REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DE BOUIRA

FACULTE DES SCIENCES ET DES SCIENCES APPLIQUEES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

MEMOIRE PRESENTÉ POUR L'OBTENTION DU DIPLÔME

DE MASTER EN PHYSIQUE

OPTION

Physique Théorique

Intégrales de chemin pour les problèmes dépendants du temps

Présenté par **: Djemaoune Soumia**

Soutenu le 20/10/2020

Devant le jury :

Président : Mr Zerirgui Djamel **M.C.B. Univ. Bouira**

Rapporteur : Mme Bouchemla Nedjma **M.C.B. Univ. Bouira**

Examinateurs : Mr Merriche Abderrzak **M.A.A. Univ. Bouira**

Mr Benaiche Salim **M.A.A. Univ. Bouira**

ANNEE UNIVERSITAIRE 2019/2020

Remerciements

En premier lieu, mes remerciements vont tout premièrement à Dieu tout puissant pour la volonté, pour m'avoir aidé tout au long de mes études, et la patience qu'il m'a donné pour terminer ce mémoire.

Je tiens à remercier très sincèrement Mme. BOUCHEMLA Nedjma mon encadreur de mémoire à qui j'exprime ma profonde gratitude et mes reconnaissances, d'avoir dirigé et suivi de plus près ce travail, pour sa gentillesse, ses conseils, et son encouragement au cours de la préparation de ce mémoire.

Mon respect et mes remerciements vont à Mr. ZERIRGUI Djamel qui m'a fait l'honneur d'être le président de Jury.

Je remercie aussi Mr. BENAICHE Salim et Mr. MERRICHE Abderrzak d'avoir accepté d'examiner ce mémoire.

Mes remerciements vont aussi à Mr. ZAMOUM Redouane et Mr. SAADOUN Mohamed Amezian et tous mes enseignants du département de physique, qui j'ai beaucoup appris avec eux, et à qui j'espère les succès toujours.

Je souhaite exprimer ma sincère gratitude et mes remerciements à mes chers parents, mes sœurs, mes frères, mes amies, mes collègues et tous ceux qui m'ont aidé et soutenu de près ou de loin.

DJEMAOUNE Soumia

A mes chers parents que Dieu les protège, pour leurs amours, leurs encouragements, et leurs soutiens.

A mes sœurs à qui je souhaite tout le bonheur, Hiba, Dina, et surtout Hayet qui a été la plus soutenue. Et la petite princesse Asma.

A mes frères Toufik, Ibrahim, et Sofiane.

A ma cousine Sara et à mes chers amies GS4 surtout Sara et sans oublier mes copines, Bouchra, Hadjer, Nesrine, Wissam et Soumia

Je vous souhaite le bonheur et le succès toujours.

Soumia

Table des matières

Introduction générale

Durant le dernier siècle, plusieurs formalismes ont été élaborés pour comprendre la mécanique à l'échelle quantique, et plusieurs travaux ont connu des succès lors la description et la compréhension des phénomènes physiques et ceci en adoptant differents formalismes, parmi les formalismes les plus important nous pouvons citer brièvement les trois suivants :

Le premier est en 1926 c'est *la mécanique des matrices*, *Heisenberg* a introduit son formalisme sous l'idée de considérer la notion de position x et d'impulsion p comme des opérateurs pour quantifier le mouvement d'un système, où il a utilisé la représentation matricielle pour déterminer les valeurs propres de l'operateur Hamiltonien. C'est effectivement la première théorie de la mécanique quantique, connue sous le nom de "quantification canonique".

Le deuxième est celui de *Schrödinger,* connu sous le nom de *la mécanique ondulatoire*, en 1927 et indépendamment de *Heisenberg. Schrödinger* a formulé une autre approche basée sur le concept de fonction d'onde pour décrire l'état d'un système et par l'utilisation des équations différentielles relatif à l'Hamiltonien du système étudié. Le lien entre les deux représentations en termes de bases de l'espace de Hilbert a été établi par *Dirac*, par la suite.

Un autre formalisme de représentation géométrique basé sur le lagrangien du système connu sous le nom de *Intégrales de chemins.* En 1933 *Dirac* a observé que l'action a un rôle primordiale en mécanique classique, qui lui fait croire que le Lagrangien sera plus utile que l'Hamiltonien pour décrire un système physique, il est arrivé à conclure que l'amplitude de transition élémentaire est proportionnelle à la quantité $exp(\frac{i}{\hbar}S)$ où S est l'action classique du système [1].

Richard Feynman a introduit sa méthode des intégrales de chemins dans sa thèse soutenue en mai 1942[2] qui est alternative aux méthodes de *Heisenberg* et de *Schrödinger* afin de répondre au besoin profond de la compréhension de la physique quantique [3]. *Feynman* a inclut le principe de moindre action qui lui permet de donner la solution au problème, utilisant un concept mathématique simple, c'est "*l'intégrale de chemin". C*ette méthode dite « *Feynman path intégral* » [3] a donnée naissance au troisième formalisme de la mécanique quantique ayant ainsi plusieurs avantages distincts par rapport aux autres formalisme basés sur le Hamiltonien [3, 4].

Le principe de *Feynman* consiste à poser d'une manière générale, la phase de l'amplitude correspondant à un chemin donné, est l'action classique le long de chemin divisée par la constante de Planck $\hbar$. la somme de toutes les amplitudes obéis a un objet mathématique que l'on nomme une intégrale de chemin, sur laquelle repose tous le formalisme, et qui n'a cessé d'être introduit dans divers domaines de la physique théorique[5], tel que la mécanique quantique relativiste, la physique statistique et la théorie quantique des champs.

Malgré le succès qu'a connu l'application de la méthode des intégrales de chemin dans plusieurs domaines de la physique, le formalisme a rencontré des difficultés dans l'étude de l'atome d'hydrogène et celui du potentiel coulombien car il n'est pas toujours facile de trouver une forme Gaussienne pour l'intégrale de chemin, et ce n'est qu'en 1978 que Duru et Kleinert en formuler une méthode appeler transformation spatio-temporelle qui est essentiellement une reparamétrisation du chemin suivie par une transformation ponctuelle. Depuis, de nombreux travaux ont été traités et résolus[5, 6, 7, 8], et ont donnée plus d'avantage à ce formalisme.

Les transformations canoniques [9] aussi, interviennent de manière élégante dans ce formalisme, car nous savons qu'en mécanique classique, pour une meilleure analyse du mouvement d'un système, il est parfois préférable de changer de système des coordonnées, le moyen le plus adéquat sont les transformations canoniques qui sont connues pour le changement apporté dans la description de la dynamique d'un système dont le mouvement est régi par un Hamiltonien à un autre espace régi par un autre hamiltonien. Le principe de moindre action doit être vérifier dans les deux systèmes, l'ancien et le nouveau, cette condition est vérifier si et seulement si les équations $p\dot{q} - H$ dans l'ancien système, et $P\dot{Q} - \mathcal{H}$ dans le nouvel espace des phases, doivent être relier par une fonction arbitraire des coordonnées, des impulsions et du temps, cette fonction est dite *fonction génératrice*. Au niveau de la formulation path intégral, l'expression coïncide exactement avec l'action de l'intégrale de chemin, de ce fait, les transformations canoniques s'appliquent de façon naturelle. De même, pour la méthode des transformations canoniques généralisées GCT [10], où une régularisation temporelle est ajoutée à la transformation ponctuelle permettant donc d'étudier des systèmes dépendant du temps.

Notre travail dans ce mémoire est consacré au traitement des systèmes non relativistes à une seule dimension dépendant de position et du temps par l'approche des intégrale de chemin, et nous l'avons subdivisé en trois chapitres principaux :

Dans le premier chapitre, des généralitées sur le formalisme des intégrales de chemin dans l'espace unidimensionnel, suivi d'une présentation détaillée de la méthode des transformations spatio-temporelles de *Duru-Kleinert* pour une particule non relativiste de masse constante soumise a un potentiel $V(x)$, suivie par une autre partie où nous representons la procédure des transformations canoniques généralisées (GCT) de facon détaillée aussi.

Le deuxième chapitre, nous traitons par la méthode de *Duru* et *Kleinert* des systèmes d'une particule non relativiste de masse dépendente de la postion et de potentiel qui pose un problème de singularité.

Le dernier chapitre porte sur l'étude des systèmes dissipatifs où la masse et le potentiel dépendent tous deux non seulement de position mais aussi du temps dans des types des systèmes non quadratiques décrit par une forme symétrique de l'Hamitonien. Et le traitement se fait par la méthode des transformations canoniques généralisées dite "GCT".

Chapitre 1

Integrale de chemin pour une particule non relativiste de masse constante dans les systèmes unidimensionnels

1.1 Introduction

L'intégrale de chemin est un outil mathématique puissant pour l'étude de la mécanique quantique, car elle met en correspondance de façon très explicite les deux mécaniques classique[1] et quantique [11], où le concept essentiel dans cette approche est le propagateur qui contient toutes les informations sur le système étudié .

Dans ce chapitre, on va parler plus généralement sur le traitement des systèmes de particule non relativiste de masse constante à une seule dimension, où nous introduisons deux techniques très importantes en intégrales de chemin, la première c'est des transformations spatio-temporelles de Duru-Kleiner [5], et la seconde c'est la méthode des

[1] basée sur des notion classique comme Lagrangien et l'action classique

transformations canoniques généralisées[10].

1.2 Formalisme des integrales de chemin

1.2.1 Le propagateur

Considérons une particule de masse m dans un système à une dimension allant d'un point $A(x_A, t_A)$ au point $B(x_B, t_B)$ où en mécanique quantique elle peut suivre l'un de l'infinité de trajectoire, à la différence de la mécanique classique où il n'y a qu'une seule trajectoire de A à B. L'amplitude totale de probabilité de transition du point A au point B est appelée propagateur (kernel)$K(B, A)$ qui peut être exprimé comme la somme sur tous les chemins possibles reliant les points A et B [12], ou c'est la somme des contributions de chaque chemin.

$$K(B, A) = \sum_{\substack{\text{tout les chemins} \\ \text{de } A \text{ à } B}} \Psi\left[x(t)\right] \tag{1.1}$$

Chaque trajectoire associée à une contribution qui possède une phase proportionnelle à l'action

$$\Psi\left[x(t)\right] = N \exp\left[\frac{i}{\hbar} S_C\left[x(t)\right]\right] \tag{1.2}$$

N est une constante de normalisation, et S_C c'est l'action associée au chemin C .

L'action S_C varie d'un chemin à un autre, et comme les chemins sont très proche on peut remplacer la somme par une intégrale, alors nous obtenons l'expression du propagateur :

$$K(B, A) = \int_{x(t_A)}^{x(t_B)} Dx(t) \exp\left[\frac{i}{\hbar} S_C\left[x(t)\right]\right] \tag{1.3}$$

où $Dx(t)$ represente la mesure.

Forme discrète du propagateur

L'évoution d'un système de point à la position x_A au point x_B entre les temps t_A et t_B est gouvernée par le propagateur qui a été définit par *Feynman* [3] de la façon suivante :

$$K(x_B, t_B; x_A, t_A) = \int_{x(t_A)}^{x(t_B)} Dx(t) \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_0^T L(x, \dot{x}, t)dt\right] \tag{1.4}$$

où

$T = t_B - t_A$

L : le Lagrangien de système donné par :

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - V(x) \tag{1.5}$$

en subdivisant l'intervalle de temps T en $(N+1)$ intervalles élémentaires égaux $\varepsilon = (t_n - t_{n-1}) = \frac{T}{(N+1)}$,avec $N \to \infty$, alors :

$$T = (t_n - t_{n-1})(N + 1) \tag{1.6}$$

et en utilisant les notions habituelles

$$\begin{aligned}
\triangle x_n &= x_n - x_{n-1}\ , \quad \bar{x} = \frac{x_n - x_{n-1}}{2} \\
t_B &= t_{N+1}\qquad\ , \quad t_A = t_0 \\
x_B &= x(t_{N+1})\quad\ , \quad x_A = x(t_0)
\end{aligned}$$

Le propagateur prend la forme suivante :

$$K(x_B, t_B; x_A, t_A) = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N+1} \left[\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}\right]^{\frac{1}{2}} \prod_{n=1}^{N} \left[\int dx_n\right] \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_0^T A_N\right] \tag{1.7}$$

avec A_N l'action totale

$$A_N = \sum_{n=1}^{N+1} \left[\frac{m}{2\varepsilon} (\triangle x_n)^2 - \varepsilon V(x_n) \right] = \int_0^T \left[\frac{1}{2} m\dot{x}^2 + V(x,t) \right] dt \tag{1.8}$$

Propagateur dans l'espace des phases

L'étude d'évolution d'un mouvement d'une particule soumise à un potentiel $V(x)$ de position x_A en t_A à x_B a l'instant t_B est décrit par le propagateur définie à l'aide de l'opérateur d'évolution [13] tel que :

$$K(x_B, t_B; x_A, t_A) = \left\langle x_B \left| \hat{U}(t_B - t_A) \right| x_A \right\rangle \Theta(t_B - t_A) \tag{1.9}$$

$\Theta(t_B - t_A)$ est la fonction de Heaviside :

$$\Theta(t_B - t_A) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad t_B \succ t_A \\ 0 & \text{pour} \quad t_B \prec t_A \end{cases} \tag{1.10}$$

En divisant l'intervalle de temps en $N+1$ intevalles infinitésimaux égaux $T = \varepsilon(N+1)$, allors on peut décomposer l'opérateur d'évolution en $(N+1)$ opérateur élémentaires :

$$K(x_B, t_B; x_A, t_A) = \left\langle x_B \left| \hat{U}(t_{N+1} - t_N)\hat{U}(t_N - t_{N-1})...\hat{U}(t_n - t_{n-1})..\hat{U}(t_1 - t_0) \right| x_A \right\rangle \tag{1.11}$$

avec $t_B = t_{N+1}$, $t_A = t_0$

Il suffit d'insérer N relation de fermeture entre les opérateurs d'évolution infinitésimaux

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_n \left| x_n \right\rangle \left\langle x_n \right| = 1 \ , \qquad n = 1, 2, 3... \tag{1.12}$$

On peut écrire le propagateur sous la forme d'un produit de $N+1$ propagateurs élémentaires

$$K(x_B,t_B;x_A,t_A) = \lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\int dx_n \prod_{n=1}^{N+1}\langle x_n|\,\hat{U}(t_n-t_{n-1})\,|x_{n-1}\rangle$$
$$K(x_B,t_B;x_A,t_A) = \lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\int dx_n \prod_{n=1}^{N+1}\langle x_n|\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\varepsilon\hat{H}\right)|x_{n-1}\rangle \tag{1.13}$$

tel que :

$$\hat{H} = \hat{T}(p,t) + \hat{V}(x,t) \tag{1.14}$$

$\hat{H}$ représente l'opérateur Hamitonien de la particule .

$\hat{T}(p,t)$ est l'opérateur énergie ciétique.

$\hat{V}(x,t)$ est l'opérateur énergie potentielle.

Pour ε trés petit, on peut appliquer la formule de Baker-Hausdroff [5]

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon\hat{H}} = e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon\hat{V}}e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon\hat{T}}e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon^2\hat{X}} \tag{1.15}$$

où l'opérateur $\hat{X}$ représente le développement suivant :

$$\hat{X} = \frac{1}{2}\left[\hat{V},\hat{T}\right] - \frac{\varepsilon}{\hbar}\left(\frac{1}{6}\left[\hat{V},\left[\hat{V},\hat{T}\right]\right] - \frac{1}{3}\left[\left[\hat{V},\hat{T}\right],\hat{T}\right]\right) + ... \tag{1.16}$$

Si on néglige les termes d'ordre supérieur ou égal à ε^2, et on injecte les relation de fermeture suivantes

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_n\,|x_n\rangle\langle x_n| = 1 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} dp_n\,|p_n\rangle\langle p_n| = 1 \tag{1.17}$$

et prenant le produit scalaire :

$$\langle x_n|\,p_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{i}{\hbar}p_n x_n}$$

l'expression de l'opérateur d'évolution infinitésimale s'écrit :

$$\begin{aligned}\langle x_n|\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\varepsilon\hat{H}\right)|x_{n-1}\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty}dx\,\langle x_n|\,e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon\hat{V}}\,|x\rangle \\ &\times\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_n}{2\pi\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}\left[p_n(x-x_{n-1})-\varepsilon\hat{T}(p_n,t_n)\right]}\end{aligned}\tag{1.18}$$

avec l'élément de matrice :

$$\langle x_n|\,e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon\hat{V}}\,|x\rangle=\delta(x_n-x)e^{-\frac{i\varepsilon}{\hbar}V(x,t_n)}\tag{1.19}$$

$$\langle x_n|\,\hat{U}(t_n-t_{n-1})\,|x_{n-1}\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_n}{2\pi\hbar}\exp\left[\frac{i}{\hbar}\left[p_n(x-x_{n-1})-\varepsilon\left[\hat{T}(p_n,t_n)+V(x_n,t_n)\right]\right]\right]\tag{1.20}$$

par remplacement de (1.20) dans (1.13) la forme finale de propagateur donné comme :

$$K(x_B,t_B;x_A,t_A)=\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\int dx_n\prod_{n=1}^{N+1}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dp_n}{2\pi\hbar}\exp\frac{i}{\hbar}A_N\tag{1.21}$$

où A_N est l'ation exprimée sous la forme discrète par :

$$A_N=\sum_{n=1}^{N+1}\left[p_n(x-x_{n-1})-\varepsilon\left[\hat{T}(p_n,t_n)+V(x_n,t_n)\right]\right]\tag{1.22}$$

On définit la foction de Green $G(x_B,x_A,E)$ comme étant la transformée de Fourier de propagateur $K(x_B,t_B;x_A,t_A)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}G(x_B,x_A,E) &= \int_0^{\infty}dT\exp\left(\frac{i}{\hbar}ET\right)K(x_B,t_B;x_A,t_A) \\ &= \int_0^{\infty}dT\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\left[\int dx_n\right]\prod_{n=1}^{N+1}\int\left[\frac{dp_n}{2\pi\hbar}\right]\exp\frac{i}{\hbar}A_N^E\end{aligned}\tag{1.23}$$

avec

$$A_N^E = \sum_{n=1}^{N+1} \left[p_n (x - x_{n-1}) - \varepsilon \left[\hat{T}(p_n, t_n) + V(x_n, t_n) - E \right] \right] \tag{1.24}$$

1.3 Procédure de transformation spatio-temporelle

La fameuse technique de *Feynman* des intégrales de chemins a rencontré des difficultés pour le traitement d'un certain type de potentiel, tel que le potentiel coulombien relatif à l'atome d'hydrogène, qui empêche la résolution par l'approche des intégrales de chemin, les travaux de *H.Kleinert* et *I.Duru* dans les systèmes qui représentent des singularités à l'origine permettent de solutionner ces problèmes.

La méthode de transformation spatio-temporelle utilisé résume une reparamétrisation de l'espace-temps, et elle apporte des corrections qui manifestent au niveau de l'action comme un potentiel effectif de nature purement quantique.

1.3.1 Fonction de Green

L'évolution d'un système de particule non relativiste déplace d'un point de position x_A en t_A à x_B en t_B dans le potentiel $V(x)$ décrit par le propagateur de *Feynman* qui est donné par sa forme continue

$$K(x_B, t_B; x_A, t_A) = \int Dx(t) \int Dp(t) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (p\dot{x} - H)\, dt \right\} \tag{1.25}$$

avec l'Hamiltonien

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x) \tag{1.26}$$

Les systèmes où le potentiel forme des singularité compliquent la résolution par le formalisme des intégrales de chemin qui devient pas possible, dans ce cas il est nécessaire de faire intervenir la transformation spatio-temporelle aux calculs des intégrales de chemin.

En commençant par écrire l'opérateur résolvante $\hat{R}$ multipliée à gauche et à droite par les fonctions $f_r(x)$ et $f_l(x)$ ou plus généralement :

$$\hat{R} = f_r \frac{i\hbar}{f_l(E - H) f_r} f_l \tag{1.27}$$

$\hat{f}_l$ et $\hat{f}_r$ sont des fonctions arbitraires appelées les fonctions régulatrices, qui sont choisies d'une manière appropriées, tel que $f_r(x) f_l(x) = f(x)$ avec une reparamérésation des chemins définie par $dt = f(x) ds$.

