



Réf :/UAMOB/FSNVST/DSA/2022

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME MASTER

Domaine : SM

Filière : PHYSIQUE

Spécialité : Physique Théorique

Présenté par :

Moulla Farida

Thème

Calcul du bruit de courant de chaleur dans les systèmes nanoscopiques dans le cadre de la théorie des liquides de Tomonaga-Luttinger

Devant le jury composé de :

<i>Nom et Prénom</i>	<i>Grade</i>		
<i>M. Benaïche Salim</i>	<i>MAA</i>	<i>Univ. Bouira</i>	<i>Président</i>
<i>M. Zamoum Redouane</i>	<i>MCA</i>	<i>Univ. Bouira</i>	<i>Promoteur</i>
<i>M. Merriche Abderrzak</i>	<i>MCA</i>	<i>Univ. Bouira</i>	<i>Examineur</i>
<i>M. Belghit Slimane</i>	<i>MCB</i>	<i>Univ. Bouira</i>	<i>Examineur</i>

Année Universitaire : 2021/2022

Remerciements

Je remercie avant tout Dieu Allah le tout puissant de m'avoir donné le courage et la motivation pour arriver à ce stade du savoir et de présenter ce modeste travail. Ce fut pour moi une grande chance que de pouvoir préparer et réalisé ce mémoire

Mon premier remerciement s'adresse plus particulièrement à mon promoteur R.ZAMOUM d'avoir accepté d'encadrer ce travail, pour la qualité de son encadrement, de ses compétences et conseils. Ainsi que ses qualités humaines remarquables, et sa présence malgré les circonstances, fut un atout majeur pour la réalisation de ce travail, tant d'un point de vue scientifique que moral

De grand remerciements sont destinés aux membres de jury aux monsieur A.MARRICHE et S.BELGHIT et S.BENAICHE président de jury, d'avoir d'accepté d'examiner mon travail

je remercie également le département de physique

Afin de n'oublier personne, mes vifs remerciements s'adressent à tous ceux qui m'ont aidée à la réalisation de ce modeste mémoire.

Dédicaces

Toutes les lettres ne sauront trouver les mots qu'il faut ..., tous les mots ne sauraient exprimer la gratitude, l'amour, le respect, la reconnaissance, c'est tout simplement que : Je dédie ce modeste travail au premier lieu à : A Ma chère Malika à la place de ma mère : Tu représentes pour moi la source de tendresse et l'exemple de dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager. A Mon cher Père Boubker : Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime, le dévouement et le grand respect que j'ai toujours pour toi. Tu as toujours été mon école de sagesse, de travail, de courage, de patience, de confiance et surtout d'espoir et d'amour. Tes sacrifices, ton soutien moral et matériel, rien au monde ne vaut les efforts fournis jour et nuit pour mon éducation et mon bien être. Ce travail et le fruit de tes sacrifices que tu as consentis pour mon éducation et ma formation le long de ces années. À mon frère Khaled et à ma sœur Rabiaa, pour leur soutiens morale et leurs conseils précieux tout au long de mes études. A toute la promo 2021-2022 ainsi que tous les enseignants de département physique A toutes mes amies. A tous ceux qui me sont chers et que j'ai oublié de citer. Et à toute personne ayant contribué à ce travail de près ou de loin.

A toutes mes chères amies :sonia Silia,kenza,feriel,thassadith

TABLE DES MATIÈRES

1	Généralités	6
1.1	Liquide de Luttinger	7
1.1.1	Propriétés spectrales d'un liquide de Luttinger	8
1.1.2	Exemples de propriétés d'un liquide de Luttinger	8
1.1.3	Compressibilité et susceptibilité de spin	9
1.2	Bruit corrélations	9
1.2.1	Bruit	9
1.2.2	Bruit poissonnien : Formule de Schottky	10
1.2.3	Descriptions du bruit dans le cas quantique	10
1.3	Bruit de chaleur	11
1.4	Bosonisation	11
1.4.1	Champs bosonique	11
1.4.2	Expression du Hamiltonien	14
1.4.3	Expression bosonisée du lagrangien et de l'action	15
1.4.4	Expression sur des liquides de Luttinger	16
1.5	Refermionisation	16
1.5.1	Refermionisation par résolution des équations du mouvement	17
1.5.2	Refermionisation par diagonalisation du Hamiltonien	19
2	Système et modèle	21
2.1	Effet Hall quantique fractionnaire	22
2.1.1	Introduction	22
2.1.2	Modèle Hydrodynamique	23
2.1.3	Quantification	25
2.2	Formalisme	26
2.2.1	Opérateurs de création et d'annihilation bosoniques	26
2.2.2	Champs bosoniques	27
2.2.3	Cas d'un liquide de Luttinger chiral	28
2.2.4	Modèle	29
2.2.5	Refermionisation	30

3	Calcule et résultat	34
3.1	Bruit à fréquence finie	34
	Bibliographie	42

L'effet Hall quantique aussi bien l'entier [1] ou le fractionnaire [2], est l'un des plus importants et remarquables phénomènes physiques découverts récemment. Ce phénomène est fondamental dans le sens qu'il montre la manifestation de la mécanique quantique à des échelles macroscopiques [3]. L'expérience de base a été réalisée pour un gaz d'électrons bi-dimensionnel [1] dans lequel on a observé que la résistivité de Hall présente une série de plateaux sur des valeurs entières du facteur de remplissage ν . Deux années plus tard, la même expérience a été réalisée sur un meilleur échantillon et pour des températures plus basses. Cette fois les plateaux apparaissaient même pour des valeurs fractionnaires de facteur de remplissage ν , et c'était la découverte de l'effet Hall quantique fractionnaire. La première exploration théorique dans l'effet Hall quantique fractionnaire pour un facteur de remplissage du type $1/(2p + 1)$ où p est un entier, a été faite par Laughlin [4]. En effet, il a considéré une condensation des électrons dans un état fondamental spécial, qui est décrit par une fonction d'onde "trial". Ses excitations portent une charge fractionnaire et obéissent à une statistique fractionnaire [5]. Expérimentalement, l'apparition de la charge fractionnaire a été aussi confirmée par des expériences du type Aharonov-Bohm [6, 7], et aussi dans des expériences de mesure de bruit de grenaille [8, 9]. Pour la statistique fractionnaire des quasi-particules, des expériences l'on directement confirmé [10].

On s'intéresse en particulier à l'étude des phénomènes de transport. L'application d'une tension sur un liquide de Luttinger chiral crée un courant aux bords de cet échantillon. Le phénomène le plus intéressant qui se passe est l'interaction entre les états de bord à travers un effet tunnel. En effet, la présence d'une impureté localisée en un point de l'espace crée une rétrodiffusion des électrons. Ce qui est responsable de l'apparition d'un courant de rétrodiffusion entre les états de bord. L'intensité de ce courant dépend de celle de l'effet tunnel.

Dans ce travail nous nous intéressons en particulier aux fluctuations de courant de chaleur. Autrement dit, le bruit thermique. L'importance de cette grandeur réside dans le fait qu'elle est directement liée à la dissipation d'énergie dans le système. De plus, elle est liée aux fluctuations de courant électrique, et donc peut contenir des informations sur le système telles que la charge des porteurs. Par la suite, on considère un liquide de Luttinger chiral en régime de l'effet Hall quantique fractionnaire où le facteur de remplissage $\nu = 1/2$ en présence d'impureté. On considère un échantillon, dans lequel on s'intéresse aux états de bord. On modélise cet échantillon par un système à deux terminaux avec centre diffuseur localisé en $x = 0$. On aura quatre branches, deux branches entrantes et deux sortantes. On s'intéresse au calcul

du bruit thermique non symétrisé à fréquence finie. Le calcul qu'on a effectué est un calcul exact et à température non nulle. Cela repose sur la méthode de refermionisation [12, 13] qui consiste à trouver de nouveaux champs fermioniques qui diagonalisent l'Hamiltonien de rétrodiffusion. Ces nouveaux champs sont solution d'une équation du mouvement régissant le déplacement des particules le long de l'échantillon. Résoudre cette équation permet ensuite d'avoir les expressions exactes des fonctions d'onde que l'on a utilisé pour effectuer nos calculs.

Ce rapport de stage est organisé comme suit : Dans une première partie nous exposons brièvement les outils liés à notre calcul. Nous définissons le bruit avec ses différents types. Nous donnons les bases de la théorie des liquides de Luttinger. Nous détaillons par la suite la méthode de bosonisation et de refermionisation cruciales dans notre calcul. Le second chapitre est dédié aux détails liés à notre système. Dans un premier temps l'effet Hall quantique fractionnaire est exposé. Ensuite, notre système est bien détaillé. Nous terminons cette partie par le modèle étudié, et complètement résolu en terme de fonction d'onde dans le cas d'un facteur de remplissage $\nu = 1/2$. Le dernier chapitre est réservé au calcul du bruit. Un calcul fastidieux, les détails y sont notés.

