REPUPLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMNT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE BOUIRA

FACULTE DES SCIENCES ET DES SCIENCES APPLIQUEES

DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

MEMOIRE PREPARE POUR L'OBTENTION DU DIPLOME

DE MASTER EN PHYSIQUE

OPTION

Physique théorique

THEME

Etude de quelques systèmes quantiques à masse variable

Présenté par : GALOUL Sara

Devant le jury :

B.ZAHAM	MCB	UAMOB	Président
N.BOUCHEMLA	MCB	UAMOB	Encadrant
M.A.SADOUN	MCB	UAMOB	Examinateur
A. RAHLI	MAA	UAMOB	Examinatrice

Année universitaire : 2018/2019

Remerciement

D'abord et avant tout, nous remercions **Allah** *quel que soit le cas, pour la volonté, la santé, et la patience qu’il m’adonné durant toutes ces années d’études, afin que je puisse en arrive là.*

Je tiens à remercier mes parents qui avaient deux grands mérites la fin de Ce travail.

Je remercie sincèrement et gratitude ma directrice de mémoire madame **N.BOUCHEMLA** *de m’avoir proposé le sujet et m’encadré, pour ses conseils et ses orientations, son encouragement qui m'ont aidé à réaliser ce travail et j'avais l'honneur de travailler sous son assistance et je lui suis également reconnaissant pour la confiance qu'elle m'a accordée.*

Mes remerciements s’adressent également à Monsieur **B.ZAHAM** *d’avoir bien voulu présider le jury.*

Mes remerciements s’adressent aussi à Monsieur **M.A. SADOUNE** *et à Madame* **A.RAHLI** *pour leur contribution à l’évaluation de ce travail.*

Mes remerciements vont aussi à tous les enseignant de département de physique de l’université de **BOUIRA** *et tous ceux qui ont contribué de prés ou de loin, à notre formation scientifique.*

Enfin, un grand merci à toute ma famille, mes collègues et mes amis.

Table des matières

Introduction générale

L'homme a toujours voulu comprendre les phénomènes qui l'entourent, notamment les phénomènes physiques, et connaître les lois suivant les quelles ces phénomènes se manifestent. D'autre part ils ne peut pas observer tous les phénomènes, le plus grand nombre a été s'échappé naturellement à ses sens, et l'observation simple ne lui suffit pas pour étendre ses connaissances, pour cela il est évident d'expliquer les résultats et les faits expérimentaux qui sont à sa disposition de la façon la plus correcte, la plus élégante et la plus rapide.

Dés le début du dernier siécle, la physique a subi des révolutions sur le plan expérimental, qui nécessite un progrès notable pour le développement théorique de cette nouvelle branche de la physique. Après cela avec le début du XXe siècle, la mécanique quantique a été élaborée à travers plusieurs débats entre les physiciens, surtout à cause de son aspect probabiliste. Cependant, l'excellent accord entre les résultats théoriques et expérimentaux, la capacité croissante à étudier des systèmes quantiques pour étudier, tester et comprendre plus profondément les phénoménes qui se passent à l'èchelle atomique et nucléaire.

Parmi les nombreux systemes quantiques nous allons porter notre attention aux systèmes quantiques avec une masse variable qui trouvent notamment des applications intéressantes en physique de la matière condensée [1]. En particulier, cette situation peut se présenter lors de l'étude des propriétés électroniques des semi-conducteurs [2], des liquides quantiques [3], des points quantiques [4]. Suite à l'inclusion d'une masse variable il est important de souligner que le systéme devient ambigu au niveau quantique et par contre pour une équation de Schrödinger unidimensionnelle à masse constante, on peut facilement utiliser l'analogue classique de l'énergie cinétique pour quantifier le système. Cela ne peut pas être fait pour les systèmes dont la masse où les opérateurs de masse et d'impulsion ne commutent pas. En effet, le problème du choix de l'ordre correcte a été mis en compte.

Dans ce memoire, les systèmes de masse variable sont étudiés dans le contexte de leur quantification, recherche des solutions, et obtenir les fonctions d'onde et les énergies exactes.

Dans le première chapitre, nous essayons de contourner le problème d'ambiguïté d'ordre en utilisant la forme générale d'Hamiltonien suggéré par Oldwig Von Roos [5] qui porte des paramètres d'ambinguité, ensuite nous passons a discutés les différents choix de ces paramètre dans la littératur [6],[7],[8] et [9] de sorte que l'hamiltonien résultant soit hermtique. Une fois que nous avons terminé la quantification du système, notre tâche est d'obtenir une forme traditionnelle de l'équation de Schrödinger et qui ne dépend pas des paramètres d'ambiguïté, et avant de terminer ce chapitre une discussion s'impose sur le problème d'ordre en représentation position et en représentation impulssion.

Dans le deuxième chapitre, notre principal intérêt est la résolution de l'équation de Schrödinger généralisé en appliquant la méthode de Nikoforov Uvarov. Avec deux exemple qui sont ensuite traités dans ce chapitre.

Dans le derniér chapitre, nous considérons quelque concepts essentiels de la mécanique quantique supersymétrique, en particulier on fait une généralisation pour des systémes a mass variable.

Chapitre 1

Hamiltonien généralisé

1.1 Introduction

L'énergie d'un système est décrite par un hamiltonien qui correspond à la somme des énergies cinétiques et des énérgies potentielles de sorte que l'hamiltonien, dans le cas classique, prend la forme $H(r,p) = T(r,p) + V(r)$, òu $T(r,p) = \frac{p^2}{2m(r)}$ est l'énergie cinétique avec r et p sont les varaible canonique de position et impulsion. La quantification de cet Hamiltonien se base sur le principe de correspondance qui stipule que le passage de la mécanique classique à la mécanique quantique se fait en remplaçant les varaibles canoniques r et p par les opérateurs position $\hat{r}$ et les opérateurs impulsion $\hat{p}$, qui satisfaisant la relation de commutation $[\hat{r}, \hat{p}] = i\hbar$ .Un point important dans ce cadre concernant la quantification du système dont la masse est variable et la transition du terme cinétique classique $T(r,p)$ au termes quantique $T(\hat{r}, \hat{p})$, lorsque la masse $m(r)$ dépend de la position, elle ne commute plus avec l'impulsion, donc il existe de nombreuses façons pour généraliser la forme habituelle de l'énergie cinétique de l'operateur hamiltonien, nous adopterons la forme générale proposée à l'origine par "Oldwig Von Roos" [5],

$$H_{VR} = \frac{1}{4}\left[m^{\alpha}(\vec{r})\,\hat{p}m^{\beta}(\vec{r})\,\hat{p}m^{\gamma}(\vec{r}) + m^{\gamma}(\vec{r})\,\hat{p}m^{\beta}(\vec{r})\,\hat{p}m^{\alpha}(\vec{r})\right] + V(\vec{r})\,, \tag{1.1}$$

où α, β et γ sont des paramètres appelés paramètres d'ambiguïté de Von Roos, généralement sont choisis de manière arbitraire, ils sont liés par la contrainte suivante $\alpha + \beta + \gamma = -1$. Dans ce contexte, on adoptera differents ensembles des valeurs des paramètres d'ambiguïté suggérés par : Ben Daniel et Duke [6], Li et Kuhn [7],Gora et Williams [8] et Zhu et Kroemer [9] .

Dans la section suivante, nous allons récapituler les résultats de la Ref [10], et pour prendre en considération la possibilité d'inclure le cas de Weyl [11] d'une manière plus évidente, nous allons utiliser un Hamiltonien effective avec quatre termes donnés par

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{4(a+1)}\{a\left[m^{-1}(\vec{r})\hat{p}^2 + \hat{p}^2 m^{-1}(\vec{r})\right] + m^{\alpha}(\vec{r})\hat{p}m^{\beta}(\vec{r})\hat{p}m^{\gamma}(\vec{r}) + m^{\gamma}(\vec{r})\hat{p}m^{\beta}(\vec{r})\hat{p}m^{\alpha}(\vec{r})\} \\ &\quad + V(\vec{r}), \end{aligned} \tag{1.2}$$

Dans ce cas, il existe toujours la contrainte sur les paramètres : $\alpha+\beta+\gamma = -1$, et quand on choisit $a = 1, \alpha = \gamma = 0$ l'ordre de Weyl est récupérée, un hamiltonien similaire a été utilisé par Levinger et collaborators [12],[13] .

Maintenant, en utilisant la relation de commutation suivante :

$$[p, m^{\alpha}] = -i\hbar\alpha m' m^{\alpha-1} \tag{1.3}$$

où $m'(\vec{r})$ désigne la dérivée premiére de la distribution de la masse $m(\vec{r})$ par rapport à la varible $\vec{r}$.

Nous obtenons les résultats suivants :

$$\left[p^2, m^{-1}\right] = p\left[m^{-1}, p\right] + \left[p, m^{-1}\right]p = i\hbar m^{-2}p, \tag{1.4}$$

ensuite en mettant les opérateurs d'impulsion $\hat{p}(\vec{r}) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial r}$ sur la droite, nous obtenons

$$m^{\alpha}(\vec{r})\hat{p}m^{\beta}(\vec{r})\hat{p}m^{\gamma}(\vec{r}) = \hbar^2 m^{\alpha}(\vec{r})\frac{\partial}{\partial r}m^{\beta}(\vec{r})\frac{\partial}{\partial r}m^{\gamma}(\vec{r})$$

$$\begin{aligned}
&= \hbar^2 m^\alpha\left(\vec{r}\right)\frac{\partial}{\partial r}\left[\gamma m^{\gamma-1}\left(\vec{r}\right)m'\left(\vec{r}\right)m^\beta\left(\vec{r}\right)+m^\beta\left(\vec{r}\right)m^\gamma\left(\vec{r}\right)\frac{\partial}{\partial r}\right]\\
&= \hbar^2 m^\alpha\left(\vec{r}\right)\frac{\partial}{\partial r}\left[\gamma m'\left(\vec{r}\right)m^{\beta+\gamma-1}\left(\vec{r}\right)+m^{\beta+\gamma}\left(\vec{r}\right)\frac{\partial}{\partial r}\right]\\
&= \hbar^2 m^\alpha\left(\vec{r}\right)\left[\gamma m''\left(\vec{r}\right)m^{\beta+\gamma-1}\left(\vec{r}\right)+m'^2\left(\vec{r}\right)\gamma\left(\gamma+\beta-1\right)m^{\beta+\gamma-2}\left(\vec{r}\right)\right.\\
&\quad\left.+\gamma m'\left(\vec{r}\right)m^{\beta+\gamma-1}\left(\vec{r}\right)\frac{\partial}{\partial r}+m'\left(\vec{r}\right)\left(\beta+\gamma\right)m^{\beta+\gamma-1}\left(\vec{r}\right)+m^{\beta+\gamma}\left(\vec{r}\right)\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right], \qquad (1.5)
\end{aligned}$$

et

$$m^\gamma\left(\vec{r}\right)\hat{p}m^\beta\left(\vec{r}\right)\hat{p}m^\alpha\left(\vec{r}\right)=\hbar^2 m^\gamma\left(\vec{r}\right)\frac{\partial}{\partial r}m^\beta\left(\vec{r}\right)\frac{\partial}{\partial r}m^\alpha\left(\vec{r}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \hbar^2 m^\gamma\left(\vec{r}\right)\frac{\partial}{\partial r}\left[\alpha m^{\alpha-1}\left(\vec{r}\right)m'\left(\vec{r}\right)m^\beta\left(\vec{r}\right)+m^\beta\left(\vec{r}\right)m^\alpha\left(\vec{r}\right)\frac{\partial}{\partial r}\right]\\
&= \hbar^2 m^\gamma\left(\vec{r}\right)\frac{\partial}{\partial r}\left[\alpha m'\left(\vec{r}\right)m^{\beta+\alpha-1}\left(\vec{r}\right)+m^{\beta+\alpha}\left(\vec{r}\right)\frac{\partial}{\partial r}\right]\\
&= \hbar^2 m^\gamma\left(\vec{r}\right)\left[\alpha m''\left(\vec{r}\right)m^{\beta+\alpha-1}\left(\vec{r}\right)+m'^2\left(\vec{r}\right)\alpha\left(\alpha+\beta-1\right)m^{\beta+\alpha-2}\left(\vec{r}\right)\right.\\
&\quad\left.+\alpha m'\left(\vec{r}\right)m^{\beta+\alpha-1}\left(\vec{r}\right)\frac{\partial}{\partial r}+m'\left(\vec{r}\right)\left(\beta+\alpha\right)m^{\beta+\alpha-1}\left(\vec{r}\right)+m^{\beta+\alpha}\left(\vec{r}\right)\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right]. \qquad (1.6)
\end{aligned}$$

En utilisant la relation $\alpha+\beta+\gamma=-1$, puis en éliminant le paramètre $\beta=-(\alpha+\gamma+1)$ nous obtenons :

$$m^\alpha\left(\vec{r}\right)\hat{p}m^\beta\left(\vec{r}\right)\hat{p}m^\gamma\left(\vec{r}\right)=\frac{p^2}{m}-i\hbar\gamma\frac{m'}{m^2}p-\gamma\left(\alpha+2\right)\frac{m'^2}{m^3}-\left(\alpha+1\right)\frac{m''}{m^2}, \qquad (1.7)$$

$$m^\gamma\left(\vec{r}\right)\hat{p}m^\beta\left(\vec{r}\right)\hat{p}m^\alpha\left(\vec{r}\right)=\frac{p^2}{m}-i\hbar\alpha\frac{m'}{m^2}p-\alpha\left(\gamma+2\right)\frac{m'^2}{m^3}-\left(\gamma+1\right)\frac{m''}{m^2}, \qquad (1.8)$$

et en remplaçant dans (1.2) et aprés les simplification nous obtenons :

$$H=\frac{1}{2m}\hat{p}^2+\frac{i\hbar}{2}\frac{m'\left(r\right)}{m^2}\hat{p}+U_{\alpha\beta\gamma a}\left(r\right)+V\left(r\right), \qquad (1.9)$$

avec $U_{\alpha\beta\gamma a}(r)$ est un potentiel effectif qui s'écrit :

$$U_{\alpha\beta\gamma a}(r) = -\frac{\hbar^2}{4m^3(a+1)}\left[(\alpha+\gamma-a)\,mm'' + 2\,(a-\alpha\gamma-\alpha-\gamma)\,m'^2\right]. \qquad (1.10)$$

Dans ce cas, l'équation de Schrödinger correspondante peut être écrite comme suit :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2}\Psi + \frac{\hbar^2}{2}(\frac{m'}{m^2})\frac{d}{dr}\Psi + (V(r) + U_{\alpha\beta\gamma a}(r) - E)\Psi = 0. \qquad (1.11)$$

On voit bien qu'une dérivé au premier ordre apparaît, dans ce qui suit nous essayons de trouver la forme habituelle de l'équation de Schrödinger en effectuant le changement suivant sur la fonction $\Psi(r)$:

$$\Psi(r) = m^{\frac{1}{2}}\varphi(r), \qquad (1.12)$$

nous trouvons les résultats suivants :

$$\frac{d}{dr}\Psi(r) = m^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}\frac{m'}{m}\varphi(r) + \frac{d}{dr}\varphi(r)\right], \qquad (1.13)$$

$$\frac{d^2}{dr^2}\Psi(r) = m^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}\frac{m''}{m}\varphi(r) - \frac{1}{4}\frac{m'^2}{m^2}\varphi(r) + \frac{m'}{m}\frac{d}{dr}\varphi(r) + \frac{d^2}{dr^2}\varphi(r)\right], \qquad (1.14)$$

en substituant $(1.12), (1.13)$ et (1.14) dans l'équation (1.11) nous obtenons :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2}\varphi(r) + \frac{\hbar^2}{4m}\left(\frac{3}{2}(\frac{m'}{m})^2 - \frac{m''}{m}\right)\varphi(r) + (V(r) + U_{\alpha\beta\gamma a}(r) - E)\varphi(r) = 0, \quad (1.15)$$

avec le nouveau potentiel effectif défini par :

$$U_{eff} = V(r) + U_{\alpha\beta\gamma a}(r) + \frac{\hbar^2}{4m}\left(\frac{3}{2}(\frac{m'}{m})^2 - \frac{m''}{m}\right). \qquad (1.16)$$

L'éqution devient :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2}\varphi(r) + (U_{eff} - E)\varphi(r) = 0, \tag{1.17}$$

Dans les chapitres suivants, nous nous intéressons à l'obtentions des solutions exactes de l'équation résultante pour certains potentiels particuliers.

1.2 Équivalence entre les Hamiltonien

Nous avons déjà vu que différentes formes de l'hamiltonien sont employées dans la littérature selon les choix de l'ensemble de paramètres d'ambiguïté, nous les presentons dans le tableau suivant :

	a	α	β	γ
Gora et Williams	0	-1	0	0
Ben Daniel et Duke	0	0	-1	0
Zhu et Kroemer	0	$-(1/2)$	0	$-(1/2)$
Li et Kuhn	0	0	$-(1/2)$	$-(1/2)$
Weyl	1	0	-1	0

Nous trouvons donc les différentes formes de l'opérateur hamiltonien correspondants au différentes propositions résumés dans le tableau précédant.