En exprimant l'opérateur $\hat{R}$ dans la représentation de Schwinger[15], la fonction de Green[1] s'écrit :

$$\begin{aligned} G(x_B, x_A, E) &= \langle x_B | \hat{R} | x_A \rangle = \langle x_B | f_r \frac{i\hbar}{f_l \, (E - \hat{H}) f_r} f_l \; | x_A \rangle \\ &= f_r(x_B) f_l(x_A) \int_0^\infty dS \, \langle x_B | \, e^{-\frac{i}{\hbar} S f_l \, (x) (\hat{T} + \hat{V} - E) f_r \, (x)} \, | x_A \rangle \, . \end{aligned} \tag{1.28}$$

Nous remarquons que la nouvelle forme de potentiel au niveau d'expenentielle ne représente pas une dévergence par la suite. Dans ce traitement on construit la fonction de Green, d'abord, subdivisant l'intervalle de temps S en $(N+1)$ intervalles infinitésimaux tel que $S = \varepsilon(N+1)$, et en insérant N relations de fermetur $\int dx_n \, |x_n\rangle \langle x_n| = 1$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} G(x_B, x_A, E) &= \lim_{N \to \infty} \int_0^\infty dS f_r(x_B) f_l(x_A) \left[\prod_{n=1}^{N} \int dx_n \right] \\ &\quad \times \prod_{n=1}^{N+1} \langle x_n | \, e^{-\frac{i}{\hbar} S f_l \, (x) (\frac{p^2}{2m} + V(x) - E) f_r \, (x)} \, | x_n \rangle \, . \end{aligned} \tag{1.29}$$

Introduisant $(N+1)$ relastion de fermeture de forme $\int dp_n \, |p_n\rangle \langle p_n| = 1$, et en effectuant l'integrale sur les variables p_n , nous obtenons la forme final de la fonction de Green

[1] exprime l'amplitude de transition pour une énergie fixe.

$$
\begin{aligned}
G(x_B, x_A, E) &= [f_r(x_B) f_l(x_A)]^{\frac{1}{4}} \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N+1} \left[\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon_s}\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\times \left[\prod_{n=1}^{N} \int \frac{dx_n}{\sqrt{f(x_n)}}\right] \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1}\left[\frac{m(\Delta x_n)^2}{2\varepsilon_s\sqrt{f(x_n)f(x_{n-1})}}\right.\right. \\
&\left.\left. -\varepsilon_s\left(V(x_n)-E\right)\sqrt{f(x_n)f(x_{n-1})}\right]\right\}. \qquad (1.30)
\end{aligned}
$$

1.3.2 Transformation ponctuelle et corrections

Le but dans cette partie est de mettre le terme cinétique sous sa forme standard, nous effectuons alors une transformation de coordonnée $x \to q$ tel que :

$$x = h(q) \qquad (1.31)$$

d'où

$$dx = h'(q)dq \qquad (1.32)$$

Le choix approprier des fonctions régulatrices $f_l(x)$et $f_r(x)$ est permet de dériver des correction au niveau de la mesure, l'action, et du préfacteur, ces correction sont effectuées autour du poste point à l'aide de développement de Taylor. En cosidérant le cas générale où $f_l(x)$ et $f_r(x)$ ont la forme la plus générale $f_l(x) = f^{1-\lambda}(x)$ et $f_r(x) = f^{\lambda}(x)$ avec λ est un paramètre arbitraire, et en considérant les notations suivantes

$$e_1 = h' = \frac{1}{e}, e_2 = h'', e_3 = h'''... \qquad (1.33)$$

La correction sur la mesure :

Le developpement de $(\triangle x)$ donne :

$$\triangle x_n = e_1 \triangle q - \frac{1}{2} e_2 \triangle q^2 + \frac{1}{6} e_3 \triangle q^3 + ... \qquad (1.34)$$

Le Jacobien dû à la transformation

$$J = e_1 \left\{ 1 - \bar{e}e_2 \triangle q + \frac{1}{2} \bar{e}e_3 \triangle q^2 + ... \right\} \tag{1.35}$$

on déduit alors la correction

$$C_{mesure} = -\bar{e}e_2 \triangle q + \frac{1}{2} \bar{e}e_3 \triangle q^2 + ... \tag{1.36}$$

La correction sur l'action :

À partir de de (1.34) on a

$$(\triangle x_n)^2 = e_1^2 \triangle q^2 \left\{ 1 - e_1 e_2 \triangle q + \left[\frac{1}{3} \bar{e}e_3 + \frac{1}{4} (\bar{e}e_2)^2 \right] \triangle q^2 + ... \right\} \tag{1.37}$$

Puis plusieurs developpements de la forme $f_r(x_{n-1})$, $\frac{1}{f_r(x_{n-1})}$..., nous trouvons pour l'action la correction suivante

$$\begin{aligned} C_{action} &= \frac{iM}{\hbar} \frac{(\triangle q)^2}{2\varepsilon_s} \left\{ - \left((\bar{e}e_2) - \lambda \frac{f'}{f} \right) \triangle q + \right. \\ & \left. \left[\frac{1}{3} \bar{e}e_3 + \frac{1}{4} (\bar{e}e_2)^2 + \frac{1}{2} \left(-\lambda \frac{f''}{f} + \lambda(\lambda+1) \left(\frac{f'}{f} \right)^2 \right) - \lambda \bar{e}e_2 \frac{f'}{f} \right] (\triangle q)^2 \right\} \\ & - \frac{iM^2}{2\hbar^2} \frac{(\triangle q)^4}{4\varepsilon_s^2} \left((\bar{e}e_2) - \lambda \frac{f'}{f} \right)^2 \triangle q^2 + ... \end{aligned} \tag{1.38}$$

La correction sur le préfacteur :

Aprés le developpement de Taylor de la fonction f_{n-1} et un suite de calcule par considération le développement de la forme $(1+x)^n$,on obtient le terme de la correction dûe au préfacteur sous cette forme :

$$C_f = \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\lambda \right) \left(-\frac{f'}{f} \triangle q + \frac{1}{2} \frac{f''}{f} (\triangle q)^2 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\lambda \right) \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{2}\lambda \right) \left(\frac{f'}{f} \right)^2 (\triangle q)^2 + ... \tag{1.39}$$

On tenir compte l'expression des valeurs moyennes

$$\left\langle (\triangle q)^{2n} \right\rangle = \left(\frac{i\hbar\varepsilon}{M} \right)^n (2n-1)!! \tag{1.40}$$

la correction totale trouvé est :

$$C_T = -\frac{i\hbar\varepsilon_s}{m} \left(\frac{1}{4}\frac{h'''}{h'} - \frac{3}{8}\left(\frac{h''}{h'}\right)^2 \right) \tag{1.41}$$

1.3.3 Potentiel effectif :

La correction totale se manifeste au niveau de l'action comme un potentiel effectif en $\hbar^2$ qu'il prend la forme suivante :

$$V_{eff} = -\frac{\hbar^2}{m} \left(\frac{1}{4}\frac{h'''}{h'} - \frac{3}{8}\left(\frac{h''}{h'}\right)^2 \right)$$

Finalement, la fonction de Green s'écrit comme :

$$\begin{aligned} G(x_B, x_A, E) &= [f_l(x_A) f_r(x_B)]^{\frac{1}{4}} \lim_{N\to\infty} \int_0^\infty dS \prod_{n=1}^{N+1} \left[\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon_s} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\times \prod_{n=1}^{N} \int dq_n \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^{N+1} \left[\frac{m(\Delta q_n)^2}{2\varepsilon_s} - \varepsilon_s \left(V(q) + V_{eff} - E \right) \right] \right\} \end{aligned} \tag{1.42}$$

1.4 Transformation canonique généralisée

Les systèmes physiques dépendants du temps sont difficiles à traiter et à résoudre par la méthode de Schrödinger, il est nécessaire d'utiliser d'autre méthode d'une façon de mettre la résolution est moin difficile , où la méthode de transformations canoniques généralisées [10, 16], est adéquate pour traverser cette difficulté. Nous avons construit le propagateur pour la première transformation canonique suivie par une nouvelle construction après la deuxième transformation canonique.

Les transformation sont définies par :

$$x = Q\rho(t/t_0) \qquad ; \qquad p = \frac{P}{\rho(t/t_0)} \tag{1.43}$$

$$\frac{ds}{dt} = \rho^{-2}(t/t_0) \tag{1.44}$$

$\rho(t/t_0)$: fonction arbitraire sans dimention

1.4.1 Propagateur

Le propagateur dans le formalisme des intégrales de chemin s'écrit sous cette forme

$$K(x_f, t_f; x_i, t_i) = \int Dx(t)Dp(t)\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f}(p\dot{x} - H)\,dt\right\} \tag{1.45}$$

En suit après la subdivision de l'intervalle de temps et l'injection des relations de fermeture et l'utilisation de la prescription du mid-point mettent le propagateur comme

$$\begin{aligned} K(x_f, t_f; x_i, t_i) &= \lim_{N\to\infty}\int \prod_{n=1}^{N} dx_n \prod_{n=1}^{N+1}\frac{dp_n}{2\pi\hbar} \\ & e^{\frac{i}{\hbar}\left\{\sum\limits_{n=1}^{N+1} p_n(x_n - x_{n-1}) - \varepsilon H\left(p_n, \frac{x_n + x_{n-1}}{2}, \frac{t_n + t_{n-1}}{2}\right)\right\}} \end{aligned} \tag{1.46}$$

avec

$H = \frac{p^2}{2m} + V(x,t)$

$x_n = x(t_n)$

$\varepsilon = t_n - t_{n-1} = \frac{t_f - t_i}{N}$

1.4.2 Première transformation canonique

Lors de cette transformation, le système passe de coordonnées (x, p, t) à (Q, P, t)

$$(x,p,t) \overset{F_2(x,P,t)}{\longrightarrow} (Q,P,t)$$

et elle été effectuée à partir d'une fonction F_2 dite la fonction génératrice [9]

La transformation définie par :

$$x = Q\rho\,(t) \qquad\qquad p = \frac{P}{\rho\,(t)} \tag{1.47}$$

avec

$$F_2\,(x,P,t) = P\frac{x}{\rho\,(t)} = PQ \tag{1.48}$$

en utilisant

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{P}{\rho} \qquad\qquad Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} \tag{1.49}$$

$$\mathcal{H}{=}H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \tag{1.50}$$

$$p\mathring{x} - H = P\dot{Q} - \mathcal{H}{+}\frac{dF}{dt} \tag{1.51}$$

oú $F = -PQ + F_2$, et danc F est nulle.

L'Hamiltonien du système se transforme comme :

$$\mathcal{H} = \frac{P^2}{2m\rho^2} - \frac{PQ\dot{\rho}}{t_0\rho} + V(\rho Q,t) \tag{1.52}$$

l'action aprés la transformation s'écrit sous cette forme :

$$\begin{aligned} A &= \int_{t_i}^{t_f} \{p\dot{x} - H(x,p,t)\}\,dt \\ &= \int_{t_i}^{t_f} \left\{P\dot{Q} - \left(-\frac{PQ\dot{\rho}}{t_0\rho} + \frac{P^2}{2m\rho^2} + V(\rho Q,t)\right)\right\} dt \end{aligned} \tag{1.53}$$

Et finalement le propagateur se transforme comme suite :

$$\begin{aligned} K(x_f,t_f;x_i,t_i) &= \frac{1}{(\rho_i\rho_f)^{\frac{1}{2}}}\int DQDP \\ &= \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f}\left\{P\dot{Q}-\left(\frac{P^2}{2m\rho^2}-\frac{PQ\dot{\rho}}{t_0\rho}+V(\rho Q,t)\right)\right\}dt\right\} \end{aligned} \quad (1.54)$$

1.4.3 Transformation temporelle

La forme de terme cinétique dans (1.54) est inadéquate dans laquelle le terme de masse est variable, pour le rendre constante il est necessaire d'utiliser la transformation temporelle $ds = \rho^{-2}(t/t_0)dt$ à ce niveau,le propagateur obtenu est :

$$\begin{aligned} K(x_f,t_f;x_i,t_i) = \frac{1}{(\rho_i\rho_f)^{\frac{1}{2}}}\int DQDP \\ \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{s_i}^{s_f}\left(P\dot{Q}-\left(\frac{P^2}{2m}-\frac{PQ\frac{d\overline{\rho}}{dt}}{t_0\overline{\rho}}\right.\right.\right. \\ \left.\left.\left.+\overline{\rho}^2 V\left(\overline{\rho}Q\int^s\overline{\rho}^2\left(\frac{\sigma}{t_0}\right)d\sigma\right)\right)\right)ds\right\} \end{aligned} \quad (1.55)$$

où $\quad s_i = \int^{t_i}\frac{d\sigma}{\rho^2(\frac{\sigma}{t_0})}$; $s_f = \int^{t_f}\frac{d\sigma}{\rho^2(\frac{\sigma}{t_0})}$; $\Delta S = s_n - s_{n-1} = \frac{\Delta t}{\overline{\rho}_n\overline{\rho}_{n-1}} = \frac{\Delta t}{\overline{\rho}^2}\left(\frac{\overline{s}_n}{t_0}\right)$

1.4.4 Deuxième transformation canonique

Le propagateur dans la dernière expression n'est pas sous sa forme standard a cause de la présence du terme $\frac{PQ\frac{d\overline{\rho}}{dt}}{t_0\overline{\rho}}$ au niveau de terme cinétique, une deuxième transformation été effectuer pour le ramener à la forme standard

On pose :

$$\mathcal{P} = P - \frac{mQ\frac{d\overline{\rho}}{dt}}{t_0\overline{\rho}} \quad (1.56)$$

$$\mathcal{Q} = Q \quad (1.57)$$

pour la fonction génératrice utilisé :

$$F_2'(Q,P,s) = PQ - \frac{mQ^2\frac{d\overline{\rho}}{dt}}{2t_0\overline{\rho}} \tag{1.58}$$

alors, le nouvel Hamiltonien s'écrit :

$$\mathcal{H}' \equiv \mathcal{H}'(Q,\mathcal{P},s) = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\Omega^2Q^2 + \overline{\rho}^2 V\left(\overline{\rho}Q\int^s \overline{\rho}^2\left(\frac{\sigma}{t_0}\right)d\sigma\right) \tag{1.59}$$

où

$$\Omega^2 = \frac{1}{t_0^2}\left[\frac{\frac{d^2\overline{\rho}}{dt^2}}{\overline{\rho}} - 2\left(\frac{\frac{d\overline{\rho}}{dt}}{\overline{\rho}}\right)^2\right] = \frac{\rho^3}{t_0^2}\frac{d^2\overline{\rho}}{dt^2} \tag{1.60}$$

Finalement, le propagateur s'écrit sous une forme standard

$$\begin{aligned} K(x_f,t_f;x_i,t_i) = & \frac{1}{(\rho_i\rho_f)^{\frac{1}{2}}}\exp\left[\frac{im}{2\hbar t_0}\left(\frac{\frac{d\overline{\rho}_f}{dt}}{\rho_f}Q_f - \frac{\frac{d\overline{\rho}_i}{dt}}{\rho_i}Q_i^2\right)\right] \\ & \int DQDP\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{s_i}^{s_f}\left(\mathcal{P}\dot{Q} - \mathcal{H}'(Q,\mathcal{P},s)\right)ds\right\} \end{aligned} \tag{1.61}$$

1.5 Conclusion

Le formalisme des intégrales de chemin est une approche quantique qui s'appuie généralement sur des notions de la mécanique classique, tel que l'action, comme nous l'avons vu en premier lieu. En deuxième lieu nous avons présenté la méthode de transformation spatio-temporelle qui peut résoudre les problèmes ayant des potentiels singuliers dans les systèmes des particules non relativiste. Troisièment nous avons exposé une méthode plus adéquate pour l'étude des systèmes dissipatifs dite la méthode des transformations canoniques généralisées.

Chapitre 2

La méthode de Duru-Kleinert pour un système de masse dépendante de la position à une dimenssion :

2.1 Introduction

Le mouvement d'une particule dans un potentiel périodique, représentant (en physique du solide) le réseau cristallin, est assimilé au mouvement d'une particule libre avec une masse effective, qui dépend essentiellement des caractéristiques du réseau. Si l'échantillon est composé de plusieurs parties représentant différents matériaux, la masse prendra évidement des valeurs différentes dans chaque structure. Pour cela, les théoriciens esseyent de trouver différents modèles pour la distribution de la masse comme fonction de la position et essayant de trouver des solutions aux équations de Schrödinger, *Klein-Gordon* et *Dirac*. Vu, la difficulté et la complexité du problème, on se limite souvent à des modèles à une dimension, en choisissant des potentiels connus en mécanique quantique, auxquels on associe des distributions de masse appropriées de telle sorte que l'équation étudiée peut être ramener, par des transformations adéquates, à une équation équivalente qu'on peut résoudre par les méthodes usuelles.

En ce qui nous concerne dans ce travail, nous allons discuter le problème de la masse variable dans le cadre non relativiste par l'approche des integrales de chemin, en partant d'un hamiltonien quantique bien symétrisé.

2.2 Fonction de Green et dérivation du potentiel effectif

On considère un déplacement d'une particule non relativiste de masse variable $m = m(x)$ de point A (position x_A) au point B (position x_B) entre les instants fixes t_A et t_B. Dans l'espace des phases, on écrit l'amplitude de transition entre le point A et le point B exprimée par la fonction de Green G .

Considérons l'opérateur $\hat{G}$ solution de l'équation suivant :

$$(E - \hat{H})\hat{G} = i\hbar \tag{2.1}$$

ou H est l'Hamiltonien de système :

$$H = T + V(x) \tag{2.2}$$

telque : T l'énergie cénitique et $V\ (x)$ l'énergie potentiel.

Supposons que le potentiel $V\ (x)$ est aussi compliqué qu'un traitement de tell problème par l'intégrale de chemin ne soit pas possible. Souvent, on fait appel au transformation de coordonnée $x \to q$ tel que $x = F(q)$ accompagnée d'une transformation temporelle $t \to s$ définie par $dt = f(x)dS$.

Introduisant les fonction régulatrices f_r etf_l de manière que l'opérateur $\hat{G}$ devient :

$$\hat{G} = f_r \frac{i\hbar}{f_l\,(E - \hat{H})f_r} f_l \tag{2.3}$$

telque :

$$f(x) = f_l\,(x) f_r\,(x) \tag{2.4}$$

La fonction de Green $G(x_B, x_A, E)$ s'écrit comme :

$$\begin{aligned} G(x_B, x_A, E) &= \langle x_B|\,\hat{G}\,|x_A\rangle = \langle x_B|\,f_r \frac{i\hbar}{f_l\,(E-\hat{H}) f_r} f_l\,\,|x_A\rangle \\ &= \langle x_B|\,\hat{U}_E(s_B - s_A)\,|x_A\rangle \qquad (2.5) \\ &= f_r(x_B) f_l(x_A) \int\limits_0^\infty dS\,\langle x_B|\,e^{-\frac{i}{\hbar}S f_l\,(x)(\hat{T}+\hat{V}-E) f_r\,(x)}\,|x_A\rangle \qquad (2.6) \end{aligned}$$

où $\hat{U}_E(S)$ est l'opérateur pseudo-temporel d'évolution défini par :

$$\hat{U}_E(S) = f_r(x) e^{-\frac{i}{\hbar}S f_l\,(x)(\hat{H}-E) f_r\,(x)} f_l(x) \tag{2.7}$$

Subdivisons l'intervalle du temps S en $(N+1)$ intervalles infinitésimaux :

$$S = s_B - s_A = (N+1)\varepsilon_s \tag{2.8}$$

alors

$$G(x_B, x_A, E) = \lim_{N\to\infty} \int\limits_0^\infty dS f_r(x_B) f_l(x_A)\,\langle x_B|\left(e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon_s f_l\,(x)(\hat{H}-E) f_r\,(x)}\right)^{N+1}|x_A\rangle \tag{2.9}$$

Injectons N relation de fermeture $\int dx_n\,|x_n\rangle\,\langle x_n| = 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} G(x_B, x_A, E) &= \lim_{N\to\infty} \int\limits_0^\infty dS f_r(x_B) f_l(x_A) \left[\prod_{n=1}^{N} \int dx_n\right] \\ &\quad \times \prod_{n=1}^{N+1} \langle x_n|\,e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon_s f_l\,(x)(\hat{H}-E) f_r\,(x)}\,|x_{n-1}\rangle \qquad (2.10) \end{aligned}$$

En raison de la non commutativité des opérateurs $\hat{x}$ et $\hat{p}$ et dans ce système de masse variable, l'Hamiltonien hermitique imposé est :

$$\hat{H} = \frac{1}{4}\left[m(x)^{\alpha}\hat{p}m(x)^{\beta}\hat{p}m(x)^{\gamma} + m(x)^{\gamma}\hat{p}m(x)^{\beta}\hat{p}m(x)^{\alpha}\right] + V(x) \tag{2.11}$$

où les paramètres α, β et γ satisfait la relation suivante[1] [14] :

$$\alpha + \beta + \gamma = -1 \tag{2.12}$$

On considère l'Hamiltonien suivant où les paramètres sont fixés à : $\alpha = \gamma = 0$ et $\beta = -1$

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hat{p}\frac{1}{m(x)}\hat{p} + V(x) = \frac{1}{2}[\hat{p}m(x)^{-\frac{1}{2}}m(x)^{-\frac{1}{2}}\hat{p}] \tag{2.13}$$

Pour surmonter le problème d'ordre aparant dans la forme de l'Hamiltonien nous utilisons les propriétés de la commutation canonique suivante :

$$[\hat{p}, m(x)^{\alpha}] = -i\hbar\alpha m'(x)m(x)^{\alpha-1} \tag{2.14}$$

donc :

$$\begin{aligned}
\hat{p}m(x)^{-\frac{1}{2}} &= \frac{i\hbar}{2}m'(x)m(x)^{-\frac{3}{2}} + m(x)^{-\frac{1}{2}}\hat{p}, && (13.a)\\
m(x)^{-\frac{1}{2}}\hat{p} &= -\frac{i\hbar}{2}m'(x)m(x)^{-\frac{3}{2}} + \hat{p}m(x)^{-\frac{1}{2}}, && (13.b)
\end{aligned}$$

remplaçant ces deux dernières relations dans l'expression de l'Hamiltonien .On trouve :