CHAPITRE 1

GÉNÉRALITÉS

Dans cette partie nous présentons quelques généralités. Nous commençons par la présentation de la théorie des liquides de Luttinger. Théorie qui représente la base de notre système. Nous définissons ensuite le bruit et ses différents types. Nous finirons le chapitre par la présentation de deux outils importants à citer : la bosonisation et la reffermionisation.

1.1 Liquide de Luttinger

Un liquide de Luttinger, ou liquide de Tomonaga-Luttinger, est un modèle théorique décrivant des électrons en interaction ou d'autres fermions dans un conducteur unidimensionnel (par exemple des fils quantiques ou des nano-tubes de carbone). Un tel modèle est nécessaire car le modèle des liquides de Fermi couramment utilisé ne marche pas à une dimension [14, 15]. Thermodynamiquement, cet état est similaire à un liquide de Fermi unidimensionnel (la chaleur spécifique augmente linéairement avec la température et la compressibilité est constante avec la température), mais il diffère des liquides de Fermi en ce que le comportement de la fonction de corrélation de l'état fondamental diminue. La discontinuité dans le niveau de Fermi disparaît dans les lois de puissance exponentielles en distance et en temps c'est-à-dire, dépend explicitement des interactions entre électrons, et dans la fonction de distribution d'énergie des fermions. Cette discontinuité est remplacée par une singularité en loi de puissance, dont l'exposant dépend de l'interaction. La variable d'excitation fondamentale du mode n'est plus une particule fermionique mais des particules bosoniques semblables à des photons acoustiques. Un état de type liquide de Luttinger peut aussi être obtenu avec des bosons en interaction (par exemple dans le modèle de Lieb et Liniger) ou des spins 1/2 ferromagnétiques toujours à une dimension. Dans le cas du dispositif de spin 1/2, le liquide de Luttinger présente des corrections logarithmiques dans la susceptibilité magnétique et dans les fonctions de réponse. L'origine de ces corrections est la présence d'un opérateur marginalement inessentiel dans le Hamiltonien du liquide de Luttinger [14, 15].

Les paramètres u et k sont réalisés à des observations macroscopiques, la chaleur spécifique $C_v = \frac{\pi^2 K_B^2 T}{3u}$, la raideur de chargeur $D = \exp^2 \frac{uk}{\pi}$, et la compressibilité $X = \frac{K}{\pi \hbar n^2 u}$. Après linéarisation, nous avons deux sortes d'électrons : les électrons se déplaçant à droite avec dispersion opératrice de création comme :

$$\alpha^+(k) = \alpha_+^+(k)I(k) + \alpha_-^+(k)I(-k) \quad (1.1)$$

où I est la fonction Heaviside et $\alpha^+(k)$ est l'opérateur de création pour droite ($r = +$) ou gauche ($r = -$) électrons en mouvement qui obéissent aux relations d'anti-commutation :

$$\alpha_r(k), \quad \alpha_r(k) = 0 \quad (1.2)$$

$$\alpha_r^+(k), \quad \alpha_{r'}^+(k') = 0 \quad (1.3)$$

$$\alpha_r^+(k), \quad \alpha_{r'}^+(k') = \delta_{rr'} \delta_{kk'} \quad (1.4)$$

En négligeant les termes constants en énergie, on obtient après linéarisation et extension à toutes les valeurs de k :

$$H_0 = \hbar v_f \sum_k k (\alpha_+^+(k) - \alpha_-^+(k) \alpha_-(k)) \quad (1.5)$$

$$(1.6)$$

qui peut s'écrire simplement sous la forme :

$$H_0 = \hbar v_f \sum_{rk} (rk \alpha_-^+(k) - \alpha_-^+(k) \alpha_-(k))$$

Nous voulons maintenant réécrire cet hamiltonien sans interaction en terme d'opérateur de densité électronique $\rho_r(x) = \Psi_r^+(x)\Psi_r(x)$

$$\Psi_r^+ = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum \exp^{ikx} \alpha_r^+(k) \quad (1.7)$$

$$\psi_r(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_k \exp^{ikx} \alpha_r(k) \quad (1.8)$$

1.1.1 Propriétés spectrales d'un liquide de Luttinger

L'étude du spectre à analyser le comportement de la fonction spectrale propre à la branche $r = +$ lorsque $q > K_f$. $w < 0$ équivalant au spectre de photo-émission et $\omega = 0$ au spectre de photo-émission inverse. La restriction $k >$ on finit pas les informations sur le spectre car les branches $r = \mp$ sont symétrique cela représenté que voire la fonctions spectrale de la branche $r = -$ pour une particule infiltre avec un moment $q < k_f$ signifie le même que celui que nous présentons [16]. Cette situations rappeler les situations croises qui donnant les informations qui sont déjà décrit $q > k_f$ et $r = +$ en pratiquement a une réflexions par rapport à $\omega = 0$ il existe des étude théorique sur la fonctions spectrale qui tiennent compte de la courbure réelle du spectre[16]

1.1.2 Exemples de propriétés d'un liquide de Luttinger

Une fois que vous avez couvert les bases de la bosonisation, voyez comment Ils peuvent simplifier le calcul de certaines informations sur les liquides Luttinger. Les propriétés les plus simples obtenues d'un point de vue informatique apparaissent dans par grandeurs thermodynamiques [?] Système unidimensionnel de fermion en interactions est maintenant décrit par un modèle de bosons libres. La relations de désespérions suivant

$$E(k) = \hbar \sum_j \vartheta_j |k| \quad (1.9)$$

nous intéressons ici à la chaleur spécifique, la compressibilité et la susceptibilité de spin

Chaleur spécifique

définie par la variation de l'énergie en fonction de la température, à pression constante

$$C_\nu(T) = \frac{d}{dt}(E_p f_{B,F} E(p)) \quad (1.10)$$

$f_{B,F} E(p)$ c'est la fonction de distributions bosonique ou fermionique la définitions de l'expression de l'énergie dans la chaleur spécifique pour un système de boson libre

$$C_\nu^B = \left(\frac{\pi k_B}{3}\right) K_B T \sum_j \frac{1}{\nu_j'} \quad (1.11)$$

qui résulte des secteurs de charge de spin. Cette expression est à comparer à la chaleur spécifique d'un gaz de fermions unidimensionnel.

$$C_\nu^B = 2 \left(\frac{\pi k_B}{3}\right) \left(\frac{k_B T}{\nu_F}\right) \quad (1.12)$$

Le facteur 2 représente la prise en compte des deux branche de spectre

1.1.3 Compressibilité et susceptibilité de spin

La compressibilité définit ici le changement de volume, de surface ou de longueur La hauteur d'un solide sous pression. Cependant, nous choisissons de fait en fonction de l'énergie de l'état fondamental par rapport à la densité

$$K^{-1} = \frac{\partial^2 E_0(p)}{\partial \rho_{fil}^2} \quad (1.13)$$

au cas limite aux contributions à variation lente de l'opérateur densité premier terme de l'équation précédente permet d'avoir le rapport entre compressibilité de système de bosons libres et de gaz de fermions

$$\frac{k}{k_0 \left(\frac{\nu_F k_c}{\nu_c} \right)} = k_c^2 \quad (1.14)$$

On peut aussi s'intéresser à la susceptibilité de spin définie

$$X^{-1} = \frac{\partial^2 E_\sigma}{\partial \sigma_{fil}^2} \quad (1.15)$$

1.2 Bruit corrélations

1.2.1 Bruit

Le bruit est souvent considéré comme un signal polluant devant être réduit. Trois sources sont prédominantes le bruit en $1/f$, le bruit thermique et le bruit de grenaille. Le bruit en $1/f$ a pour origine les défauts mobiles capables d'interagir avec les électrons. Il est proportionnel à l'inverse de la fréquence et au carré de la tension appliqué [17, 18, 19]. Le bruit thermique est un bruit hors équilibre puisque il apparaît lorsque une différence de potentiel est appliqué au système. De plus, l'agitation thermique étant à l'origine du changement du nombre d'occupation des niveaux d'énergie d'un système, entraîne l'apparition du bruit Johnson-Nyquist, ou bruit thermique. Contrairement au bruit en $1/f$, le bruit thermique est quant à lui résulte de l'agitation thermique [20, 21]. Au final, le bruit de grenaille (ou shot noise) est une conséquence directe de la quantification de la charge électrique. C'est un bruit qui apparaît lorsqu'une différence de potentiel est appliqué. Il est donc directement relié au transport. Le premier à avoir mis en évidence ce bruit fut Schottky en 1918 [22]. Il montra que dans un tube à vide, deux types de oscillations étaient présentes la première due à l'agitation thermique des électrons et la deuxième due à la discrétisation de ces derniers. Le bruit se calcule par le moyen de la fonction de corrélation courant-courant :

$$C(t) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt' \langle I(t') I(t+t') \rangle \quad (1.16)$$

La densité spectrale de la fonction de corrélation représentent le bruit. Elle est obtenue en calculant sa transformée de Fourier suivante :

$$S(w) = \int d(t) C(t) \exp^{-iwt} \quad (1.17)$$

Notons que cette définition est fondée sur l'hypothèse d'ergodicité. Celle-ci stipule pourquoi les moyennes d'ensemble d'un mécanisme aléatoire I sont équivalentes aux moyennes temporelles pour chaque réalisations $I(t)$.