Le premier cas c'est le choix de T.Gora et F.Williams [8] ont étudies les semi-conducteurs lentement gradués dont les masses effectives dépendent de la position. Ce dernier est sous une forme hermétique.

$$H_{GW} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{m}P^2 + P^2\frac{1}{m}\right] + V(x). \tag{1.18}$$

Le deusième cas c'est celui de D.J.Bendeniel et C.B.Duke [6], où ils ont étudiés la pénétration à travers une barrière dans le cadre du modèle de Bethe -Sommerfeld pour l'effet tunnel d'un électron. la forme adéquate de l'hamiltonien est

$$H_{BD} = \frac{1}{2}\left[\hat{p}\frac{1}{m}\hat{p}\right] + V\left(x\right) \tag{1.19}$$
$$= \frac{1}{4}\left[\hat{p}\frac{1}{m}\hat{p} + \hat{p}\frac{1}{m}\hat{p}\right] + V\left(x\right). \tag{1.20}$$

En utilisant la relation de commutation (1.3), nous obtenons :

$$\hat{p}\frac{1}{m} = \frac{1}{m}\hat{p} + i\hbar\frac{m'}{m^2}, \tag{1.21}$$

et

$$\frac{1}{m}\hat{p} = \hat{p}\frac{1}{m} - i\hbar\frac{m'}{m^2}, \tag{1.22}$$

en multipliant les deux termes par $\hat{p}$ à gauche et à droite respectivement nous obtenons :

$$\hat{p}\frac{1}{m}\hat{p} = \frac{1}{m}\hat{p}^2 + \left(i\hbar\frac{m'}{m^2}\right)\hat{p}, \tag{1.23}$$

$$\hat{p}\frac{1}{m}\hat{p} = \hat{p}^2\frac{1}{m} - \hat{p}\left(i\hbar\frac{m'}{m^2}\right), \tag{1.24}$$

en poursuivant le même procédé pour arranger les termes en $\hat{p}$ de telle manière a avoir $\hat{p}$ à droite, nous partons de

$$\begin{aligned}
-\hat{p}\left(i\hbar\frac{m'}{m^2}\right) &= -i\hbar\left[\hat{p}m'\right]m^{-2} \\
&= -i\hbar\left(m'\hat{p} - i\hbar m'' m'^{-1}\right)m^{-2} \\
&= -i\hbar\left(m'\left[\hat{p}m^{-2}\right] - i\hbar m'' m'^{-1}m^{-2}\right) \\
&= -i\hbar m'\left(m^{-2}\hat{p} + 2i\hbar m' m^{-3}\right) - \hbar^2 m'' m'^{-1} m^{-2} \\
&= -\left(i\hbar\frac{m'}{m^2}\hat{p}\right) + \hbar^2\left(2m'^2 m^{-3} - m'' m'^{-1} m^{-2}\right),
\end{aligned} \tag{1.25}$$

en mettant (1.25) dans (1.24) nous obtenons

$$\hat{p}\frac{1}{m}\hat{p} = \hat{p}^2\frac{1}{m} - \left(i\hbar\frac{m'}{m^2}\right)\hat{p} + \hbar^2\left(2m'^2m^{-3} - m''m'^{-1}m^{-2}\right), \tag{1.26}$$

de là, en inserrant (1.23) et (1.24) dans (1.20) nous trouvons enfin le terme d'hamiltonien suivant :

$$\begin{aligned} H_{BD} &= \frac{1}{2}\left[\hat{p}\frac{1}{m}\hat{p}\right] + V(x) \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{m}\hat{p}^2 + \hat{p}^2\frac{1}{m}\right] + \hbar^2\left(2m'^2m^{-3} - m''m'^{-1}m^{-2}\right) + V(x), \end{aligned} \tag{1.27}$$

qui est équivalent a celui de Gora et Williams, finalement.

$$H_{BD} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{m}\hat{p}^2 + \hat{p}^2\frac{1}{m}\right] + V_{eff(BD)}, \tag{1.28}$$

avec

$$V_{eff(BD)} = \hbar^2\left(2m'^2m^{-3} - m''m'^{-1}m^{-2}\right) + V(x). \tag{1.29}$$

Q.G.Zhu et H.Kroemer ont étudié dans l'article [9], les règles de connexion d'interface pour les fonctions d'onde de masse effective à une hétérojonction abrupte entre deux semi-conducteurs différents.en suivant le tableau précédant la forme de l'hamiltonien s'écrit :

$$\begin{aligned} H_{ZK} &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{m}}\hat{p}^2\frac{1}{\sqrt{m}}\right] + V(x) \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\sqrt{m}}\hat{p}^2\frac{1}{\sqrt{m}} + \frac{1}{\sqrt{m}}\hat{p}^2\frac{1}{\sqrt{m}}\right] + V(x) \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\sqrt{m}}\hat{p}\hat{p}\frac{1}{\sqrt{m}} + \frac{1}{\sqrt{m}}\hat{p}\hat{p}\frac{1}{\sqrt{m}}\right] + V(x) \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\sqrt{m}}\hat{p}\frac{1}{\sqrt{m}}\hat{p} + \hat{p}\frac{1}{\sqrt{m}}\hat{p}\frac{1}{\sqrt{m}}\right] + V(x), \end{aligned} \tag{1.30}$$

car, toujours par l'utilisation de la relation de commutation (1.3) et par le même procédé, nous avons les opérations suivantes :

$$\hat{p}\frac{1}{\sqrt{m}} = \frac{1}{\sqrt{m}}\hat{p} + \frac{i\hbar}{2}\frac{m'}{m^{\frac{3}{2}}}, \tag{1.31}$$

$$\frac{1}{\sqrt{m}}\hat{p} = \hat{p}\frac{1}{\sqrt{m}} - \frac{i\hbar}{2}\frac{m'}{m^{\frac{3}{2}}}, \tag{1.32}$$

en multipliant les deux termes par $\hat{p}$, à gauche et à droite respectivement, ensuite par $\frac{1}{\sqrt{m}}$ à droite et à gauche respectivement nous obtenons :

$$\hat{p}^2\frac{1}{m} = \hat{p}\frac{1}{\sqrt{m}}\hat{p}\frac{1}{\sqrt{m}} + \frac{i\hbar}{2}\hat{p}\frac{m'}{m^2}, \tag{1.33}$$

$$\frac{1}{m}\hat{p}^2 = \frac{1}{\sqrt{m}}\hat{p}\frac{1}{\sqrt{m}}\hat{p} - \frac{i\hbar}{2}\frac{m'}{m^2}\hat{p}, \tag{1.34}$$

par combinaison, nous avons,

$$\frac{1}{m}\hat{p}^2 + \hat{p}^2\frac{1}{m} = \frac{1}{\sqrt{m}}\hat{p}\frac{1}{\sqrt{m}}\hat{p} + \hat{p}\frac{1}{\sqrt{m}}\hat{p}\frac{1}{\sqrt{m}} - \frac{i\hbar}{2}\frac{m'}{m^2}\hat{p} + \frac{i\hbar}{2}\hat{p}\frac{m'}{m^2}, \tag{1.35}$$

donc :

$$\begin{aligned} H_{ZK} &= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\sqrt{m}}\hat{p}\frac{1}{\sqrt{m}}\hat{p} + \hat{p}\frac{1}{\sqrt{m}}\hat{p}\frac{1}{\sqrt{m}}\right] + V(x) \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{m}\hat{p}^2 + \hat{p}^2\frac{1}{m}\right] + \frac{1}{4}\left[\frac{i\hbar}{2}\frac{m'}{m^2}\hat{p} - \frac{i\hbar}{2}\hat{p}\frac{m'}{m^2}\right] + V(x), \end{aligned} \tag{1.36}$$

il est evidemment qu'il faut arrangé les terme en $\hat{p}$, en prenant,

$$\begin{aligned}
-\frac{i\hbar}{2}\hat{p}\frac{m'}{m^2} &= -\frac{i\hbar}{2}\left[\hat{p}m'\right]m^{-2} \\
&= -\frac{i\hbar}{2}\left[m'\hat{p} - i\hbar m''m'^{-1}\right]m^{-2} \\
&= -\frac{i\hbar}{2}m'\left[\hat{p}m^{-2}\right] + \frac{\hbar^2}{2}m''m'^{-1}m^{-2} \\
&= -\left(\frac{i\hbar}{2}\frac{m'}{m^2}\right)\hat{p} + \hbar^2 m'^2 m^{-3} - \frac{\hbar^2}{2}m''m'^{-1}m^{-2},
\end{aligned} \tag{1.37}$$

en inserrant (1.35) dans (1.36), nous obtenons :

$$H_{ZK} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{m}\hat{p}^2 + \hat{p}^2\frac{1}{m}\right] + \frac{1}{4}\left[\hbar^2 m'^2 m^{-3} - \frac{\hbar^2}{2}m''m'^{-1}m^{-2}\right] + V(x), \tag{1.38}$$

qui est aussi équivalent a celui de Gora et Williams, d'ou

$$H_{ZK} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{m}\hat{p}^2 + \hat{p}^2\frac{1}{m}\right] + V_{eff(ZK)}, \tag{1.39}$$

avec

$$V_{eff(ZK)} = \frac{1}{4}\left[\hbar^2 m'^2 m^{-3} - \frac{\hbar^2}{2}m''m'^{-1}m^{-2}\right] + V(x). \tag{1.40}$$

Le quatrième cas c'est celui de T.L.Li et J.Kuhn [7] où ils suggère un schéma de permutation simple pour construire l'opérateur hamiltonien hermétique utilisé dans l'équation de masse effectif pour ($a = 0, \beta = \gamma = -(1/2)$et $\alpha = 0$, et introduit un profil lissé pour modéliser plus précisément les hétérojonctions et illustre la dépendance du rapport bande-décalage d'un puits quantique du $GaAs - Al_xGa_{1-x}As$, l'opérateur hamiltonien hermétique particulier utilisé par Li et Kuhn dans le calcul est,

$$H_{LiK} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\sqrt{m}}P\frac{1}{\sqrt{m}}P + P\frac{1}{\sqrt{m}}P\frac{1}{\sqrt{m}}\right] + V(x), \tag{1.41}$$

où encore, en utilisant (1.35), il vient :

$$H_{LiK}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{m}\hat{p}^2+\hat{p}^2\frac{1}{m}\right]+\frac{1}{4}\left[\frac{i\hbar}{2}\frac{m'}{m^2}\hat{p}-\frac{i\hbar}{2}\hat{p}\frac{m'}{m^2}\right]+V\left(x\right), \tag{1.42}$$

de la même manière que le cas précédent, nous avons :

$$H_{LiK}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{m}\hat{p}^2+\hat{p}^2\frac{1}{m}\right]+\frac{1}{4}\left[\hbar^2m'^2m^{-3}-\frac{\hbar^2}{2}m''m'^{-1}m^{-2}\right]+V\left(x\right), \tag{1.43}$$

qui s'écrit

$$H_{LiK}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{m}\hat{p}^2+\hat{p}^2\frac{1}{m}\right]+V_{eff(LiK)}, \tag{1.44}$$

où

$$V_{eff(LiK)}=\frac{1}{4}\left[\hbar^2m'^2m^{-3}-\frac{\hbar^2}{2}m''m'^{-1}m^{-2}\right]+V\left(x\right), \tag{1.45}$$

on voit que H_{LiK} est aussi équivalent a celui de Gora et Williams.

Enfin, pour Weyl nous avons :($a=1,\alpha=\gamma=0$ et $\beta=-1$)

$$H_{Weyl}=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{m}\hat{p}^2+\hat{p}^2\frac{1}{m}+2\hat{p}\frac{1}{m}\hat{p}\right]+V\left(x\right), \tag{1.46}$$

nous avons déjà vu dans (1.27) que

$$\frac{1}{2}\left[\hat{p}\frac{1}{m}\hat{p}\right]=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{m}\hat{p}^2+\hat{p}^2\frac{1}{m}\right]+\hbar^2\left(2m'^2m^{-3}-m''m'^{-1}m^{-2}\right) \tag{1.47}$$

de là, nous déduisons,

$$\begin{aligned}
H_{Weyl} &= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{m}\hat{p}^2+\hat{p}^2\frac{1}{m}+\left[\frac{1}{m}\hat{p}^2+\hat{p}^2\frac{1}{m}\right]+4\hbar^2\left(2m'^2m^{-3}-m''m'^{-1}m^{-2}\right)\right]+V\left(x\right)\\
&= \frac{1}{8}\left[2\left[\frac{1}{m}\hat{p}^2+\hat{p}^2\frac{1}{m}\right]+4\hbar^2\left(2m'^2m^{-3}-m''m'^{-1}m^{-2}\right)\right]+V\left(x\right)\\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{m}\hat{p}^2+\hat{p}^2\frac{1}{m}\right]+\frac{\hbar^2}{2}\left(2m'^2m^{-3}-m''m'^{-1}m^{-2}\right)+V\left(x\right),
\end{aligned} \tag{1.48}$$

$$H_{Weyl}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{m}\hat{p}^2+\hat{p}^2\frac{1}{m}\right]+V_{eff(weyl)}, \tag{1.49}$$

où

$$V_{eff(weyl)} = \frac{\hbar^2}{2}\left(2m'^2m^{-3} - m''m'^{-1}m^{-2}\right) + V(x), \tag{1.50}$$

qui est aussi équivalent a celui de Gora et Williams.

Par conséquent, nous avons montré l'équivalence entre les différentes formes de l'opérateur Hamiltonien et qui ont tous la méme forme pour l'énergie cinétique. Les différents choix des paramétres d'ambiguités engendre donc des termes suplémentaire qui s'ajoutent a l'énergie potentiel, les potentiels résultants sont généralement appelés potentiels effectifs.

1.3 Problème d'ordre en représentation (x) et (p)

Considérant un système quantique dont la masse de la particule est variable, et comme il a été déjà mentionné dans la partie précédente, un problème d'ordre sort de façon naturel, et selon les différents choix possibles des paramètres d'ambiguités α, β et γ, nous pouvons avoir différentes formes pour l'opérateur hamiltonien. La question majeur que nous allons poser dans cette partie c'est : y-a-t il une représentation qui permet d'évité l'ambiguïté ? En particulier entre la représentation des coordonnées et la représentation des impulsion.

1.3.1 Choix d'une représentation

Pour répondre a la question précédante, nous considérons la famille des fonctions classiques $f(x)p$,dans la représentation des coordonnées la quantification hermétique peut être donné comme suit :

$$f(x)\,p \rightarrow \frac{f^{\alpha}(\hat{x})\,\hat{p}f^{\beta}(\hat{x}) + f^{\beta}(\hat{x})\,\hat{p}f^{\alpha}(\hat{x})}{2}, \alpha + \beta = 1, \tag{1.51}$$

en utilisant les résultats de (1.7) et (1.8), on peut voir que l'on obtient :

$$f^{\alpha}(\hat{x})\,\hat{p}f^{\beta}(\hat{x}) = f(\hat{x})\,\hat{p} - i\hbar\beta\frac{df(\hat{x})}{d\hat{x}}, \tag{1.52}$$

$$f^{\beta}(\hat{x})\,\hat{p}f^{\alpha}(\hat{x}) = f(\hat{x})\,\hat{p} - i\hbar\alpha\frac{df(\hat{x})}{d\hat{x}}, \tag{1.53}$$

ou encore

$$\frac{f^{\alpha}(\hat{x})\,\hat{p}f^{\beta}(\hat{x}) + f^{\beta}(\hat{x})\,\hat{p}f^{\alpha}(\hat{x})}{2} = f(\hat{x})\,\hat{p} - \frac{i\hbar}{2}\frac{df(\hat{x})}{d\hat{x}}. \tag{1.54}$$

où $\alpha + \beta = 1$. Le résultat (1.54) montre qu'il n'ya pas d'ambiguïté d'ordre dans cette représentation.

rappelez vous que l'on peut échanger le rôle de x et de p, pour tomber sur la forme de la fonction classique $g(p)x$ dans la représentation d'impulsion. Et par analogie avec la même procédure,on peut voir que la forme hermitienne de cette fonction ressemble à

$$\frac{g^{\alpha}(\hat{p})\,\hat{x}g^{\beta}(\hat{p}) + g^{\beta}(\hat{p})\,\hat{x}g^{\alpha}(\hat{p})}{2} = g(\hat{p})\,\hat{x} + \frac{i\hbar}{2}\frac{dg(\hat{p})}{d\hat{p}}. \tag{1.55}$$

En effet, considérons l'opérateur

$$H = g(\hat{p})\,\hat{x} + \frac{i\hbar}{2}\frac{dg(\hat{p})}{d\hat{p}}, \tag{1.56}$$

ce dernier peut être considéré comme un Hamiltonien usuel si nous choisissons la fonctios $g(\hat{p})$ égale à un polynôme de second ordre en p, dans ce cas nous aurons un système avec une masse dépendante des coordonnées spatiales $m(x) \sim \frac{1}{x}$ ceci est un exemple d'Hamiltonien ambigu dans la représentation des coordonnées et non dans la représentation d'impulsion.

Il serais donc plus util de calculer la fonction d'onde dans la représentation d'impulsion puis la transformer dans la représentation de coordonnées si nécessaire.

1.3.2 Représentation d'impulsion

L'équation de la fonction d'onde indépendante du temps dans la représentation d'impulsion est,

$$H\tilde{\Psi}(p) = E\tilde{\Psi}(p), \tag{1.57}$$

en partant de l'opérateur (1.56) et en prenant en considération que $g(\hat{p}) = \hat{p}^2$, nous aurrons,

$$\begin{aligned} \left(\hat{p}^2\hat{x} + \frac{i\hbar}{2}\frac{d\hat{p}^2}{d\hat{p}}\right)\tilde{\Psi}(\hat{p}) &= E\tilde{\Psi}(\hat{p}), \\ \left(\hat{p}^2\hat{x} + i\hbar\hat{p}\right)\tilde{\Psi}(\hat{p}) &= E\tilde{\Psi}(\hat{p}), \end{aligned} \tag{1.58}$$

sachant que dans la représentation d'impulsion $\hat{x} = i\hbar\frac{d}{dp}$, il vient que

$$i\hbar p^2\frac{d\tilde{\Psi}(p)}{dp} + i\hbar p\tilde{\Psi}(p) = E\tilde{\Psi}(p), \tag{1.59}$$

on arrangeant les termes et en intégrant sur les p nous obtenons

$$\tilde{\Psi}(p) = N\exp\left(\frac{iE}{\hbar p} - \ln p\right), \tag{1.60}$$

où encore

$$\tilde{\Psi}(p) = N\frac{\exp\left(\frac{iE}{\hbar p}\right)}{p}, \tag{1.61}$$

où N est une constante d'intégration, on voit bien que la fonction d'onde résultant est non ambiguë dans la représentation d'impulsion.