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{i\hbar}{2}m'(x)m(x)^{-\frac{3}{2}} + m(x)^{-\frac{1}{2}}\hat{p}\right)\left(-\frac{i\hbar}{2}m'(x)m(x)^{-\frac{3}{2}} + \hat{p}m(x)^{-\frac{1}{2}}\right)\right] + V(x)\\
&= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{i\hbar}{2}m'(x)m(x)^{-\frac{3}{2}}\right)\left(\frac{i\hbar}{2}m'(x)m(x)^{-\frac{3}{2}}\right) + \left(\frac{i\hbar}{2}m'(x)m(x)^{-\frac{3}{2}}\right)\left(\hat{p}m(x)^{-\frac{1}{2}}\right)\right.\\
&\quad \left. + \left(m(x)^{-\frac{1}{2}}\hat{p}\right)\left(-\frac{i\hbar}{2}m'(x)m(x)^{-\frac{3}{2}}\right) + \left(m(x)^{-\frac{1}{2}}\hat{p}\right)\left(\hat{p}m(x)^{-\frac{1}{2}}\right)\right] + V(x)
\end{aligned}$$

[1] relation d'ambiguité

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\left[\frac{\hbar^2}{4}m'^2(x)m(x)^{-3} - \frac{\hbar^2}{4}m'^2(x)m(x)^{-3} + \frac{i\hbar}{2}m'(x)m^{-2}(x)\hat{p} - \frac{\hbar^2}{2}m"(x)m^{-2} + \frac{3}{2}m'^2(x)m(x)^{-3} - \frac{i\hbar}{2}m'(x)m^{-2}(x)\hat{p} + m(x)^{-\frac{1}{2}}\hat{p}^2 m(x)^{-\frac{1}{2}}\right] + V(x)$$

donc l'Hamiltonien $\hat{H}$ s'écrit comme :

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{m(x)}}\hat{p}^2\frac{1}{\sqrt{m(x)}} + \frac{\hbar^2}{4}\left[-\frac{m"(x)}{m(x)^2} + \frac{3}{2}\frac{m'^2(x)}{m(x)^3}\right] + V(x) \tag{2.15}$$

pour la fonction de Green on obtient :

$$G(x_B, x_A, E) = \lim_{N\to\infty}\int_0^\infty dS f_r(x_B) f_l(x_A)\left[\prod_{n=1}^{N}\int dx_n\right]\times \prod_{n=1}^{N+1}\langle x_n|\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon_s f_l\,(x)\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{m(x)}}\hat{p}^2\frac{1}{\sqrt{m(x)}} + \frac{\hbar^2}{4}\left(-\frac{m"(x)}{m(x)^2} + \frac{3}{2}\frac{m'^2(x)}{m(x)^3}\right) + V(x) - Ef_r\,(x)\right)\right\}|x_{n-1}\rangle \tag{2.16}$$

choisissons $f_l\,(x) = f_r\,(x) = \sqrt{f(x)}$, nous pouvons d'écrire la fonction de Green sous la forme :

$$G(x_B, x_A, E) = \lim_{N\to\infty}\int_0^\infty dS\sqrt{f(x_B)f(x_A)}\left[\prod_{n=1}^{N}\int dx_n\right] \times\prod_{n=1}^{N+1}\left[\langle x_n|\, e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\varepsilon_s}{2}\sqrt{\frac{f(x_n)}{m(x_n)}}\sqrt{\frac{f(x_{n-1})}{m(x_{n-1})}}\hat{p}^2}\,|x_{n-1}\rangle \times e^{\frac{i}{\hbar}\left\{\varepsilon_s\frac{\hbar^2}{4}f(x_n)\left(\frac{m"(x)}{m(x)^2} - \frac{3}{2}\frac{m'^2(x)}{m(x)^3}\right)\right\}} e^{\frac{i}{\hbar}\left\{\varepsilon_s\sqrt{f(x_n)}(E - V(x_n))\sqrt{f(x_{n-1})}\right\}}\right] \tag{2.17}$$

Insérons $(N+1)$ relation de fermeture de la forme $\int dp_n\,|p_n\rangle\,\langle p_n| = 1$, et à l'aide du produit scalaire suivant :

$$\langle x_n\,|p_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{i}{\hbar}p_n x_n} \tag{2.18}$$

nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
G(x_B,x_A,E) &= \lim_{N\to\infty}\int_0^\infty dS\sqrt{f(x_B)f(x_A)}\left[\prod_{n=1}^{N}\int dx_n\right] \\
&\times\prod_{n=1}^{N+1}\left[\langle x_n|\, e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\varepsilon_s}{2}\sqrt{\frac{f(x_n)}{m(x_n)}}\sqrt{\frac{f(x_{n-1})}{m(x_{n-1})}}p_n^2+\frac{i}{\hbar}(x_n-x_{n-1})p_n}\,|x_{n-1}\rangle\right. \\
&\left. e^{-\frac{i}{\hbar}\left\{\varepsilon_s\frac{\hbar^2}{4}f(x_n)\left(-\frac{m''(x)}{m(x)^2}+\frac{3}{2}\frac{m'^2(x)}{m(x)^3}\right)\right\}}e^{\frac{i}{\hbar}\left\{\varepsilon_s\sqrt{f(x_n)}(E-V(x_n)\sqrt{f(x_{n-1})}\right\}}\right] \quad (2.19)
\end{aligned}
$$

le calcule d'integrale sur les p_n est une simple Gaussienne telque :

$$
\int dpe^{-ap^2+bp}=\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2}{4a}} \quad (2.20)
$$

donc la fontion de Green devient :

$$
\begin{aligned}
G(x_B,x_A,E) &= \lim_{N\to\infty}\int_0^\infty dS\sqrt{f(x_B)f(x_A)}\left[\prod_{n=1}^{N}\int dx_n\right] \\
&\times\prod_{n=1}^{N+1}\left[\frac{1}{2i\pi\hbar\varepsilon_s\sqrt{\frac{f(x_n)}{m(x_n)}}\sqrt{\frac{f(x_{n-1})}{m(x_{n-1})}}}\right]^{\frac{1}{2}}e^{\frac{i}{\hbar}A_n^f} \quad (2.21)
\end{aligned}
$$

avec

$$
A_n^f=\sum_{n=1}^{N+1}\left(\frac{(\triangle x)^2}{2\varepsilon_s\sqrt{\frac{f(x_n)}{m(x_n)}}\sqrt{\frac{f(x_{n-1})}{m(x_{n-1})}}}-\varepsilon_s W_f\right) \quad (2.22)
$$

et

$$
W_f=f(x_n)(V(x_n)-E)-\frac{\hbar^2}{4}f(x_n)\left(\frac{m''(x)}{m(x)^2}-\frac{3}{2}\frac{m'^2(x)}{m(x)^3}\right) \quad (2.23)
$$

pour mettre le terme cinétique à une forme habituelle on pose :

$$
g(x)=\frac{f(x)}{m(x)} \quad (2.24)
$$

L'équation(2.20) sera écrit sous la forme suivante :

$$
\begin{aligned}
G(x_B, x_A, E) &= \lim_{N\to\infty} \int_0^{\infty} dS \sqrt{m(x_B)g(x_B)}\sqrt{m(x_A)g(x_A)} \left[\prod_{n=1}^{N} \int dx_n\right] \\
&\times \prod_{n=1}^{N+1} \left[\frac{1}{2i\pi\hbar\varepsilon_s\sqrt{g(x_n)}\sqrt{g(x_{n-1})}}\right]^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{\hbar}A_n^g} \qquad (2.25)
\end{aligned}
$$

où

$$
A_n^g = \sum_{n=1}^{N+1} \left(\frac{(\triangle x)^2}{2\varepsilon_s\sqrt{g(x_n)}\sqrt{g(x_{n-1})}} - \varepsilon_s W_g\right) \qquad (2.26)
$$

avec

$$
W_g = m(x_n)g(x_n)(V(x_n) - E) - \frac{\hbar^2}{4} g(x_n) \left(\frac{m"(x)}{m(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{m'(x)}{m(x)}\right)^2\right) \qquad (2.27)
$$

par la symétrisation du préfacteur on peut ecrire (2.24) comme suite :

$$
\begin{aligned}
G(x_B, x_A, E) &= \lim_{N\to\infty} \sqrt{m(x_B)m(x_A)} \int_0^{\infty} dS \frac{g(x_B)^{\frac{1}{4}} g(x_A)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2i\pi\hbar\varepsilon_s}} \prod_{n=1}^{N+1} \left[\frac{g(x_{n-1})}{g(x_n)}\right]^{-\frac{1}{2}} \\
&\times \prod_{n=1}^{N} \left[\int \frac{dx_n}{\sqrt{2i\pi\hbar\varepsilon_s g(x_n)}}\right] \\
&\times \exp\left[\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^{N+1} \left(\frac{(\triangle x)^2}{2\varepsilon_s\sqrt{g(x_n)g(x_{n-1})}} - \varepsilon_s W_g\right)\right] \qquad (2.28)
\end{aligned}
$$

nous éliminons la dépendance spatiale à ce niveau par la transformation de coordonnée $x \to q$ tel que :

$$
\begin{aligned}
x &= F(q) \Rightarrow x_n = F(q_n) \qquad (2.29) \\
\triangle x &= x_n - x_{n-1} = F(\triangle q)
\end{aligned}
$$

Effectuons maintenant un développement de Taylor au voisinage de post-point qui donne trois correction relatives à la mesure, le facteur devant et l'action.

avec :

$$\prod_{n=1}^{N} \int dx = \prod_{n=2}^{N+1} \int d(\triangle x) \tag{2.30}$$

-Une première correction due à la mesure au niveau du Jacobien.

Pour le terme correspond à la mesure :

$$\prod_{n=1}^{N} \left[\int \frac{dx_n}{\sqrt{2i\pi\hbar\varepsilon_s g(x_n)}} \right] = \prod_{n=1}^{N} \left[\frac{1}{\sqrt{2i\pi\hbar\varepsilon_s g(x_n)}} \right] \prod_{n=2}^{N+1} \int d(\triangle x) \tag{2.31}$$

le développement de $(\triangle x)$ au voisinage du post-point donne :

$$\begin{aligned}
\triangle x &= x_n - x_{n-1} = F(q_n) - F(q_{n-1}) \\
&= F(q) - F(q - \triangle q) \\
&= F(q) - \{F(q) - F'\triangle q + \frac{F''}{2!}(\triangle q)^2 - \frac{F'''}{3!}(\triangle q)^3 + ...\} \\
\triangle x &= F'\triangle q - \frac{F''}{2}(\triangle q)^2 + \frac{F'''}{6}(\triangle q)^3 + ...
\end{aligned} \tag{2.32}$$

pour le Jacobien :

$$J = \frac{\partial(\triangle x)}{\partial(\triangle q)} \tag{2.33}$$

qui s'écrit comme :

$$\begin{aligned}
J &= F' - F''\triangle q + \frac{F'''}{2}(\triangle q)^2 + ... \\
&= F' \left\{ 1 - \frac{F''}{F'}\triangle q + \frac{1}{2}\frac{F'''}{F'}(\triangle q)^2 + ... \right\} \\
&= F'(1 + C_{mes})
\end{aligned} \tag{2.34}$$

où la correction apportée par la mesure s'écrit :

$$C_{mes} = -\frac{F''}{F'}\triangle q + \frac{1}{2}\frac{F'''}{F'}(\triangle q)^2 + ... \tag{2.35}$$

- Une correction au niveau de l'action, il est nécessaire de faire un développement au tour de post-point sur le term céntique

$$\frac{(\triangle x)^2}{2\varepsilon_s\sqrt{g(x_n)g(x_{n-1})}} \tag{2.36}$$

tel que :

$$(\triangle x)^2 = F'^2(\triangle q)^2\left\{1 - \left(\frac{F''}{F'}\right)\triangle q + \left(\frac{1}{3}\left(\frac{F'''}{F'}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{F''}{F'}\right)^2(\triangle q)^2 + ...\right)\right\} \tag{2.37}$$

et

$$g(x_{n-1}) = g(x_n)\left\{1 - \frac{g'}{g}\triangle q + \frac{1}{2}\frac{g''}{g}(\triangle q)^2 + ...\right\} \tag{2.38}$$

avec $g' = \frac{\partial g(x_n)}{\partial q_n}$,

Faisons le développement de la fonction $g(x_{n-1})^{-\frac{1}{2}}$ à partire de développement de Taylor

$$(1+x)^{-n} = 1 - nx + \frac{1}{2!}n(n+1)x^2 - \frac{1}{3!}n(n+1)(n+2)x^3 + ...$$

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - ...$$

donc

$$\begin{aligned} g(x_{n-1})^{-\frac{1}{2}} &= g(x_n)^{-\frac{1}{2}}\left\{1 - \frac{g'}{g}\triangle q + \frac{1}{2}\frac{g''}{g}(\triangle q)^2 + ...\right\}^{\frac{1}{2}} \\ g(x_{n-1})^{-\frac{1}{2}} &= g(x_n)^{-\frac{1}{2}}\left\{1 + \frac{1}{2}\frac{g'}{g}\triangle q + \left(-\frac{1}{4}\frac{g''}{g} + \frac{3}{8}\left(\frac{g'}{g}\right)^2\right)(\triangle q)^2 + ...\right\} \end{aligned} \tag{2.39}$$

la deuxième correction est effectuée sur l'action :

$$\begin{aligned}
\exp\left[\sum_{n=1}^{N+1}\frac{i}{\hbar}\frac{(\triangle x)^2}{2\varepsilon_s\sqrt{g(x_n)g(x_{n-1})}}\right] &= \exp\left[\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1}\frac{(\triangle q)^2}{2\varepsilon_s}\frac{F'^2}{g}\right] \\
&\times\prod_{n=1}^{N+1}\left[1+\frac{i}{\hbar}\frac{(\triangle q)^2}{2\varepsilon_s}\frac{F'^2}{g}\left\{\left(-\frac{F''}{F'}+\frac{1}{2}\frac{g'}{g}\right)\triangle q\right.\right. \\
&+\left(\frac{1}{3}\frac{F'''}{F'}+\frac{1}{4}\left(\frac{F''}{F'}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{g'}{g}\frac{F''}{F'}\right. \\
&\left.\left.+\frac{3}{8}\left(\frac{g'}{g}\right)^2-\frac{1}{4}\frac{g''}{g}\right)(\triangle q)^2\right\} \\
&\left.-\frac{1}{2\hbar^2}\frac{(\triangle q)^6}{4\varepsilon_s^2}\frac{F'^4}{g^2}\left(-\frac{F''}{F'}+\frac{1}{2}\frac{g'}{g}\right)^2+...\right] \qquad (2.40)
\end{aligned}$$

On pose une condition pour la fonction $\frac{F'^2}{g}$ de terme cénitique tel que :

$$\frac{F'^2}{g}=1 \qquad (2.41)$$

où

$$\begin{aligned}
g &= F'^2 \\
g' &= 2F''F' \\
g'' &= 2F'''F'+2F''^2
\end{aligned}$$

donc on écrit l'action comme suite :

$$\begin{aligned}
\exp\left[\sum_{n=1}^{N+1}\frac{i}{\hbar}\frac{(\triangle x)^2}{2\varepsilon_s\sqrt{g(x_n)g(x_{n-1})}}\right] &= \exp\left[\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1}\frac{(\triangle q)^2}{2\varepsilon_s}\right] \\
&\times\prod_{n=1}^{N+1}\left[1+\frac{i}{\hbar}\frac{(\triangle q)^2}{2\varepsilon_s}\left(-\frac{1}{6}\frac{F'''}{F'}+\frac{1}{4}\left(\frac{F''}{F'}\right)^2\right)(\triangle q)^2+...\right] \\
&= \exp\left[\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1}\frac{(\triangle q)^2}{2\varepsilon_s}\right]\prod_{n=1}^{N+1}(1+C_{act}) \qquad (2.42)
\end{aligned}$$

où

$$C_{act}=\frac{i}{\hbar}\frac{(\triangle q)^2}{2\varepsilon_s}\left(-\frac{1}{6}\frac{F'''}{F'}+\frac{1}{4}\left(\frac{F''}{F'}\right)^2\right)(\triangle q)^2+... \tag{2.43}$$

-La dernière correction sur le terme de préfacteur :

$$\frac{g(x_B)^{\frac{1}{4}}g(x_A)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2i\pi\hbar\varepsilon_s}}\prod_{n=1}^{N+1}\left[\frac{g(x_{n-1})}{g(x_n)}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

à partire l'équation (2.39)

$$\begin{aligned}\left[\frac{g(x_{n-1})}{g(x_n)}\right]^{-\frac{1}{2}} &= 1+\frac{1}{2}\frac{g'}{g}\triangle q+\left(-\frac{1}{4}\frac{g''}{g}+\frac{3}{8}\left(\frac{g'}{g}\right)^2\right)(\triangle q)^2+... \\ \left[\frac{g(x_{n-1})}{g(x_n)}\right]^{-\frac{1}{2}} &= (1+C_f) \qquad (2.44)\end{aligned}$$

donc la correction apporté par le préfacteur avec la condition $\frac{F'}{g}=1$, s'ecrit :

$$C_f=\frac{F''}{F'}\triangle q+\left(\left(\frac{F''}{F'}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{F'''}{F'}\right)(\triangle q)^2+... \tag{2.45}$$

Finalement pour la correction totale on doit combiner les trois corrections et tenir compte l'ordre de ε

$$\begin{aligned}1+C_T &= (1+C_{mes})(1+C_{act})(1+C_f) \qquad (2.46)\\ C_T &= C_{mes}+C_f+C_{act}+C_{mes}C_f+C_{mes}C_{act}+C_fC_{act}+C_{mes}C_fC_{act}\end{aligned}$$

On resume d'abord :

$$\begin{aligned}C_{mes} &= -\frac{F''}{F'}\triangle q+\frac{1}{2}\frac{F'''}{F'}(\triangle q)^2+... \\ C_{act} &= \frac{i}{\hbar}\frac{(\triangle q)^2}{2\varepsilon_s}\left(-\frac{1}{6}\frac{F'''}{F'}+\frac{1}{4}\left(\frac{F''}{F'}\right)^2\right)(\triangle q)^2+... \\ C_f &= \frac{F''}{F'}\triangle q+\left(\left(\frac{F''}{F'}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{F'''}{F'}\right)(\triangle q)^2+...\end{aligned}$$

en calculant les termes : $C_f C_{act}$, $C_{mes} C_f$, $C_{mes} C_{act}$ et $C_{mes} C_f C_{act}$

$C_f C_{act}$:

$$\begin{aligned} C_f C_{act} &= \left[\frac{F''}{F'} \triangle q + \left(\left(\frac{F''}{F'} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{F'''}{F'} \right) (\triangle q)^2 + ... \right] \\ &\times \left[\frac{i}{\hbar} \frac{(\triangle q)^2}{2\varepsilon_s} \left(-\frac{1}{6} \frac{F'''}{F'} + \frac{1}{4} \left(\frac{F''}{F'} \right)^2 \right) (\triangle q)^2 + ... \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_f C_{act} &= -\frac{i}{\hbar} \frac{(\triangle q)^6}{2\varepsilon_s} \frac{1}{6} \left(\frac{F''}{F'} \right)^2 \left(\frac{F'''}{F'} \right) + \frac{i}{\hbar} \frac{(\triangle q)^6}{2\varepsilon_s} \frac{1}{4} \left(\frac{F''}{F'} \right)^4 \\ &+ \frac{i}{\hbar} \frac{(\triangle q)^6}{2\varepsilon_s} \frac{1}{12} \left(\frac{F'''}{F'} \right)^2 - \frac{i}{\hbar} \frac{(\triangle q)^6}{2\varepsilon_s} \frac{1}{8} \left(\frac{F'''}{F'} \right) \left(\frac{F''}{F'} \right)^2 + ... \end{aligned}$$

$C_f C_{mes}$:

$$\begin{aligned} C_f C_{mes} &= \left[\frac{F''}{F'} \triangle q + \left(\left(\frac{F''}{F'} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{F'''}{F'} \right) (\triangle q)^2 + ... \right] \left[-\frac{F''}{F'} \triangle q + \frac{1}{2} \frac{F'''}{F'} (\triangle q)^2 + ... \right] \\ &= -\left(\frac{F''}{F'} \right)^2 (\triangle q)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{F''}{F'} \right)^2 \left(\frac{F'''}{F'} \right) (\triangle q)^4 - \frac{1}{4} \left(\frac{F'''}{F'} \right)^2 (\triangle q)^4 + ... \end{aligned}$$