1.2.2 Bruit poissonnien : Formule de Schottky

Bruit poissonnien ou de Schottky a été découvert en 1918 par Walter Shottky dans les tubes vide. Le courant fluctue autour de sa valeur moyenne en raison de la discrétion des charge. La formule de Schottky s'écrit [22] :

$$S = 2e \langle I \rangle \quad (1.18)$$

Elle permet d'avoir des informations sur la charge actuel des porteurs. Dans le régime de l'effet Hall quantique fractionnaire. La charge effective considérés à la charge des quasi-particule de Laughlin.

1.2.3 Descriptions du bruit dans le cas quantique

Le bruit électrique des dispositifs microscopiques peut être fortement influencé par le mouvement quantique des électrons. Pour sonder cet effet, nous avons mesurés les fluctuations de courant à haute fréquence , en utilisant une jonction tunnel supraconducteur-isolant-supraconducteur comme analyseur de spectre sur puce. En couplant ce détecteur de bruit résolu en fréquence à un dispositif quantique, nous pouvons mesurer le bruit haute fréquence non symétrisé comme démontré pour une jonction Josephson. Le même schéma est utilisé pour détecter les fluctuations de courant résultant d'oscillations de charge cohérentes dans un système à deux niveaux, un subit de charge supraconducteur. Un pic à bande étroite est observé dans la densité spectrale de bruit à la fréquence des oscillations de charge cohérentes.

La densité spectrale de la fonction de corrélations courant-courant s'écrit

$$S_{LL}(\omega) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \exp^{i\omega t} | \langle I(t)I(t+t') \rangle - \langle I(t) \rangle \langle I(t+t') \rangle | \quad (1.19)$$

Dans le cas classique, on remarque que le bruit est symétrique $S_{LL} = S - (\omega), I(t)$ et $I(t+t')$ sont des fonctions et donc commutent. la nature quantique des porteurs de charge cavalant d'être un opérateur hermitien par contre le produits de deux opérateurs n'est pas ce que Landau est que chez fiancées une quantité réelle et comparable ,il faut symétrisé le bruit

$$S_{sym} = \frac{1}{2}(S_+(\omega) + S_-(\omega)) \quad (1.20)$$

ou S_+ et S_- est les densité spectrales non-symétrisées. être compétent de l'état initiale, être de l'état initial $|i\rangle$ et d l'état finale $|f\rangle$, c'est densité-spectrales s'écrivant :

$$S_+(\omega) = 4\pi \sum_{if} | \langle f|I(0)|i \rangle |^2 P(i) \delta(\omega + E_f - E_i) \quad (1.21)$$

$$S_-(\omega) = 4\pi \sum_{if} | \langle f|I(0)|i \rangle |^2 P(i) \delta(\omega + E_i + E_f) \quad (1.22)$$

$P(i)$ représentent la distribution de probabilité des états initiaux.

1.3 Bruit de chaleur

Une grande partie du bruit généré par les moteurs d'avions est lié à la combustion. Afin de réduire cette source de bruit, il est nécessaire de comprendre le phénomène en détail. Deux mécanismes générateurs de bruit issus de la combustion ont été découverts dans les moteurs d'avions dans les années 1970 : le premier est le mécanisme dit direct, qui est directement lié au dégagement de chaleur instable, et le mécanisme dit indirect, qui est lié aux deux interactions entre eux. Les fluctuations de température à l'étage de la turbine et à la sortie de la chambre de combustion sont également produites par la combustion. Des méthodes analytiques et des simulations numériques sont utilisées ici pour montrer l'importance du bruit de combustion indirect par rapport au bruit direct, et pour donner des limites à la validité des méthodes analytiques basées sur l'hypothèse de tuyère compacte. Trois configurations différentes ont été initialement étudiées : les buses quasi-1D, les buses 2D axisymétriques et les aubes de turbine 2D.

Dans les système nanoscopiques, les fluctuations de chaleur résultent de l'agitation thermique des porteurs de charge. Dans un système d'états de bord de l'effet Hall quantique fractionnaire, le courant de chaleur entre deux terminaux (réservoirs) droit et gauche est lié directement à la densité thermique qui s'écrit [23]

$$\phi_{R,L}(x, t) = \frac{\nu}{4\pi} [\delta_x \phi_{R/L}(x, t)]^2 \quad (1.23)$$

Le courant se lit [24, 25]

$$j = \mp \phi_{R/L}(\mp d, t) \quad (1.24)$$

Le bruit de chaleur se calcul d'une façon similaire au bruit de charge. Il suffit de calculer la transformée de Fourier du corrélateur courant-courant de chaleur (voir chapitre trois).

1.4 Bosonisation

1.4.1 Champs bosonique

Introduction de nouveaux champs bosoniques

La séparation spin-charge est l'une des caractéristiques uniques des systèmes unidirectionnels. Pour des raisons pratiques, il est d'usage de définir des champs bosoniques à travers des secteurs de charge ou de spin plutôt que des canaux de conduction. Puis on introduit de nouveaux champs ϕ_j et θ_j tels que [12] :

$$\varphi_{r\theta}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left| \sum_j h_{\theta_j}(x) + r_{\theta_j}(x) \right| \quad (1.25)$$

l'indice j désigne le secteur de charge $j = c$ ou le secteur de spin $j = s$. La fonction h_σ permet le passage entre les deux expressions avec $h_\sigma(c) = 1$ et $h_\sigma(s) = \sigma$. Elle possède les propriétés suivantes :

$$h_\sigma^2 = 1 \quad (1.26)$$

$$h_\sigma(-j) = \sigma h_\sigma(j) \quad (1.27)$$

Les nouveaux champs bosoniques sont définis et obéissent à la relation de commutation suivante [12] :

$$[\phi_j(x), \theta_{j'}(x)]_- = \frac{i}{\sqrt{2}} \delta_{j,j'} \text{sgn}(x - x') \quad (1.28)$$

La bosonisation est une procédure qui permet la description de fermions dans un système unidimensionnel en termes de bosons et repose sur l'idée suivante : les excitations particule-trou ont un caractère bosonique et sont bien définie à la base d'énergie. La bosonisation a fait l'objet de nombreux articles. Comme nous venons de le voir, les excitations élémentaires qui existent dans les systèmes unidimensionnels forment un groupe et s'écrivent en termes d'opérateurs de densité [12]. De ce constat, nous introduisons de nouveaux opérateurs bosoniques qui ne dépendent pas des branches :

$$b_\sigma^+ = i \left(\frac{2\pi}{|q|} \right)^{1/2} [\Theta(q)_{\rho+\sigma}(-q) + \Theta(-q)_{\rho-\sigma}(-q)] \quad (1.29)$$

$$b_\sigma(q) = -i \left(\frac{2\pi}{|q|} \right) [\Theta(q)_{\rho+\sigma} + \Theta(-q)_{\rho-\sigma}(q)] \quad (1.30)$$

où Θ est la fonction de Heavisid. Ces définitions traduisent la situation suivante l'opérateur de création $b_\theta^+(q)$ représente la somme de toutes les paires d'électrons-trous résultant de l'action de l'opérateur de densité pour chaque branche. Ces opérateurs de Bose obéissent aux relations de commutation :

$$[b_\theta(q), b_{\theta'}^+(q')]_- = \delta_{\theta,\theta'} \delta_{q,q'} \quad (1.31)$$

Ces opérateurs autorisent ce durant le nombre de particules sur chaque branche inchangé à partir de ces opérateurs de Bose comme des opérateurs de densité, nous introduisons le champ bosonique suivant :

$$\begin{aligned} \phi_{r\theta}(x) &= \frac{1}{\sqrt{L}} r \left(\frac{2\pi}{|q|} \right)^{1/2} [\rho_{r\theta}(q) \exp^{iqx} + \rho_{r\theta}(-q)] \exp^{-\alpha|q|/2} = \\ & \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{r\rho>0} r \left(\frac{2\pi}{|q|} \right)^{1/2} [b_\theta(q) \exp^{iqx} + b_\theta^+(q)] \end{aligned} \quad (1.32)$$