Voyons maintenant comment établir un lien entre la représentation de coordonnées et la représentation d'impulsion, d'abord, on détermine la fonction au valeurs propres en représentation impulsion :

$$\hat{p}\Psi_p(x) = p\Psi_p(x), \tag{1.62}$$

on sait bien que

$$\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}, \tag{1.63}$$

Donc

$$\frac{d}{dx}\Psi_p\left(x\right) = \frac{ip}{\hbar}\Psi_p\left(x\right), \tag{1.64}$$

on obtient donc $\Psi_p\left(x\right)$ sous la forme,

$$\Psi_p\left(x\right) = C\exp\left(\frac{ip}{\hbar}x\right), \tag{1.65}$$

La constante C doit être déterminée par normalisation

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_{p'}^{*}\left(x\right)\Psi_p\left(x\right)dx = \left|C\right|^2\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(i\frac{\left(p-p^{'}\right)x}{\hbar}\right)dx, \tag{1.66}$$

en utilisant la fonction delta de Dirac,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(i\left(p-p^{'}\right)x\right)dx = 2\pi\delta\left(p-p^{'}\right),$$

nous obtenons,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_{p'}^{*}\left(x\right)\Psi_p\left(x\right)dx = \left|C\right|^2 2\pi\hbar\delta\left(p-p^{'}\right),$$

où

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}},$$

finalement

$$\Psi_p\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\exp\left(\frac{ip}{\hbar}x\right), \tag{1.67}$$

Si le systéme est dans l'état $\left|\Psi\right\rangle$,

$$\tilde{\Psi}\left(p\right) = \left\langle p\right|\Psi\left(x\right)\rangle,$$

represente la foction d'onde dans la représentation des impulsion, en injectant la relation de fermeture dans la représentation des coordonées

$$\int |x\rangle \langle x| \, dx = 1, \tag{1.68}$$

il vient,

$$\tilde{\Psi}(p) = \langle p| \, \Psi(x)\rangle = \int \langle p \, |x\rangle \langle x| \, \Psi\rangle dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \exp\left(-\frac{ip}{\hbar}x\right) \Psi(x) \, dp, \tag{1.69}$$

la transformation inverse est

$$\Psi(x) = \langle x| \, \Psi(x)\rangle = \int \langle x \, |p\rangle \langle p| \, \Psi\rangle dp = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \exp\left(\frac{ip}{\hbar}x\right) \tilde{\Psi}(p) \, dp, \tag{1.70}$$

ceci est connu comme la transformation de Fourier et son inverse.

Maintenant nous pouvons calculer sa transformée de Fourier, afin d'obtenir la fonction d'onde de représentation de coordonnées correspondante.

Pour ça nous remplaçons (1.61) dans (1.70) :

$$\Psi(x) = \frac{N}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{p} \exp \frac{i}{\hbar} \left(\frac{E}{p} + px\right), \tag{1.71}$$

et pour effectuer cette intégration nous séparons l'intégrale en deux section, donc nous avons par la suite :

$$\Psi(x) = \frac{N}{\sqrt{2\pi\hbar}} \left\{ \int_{-\infty}^{0} \frac{dp}{p} \exp -\frac{i}{\hbar} \left(\frac{E}{p} + px\right) + \int_{0}^{+\infty} \frac{dp}{p} \exp \frac{i}{\hbar} \left(\frac{E}{p} + px\right) \right\}, \tag{1.72}$$

on sait que

$$\exp(i\theta) = \cos(\theta) + i \sin(\theta), \tag{1.73}$$

donc l'intégrale de Fourier s'ecrit :

$$\Psi(x) = \frac{N}{\sqrt{2\pi\hbar}}\left\{\int_{-\infty}^{0}\frac{dp}{p}\left[\cos\left(\frac{1}{\hbar}\left(\frac{E}{p}+px\right)\right)-i\sin\left(\frac{1}{\hbar}\left(\frac{E}{p}+px\right)\right)\right]\right.$$
$$\left.+\int_{0}^{+\infty}\frac{dp}{p}\left[\cos\left(\frac{1}{\hbar}\left(\frac{E}{p}+px\right)\right)+i\sin\left(\frac{1}{\hbar}\left(\frac{E}{p}+px\right)\right)\right]\right\}, \qquad (1.74)$$

nous avons la fonction $f(x) = \frac{1}{p}$ est impaire, c'est à dire $f(-x) = -f(x)$ il est alors évident que l'intégrale de la partie $\cos(x)$ est nuls, ils reste juste celle de $\sin(x)$ et est données par :

$$\Psi(x) = \frac{2iN}{\sqrt{2\pi\hbar}}\left\{\int_{0}^{+\infty}\frac{dp}{p}\left[\sin\left(\frac{1}{\hbar}\left(\frac{E}{p}+px\right)\right)\right]\right\}, \qquad (1.75)$$

après avoir utilisé les identités trigonométriques

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b), \qquad (1.76)$$

et

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{du}{u}\left[\sin(au)\cos\left(\frac{b}{u}\right)\right] = \int_{0}^{+\infty}\frac{du}{u}\left[\sin\left(\frac{b}{u}\right)\cos(au)\right] = \frac{\pi}{2}J_0\left(2\left(a^2b^2\right)^{\frac{1}{4}}\right), \qquad (1.77)$$

où J_0 est la fonction de Bessel du premier type.

Considérons le chengement de variable suivante :

$$p = u, dp = du \qquad (1.78)$$
$$a = \frac{E}{\hbar}, \qquad (1.79)$$
$$b = \frac{x}{\hbar}, \qquad (1.80)$$

on obtient finalement,

$$\Psi(x) = \frac{2iN}{\sqrt{2\pi\hbar}}\left\{\int_{0}^{+\infty}\frac{du}{u}\left[\sin(au)\cos\left(\frac{b}{u}\right)+\cos(au)\sin\left(\frac{b}{u}\right)\right]\right\}, \qquad (1.81)$$

d'où

$$\Psi(x)=\sqrt{\frac{2\pi}{\hbar}}iNJ_0\left(\frac{2}{\hbar}\sqrt{|xE|}\right), \tag{1.82}$$

nous remarquons que la fonction d'onde non ambiguë dans la représentation des coordonnées.

1.3.3 Représentation des coordonnées

Dans la représentation des coordonnées, l'équation de la fonction d'onde à résoudre est,

$$\left(i\hbar\hat{p}^2\frac{d}{dp}+i\hbar\hat{p}\right)\Psi(x)=E\Psi(x), \tag{1.83}$$

en multipiant l'équation (1.83)par $(\hat{x})$

$$\left(\hat{x}\hat{p}^2i\hbar\frac{d}{dp}+i\hbar\hat{x}\hat{p}\right)\Psi(x)=\hat{x}E\Psi(x), \tag{1.84}$$

où nous avons l'ordre de l'opérateur $\hat{x}$ $\hat{p}^2$ venant d'utiliser

$$O_p\equiv\frac{1}{2}\left(\hat{x}^{\alpha}\hat{p}\hat{x}^{\beta}\hat{p}\hat{x}^{\gamma}+\hat{x}^{\gamma}\hat{p}\hat{x}^{\beta}\hat{p}\hat{x}^{\alpha}\right)=\hat{x}\hat{p}^2-i\hbar\hat{p}+\alpha\gamma\hat{x}^{-1}, \tag{1.85}$$

et on sait que $\hat{x}=i\hbar\frac{d}{dp}$ et que $\hat{p}=-i\hbar\frac{d}{dx}$, donc on obtient

$$\hat{x}^2\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2}+\hat{x}\frac{d\Psi(x)}{dx}-\alpha\gamma\Psi(x)=-\left(\frac{E}{\hbar^2}\right)\hat{x}\Psi(x), \tag{1.86}$$

avec $\alpha+\beta+\gamma=1$. On peut noter que si nous faisons la transformation de variable

$$|x| = \frac{\hbar^2}{4E}\omega, dx=\frac{\hbar^2}{4E}d\omega, \tag{1.87}$$

$$\frac{dx}{d\omega} = \frac{\hbar^2}{4E}, \tag{1.88}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\right) = \left(\frac{d}{d\omega}\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{d}{d\omega}\frac{d\omega}{dx}\right) \\ &= \frac{4E}{\hbar^2}\frac{d}{d\omega}\left(\frac{4E}{\hbar^2}\frac{d}{d\omega}\right) = \frac{16E^2}{\hbar^4}\frac{d^2}{d\omega^2},\end{aligned} \tag{1.89}$$

L'équation (1.86) peut être exprimée sous la forme

$$\left(\frac{\hbar^2}{4E}\omega\right)^2\left(\frac{16E^2}{\hbar^4}\right)\frac{d^2\Psi}{d\omega^2} + \left(\frac{\hbar^2}{4E}\omega\right)\left(\frac{4E}{\hbar^2}\right)\frac{d\psi}{d\omega} - \alpha\gamma\Psi = -\left(\frac{E}{\hbar^2}\right)\left(\frac{\hbar^2}{4E}\omega\right)\Psi, \tag{1.90}$$

$$\omega^2\frac{d^2\Psi}{d\omega^2} + \omega\frac{d\psi}{d\omega} + \left(-\alpha\gamma + \frac{1}{4}\omega\right)\Psi = 0, \tag{1.91}$$

$$\omega^2\frac{d^2\Psi}{d\omega^2} + \omega\frac{d\psi}{d\omega} + \frac{1}{4}\left(\omega^2 - 4\alpha\gamma\right)\Psi = 0, \tag{1.92}$$

qui est l'équation différentielle de première type de Bessel avec la solution

$$\Psi(\omega) = \tilde{N}J_{\alpha\gamma}\left(\sqrt{\omega}\right) + \tilde{N}'Y_{\alpha\gamma}\left(\sqrt{\omega}\right),$$

oú $\omega = \frac{4E}{\hbar^2}|x|$, et la deuxième parties disparaît parceque $\tilde{N}' = 0$ donc on obtient

$$\Psi(x) = \tilde{N}J_{\alpha\gamma}\left(\frac{2}{\hbar}\sqrt{|xE|}\right), \tag{1.93}$$

une fois que E est positif, la compatibilité des solutions issues des deux représentations nécessite de fixer l'un des paramètres figurant dans l'index de la fonction de Bessel ($\alpha = 0$ ou $\gamma = 0$) dans la représentation de coordonnées.

À ce stade, nous devrions dire que l'on pourrait travailler avec un modèle un peu plus général, où $2m(x) = (ax+b)^{-1}$.

$$\Psi(x) = \tilde{N}J_0\left(\frac{2}{\hbar}\sqrt{\left|E\left(x + \frac{b}{a}\right)\right|}\right), \tag{1.94}$$

en choisissant de faire $\gamma = 0$, nous concluons que $\beta = 1 - \alpha$ et on termine avec une sous-classe d'opérateurs, compatibles dans les deux représentations.

$$O_\alpha = \frac{1}{2}\left(\hat{x}^\alpha \hat{p} \hat{x}^{1-\alpha} \hat{p} + \hat{p} \hat{x}^{1-\alpha} \hat{p} \hat{x}^\alpha\right). \tag{1.95}$$

Nous allons montrer ci-dessous qu'en réalité, il ne reste aucune ambiguïté car tous les choix de α sont équivalents. Pour cela, on notons que,

$$\hat{x}^\alpha \hat{p} \hat{x}^{1-\alpha} \hat{p} = \sqrt{\hat{x}} \hat{p} \sqrt{\hat{x}} \hat{p} + i\hbar \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \hat{p}, \tag{1.96}$$

$$\hat{p} \hat{x}^{1-\alpha} \hat{p} \hat{x}^\alpha = \hat{p} \sqrt{\hat{x}} \hat{p} \sqrt{\hat{x}} - i\hbar \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \hat{p}, \tag{1.97}$$

de sorte que l'opérateur O_α est simplement réécrit comme.

$$O_\alpha = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\hat{x}} \hat{p} \sqrt{\hat{x}} \hat{p} + \hat{p} \sqrt{\hat{x}} \hat{p} \sqrt{\hat{x}}\right) = O_{Wey}. \tag{1.98}$$

Dans ce cas, nous avons réussi à éviter l'ambiguïté des ordres en travaillant dans la représentation d'impulsion, qui reste toujours vraie si on incluons une énergie potentielle de liaison dans l'hamiltonien d'origine. De plus nous avons montré que cette quantification sans ambiguïté correspond à ce que l'on appelle l'ordre de Weyl. Pour illustrer cet argument en étudiant un exemple particulier où l'hamiltonien classique à prendre en considération est :

$$H = (ax + b)\, p^2 + V(x), \tag{1.99}$$

qui est dans la représentation des coordonnées, en utilisant ($\alpha = 0$ où $\gamma = 0$) rend l'équation indépendante du temps

$$-\hbar^2 (ax + b) \frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} - \hbar^2 \frac{d\Psi(x)}{dx} + V(x)\Psi(x) = E\Psi(x), \tag{1.100}$$

où $V(x) = \frac{A}{\left(x+\frac{b}{a}\right)} + Bx$, avec A et B sont des constants.

Noter que nous avons fixé les paramètres d'ambiguïté, car nous déduisons que la forme du potentiel ne doit pas modifier le choix des paramètres d'ambiguïté, et que ces paramètres ont été fixés lors du traitement du cas libre. En faisant une translation $\left(x = y - \frac{b}{a}\right) \rightarrow y = x + \frac{b}{a}$, donc $dx = dy$. On peut réécrire l'équation (1.100) sous la forme

$$-\hbar^2 \left(x + \frac{b}{a}\right) \frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} - \frac{\hbar^2}{a} \frac{d\Psi(x)}{dx} + \frac{1}{a} \left(\frac{A}{\left(x + \frac{b}{a}\right)} + Bx \right) \Psi(x) = \frac{E}{a} \Psi(x), \quad (1.101)$$

$$-\hbar^2 y \frac{d^2\Psi(y)}{dy^2} - \frac{\hbar^2}{a} \frac{d\Psi(y)}{dy} + \frac{1}{a} \left(\frac{A}{y} + B\left(y - \frac{b}{a}\right) \right) \Psi(y) = \frac{E}{a} \Psi(y), \quad (1.102)$$

divisions l'équation sur $\hbar^2$ on obtient

$$-y \frac{d^2\Psi(y)}{dy^2} - \frac{1}{a} \frac{d\Psi(y)}{dy} + \left(\frac{A}{\hbar^2 a} \frac{1}{y} + \frac{B}{\hbar^2 a} y - \frac{B}{\hbar^2 a} \frac{b}{a} \right) \Psi(y) = \frac{E}{\hbar^2 a} \Psi(y), \quad (1.103)$$

noter que $\bar{A} \equiv \frac{A}{\hbar^2 a}$, $\bar{B} \equiv \frac{B}{\hbar^2 a}$, $\bar{E} \equiv \frac{\left(E + \frac{bB}{a}\right)}{\hbar^2 a}$

$$-y \frac{d^2\Psi(y)}{dy^2} - \frac{1}{a} \frac{d\Psi(y)}{dy} + \left(\frac{\bar{A}}{y} - \bar{B}y \right) \Psi(y) = \bar{E}\Psi(y), \quad (1.104)$$

L'équation ci-dessus présente la solution suivante qui n'est pas singulière à l'origine

$$\begin{aligned} \Psi(y) &= N y^g e^{\sqrt{\bar{B}}y}_1 F_1 \left[\frac{1}{2} - \frac{\bar{E}}{\sqrt{\bar{B}}} + \frac{1}{a} \sqrt{(a-1)^2 + 4\bar{A}a^2} + 1; \right. \\ & \left. \frac{1}{a} \sqrt{(a-1)^2 + 4\bar{A}a^2} + 1; 2\sqrt{\bar{B}}y \right], \end{aligned} \quad (1.105)$$

où nous avons défini

$$g \equiv \frac{1}{2a} \sqrt{(a-1)^2 + 4\bar{A}a^2} + (a-1), \quad (1.106)$$

et N est une constante de normalisation.

L'exigence que la fonction hypergéométrique confluente devienne un polynôme impose la limitation qui détermine la quantification des énergies propres, de sorte que

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{\bar{E}}{\sqrt{\bar{B}}}+\frac{1}{a}\sqrt{(a-1)^2+4\bar{A}a^2}+1\right)=-n, \tag{1.107}$$

Cela nous amène au spectre des énergies suivant

$$E_n=\hbar\sqrt{\frac{B}{a}}\left((2n+1)\,a+\sqrt{(a-1)^2+4\frac{A}{\hbar^2}}\right)-\frac{bB}{a}. \tag{1.108}$$

1.4 conclusion

Dans ce chapitre, nous avons considérer une forme approprieé de l'opérateur Hamiltonien, encore plus generale que celle proposer par Oldwig von Roos, c'est une forme avec quatre termes qui permet d'inclure le cas de Weyl, où nous avons montrer que les differents choix possibles des parramètres d'ambiguités nous permetent d'avoir des Hamiltoniens équivalents en terme de parties cinétique mais qui diffèrent par rapport au potentiel dit effectif et qui sera absorbé dans le terme du potentiel.

finalement, un choix possible pour eviter le probléme d'ambguité d'ordre est de faire l'étude dans la représentation d'impulsion puis la transformer dans la représentation de coordonnées si nécessaire. Si non, le choix de représentation de coordonnées nécissite de fixer l'un des paramètres figurant dans la fonction d'onde, où on peut travailler avec un modèle un peu plus général $2m(x)=(ax+b)^{-1}$, de plus nous avons montré que cette quantification sans ambiguïté correspond à ce que l'on appelle l'ordre de Weyl.

Chapitre 2

Résoulution de l'équation de schrödinger pour une particule non relativiste a masse variable par la méthode de Nikoforov Uvarov

2.1 introduction

Diverses techniques ont été employer pour obtenir les énergies propres et les fonctions d'onde correspondantes et qui sont solution de l'équation de Schrodinger. Le choix d'une méthode particulière repose généralement sur la forme du potentiel et sur celle de la fonction d'onde recherché, où la résolution de cette équation nous fournis toutes les informations sur le système étudié. En effet il est bien connu que toute équation de Schrödinger unidimensionnelle ou radiale peut être écrite comme une équation différentielle linéaire du second ordre par rapport aux variables spatiaux, dans ce chapitre, nous essayons de trouver les solutions exactes de l'équation de Schrödinger résultante pour les systèmes physiques de masse variable dépendante de la position à une dimmension. A l'aide de la méthode de Nikoforov Uvarov nous essayons de construire les solutions de ces équations différentielles avec des fonctions orthogonales spéciales [22]. Dans ce chapitre nous expliquerons en détail le formalisme mathématique de cette méthode et la manière d'utilisation pour traiter ce type particulier de problèmes physique.

2.2 la méthode Nikoforov Uvarov

Dans cette section, nous décrivons brièvement la méthode Nikoforov Uvarov [23] qui est proposée pour résoudre l'équation différentielle de second ordre de type hypergéométrique de la forme

$$\Psi_n''(s) + \frac{\widetilde{\tau}(s)}{\sigma(s)}\Psi_n'(s) + \frac{\tilde{\sigma}\,(s)}{\sigma^2(s)}\Psi_n(s) = 0, \tag{2.1}$$

où $\sigma\,(s)$ et $\tilde{\sigma}(s)$ sont des polynômes au plus du second degré et $\tilde{\tau}(s)$ est un polynôme du premier degré.