$C_{mes} C_{act}$:

$$\begin{aligned} C_{mes} C_{act} &= \left[-\frac{F''}{F'} \triangle q + \frac{1}{2} \frac{F'''}{F'} (\triangle q)^2 + ... \right] \left[\frac{i}{\hbar} \frac{(\triangle q)^2}{2\varepsilon_s} \left(-\frac{1}{6} \frac{F'''}{F'} + \frac{1}{4} \left(\frac{F''}{F'} \right)^2 \right) (\triangle q)^2 + ... \right] \\ &= \frac{i}{\hbar} \frac{(\triangle q)^5}{2\varepsilon_s} \frac{1}{6} \left(\frac{F''}{F'} \right) \left(\frac{F'''}{F'} \right) - \frac{i}{\hbar} \frac{(\triangle q)^5}{2\varepsilon_s} \frac{1}{4} \left(\frac{F''}{F'} \right)^3 - \frac{i}{\hbar} \frac{(\triangle q)^6}{2\varepsilon_s} \frac{1}{12} \left(\frac{F'''}{F'} \right)^2 \\ &+ \frac{i}{\hbar} \frac{(\triangle q)^6}{2\varepsilon_s} \frac{1}{8} \left(\frac{F'''}{F'} \right) \left(\frac{F''}{F'} \right)^2 + ... \end{aligned}$$

$C_f C_{act} C_{mes}$:

$$
\begin{aligned}
C_f C_{act} C_{mes} &= -\frac{i}{\hbar}\frac{(\triangle q)^8}{2\varepsilon_s}\frac{1}{12}\left(\frac{F''}{F'}\right)^2\left(\frac{F'''}{F'}\right)^2 + \frac{i}{\hbar}\frac{(\triangle q)^8}{2\varepsilon_s}\frac{1}{8}\left(\frac{F''}{F'}\right)^4\left(\frac{F'''}{F'}\right) \\
&\quad + \frac{i}{\hbar}\frac{(\triangle q)^8}{2\varepsilon_s}\frac{1}{24}\left(\frac{F'''}{F'}\right)^3 - \frac{i}{\hbar}\frac{(\triangle q)^8}{2\varepsilon_s}\frac{1}{16}\left(\frac{F''}{F'}\right)^2\left(\frac{F'''}{F'}\right)^2 + ...
\end{aligned}
$$

alors, pour la correction totale on trouve :

$$
\begin{aligned}
C_T &= -\frac{i}{\hbar}\frac{(\triangle q)^4}{2\varepsilon_s}\frac{1}{6}\frac{F'''}{F'} + \frac{i}{\hbar}\frac{(\triangle q)^4}{2\varepsilon_s}\frac{1}{4}\left(\frac{F''}{F'}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{F''}{F'}\right)^2\left(\frac{F'''}{F'}\right)(\triangle q)^4 \\
&\quad -\frac{1}{4}\left(\frac{F'''}{F'}\right)^2(\triangle q)^4 - \frac{i}{\hbar}\frac{(\triangle q)^6}{2\varepsilon_s}\frac{1}{6}\left(\frac{F''}{F'}\right)^2\left(\frac{F'''}{F'}\right) + \frac{i}{\hbar}\frac{(\triangle q)^6}{2\varepsilon_s}\frac{1}{4}\left(\frac{F''}{F'}\right)^4 + ... \\
C_T &= \frac{i}{\hbar}\frac{(\triangle q)^4}{2\varepsilon_s}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{F''}{F'}\right)^2 - \frac{1}{6}\frac{F'''}{F'}\right] + \frac{i}{\hbar}\frac{(\triangle q)^6}{2\varepsilon_s}\left[\frac{1}{6}\left(\frac{F''}{F'}\right)^2\left(\frac{F'''}{F'}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{F''}{F'}\right)^4\right] + ...
\end{aligned}
$$

On doit calculer les valeurs moyennes $\langle(\triangle q)^2\rangle, \langle(\triangle q)^4\rangle, \langle(\triangle q)^6\rangle$

à l'aide de la formule suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \langle u\rangle^{2l}\, e^{-\frac{\alpha}{2\beta}u^2} du = \frac{(2l-1)!!}{(\frac{\alpha}{\beta})^l}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha}{2\beta}u^2} du \tag{2.47}$$

la valeur moyenne de $\langle(\triangle q)^2\rangle$:

$$\int \left\langle(\triangle q)^2\right\rangle e^{-\left(-\frac{i}{\hbar}\frac{(\triangle q)^2}{2\varepsilon_s}\right)} d(\triangle q) = i\hbar\varepsilon_s \int e^{-\left(-\frac{i}{\hbar}\frac{(\triangle q)^2}{2\varepsilon_s}\right)} d(\triangle q) \tag{2.48}$$

donc

$$\left\langle(\triangle q)^2\right\rangle = i\hbar\varepsilon_s \tag{2.49}$$

pour la valeur moyenne de $\langle(\triangle q)^2\rangle$:

$$\int \left\langle(\triangle q)^4\right\rangle e^{-\left(-\frac{i}{\hbar}\frac{(\triangle q)^2}{2\varepsilon_s}\right)} d(\triangle q) = 3(i\hbar\varepsilon_s)^2 \int e^{-\left(-\frac{i}{\hbar}\frac{(\triangle q)^2}{2\varepsilon_s}\right)} d(\triangle q) \tag{2.50}$$

alors

$$\left\langle (\triangle q)^4 \right\rangle = 3(i\hbar\varepsilon_s)^2 \tag{2.51}$$

la valeur moyenne de $\langle (\triangle q)^6 \rangle$:

$$\int \left\langle (\triangle q)^6 \right\rangle e^{-\left(-\frac{i}{\hbar}\frac{(\triangle q)^2}{2\varepsilon_s}\right)} d(\triangle q) = 5(i\hbar\varepsilon_s)^3 \int e^{-\left(-\frac{i}{\hbar}\frac{(\triangle q)^2}{2\varepsilon_s}\right)} d(\triangle q) \tag{2.52}$$

donc

$$\left\langle (\triangle q)^6 \right\rangle = 5(i\hbar\varepsilon_s)^3 \tag{2.53}$$

on tenir compte l'ordre ε_s , la correction totale $\langle C_T \rangle$ devient :

$$\begin{aligned} \langle C_T \rangle &= -\frac{3i\hbar\varepsilon_s}{2}\left[+\frac{1}{4}\left(\frac{F''}{F'}\right)^2 - \frac{1}{6}\frac{F'''}{F'}\right] \\ &= \frac{i\hbar\varepsilon_s}{4}\left[-\frac{3}{2}\left(\frac{F''}{F'}\right)^2 + \frac{F'''}{F'}\right] \end{aligned} \tag{2.54}$$

à partire de la correction total on distingue un nouveau potentiel dite potentiel effectif tel que :

$$Veff = -\frac{\hbar^2}{4}\left[\frac{F'''}{F'} - \frac{3}{2}\left(\frac{F''}{F'}\right)^2\right] \tag{2.55}$$

A la limite quand $N \longrightarrow \infty$, la forme finale dela fonction de Green relative au problème de masse variable :

$$G(x_B, x_A, E) = \sqrt{m(x_B)m(x_A)}\,[g(x_B)g(x_A)]^{\frac{1}{4}} \int_0^\infty dS \left(\int Dq(s) e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^\infty ds\left(\frac{q'^2}{2} - W\right)} \right) \tag{2.56}$$

avec

$$W = m(x_n)g(x_n)(V(x_n)-E) - \frac{\hbar^2}{4}g(x_n)\left[\frac{m"(x)}{m(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{m'(x)}{m(x)}\right)^2\right] - \frac{\hbar^2}{4}\left[\frac{F'''}{F'} - \frac{3}{2}\left(\frac{F''}{F'}\right)^2\right] \tag{2.57}$$

2.3 Application

Considérons une particule d'une masse croissante en présence d'un potentiel singulier, on ramène le potentiel à la forme d'une barrière centrifuge par le choix de $f_r = f_l = \sqrt{m}$

,

alors que

$$m(x) = cx^{\alpha} \quad , \; V(x) = \frac{A}{cx^{2\alpha}} + \frac{B}{cx^{\alpha}} \tag{2.58}$$

La transformation de coordonnée effectuée est identique

$$x = F(q) = q$$

nous obtenons donc :

$$\begin{aligned}
\sqrt{m(x_B)m(x_A)} &= c\sqrt{x_B^{\alpha} x_A^{\alpha}} && (2.59)\\
[g(x_B)g(x_A)]^{\frac{1}{4}} &= [F(x_B)F(x_A)]^{\frac{1}{2}} = 1 && (2.60)\\
m(x_n)g(x_n)(V(x_n) - E) &= cx^{\alpha}\left(\frac{A}{cx^{2\alpha}} + \frac{B}{cx^{\alpha}} - E\right) &&\\
&= \frac{A}{x^{\alpha}} + B - cx^{\alpha}E && (2.61)\\
\frac{\hbar^2}{4} g(x_n)\left[\frac{m"(x)}{m(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{m'(x)}{m(x)}\right)^2\right] &= -\frac{\hbar^2}{8x^2}(\alpha(\alpha+2)) && (2.62)\\
\frac{\hbar^2}{4}\left[\frac{F'''}{F'} - \frac{3}{2}\left(\frac{F''}{F'}\right)^2\right] &= 0 && (2.63)
\end{aligned}$$

on remplace ces termes dans la fonction de Green (2.56)

$$G(x_B, x_A, E) = c\sqrt{x_B^{\alpha} x_A^{\alpha}} \int_0^{\infty} dS \int Dx(s) e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^{\infty} ds\left(\frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{A}{x^{\alpha}} - B + cx^{\alpha}E - \frac{\hbar^2}{8x^2}(\alpha(\alpha+2))\right)} \tag{2.64}$$

prenant deux cas pour α, $(\alpha = +2; \alpha = -2)$

2.3.1 Pour $\alpha = +2$:

La fonction de Green s'écrit sous la forme suivante :

$$G(x_B, x_A, E) = cx_B x_A \int_0^{\infty} dS \int Dx(s) e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^{\infty} ds\left(\frac{\dot{x}^2}{2}+cx^2E-\frac{A}{x^2}+-\frac{\hbar^2}{x^2}-B\right)} \tag{2.65}$$

$$G(x_B, x_A, E) = cx_B x_A \int_0^{\infty} dS e^{\frac{i}{\hbar}(-B)s} \int Dx(s) e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^{\infty} ds\left(\frac{\dot{x}^2}{2}+cx^2E-\frac{\hbar^2}{2x^2}(2\frac{A+\hbar^2}{\hbar^2})\right)} \tag{2.66}$$

L'intégration sur les x :

On utilise lors de cette intégration la formule suivante citeé dans la référence [18]

$$\begin{aligned}
&\int_{r(t')=r'}^{r(t'')=r''} D_r(t) \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''}\left(\frac{m}{2}\dot{r}^2 - \hbar^2\frac{\lambda^2-\frac{1}{4}}{2mr^2} - \frac{m}{2}\omega^2 r^2\right)dt\right] \\
=\ &\int_{r(t')=r'}^{r(t'')=r''} D_r(t) U_\lambda[r^2] \exp\left[\frac{im}{2\hbar}\int_{t'}^{t''}\left(\dot{r}^2-\omega^2 r^2\right)dt\right] \\
=\ &\frac{\sqrt{r'r''}m\omega}{i\hbar\sin(\omega T)} \exp\left[\frac{im\omega}{2\hbar}(r'^2+r''^2)\cot(\omega T)\right] I_\lambda\left(\frac{m\omega r' r''}{i\hbar\sin(\omega T)}\right)
\end{aligned} \tag{2.67}$$

donc par identification , l'equation de Green devient :

$$\begin{aligned}
G(x_B, x_A, E) \quad = \quad & cx_B x_A (x_B x_A)^{\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} dS \frac{\omega}{i\hbar} \frac{e^{\frac{i}{\hbar}(-B)s}}{\sin(\omega S)} I_\sigma\left(\frac{\omega x_B x_A}{i\hbar\sin(\omega S)}\right) \\
& e^{\frac{i}{2\hbar}\omega(x_B^2+x_A^2)\cot(\omega S)}
\end{aligned} \tag{2.68}$$

avec :

$I_\sigma$la fonction de Bessel modifie , ou $\sigma = \left(\frac{2A}{\hbar^2}+\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$

et $cE = -\frac{1}{2}\omega^2$

on va développer la fonction d'abord par tenir compte

$\sin(\omega s) = \frac{e^{i\omega s} - e^{-i\omega s}}{2i}$

$\cot(\omega s)=\frac{\cos(\omega s)}{\sin(\omega s)}=i\frac{e^{i\omega s}+e^{-i\omega s}}{e^{i\omega s}-e^{-i\omega s}}=i\frac{1+e^{-2i\omega s}}{1-e^{-2i\omega s}}$

donc

$$\begin{aligned}
G(x_B,x_A,E) &= cx_Bx_A(x_Bx_A)^{\frac{1}{2}}\int_0^\infty ds\frac{\omega e^{\frac{i}{\hbar}(-B)s}}{i\hbar\left(\frac{e^{i\omega s}-e^{-i\omega s}}{2i}\right)}I_\sigma\left(\frac{\omega x_Bx_A}{i\hbar\left(\frac{e^{i\omega s}-e^{-i\omega s}}{2i}\right)}\right)\\
&\quad e^{\frac{i}{2\hbar}\omega(x_B^2+x_A^2)\left(\frac{1+e^{-2i\omega s}}{1-e^{-2i\omega s}}\right)}\\
&= c(x_Bx_A)^{\frac{3}{2}}\int_0^\infty ds\frac{2\omega e^{-i\omega s(1+\frac{B}{\hbar\omega})}}{\hbar\left(1-e^{-i2\omega s}\right)}e^{-2i\omega s(\frac{\sigma-\sigma}{2})}\\
&\quad\times\ I_\sigma\left(\frac{2\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}x_B^2\frac{\omega}{\hbar}x_A^2e^{-2i\omega s}}}{(1-e^{-2i\omega s})}\right)e^{-\frac{\omega}{2\hbar}(x_B^2+x_A^2)\left(\frac{1+e^{-i2\omega s}}{1-e^{-i2\omega s}}\right)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= c(x_Bx_A)^{\frac{3}{2}}\int_0^\infty ds\frac{2\omega}{\hbar}e^{-i\omega s(1+\sigma+\frac{B}{\hbar\omega})}\frac{(e^{-2i\omega s})^{-\frac{\sigma}{2}}}{(1-e^{-i2\omega s})}\\
&\quad\times I_\alpha\left(\frac{2\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}x_B^2\frac{\omega}{\hbar}x_A^2e^{-2i\omega s}}}{(1-e^{-2i\omega s})}\right)\ e^{-\frac{\omega}{2\hbar}(x_B^2+x_A^2)\left(\frac{1+e^{-i2\omega s}}{1-e^{-i2\omega s}}\right)}
\end{aligned}$$

on pose : $\qquad Z=e^{-2i\omega s},X=\frac{\omega}{\hbar}x_A^2,Y=\frac{\omega}{\hbar}x_B^2$

Donc :

$$\begin{aligned}
G(x_B,x_A,E) &= c(x_Bx_A)^{\frac{3}{2}}\int_0^\infty ds\frac{2\omega}{\hbar}e^{-i\omega s(1+\sigma+\frac{B}{\hbar\omega})}\frac{(Z)^{-\frac{\sigma}{2}}}{(1-Z)}\\
&\quad\times I_\sigma\left(\frac{2\sqrt{XYZ}}{(1-Z)}\right)e^{-\frac{1}{2}(X+Y)\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right)} \qquad (2.69)
\end{aligned}$$

$\frac{(Z)^{-\frac{\sigma}{2}}}{(1-Z)}I_\sigma\left(\frac{2\sqrt{XYZ}}{(1-Z)}\right)e^{-\frac{1}{2}(X+Y)\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right)}$ est la formule de Hill-Hardy [18] tel que :

$$\begin{aligned}
\frac{(Z)^{-\frac{\alpha}{2}}}{(1-Z)}I_\sigma\left(\frac{2\sqrt{XYZ}}{(1-Z)}\right)e^{-\frac{1}{2}(X+Y)\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right)} &= \sum_{n=0}^\infty\frac{n!}{\Gamma(n+\sigma+1)}\\
&\quad\times e^{-\frac{1}{2}(X+Y)}Z^n(XY)^{\frac{\sigma}{2}}L_n^\sigma(X)L_n^\sigma(Y) \qquad (2.70)
\end{aligned}$$

alors la fonction de Green s'ecrit :

$$
\begin{aligned}
G(x_B, x_A, E) &= c(x_B x_A)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} ds \frac{2\omega}{\hbar} e^{-i\omega s(1+\sigma+\frac{B}{\hbar\omega})} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{\Gamma(n+\sigma+1)} \\
&\times e^{-\frac{1}{2}(X+Y)} Z^n (XY)^{\frac{\sigma}{2}} L_n^{\sigma}(X) L_n^{\sigma}(Y) \qquad (2.71)
\end{aligned}
$$

et finalement nous avons :

$$
\begin{aligned}
G(x_B, x_A, E) &= c(x_B x_A)^{\frac{3}{2}} \frac{2\omega}{\hbar} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{\Gamma(n+\sigma+1)} \left[\frac{\omega^2}{\hbar^2} x_A^2 x_B^2\right]^{\frac{\sigma}{2}} \\
&\times e^{-\frac{1}{2}(\frac{\omega}{\hbar}(x_B^2+x_A^2)} L_n^{\sigma}(\frac{\omega}{\hbar} x_A^2) L_n^{\sigma}(\frac{\omega}{\hbar} x_B^2) \\
&\times \int_0^{\infty} e^{-i\omega s(1+\sigma+\frac{B}{\hbar\omega}+2n)} dS \qquad (2.72)
\end{aligned}
$$

par l'utilisation de la forme standard de la fonction de Green

$$
G(x_B, x_A, E) = i\hbar \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Psi_n^*(x_B)\Psi_n(x_A)}{E - E_n} \qquad (2.73)
$$

on peux réecrir la fonction (2.71)sous la forme :

$$
\begin{aligned}
G(x_B, x_A, E) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{2\omega}{\hbar} \frac{c x_A^3 n!}{\underset{n=0}{\Gamma(n+\sigma+1)}}\right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\omega}{\hbar} x_B^2\right]^{\frac{\sigma}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{\omega}{\hbar} x_B^2)} L_n^{\sigma}(\frac{\omega}{\hbar} x_B^2) \\
&\times \left[\frac{2\omega}{\hbar} \frac{c x_B^3 n!}{\underset{n=0}{\Gamma(n+\sigma+1)}}\right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\omega}{\hbar} x_A^2\right]^{\frac{\sigma}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{\omega}{\hbar} x_A^2)} L_n^{\sigma}(\frac{\omega}{\hbar} x_A^2) \\
&\times \int_0^{\infty} e^{-i\omega s(1+\sigma+\frac{B}{\hbar\omega}+2n)} dS \qquad (2.74)
\end{aligned}
$$

L'integration sur S :

L'intégration sur S donnée par

$$
\int_0^{\infty} e^{-i\omega s(1+\sigma+\frac{B}{\hbar\omega}+2n)} dS = \frac{1}{i\omega(1+\sigma+\frac{B}{\hbar\omega}+2n)} \qquad (2.75)
$$

Le spectre des énergies obtenu :

$$E_n = -\frac{B^2}{2c(2n+\sigma+1)^2\hbar^2} \quad \text{avec} \quad n = 0, 1, 2...$$

Les fonction d'ondes correspondantes :

$$\Psi_n(x) = \left[\frac{2B^2}{\hbar^3\omega}\frac{x^3 n!}{\Gamma(n+\sigma+1)(2n+\sigma+1)^2}\right]\left[\frac{\omega}{\hbar}x^2\right]^{\frac{\sigma}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{\omega}{\hbar}x^2)} L_n^{\sigma}(\frac{\omega}{\hbar}x^2) \tag{2.76}$$

2.3.2 Pour $\alpha = -2$:

La fonction de Green dans ce cas s'ecrit comme :

$$G(x_B, x_A, E) = c x_B^{-1} x_A^{-1} \int_0^{\infty} dS \int Dx(s) e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^{\infty} ds\left(\frac{\dot{x}^2}{2} + cx^{-2}E - \frac{A}{x^{-2}} + -B\right)} \tag{2.77}$$

on la reécrit on fonction de y tel que $y = x$

$$G(y_B, y_A, E) = c y_B^{-1} y_A^{-1} \int_0^{\infty} dS \int Dy(s) e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^{\infty} ds\left(\frac{\dot{y}^2}{2} + cy^{-2}E - Ay^2 - B\right)} \tag{2.78}$$

$$G(y_B, y_A, E) = c y_B^{-1} y_A^{-1} \int_0^{\infty} dS e^{-\frac{iBs}{\hbar}} \int Dy(s) e^{\frac{i}{\hbar}\int_0^{\infty} ds\left(\frac{\dot{y}^2}{2} - \frac{\hbar^2}{2y^2}(-2\frac{cE}{\hbar^2}) - Ay^2\right)} \tag{2.79}$$

L'intégration sur les y :

On utilise l'équivalence (2.67), on écrit donc :

$$\begin{aligned} G(y_B, y_A, E) &= c y_B^{-1} y_A^{-1} \int_0^{\infty} dS e^{-\frac{iBs}{\hbar}} \int Dy(s) U_\lambda[y^2] \exp\left[\frac{i}{2\hbar}\int_0^{s} ds \left(\dot{y}^2 - 2Ay^2\right)\right] \\ &= c y_B^{-1} y_A^{-1} \int_0^{\infty} dS e^{-\frac{iBs}{\hbar}} \frac{\sqrt{y_A y_B}\,\omega}{i\hbar \sin(\omega S)} \exp\left[\frac{i\omega}{2\hbar}(y_A^2 + y_B{}^2)\cot(\omega S)\right] \\ &\quad I_\lambda\left(\frac{\omega y_A y_B}{i\hbar \sin(\omega S)}\right) \end{aligned} \tag{2.80}$$

avec :

