts .Practical Methods for Optimal Control Using Nonlinear Programming . Philadelphia : SIAM Press , 2001
- [8] .J.T .Betts and S.L . Campbell . Discretize then optimize , in Mathematics for Industry : Challenges and Frontiers .D.Ferguson and T.Peters , eds SIAM,2005.
- [9] .S.Boyd and L.Vandenberghe. Convex Optimization .Cambridge ,United Kingdom .Cambridge University Press.2004
- [10] .N.Govindarajan ,C.C. de Visser ,and K.Krishnakumar .A sparse collocation methode for solving time -dependent HJB equations using multivariate B-splines .Automatica , 50 :2234-2244,2014.

- [11] .C.S. Huang , S.Wang ,C.S .Chen , and Z.C .Li .A radial basis collocation methode for Hamilton-Jacobi-Bellman equations .Automatica,42 :2201-2207,2006.
- [12] .H.B.Keller .Numerical Solution of Two Point Boundary Value Problems .SIAM 1976
- [13] .L.S.Pontryagin ,V.G.Boltyanskii,R.V.Gamkrelize ,and E.F.Mishchenko.The Mathematical Theory of Optimal Processes .Pergamon Press,New York ,1964.
- [14] . R.W.H.Sargent .Optimal control.Journal of Computational and Applied Mathematic ,124 :361-371,2000.
- [15] .J.Stoer and R.Bulirsch.Introduction to Numerical Analysis. Springer -Verlag,2002.
- [16] .A.Fortin analyse Numirique pour ingenieurs quatrienne édition presses internationales polytechnique 2011
- [17] .Analyse numerique pour ingénieur André Fortin
- [18] .Numerical Analysis nith édition , Richard L.Burden J.Douglas Faires
- [19] .A.Fortin analyse Numirique pour ingenieurs quatrienne édition presses internationales polytechnique 2011