Afin de trouver une solution particulière pour l'équation (2.1), on fait le changement de fonction suivant :

$$\Psi_n(s) = \Phi_n(s)y_n(s), \tag{2.2}$$

partant de l'équation (2.2) on a :

$$\Psi'\,(s) = \Phi_n'(s)y_n(s) + \Phi_n(s)y_n'(s), \tag{2.3}$$

$$\Psi''\,(s) = \Phi_n''(s)y_n(s) + \Phi_n'(s)y_n'(s) + \Phi_n'(s)y_n'(s) + \Phi_n(s)y_n''(s), \tag{2.4}$$

en insérant les équations (2.3) et (2.4) dans l'équation (2.1) on obtient :

$$y''(s) + (2\frac{\Phi_n'(s)}{\Phi_n(s)} + \frac{\widetilde{\tau}(s)}{\sigma(s)})y_n'(s) + (\frac{\Phi_n''(s)}{\Phi_n(s)} + \frac{\widetilde{\tau}(s)}{\sigma(s)}\frac{\Phi_n'(s)}{\Phi_n(s)})y_n(s) = 0, \tag{2.5}$$

nous choisissons la fonction $\Phi_n(s)$ qui nous permet d'écrire le coefficient de $y_n'(s)$ sous la forme $\frac{\tau(s)}{\sigma(s)}$où $\tau(s)$ est un polynôme au plus de premier degré. et que $\Phi_n\,(s) \neq 0$, nous avons :

$$2\frac{\Phi'_n(s)}{\Phi_n(s)} + \frac{\widetilde{\tau}(s)}{\sigma(s)} = \frac{\tau(s)}{\sigma(s)}, \tag{2.6}$$

et $\Phi_n(s)$ est une dérivé logarithmique dont la solution est obtenu à partir de la condition,

$$\frac{\Phi'_n(s)}{\Phi_n(s)} = \frac{\tau(s)}{\sigma(s)}, \tag{2.7}$$

après avoir comparé les équations (2.6) et (2.7), nous constatons que

$$\pi(s) = \frac{1}{2}\left[\widetilde{\tau}(s) - \tau(s)\right], \tag{2.8}$$

donc nous savons à partir de (2.8), le nouveau paramètre $\pi(s)$ est un polynôme de premier degré, de la dernière équation nous écrivons

$$\tau(s) = \widetilde{\tau}(s) + 2\pi(s), \tag{2.9}$$

où $\tau(s)$ doit vérifier la condition $(\tau'(s)\langle 0)$, qui nous donne les solutions physiquement acceptables.

Afin de simplifié l'équation (2.5) et le coefficient de $y_n(s)$ dans (2.6), calculons tout d'abord $\left(\frac{\Phi'_n(s)}{\Phi_n(s)}\right)'$

$$\left(\frac{\Phi'_n(s)}{\Phi_n(s)}\right)' = \frac{\Phi''_n(s)}{\Phi_n(s)} - \left(\frac{\Phi'_n(s)}{\Phi_n(s)}\right)^2, \tag{2.10}$$

à partir de (2.7) et (2.10) nous écrivons

$$\frac{\Phi''_n(s)}{\Phi_n(s)} = \left(\frac{\tau(s)}{\sigma(s)}\right)' + \left(\frac{\tau(s)}{\sigma(s)}\right)^2, \tag{2.11}$$

dans ce cas le coefficient de $y_n(s)$ s'écrit en forme plus appropriée en prenant l'égalité donné dans (2.7)

$$\frac{\Phi''_n(s)}{\Phi_n(s)} + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)}\frac{\Phi'_n(s)}{\Phi_n(s)} + \frac{\tilde{\sigma}\,(s)}{\sigma^2\,(s)} = \frac{\bar{\sigma}\,(s)}{\sigma^2\,(s)}, \tag{2.12}$$

où

$$\bar{\sigma}\,(s) = \tilde{\sigma}\,(s) + \pi^2(s) + \pi(s)\left[\widetilde{\tau}(s) - \sigma'(s)\right] + \pi'(s)\sigma(s), \tag{2.13}$$

donc (2.5) s'écrit de la même forme de (2.1)

$$y_n''(s) + \frac{\tau\,(s)}{\sigma\,(s)} y_n'(s) + \frac{\bar{\sigma}\,(s)}{\sigma^2\,(s)} y_n(s) = 0, \tag{2.14}$$

par la suite nous avons :

$$\bar{\sigma}\,(s) = \lambda\sigma(s), \tag{2.15}$$

où λ est une constante.

L'équation (2.13) devient de type hypergéométrique

$$\sigma(s)y_n''(s) + \tau(s)y_n'(s) + \lambda y_n(s) = 0, \tag{2.16}$$

$$\tau(s) = \widetilde{\tau}(s) + 2\pi(s), \tau'(s)\langle 0, \tag{2.17}$$

où le nombre premier indique la différenciation par rapport à s.

Ensuite on cherche une famille de solutions qui correspondant à

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau'(s) - \frac{1}{2}n(n+1)\sigma''(s), n = 0, 1, 2, ..., \tag{2.18}$$

le $y_n(s)$ peut être exprimé en termes de la relation de Rodrigues

$$y_n(s) = \frac{B_n}{\rho(s)} \frac{d^n}{ds^n}\left[\sigma^n(s)\rho(s)\right], \tag{2.19}$$

où B_n est la constante de normalisation et la fonction de pondération $\rho(s)$ représente la fonction résolvante (fonction poids), qui a été trouvé à partir de l'équation suivante

$$\sigma\,(s)\,y_n''\,(s) + \tau\,(s)\;\; y_n' = -\lambda y_n\,(s) = \frac{1}{\rho\,(s)}\left[\rho\,(s)\,\sigma\,(s)\;\; y_n'\,(s)\right], \tag{2.20}$$

et $\rho\,(s)$ est une dérivé logarithmique dont la soulution est obtenue à partir de l'expréssion

$$\frac{\rho'(s)}{\rho(s)} = \frac{\tau(s) - \sigma'(s)}{\sigma(s)}. \tag{2.21}$$

En définissant

$$k = \lambda - \pi'(s), \tag{2.22}$$

on obtient le polynôme

$$\pi(s) = \frac{1}{2}\left[\sigma'(s) - \widetilde{\tau}(s)\right] \pm \left[\frac{1}{4}\left[\sigma'(s) - \widetilde{\tau}(s)\right]^2 - \tilde{\sigma}(s) + k\sigma\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{2.23}$$

Comme on a vu précédemment, le polynôme $\pi(s)$ est un polynôme au plus de degré 1, ceci est vrais si et seulement si l'expression sous la racine carrée dans l'équation précedente doit être carré d'un polynôme au plus de degré 1 aussi, et pour cela il faut que le discriminant de l'expression quadratique sous la racine est nulle, donc les valeurs de k sont déterminées cela nous permet aussi de déterminé le polynôme $\pi(s)$ et puis $\tau(s)$et λ.

2.3 Applications

2.4 cas 01

Comme premier exemple, nous considérons une particule à une dimensions dont la masse décroît ou augmente de façon exponentielle, en présence d'un potentiel de comportement similaire [10] :

$$m(x) = m_0 e^{cx}, V(x) = V_0 e^{cx}. \tag{2.24}$$

Avec c : constante

$$H\varphi = E\varphi,$$

Partant de (2.24) et en insérant dans l'équation (1.15) et (1.16) nous obtenons

$$\begin{aligned} E\varphi &= \left\{-\frac{\hbar^2}{2m_0}e^{-cx}\frac{d^2}{dx^2} - \frac{\hbar^2}{4m_0(a+1)}e^{-cx}\left[(\alpha+\gamma-a)c^2 + 2(a+\gamma\alpha-\alpha-\gamma)c^2\right]\right. \\ &\left. +\frac{\hbar^2}{8m_0}e^{-cx}c^2 + V_0e^{cx}\right\}\varphi, \end{aligned} \tag{2.25}$$

en multipliant par e^{cx} pour que l'équation ci-dessus devient

$$Ee^{cx}\varphi = \{-\frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{d^2}{dx^2} - \frac{\hbar^2}{m_0}\left[\frac{c^2}{4(a+1)}(a-2\gamma\alpha-\alpha-\gamma) + \frac{c^2}{8}\right] + V_0e^{2cx}\}\varphi, \tag{2.26}$$

nous définissons $\varepsilon \equiv \frac{\hbar^2}{m_0}\left(q - \frac{c^2}{8}\right)$,sachant que $q = \frac{c^2}{4(a+1)}(a-2\gamma\alpha-\alpha-\gamma)$. L'équation (2.26) devient

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0}\frac{d^2}{dx^2}\varphi + (V_0e^{2cx} - Ee^{cx})\varphi = \varepsilon\varphi, \tag{2.27}$$

Notons que cette dernière équation correspond à une équation de Schrödinger pour une particule de masse constante sous l'influence du potentiel de Morse [24]. Cependant, nous ferons une autre modification qui convient pour la mettre sous une forme plus familière, celle d'un oscillateur harmonique à barrière centripète. Ceci est fait en utilisant une transformation de coordonnées et une redéfinition de la fonction d'onde définie comme [25]

$$x = f(u), \varphi(x) = \left(\frac{df(u)}{du}\right)^{\frac{1}{2}}\chi(u), \tag{2.28}$$

d'où, nous trouvons

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{df(u)} = \frac{d\varphi(x)}{du}\frac{du}{df(u)} = \left(\frac{df}{du}\right)^{-1}\frac{d\varphi(x)}{du}, \tag{2.29}$$

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \left(\frac{df}{du}\right)^{-1} \{\frac{1}{2}\frac{d^2 f}{du^2}\left(\frac{df}{du}\right)^{-\frac{1}{2}} \chi(u) + \left(\frac{df}{du}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{du}\chi(u)\}, \qquad (2.30)$$

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = \left(\frac{df}{du}\right)^{-\frac{3}{2}} \frac{d^2}{du^2}\chi(u) + \left[\frac{1}{2}\frac{d^3 f}{du^3}\left(\frac{df}{du}\right)^{-\frac{5}{2}} - \frac{3}{4}\left(\frac{d^2 f}{du^2}\right)^2 \left(\frac{df}{du}\right)^{-\frac{7}{2}}\right] \chi(u), \qquad (2.31)$$

On remplacant (2.31) dans (2.27) nous obtenons

$$\begin{aligned}
\varepsilon \left(\frac{df(u)}{du}\right)^{\frac{1}{2}} \chi(u) = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \Bigg[\Bigg[& \left(\frac{df}{du}\right)^{-\frac{3}{2}} \frac{d^2}{du^2}\chi(u) \\
& + \left[\frac{1}{2}\frac{d^3 f}{du^3}\left(\frac{df}{du}\right)^{-\frac{5}{2}} - \frac{3}{4}\left(\frac{d^2 f}{du^2}\right)^2 \left(\frac{df}{du}\right)^{-\frac{7}{2}}\right] \chi(u)\Bigg] \\
& + (V_0 e^{2cf(u)} - E e^{cf(u)}) \left(\frac{df(u)}{du}\right)^{\frac{1}{2}} \chi(u), \qquad (2.32)
\end{aligned}$$

en divisant par $\left(\frac{df}{du}\right)^{-\frac{3}{2}}$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{df(u)}{du}\right)^2 \varepsilon\chi(u) &= -\frac{\hbar^2}{2m_0}\left[\frac{d^2}{du^2}\chi(u) + \left[\frac{1}{2}\frac{d^3 f}{du^3}\left(\frac{df}{du}\right)^{-1} - \frac{3}{4}\left(\frac{d^2 f}{du^2}\right)^2 \left(\frac{df}{du}\right)^{-2}\right]\chi(u)\right] \\
&\quad + \left(\frac{df(u)}{du}\right)^2 (V_0 e^{2cf(u)} - E e^{cf(u)})\chi(u) \qquad (2.33)
\end{aligned}$$

et aussi en multipliant par m_0, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
0 &= \{-\frac{\hbar^2}{2}\frac{d^2}{du^2} - \frac{\hbar^2}{4}\left[\frac{d^3 f}{du^3}\left(\frac{df}{du}\right)^{-1} - \frac{3}{2}\left(\frac{d^2 f}{du^2}\right)^2 \left(\frac{df}{du}\right)^{-2}\right] \\
&\quad + \left(\frac{df(u)}{du}\right)^2 (V_0 m_0 e^{2cf(u)} - E m_0 e^{cf(u)} - \varepsilon)\}\chi(u), \qquad (2.34)
\end{aligned}$$

on pose

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{df\left(u\right)}{du}\right)^{2}\left(W\left(u\right)-\varepsilon\right)-\frac{\hbar^{2}}{4}\left[\frac{d^{3}f}{du^{3}}\left(\frac{df}{du}\right)^{-1}-\frac{3}{2}\left(\frac{d^{2}f}{du^{2}}\right)^{2}\left(\frac{df}{du}\right)^{-2}\right] \\
&= W_{T}\left(u\right)-E_{T},
\end{aligned}
\tag{2.35}
$$

où

$$
W\left(u\right)=V_{0}m_{0}e^{2cf(u)}-Em_{0}e^{cf(u)},
$$

On termine par

$$
\left(-\frac{\hbar^{2}}{2}\frac{d^{2}}{du^{2}}+W_{T}\left(u\right)-E_{T}\right)\chi\left(u\right)=0.
\tag{2.36}
$$

Dans l'étape suivantes, nous faisons le changement de fonction suivant :

$$
f\left(u\right)=\ln\left(u^{\frac{3}{c}}\right),
\tag{2.37}
$$

et cela nous amène à

$$
\frac{df\left(u\right)}{du}=\frac{d}{du}\ln\left(u^{\frac{3}{c}}\right)=\frac{2}{c}\frac{1}{u},
\tag{2.38}
$$

$$
\frac{d^{2}f\left(u\right)}{du^{2}}=\frac{d}{du}\left(\frac{2}{c}\frac{1}{u}\right)=-\frac{2}{c}\frac{1}{u^{2}},
\tag{2.39}
$$

$$
\frac{d^{3}f\left(u\right)}{du^{3}}=\frac{d}{du}\left(-\frac{2}{c}\frac{1}{u^{2}}\right)=\frac{4}{c}\frac{1}{u^{3}},
\tag{2.40}
$$

$$
W\left(u\right)=V_{0}m_{0}e^{2cf(u)}-Em_{0}e^{cf(u)}=V_{0}m_{0}u^{4}-Em_{0}u^{2},
\tag{2.41}
$$

nous remplacons dans (2.33) et par définision de

$$
g=\frac{4\varepsilon m_{0}}{c^{2}}+\frac{\hbar^{2}}{8};E_{T}=\frac{Em_{0}}{c^{2}};\omega=\sqrt{\frac{2V_{0}m_{0}}{c}},
\tag{2.42}
$$

finalement nousobtenons

$$-\frac{\hbar^2}{2}\frac{d^2\chi\left(u\right)}{du^2}+\left(\frac{\omega^2}{2}u^2-\frac{g}{u^2}\right)\chi\left(u\right)=E_T\chi\left(u\right), \tag{2.43}$$

sachant que E_T est une constante qui prend le rôle de "l'énergie" dans la nouvelle équation qui est une équation du type hypergéométrique, donc on peut appliquer la méthode de Nikoforov Uvarov.

$$\frac{d^2}{du^2}\chi+\left[-\frac{\omega^2}{\hbar^2}u^2+\frac{2g}{\hbar^2u^2}+\frac{2E_T}{\hbar^2}\right]\chi=0, \tag{2.44}$$

en prenant une nouvelle variable $s=u^2$on obtient

$$\frac{d^2}{du^2}=\frac{d}{du}(\frac{d}{du})=\frac{ds}{du}\frac{d}{ds}(\frac{ds}{du}\frac{d}{ds})=2\frac{d}{ds}+4s\frac{d^2}{ds^2}, \tag{2.45}$$

$$4s\frac{d^2}{ds^2}\chi+2\frac{d}{ds}\chi+\left[-\frac{\omega^2}{\hbar^2}s+\frac{2g}{\hbar^2s}+\frac{2E_T}{\hbar^2}\right]\chi=0, \tag{2.46}$$

$$\frac{d^2}{ds^2}\chi+\frac{1}{2s}\frac{d}{ds}\chi+\frac{1}{(2s)^2}\left[-\frac{\omega^2}{\hbar^2}s^2+\frac{2E_T}{\hbar^2}s+\frac{2g}{\hbar^2}\right]\chi=0, \tag{2.47}$$

$$\chi''+\frac{1}{2s}\chi'+\frac{1}{(2s)^2}\left[-\frac{\omega^2}{\hbar^2}s^2+\frac{2E_T}{\hbar^2}s+\frac{2g}{\hbar^2}\right]\chi=0. \tag{2.48}$$

Maintenant, si nous comparons l'équation ci-dessus avec l'équation (2.1) de type hypergéométrique généralisée avec une paramétrisation de variables réelles $s=s(u)$ nous obtenons

$$\widetilde{\tau}(s)=1,\sigma(s)=2s,\sigma'(s)=2,\tilde{\sigma}\left(s\right)=-\frac{\omega^2}{\hbar^2}s^2+\frac{2E_T}{\hbar^2}s+\frac{2g}{\hbar^2}, \tag{2.49}$$

aprés nous calculons la fonction $\pi\left(s\right)$

$$\pi(s)=\frac{1}{2}\left[\sigma'(s)-\widetilde{\tau}(s)\right]\pm\left[\frac{1}{4}\left[\sigma'(s)-\widetilde{\tau}(s)\right]^2-\tilde{\sigma}\left(s\right)+k\sigma\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{2.50}$$

$$\pi(s) = \frac{1}{2}\left[2-1\right] \pm \left[\frac{1}{4}\left[2-1\right]^2 - (-\frac{\omega^2}{\hbar^2}s^2 + \frac{2E_T}{\hbar^2}s + \frac{2g}{\hbar^2}) + 2ks\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{2.51}$$

$$\pi(s) = \frac{1}{2} \pm \left[\frac{\omega^2}{\hbar^2}s^2 + (2k - \frac{2E_T}{\hbar^2})s + \frac{1}{4} - \frac{2g}{\hbar^2}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{2.52}$$

Et aussi nous cherchons une valeur physique de k, rendant le discriminant de l'expression sous racine carrée dans la dernière équation, égal à zéro.

$$\frac{\omega^2}{\hbar^2}s^2 + (2k - \frac{2E_T}{\hbar^2})s + \frac{1}{4} - \frac{2g}{\hbar^2} = 0, \tag{2.53}$$