$\lambda = \left(-2\frac{cE}{\hbar^2} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$;

$A = \frac{1}{2}\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{2A}$;

$\sin(\omega s) = \frac{e^{i\omega s} - e^{-i\omega s}}{2i}$

$\cot(\omega s) = \frac{\cos(\omega s)}{\sin(\omega s)} = i\frac{e^{i\omega s}+e^{-i\omega s}}{e^{i\omega s}-e^{-i\omega s}} = i\frac{1+e^{-2i\omega s}}{1-e^{-2i\omega s}}$

alors

$$\begin{aligned} G(y_B, y_A, E) &= c y_B^{-1} y_A^{-1} \int_0^\infty dS e^{\frac{i}{\hbar}(-B)s} \frac{\sqrt{y_A y_B}\omega}{i\hbar\frac{e^{i\omega s}-e^{-i\omega s}}{2i}} \exp\left[\frac{i\omega}{2\hbar}(y_A^2 + {y_B}^2) i \frac{1+e^{-2i\omega s}}{1-e^{-2i\omega s}}\right] \\ & \quad I_\lambda\left(\frac{\omega y_A y_B}{i\hbar\frac{e^{i\omega s}-e^{-i\omega s}}{2i}}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(y_B, y_A, E) &= c(y_B y_A)^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty dS e^{\frac{i}{\hbar}(-B)s} \frac{2\omega}{\hbar e^{i\omega s} - e^{-i\omega s}} \exp\left[\frac{-\omega}{2\hbar}(y_A^2 + {y_B}^2)\frac{1+e^{-2i\omega s}}{1-e^{-2i\omega s}}\right] \\ & \quad I_\lambda\left(\frac{2\omega y_A y_B}{\hbar e^{i\omega s} - e^{-i\omega s}}\right) \\ &= c(y_B y_A)^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty dS \frac{2\omega e^{-i\omega s(1+\frac{B}{\omega\hbar})}}{\hbar(1-e^{-2i\omega s})} \exp\left[\frac{-\omega}{2\hbar}(y_A^2 + {y_B}^2)\frac{1+e^{-2i\omega s}}{1-e^{-2i\omega s}}\right] \\ & \quad I_\lambda\left(\frac{2\omega y_A y_B e^{-i\omega s}}{\hbar(1-e^{-2i\omega s})}\right) \end{aligned}$$

prenons les changements des variables suivants :

$$Z = e^{-2i\omega s}, X = \frac{\omega}{\hbar} y_A^2, Y = \frac{\omega}{\hbar} y_B^2$$

tel que $\qquad y_A = \sqrt{X\frac{\hbar}{\omega}}, y_B = \sqrt{Y\frac{\hbar}{\omega}}$

G sera alors :

$$\begin{aligned}
G(y_B, y_A, E) &= cc(y_B y_A)^{-\frac{1}{2}} \int\limits_0^{\infty} dS \frac{2\omega e^{-2i\omega s(\frac{\lambda-\lambda}{2})} e^{-i\omega s(1+\frac{B}{\omega\hbar})}}{\hbar(1-Z)} \\
&\quad \times \exp\left[\frac{-1}{2}(Y_A^2 + {Y_B}^2)\frac{1+Z}{1-Z}\right] I_\lambda\left(\frac{2\omega\sqrt{X\frac{\hbar}{\omega}Y\frac{\hbar}{\omega}Z}}{\hbar(1-Z)}\right) \\
G(y_B, y_A, E) &= c\,(y_B y_A)^{-\frac{1}{2}} \int\limits_0^{\infty} dS \frac{2\omega e^{-i\omega s(1+\frac{B}{\omega\hbar}+\lambda)} Z^{-\frac{\lambda}{2}}}{\hbar(1-Z)} \\
&\quad \times \exp\left[\frac{-1}{2}(Y_A^2 + {Y_B}^2)\frac{1+Z}{1-Z}\right] I_\lambda\left(\frac{2\sqrt{XYZ}}{(1-Z)}\right) \qquad (2.81)
\end{aligned}$$

à l'aide de la formule de Hill-Hardy dans (2.70)

$$\begin{aligned}
G(y_B, y_A, E) &= c\,(y_B y_A)^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\infty} ds \frac{2\omega}{\hbar} e^{-i\omega s(1+\lambda+\frac{B}{\hbar\omega})} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{\Gamma(n+\lambda+1)} \\
&\quad \times e^{-\frac{1}{2}(X+Y)} Z^n (XY)^{\frac{\lambda}{2}} L_n^\lambda(X) L_n^\lambda(Y) \qquad (2.82)
\end{aligned}$$

la fonction de Green s'écrit :

$$\begin{aligned}
G(y_B, y_A, E) &= c\,(y_B y_A)^{-\frac{1}{2}} \frac{2\omega}{\hbar} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{\Gamma(n+\lambda+1)} \left[\frac{\omega^2}{\hbar^2} y_A^2 y_B^2\right]^{\frac{\lambda}{2}} \\
&\quad \times e^{-\frac{1}{2}(\frac{\omega}{\hbar}(y_B^2+y_A^2)} L_n^\lambda(\frac{\omega}{\hbar} y_A^2) L_n^\lambda(\frac{\omega}{\hbar} y_B^2) \int_0^{\infty} e^{-i\omega s(1+\lambda+\frac{B}{\hbar\omega}+2n)} dS \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{2\omega}{\hbar} \frac{c y_A^{-1} n!}{\Gamma(n+\lambda+1)}\right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\omega}{\hbar} y_A^2\right]^{\frac{\lambda}{2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{\omega}{\hbar}(y_A^2)} L_n^\lambda(\frac{\omega}{\hbar} y_A^2) \\
&\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{2\omega}{\hbar} \frac{c y_B^{-1} n!}{\Gamma(n+\lambda+1)}\right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\omega}{\hbar} y_B^2\right]^{\frac{\lambda}{2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{\omega}{\hbar}(y_B^2)} L_n^\lambda(\frac{\omega}{\hbar} y_B^2) \\
&\quad \int_0^{\infty} e^{-i\omega s(1+\lambda+\frac{B}{\hbar\omega}+2n)} dS \qquad (2.83)
\end{aligned}$$

L'intégration sur S :

$$\int_0^{\infty} e^{-i\omega s(1+\lambda+\frac{B}{\hbar\omega}+2n)} dS = \frac{1}{i\omega(1+\lambda+\frac{B}{\hbar\omega}+2n)} \qquad (2.84)$$

Et pour le spectre des énergies E_n nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\lambda &= -(\frac{B}{\hbar\omega}+1+2n) \\
\lambda^2 &= (\frac{B}{\hbar\omega}+1+2n)^2 \qquad (2.85)\\
\left(-2\frac{cE}{\hbar^2}+\frac{1}{4}\right) &= (\frac{B}{\hbar\omega}+1+2n)^2 \\
E_n &= \frac{\hbar^2}{2c}\left[\frac{1}{4}-(\frac{B}{\hbar\omega}+1+2n)^2\right] \ ; n=1,2,3,.. \qquad (2.86)
\end{aligned}$$

Les fonctions d'ondes correspondantes

$$\Psi_n(y)=\left[\frac{2\omega}{\hbar}\frac{cy^{-1}n!}{\Gamma(n+\lambda+1)}\right]\left[\frac{\omega}{\hbar}y^2\right]^{\frac{\lambda}{2}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{\omega}{\hbar}y^2)}L_n^{\lambda}(\frac{\omega}{\hbar}y^2). \qquad (2.87)$$

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons appliqué la méthode de *Duru-Kleinert* pour les systèmes de masse variable non relativiste dépendante seulement de la position à une dimension, et construire la fonction de Green de but d'étudie ce système.

La considération primaire de la forme générale de l'Hamiltonien hermétique est judicieusement choisie, le problème d'ordre apparait par un terme supplémentaire à cause de la présence de la masse variable au niveau du terme cinétique.

Pour l'exemple appliqué dans ce chapitre, la transformation spatio-temporelle a ramené le problème dans les deux cas en question à la forme d'une barrière centrifuge d'un OH. Où le spectre des énergies et les fonctions d'ondes normalisées ont été obtenu.

Chapitre 3

Intégrale de chemin pour les systèmes à masse variable dépendante de la position et du temps (Traitement dans l'espace des phases par la méthode des transformations canoniques géneralisées)

3.1 Introduction

Il est bien connu qu'une solution exacte et analytique de l'équation de Schrödinger peut seulement être trouvé pour un nombre limité de potentiels. Si les potentiels sont, en outre, dépendant du temps, il est très rare de pouvoir trouver les solutions exactes. En général, les systèmes dissipatifs sont décrits par les Hamiltonien des formes quadratiques et leur traitement est analytique et exacte, qui nécessite uniquement la détermination de l'invariant et ceci via une certaine équation auxiliaire[19].

Dans l'espace des phases et par l'approche des intégrales de chemin, l'étude des systèmes dépendant du temps peut être effectué par une transformation d'espace-temps des coordonnées dite transformations canoniques généralisées GCT [16, 17].

L'objectif de ce chapitre est de considérer, par l'approche des intégrales de chemin, des systèmes non quadratiques, où la masse et le potentiel dépendent de la position et aussi du temps. Ces systèmes dissipatifs sont décrits par l'expression de l'Hamiltonien classique[1]. En mécanique quantique et en raison de la non commutativité des opérateurs $\hat{x}$ et $\hat{p}$, l'Hamiltonien hermétique, devient

$$\hat{H} = \frac{1}{4}\left(\hat{m}^{\alpha}\hat{p}\hat{m}^{\beta}\hat{p}\hat{m}^{\gamma} + \hat{m}^{\gamma}\hat{p}\hat{m}^{\beta}\hat{p}\hat{m}^{\alpha}\right) + \hat{V} \tag{3.1}$$

α, β, γ sont des paramètrestels tel que $\alpha + \beta + \gamma = -1$

et à l'aide du commutateur $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$, $\hat{H}$ s'écrit sous la forme symétrique suivante :

$$\hat{H} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\hat{m}}\hat{p}^2 + \hat{p}^2\frac{1}{\hat{m}}\right) + \hat{V} \tag{3.2}$$

où la correction quantique est absorbée dans le potentiel V.

3.2 Propagateur

Considérons par l'approche des intégrales de chemin, les systèmes décrit par l'Hamiltonien symétrique (3.2) où la masse et le potentiel dépendent tous deux de la position et du temps ($m = m(x,t)$ et $V = V(x,t)$),[17], et écrivons que le noyau propagateur $\hat{K}$ vérifie l'équation symbolique

$$\left(\hat{E} - \hat{H}\right)\hat{K} = i\hbar \tag{3.3}$$

[1] $H_{cl}(x,p,t) = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m(x,t)} + V(x,t)$

et son expression formelle s'écrit

$$\hat{K} = \frac{i\hbar}{\hat{E} - \hat{H}} \tag{3.4}$$

Le propagateur est l'élément de matrice de $\hat{K}$ dans l'espace (x,t) qui prend la forme suivante

$$K\left(x_b t_b; x_a, t_a\right) = \int_{S_a}^{\infty} dS_b \left\langle x_b t_b\right| e^{\frac{i}{\hbar}(S_b - S_a)\left(\hat{E}-\hat{H}\right)} \left|x_a t_a\right\rangle \tag{3.5}$$

En décomposant l'exponentielle en $(N+1)$fois avec $\Delta s_n = \frac{S_b - S_a}{N+1}$ $K\left(x_{b,} t_b; x_a, t_a\right) = \int_{S_a}^{\infty} dS_b \left\langle x_b t_b\right| e^{\frac{i}{\hbar}\Delta s_n\left(\hat{E}-\hat{H}\right)} ... e^{\frac{i}{\hbar}\Delta s_n\left(\hat{E}-\hat{H}\right)} \left|x_a t_a\right\rangle$

En utilisant N relations de fermeture

$\int dx_n dt_n \left|x_n t_n\right\rangle \left\langle x_n t_n\right| = 1$ et $\int dp_n dE_n \left|p_n E_n\right\rangle \left\langle p_n E_n\right| = 1$

et les relations suivantes

$$\hat{x}\left|xt\right\rangle = x\left|xt\right\rangle, \qquad \hat{t}\left|xt\right\rangle = t\left|xt\right\rangle, \qquad \hat{p}\left|pE\right\rangle = p\left|pE\right\rangle, \qquad \hat{E}\left|pE\right\rangle = E\left|pE\right\rangle \tag{3.6}$$

considérons le propagateur infinitésimal $\left\langle x_n t_n\right| e^{\frac{i}{\hbar}\Delta s_n\left(\hat{E}-\hat{H}\right)} \left|x_{n-1} t_{n-1}\right\rangle$ et par developpement

$$\begin{aligned}
&\simeq \left\langle x_n t_n\right| 1 + \frac{i}{\hbar}\Delta s_n \left(\hat{E}-\hat{H}\right) \left|x_{n-1} t_{n-1}\right\rangle \\
&\simeq \left\langle x_n t_n\right| 1 \left|x_{n-1} t_{n-1}\right\rangle \\
&\quad + \frac{i}{\hbar}\Delta s_n \left\langle x_n t_n\right| \left(\hat{E}-\hat{H}\right) \left|x_{n-1} t_{n-1}\right\rangle && (3.7) \\
&= \left\langle x_n t_n\right| 1 \left|x_{n-1} t_{n-1}\right\rangle \\
&\quad + \frac{i}{\hbar}\Delta s_n \left\{\left\langle x_n t_n\right| \hat{E} \left|x_{n-1} t_{n-1}\right\rangle - \left\langle x_n t_n\right| \hat{H} \left|x_{n-1} t_{n-1}\right\rangle\right\} && (3.8)
\end{aligned}$$

en adoptant les notations suivantes $\bar{u}_n = \frac{u_n + u_{n-1}}{2}, \Delta u_n = u_n - u_{n-1}, u_n = u\left(s_n\right), t_b = t_{N+1}, x_b = x_{N+1}, t_a = t_0, x_a = x_0, m_n = m\left(x_{n,} t_n\right)$ et $V_n = V\left(x_{n,} t_n\right)$

et le produit scalaire

$$\left\langle xt \left|pE\right.\right\rangle = \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - px)}}{(2\pi\hbar)^2}, \tag{3.9}$$

les élements de matrice s'expriment sous forme d'intégrales

$$
\begin{aligned}
\langle x_n t_n | \hat{E} | x_{n-1} t_{n-1} \rangle &= \int dE_n dp_n \langle x_n t_n | \hat{E} | E_n, p_n \rangle \langle E_n, p_n | x_{n-1} t_{n-1} \rangle \\
&= \int \frac{dE_n dp_n}{(2\pi\hbar)^2} E_n e^{-\frac{i}{\hbar}[E_n(t_n - t_{n-1}) - p_n(x_n - x_{n-1})]} \qquad (3.10) \\
\langle x_n t_n | \hat{p}^2 | x_{n-1} t_{n-1} \rangle &= \int \frac{dE_n dp_n}{(2\pi\hbar)^2} p_n^2 e^{-\frac{i}{\hbar}[E_n(t_n - t_{n-1}) - p_n(x_n - x_{n-1})]} \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

et pour le propagateur K on obtient finalement

$$
\begin{aligned}
K &= \int_{S_a}^{\infty} dS_b \int \prod_{n=1}^{N} dx_n dt_n \prod_{n=1}^{N+1} \frac{dE_n dp_n}{(2\pi\hbar)^2} \\
&\quad \times e^{\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1}\left[-E_n(\Delta t_n - \Delta s_n) + p_n \Delta x_n - \Delta s_n \left\{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{m_n} + \frac{1}{m_{n-1}}\right)p_n^2 + V_n\right\}\right]} \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

Comme l'intégration sur la variable E_n est simplement une fonction de Dirac δ

$$
\int dE_n e^{\frac{i}{\hbar}E_n(\Delta t_n - \Delta s_n)} = 2\pi\hbar\delta(\Delta t_n - \Delta s_n) \qquad (3.13)
$$

le paramètre s et le temps t sont reliés par la relation $\varepsilon_t = \Delta t_n = \Delta s_n$ ou du point de vue infinitesimal $dt = ds$, alors $t = s + cte.$

En fait l'intégrant sur les t_n

$$
\int \prod_{n=1}^{N} dt_n \prod_{n=1}^{N+1} \delta(\Delta t_n - \Delta s_n) = \delta(t_b - t_a - (s_b - s_a)) \qquad (3.14)
$$

et sur s_b avec tenir compte $(t_b > t_a)$

$$
\int_{S_a}^{\infty} dS_b \delta(t_b - t_a - (s_b - s_a)) = \theta(s_b - s_a - (t_b - t_a))|_{S_a}^{\infty} = 1 - \theta(-(t_b - t_a)) = 1 \qquad (3.15)
$$

le propagateur (3.13) obtenu est de forme standard, oú l'action infinitésimale relative à l'intervalle $[t_{n-1,}t_n]$.

$$K\left(x_b,t_b;x_a,t_a\right)=\int\prod_{n=1}^{N}dx_n\prod_{n=1}^{N+1}\frac{dp_n}{2\pi\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1}\mathcal{A}_{\Delta t_n}} \tag{3.16}$$

avec

$$\mathcal{A}_{\Delta t_n}=p_n\Delta x_n-\Delta t_n\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{m_n}+\frac{1}{m_{n-1}}\right)p_n^2+V_n\right\} \tag{3.17}$$

3.3 Transformations canoniques

3.3.1 Première transformation canonique

On définit la transformation canonique $(x,p,t)\overset{F_2(x,P,t)}{\longrightarrow}(Q,P,t)$ par

$$x=Q\rho\left(t\right)\qquad\qquad p=\frac{P}{\rho\left(t\right)} \tag{3.18}$$

où $F_2\left(x,P,t\right)$ est la fonction génératrice responsable de la transformation [9] , égale à

$$F_2\left(x,P,t\right)=P\frac{x}{\rho\left(t\right)}=PQ \tag{3.19}$$

qui s'obtient par intégration des équations de la mécanique classique suivantes

$$p=\frac{\partial F_2}{\partial x}=\frac{P}{\rho}\qquad\qquad Q=\frac{\partial F_2}{\partial P} \tag{3.20}$$

Le nouvel Hamiltonien $\mathcal{H}\left(Q,P,t\right)$ se déduit de l'ancien $H\left(x,p,t\right)$ en utilisant la relation suivante

$$\mathcal{H}=H+\frac{\partial F_2}{\partial t}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}&=\frac{1}{2}\frac{1}{m\left(x,t\right)}p^2+V\left(x,t\right)-Px\frac{\dot{\rho}\left(t\right)}{\rho^2\left(t\right)}\\&=\frac{1}{2\rho^2}\frac{P^2}{m\left(Q\rho\left(t\right),t\right)}+V\left(Q\rho\left(t\right),t\right)-PQ\frac{\dot{\rho}\left(t\right)}{\rho\left(t\right)}\end{aligned} \tag{3.21}$$

et l'action se change lors du passage du systeme $(x, p, t) \rightarrow (Q, P, t)$ comme suite

$$pdx - dtH = PdQ - dt\mathcal{H} + dF \tag{3.22}$$

où

$$F = -PQ + F_2 \tag{3.23}$$

donc F est nul $(F = 0)$dans notre cas.

Dans l'approche path integral, nous savons que les chemins sont continus mais non differentiables. Aussi nous modifions les differentielles ∂ par Δ pour tenir compte de ce changement .

Dans l'intervalle de temps $[t_{n-1}, t_n]$ nous choisissons par exemple le temps t_n comme reference.Nous obtenons respectivement pour p, Q, et pour la mesure les expressions suivantes

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{\Delta F_2}{\Delta x_n} = \frac{F_2(x_n, P_n, t_n) - F_2(x_{n-1}, P_n, t_n)}{x_n - x_{n-1}} \\ &= \frac{P_n \frac{x_n}{\rho(t_n)} - P_n \frac{x_{n-1}}{\rho(t_n)}}{x_n - x_{n-1}} = \frac{P_n}{\rho(t_n)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_n &= \frac{\Delta F_2}{\Delta P_n} = \frac{F_2(x_n, P_{n+1}, t_n) - F_2(x_n, P_n, t_n)}{P_{n+1} - P_n} \\ &= \frac{P_{n+1} \frac{x_n}{\rho(t_n)} - P_n \frac{x_n}{\rho(t_n)}}{P_{n+1} - P_n} = \frac{x_n}{\rho(t_n)}, \end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned} DxDp &= \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} dx_n \prod_{n=1}^{N+1} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \\ &= \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} \rho_n dQ_n \prod_{n=1}^{N+1} \frac{dP_n}{2\pi\hbar\sqrt{\rho_n\rho_{n-1}}} = \frac{1}{\sqrt{\rho_b\rho_a}} DQDP, \end{aligned} \tag{3.25}$$

alors la nouvelle forme du propagateur obtenu est

$$K = \frac{1}{\sqrt{\rho_a \rho_b}} \int \prod_{n=1}^{N} dQ_n \prod_{n=1}^{N+1} \frac{dP_n}{2\pi\hbar} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^{N+1} \mathcal{A}'_{\Delta t_n} \right) \tag{3.26}$$

avec la nouvelle action $\mathcal{A}'_{\Delta t_n}$s'écrit comme

$$\begin{aligned} \mathcal{A}'_{\Delta t_n} &= P_n \Delta Q_n - \Delta t_n \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\rho_n^2 m \left(Q_n \rho_n, t_n\right)} + \frac{1}{\rho_n^2 m \left(Q_{n-1} \rho_{n-1}, t_{n-1}\right)} \right) P_n^2 \right. \\ & \left. -\frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\rho}_n}{\rho_n} Q_n + \frac{\dot{\rho}_{n-1}}{\rho_{n-1}} Q_{n-1} \right) P_n + V\left(Q_n \rho_n, t_n\right) \right\} \end{aligned} \tag{3.27}$$

où la regle de passage(3.23) de l'Hamiltonien classique à l'Hamiltonien quantique est également appliquée aux variables de la fonction génératrice puisque elle est fonction de P et Q.