La constante a est un artefact mathématique introduit pour s'assurer que lorsque $\alpha\beta 0$. Ceci est nécessaire pour l'existence d'un état de compensation énergies négatives dans le spectre linéarisé. Mais c'est plus facile d'économiser est finie et le traite comme une constante du réseau, c'est-à-dire $\lambda - 1$. Notez qu'il existe d'autres façons de formaliser la théorie des champs comme les procédures d'ordre normales, les techniques de pontsplitting. En utilisant la relation de commutations suivante :

$$[\rho_{r\theta}(q) \rho_{r'\theta'}] = \frac{rq}{2\pi} \delta_{r,r'} \delta_{\theta,\theta'} \delta_{q,q'} \quad (1.33)$$

on déduit que

$$[\varphi_{r\theta}(x), \varphi_{r'\theta'}(x')]_- = ir\pi \delta\theta\theta' \text{sgn}(x - x') \quad (1.34)$$

Si deux champs et q sont canoniquement conjugués et si on définit une fonction $[P(x), \exp^{iq(x)}] = \delta(x - x') \exp^{iq(x')}$ du champ q , alors les deux champs vérifient la propriété $[P(x), \exp^{iq(x)}] =$

$\delta(x - x') \exp^{iq(x)}$. L'application de cette propriété aux deux champs φ et ρ permet d'écrire la relations

$$\psi_{r\theta}(x) = f_{r\theta}(x) \exp^{i\varphi_{r,\theta}(x)} \quad (1.35)$$

avec $f_{r,\theta}(x)$ une fonction d'opérateurs qui s'obtient en calculant la valeur moyenne de l'opérateur densité dans la limite $\alpha\beta 0$. Le champ fermionique initial s'écrit en fonctions de l'opérateur bosonique φ en forme

$$\psi_{r\theta}(x) = \frac{F_{r\theta}}{\sqrt{2p\alpha}} \exp^{ik_F(x) + ir\varphi_{r,\theta}(x)} \quad (1.36)$$

Le terme k_f est ici important pour décrire correctement les bandes d'énergie. Opérateur $F_{r,\theta}$ est un opérateur de fermion appelé facteur de Klein. Leur présentation est très vivante support de charge en raison de leurs propriétés fermioniques. Ils permettent donc d'obtenir des relations d'anti-commutations. Ils font également la navette avec les opérateurs de bosonique. Cela garantit la préservation de l'excitation électron-trou. Le facteur Klein obéit aux relations suivantes [13] :

$$F_{r\theta}, F_{r'\theta'}^+ = \delta_{r,r'} \delta_{\theta,\theta'} \quad (1.37)$$

$$F_{r\theta}^+, F_{r'\theta'}^+ = 0 \quad (1.38)$$

$$F_{r\theta} F_{r'\theta'} = 0 \quad (1.39)$$

Il existe une autre équations qui lie le champ bosonique ϕ à l'opérateur densité est exprimée

$$\phi_x = \varphi_R(x) + \varphi_L(x) \quad (1.40)$$

$$\theta(x) = \phi_R(x) - \phi_L(x) \quad (1.41)$$

Notamment, en raison de la séparation spin-charge, le nouveau champ bosonique sera définie par secteur de spin ou secteur de charge. Par conséquent, les champs ϕ et θ doivent être indexés par l'indice $j = c, s$ précise le secteur de charge où on fait pivoter les secteurs séparément. La relation entre le champ ϕ et les champs ϕ_j et θ_j s'écrit :

$$\varphi_{r,\theta}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} h_\theta(j) (\phi_j(x) + r\theta_j(x)) \quad (1.42)$$

avec $h_\theta(c) = 1$ et $h_\theta(s) = 0$ possède les propriétés suivantes :

$$h_\theta^2 = 1 \quad (1.43)$$

$$h_\theta(-j) = \theta_j \quad (1.44)$$

Les nouveaux champs bosoniques obéissent à la relation de commutation suivante

$$[\phi_j(x), \theta_{j'}(x')] = \frac{i}{2} \delta_{j,j'} \text{sgn}(x - x') \quad (1.45)$$

on écrire maintenant le champ fermionique en fonction des deux nouveaux champs bosoniques ϕ et θ

$$\psi_{r,\theta}(x) = \frac{F_{r,\theta}}{\sqrt{2\pi\alpha}} \exp^{ik_F x + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_j h_\theta(j) (\phi_j(x) + r\theta_j(x))} \quad (1.46)$$

Considérons cette expression, qui représente une bonne définition des fermions lié au champ initial ϕ par les champs de bosons ϕ et θ . Ce champ est le même que la densité électronique. Sachant que la densité obéit à l'algèbre Kac-Moody de $U(1)$, alors le stimulus sera de type "sound-like". À basse énergie, dans le domaine de la charge, la corrélation électronique prendra la forme d'une loi de puissance, si nous rajoutons ou supprimons un électron.

1.4.2 Expression du Hamiltonien

Hamiltonien cinétique

L'expression de la partie cinétique du hamiltonien du système s'écrit [12] :

$$[H_0 = \hbar v_F \sum_{r,k,\sigma} r k \alpha_{r\sigma}^+(k) \alpha_{r\sigma}(k) \quad (1.47)$$

nous reformulons ce hamiltonien comme opérateur bilinéaire d'opérateur bosonique et nous intéressons à la relations de commutations suivante

$$[H_0 \rho_{r',\sigma'}(q)]_- = r' \hbar v_F q p_{r',\sigma'}(q) \quad (1.48)$$

Ce résultat, de la linéarisation du spectre signifie que les états créés par l'action de l'opérateur de densité sur un état sont états propres de H_0 d'énergie $v_F q$. En utilisant l'identité de Kronig, on écrit H_0

$$H_0 = \pi \hbar v_F \sum_{q,r,\sigma} (q) \rho_{r\sigma}(q) \rho_{r\sigma}(-q) = \pi v_F \int_{-\infty}^{\infty} dx \sum_{r\sigma} [\rho_{r,\sigma}(x)]^2 \quad (1.49)$$

Donc vous venons d'écrire le hamiltonien cinétique dans deux représentations différents mais équivalentes dont la description était la première motivation sont décrites comme les excitations élémentaires d'une collection d'oscillateurs harmoniques libres.

Hamiltonien d'interaction

La forme générale d'un hamiltonien décrivant une interaction entre deux corps est la suivante [26] :

$$H_{int} = \frac{\hbar}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' V(x-x') \rho_{fil}(x) \rho_{fil}(x') \quad (1.50)$$

Supposons que les interactions sont invariantes d'une part par translation spatiale et à courte portée $V(x-x') = V_0 \delta(x-x')$, et par rotations de spin ρ_{fil} et par rotation de système unidimensionnelle, défini

$$\rho_{fil} = \sum_{r,r',\sigma} \psi^{+r\sigma}(x) \psi_{r\sigma}(x) \quad (1.51)$$

Les indices σ des champs fermionique sont le même en raisons de l'invariance par rapport au spin des particules. Le développement des sommes sur r et r' se dévoile, si en limite les facteurs de , Kelein. Les opérateur de densité sur chaque branche $\rho_{r\sigma}(x)$ ainsi que des terme croisés de produits de champs fermioniques $\psi_{r\sigma}^+ \psi_{-r\sigma}$ dans le cas d'un fil de longueur $L \rightarrow \infty$, g_1 est négligeable l'expression de l'opérateur de densité totale en fonction de champs bosoniques

$$\rho_{fil}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \partial_x \Theta_c(x) + \rho_{2k_F}(x) \quad (1.52)$$

$$\rho_{2k_F}(x) = \frac{2k_F}{\pi} \cos(2k_F + \sqrt{2\pi\theta_c(x)} \cos(\sqrt{2\pi\theta_s(x)})) \quad (1.53)$$

dont la présence des interaction entre électron de chaque branche se déplaçant dans le même canal, dans le cas d'un système unidimensionnel de longueur infinie, cette contribution peut être négligée cette expression reportée dans la définition du hamiltonien d'interaction, on déduit

$$H_{int} = \frac{\hbar V}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\partial_x \theta_c(x))^{1/2} \quad (1.54)$$

$\tilde{V} = V(q \sim 0)$ est le potentiel qui s'accorde au processus faisant intervenir un transfert de moment nul, en fait la somme les hamiltoniens cinétique et d'interaction, on obtient le hamiltonien total d'un liquide de Luttinger [?] :

$$H = \sum_j \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\hbar v_j}{2} [k_j (\partial_x \phi_j(x))^2 + k_j^{-1} (\partial_x \theta_j(x))^2] \quad (1.55)$$

où on définit le paramètre d'interaction coulombienne par secteur

$$k_j = (1 + \frac{2V_0}{v_F \pi} \delta_{cj})^{-1/2} \Leftrightarrow K_s = 1 \quad (1.56)$$

$$k_c = (1 + \frac{2V_0}{v_F \pi})^{-1/2}$$

Si les interactions sont répulsives $k_c < 1$ les excitations de charge se propager à une vitesse v_c supérieure à celle de Fermi, $k_s = 1$ les excitations de spin, se déplacent à la vitesse de Fermi sans subir d'influence de l'environnement.