Le discriminant égale

$$\Delta = (2k - \frac{2E_T}{\hbar^2})^2 - 4(\frac{\omega^2}{\hbar^2})(\frac{1}{4} - \frac{2g}{\hbar^2}) = 0, \tag{2.54}$$

$$(2k - \frac{2E_T}{\hbar^2})^2 = 4(\frac{\omega^2}{\hbar^2})(\frac{1}{4} - \frac{2g}{\hbar^2}), \tag{2.55}$$

$$2k - \frac{2E_T}{\hbar^2} = \pm\left[4(\frac{\omega^2}{\hbar^2})(\frac{1}{4} - \frac{2g}{\hbar^2})\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.56}$$

$$2k = \frac{2E_T}{\hbar^2} \pm 2(\frac{\omega}{\hbar})\left[\frac{1}{4} - \frac{2g}{\hbar^2}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{2.57}$$

en remplaçant dans l'équation (2.23)

$$\pi(s) = \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{4} - \frac{2g}{\hbar^2}\right]^{\frac{1}{2}} - \frac{\omega}{\hbar}s, \tag{2.58}$$

donc on peut calculer la fonction $\tau(s) = \tilde{\tau}(s) + 2\pi(s)$, en prenant en considération la condition d'état lié qui doit être établie lorsque $\tau'(s) < 0$.

$$\tau(s) = 2 + 2\left[\frac{1}{4} - \frac{2g}{\hbar^2}\right]^{\frac{1}{2}} - \frac{\omega}{\hbar}s, \tag{2.59}$$

et

$$\tau'(s) = -2\frac{\omega}{\hbar}, \tag{2.60}$$

selon la méthode, pour trouver l'équation d'énergie à partir de laquelle on calcule les valeurs propres de l'énergie, il faut trouver les valeurs des paramètres

$$\lambda = k + \pi'(s), \tag{2.61}$$

et

$$\lambda_n = -n\tau'(s) - \frac{1}{2}n(n+1)\sigma''(s), n = 0, 1, 2, ... \tag{2.62}$$

En utilisant la relation $\lambda_n = \lambda$ et les définitions de paramètres dans Eq (2.1), on constate que les valeurs propres sont :

$$\lambda = k + \pi'(s), \tag{2.63}$$

$$\lambda = \frac{E_T}{\hbar^2} - (\frac{\omega}{\hbar})\left[\frac{1}{4} - \frac{2g}{\hbar^2}\right]^{\frac{1}{2}} - \frac{\omega}{\hbar}, \tag{2.64}$$

et

$$\lambda_n = -n\tau'(s) - \frac{1}{2}n(n+1)\sigma''(s), \tag{2.65}$$

$$\lambda_n = 2n\frac{\omega}{\hbar}, \tag{2.66}$$

donc pour (2.64) = (2.66)

$$\lambda_n = \lambda, \tag{2.67}$$

$$2n\frac{\omega}{\hbar}=\frac{E_T}{\hbar^2}-(\frac{\omega}{\hbar})\left[\frac{1}{4}-\frac{2g}{\hbar^2}\right]^{\frac{1}{2}}-\frac{\omega}{\hbar}, \tag{2.68}$$

$$\frac{E_T}{\hbar^2}=(\frac{\omega}{\hbar})\left[\frac{1}{4}-\frac{2g}{\hbar^2}\right]^{\frac{1}{2}}+2n\frac{\omega}{\hbar}+\frac{\omega}{\hbar}$$

$$\frac{E_T}{\hbar^2}=(\frac{\omega}{\hbar})(2n+1+\left[\frac{1}{4}-\frac{2g}{\hbar^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{m_0E_n}{\hbar^2c^2}=(\frac{\sqrt{2m_0V_0}}{\hbar c})\left[2n+1+\left[\frac{1}{4}-\frac{2(\frac{\varepsilon}{c^2}+\frac{\hbar^2}{8})}{\hbar^2}\right]^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$\frac{m_0E_n}{\hbar^2c^2}=(\frac{\sqrt{2m_0V_0}}{\hbar c})\left[2n+1+\left[(\frac{1}{4}-\frac{2(\frac{\hbar^2(q-\frac{c^2}{8})}{c^2}+\frac{\hbar^2}{8})}{\hbar^2}\right]^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$\frac{m_0E_n}{\hbar^2c^2}=(\frac{\sqrt{2m_0V_0}}{\hbar c})\left[2n+1+\left[\frac{1}{4}-\frac{2(\frac{\hbar^2q}{c^2}-\frac{\hbar^2}{8}+\frac{\hbar^2}{8})}{\hbar^2}\right]^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$\frac{m_0E_n}{\hbar^2c^2}=\frac{m_0\sqrt{2V_0}}{\sqrt{m_0}\hbar c}\left[2n+1+\left[\frac{1}{4}-\frac{2q}{c^2}\right]^{\frac{1}{2}}\right], \tag{2.69}$$

avec

$$E_T=\frac{m_0E_n}{c^2},\omega=\frac{\sqrt{2m_0V_0}}{c},g=\frac{4\varepsilon m_0}{c^2}+\frac{\hbar^2}{8},\varepsilon=\frac{\hbar^2}{m_0}(q-\frac{c^2}{8}),q=\frac{c^2}{4(a+1)}(a-2\alpha\gamma-\alpha-\gamma). \tag{2.70}$$

Ce dernier donne

$$E_n=\hbar c\sqrt{\frac{2V_0}{m_0}}\left[2n+1+\nu(\alpha,\beta,\gamma,a)\right], \tag{2.71}$$

avec

$$\nu(\alpha,\beta,\gamma,a)=\left[\frac{1}{4}-\frac{2q}{c^2}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{2.72}$$

Passons maintenant au calcul de la fonction d'onde normalisée. Premièrement on cherche la fonction $\Phi_n(s)$ en substituant $\pi(s)$ et $\sigma(s)$ dans (2.7) cela nous donne

$$\frac{\Phi_n'(s)}{\Phi_n(s)} = \frac{\pi(s)}{\sigma(s)} = \frac{\frac{1}{2} + \left[\frac{1}{4} - \frac{2g}{\hbar^2}\right]^{\frac{1}{2}} - \frac{\omega}{\hbar}s}{2s}, \tag{2.73}$$

$$\int \frac{\Phi_n'(s)}{\Phi_n(s)} ds = \int \frac{\frac{1}{2} + \left[\frac{1}{4} - \frac{2g}{\hbar^2}\right]^{\frac{1}{2}} - \frac{\omega}{\hbar}s}{2s} ds,$$

$$\ln \Phi_n(s) = \int \frac{\frac{1}{2} + \left[\frac{1}{4} - \frac{2g}{\hbar^2}\right]^{\frac{1}{2}} - \frac{\omega}{\hbar}s}{2s} ds,$$

$$\Phi_n(s) = \exp \int \frac{\frac{1}{2} + \left[\frac{1}{4} - \frac{2g}{\hbar^2}\right]^{\frac{1}{2}} - \frac{\omega}{\hbar}s}{2s} ds, \tag{2.74}$$

Pour faciliter le travail , on pose

$$\alpha = -\frac{2g}{\hbar^2}, \varepsilon = \left[\frac{1}{4} - \frac{2g}{\hbar^2}\right]^{\frac{1}{2}}, \beta = \frac{\omega}{\hbar}. \tag{2.75}$$

$$\Phi_n(s) = \exp \int \left(\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\varepsilon\right) s^{-1} - \frac{1}{2}\beta\right) ds,$$

$$\Phi_n(s) = \exp\left(\frac{1}{4}\ln s + \frac{1}{2}\varepsilon \ln s - \frac{1}{2}\beta s\right),$$

$$\Phi_n(s) = s^{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\varepsilon} \exp\left(-\frac{1}{2}\beta s\right), \tag{2.76}$$

ensuite nous calculons la fonction de poids

$$\begin{aligned} \rho(s) &= \frac{1}{\sigma(s)} \exp\left(\int \frac{\tau(s)}{\sigma(s)} ds\right) = \frac{1}{2s} \exp\left(\int \frac{2 + 2\varepsilon - \beta s}{2s} ds\right), \\ &= \frac{1}{2s} \exp\left(\ln s + \varepsilon \ln s - \frac{\beta}{2} s\right), \\ &= \frac{1}{2} s^{\varepsilon} \exp\left(-\frac{\beta}{2} s\right), \end{aligned} \tag{2.77}$$

Substituant dans la formule de Rodrigues (2.19), les fonctions propres sont données par la forme suivante :

$$
\begin{aligned}
y_n(s) &= A_n \rho^{-1}(s) \frac{d^n}{ds^n} \left[\sigma^n(s) \rho(s)\right], \\
&= s^{-\varepsilon} \exp(\frac{\beta}{2}s) \frac{d^n}{ds^n} \left[s^{n+\varepsilon} \exp(-\frac{\beta}{2}s)\right], \\
&= L_n^{(\varepsilon)} \left(-\frac{\beta}{2}s\right), \qquad (2.78)
\end{aligned}
$$

où $L_n^{(\varepsilon)}$ sont les polynômes de laguerre associés [26], par conséquent la solution pair de la fonction satisfaisant (2.2) est :

$$
\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2\beta^{1+\varepsilon} n!}{\Gamma(n+\varepsilon+1)}} \exp(-\frac{\beta}{2}x^2) L_n^{(\varepsilon)} \left(-\frac{\beta}{2}x^2\right). \qquad (2.79)
$$

2.5 cas 02

L'exemple suivant est celui d'une particule dont la masse est de distribution quadratique en présence d'un potentiel singulier :

$$
m(x) = cx^2, V(x) = \frac{A}{cx^4} + \frac{B}{cx^2}, \qquad (2.80)
$$

partant de (2.80) et (1.15)et (1.16) nous obtenons

$$
\begin{aligned}
0 &= \left\{ -\frac{\hbar^2}{2cx^2} \frac{d^2}{dx^2} - \frac{\hbar^2}{4c^3x^6(a+1)} \left[(\alpha+\gamma-1)cx^2(2c) + 8(a-\alpha\gamma-\alpha-\gamma)c^2x^2\right] \right. \\
&\left. + \frac{\hbar^2}{4cx^2} (\frac{3}{2}(\left(\frac{2cx}{cx^2}\right)^2 - \frac{2c}{cx^2}) + \frac{A}{cx^4} + \frac{B}{cx^2} - E \right\} \varphi(x), \qquad (2.81)
\end{aligned}
$$

multipliant par (cx^2) nous obtenons

$$
\begin{aligned}
0 &= \left\{ -\frac{\hbar^2}{2} \frac{d^2}{dx^2} - \frac{\hbar^2}{2x^2(a+1)} \left[(\alpha+\gamma-1) + 8(a-\alpha\gamma-\alpha-\gamma)\right] \right. \\
&\left. + \frac{\hbar^2}{4} (\frac{3}{2}(\left(\frac{2}{x}\right)^2 - \frac{2}{x^2}) + \frac{A}{x^2} + B - cx^2E \right\} \varphi(x), \qquad (2.82)
\end{aligned}
$$

nous définissons

$$g = \frac{\hbar^2}{2\left(a+1\right)}\left[4\alpha\gamma + 3\left(\alpha+\gamma\right) - a + 2\right], \tag{2.83}$$

et on termine par

$$\frac{d^2}{dx^2}\varphi + \left[\frac{2cE}{\hbar^2}x^2 - \frac{2(A+g)}{\hbar^2 x^2} - \frac{2B}{\hbar^2}\right]\varphi = 0. \tag{2.84}$$

Par analogie avec le premier exemple, nous appliquerons la méthode de Nikoforov Uvarov pour résoudre l'équation précedente.

Nous prenons une nouvelle variable $s = u^2$

$$\frac{d^2}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\frac{d}{dx}) = \frac{ds}{dx}\frac{d}{ds}(\frac{ds}{dx}\frac{d}{ds}) = 2\frac{d}{ds} + 4s\frac{d^2}{ds^2}, \tag{2.85}$$

nous obtenons

$$4s\frac{d^2}{ds^2}\varphi + 2\frac{d}{ds}\varphi + \left[\frac{2cE}{\hbar^2}s - \frac{2(A+g)}{\hbar^2 s} - \frac{2B}{\hbar^2}\right]\varphi = 0, \tag{2.86}$$

$$\frac{d^2}{ds^2}\varphi + \frac{1}{2s}\frac{d}{ds}\varphi + \frac{1}{(2s)^2}\left[\frac{2cE}{\hbar^2}s^2 - \frac{2(A+g)}{\hbar^2 x^2} - \frac{2B}{\hbar^2}s\right]\varphi = 0, \tag{2.87}$$

$$\varphi'' + \frac{1}{2s}\varphi' + \frac{1}{(2s)^2}\left[\frac{2cE}{\hbar^2}s^2 - \frac{2B}{\hbar^2}s - \frac{2(A+g)}{\hbar^2}\right]\varphi = 0, \tag{2.88}$$

maintenant, si nous comparons l'équation ci-dessus avec l'équation (2.1) de type hypergéométrique généralisée avec une paramétrisation de variables réelles $s = s(u)$ nous obtenons

$$\widetilde{\tau}(s) = 1, \sigma(s) = 2s, \sigma'(s) = 2, \tilde{\sigma}\left(s\right) = \frac{2cE}{\hbar^2}s^2 - \frac{2B}{\hbar^2}s - \frac{2(A+g)}{\hbar^2}, \tag{2.89}$$

en calculant la fonction $\pi\left(s\right)$

$$\pi(s) = \frac{1}{2}\left[\sigma'(s) - \widetilde{\tau}(s)\right] \pm \left[\frac{1}{4}\left[\sigma'(s) - \widetilde{\tau}(s)\right]^2 - \tilde{\sigma}\left(s\right) + k\sigma\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{2.90}$$

$$\pi(s)=\frac{1}{2}\left[2-1\right]\pm\left[\frac{1}{4}\left[2-1\right]^{2}-(\frac{2cE}{\hbar^{2}}s^{2}-\frac{2B}{\hbar^{2}}s-\frac{2(A+g)}{\hbar^{2}})+2ks\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{2.91}$$

$$\pi(s)=\frac{1}{2}\pm\left[-\frac{2cE}{\hbar^{2}}s^{2}+(2k+\frac{2B}{\hbar^{2}})s+\frac{1}{4}+\frac{2(A+g)}{\hbar^{2}}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{2.92}$$

et aussi nous cherchons une valeur physique de k rendant le discriminant de l'expression sous racine carrée, dans la dernière équation, égal à zéro.

$$-\frac{2cE}{\hbar^{2}}s^{2}+(2k+\frac{2B}{\hbar^{2}})s+(\frac{1}{4}+\frac{2(A+g)}{\hbar^{2}})=0, \tag{2.93}$$

$$\Delta=(2k+\frac{2B}{\hbar^{2}})^{2}-4(-\frac{2cE}{\hbar^{2}})(\frac{1}{4}+\frac{2(A+g)}{\hbar^{2}})=0, \tag{2.94}$$

$$(2k+\frac{2B}{\hbar^{2}})^{2}=-4(\frac{2cE}{\hbar^{2}})(\frac{1}{4}+\frac{2(A+g)}{\hbar^{2}}), \tag{2.95}$$

$$2k+\frac{2B}{\hbar^{2}}=\pm\sqrt{-4(\frac{2cE}{\hbar^{2}})(\frac{1}{4}+\frac{2(A+g)}{\hbar^{2}})}, \tag{2.96}$$

$$2k=-\frac{2B}{\hbar^{2}}-2\sqrt{-(\frac{2cE}{\hbar^{2}})(\frac{1}{4}+\frac{2(A+g)}{\hbar^{2}})}, \tag{2.97}$$

En remplaçant dans l'équation (2.1)

$$\pi(s)=\frac{1}{2}\pm\left[-\frac{2cE}{\hbar^{2}}s^{2}-(2\sqrt{(-\frac{2cE}{\hbar^{2}})(\frac{1}{4}+\frac{2(A+g)}{\hbar^{2}})}-\frac{2B}{\hbar^{2}}+\frac{2B}{\hbar^{2}})s+(\frac{1}{4}+\frac{2(A+g)}{\hbar^{2}})\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{2.98}$$

$$\pi(s)=\frac{1}{2}+\sqrt{(\frac{1}{4}+\frac{2(A+g)}{\hbar^{2}})}-\sqrt{-\frac{2cE}{\hbar^{2}}}s, \tag{2.99}$$

donc on peut calculer la fonction

$$\tau\left(s\right)=\tilde{\tau}\left(s\right)+2\pi\left(s\right), \tag{2.100}$$

en prenant en considération la condition d'état lié qui doit être établie lorsque

$$\tau\left(s\right)<0, \tag{2.101}$$

$$\tau\left(s\right)=1+1+2\left[\sqrt{(\frac{1}{4}+\frac{2(A+g)}{\hbar^2})}-\sqrt{-\frac{2cE}{\hbar^2}s}\right], \tag{2.102}$$

$$\tau\left(s\right)=2+2\left[\sqrt{(\frac{1}{4}+\frac{2(A+g)}{\hbar^2})}-\sqrt{-\frac{2cE}{\hbar^2}s}\right], \tag{2.103}$$

et

$$\tau'\left(s\right)=-2\sqrt{-\frac{2cE}{\hbar^2}}. \tag{2.104}$$

Selon la méthode, pour trouver l'équation d'énergie à partir de laquelle on calcule les valeurs propres de l'énergie, il faut trouver les valeurs des paramètres

$$\lambda=k+\pi'(s), \tag{2.105}$$

et

$$\lambda_n=-n\tau'\left(s\right)-\frac{1}{2}n(n+1)\sigma''(s), n=0,1,2,... \tag{2.106}$$