Pour le terme $V\left(Q_n \rho_n, t_n\right)$, independent de P, et à cause de la presence de Δt_n il est évident que le calcul ne dépend pas du choix d'un point de l'intervalle $[t_{n-1}, t_n]$.

3.3.2 Deuxième transformation canonique

Le terme suplimentaite qui manifeste en P_n ,$\left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\rho}_n}{\rho_n} Q_n + \frac{\dot{\rho}_{n-1}}{\rho_n} Q_{n-1} \right) P_n \right\}$ donne une forme compliqué pour l'action (3.28) , on fait éliminer ce terme dans cette partie par une seconde transformation canonique $(Q, P) \overset{\mathcal{F}_2(Q,\mathcal{P},t)}{\rightarrow} (Q, \mathcal{P})$ qui définie par

$$\mathcal{P} = P - \rho\dot{\rho} m Q \qquad\qquad Q = Q \tag{3.28}$$

Nous obtenons la nouvelle fonction génératrice $\mathcal{F}_2$ par l'integration des equatios de la mécanique classique

$$Q = \frac{\partial \mathcal{F}_2 \left(Q, \mathcal{P}, t\right)}{\partial \mathcal{P}} \quad \text{et} \quad P = \frac{\partial \mathcal{F}_2 \left(Q, \mathcal{P}, t\right)}{\partial Q}$$

tel que

$$\mathcal{F}_2(Q,\mathcal{P},t) = Q\mathcal{P}+\rho\dot{\rho}\int^{Q} um(u,t)\,du. \tag{3.29}$$

et le nouvel Hamiltonien s'écrit sous la forme suivante

$$\mathcal{H}'=\frac{1}{2m\rho^2}\mathcal{P}^2-\frac{m}{2}\dot{\rho}^2Q^2+V+\frac{\partial\left(\rho\dot{\rho}\int^{Q} dum(u,t)\,u\right)}{\partial t}. \tag{3.30}$$

pour l'action élémentaire

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}'_{dt} &= PdQ-dt\left\{\frac{1}{2}\frac{1}{\rho^2 m}P^2-PQ\frac{\dot{\rho}}{\rho}+V\right\}\\
&= \mathcal{P}dQ-dt\left\{\frac{1}{2m\rho^2}\mathcal{P}^2-\frac{m}{2}\dot{\rho}^2Q^2+V+2\frac{\partial\left(\rho\dot{\rho}\int^{Q} dum(u,t)\,u\right)}{\partial t}-\frac{d\mathcal{F}}{dt}\right\}\\
&= \mathcal{P}dQ-dt\left\{\frac{1}{2m\rho^2}\mathcal{P}^2-\frac{m}{2}\dot{\rho}^2Q^2+V\right.\\
&\quad\left.+\frac{\partial\left(\rho\dot{\rho}\int^{Q} dum(u,t)\,u\right)}{\partial t}-\rho\dot{\rho}m(Q,t)\,Q\dot{Q}\right\}
\end{aligned} \tag{3.31}$$

où $\mathcal{F}(Q,t)=-\mathcal{P}Q+\mathcal{F}_2=\rho\dot{\rho}\int^{Q} um(u,t)\,du$ est indépendante de $\mathcal{P}$ avec $\frac{d\mathcal{F}}{dt}=\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial t}+\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial Q}\dot{Q}$

.

Nous avons respectivement pour P_n, Q_n

$$\begin{aligned}
P_n &= \frac{\mathcal{F}_2(Q_n,\mathcal{P}_n,t_n)-\mathcal{F}_2(Q_{n-1},\mathcal{P}_n,t_n)}{Q_n-Q_{n-1}}\\
&= \frac{Q_n\mathcal{P}_n+\rho_n\dot{\rho}_n\int^{Q_n} um(u,t_n)\,du-Q_{n-1}\mathcal{P}_n-\rho_n\dot{\rho}_n\int^{Q_{n-1}} um(u,t_n)\,du}{Q_n-Q_{n-1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_n &= \mathcal{P}_n+\rho_n\dot{\rho}_n\frac{\int_{Q_{n-1}}^{Q_n} um(u,t_n)\,du}{Q_n-Q_{n-1}}\\
&\simeq \mathcal{P}_n+\rho_n\dot{\rho}_nQ_nm(Q_n,t_n)
\end{aligned} \tag{3.32}$$

et

$$Q_n = \frac{\mathcal{F}_2\left(Q_n, \mathcal{P}_{n+1}, t_n\right) - \mathcal{F}_2\left(Q_n, \mathcal{P}_n, t_n\right)}{\mathcal{P}_{n+1} - \mathcal{P}_n} = Q_n, \tag{3.33}$$

le mesure restant invariante.

$$DQDP = DQd\mathcal{P} \tag{3.34}$$

La nouvelle action devient alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}'_{\Delta t_n} &= P_n \Delta Q_n - \Delta t_n \left\{ \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\rho_n^2 m_n} + \frac{1}{\rho_{n-1}^2 m_{n-1}}\right) P_n^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2}\left(\frac{\dot\rho_n}{\rho_n} Q_n + \frac{\dot\rho_{n-1}}{\rho_{n-1}} Q_{n-1}\right) P_n + V_n \right\} \\
&= \mathcal{P}_n \Delta Q_n - \Delta t_n \left\{ \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\rho_n^2 m_n} + \frac{1}{\rho_{n-1}^2 m_{n-1}}\right) \mathcal{P}_n^2 - \frac{m}{2}\dot\rho_n^2 Q_n^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial\left(\rho\dot\rho \int^{Q_n} du m\left(u,t\right) u\right)}{\partial t_n} + V_n \right\} \\
&\quad - \frac{1}{2}\left(\rho_n \dot\rho_n m_n Q_n + \rho_{n-1}\dot\rho_{n-1} m_{n-1} Q_{n-1}\right) \Delta Q_n
\end{aligned} \tag{3.35}$$

donc, le nouvel propagateur s'ecrit

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{\sqrt{\rho_a \rho_b}} \int \prod_{n=1}^{N} dQ_n \prod_{n=1}^{N+1} \frac{d\mathcal{P}_n}{2\pi\hbar} \times \exp\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1} \left[\mathcal{P}_n \Delta Q_n \right. \\
&\quad - \Delta t_n \left[\frac{1}{4\rho_n^2}\left(\frac{1}{m_n} + \frac{1}{m_{n-1}}\right) \mathcal{P}_n^2 - \frac{m}{2}\dot\rho_n^2 Q_n^2 + \frac{\partial\left(\rho\dot\rho \int^{Q} du m\left(u,t\right) u\right)}{\partial t} + V_n \right] \\
&\quad \left. - \frac{1}{2}\left(\rho_n \dot\rho_n m_n Q_n + \rho_{n-1}\dot\rho_{n-1} m_{n-1} Q_{n-1}\right) \Delta Q_n \right],
\end{aligned} \tag{3.36}$$

où le dernier terme relatif à la fonction génératrice a été également symétrisé comme auparavant.

La presence de $\Delta Q_n \simeq (\Delta t_n)^{1/2}$, nous permet d' utiliser les approximations suivantes en négligeant les termes d'ordre supérieure en Δt_n, puisque seuls les termes d'ordre Δt_n

contribuent à l'action .Ainsi

$$\rho_n \dot{\rho}_n \simeq \rho_{n-1}\dot{\rho}_{n-1} \tag{3.37}$$

on fait un developpement au voisinage du mid-point nous avons

$$\frac{1}{2}\left(\rho_n\dot{\rho}_n m_n Q_n + \rho_{n-1}\dot{\rho}_{n-1} m_{n-1} Q_{n-1}\right)\Delta Q_n$$

$$\begin{aligned}
&\simeq \frac{1}{2}\rho_n\dot{\rho}_n\left(m_nQ_n + m_{n-1}Q_{n-1}\right)\Delta Q_n \\
&\simeq \frac{1}{2}\rho_n\dot{\rho}_n\left(\bar{m}_n\bar{Q}_n + \frac{\Delta Q_n}{2}\frac{\partial\left(m_nQ_n\right)}{\partial\bar{Q}_n} + \frac{\Delta t_n}{2}\frac{\partial\left(m_nQ_n\right)}{\partial t_n} + ...\right. \\
&\quad \left. + \bar{m}_n\bar{Q}_n - \frac{\Delta Q_n}{2}\frac{\partial\left(m_nQ_n\right)}{\partial\bar{Q}_n} - \frac{\Delta t_n}{2}\frac{\partial\left(m_nQ_n\right)}{\partial t_n}\right)\Delta Q_n \\
&\simeq \rho_n\dot{\rho}_n\bar{m}_n\bar{Q}_n\Delta Q_n \\
&\simeq \left.\left(\rho_n\dot{\rho}_n m_n Q_n\right)\right|_{mid-pointn}\Delta Q_n
\end{aligned} \tag{3.38}$$

comme on peut obtenir ce resultat simplement par l'utilisation de l'identité

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\left(\frac{1}{m_n\rho_n^2} + \frac{1}{m_{n-1}\rho_{n-1}^2}\right)P_n^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{\rho}_n}{\rho_n}Q_n + \frac{\dot{\rho}_{n-1}}{\rho_{n-1}}Q_{n-1}\right)P_n \\
= &\frac{1}{4}\left(\frac{1}{m_n\rho_n^2} + \frac{1}{m_{n-1}\rho_{n-1}^2}\right)\left[P_n^2 - 2\frac{\frac{\dot{\rho}_n}{\rho_n}Q_n + \frac{\dot{\rho}_{n-1}}{\rho_{n-1}}Q_{n-1}}{\frac{1}{m_n\rho_n^2} + \frac{1}{m_{n-1}\rho_{n-1}^2}}P_n\right] \\
= &\frac{1}{4}\left(\frac{1}{m_n\rho_n^2} + \frac{1}{m_{n-1}\rho_{n-1}^2}\right)\left[\left(P_n - \frac{\frac{\dot{\rho}_n}{\rho_n}Q_n + \frac{\dot{\rho}_{n-1}}{\rho_{n-1}}Q_{n-1}}{\frac{1}{m_n\rho_n^2} + \frac{1}{m_{n-1}\rho_{n-1}^2}}\right)^2 - \left(\frac{\frac{\dot{\rho}_n}{\rho_n}Q_n + \frac{\dot{\rho}_{n-1}}{\rho_{n-1}}Q_{n-1}}{\frac{1}{m_n\rho_n^2} + \frac{1}{m_{n-1}\rho_{n-1}^2}}\right)^2\right]
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\left(\frac{1}{m_n\rho_n^2} + \frac{1}{m_{n-1}\rho_{n-1}^2}\right)P_n^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{\rho}_n}{\rho_n}Q_n + \frac{\dot{\rho}_{n-1}}{\rho_{n-1}}Q_{n-1}\right)P_n \\
= &\frac{1}{4}\left(\frac{1}{m_n\rho_n^2} + \frac{1}{m_{n-1}\rho_{n-1}^2}\right)\left(P_n - \frac{\frac{\dot{\rho}_n}{\rho_n}Q_n + \frac{\dot{\rho}_{n-1}}{\rho_{n-1}}Q_{n-1}}{\frac{1}{m_n\rho_n^2} + \frac{1}{m_{n-1}\rho_{n-1}^2}}\right)^2 - \frac{1}{4}\frac{\left(\frac{\dot{\rho}_n}{\rho_n}Q_n + \frac{\dot{\rho}_{n-1}}{\rho_{n-1}}Q_{n-1}\right)^2}{\frac{1}{m_n\rho_n^2} + \frac{1}{m_{n-1}\rho_{n-1}^2}}
\end{aligned}$$

et après un shift

$$P_n - \frac{\frac{\dot{\rho}_n}{\rho_n}Q_n + \frac{\dot{\rho}_{n-1}}{\rho_{n-1}}Q_{n-1}}{\frac{1}{m_n\rho_n^2} + \frac{1}{m_{n-1}\rho_{n-1}^2}} \to P_n \tag{3.39}$$

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{\sqrt{\rho_a\rho_b}}\int\prod_{n=1}^{N}dQ_n\prod_{n=1}^{N+1}\frac{dP_n}{2\pi\hbar} \\ &\exp\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1}\left[\left(P_n + \frac{\frac{\dot{\rho}_n}{\rho_n}Q_n + \frac{\dot{\rho}_{n-1}}{\rho_{n-1}}Q_{n-1}}{\frac{1}{m_n\rho_n^2} + \frac{1}{m_{n-1}\rho_{n-1}^2}}\right)\Delta Q_n\right. \\ &\left.-\Delta t_n\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{m_n\rho_n^2} + \frac{1}{m_{n-1}\rho_{n-1}^2}\right)P_n^2 - \frac{1}{4}\frac{\left(\frac{\dot{\rho}_n}{\rho_n}Q_n + \frac{\dot{\rho}_{n-1}}{\rho_{n-1}}Q_{n-1}\right)^2}{\frac{1}{m_n\rho_n^2} + \frac{1}{m_{n-1}\rho_{n-1}^2}} + V_n\right\}\right] \end{aligned} \tag{3.40}$$

après quelques approximations que nous autorise la presence de ΔQ_n,le terme $\frac{\frac{\dot{\rho}_n}{\rho_n}Q_n + \frac{\dot{\rho}_{n-1}}{\rho_{n-1}}Q_{n-1}}{\frac{1}{m_n\rho_n^2} + \frac{1}{m_{n-1}\rho_{n-1}^2}}\Delta Q_n$ qui s'apparait devient

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\dot{\rho}_n}{\rho_n}Q_n + \frac{\dot{\rho}_{n-1}}{\rho_{n-1}}Q_{n-1}}{\frac{1}{m_n\rho_n^2} + \frac{1}{m_{n-1}\rho_{n-1}^2}}\Delta Q_n &\simeq \rho_n\dot{\rho}_n\frac{(m_n + m_{n-1})^2 - (m_n - m_{n-1})^2}{4\bar{m}_n}\bar{Q}_n\Delta Q_n \\ &\simeq \left.(\dot{\rho}_n\rho_n m_n Q_n)\right|_{mid-point}\Delta Q_n \end{aligned} \tag{3.41}$$

En reportant les expressiosns précedentes, le propagateur s'écrit donc comme

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{\sqrt{\rho_a\rho_b}}\int\prod_{n=1}^{N}dQ_n\prod_{n=1}^{N+1}\frac{d\mathcal{P}_n}{2\pi\hbar} \\ &\exp\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1}\left[\mathcal{P}_n\Delta Q_n - \Delta t_n\left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\rho_n^2 m(\rho_n Q_n, t_n)} + \frac{1}{\rho_{n-1}^2 m\left(\rho_{n-1}Q_{n-1}, t_{n-1}\right)}\right)\mathcal{P}_n^2\right.\right. \\ &\left.-\frac{m(\rho_n Q_n, t_n)}{2}\dot{\rho}_n^2 Q_n^2 + V_n + \frac{\hbar}{2i}\frac{\dot{\rho}_n}{\rho_n} + V_n\right) \\ &\left.- \left.(\dot{\rho}_n\rho_n m(\rho_n Q_n, t_n) Q_n)\right|_{mid-point}\Delta Q_n\right], \end{aligned} \tag{3.42}$$

En remarquant qu'après les deux transformations, il apparait trois termes supplémentaires dans l'action

- un facteur de phase $\frac{\hbar}{2i}\frac{\dot{\rho}_n}{\rho_n}$

- l' oscillateur harmonique avec masse et frequence variables $\frac{m}{2}\dot{\rho}_n^2 Q_n^2$

-et le terme $\sum_{n=1}^{N+1} \left(\dot{\rho}_n \rho_n m \left(\rho_n Q_n, t_n\right) Q_n\right)\big|_{mid-point} \Delta Q_n$ dépendant uniquement de la masse.

3.3.3 Conditions necessaires pour avoir un système conservatif :

Considérons maintenant les systèmes dépendant du temps et de la position et tels qu'ils deviennent après ces deux transformations conservatifs dans le système de coordonnées $(Q, \mathcal{P}, t)$

Il en résulte alors deux conditions nécessaires ;

1- condition sur ρ tel que

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = cte \quad \text{soit } \frac{\dot{\rho}}{\rho} = -\frac{\nu}{2} \Longrightarrow \rho(t) = e^{-\frac{\nu t}{2}}. \tag{3.43}$$

2- les produits $\rho^2\ m$, $\dot{\rho}^2 m$ et le potentiels V doivent être fonction uniquement de la variable Q

$$\rho^2 m(x,t) = M(Q) \quad , \tag{3.44}$$

$$\dot{\rho}^2 m = cte\ M(Q), \tag{3.45}$$

$$V(x,t) = V(Q), \tag{3.46}$$

Le dernier terme dans l'exponentielle de l'expression (3.44) prend à la limite $\Delta t_n \to 0$ (suivant Itô) la forme suivante

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N+1} \left(\rho_n \dot{\rho}_n m_n Q_n\right)\big|_{mid-point} \Delta Q_n &= -\frac{\nu}{2} \sum_{n=1}^{N+1} e^{-\nu t_n} \int_{Q_{n-1}}^{Q_n} dQQm\left(e^{\frac{\nu \bar{t}_n}{2}} x\right) \\
&= -\frac{\nu}{2} \sum_{n=1}^{N+1} \int_{Q_{n-1}}^{Q_n} dQQM\left(Q\right) \qquad (3.47) \\
&= -\frac{\nu}{2} \int_{Q_a}^{Q_b} dQQM\left(Q\right) \\
&= -\frac{\nu}{2} \int_{Q_a==x_a \exp\left(\frac{\nu t_a}{2}\right)}^{Q_b=x_b \exp\left(\frac{\nu t_b}{2}\right)} dQQM\left(Q\right), \qquad (3.48)
\end{aligned}$$

ce terme est une simple intégrale qui ne dépend que des points initial (t_a, x_a) et final (t_b, x_b).

En remplaçant les expressions (3.45) , (3.46) , (3.47) , (3.48) et (3.49)dans(3.44) , le propagateur devient

$$\begin{aligned}
K &= e^{-\frac{\nu}{4}(t_b+t_a)} e^{\frac{i}{\hbar}\frac{\nu}{2}\int_{x_a \exp\left(\frac{\nu t_a}{2}\right)}^{x_b \exp\left(\frac{\nu t_b}{2}\right)} M(Q)QdQ} \int \prod_{n=1}^{N} dQ_n \prod_{n=1}^{N+1} \frac{d\mathcal{P}_n}{2\pi\hbar} \\
&\quad \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1}\left[\mathcal{P}_n \Delta Q_n - \Delta t_n \left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{M\left(Q_n\right)} + \frac{1}{M\left(Q_{n-1}\right)}\right)\mathcal{P}_n^2 \right.\right.\right. \\
&\quad \left.\left.\left. -\frac{\nu^2}{8} M\left(Q_n\right) Q_n^2 + V\left(Q_n\right)\right)\right]\right\}, \qquad (3.49)
\end{aligned}$$

3.3.4 Propagateur dans l'espace des configurations

En peut construire le propagateur dans l'espace des phases par l'utilisation de la référence [20] mais il plus simple de passer à l'espace des configurations. Nous intégrons l'expression (3.50) de propagateur sur les $\mathcal{P}_n$,

$$\begin{aligned} K &= e^{-\frac{\nu}{4}(t_b+t_a)} e^{\frac{i}{\hbar}\frac{\nu}{2}\int_{x_a \exp\left(\frac{\nu t_a}{2}\right)}^{x_b \exp\left(\frac{\nu t_b}{2}\right)} M(Q)QdQ} \int \prod_{n=1}^{N} dQ_n \prod_{n=1}^{N+1} \sqrt{\frac{\mathcal{M}_{n,n-1}}{2i\pi\hbar\varepsilon_t}} \\ & \exp \frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^{N+1} \left[\frac{\mathcal{M}_{n,n-1} (\Delta Q_n)^2}{2\varepsilon_t} - \Delta t_n \left\{ -\frac{\nu^2}{4} \frac{M(Q_n)}{2} Q_n^2 + V(Q_n) \right\} \right], \end{aligned} \quad (3.50)$$

où nous avons posé pour simplifier

$$\mathcal{M}_{n,n-1} = \frac{2M_n M_{n-1}}{M_{n-1} + M_n} = \frac{2M(Q_n) M(Q_{n-1})}{M(Q_n) + M(Q_{n-1})} \quad (3.51)$$

3.3.5 Transformation ponctuelle

Suite de ce traitement on fait une transformation ponctuelle definie par :

$$Q \to y : \qquad Q = g(y) \quad (3.52)$$

alors

$$\mathcal{M}_{n,n-1} = \frac{2M(g(y_n)) M(g(y_{n-1}))}{M(g(y_n)) + M(g(y_{n-1}))} \quad (3.53)$$

est une fonction de deux variables($y_n, y_{n-1},$) ou encore de $\left(\bar{y}_n, \frac{\Delta y_n}{2}\right)$.