1.4.3 Expression bosonisée du lagrangien et de l'action

L'origine des fonctions de Green qui correspondre la dynamique des excitations du système en déterminer l'action, il faut d'abord écrire le lagrangien L . On définit l'opérateur $\Pi_j(x, t) = -\partial_x \theta_j(x, t)$. Le calcul du commutateur de ce champ bosonique avec le champ ϕ_j donne :

$$[\phi_j(x, t), \Pi_{j'}(x', t)] = i \delta_{j,j'} \delta(x - x') \quad (1.57)$$

On montre que Π_j et ϕ_j sont canoniquement conjugués, il est possible d'appliquer une transformation de Legendre à l'Hamiltonien et employer le champ $\Pi_j = (x, t)$, et la dérivée temporelle de son conjugué $\partial_t \phi_j$ canonique. Cette transformation donne

$$L = \sum_j \int_{-l/2}^{l/2} dx (-\partial_t \phi_j(x, t) \partial_x \theta_j(x, t)) - H \quad (1.58)$$

On applique les équation d'évolutions $\partial_t \theta_j = i[H, \theta_j]$ et $[\partial_t \phi_j = i[H, \phi_j]]$ nous obtenons les deux relations suivantes :

$$\partial_t \theta_j(x, t) = -v_j(x) k_j(x) \partial_x \phi_j(x, t) \quad (1.59)$$

$$\partial_t \phi_j(x, t) = -\frac{v_j}{k_j(x)} \partial_x \theta_j(x, t) \quad (1.60)$$

Après quelques manipulations, nous obtenons l'expression du lagrangien

$$L = \frac{\hbar}{2} \sum_j \int_{-l/2}^{l/2} dx \left(\frac{1}{\vartheta_j(x)k_j(x)} (\partial_t \theta_j(x, t))^2 - \frac{\vartheta_j(x)}{k_j(x)} (\partial_x \theta_j(x, t))^2 \right) \quad (1.61)$$

Comme l'action $S = \int dt L$, on obtient alors

$$L = \frac{\hbar}{2} \sum_j \int \int_{-l/2}^{l/2} dx \left(\frac{1}{\vartheta_j(x)k_j(x)} (\partial_t \theta_j(x, t))^2 - \frac{\vartheta_j(x)}{k_j(x)} (\partial_x \theta_j(x, t))^2 \right) \quad (1.62)$$

Cette action décrit un oscillateur harmonique dont la vitesse de phase ϑ_j est renormalisée par la présence d'interaction et où θ_j est un champ de déplacement.

1.4.4 Expression sur des liquides de Luttinger

Nous concluons notre introduction à la théorie liquide de Luttinger comme suit : Le rôle de Lagrange dans l'informatique et les systèmes électroniques est lié à aspect. En effet, la dynamique des excitations circulant dans le système est codée fonction de Green déterminée par l'action euclidienne. On définit un nouveau champ bosonique $\Pi_j(x) = -\partial_x \phi_j$. La relations de commutations montrer que un nouveau est le conjuges canonique du champ θ_j

$$[\theta_j(x), \Pi_{j'}(x)]_- = i\delta_{jj'}\delta(x - x') \quad (1.63)$$

Au regard de la nature quadratique du hamiltonien total et en employant la relation précédente, une analogie avec des variables p et q permet de déduire l'expression du lagrangien $L = \int 3dpxq - H$

$$q \longrightarrow \theta, p \longrightarrow \Pi_\theta \Rightarrow L_{lif} = \sum_j \int_{-\infty}^{\infty} dx (-\partial_t \theta_j(x) \partial_x \phi_j(x)) \quad (1.64)$$

Avant d'introduire l'expression bosonisée de l'hamiltonien dans le lagrangien. Nous déterminons, à partir de l'équation d'évolution de Heisenberg et utilisons relation précédente, équations du mouvement pour les champs ϕ_j et θ_j

$$\begin{aligned} \partial_t \theta_j(x, t) &= -\vartheta_j k_j \partial_x \phi_j(x, t) \\ \partial_t \phi_j(x, t) &= \frac{-\vartheta_j}{k_j} \partial_x \theta_j(x, t) \end{aligned} \quad (1.65)$$

L'action $S = \int dt L$ se déduit de l'expérience précédente

$$S_{fil} = \sum_j \int dt \int_{-\text{inf}}^{\infty} dx \frac{1}{2k_j} (\vartheta_j^{-1} (\partial_t \theta_j(x))^2 - \vartheta_j (\partial_x \theta_j(x))^2) \quad (1.66)$$

1.5 Refermionisation

La procédure de refermionisation de référence est une méthode d'analyse du champ de bosonisation Hamiltonien des liquides de Luttinger. La méthode comprend l'introduction de nouveaux. Le champ de fermions s'écrit en fonction du champ de bosons. Ce projet est

purement mathématique et ne fonctionne qu'avec des paramètres d'interaction $K = 1/2$. En fait, c'est le seul autorisé à écrire le champ de bosons initial est transformé en un nouveau champ de bosons chiraux. ces champs permettent de définir de nouveaux fermions avec des coefficients. La transmission dépend de l'énergie et peut résoudre un certain nombre de question exacte. Dans ce paragraphe, nous allons le processus d'ionisation de référence est révélé selon deux méthodes. Le premier comprend en résolvant les équations de mouvement pour les nouveaux fermions, la seconde est la diagonalisation de l'hamiltonien de nouveaux fermions en introduisant des fermions de Majorana. Afin de mieux illustrer la procédure de refermionisation, nous allons considérer un système unidimensionnel avec une impureté localisée d'écrit par un liquide de Luttinger [12].

1.5.1 Refermionisation par résolution des équations du mouvement

En résolvant les équations du mouvement, des méthodes ont été utilisées pour La référence [12] calcule les corrélations actuelles de courant dans les états de bord dans le régime de l'effet hall quantique fractionnaire. Il est également utilisé le référence [26] pour Calculer le courant dans un fil quantiques de longueur finie L connecté à deux réservoir. Cette approche a été décrite par d'autres auteurs tels que Kane et Fisher [13] ont exposé cette méthode. Il est nécessaire de noter que les symboles et les conventions changent parfois d'un auteur à un autre. Dans cette approche, nous nous appuyons sur une représentation bosonisée de l'hamiltonien de liquide de Luttinger en présence d'impuretés. Cette existence se traduit par un terme Rétro-diffusion dans l'hamiltonien. Pour alléger la notation, nous ne considérerons que le secteur de charge. Ainsi, l'Hamiltonien du système s'écrit[27]

$$H = H_L^0 + H_R^0 + \Gamma_B F_L^+ F_R \exp^{i\sqrt{k}[\phi_R(0,t) + \phi_L(0,t)]} + h.c \quad (1.67)$$

ou Γ_B est l'amplitude de rétro-diffusion à l'impureté située en $x = 0$ et $\omega eV/\hbar$ les Hamiltonien H_L^0 et H_R^0 liquide de Luttinger correspondant à l'interaction du champ déplaçant la ligne quantique à gauche à droite respectivement. Introduisons maintenant les nouveaux champs chiraux $\phi_p = \pm$ définie comme

$$\phi_{\pm}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\phi_R(x, t) \mp \phi_L(x, t)] \quad (1.68)$$

Ces champs obéissent à la relation de commutation suivante

$$[\phi_p(x), \phi_{p'}(x')] = -i\pi\delta_{pp'}\text{sgn}(x - x') \quad (1.69)$$