En utilisant la relation $\lambda_n=\lambda$ et les définitions de paramètres dans Eq (2.1), on constate que l'énergie les valeurs propres de l'oscillateur isotonique sont

$$\lambda=k+\pi'(s), \tag{2.107}$$

$$\lambda=-\frac{2B}{\hbar^2}-\sqrt{(-\frac{2cE}{\hbar^2})(\frac{1}{4}+\frac{2(A+g)}{\hbar^2})}-\sqrt{-\frac{2cE}{\hbar^2}},$$

et

$$\lambda_n=-n\tau'(s)-\frac{1}{2}n(n+1)\sigma''(s), \tag{2.108}$$

$$\lambda_n=2n\sqrt{-\frac{2cE}{\hbar^2}}, \tag{2.109}$$

donc

$$\lambda_n=\lambda \tag{2.110}$$

$$2n\sqrt{-\frac{2cE_n}{\hbar^2}}=-\frac{2B}{\hbar^2}-\sqrt{-(\frac{2cE_n}{\hbar^2})(\frac{1}{4}+\frac{2(A+g)}{\hbar^2})}-\sqrt{-\frac{2cE_n}{\hbar^2}}, \tag{2.111}$$

$$-\frac{2B}{\hbar^2}=\sqrt{-(\frac{2cE}{\hbar^2})(\frac{1}{4}+\frac{2(A+g)}{\hbar^2})}+\sqrt{-\frac{2cE}{\hbar^2}}+2n\sqrt{-\frac{2cE}{\hbar^2}}, \tag{2.112}$$

$$\left[-2\frac{B}{\hbar^2}\right]^2=\left[\sqrt{-\frac{2cE_n}{\hbar^2}}\left[(2n+1+\sqrt{(\frac{1}{4}+\frac{2(A+g)}{\hbar^2})}\right]\right]^2, \tag{2.113}$$

$$\frac{4B^2}{\hbar^4}=-\frac{2cE_n}{\hbar^2}\left[(2n+1+\left[\frac{1}{4}+\frac{2(A+g)}{\hbar^2}\right]^{\frac{1}{2}}\right]^2, \tag{2.114}$$

$$E_n=-\frac{2B^2}{c\left[(2n+1+\left[\frac{1}{4}+\frac{2(A+g)}{\hbar^2}\right]^{\frac{1}{2}}\right]^2\hbar^2}, \tag{2.115}$$

Ce dernier donne

$$E_n = -\frac{2B^2}{c\left[(2n+1+\nu\right]^2\hbar^2}, \tag{2.116}$$

$$\nu(\alpha,\beta,\gamma,a,A) = \left[\frac{1}{4}+\frac{2(A+g)}{\hbar^2}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{2.117}$$

$$g = \frac{\hbar^2}{2(a+1)}(4\alpha\gamma+3(\alpha+\gamma)-a+2), \tag{2.118}$$

Passons maintenant aux calculs de la fonction d'onde normalisée. Premièrement on cherche la fonction $\Phi_n(s)$ en substituant $\pi(s)$ et $\sigma(s)$ dans (2.7) cela nous donne

$$\frac{\Phi_n'(s)}{\Phi_n(s)} = \frac{\pi(s)}{\sigma(s)} = \frac{\frac{1}{2}+\sqrt{(\frac{1}{4}+\frac{2(A+g)}{\hbar^2})}-\sqrt{-\frac{2cE}{\hbar^2}}s}{2s}, \tag{2.119}$$

$$\int\frac{\Phi_n'(s)}{\Phi_n(s)}ds = \int\frac{\frac{1}{2}+\sqrt{(\frac{1}{4}+\frac{2(A+g)}{\hbar^2})}-\sqrt{-\frac{2cE}{\hbar^2}}s}{2s}ds,$$

$$\ln\Phi_n(s) = \int\frac{\frac{1}{2}+\sqrt{(\frac{1}{4}+\frac{2(A+g)}{\hbar^2})}-\sqrt{-\frac{2cE}{\hbar^2}}s}{2s}ds,$$

$$\Phi_n(s) = \exp\int\frac{\frac{1}{2}+\sqrt{(\frac{1}{4}+\frac{2(A+g)}{\hbar^2})}-\sqrt{-\frac{2cE}{\hbar^2}}s}{2s}ds, \tag{2.120}$$

Pour faciliter le travail , on pose

$$\alpha = \frac{2(A+g)}{\hbar^2}, \varepsilon = \left[\frac{1}{4}+\frac{2(A+g)}{\hbar^2}\right]^{\frac{1}{2}}, \beta = \sqrt{-\frac{2cE}{\hbar^2}}. \tag{2.121}$$

$$\Phi_n(s) = \exp\int\left(\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\varepsilon\right)s^{-1}-\frac{1}{2}\beta\right)ds,$$

$$\Phi_n(s) = \exp\left(\frac{1}{4}\ln s+\frac{1}{2}\varepsilon\ln s-\frac{1}{2}\beta s\right),$$

$$\Phi_n(s) = s^{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\varepsilon}\exp\left(-\frac{1}{2}\beta s\right), \tag{2.122}$$

ensuite nous calculons la fonction de poids

$$
\begin{aligned}
\rho(s) &= \frac{1}{\sigma(s)}\exp\left(\int\frac{\tau(s)}{\sigma(s)}ds\right), \\
&= \frac{1}{2s}\exp\left(\int\frac{2+2\left[\sqrt{\left(\frac{1}{4}+\frac{2(A+g)}{\hbar^2}\right)}-\sqrt{-\frac{2cE}{\hbar^2}}s\right]}{2s}ds\right), \\
&= \frac{1}{2s}\exp\left(\ln s+\varepsilon\ln s-\frac{\beta}{2}s\right), \\
&= \frac{1}{2}s^{\varepsilon}\exp\left(-\frac{\beta}{2}s\right), \qquad (2.123)
\end{aligned}
$$

Substituant dans la formule de Rodrigues (2.19), les fonctions propres sont données par la forme suivante :

$$
\begin{aligned}
y_n(s) &= A_n\rho^{-1}(s)\frac{d^n}{ds^n}\left[\sigma^n(s)\rho(s)\right], \\
&= s^{-\varepsilon}\exp\left(\frac{\beta}{2}s\right)\frac{d^n}{ds^n}\left[s^{n+\varepsilon}\exp\left(-\frac{\beta}{2}s\right)\right], \\
&= L_n^{(\varepsilon)}\left(-\frac{\beta}{2}s\right), \qquad (2.124)
\end{aligned}
$$

où $L_n^{(\varepsilon)}$ est le polynôme de laguerre associé[26], par conséquent la solution pair de la fonction satisfaisant (2.2) est :

$$
\Psi_n(x)=\sqrt{\frac{2\beta^{1+\varepsilon}n!}{\Gamma(n+\varepsilon+1)}}\exp\left(-\frac{\beta}{2}x^2\right)L_n^{(\varepsilon)}\left(-\frac{\beta}{2}x^2\right). \qquad (2.125)
$$

2.6 Conclusion

Par conséquent, nous avons résolu l'equation de schrödinger pour deux cas une remarque trés important nous avons souligné que l'ambiguïté figurant dans les exepréssion des énergies pour cela il est clair que il faut étudié l'effet de l'utilisation de certains ordres figurant dans la littérature.

pour le premier cas : En utilisant l'ordre de Gora et Williams ($a = \gamma = 0, \alpha = -1$) ou celui du Ben Daniel et Duke ($a = \alpha = \gamma = 0$), on se termine a une cas $\nu(\alpha, \beta, \gamma, a) = \frac{1}{2}$. De plus pour les ordre de Zhu et Kroemer ($a = 0, \alpha = \gamma = -1/2$), Li et Kuhn ($a = 0, \alpha = 0, \gamma = -1/2$), et Weyl ($a = 1, \alpha = \gamma = 0$), le terme ambigu $\nu(\alpha, \beta, \gamma, a)$ est zéro.

pour le deuxiéme cas : il est très clair que l'ambiguïté ne peut être évitée par une redéfinition de l'énergie du point zéro. Passons maintenant à l'évaluation des résultats issus des cas proposés dans la littérature, pour Gora et Williams nous avons $\nu(\alpha, \beta, \gamma, a) = \left[-\frac{3}{4} + \frac{2A}{\hbar^2}\right]^{\frac{1}{2}}$, pour Ben Daniel et Duke $\nu(\alpha, \beta, \gamma, a) = \left[\frac{9}{4} + \frac{2A}{\hbar^2}\right]^{\frac{1}{2}}$, Zhu et Kroemer donne $\nu(\alpha, \beta, \gamma, a) = \left[-\frac{7}{4} + \frac{2A}{\hbar^2}\right]^{\frac{1}{2}}$, pour Li et Kuhn $\nu(\alpha, \beta, \gamma, a) = \left[\frac{3}{4} + \frac{2A}{\hbar^2}\right]^{\frac{1}{2}}$, enfin pour Weyl $\nu(\alpha, \beta, \gamma, a) = \left[\frac{5}{4} + \frac{2A}{\hbar^2}\right]^{\frac{1}{2}}$.

Chapitre 3

Résoulution de l'équation de schrödinger pour une particule non relativiste a masse variable par la mécanique quantique supersymétrique

3.1 introduction

Dans une nature rendue à la géométrie, il y'a plusieurs genres des symétries certains qui sont visibles et d'autres sont parfois cachées. Depuis longtemps, la symétrie joue un rôle important en physique, non seulement dans l'étude des systèmes classiques, mais aussi elle nous aide à mieux comprendre les phénomènes en mécanique quantiques, que l'observation d'un ordre dans ce monde microscopique nous conduit à concevoir des nouvelles symétries .

La supersymétrie est un consept qui à été dévloppé dans le contexte de physiques élémentaires, comme une symétrie qui relié entre les particules de spin demi-entier (les fermions) qui constituent la matière et les particules de spin entier (les bosons) véhiculant les interactions [14], en transformant des particules fondamentales en super partenaires avec la même masse. Cette symétrie n'a pas encore été observée dans la nature, donc elle doit être brisée spontanément. C'est dans le même domaine que Edward Witten proposait en 1981 un modèle de mécanique quantique simple pour étudier un mécanisme de rupture possible pour la supersymétries [15], et la nouvelle idée de la mécanique quantique supersymétrique a été établi, et aprés des recherches les physiciens ont commencé à comprendre que ce domaine n'était pas seulement un terrain d'essai mais aussi un outil intéressant et puissant par ses propres idées.

Donc il est devenu évident que la mécanique quantique supersymétrique fournit des informations plus détaillées sur la méthode de factorisation introduite par Schrödinger [16] pour résoudre algébriquement le problème de l'atome d'hydrogène, ensuite ont été généralisés par Infeld et Hull [17] qui ont obtenu une large classe de potentiels exactement solubles. Plus tard, en 1983 Gendenshtein [18] a introduits le concept d'invariance qui est une relation entre deux potentiels partenaires, on indique que les deux potentiels ont la même dépendance dans la variable et ne peuvent différer que dans d'autres paramètres, pour les potentiels qui satisfont à cette condition, nous pouvons résoudre le spectre d'énergie ainsi que les fonctions propres de manière analytique. Cette approche est devenue très célèbre par sa simplicité à obtenir le spectre des potentiels supersymétriques algébriquement. Elle est maintenant généralisée et appliquée à la résolution de problèmes avec potentiels non hermitiens, et aussi aux problèmes relativiste et non relativiste avec masse variable. Notez que ces dernières années, beaucoup d'attention a été accordée à l'application de l'approche supersymétrique aux systèmes quantiques à masse variable. En 1999, Plastino et al [19] ont étendu les applications de l'approche supersymétrique pour obtenir des solutions exactes de l'équation de Schrödinger à masse variable et ont également généralisé le concept de potentiels invariants de forme pour une masse variant dans l'espace. De plus, en 2003 de Souza Dutra [20] a fait quelques remarques sur la supersymétrie des systèmes quantiques avec masses effectives dépendantes de la position.

3.2 Formalisme de la mécanique quantique supersymétrique

On se propose maintenant de présenter l'ensemble des outils nécessaires pour définir la théorie de supersymétrique.

3.2.1 Méthode de factorisation

La méthode de factorisation consiste principalement à écrire l'hamiltonien H du système sous forme d'un produit de deux opérateurs A et A^{+}, qui sont à priori adjoint l'un de l'autre.On commençons avec le hamiltonien général en mécanique quantique unidimensionnelle

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x), \tag{3.1}$$

Les fonctions d'ondes $\Psi_n(x)$ et les valeurs propres E_n correspondant aux états liés vérifent

$$H\Psi_n(x) = E_n\Psi_n(x). \qquad \text{pour } n = 1, 2, 3, ...N \tag{3.2}$$

Où N est le nombre d'états liés. L'hamiltonien H peut être factorisé sous la forme

$$H = A^{+}A + E_0, \tag{3.3}$$

Où E_0 est l'énergie de l'état fondamental du système et

$$A = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{d}{dx} + W(x), \tag{3.4}$$

$$A^{+} = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{d}{dx} + W(x), \tag{3.5}$$

où $W\left(x\right)$ une nouvelle fanction, appellée superpotentiel, et les opérateurs A et A^{+} sont des adjoints hermitiens et la construction de l'opérateur A exige que

$$A\Psi_{0}\left(x\right)=0, \tag{3.6}$$

$\Psi_{0}\left(x\right)$: fonction d'onde de l'état fondamentale. On définit une nouvelle équation de Schrödinger,donnée par

$$H_{-}\Psi_{n}^{-}\left(x\right)=E_{n}^{-}\Psi_{n}^{-}\left(x\right), \tag{3.7}$$

Tel que

$$\begin{aligned} H_{-} &= A^{+}A=\left(-\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{d}{dx}+W\left(x\right)\right)\left(\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{d}{dx}+W\left(x\right)\right) \\ &= -\frac{\hbar^{2}}{2m}\frac{d^{2}}{dx^{2}}-\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{d}{dx}W\left(x\right)+W\left(x\right)\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{d}{dx}+W^{2}\left(x\right) \\ &= -\frac{\hbar^{2}}{2m}\frac{d^{2}}{dx^{2}}-\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{d}{dx}W\left(x\right)+W^{2}\left(x\right), \end{aligned} \tag{3.8}$$

A partir de (3.1) on peut écrire

$$H_{-}=-\frac{\hbar^{2}}{2m}\frac{d^{2}}{dx^{2}}+V_{-}\left(x\right), \tag{3.9}$$

Ceci nous permet d'identifier

$$V_{-}\left(x\right)=W^{2}\left(x\right)-\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{d}{dx}W\left(x\right), \tag{3.10}$$

Notez que cette équation bien connue de Riccati. La solution de $W(x)$ en terme de la fonction d'onde de l'état fondamental est

$$A\Psi_{0}\left(x\right)=0\rightarrow\frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{d}{dx}\Psi_{0}\left(x\right)+W\left(x\right)\Psi_{0}\left(x\right)=0 \tag{3.11}$$

Une solution de cette équation est

$$W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\acute{\Psi}_0(x)}{\Psi_0(x)} = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \ln(\Psi_0(x)), \tag{3.12}$$

Cela implique

$$\Psi_0(x) = N \exp\left(-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int W(x)\, dx\right), \tag{3.13}$$

Où N est une constante de normalisation.

3.2.2 Existence d'un hamiltonien partenaire et potentiel partenaire

En inversant l'ordre des deux opérateurs A et A^+, un nouvel hamiltonien se construit que on appelons le hamiltonien partenaire

$$\begin{aligned} H_+ &= AA^+ = \left(\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x)\right)\left(-\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x)\right) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} W(x) - W(x) \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W^2(x) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} W(x) + W^2(x), \end{aligned} \tag{3.14}$$

On définissons

$$H_+ = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_+(x), \tag{3.15}$$

Par analogie, on obtient

$$V_+(x) = W^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} W(x), \tag{3.16}$$

$V_+(x)$ est appelé potentiel partenaire de $V_-(x)$ et parconséquent H_+ et H_- sont des hamiltoniens partenaires supersymétriques. Donc on peut montrer qu' il existe des relations liants les valeurs et les fonctions propres des hamiltoniens partenaires telleque.L'équation de Schrödinger pour H_- est

$$H_-\Psi_n^- = A^+A\Psi_n^- = E_n^-\Psi_n^-, \tag{3.17}$$

L'application de H_+ sur $A\Psi_n^-$ conduit à

$$H_+\left(A\Psi_n^-\right) = AA^+A\Psi_n^- = AH_-\Psi_n^- = E_n^-\left(A\Psi_n^-\right). \tag{3.18}$$

De la même maniére, nous avons

$$H_+\Psi_n^+ = AA^+\Psi_n^+ = E_n^+\Psi_n^+, \tag{3.19}$$

$$H_-\left(A^+\Psi_n^+\right) = A^+AA^+\Psi_n^+ = A^+H_+\Psi_n^+ = E_n^+\left(A^+\Psi_n^+\right). \tag{3.20}$$

Les équations (3.18) et (3.20) signifient que $A\Psi_n^-$ est une fonction propre de H_+ pour la valeur propre E_n^- et $A^+\Psi_n^+$ est une fonction propre de H_- pour la valeur propre E_n^+ . A partir de ces relations, on en déduit que les valeurs propres et les fonctions propres des Hamiltoniens H_- et H_+ sont reliées de la manière suivante

$$E_n^+ = E_{n+1}^-; E_0^- = 0, \tag{3.21}$$

et

$$\Psi_n^+(x) = \sqrt{E_{n+1}^-}A\Psi_{n+1}^-, \tag{3.22}$$

$$\Psi_{n+1}^-(x) = \sqrt{E_n^+}A^+\Psi_n^+, \tag{3.23}$$

On voit qu'il est possible de déterminer les fonctions propres de H_+ par application de l'opérateur A sur celles de H_- et le contraire par l'application de l'opérateur A^+ à l'exception de la fonction d'onde de l'état fondamental qui ne possède pas de partenaire supersymétrique. On remarque que l'opérateur A (respectivement A^+) transforme non seulement une fonction propre de H_- (respectivement de H_+) en une fonction propre de

H_+(respectivement deH_-) avec la même énergie, mais détruit (crée) un nœud supplémentaire dans la fonction propre. Puisque A annule la fonction d'onde d'état fondamental de l'hamiltonien H_-, de sorte que cet état de H_- n'a pas de partenaire supersymétrique.

3.2.3 Invariance de forme

La détermination analytique des valeurs propres et des fonctions propres de l'énergie est possible pour un certain nombre de potentiels et une propriété commune de ces potentiels est appelée invariance de forme. Si deux potentiels partenaires supersymétriques sont invariants de forme, ils ont une forme similaire et diffèrent uniquement par les valeurs des autres paramètres et un reste. Ceci peut être exprimé avec

$$V_+ (x, a_1) = V_- (x, a_2) + R (a_1) , \tag{3.24}$$

où a_1 est un ensemble de paramètres et a_2 est un ensemble différent de paramètres pouvant être exprimé sous la forme d'une fonction $a_2 = f (a_1)$. Le reste $R(a_1)$ est indépendant de x.