Avec la nouvelle variable y, nous avons d'abord

$$\Delta Q_n = Q_n - Q_{n-1} \simeq \Delta y_n \frac{\partial g}{\partial \bar{y}_n} + \frac{(\Delta y_n)^3}{24} \frac{\partial^3 g}{\partial \bar{y}_n^3} + ... \quad (3.54)$$

et aussi pour $(\Delta Q_n)^2$

$$(\Delta Q_n)^2 \simeq (\Delta y_n)^2 \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{y}_n}\right)^2 + \frac{(\Delta y)^4}{12} \frac{\partial^3 g}{\partial \bar{y}_n^3} \frac{\partial g}{\partial \bar{y}_n} \quad (3.55)$$

nous effectuons une développons en série de Taylor $\mathcal{M}_{n,n-1}$ au voisinage du mid point

$$\mathcal{M}_{n,n-1} \simeq \bar{M}_n + \Delta y_n \frac{\partial \mathcal{M}_{n,n-1}}{\partial \bar{y}} + \frac{(\Delta y_n)^2}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{M}_{n,n-1}}{\partial \bar{y}_n^2} + ... \tag{3.56}$$

et prenons le changement Δy_n en $-\Delta y_n$,

$$\mathcal{M}_{n,n-1} \simeq \bar{M}_n - \Delta y_n \frac{\partial \mathcal{M}_{n,n-1}}{\partial \bar{y}} + \frac{(\Delta y_n)^2}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{M}_{n,n-1}}{\partial \bar{y}_n^2} + ... \tag{3.57}$$

et comme $\mathcal{M}_{n,n-1}$ ne doit pas etre modifié, il vient par addition

$$\mathcal{M}_{n,n-1} \simeq \bar{M}_n + \frac{(\Delta y_n)^2}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{M}_{n,n-1}}{\partial \bar{y}_n^2} \tag{3.58}$$

3.3.6 Potentiel effectif

Nous avons les developpements pour les termes suivants

- le terme cinetique

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\varepsilon_t} \mathcal{M}_{n,n-1} (\Delta Q_n)^2 &= \frac{1}{2\varepsilon_t} \left(\bar{M}_n + \frac{(\Delta y_n)^2}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{M}_{n,n-1}}{\partial \bar{y}_n^2} + ... \right) \times \left((\Delta y_n)^2 \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{y}_n} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{(\Delta y_n)^4}{12} \frac{\partial^3 g}{\partial \bar{y}_n^3} \frac{\partial g}{\partial \bar{y}_n} + ... \right) \\
&\simeq \frac{1}{2\varepsilon_t} \left((\Delta y_n)^2 \bar{M}_n \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{y}_n} \right)^2 + \frac{(\Delta y_n)^4}{12} \bar{M}_n \frac{\partial^3 g}{\partial \bar{y}_n^3} \frac{\partial g}{\partial \bar{y}_n} \right) \\
&\quad + \frac{1}{4\varepsilon_t} (\Delta y_n)^4 \frac{\partial^2 \mathcal{M}_{n,n-1}}{\partial \bar{y}_n^2} \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{y}_n} \right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\varepsilon_t} \mathcal{M}_{n,n-1} (\Delta Q_n)^2 &= \frac{(\Delta y_n)^2}{2\varepsilon_t} \bar{M}_n \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{y}_n} \right)^2 + \frac{(\Delta y)^4}{4\varepsilon_t} \left(\frac{1}{6} \bar{M}_n \frac{\partial^3 g}{\partial \bar{y}_n^3} \frac{\partial g}{\partial \bar{y}_n} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial^2 \mathcal{M}_{n,n-1}}{\partial \bar{y}_n^2} \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{y}_n} \right)^2 \right)
\end{aligned} \tag{3.59}$$

- la racine

$$\sqrt{\frac{\bar{M}_n}{2i\pi\hbar\varepsilon_t}} \simeq \sqrt{\frac{\bar{M}_n + \frac{(\Delta y_n)^2}{2}\frac{\partial^2\mathcal{M}_{n,n-1}}{\partial\bar{y}_n^2}}{2i\pi\hbar\varepsilon_t}} \simeq \sqrt{\frac{\bar{M}_n}{2i\pi\hbar\varepsilon_t}}\left(1 + \frac{(\Delta y_n)^2}{4}\frac{\frac{\partial^2\mathcal{M}_{n,n-1}}{\partial\bar{y}_n^2}}{\bar{M}_n}\right) \tag{3.60}$$

- et le Jacobien relatif à la transformation $Q \rightarrow y$

$$dQ = g\prime dy \tag{3.61}$$

$$\prod_{n=1}^{N} dQ_n = \prod_{n=1}^{N} g\prime_n dy_n = \frac{1}{(g\prime_b g\prime_a)^{1/2}} \prod_{n=1}^{N+1} (g\prime_n g\prime_{n-1})^{1/2} \prod_{n=1}^{N} dy_n \tag{3.62}$$

avec

$$(g\prime_n g\prime_{n-1})^{1/2} = \bar{g}'_n \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta y_n}{2}\right)^2 \left[\left(\frac{\bar{g}''_n}{\bar{g}'}\right)^2 - \frac{\bar{g}'''_n}{\bar{g}'_n}\right]\right] \tag{3.63}$$

alors notre propagateur (3.51) prend la forme suivante

$$\begin{aligned} K &= \frac{e^{-\frac{\nu}{2}(t_b+t_a)}}{\sqrt{g\prime_b g\prime_a}} e^{\frac{i}{\hbar}\frac{\nu}{2}\int_{x_a \exp\left(\frac{\nu t_a}{2}\right)}^{x_b \exp\left(\frac{\nu t_b}{2}\right)} M(Q)QdQ} \\ &\lim_{N\to\infty} \int \prod_{n=1}^{N} dy_n \prod_{n=1}^{N+1} \sqrt{\frac{\bar{M}_n \bar{g}_n'^2}{2i\pi\hbar\varepsilon_t}} \left(1 + C_{jacobian}\right)\left(1 + C_{measure}\right)\left(1 + C_{action}\right) \\ &\times \exp\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1}\left[\frac{(\Delta y_n)^2}{2\varepsilon_t}\bar{M}_n\bar{g}_n'^2 - \varepsilon_t\left\{-\frac{\nu^2}{4}\frac{\bar{M}_n}{2}\bar{g}_n^2 + V\left(\bar{g}_n\right)\right\}\right]. \end{aligned}$$

où les corrections sont respectivement données par

$$C_{jacobian} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta y_n}{2}\right)^2 \left[\left(\frac{\bar{g}''_n}{\bar{g}'_n}\right)^2 - \frac{\bar{g}'''_n}{\bar{g}'_n}\right], \tag{3.64}$$

$$C_{measure} \simeq \frac{1}{4}(\Delta y_n)^2 \frac{\frac{\partial^2 \bar{M}_n}{\partial \bar{y}_n^2}}{\bar{M}_n} \tag{3.65}$$

$$
\begin{aligned}
C_{action} &= e^{\frac{i}{\hbar}\frac{(\Delta y)^4}{4\varepsilon_t}\left(\frac{1}{6}\bar{M}_n\frac{\partial^3 g}{\partial\bar{y}_n^3}\frac{\partial g}{\partial\bar{y}_n}+\frac{\partial^2\bar{M}_n}{\partial\bar{y}_n^2}\left(\frac{\partial g}{\partial\bar{y}_n}\right)^2\right)}-1 \\
&\simeq \frac{i}{\hbar}\frac{(\Delta y_n)^4}{4\varepsilon_t}\left(\frac{1}{6}\bar{M}_n\frac{\partial^3 g}{\partial\bar{y}_n^3}\frac{\partial g}{\partial\bar{y}_n}+\frac{\partial^2\mathcal{M}_{n,n-1}}{\partial\bar{y}_n^2}\left(\frac{\partial g}{\partial\bar{y}_n}\right)^2\right).
\end{aligned}
\tag{3.66}
$$

On obtient la correction totale result de produit des trois corrections précidentes

$$
\begin{aligned}
1+C_{tot.} &= \left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta y_n}{2}\right)^2\left[\left(\frac{\bar{g}_n''}{\bar{g}_n'}\right)^2-\frac{\bar{g}_n'''}{\bar{g}_n'}\right]\right] \\
&\quad\times\left(1+\frac{(\Delta y_n)^2}{4}\frac{\frac{\partial^2\mathcal{M}_{n,n-1}}{\partial\bar{y}_n^2}}{\bar{M}_n}\right) \\
&\quad\times\left(1+\frac{i}{\hbar}\frac{(\Delta y_n)^4}{4\varepsilon_t}\left(\frac{1}{6}\bar{M}_n\bar{g}_n'''\bar{g}_n'+\frac{\partial^2\mathcal{M}_{n,n-1}}{\partial\bar{y}_n^2}\bar{g}_n'^2\right)\right) \\
&\simeq \left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta y_n}{2}\right)^2\left[\left(\frac{\bar{g}_n''}{\bar{g}_n'}\right)^2-\frac{\bar{g}_n'''}{\bar{g}_n'}\right]+\frac{(\Delta y_n)^2}{4}\frac{\frac{\partial^2\mathcal{M}_{n,n-1}}{\partial\bar{y}_n^2}}{\bar{M}_n}\right) \\
&\quad\times\left(1+\frac{i}{\hbar}\frac{(\Delta y_n)^4}{4\varepsilon_t}\left(\frac{1}{6}\bar{M}_n\bar{g}_n'''\bar{g}_n'+\frac{\partial^2\mathcal{M}_{n,n-1}}{\partial\bar{y}_n^2}\bar{g}_n'^2\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1+C_{tot.} &\simeq 1-\frac{(\Delta y_n)^2}{8}\left(\left(\frac{\bar{g}_n''}{\bar{g}_n'}\right)^2-\frac{\bar{g}_n'''}{\bar{g}_n'}-2\frac{\frac{\partial^2\mathcal{M}_{n,n-1}}{\partial\bar{y}_n^2}}{\bar{M}_n(\bar{y}_n)}\right) \\
&\quad+\frac{i}{\hbar}\frac{(\Delta y_n)^4}{4\varepsilon_t}\left(\frac{1}{6}\bar{M}_n\bar{g}_n'''\bar{g}_n'+\frac{\partial^2\mathcal{M}_{n,n-1}}{\partial\bar{y}_n^2}\bar{g}_n'^2\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\simeq 1-\frac{1}{8}\frac{i\varepsilon_t\hbar}{\bar{M}_n\bar{g}_n'^2}\left(\left(\frac{\bar{g}_n''}{\bar{g}_n'}\right)^2-\frac{\bar{g}_n'''}{\bar{g}_n'}-2\frac{\frac{\partial^2\mathcal{M}_{n,n-1}}{\partial\bar{y}_n^2}}{\bar{M}_n}\right) \\
&\quad+\frac{i}{\hbar}\frac{3}{4\varepsilon_t}\left(\frac{i\varepsilon_t\hbar}{\bar{M}_n\bar{g}_n'^2}\right)^2\left(\frac{1}{6}\bar{M}_n\bar{g}_n'''\bar{g}_n'+\frac{\partial^2\mathcal{M}_{n,n-1}}{\partial\bar{y}_n^2}\bar{g}_n'^2\right)
\end{aligned}
$$

$$\simeq \quad 1-\frac{i\varepsilon_t\hbar}{\bar{M}_n\bar{g}_n'^2}\quad\left(\frac{1}{8}\left(\frac{\bar{g}_n''}{\bar{g}_n'}\right)^2-\frac{1}{8}\frac{\bar{g}_n'''}{\bar{g}_n'}-\frac{1}{4}\frac{\frac{\partial^2\mathcal{M}_{n,n-1}}{\partial\bar{y}_n^2}}{\bar{M}_n}\right)$$

$$-\ \frac{i\varepsilon_t\hbar}{1}\left(\frac{1}{\bar{M}_n\bar{g}_n'^2}\right)^2\left(\frac{3}{4}\frac{1}{6}\bar{M}_n\bar{g}_n'''\bar{g}_n'+\frac{3}{4}\frac{\partial^2\mathcal{M}_{n,n-1}}{\partial\bar{y}_n^2}\bar{g}_n'^2\right)$$

$$\simeq \quad 1-\frac{1}{8}\frac{i\varepsilon_t\hbar}{\bar{M}_n\bar{g}_n'^2}\left(\frac{\bar{g}_n''}{\bar{g}_n'}\right)^2+\frac{1}{8}\frac{i\varepsilon_t\hbar}{\bar{M}_n\bar{g}_n'^2}\frac{\bar{g}_n'''}{\bar{g}_n'}+\frac{1}{4}\frac{i\varepsilon_t\hbar}{\bar{M}_n g_n'^2}\frac{\frac{\partial^2\mathcal{M}_{n,n-1}}{\partial\bar{y}_n^2}}{\bar{M}_n\left(\bar{y}_n\right)}$$

$$-\frac{i\varepsilon_t\hbar}{1}\frac{1}{\bar{M}_n\bar{g}_n'^2}\left(\frac{1}{8}\frac{\bar{g}_n'''}{\bar{g}_n'}+\frac{3}{4}\frac{\frac{\partial^2\mathcal{M}_{n,n-1}}{\partial\bar{y}_n^2}}{\bar{M}_n}\right)$$

$$\simeq 1-\frac{1}{8}\frac{i\varepsilon_t\hbar}{\bar{M}_n\bar{g}_n'^2}\left(\frac{\bar{g}_n''}{\bar{g}_n'}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{i\varepsilon_t\hbar}{\bar{M}_n\bar{g}_n'^2}\frac{\frac{\partial^2\mathcal{M}_{n,n-1}}{\partial\bar{y}_n^2}}{\bar{M}_n}$$

$$1+C_{tot}\simeq e^{\frac{-i}{\hbar}\varepsilon_t\frac{\hbar^2}{2\bar{M}_n g_n'^2}\left(\frac{1}{4}\left(\frac{\bar{g}''}{\bar{g}'}\right)^2+\frac{\frac{\partial^2\mathcal{M}_{n,n-1}}{\partial\bar{y}_n^2}}{M_n}\right)},$$

$$1+C_{tot}=\exp\left[\frac{-i}{\hbar}\varepsilon_t\frac{\hbar^2}{8\bar{M}_n g_n'^2}\left[\left(\frac{\bar{g}_n''}{\bar{g}_n'}\right)^2+\frac{\bar{M}_n''}{\bar{M}_n}-2\left(\frac{\bar{M}_n'}{\bar{M}_n}\right)^2\right]\right]. \tag{3.67}$$

où il a été tenu compte des estimations suivantes pour obtenir le potentiel effectif.

$$<(\Delta y_n)^2>=\frac{i\varepsilon_t\hbar}{\bar{M}_n\bar{g}_n'^2}\qquad <(\Delta y_n)^4>=3\left(\frac{i\varepsilon_t\hbar}{\bar{M}_n\bar{g}_n'^2}\right)^2 \tag{3.68}$$

donc V_{eff} s'écrit comme suite

$$V_{eff}=\frac{\hbar^2}{8\bar{M}_n g_n'^2}\ \left[\left(\frac{\bar{g}_n''}{\bar{g}_n'}\right)^2+\frac{\bar{M}_n''}{\bar{M}_n}-2\left(\frac{\bar{M}_n'}{\bar{M}_n}\right)^2\right], \tag{3.69}$$

Finalement notre propagateur est

$$\begin{aligned}
K &= \frac{e^{-\frac{\nu}{2}(t_b+t_a)}}{\sqrt{g'_b g'_a}} e^{\frac{i}{\hbar}\frac{\nu}{2}\int_{x_a \exp\left(\frac{\nu t_a}{2}\right)}^{x_b \exp\left(\frac{\nu t_b}{2}\right)} M(Q)QdQ} \int \prod_{n=1}^{N} dy_n \prod_{n=1}^{N+1} \sqrt{\frac{\bar{M}_n \bar{g}_n'^2}{2i\pi\hbar\varepsilon_t}} \\
&\quad \times \exp\left[\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1}\left\{\frac{(\Delta y_n)^2}{2\varepsilon_t}\bar{M}_n\bar{g}_n'^2 - \varepsilon_t\left[V(\bar{g}_n) - \frac{\nu^2}{8}\bar{M}_n\bar{g}_n^2\right.\right.\right. \\
&\quad \left.\left.\left. + \frac{\hbar^2}{8\bar{M}_n g_n'^2}\left[\left(\frac{\bar{g}_n''}{\bar{g}_n'}\right)^2 + \frac{\bar{M}_n''}{\bar{M}_n} - 2\left(\frac{\bar{M}_n'}{\bar{M}_n}\right)^2\right]\right\}\right]. \qquad (3.70)
\end{aligned}$$

ou encore sous forme continue

$$\begin{aligned}
K &= \frac{e^{-\frac{\nu}{2}(t_b+t_a)}}{\sqrt{g'_b g'_a}} e^{\frac{i}{\hbar}\frac{\nu}{2}\int_{x_a \exp\left(\frac{\nu t_a}{2}\right)}^{x_b \exp\left(\frac{\nu t_b}{2}\right)} M(Q)QdQ} \\
&\quad \times \int Dy(t)\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b} dt\left[\frac{\dot{y}^2}{2}Mg'^2 - dt\left(V(g(y)) - \frac{\nu^2}{4}\frac{M(g(y))}{2}g(y)^2\right.\right.\right. \\
&\quad \left.\left.\left. +\frac{\hbar^2}{8Mg'^2}\left[\left(\frac{g''}{g'}\right)^2 + \frac{M''}{M} - 2\left(\frac{M'}{M}\right)^2\right]\right)\right]\right\} \qquad (3.71)
\end{aligned}$$

Cette expression du propagateur, relative à notre systeme où la masse et le potentiel dependent tous deux du temps et de la position, représente notre principal resultat.

3.4 Application

On considère un système d'une particule de masse variable dépendante de position et du temps $m(x,t) = m_0 e^{\gamma t + \lambda x}$ soumis à un potentiel $V(x,t) = V_0 e^{-\gamma t + \lambda x}$ dans l'espace (x,t).