Nous pouvons aussi définir la densité électronique en fonction de ces nouveaux champs

$$\rho_{\pm}(x) = \frac{1}{2\pi}\partial_x\phi_{\pm}(x) \quad (1.70)$$

La transformation précédente est à la base de la procédure de refermionisation, $K = 1/2$ le paramètre d'interactions, on peut remplacer directement ce transformation dans l'expression hamiltonienne. Selon le nouveau champ de bosons, l'hamiltonien prend la forme

$$H = H_+^0 + H_-^0 + \Gamma_B F_+ \exp^{-i\omega_0 t} \exp^{i\phi_+(0,t)} + h.c \quad (1.71)$$

où les Hamiltoniens H_+^0 et H_-^0 sont des Hamiltoniens de liquide de Luttinger s'exprimant en fonction des nouveaux champs ϕ_{\pm} . F_+ est un facteur de Klein. La remarque la plus importante ici est l'hamiltonien est complètement décomposé en deux parties indépendantes. La première partie est H_-^0 sans de rétrodiffusion, parties $2H_+$ s'exprime en fonction du champ ϕ_+ subissant la rétrodiffusion. Nous pouvons définir maintenant un nouveau champ de fermions

$$\psi_+ = \frac{F_+}{\sqrt{2\pi\alpha}} \exp^{i\phi_+}(x) \quad (1.72)$$

La présence du petit facteur F_+ justifie les propriétés fermioniques de la fonction ψ_+ . En réalité, selon la référence [129] $F_+ = C_+ C_+^\dagger$ où l'opérateur C est un fermion auxiliaire. Ces fermions satisfont la relation d'anticommutation $C, C^\dagger = 1$. Une telle expression peut être construite en manipulant le mode zéro du champ bosonique ϕ_{\pm} . Utiliser ensuite l'opérateur habituel de comptage de fermions pour identifier le petit facteur F_+ . Passage de conditions aux limites périodiques à des conditions aux limites anti-périodiques. Dans la théorie des champs conformes. Ces nouveaux champs fermioniques Prochaine relation anti-commutation[27]

$$\psi_+(x), \psi_+^\dagger(x') = \delta(x - x') \quad (1.73)$$

$$\psi_+(x), F = 0 \quad (1.74)$$

Une fois la fonction d'onde définie, on écrit la partie H_+ du Hamiltonien en fonction de ψ_+ :

$$H_+ = \int dx \psi_+^\dagger(x) (-i\partial_x - \omega_0) \psi_+(x) + \int dx \sqrt{2\pi} \delta(x) [\Gamma_B(x) \psi_+(x) F_+ + \Gamma_B^* F_+ \psi_+^\dagger(x)] \quad (1.75)$$

Les équations du mouvement peuvent être obtenues en calculant les différents commutateurs entre les opérateurs ψ_+ , ψ_+^\dagger et F_+ et l'hamiltonien H_+ . L'équation du mouvement à résoudre est définie pour toutes positions $x = 0$ pour un champ ψ_+ en mouvement d'énergie décalée par ω_0 :

$$(i\partial_t + i\partial_x + \omega_0 \psi_+) = 0 \quad (1.76)$$

En $x = 0$ la présence de l'impureté impose une discontinuité. Du fait des conditions aux limites nous désunissons le champ fermionique $\psi_+(0) = (1/2)[\psi_+(0) + \psi_+(0-)]$. La solution de l'équation du mouvement est donnée par

$$\psi_+(x, t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} A_\omega \exp^{i(\omega+\omega_0)x/\nu} \exp^{-i\omega t}, \text{ pour } x < 0 \quad (1.77)$$

$$\psi_+(x, t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} B_\omega \exp^{i(\omega+\omega_0)x/\nu} \exp^{-i\omega t}, \text{ pour } x > 0 \quad (1.78)$$

A_ω et A_ω^\dagger l'opérateur d'annihilation pour les nouveaux fermions dans la région des $x < 0$ obéissant à la relation d'anticommutations $A_\omega, A_{\omega 2}^\dagger = \delta_{\omega 1, \omega 2}$. L'opérateur B_ω et B_ω^\dagger correspond à l'opérateur d'annihilation des nouveaux fermions dans la région des $x > 0$. L'opérateur B_ω s'écrit en fonction des opérateurs A_ω et A_ω^\dagger

$$B_\omega = \frac{1}{2} [t(\omega) A_\omega + r(\omega) A_{-\omega}^\dagger] \quad (1.79)$$

avec l'amplitude de transmission

$$t(\omega) = \frac{i\omega}{i\omega - 4\pi|\Gamma_B|^2} \quad (1.80)$$

et l'amplitude de réflexion

$$r(\omega) = \frac{4\pi|\Gamma_B|^2}{i\omega - 4\pi|\Gamma_B|^2} \quad (1.81)$$

Cette description traduit le fait que de nouveaux fermions atteignant la position $x = 0$. La Rétrodiffusion qui le divise en particules d'énergie ω et trous d'énergie $-\omega$. Les coefficient de transmission $\tau(\omega) = t(\omega)t^*(\omega)$ dépendent de l'énergie.

1.5.2 Refermionisation par diagonalisation du Hamiltonien

Le but de cette méthode est de décrire l'hamiltonien de refermionisation dans une fonction quadratique. Il émet un déclic en diagonalisant de nouveaux fermions basés sur les fermions de Majorana. Cette méthode a été montrée dans la référence et a été utilisée pour calculer la densité. Comparaison des états de fils quantiques contenant des impuretés. Dans un autre travail, Furusaki a utilisé. Cette procédure de calcul de la densité d'états d'un liquide. Egger et Gogolin ont également utilisé cette approche dans la référence [132] pour expliquer cela. Le point de départ est l'expression $H = H_+ + H_-$, les deux parties de cet Hamiltonien sont complètement découplées. Rappelons que $H_- \approx H_-^0$ est une fonction des champs ϕ_- , les champs qui ne subissent pas de rétro-diffusions. La diagonalisation de cette partie de l'Hamiltonien se fait en introduisant la transformation unitaire suivante : $U_- = \exp^{ic-\phi_-}$ avec $c_- = (\frac{\Gamma_F}{2\pi})(2K)^{1/2}$ où Γ_F traduit la diffusions. Nous obtenons alors l'Hamiltonien $H'_- = U_- H_- U_-^{-1}$

$$H_- \approx \nu \int dx (\partial_x \phi_-(x))^2 \quad (1.82)$$

De nouveaux fermions ne traversent pas et n'ont pas besoin d'être introduits ici. Par conséquent, ils ne sont pas modifiés. La deuxième partie de l'hamiltonien est la partie de rétrodiffusion H , qui contient le terme de type liquide de Lüttigner et le terme de rétrodiffusion. La partie diagonalisation se fait en trois étapes. La première étape consiste à récrire l'Hamiltonien en fonction des opérateurs de création et d'annihilation des nouveaux fermions. Pour un file de longueur L nous introduisons l'opérateur suivant

$$c_k = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx}{(2\pi L)^{1/2}} \exp^{ikx} \psi_+(x) \quad (1.83)$$

Il est possible de récrire maintenant l'Hamiltonien en fonction de ces nouveaux opérateurs

$$H_+ = \sum_k [\varepsilon_k c_k^\dagger c_k + \sqrt{\Delta_L \Gamma_B} \sum_k (c^\dagger \exp^{i\theta_B} + c_k \exp^{e-i\theta_B})] \quad (1.84)$$

où $\Delta_L = 2\pi\nu/L$ et θ_B est un phase. La deuxième étape est d'absorber cette phase afin d'obtenir un Hamiltonien quadratique. Cela se fait en introduisant la transformation unitaire

$H'_+ = U_+ H_+ U_+^{-1}$ avec $U_+ = \exp^{i\frac{\pi}{2} \tilde{N}^2 - \theta_B \tilde{N}}$ ou \tilde{N} montrée l'opérateur de nombre de particules cette transformation sur un facteur de Klein multiplié par une phase donne naissance à un fermion de type Majorana d'après la relation suivante

$$U_+(F_+^\dagger \exp^{i\theta_B})U_+^{-1} = F_+^\dagger (i\sqrt{2\alpha_d}) \quad (1.85)$$

Le fermion de Majorana d possède les propriétés d'un fermion de Dirac en matière de relation d'anti-commutation. L'application de cette transformation sur l'Hamiltonien H_+ nous donne alors le résultat suivant

$$H'_+ = \sum_k [\varepsilon_k c_+^\dagger c_k + \sqrt{\Delta_L \Gamma_B} (c_k^\dagger + c_k) (i\sqrt{2}\alpha_d)] \quad (1.86)$$

La troisième et dernière étape consiste à écrire l'Hamiltonien exclusivement en fonction de fermions de Majorana sous forme quadratique. Donc pour un fil de longueur L , il faut récrire l'opérateur c_k en fonction de fermions de Majorana d'après la relation

$$c_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha_k(t) + i\beta_k(t)) \quad (1.87)$$

où les opérateurs α_k et β_k sont deux fermions de Majorana. Grâce à cette écriture l'Hamiltonien se met sous la forme :

$$H'_+ = \sum_{\varepsilon>0} \varepsilon (\alpha_+^\dagger \alpha_k - 1/2) + \sum_{k<0} \varepsilon_K (\beta_k^\dagger \beta_k + 1/2) \quad (1.88)$$

Cette méthode permet de calculer la densité d'états dans une limite asymptotique.