3.2.4 Détermination du spectre d'énergie et des fonctions d'onde

Partons des Hamiltonians partenaires H_1 et H_2, dont les valeurs propres et les fonctions propres sont reliées par la supersymétrie. De plus, comme supersymétrie n'est pas interrompu, nous savons que

$$E_0^{(1)} (\alpha_1) = 0, \Psi_0^{(1)} (x; \alpha_1) = N \exp \left(-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int W_1 (x; \alpha_1) \, dx \right) , \tag{3.25}$$

nous montrons maintenant que le spectre entier de H_1 peut être très facilement obtenu algébriquement en utilisant la condition d'invariance de forme. Construisons à cet effet une série d'hamiltoniens $H_S, s = 1, 2, 3...$ En particulier, à la suite de la discussion de la dernière section, il est clair que si H_1 a p états liés, on peut construire p tels hamiltoniens

H_1, H_2 .....H_p et le *niem* Hamiltonian H_n auront le même spectre que H_1 sauf que les $n-1$ premiers niveaux de H_1 seront absents chez H_n. En utilisant à plusieurs reprises la condition d'invariance de forme, il est alors clair que

$$H_s = -\frac{d^2}{dx^2} + V_1\left(x; \alpha_s\right) + \sum_{k=1}^{S-1} R\left(\alpha_k\right), \tag{3.26}$$

où $\alpha_s = f^{s-1}\left(\alpha_1\right)$ c'est-à-dire que la fonction f est appliquée $s-1$ fois. nous comparons le spectre de H_s et H_{s+1}, au voit des équation (3.26) et (3.24) on a

$$\begin{aligned} H_{s+1} &= -\frac{d^2}{dx^2} + V_1\left(x; \alpha_{s+1}\right) + \sum_{k=1}^{S} R\left(\alpha_k\right) \\ &= -\frac{d^2}{dx^2} + V_2\left(x; \alpha_s\right) + \sum_{k=1}^{S-1} R\left(\alpha_k\right), \end{aligned} \tag{3.27}$$

ainsi, H_s et H_{s+1} sont des hamiltoniens partenaires supersymétrique et ont donc des spectres d'états liés identiques, à l'exception de l'état fondamental de H_s dont l'énergie est

$$E_0^{(s)} = \sum_{k=1}^{s-1} R\left(\alpha_k\right), \tag{3.28}$$

cela découle de l'équation (3.26) et le fait que $E_0^{(1)} = 0$. En revenant de H_s à H_{s+1} etc, nous finirions par atteindre H_1 et H_2 dont l'énergie de l'état fondamental est égale à zéro et dont le nième niveau coïncide avec l'état fondamental de l'hamiltonien H_n par conséquent, le spectre complet des valeurs propres de H_1 est donné par

$$E_0^{-}\left(\alpha_1\right) = \sum_{k=1}^{n} R\left(\alpha_k\right), E_0^{-}\left(\alpha_1\right) = 0. \tag{3.29}$$

3.2.5 Application a l'OH lineaire

considérons l'exemple d'un oscillateur harmonique linéaire, le traitement algébrique de cet exemple particulier peut être facilement trouvé dans n'importe quel manuel de mécanique quantique comme [27]. Cependant, nous allons présenter ici la solution de ce problème en utilisant la méthode de factorisation basée sur la mécanique quantique supersymétrique et potentiels invariants de la forme. L'hamiltonien quantique de l'oscillateur harmonique unidimensionnel est donné par

$$\hat{H} = \frac{\hbar}{2m}\hat{p}^2 + \frac{\hbar}{2}m\alpha^2 x^2, \tag{3.30}$$

en choisissant $\hbar = m = 1$ et en introduisant les variables sans dimension

$$\hat{\zeta} = \sqrt{\alpha}\hat{x}, \hat{P} = \frac{\hat{p}}{\sqrt{\alpha}}, \tag{3.31}$$

devient

$$\hat{H} = \frac{\alpha}{2}\left(\hat{P}^2 + \hat{\zeta}^2\right) = \frac{\alpha}{2}\left(-\frac{d^2}{d\hat{\zeta}^2} + \hat{\zeta}^2\right). \tag{3.32}$$

Nous considérons les opérateurs

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{d\hat{\zeta}} + \hat{\zeta}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(i\hat{P} + \hat{\zeta}\right), \tag{3.33}$$

$$\hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{d}{d\hat{\zeta}} + \hat{\zeta}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-i\hat{P} + \hat{\zeta}\right), \tag{3.34}$$

notez qu'ici le super-potentiel est de la forme

$$W\left(\hat{\zeta}\right) = \frac{\hat{\zeta}}{\sqrt{2}}. \tag{3.35}$$

Les opérateurs (3.33) et (3.34) sont construits de telle sorte que

$$\hat{a}\left|\varphi_0\right\rangle = 0, \tag{3.36}$$

où $\left|\varphi_0\right\rangle$ est l'état fondamental de l'hamiltonien (3.32) et la fonction d'onde correspondante est donnée par

$$\varphi_0\left(\hat{\zeta}\right) = \exp\left(-\frac{\hat{\zeta}^2}{2}\right). \tag{3.37}$$

Pour les opérateurs $\hat{a}$ et $\hat{a}^{+}$ les Hamiltoniens partenaires supersymétriques $\hat{H}_{-}$ et $\hat{H}_{+}$ dans ce cas sont donné par

$$\hat{H}_{-} = \hat{a}^{+}\hat{a} = \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{d\hat{\zeta}^2} + \hat{\zeta}^2\right) - \frac{1}{2}, \tag{3.38}$$

$$\hat{H}_{+} = \hat{a}\hat{a}^{+} = \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{d\hat{\zeta}^2} + \hat{\zeta}^2\right) + \frac{1}{2}, \tag{3.39}$$

avec des potentiels partenaires

$$V_{-}\left(\hat{\zeta}\right) = \frac{1}{2}\left(\hat{\zeta}^2 - 1\right), \tag{3.40}$$

et

$$V_{+}\left(\hat{\zeta}\right) = \frac{1}{2}\left(\hat{\zeta}^2 + 1\right), \tag{3.41}$$

dans ce cas, le potentiel initial $V\left(\hat{\zeta}\right)$ du système sous-jacent et les potentiels partenaire sont liés entre eux par l'équation suivante

$$V\left(\hat{\zeta}\right) = \frac{1}{2}\left[V_{-}\left(\hat{\zeta}\right) + V_{+}\left(\hat{\zeta}\right)\right]. \tag{3.42}$$

Remplaçant (3.38) dans (2.32), nous fournit la relation suivante

$$\hat{H} = \alpha\left(\hat{H}_{-} + \frac{1}{2}\right), \tag{3.43}$$

ce qui indique que l'énergie de l'état fondamental de l'hamiltonien $\hat{H}$ est $E_0 = \frac{\alpha}{2}$. De plus, si on choisit $\hat{N} = \hat{H}_{-} = \hat{a}^{+}\hat{a}$ et $|\varphi_n\rangle = |n\rangle$, l'équation (3.43) prend la forme le plus familier

$$\hat{H} = \alpha\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right), \tag{3.44}$$

où $\hat{N}$ représente le numéro d'opérateur tel que

$$\hat{N}\left|n\right\rangle = n\left|n\right\rangle. \tag{3.45}$$

D'après la théorie de la mécanique quantique, il est connu que l'oscillateur harmonique linéaire est le seul exemple des systèmes invariants de formes en translation pour lesquels le commutateur

$$\left[\hat{A}, \hat{A}^{+}\right] = \frac{2W'(x)}{\sqrt{2m}}, \tag{3.46}$$

est indépendant de la position. En substituant le super potentiel $W\left(\hat{\zeta}\right) = \frac{\hat{\zeta}}{\sqrt{2}}$ dans (3.46), on obtient

$$\left[\hat{a}, \hat{a}^{+}\right] = 1, \tag{3.47}$$

et les relations de commutation entre $\hat{N}$, $\hat{a}$ et $\hat{a}^{+}$sont donnés par

$$\left[\hat{N}, \hat{a}\right] = -\hat{a}, \left[\hat{N}, \hat{a}^{+}\right] = \hat{a}^{+}, \tag{3.48}$$

qui, avec le commutateur (3.47), représente l'algèbre de Heisenberg-Weyl bien connue. Ainsi, le choix évident des opérateurs introduits dans l'équation (3.33) et (3.34), servent les objectifs d'annihilation et de création avec les propriétés suivantes

$$\hat{a}\left|n\right\rangle = \sqrt{n}\left|n-1\right\rangle, \tag{3.49}$$

$$\hat{a}^{+}\left|n\right\rangle = \sqrt{n+1}\left|n+1\right\rangle, \tag{3.50}$$

nous pouvons observer que nous pouvons obtenir le *nième* état propre $|n\rangle$ par l'action successive de l'opérateur de création $\hat{a}^{+}$ sur l'état de vide $|0\rangle$, c'est-à-dire

$$\left|n\right\rangle = \frac{\left(\hat{a}^{+}\right)^{n}}{\sqrt{n!}}\left|0\right\rangle, \tag{3.51}$$

de plus, $\hat{H}$ et l'opérateur numérique $\hat{N}$ sont des opérateurs hermitiens et $|n\rangle$ sont des états propres simultanés de ces opérateurs, donc le nombre d'états $|n\rangle$ sont orthogonaux et peuvent être normalisés, en d'autre trmes ces états forme la base complète et leur relation de complétude est donnée comme

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = 1, \tag{3.52}$$

le spectre d'énergie et les fonctions d'onde correspondantes pour l'oscillateur harmonique linéaire

$$E_n = \alpha \left(n + \frac{1}{2} \right), \tag{3.53}$$

et

$$\varphi_n \left(\hat{\zeta} \right) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi 2^n n!}} \exp \left(-\frac{\hat{\zeta}^2}{2} \right) H_n \left(\hat{\zeta} \right), \tag{3.54}$$

où $H_n \left(\hat{\zeta} \right)$ représente les polynômes bien connus de l'Hermite.

Il est important de noter ici que toutes les analyses ci-dessus sont valables pour des systèmes exactement quantiques à masse constante, où nous n'avons considéré que les systèmes unidimensionnels et indépendants du temps, les systèmes invariants de la forme appartenant à la classe de traduction dans le cadre de supersymétrique ininterrompu. Cependant, dans le présent travail, nous nous intéressons à l'étude de systèmes quantiques parfaitement résolvables avec une masse effective dépendante de la position .

3.3 Approche supersymétrique généralisée

Par analogie avec la démarche de la supersymétrie pour une masse constante, on considérons maintenant la généralisation du formalisme supersymétrique a masse variable. Ceci veut dire qu'on cherche à construire un opérateur A et A^{+} qui permettent de définir des hamiltoniens partenaires H_- et H_+ telsque

$$H_- = A^+ A \tag{3.55}$$

Et

$$H_+ = AA^+ \tag{3.56}$$

On définit ces opérateurs [21] par

$$A = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(x)}} \frac{d}{dx} + W(x), \tag{3.57}$$

$$A^+ = -\frac{d}{dx}\left(\frac{\hbar}{\sqrt{2m(x)}}\right) + W(x), \tag{3.58}$$

De telle sorte que

$$H_- = -\frac{\hbar^2}{2m(x)} \frac{d^2}{dx^2} - \left(\frac{\hbar^2}{2m(x)}\right)' \frac{d}{dx} + V_-(x), \tag{3.59}$$

Qui admit la factorisation

$$\begin{aligned} H_- &= A^+ A \\ &= \left(-\frac{d}{dx}\left(\frac{\hbar}{\sqrt{2m(x)}}\right) + W(x)\right)\left(\frac{\hbar}{\sqrt{2m(x)}} \frac{d}{dx} + W(x)\right) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m(x)} \frac{d^2}{dx^2} - \left(\frac{\hbar^2}{2m(x)}\right)' \frac{d}{dx} - \left(\frac{\hbar W(x)}{\sqrt{2m(x)}}\right)' + W^2(x), \end{aligned} \tag{3.60}$$

On peut écrire

$$V_-(x) = W^2(x) - \left(\frac{\hbar W(x)}{\sqrt{2m(x)}}\right)', \tag{3.61}$$

Où le superpotentiel $W(x)$ satisfait l'équation de Riccati. De plus, on a

$$A\Psi_0(x) = 0, \tag{3.62}$$

Qui permet de difinit la focntion d'onde de l'état fondamental

$$\Psi_0(x) = \exp\left(-\int \frac{\sqrt{2m(x)}}{\hbar} W(x)\, dx\right). \tag{3.63}$$

Par conséquent, la relation entre le super potentiel et la fonction d'onde de l'état fondamental est donnée comme

$$W(x) = \frac{-\hbar\acute{\Psi}_0(x)}{\sqrt{2m(x)}\Psi_0(x)}, \tag{3.64}$$

L'hamiltonien partenaire H_+ est défini comme

$$\begin{aligned}
H_+ &= AA^+ \\
&= \left(\frac{\hbar}{\sqrt{2m(x)}}\frac{d}{dx} + W(x)\right)\left(-\frac{d}{dx}\left(\frac{\hbar}{\sqrt{2m(x)}}\right) + W(x)\right) \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m(x)}\frac{d^2}{dx^2} - \left(\frac{\hbar^2}{2m(x)}\right)'\frac{d}{dx} - \left(\frac{\hbar W(x)}{\sqrt{2m(x)}}\right)' + W^2(x) \\
&\quad + \frac{2\hbar W'}{\sqrt{2m(x)}} - \left(\frac{\hbar}{\sqrt{2m(x)}}\right)\left(\frac{\hbar}{\sqrt{2m(x)}}\right)'',
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Alors que

$$H_+ = -\frac{\hbar^2}{2m(x)}\frac{d^2}{dx^2} - \left(\frac{\hbar^2}{2m(x)}\right)'\frac{d}{dx} + V_+(x), \tag{3.66}$$

Le potentiel partenaire associé $V_+(x)$, et est donné par

$$V_+(x) = W^2(x) - \left(\frac{\hbar W(x)}{\sqrt{2m(x)}}\right)' + \frac{2\hbar W'}{\sqrt{2m(x)}} - \left(\frac{\hbar}{\sqrt{2m(x)}}\right)\left(\frac{\hbar}{\sqrt{2m(x)}}\right)''. \tag{3.67}$$

3.4 Potentiels invariants de forme pour les systémes à masse variable

Le concept d'invariance de forme constitue la base d'une généralisation puissante et élégante de la procédure bien connue de résolution de l'oscillateur harmonique à l'aide d'opérateurs de création et annihilation. Un potentiel $V(x;\alpha)$ dépendant d'un ensemble de paramètres, on dit invariant de forme lorsqu'il est lié à son partenaire supersymétrique par la condition d'intégrabilité .

$$V_2(x;\alpha_1) = V_1(x;\alpha_2) + R(\alpha_1), \tag{3.68}$$

les paramètres α_2 sont fonction des paramètres α_1

$$\alpha_2 = f(\alpha_1), \tag{3.69}$$

et $R(\alpha_1)$ est un décalage de potentiel indépendant de x. Les valeurs propres énergétiques et les fonctions propres des potentiels invariants de forme peuvent être obtenues de manière algébrique. Pour ce faire, il faut tenir compte de la hiérarchie des Hamiltoniens $H_i(i = 1, 2...)$, où H_{i+1} est le partenaire supersymétrique de H_i. Les fonctions potentielles des partenaires supersymétriques successifs de la hiérarchie sont liées par

$$V_{i+1}(x;\alpha_i) = V_i(x;\alpha_{i+1}) + R(\alpha_i), \tag{3.70}$$

les énergies propres d'un potentiel invariant de forme sont alors données par

$$E_n = \sum_{i=1}^{n} R(\alpha_i), \tag{3.71}$$

où $\alpha_{i+1} = f(\alpha_i), (i = 1, ...n - 1)$.

Sur la base de notre formalisme supersymétrique pour les systèmes de masse non constante, nous allons maintenant obtenir des potentiels invariants de forme pour une particule de masse effective dépendant de la position $m(x)$. Nous allons considérer deux exemples de la condition d'intégrabilité invariante de forme

3.5 Applications

3.5.1 Premier exemple en présence d'un potentiel de Mors

Notez que l'hamiltonien dans l'équation (3.27) trouvé par le formalisme supersymétrique correspond aux Hamiltoniens de masse effective spécifiques dans l'équation (1.11)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{\hbar^2}{2}\left(\frac{m'}{m^2}\right)\frac{d}{dx}+\left[U_{\alpha\gamma a}\left(x\right)+V\left(x\right)\right], \tag{3.72}$$

Avec le potentiel réel $V(x) = V_0 e^{cx}$,

et $U_{\alpha\beta\gamma a}(r) = -\frac{\hbar^2}{4m^3(a+1)}\left[(\alpha+\gamma-a)\,mm''+2\,(a-\alpha\gamma-\alpha-\gamma)\,m'^2\right]$

De manière explicite, il s'agit du Hamiltonien Zhu et Kroemer ($a = 0, \alpha = \gamma = -1/2$)

$$\begin{aligned} H_{ZK} &= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{\hbar^2}{2}\left(\frac{m'}{m^2}\right)\frac{d}{dx}+\left[U_{\alpha\gamma a}\left(x\right)+V\left(x\right)\right] \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{\hbar^2}{2}\left(\frac{m'}{m^2}\right)\frac{d}{dx} \\ &\quad+\left[-\frac{\hbar^2}{4m^3\left(a+1\right)}\left[(\alpha+\gamma-a)\,mm''+2\,(a-\alpha\gamma-\alpha-\gamma)\,m'^2\right]+V\left(x\right)\right] \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{\hbar^2}{2}\left(\frac{m'}{m^2}\right)\frac{d}{dx}+\left[-\frac{\hbar^2}{4m^3}\left[(-1)\,mm''+2\left(-\frac{3}{4}\right)m'^2\right]+V\left(x\right)\right] \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{\hbar^2}{2}\left(\frac{m'}{m^2}\right)\frac{d}{dx}+\left[-\frac{\hbar^2}{4m^3}\left[-mm''-3m'^2\right]+V\left(x\right)\right] \end{aligned} \tag{3.73}$$

Hamiltonien de Li et Kuhn ($a = \alpha = 0, \beta = \gamma = -1/2$)

$$\begin{aligned} H_{LiK} &= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{\hbar^2}{2}\left(\frac{m'}{m^2}\right)\frac{d}{dx}+\left[U_{\alpha\gamma a}\left(x\right)+V\left(x\right)\right] \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{\hbar^2}{2}\left(\frac{m'}{m^2}\right)\frac{d}{dx} \\ &\quad+\left[-\frac{\hbar^2}{4m^3\left(a+1\right)}\left[(\alpha+\gamma-a)\,mm''+2\,(a-\alpha\gamma-\alpha-\gamma)\,m'^2\right]+V\left(x\right)\right] \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+\frac{\hbar^2}{2}\left(\frac{m'}{m^2}\right)\frac{d}{dx}+\left[-\frac{\hbar^2}{4m^3}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)mm''+m'^2\right]+V\left(x\right)\right] \end{aligned} \tag{3.74}$$

L'hamiltonien de Weyl $(a = 1, \alpha = \gamma = 0)$

$$\begin{aligned}
H_{Weyl} &= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\hbar^2}{2}\left(\frac{m'}{m^2}\right)\frac{d}{dx} + \left[U_{\alpha\gamma a}(x) + V(x)\right] \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\hbar^2}{2}\left(\frac{m'}{m^2}\right)\frac{d}{dx} \\
&\quad + \left[-\frac{\hbar^2}{4m^3(a+1)}\left[(\alpha+\gamma-a)mm'' + 2(a-\alpha\gamma-\alpha-\gamma)m'^2\right] + V(x)\right] \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\hbar^2}{2}\left(\frac{m'}{m^2}\right)\frac{d}{dx} + \left[-\frac{\hbar^2}{4m^3(2)}\left[-mm'' + 2m'^2\right] + V(x)\right] \qquad (3.75)
\end{aligned}$$

Dans lequel les potentiels effectifs (pour $\nu(\alpha, \gamma, a) = 0$) peuvent être exprimés sous la forme supersymétrique

$$V_{eff} = U_{\alpha\gamma a}(x) + V_0 e^{cx} = W^2(x) - \left(\frac{\hbar W(x)}{\sqrt{2m}}\right)' \qquad (3.76)$$

Cela justifie l'ordre de l'opérateur dans l'hamiltonien utilisé par de nombreux auteurs dans le calcul approximatif des états de confinement dans les structures à puits quantiques dans le schéma de masse effective, car le premier partenaire conduit aux systèmes Hamiltoniens parfaitement résolvables dans le cadre de la mécanique quantique supersymétrique.