Le traitement de ce système fait d'abord d'écrire le propagateur qui prend cette forme :

$$K(x_b,t_b;x_a,t_a) = \int \prod_{n=1}^{N} dx_n \prod_{n=1}^{N+1} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1}\left[p_n\triangle x_n - \triangle t_n\left\{\frac{1}{4m_0}\left(\frac{1}{e^{\gamma t_n+\lambda x_n}}+\frac{1}{e^{\gamma t_{n-1}+\lambda x_{n-1}}}\right)p_n^2+V_0e^{-\gamma t_n+\lambda x_n}\right\}\right]} \tag{3.72}$$

on pose $\varepsilon_s = \triangle s_n = \triangle t_n e^{-\gamma t}$ ou encore $ds = dte^{-\gamma t}$

avec $S_b - S_a = \frac{e^{-\gamma t_b}-e^{-\gamma t_a}}{\gamma}$

$$K(x_b,t_b;x_a,t_a) = \int \prod_{n=1}^{N} dx_n \prod_{n=1}^{N+1} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \times e^{\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1}\left[p_n\triangle x_n - \triangle s_n\left\{\frac{1}{4m_0}\left(\frac{1}{e^{\lambda x_n}}+\frac{1}{e^{\lambda x_{n-1}}}\right)p_n^2+V_0e^{\lambda x_n}\right\}\right]} \tag{3.73}$$

La transformation effectuée dans ce cas est $x \to y$définie par

$$x = g(y) = \frac{2}{\lambda}\ln y$$

avec la condition suivante $\rho(t) = c^{ste} = 1$

Le propagateur se réduit à cette condition à :

$$K = \frac{1}{\sqrt{g_b' g_a'}} \int Dy(s) e^{\frac{i}{\hbar}\int_{s_a}^{s_b} ds\left[\frac{\dot{y}^2}{2}Mg'^2 - \left\{V + \frac{\hbar^2}{8Mg'^2}\left[\left(\frac{g''}{g'}\right)^2 + \frac{M''}{M} - 2\left(\frac{M'}{M}\right)^2\right]\right\}\right]} \tag{3.74}$$

$M = m_0e^{\lambda x} = m_0e^{\lambda\frac{2}{\lambda}\ln y} = m_0y^2$

$M' = 2m_0y$

$M'' = 2m_0$

$V = V_0e^{\lambda x} = V_0y^2$

$g' = \frac{2}{\lambda y}$

$g'' = -\frac{2}{\lambda y^2}$

on les remplace dans le propagateur qui devient alors :

$$
\begin{aligned}
K &= \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\lambda y_b}\frac{2}{\lambda y_a}}}\int Dy(s) \\
&\quad\times e^{\frac{i}{\hbar}\int_{s_a}^{s_b} ds\left[\frac{\dot{y}^2}{2}m_0 y^2\left(\frac{2}{\lambda y}\right)^2-\left\{V_0 y^2+\frac{\hbar^2}{8m_0 y^2\left(\frac{2}{\lambda y}\right)^2}\left[\left(\frac{-\frac{2}{\lambda y^2}}{\frac{2}{\lambda y}}\right)^2+\frac{2m_0}{m_0 y^2}-2\left(\frac{2m_0 y}{m_0 y^2}\right)^2\right]\right\}\right]} \\
&= \frac{\lambda}{2}\sqrt{y_b y_a}\int Dy(s) e^{\frac{i}{\hbar}\int_{s_a}^{s_b} ds\left[\frac{\dot{y}^2}{2}\frac{4m_0}{\lambda^2}-\left\{V_0 y^2+\frac{\hbar^2}{8m_0\frac{4}{\lambda^2}}\left[\frac{1}{y^2}+\frac{2}{y^2}-\frac{8}{y^2}\right]\right\}\right]} \\
&= \frac{\lambda}{2}\sqrt{y_b y_a}\int Dy(s) e^{\frac{i}{\hbar}\int_{s_a}^{s_b} ds\left[\frac{4m_0}{\lambda^2}\frac{\dot{y}^2}{2}-V_0 y^2+\frac{\lambda^2\hbar^2}{32m_0}\frac{5}{y^2}\right]} \qquad (3.75)
\end{aligned}
$$

3.4.1 L'intégration sur y :

on utilise la formule (2.67) suivante :

$$
\begin{aligned}
&\int_{r(t')=r'}^{r(t'')=r''} D_r(t)\exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''}\left(\frac{m}{2}\dot{r}^2-\hbar^2\frac{\lambda^2-\frac{1}{4}}{2mr^2}-\frac{m}{2}\omega^2 r^2\right)dt\right] \\
&= \int_{r(t')=r'}^{r(t'')=r''} D_r(t) U_\lambda[r^2]\exp\left[\frac{im}{2\hbar}\int_{t'}^{t''}\left(\dot{r}^2-\omega^2 r^2\right)dt\right] \\
&= \frac{\sqrt{r'r''}m\omega}{i\hbar\sin(\omega T)}\exp\left[\frac{im\omega}{2\hbar}(r'^2+r''^2)\cot(\omega T)\right] I_\lambda\left(\frac{m\omega r'r''}{i\hbar\sin(\omega T)}\right) \qquad (3.76)
\end{aligned}
$$

par identification le propagateur s'ecrit :

$$
\begin{aligned}
K &= \frac{\lambda}{2}\sqrt{y_b y_a}\int Dy(s) e^{\frac{i}{\hbar}\int_{s_a}^{s_b} ds\left[\frac{4m_0}{\lambda^2}\frac{\dot{y}^2}{2}-V_0 y^2+\frac{\lambda^2\hbar^2}{32m_0}\frac{5}{y^2}\right]} \\
&= \frac{\lambda}{2}\sqrt{y_b y_a}\int Dy(s)\exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_{s_a}^{s_b}\left(\frac{m_0}{2}\dot{y}^2-\frac{\lambda^2 V_0}{4}y^2+\frac{1}{2m_0}\left(\frac{5\lambda^2\hbar^2}{16}\right)\frac{1}{y^2}\right)ds\right] \qquad (3.77) \\
&= \frac{\lambda}{2}\sqrt{y_b y_a}\int Dy(s) U_\alpha[y^2]\exp\left[\frac{i}{\hbar}\frac{m_0}{2}\int_{s_a}^{s_b}\left(\dot{y}^2-\frac{\lambda^2 V_0}{2m_0}y^2\right)ds\right] \\
&= \frac{\lambda}{2}\sqrt{y_b y_a}\int_0^\infty dS\frac{\sqrt{y_b y_a}m_0\omega}{i\hbar\sin(\omega S)}\exp\left[\frac{im_0\omega}{2\hbar}(y_a^2+y_b^2)\cot(\omega S)\right] I_\alpha\left(\frac{m_0\omega y_a y_b}{i\hbar\sin(\omega S)}\right) \qquad (3.78)
\end{aligned}
$$

où

$\omega^2 = \frac{\lambda^2 V_0}{2m_0}$

$\alpha^2 - \frac{1}{4} = -\frac{5\lambda^2}{16} \Rightarrow \alpha = \left(-\frac{5\lambda^2}{16} + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$

$\frac{m_0\omega}{i\hbar\sin(\omega S)} = \frac{m_0\omega}{i\hbar\left(\frac{e^{i\omega s}-e^{-i\omega s}}{2i}\right)} = \frac{2m_0\omega e^{-i\omega s}}{\hbar(1-e^{-2i\omega s})}$

$\cot(\omega s) = \frac{\cos(\omega s)}{\sin(\omega s)} = i\frac{e^{i\omega s}+e^{-i\omega s}}{e^{i\omega s}-e^{-i\omega s}} = i\frac{1+e^{-2i\omega s}}{1-e^{-2i\omega s}}$

$I_\alpha\left(\frac{m_0\omega y_a y_b}{i\hbar\sin(\omega S)}\right) = I_\alpha\left(\frac{m_0\omega y_a y_b}{i\hbar\left(\frac{e^{i\omega s}-e^{-i\omega s}}{2i}\right)}\right) = I_\alpha\left(\frac{2m_0\omega y_a y_b e^{-i\omega s}}{\hbar(1-e^{-2i\omega s})}\right)$

$$\begin{aligned} K(x_b,t_b;x_a,t_a) &= \frac{\lambda}{2}y_b y_a\int_0^\infty dS\frac{2m_0\omega e^{-i\omega s}}{\hbar\left(1-e^{-2i\omega s}\right)}\exp\left[\frac{-m_0\omega}{2\hbar}(y_a^2+y_b^2)\frac{1+e^{-2i\omega s}}{1-e^{-2i\omega s}}\right] \\ &\quad\times I_\alpha\left(\frac{2m_0\omega y_a y_b e^{-i\omega s}}{\hbar\left(1-e^{-2i\omega s}\right)}\right) \end{aligned} \tag{3.79}$$

on pose les changements des variables suivantes :

$$X = \frac{m_0\omega}{\hbar}y_a^2; Y = \frac{m_0\omega}{\hbar}y_b^2; Z = e^{-2i\omega s}$$

$$\begin{aligned} K(x_b,t_b;x_a,t_a) &= \frac{\lambda}{2}y_b y_a\int_0^\infty dS\frac{2m_0\omega}{\hbar}\frac{Z^{-\frac{\alpha}{2}}e^{-i\omega s(\alpha+1)}}{(1-Z)}\exp\left[\frac{-m_0\omega}{2\hbar}(y_a^2+y_b^2)\frac{1+Z}{1-Z}\right] \\ &\quad\times I_\alpha\left(\frac{2\sqrt{XYZ}}{(1-Z)}\right) \end{aligned} \tag{3.80}$$

à l'aide de la formule de Hill-Hardy [**?**] :

$$\begin{aligned} \frac{(Z)^{-\frac{\alpha}{2}}}{(1-Z)}I_\alpha\left(\frac{2\sqrt{XYZ}}{(1-Z)}\right)e^{-\frac{1}{2}(X+Y)\left(\frac{1+Z}{1-Z}\right)} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)} \\ &\quad\times e^{-\frac{1}{2}(X+Y)}Z^n(XY)^{\frac{\alpha}{2}}L_n^\alpha(X)L_n^\alpha(Y) \end{aligned} \tag{3.81}$$

le propagateur sera :

$$
\begin{aligned}
K(x_b,t_b;x_a,t_a) &= \frac{\lambda}{2}y_by_a\int_0^{\infty}dS\frac{2m_0\omega e^{-i\omega s(\alpha+1)}}{\hbar}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)} \\
&\quad\times e^{-\frac{1}{2}(X+Y)}Z^n(XY)^{\frac{\alpha}{2}}L_n^{\alpha}(X)L_n^{\alpha}(Y) \\
&= \frac{\lambda}{2}y_by_a\frac{2m_0\omega}{\hbar}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)} \\
&\quad\times e^{-\frac{1}{2}\frac{m_0\omega}{\hbar}(y_a^2+y_b^2)}\left[\frac{m_0^2\omega^2}{\hbar^2}y_a^2y_b^2\right]^{\frac{\alpha}{2}}L_n^{\alpha}(\frac{m_0\omega}{\hbar}y_a^2)L_n^{\alpha}(\frac{m_0\omega}{\hbar}y_b^2) \\
&\quad\times\int_0^{\infty}e^{-i\omega s(\alpha+1+2n)}dS
\end{aligned} \tag{3.82}
$$

que l'on peut ecrit aussi comme

$$
\begin{aligned}
K(x_b,t_b;x_a,t_a) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\lambda m_0\omega}{\hbar}\frac{y_an!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\quad\times e^{-\frac{1}{2}\frac{m_0\omega}{\hbar}y_a^2}\left[\frac{m_0\omega}{\hbar}y_a^2\right]^{\frac{\alpha}{2}}L_n^{\alpha}(\frac{m_0\omega}{\hbar}y_a^2) \\
&\quad\left[\frac{\lambda m_0\omega}{\hbar}\frac{y_bn!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\right]^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}\frac{m_0\omega}{\hbar}y_b^2}\left[\frac{m_0\omega}{\hbar}y_b^2\right]^{\frac{\alpha}{2}} \\
&\quad L_n^{\alpha}(\frac{m_0\omega}{\hbar}y_b^2) && (3.83)\\
&\quad\times\int_0^{\infty}e^{-i\omega s(\alpha+1+2n)}dS && (3.84)
\end{aligned}
$$

avec l'une des propriétés de propagateur enonce que :

$$
K=\sum_n\Psi_n(x_a)\Psi_n^*(x_b)e^{-\frac{i}{\hbar}E_n(t_b-t_a)} \tag{3.85}
$$

Donc l'expresion des énergies s'ecrit :

$$
E_n=\hbar\omega(\alpha+1+2n)\quad;\quad n=1,2,... \tag{3.86}
$$

les fonctions d'ondes

$$\Psi_n(y) = \left[\frac{\lambda m_0\omega}{\hbar}\frac{yn!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\right]^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{m_0\omega}{\hbar}y^2}\left[\frac{m_0\omega}{\hbar}y^2\right]^{\frac{\alpha}{2}} L_n^{\alpha}(\frac{m_0\omega}{\hbar}y^2) \qquad (3.87)$$

3.5 Conclusion

Le but de ce chapitre est de traiter suivant l'approche des intégrales de chemin des systèmes non conservatifs, où la masse et le potentiel dépendent tous les deux de la position et du temps par la procédure des transformations canoniques généralisées. L'Hamiltonien qui décrit ces systèmes ayant une forme symétrique à base de l'ordre des opérateurs position et impulsion $\hat{p}$ et $\hat{x}$ qui ne commutent pas.

La construction de propagateur a été effectuée à l'aide de deux transformations canoniques qui ramènent le système décrit à chaque fois par un nouvel Hamiltenien qui régit le mouvement, où il apparait un terme d'un facteur de phase et en plus de l'oscillateur avec masse et fréquence variable.

Finalement, nous avons traité dans l'application un exemple d'un système où la masse et le potentiel choisi sont tous les deux variables (dépendent de la position et du temps), où nous avons trouvé le spectre des énergies et les fonctions d'ondes correspondantes convenablement normalisées.

Conclusion générale

Dans ce travail, nous avons utilisé le formalisme de l'intégrale de chemin de *Feynman* dans les espaces de configuration et l'espace des phases pour traiter, avec une démarche claire, quelques problèmes et systèmes de la mécanique quantique non relativiste, nous avons considéré les systèmes à masse variable et nous les avons étudié par quelques procédures.

Nous avons commencé le premier chapitre par des généralitées sur le formalisme des intégrales de chemin, qui conssiste à construire le propagateur relatif au système non relativiste d'une particule de masse constante a une dimmension. Puit nous avons présenté la méthode de Duru-Kleinert dite méthode des transformations spacio-temporelles qui permet de résoudre le problème des systèmes ayant des singularités au niveau du potentiel étudié, ceci a été suivie par la présentation d'une autre partie consacrée au transformations canoniques généralisées que nous avons utiliser pour traiter des systèmes dissipatifs.

Dans le deuxième chapitre, nous avons étudier par la méthode des transformations spatio-temporelles, dans l'espace des configuration, le problème d'une particule soumise à un potentiel compliqué qui pose une divergence au niveau de l'action, et de masse dépendante de la position qui exige d'utiliser une forme générale de l'opérateur Hamiltonien. Lors du traitement, basé sur la construction de la fonction de Green, nous avons choisis en premier lieu les paramètres d'ambéguités, dans la forme génerale de l'Hamiltonien, et à cause de la non cmmutativité entre les operateurs positions et impulsions, un premier potentiel effectif apparait au niveau de l'action. Ce dernier dépent seulement de la masse et de ses dérrivés. Ensuite nous avons effectué une régularisation du chemin suivie par une transformation ponctuelle qui a engendrée des corrections. Ces dernières se sont manifestées par un deusième potentiel effectif de nature purrement quantique, et nous avons obtenu une action de forme standard à la fin.

L'exemple que nous avons traité par la méthode de *Duru* et *Keinert* a fourni des résultats acceptables, où l'évolution du système étudié est décrit par la fonction de Green, après avoir appliqué les transformations choisits, le spectre des énergies et les fonctions d'ondes relatifs sont déduites et obtenues aisément.

Pour le dernier chapitre, nous avons considéré le problème des systèmes non conservatifs, de masse et de potentiel dépendents du temps et de position. Le traitement se fait dans l'espace des phases où nous avons utilisé la méthode des transformations canoniques généralisées par le moyen de deux transformations canonique successives qui donnent naissance à un potentiel effectif au niveau de l'action. Au niveau de propagateur, il apparait un facteur de phase dépendant seulement de la masse en plus de l'oscillateur harmonique avec fréquence variable. Pour l'application choisit et les transformation posées, nous avons obtenu les spectres des énergies et les fonctions d'ondes relatifs.

Bibliographie

[1] P. M. A Dirac, “The Principles of Quantum Mechanics”, Third Edition, Oxford at the Clarendon Pressse, London, 1958.

[2] R. P. Feynman, Rev. Mod. Phys 20 (1948) 367.

[3] R. P. Feynman, and Hibbs A. R., Quantum Mechanics and Path Integrals (Mc GrawHill, New York, 1965).

[4] D.C. Khandekar and S.V. Lawande, PHYS. REP. 137, (1986) 115.

[5] H.Kleinert, Path integrals in Quantum Mechanics Statistics and Polymer Physics, second edition, World scientific, singapore, new jersy,1995.

[6] I. H. Duru and H. Kleinert, Phys. Lett. B84 (1979) 185.

[7] I. C. H. Duru and H. Kleinert, Fortschritte. Phys. 30 (1982) 401-435.

[8] F. W. Wiegel, Introduction to Path In-tegral Methods in Physics and Polymer Science World Scientific, Singapore, 1990. / A. Inomata, H. Kuratsuji, and C. C. Gerry, Path Integrals and Coherent States of SU(2) and SU(1,1) ,World Scientific, Singapore, 1992. / M. C. Gutzwiller et al,Path Integrals from meV to MeV, Proceedings of the 1985 Bielefeld Conference, World Scientific, Singapore, 1986. / M. S. Swanson, Path Integrals and Quantum Processes ,Academic, New York, 1992. / D. C. Khandekar, S. U. Lawande, and K. V. Bhagwat,Path-Integral Methods and their Applications ,World Scientific, Singapore, 1993. / T. Boudjedaa, L. Chetouani, L. Guechi, T.F. Hammann, J. Math. Phys. 32 (1991) 441 . / L. Chetouani, L. Gue-

chi,T.F. Hammann, A. Lecheheb, J. Math. Phys. 34 (1993) 1257 . / L. Chetouani, L. Dekar ,T.F. Hammann, Phys. Rev.A, 52 (1995) 82

[9] H.Goldstein, "ClassicalMechanics", Second Edition, Addison-Wesley, Reading,Massachusetts,1980.

[10] Munier, J. R. Burgan, M. Feix, and E. Fijalkow, J. Math. Phys. 22, (1981) 1210 / D. Ter Haar, Problems in QuantumMechanics (Pion, London, 1975).

[11] F. Gimbert. Intégrales de chemin et fentes de Young. 2005

[12] An Introduction Into The Feynman Path Integral . C. GROSCHE 1992

[13] A. Messiah, Mecanique Quantique, Edition Dunod, Paris, 1964. /
L. Landau et E. Lifchitz, Mecanique Quantique, Edition Mir, Moscou, 1967.

[14] A. de Souza Dutra, C.A.S. Almeida, Phys. Lett. A275, 25 (2000).

[15] J.Schwinger, phys. Rev.82, (1951) 664.

[16] L. Chetouani, L. Guechi and T. F. Hammann, Phys. Rev. A 40, (1989) 1157.

[17] N.Bouchemla, L.Chetouani, International Journal of Théoretical Physics,57,(2018) 3882–3901

[18] C. Grosche and F. Steiner, Handbook of Feynman Path Integrals (Springer-Verlag, Berlin, 1998).

[19] H. R. Lewis Jr. and W. B. Riesenfeld, J. Math. Phys. 10, (1969)1458.

[20] Namik K . Pak and I. Sokmen, Phys. Rev. A 30, (1984) 1629.

ملخص:

في مذكرة الماستر هذه، وفي الإطار غير النسبي، قدمنا طريقة تكاملات المسار في الفضاء أحادي البعد لجسيم كمي ذو كتلة ثابتة، وكتلة متغيرة تتعلق بالموقع، وكتلة وكمون متعلقان بالموقع والزمن.

خصص الجزء الأول لدراسة أنظمة الجسيمات ذات الكتلة الثابتة من خلال نهج تكاملات المسار.

الجزء الثاني يتمحور حول دراسة حركة الجسيم التي تعتمد فقط على الموضع وتخضع لكمون يطرح مشكلة التفرد، قدمنا تقنية التحويل المكاني-الزماني للعالمين Duru وKleinert للتغلب على مشكلة التباعد (la divergence) التي تسببها هاته الانماط من الكمونات. في البداية اخترنا شكلًا عاما للمؤثر الهاملتوني (L'Hamiltonien). من خلال العمل والتحليل بهذه التقنية تحصلنا على تصحيحات ترجمت على أنها كمون فعال على مستوى الفعل (l'action).

يتعلق الجزء الأخير بدراسة الأنظمة غير التربيعية وذات كتلة وكمون يتعلق كلاهما بالموقع والزمن من خلال طريقة التحويلات القانونية المعممة، والتي هي مزيج من التحويل القانوني والتحويل النقطي أثناء بناء وظيفة جرين(Green).

الكلمات المفتاحية: تكاملات المسار، التحويل المكاني-الزماني، الكمون الفعال، التحويلات القانونية المعممة، وظيفة جرين.

Abstract:

In this master’s thesis, and in the non-relativistic context, we have presented the path integrals method in one-dimensional space for a quantum particle of constant mass, of variable mass depending on position, and of mass and potential depending on position and time.

The first part is devoted to the study of particle systems of constant mass by the approach of path integrals.

The second part is designed to deal with the motion of a particle dependent only on position and subjected to a potential which poses a problem of singularity. We introduced the technic of spatio-temporal transformations of *Duru* and *Kleinert* to overcome the problem of divergence caused by this type of potentials, initially we chose a general form for the Hamiltonian. During this technic we have obtained corrections which translate at the action level into an effective potential.

The last part is concerned with the study of non-quadratic systems of mass and potential depending on position and time by the method of generalized canonical transformations, which is a combination of canonical transformation and point transformation during the construction of Green's function.

Keywords: Path integral, Spatio-temporal transformation, effective potential, Generalized canonical transformations, Green's function.

Résumé :

Dans ce mémoire de master, et dans le cadre non relativiste, nous avons présenté la méthode des intégrales de chemin dans l'espace a une dimension pour une particule quantique de masse constante, de masse variable dépendent de la position, et de masse et potentiel dépendant de la position et du temps.

La première partie consacrer l'étude des systèmes de particule de masse constante par l'approche des intégrales de chemin.

La deuxième partie est réalisée pour traiter le mouvement d'une particule dépendante seulement de la position et soumise à un potentiel pose un problème de singularité. Nous avons introduit la technique des transformations spatio-temporelles de *Duru* et *Kleinert* pour surmonté le problème de divergence à cause de ce type des potentiels, au départ nous avons choisi une forme générale pour l'Hamiltonien. Au cours de cette technique nous avons obtenu des corrections qui se traduisent au niveau de l'action par un potentiel effectif.

La dernière partie concerne l'étude des systèmes non quadratique de masse et de potentiel dépendant de la position et du temps par la méthode des transformations canoniques généralisées, qui est une combinaison de transformation canonique et transformation ponctuelle lors de la construction de la fonction de Green.

Mots clé : Intégrale de chemin, Transformation spatio-temporelle, potentiel effectif, Transformations canoniques généralisées, Fonction de Green