CHAPITRE 2

SYSTÈME ET MODÈLE

Dans ce chapitre nous présentons le système étudié. Il s'agit d'état de bords de l'effet Hall quantique fractionnaire auquel nous appliquons une constriction. Celle-ci est réalisée au moyen d'une tension de grille en une position $x = 0$. Un mapping [28, 29, 30] permet de comparer ce système à un liquide Luttinger en présence d'une impureté en $x = 0$. Le fait que la méthode de fermionisation ne s'applique qu'au cas $K = 1/2$, impose que le calcul n'est valable qu'à une valeur fixe du facteur de remplissage. Dans cette partie nous exposons aussi l'application de la bosonisation et la fermionisation au ce système et nous donnons la solution exacte de ce modèle en terme de fonctions d'onde. Ces même fonctions d'onde qui permettront plus tard de calculer le bruit de chaleur.

2.1 Effet Hall quantique fractionnaire

2.1.1 Introduction

L'effet Hall quantique est l'un des phénomènes les plus importants en physique du solide, découvert dans le siècle dernier. En 1980, Von Klitzing a découvert cet effet dans un gaz bidimensionnel d'électrons soumis à un champ magnétique perpendiculaire [1]. Les états propres dans ce système forment des bandes d'énergie séparées par $\hbar\omega_c$, où ω_c est la fréquence cyclotron. Ces niveaux dits niveaux de Landau sont fortement dégénérés. Le nombre d'états N de chaque niveau est donné par la relation [3]

$$N = \frac{BA}{\phi_0} = An_\phi \quad (2.1)$$

où A est la taille de l'échantillon et B est l'intensité du champ magnétique. ϕ_0 est le nombre de quanta de flux. La densité de quanta de flux $n_\phi = \frac{Bc}{h}$. Le facteur de remplissage de ces niveaux noté ν , est égal au rapport de la densité d'électrons par rapport à la densité de flux.

$$\nu = \frac{n_s}{n_\phi} \quad (2.2)$$

Pour un champ magnétique intense, la résistivité Hall ρ_{xy} présente des valeurs spéciales. En effet, le nombre quantique ν prend des valeurs entières et la résistivité de Hall présente des séries de plateaux. A chacun de ces plateaux on associe une décroissance très importante de la résistivité dissipative $\rho_{xx} \rightarrow 0$. L'expression de la résistivité Hall est donnée par la relation suivante

$$\rho_{xy} = -\frac{1}{\nu} \frac{h}{e^2} \quad (2.3)$$

Ce phénomène est l'effet Hall quantique entier. Cette quantification est indépendante de tout détail microscopique, c'est une manifestation des propriétés du transport pour un système de particules chargées sans interaction soumis à un champ magnétique intense et perpendiculaire [31].

En 1982, Tsui, Stömer et Gossard ont découvert l'effet Hall quantique fractionnaire [2], qui lui correspond à un facteur de remplissage ν ayant des valeurs fractionnaires du type n/m , où m est un entier impair. Ce phénomène a été découvert sur un échantillon de bonne qualité, en appliquant un champ magnétique intense à des températures très basses. Ils ont observé que les plateaux se forment aussi pour des facteurs de remplissage fractionnaire (voir figure 2.1). Par exemple, si on applique un champ magnétique trois fois plus intense que celui appliqué dans le cas de l'effet entier, le niveau de Landau le plus bas sera occupé à $1/3$ uniquement.

Ce phénomène est dû à des interactions coulombiennes intenses et à des corrélations entre électrons. Les particules condensent dans des états quantiques spéciaux décrits par des nombres quantiques fractionnaires, et leur charge est fractionnaire [31]. La statistique qui traite ces particules est aussi fractionnaire [5], et qui est une statistique intermédiaire entre la statistique de Bose et celle de Fermi. Il y'a des conditions expérimentales indispensables pour l'observation de l'effet Hall quantique fractionnaire [31], la première est la considération d'un temps de diffusion τ_0 qui caractérise le désordre et qui satisfait $\tau_0\omega_c \gg 0$. La deuxième est la température qui doit satisfaire $\Delta \geq k_B T$, où Δ est un gap supposé exister qui sépare

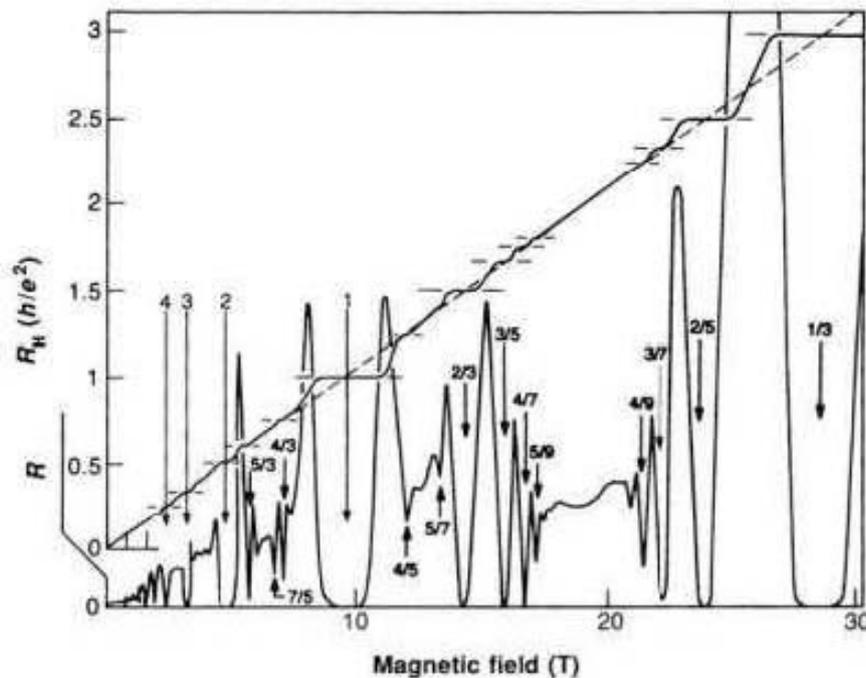


FIGURE 2.1 – La résistivité Hall en fonction du champ magnétique perpendiculaire, les plateaux se forment pour des valeurs entières et fractionnaires du facteur de remplissage ν

les états et qui doit provenir de la répulsion entre particules. La troisième condition est que l'interaction entre particules doit dominer l'effet du désordre. Cela peut être traduit par le fait que le gap doit être supérieur au potentiel de désordre.

Ce qui nous intéresse le plus dans l'effet Hall quantique fractionnaire sont les états de bords. Dans l'échantillon de taille A , les électrons se trouvent confinés dans les bords par des champs électriques. Celui-ci, cause un mouvement de dérive linéaire des centres des orbites circulaire du mouvement cyclotronique des électrons. Ces états de bords constituent des système unidimensionnels intéressants dans lesquels on peut étudier les phénomènes de transport.

2.1.2 Modèle Hydrodynamique

Dans ce modèle introduit par Wen [11], on considère le gaz d'électrons bidimensionnels comme un fluide quantique incompressible. On considère les excitations élémentaires d'une goutte de ce fluide. La densité de ce fluide est considérée comme constante $n_s = \nu n_\phi$. Seules les excitations possibles sont des ondes se propageant dans une direction unique le long du bord de la goutte du fluide. La densité de particule sur le bord est donnée par la relation suivante

$$\rho(x) = n_s h(x) \quad (2.4)$$

où $h(x)$ est la hauteur de déformation de la goutte (voir figure 2.2).