Le Hamiltonien partenaire supersymétrique associé, pour le cas $\nu(\alpha, \gamma, a) = 1$, qui décrit le Hamiltonien de masse effectif de BenDaniel-Duke $(a = \alpha = \gamma = 0)$,

$$\begin{aligned}
H_{BD} &= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} - \frac{\hbar^2}{2}\left(\frac{m'}{m}\right)'\frac{d}{dx} + \left[U_{\alpha\gamma a}(x) + V(x)\right] \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} - \frac{\hbar^2}{2}\left(\frac{m'}{m}\right)'\frac{d}{dx} \\
&\quad + \left[-\frac{\hbar^2}{4m^3(a+1)}\left[(\alpha+\gamma-a)mm'' + 2(a-\alpha\gamma-\alpha-\gamma)m'^2\right] + V(x)\right] \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} - \frac{\hbar^2}{2}\left(\frac{m'}{m}\right)'\frac{d}{dx} + V(x) \qquad (3.77)
\end{aligned}$$

Le second potentiel partenaire correspondant au potentiel effectif de BenDaniel-Duke n'intègre pas le terme d'ambiguïté est

$$V_{BD}(x) = V_0 e^{cx} \tag{3.78}$$

$$= W^2(x) - \left(\frac{\hbar W(x)}{\sqrt{2m}}\right)' + \frac{2\hbar W'}{\sqrt{2m(x)}} - \left(\frac{\hbar}{\sqrt{2m(x)}}\right)\left(\frac{\hbar}{\sqrt{2m(x)}}\right)'' \tag{3.79}$$

Nous voyons que les deux Hamiltonians partenaires supersymétriques H_- et H_+ décrivent des particules avec la même masse effective dépond de l'espace, mais avec des potentiels différents.

Il existe une correspondance entre les valeurs propres d'énergie des Hamiltoniens isospectraux H_- et H_+ , bien qu'elles aient des potentiels efficaces différents.

L'énergie du $n - ième$ état lié de H_- coïncide avec celle du $(n-1)$ ème état lié de H_+, ce qui est le cas exprimé par l'équation

$$E_n = \hbar c \sqrt{\frac{2V_0}{m_0}} \left[2n + 1 + \nu(\alpha, \gamma, a)\right] \tag{3.80}$$

L'état fondamental de H_- n'a pas d'état associé à H_+.

Pour un système parfaitement soluble, il est donc évident qu'un choix judicieux de la masse effective et du superpotentiel correspondant imposerait l'élimination du potentiel partenaire supersymétrique qui implique toute l'ambiguïté. Cela montre clairement que le choix de la masse efficace proposée par les Hamltoniens dans la littérature est physiquement acceptable pour le système mis en oeuvre

Notons enfin que, de la relation entre le superpotentiel et la fonction d'onde d'état fondamental de H_-

$$W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\Psi_1'^{n=0}(x)}{\Psi_1^{n=0}(x)}, \tag{3.81}$$

Il est facile de résoudre $n = 0, 1$, ce qui satisfait les conditions aux limites requises dictées par la conservation du courant à travers les fonctions d'enveloppe des hétérostructures. En résumé, en considérant la définition du potentiel effectif qui est la somme d'un potentiel réel $V(x)$ et d'un terme $U\alpha\gamma a(x)$résultant de la grande dépendance vis-à-vis de l'emplacement, et en gardant à l'esprit que le potentiel effectif repose sur l'Hamiltonien utilisé, nous avons connecté

3.5.2 Deuxiéme exemple pour un oscillateur harmonique

Le cas le plus simple de la condition d'intégrabilité d'invariance de forme correspond à des potentiels de partenaires ne différant que par un décalage énergétique uniforme β

$$V_2(x;\beta) = V_1(x;\beta) + R(\beta). \tag{3.82}$$

Dans le cas d'une masse constante, la condition ci-dessus conduit à le potentiel d'oscillateur harmonique standard, Comme nous le verrons, plus de potentiels impliqués sont obtenus si la masse dépend de x. Remplacement des expressions (3.36) et (3.42) pour les potentiels partenaires dans l'exigence d'invariance de forme (3.82) et mettre $\hbar = 1$, nous obtenons

$$\frac{2W'}{\sqrt{2m(x)}} - \left(\frac{1}{\sqrt{2m(x)}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2m(x)}}\right)'' = \beta = const. \tag{3.83}$$

Résoudre maintenant pour le superpotentiel conduit à

$$W(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2m(x)}}\right)' + \frac{1}{2}\beta\int\sqrt{2m(x)}dx. \tag{3.84}$$

Selon l'équation ci-dessus, pour chaque masse effective $m(x)$, il est possible d'obtenir un superpotentiel $W(x)$dont la paire de potentiels de partenaires associée respecte la condition(3.82), nous considérons une masse dépendante de la position donnée par

$$m(x) = \left(\frac{\alpha + x^2}{1 + x^2}\right)^2. \tag{3.85}$$

Cette masse effective vérifie

$$m(0) = \alpha^2, \tag{3.86}$$

$$m_{\infty} = \lim_{x \to \pm\infty} m(x) = 1. \tag{3.87}$$

La valeur limite m_{∞} correspond au «vrai» masse non usée de la particule. Remplacement (3.85) dans l'équation (3.84) on obtient le superpotentiel

$$W(x) = \frac{\beta x}{\sqrt{2}} + \frac{(\alpha - 1)}{\sqrt{2}} + \left[\beta \arctan x + \frac{x}{(\alpha + x^2)^2}\right], \tag{3.88}$$

ce qui conduit à la fonction potentielle invariante de forme

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{\beta^2}{2} [x + (\alpha - 1) \arctan x]^2 + \frac{1}{2} \frac{\alpha - 1}{(\alpha + x^2)^4} \\ &\quad \times \left[3x^4 + (4 - 2\alpha) x^2 - \alpha\right] - \frac{\beta}{2}. \end{aligned} \tag{3.89}$$

Dans ce cas, la fonction potentielle est caractérisée par un seul paramètre β et la fonction R apparaissant dans la condition invariante de forme générale se réduit à la fonction d'identité, c'est-à-dire $R(\beta) = \beta$. Par conséquent, l'expression générale des niveaux d'énergie des potentiels invariants de forme conduit aux spectres de type oscillateur harmonique

$$E_n = n\beta. \tag{3.90}$$

3.6 conclusion :

Dans ce chapitre, nous montrons que tout système quantique unidimensionnel de masse effective possède un système supersymétrique partenaires caractérisé par la même dépendance de la masse par rapport à la position, mais avec une nouvelle fonction potentielle. La forme de ce potentiel partenaire supersymétrique $V_2(x)$ dépend à la fois de la forme du potentiel initial $V_1(x)$ et de la forme de la dépendance de masse x. Nous généralisons également le concept de forme invariance au cas de masse non constante. Comme exemples illustratifs, nous discutons la relation entre la solvabilité exacte de l'équation de Schrödinger avec une masse dépendante de la position et l'ambiguïté des ordres dans l'opérateur hamiltonien dans le cadre de la mécanique quantique supersymétrique. L'équation unidimensionnelle de Schrödinger, dérivée de la forme générale de l'hamiltonien de masse effective, est résolue exactement pour un système à masse exponentiellement changeante en présence d'un potentiel de comportement similaire, et les Hamiltoniens partenaires supersymétriques correspondants sont liés au hamiltoniens de masse efficace proposés dans la littérature.

A côté de cela, un exemple supplémentaire de l'oscillateur harmonique est pris en compte en adoptant un ansatz approprié pour le superpotentiel $W(x)$, il est possible d'obtenir des fonctions V_1 potentielles liées à leurs partenaires supersymétriques V_2 par la condition d'intégrabilité d'invariance de forme. Les énergies propres et les fonctions propres de ces potentiels peuvent être trouvées de manière algébrique.

Conclusion générale

Nous avons traité dans ce mémoire des systèmes quantiques avec une masse variable, qui prend une grande importance car ils ont de nombreuses applications dans divers domaines de la physique, telle que les modèles avec structure non homogène. Ces modèles avec hétérostructures sont utilisés pour la description des propriétés électroniques des semi-conducteurs, en physique de la matière condensée, et dans les théories des puits et points quantique.

Dans le chapitre (01), nous avons aborder les probléme de reconnaissance de forme qui concerne le probléme l'ambiguïté d'ordre et l'Hamiltonian qui a été vérifié. La masse de suggestion a été considérée. les différentes formes de l'Hamiltonien dans la littérature selon les choix de l'ensemble de paramètres d'ambiguïté sont équivalents avec un termes suplémentaire qui appelés potentiels effectifs. par la suite nous avons déduit une équation de Schrödinger généralisée par l'hamiltonien effectif généralisé pour un potentiel et une masse variable en fonction de la position.

des résultats supplémentaireles de choix de la représentation pour eviter le probléme d'ambguité d'ordre, le premier consiste de faire l'étude dans la représentation d'impulsion puis la transformer dans la représentation de coordonnées, le second choix concerne de faire l'étude dans la représentation de coordonnées et nécissite de fixer l'un des paramètres d'ambguité figurant dans la fonction d'onde, où on peut travailler avec un modèle bien appropriée.

Dans le chapitre (02) : dans le but d'étudier les influences de la forme de masse, du potentiel, et du choix des paramètres d'ambigüité, nous avons considérer un exemples particulier et nous avons montrer que la solvabilité exacte de l'équation de Schrödinger généralisé en appliquant la méthode de Nikoforov Uvarov, dépend non seulement de la forme du potentiel, mais également de la dépendance spatiale de la masse. Dans l'exemple choisit, nous avons considéré une masse et un potentiel en décroissance ou en augmentation exponentielle, mappés dans un oscillateur harmonique avec une barrière centripète.

Dans le chapitre (03) : nous rappelons tous les ingrédients de l'approche supersymétrique, par fois en détail ensuite nous développons ainsi la théorie pour un système général avec masse constante celle de l'oscillateur harmonique et nous montrons comment obtenir son spectre et ses fonctions propres si le potentiel en question satisfait à la propriété d'invariance de forme.

une méthode de factorisation, basée sur la mécanique quantique supersymétrique ainsi que sur la propriété utile de l'invariance de forme, pour les systèmes a mass variable a été présentée. Il convient de mentionner ici qu'en raison de la présence de masse variable, la condition d'invariance de forme s'avère être différente du cas des systèmes à masse constante. Dans ce cas, il faut veiller au bon ordre des opérateurs en termes d'énergie cinétique. L'approche de la factorisation nous permet de déterminer le spectre d'énergie et les fonctions d'onde correspondantes du système quantique a masse variable concerné.

Bibliographie

[1] G. Bastard, Wave Mechanics Applied to Semiconductor Heterostructures (Les Editions de Physique, 1992).

[2] Smith. D. L. and Mailhiot.C, Theory of semiconductor superlattice electronic structure. ModPhys.Rev 62-173 (1990).

[3] De Saavedra, F. A.Boronat. J.Polls. A. and Fabrocini. A, Effective mass of one ^4He atom in liquid ^3He, Phy Rev B 50-4248 (1994).

[4] Serra, L. and Lipparini, E, Spin response of unpolarized quantum dots, Europhys Lett 40-667 (1997) .

[5] O.Von Roos and H.Mavromatis, position-dependent effective masses in semiconductors theory.II, Phys.Rev.B31,2294-2298 (1985).

[6] D.J. Ben Daniel, C.B. Duke, Space-Charge Effects on Electron Tunneling. Phys. Rev. 152, 683, (1966).

[7] T. Li, K.J. Kuhn, Band-offset ratio dependence on the effective-mass Hamiltonian based on a modified profile of the GaAs-AlxGa1-xAs quantum well. Phys. Rev. B47, 12760, (1993).

[8] T. Gora, F. Williams,Theory of Electronic States and Transport in Graded Mixed Semiconductors, Phys. Rev. 177, 1179, (1969).

[9] Q.-G. Zhu and H. Kroemer,Interface connection rules for effective-mass wave functions at abrupt heterojunction between two different semi-conductors. Phys. Rev. B27, 3519, (1983).

[10] A. de Souza Dutra, C.A.S. Almeida, Exact solvability of potentials with spatially dependent effective masses. Phys.A 275. 25–30(2000)

[11] J.M.Luttinger and W.Kohn, Motion of Electrons and Holes in Perturbed Periodic Fields. Phys. Rev. 97,869, (1955).

[12] O.Rojoand. S. Levinger, Integrated Cross Section for a Velocity-Dependent Potential. Phys.Rev. 123, 2177, (1961).

[13] M.Razavy, G.Fieldand, J.S.Levinger, Motion of Electrons and Holes in Perturbed Periodic Fields. Phys.Rev. 125,269, (1962).

[14] Cooper. F, Khare. A. and Sukhatme, Supersymmetry in quantum mechanics. World Scientific, (2001).

[15] E. Witten, Dynamical breaking of supersymmetry. Nuclear Physics B 188, 513 (1981).

[16] E. Schrödinger,The factorization of the hypergeometric equation. Proc. Roy. Irish. Acad. 46 A, 183 (1941).

[17] L. Infeld and T. E. Hull, The factorization method. Rev. Mod. Phys.23(1)21–68, Jan (1951).

[18] Gendenshteïn, L. É, Derivation of exact spectra of the Schrodinger equation by means of supersymmetry. JETP. Lett.38, 356 (1983).

[19] Plastino, A. R., Rigo, A., Casas, M., Garcias, F. and Plastino, A, Supersymmetric approach to quantum systems with position-dependent effective mass, Phys.Rev.A, 60, 4318 (1999).

[20] de Souza Dutra, A., Hott, M. and Almeida, C. A. S, Remarks on supersymmetry of quantum systems with position-dependent effective masses, E.Phys.Lett.62,8 (2003).

[21] A. R. Plastino, A. Rigo, M. Casas, F. Garcias, and A. Plastino, Supersymmetric approach to quantum systems with position-dependent effective mass, Phys. Rev. A 60, 4318 (1999).

[22] G.Szego,Orthogonal Polynomials,American Mathematical Society,NewYork,1959 (revised edition).

[23] Nikiforov A.F, Uvarov V.B, Special Functions of Mathematical Physics,1988 (Birkhauser, Basel).

[24] P.M.Morse, Diatomic Molecules According to the Wave Mechanics. II. Vibrational Levels. Phys.Rev. 34, 57, (1929).

[25] A.deSouza Dutra, Conditionally exactly soluble class of quantum potentials. Phys.Rev.A 47 (1993)R2435.

[26] I. S. Gradshtein and I. M. Ryzhik, Tables and Integrals, Series and Products ; M. Abramowitz,(Academic, New York, 1969)

[27] Dong, S. H., Factorization method in quantum mechanics, Volume 150, Springer Science & Business Media, 2007.

ملخص

هذا العمل هو مساهمة في دراسة النظم الكمومية ذات الكتلة المتغيرة ، ومناقشة مشكلة غموض النظام مع اختيار هاميلتون العام الذي اقترحه فون رووس ، ثم قدمنا تحليلا لحل معادلة شرودنجرذات هاميلتون المعمم مع أشكال مختلفة من الكمونات والكتل التي تعتمد على الموضع، وذلك باستخدام طريقة (N-U) حيث حصلنا على طيف الطاقة ودوال الموجة المرافقة. بالإضافة إلى ذلك ، استخدمنا أيضًا طريقة أنيقة لحل الأنظمة جبريًا عن طريق تحليل عامل هاميلتون المقابل. تعتمد هذه الطريقة على ميكانيكا الكم فائق التناظر وحالة التكامل، والمعروفة باسم ثابت الشكل.

Abstract

this work is a contribution of the study of quantum systems with variable mass, addressing the problem of order ambiguity with the general Hamiltonian choice proposed by Von Roos, then we presented an analysis to solve the Schrödinger equation for the generalized Hamiltonian with different forms of position-dependent potentials and masses, using the Nikiforov-Uvarov method where we obtained the energy spectrum and the corresponding wave functions. In addition, we also used an elegant method to solve systems algebraically by factoring the corresponding Hamiltonian. This method is based on supersymmetric quantum mechanics and the integrability condition, better known as shape invariance.

Résumé

ce travail est une contribution de l'étude des systèmes quantiques à masse variable, abordant le problème d'ambiguïté d'ordre avec le choix d'Hamiltonien générale proposé par Von Roos, ensuite nous avons présenté une analyse pour résoudre l'équation de Schrödinger pour l'Hamiltonien généralisée avec différentes formes de potentiels et de masses dépendant de la position, en utilisant la méthode de Nikiforov-Uvarov ou nous avons obtenus le spectre d'énergie ainsi les fonctions d'onde correspondant. En outre, nous avons également utilisé une méthode élégante pour résoudre les systèmes algébriquement en factorisant l'Hamiltonien correspondant. Cette méthode est basée sur la mécanique quantique supersymétrique et la condition d'intégrabilité, plus connue sous le nom d'invariance de forme.