Cette densité satisfait à l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - v \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (2.5)$$

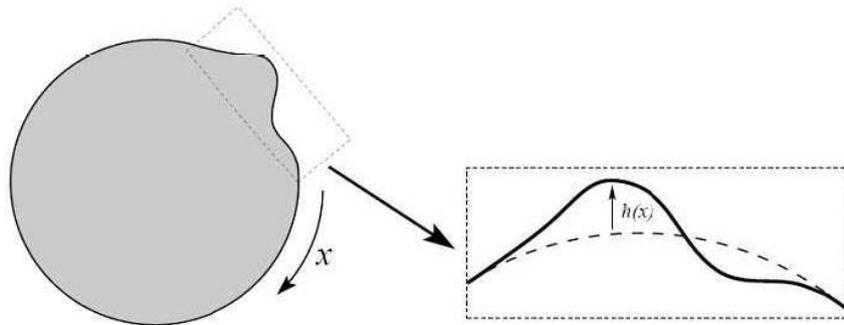


FIGURE 2.2 – Le modèle hydrodynamique. Les excitations sont modélisé par la déformation du bord de la goutte

où v est la vitesse des particules sur le bord. L'énergie est donnée par la relation

$$H = \frac{1}{2} \int_0^L dx V(x) e \rho(x) \quad (2.6)$$

avec $V(x)$ le potentiel électrique. Dans un tel système, le champ électrique est lié au champ magnétique par la relation

$$E = vB \quad (2.7)$$

Le potentiel électrique s'écrit en fonction du champs électrique, on a $V(x) = Eh(x)$. En exploitant alors cette relation et celle qui la précède et en remplaçant $h(x)$ par son expression on peut réécrire l'énergie sous la forme suivante

$$H = \frac{1}{2} \frac{evB}{n_s} \int_0^L dx [\rho(x)]^2 \quad (2.8)$$

La densité électronique dépend de la densité de flux à travers la relation (2.2). En remplaçant dans l'expression de l'énergie on trouve alors

$$H = \frac{1}{2} \frac{hv}{v} \int_0^L dx [\rho(x)]^2 \quad (2.9)$$

Récrivons les expressions de la densité, l'équation de continuité et celle de l'Hamiltonien dans l'espace des nombres d'onde k . Le passage se fait par application d'une transformée de Fourier. La densité s'écrit alors en fonction de k

$$\rho(k) = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_0^L dx e^{ikx} \rho(x) \quad (2.10)$$

L'Hamiltonien s'écrit alors

$$H = \frac{1}{2} \frac{\hbar v}{\nu} \sum_k \rho(k) \rho(-k) \quad (2.11)$$

et enfin l'équation de continuité s'écrit dans l'espace des nombre d'onde

$$\dot{\rho}(k) = -i\nu k \rho(k) \quad (2.12)$$

La construction d'un système Hamiltonien est possible, si l'on considère $\rho(k)$ comme coordonnées généralisée. Le moment conjugué canonique s'obtient à travers les équations de Hamilton

$$p(k) = -\frac{\partial H}{\partial \rho(k)} \quad (2.13)$$

La quantification canonique de ce système Hamiltonien est maintenant possible.

2.1.3 Quantification

La coordonnées généralisées et le moment conjugué définis plus haut, deviennent en quantifiant la théorie des opérateurs canoniquement conjugués. Par conséquent, il satisfont à la relation de commutation suivante

$$[p_k, \rho_{k'}] = i\hbar \delta_{k,k'} \quad (2.14)$$

L'opérateur densité satisfait à la relation de commutation de Kak Moody

$$[\rho_k, \rho_{k'}] = \frac{\nu k}{2\pi} \delta_{k,-k'} \quad (2.15)$$

L'application de la bosonisation (voir section(2.2)) dans ce cas, en introduisant le champ bosonique (voir équation (2.36))

$$\phi(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{L}} \sum_{k>0} \frac{e^{-ak/2}}{k} i [e^{-ikx} \rho_k - e^{ikx} \rho_{-k}] \quad (2.16)$$

le a est un paramètre de régularisation. Ces champs satisfont à la relation de commutation suivante

$$[\phi(x), \phi(x')] = \frac{-i\nu}{4} \text{sign}(x - x')$$

Cela permet de réécrire la densité sous la forme suivante

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\pi}{\sqrt{\nu}} \rho(x) \quad (2.17)$$

et de réécrire aussi l'Hamiltonien qui prend la forme

$$H = \frac{\hbar v}{\nu} \int_0^L \left(\frac{\partial \phi(x)}{\partial x} \right)^2 \quad (2.18)$$

Le commutateur du champ bosonique avec la densité vaut

$$[\phi(x), \rho(x')] = -\frac{i}{\sqrt{4\pi}} \nu \delta(x - x') \quad (2.19)$$

Le but est de construire des opérateurs fermioniques $\psi(x)$, avec $\rho(x) = \psi^\dagger(x)\psi(x)$. Posons alors

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{ik_F x} e^{i\frac{\sqrt{4\pi}}{\nu}\phi(x)} \quad (2.20)$$

L'identification des deux parties d'un anticommutateur $\{\psi(x), \psi(x')\}$, en remplaçant d'abord par leur expression et ensuite en exploitant l'identité de Baker-Campbell-Hausdroff permet d'aboutir au résultat suivant

$$\psi(x), \psi(x') = e^{\pm i\frac{\pi}{\nu}} \psi(x'), \psi(x) \quad (2.21)$$

Pour que cette relation soit une relation d'anticommutation fermionique il faut que le facteur de phase $e^{\pm i\frac{\pi}{\nu}} = -1$. Ce qui implique que le facteur ν doit être l'inverse d'un entier impair $\nu = \frac{1}{2p+1}$, et ceci est un résultat compatible avec le facteur de remplissage dans l'effet Hall quantique fractionnaire.

2.2 Formalisme

Dans les problèmes liés à un liquide de Luttinger chiral, on démarre avec deux groupes de fermions initiaux, des fermions se déplaçant à gauche, de fonction d'onde ψ_L , et des fermions se déplaçant à droite, de fonction d'onde ψ_R . Une telle fonction d'onde s'écrit :

$$\psi_\eta(x) = (2\pi)^{1/2} \int dk e^{-ikx} c_{k\eta} \quad , \eta = L, R \quad (2.22)$$

les $c_{k\eta}$ et $c_{k\eta}^\dagger$ sont respectivement l'opérateur d'annihilation et de création des fermions avec $\{c_{k\eta}, c_{k'\eta'}^\dagger\} = \delta_{kk'}\delta_{\eta\eta'}$. Ces fonctions d'onde satisfont aux relations d'anticommutation usuelles des fermions

$$\{\psi_\eta(x), \psi_{\eta'}^\dagger(x')\} = \delta_{\eta\eta'}\delta(x-x') \quad (2.23)$$

$$\{\psi_\eta(x), \psi_{\eta'}(x')\} = 0 \quad (2.24)$$

On veut bosoniser ces champs fermioniques. Cette bosonisation correspond à une réorganisation de l'espace de Fock. En effet, cela consiste à réécrire la théorie en degrés de libertés bosoniques. Cette procédure est possible pour les systèmes fermioniques à une dimension. La raison est le fait que l'espace de Fock peut être réorganisé comme une somme directe $F = \sum_{\oplus \bar{N}} H_{\bar{N}}$ de tous les espaces de Hilbert $H_{\bar{N}}$ à nombre de particules fixé [12], dans lequel toutes les excitations sont du type pseudo-particule-trou et par conséquent ont un caractère bosonique.

2.2.1 Opérateurs de création et d'annihilation bosoniques

Avant d'introduire les opérateurs de création et d'annihilation bosoniques, regardons l'état du vide correspondant aux fermions initiaux, que l'on note $|\vec{0}\rangle_0$ avec les propriétés

$$c_{k\eta} |\vec{0}\rangle_0 = 0 \quad , k > 0 \quad (2.25)$$

$$c_{k\eta}^\dagger |\vec{0}\rangle_0 = 0 \quad , k \leq 0 \quad (2.26)$$

On définit par rapport à cet état du vide un ordre normal fermionique [12]

$$\dagger ABC\dagger = ABC\dagger - {}_0\langle\vec{0}|ABC\dagger|\vec{0}\rangle_0, \quad ABC \in \{c_{k\eta}, c_{k\eta}^\dagger\} \quad (2.27)$$

Cet état du vide correspond à la référence par rapport à laquelle l'occupation de tous les autres états dans F est spécifiée. L'opérateur nombre de particules est défini par la relation suivante

$$\hat{N}_\eta = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \dagger c_{k\eta}^\dagger c_{k\eta} \dagger = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [c_{k\eta}^\dagger c_{k\eta} - {}_0\langle\vec{0}|c_{k\eta}^\dagger c_{k\eta}|\vec{0}\rangle_0] \quad (2.28)$$

Les opérateurs de création et d'annihilation bosoniques sont définis par les relations suivantes

$$b_{q\eta}^\dagger = \frac{i}{\sqrt{n_q}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{k+q,\eta}^\dagger c_{k\eta} \quad (2.29)$$

$$b_{q\eta} = \frac{-i}{\sqrt{n_q}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{k-q,\eta}^\dagger c_{k\eta} \quad (2.30)$$

où $n_q \in \mathbb{Z}^+$. Pour tout état $|\vec{N}\rangle$, l'état $b_{q\eta}^\dagger |\vec{N}\rangle$ (respectivement $b_{q\eta} |\vec{N}\rangle$) est une combinaison linéaire d'excitations particule-trou par rapport à $|\vec{N}\rangle$. Ces opérateurs satisfont aux relations de commutation suivantes

$$[b_{q\eta}, b_{q'\eta'}] = [b_{q\eta}^\dagger, b_{q'\eta'}^\dagger] = 0 \quad (2.31)$$

$$[b_{q\eta}^\dagger, b_{q'\eta'}] = \delta_{qq'} \delta_{\eta\eta'} \quad (2.32)$$

L'état fondamental bosonique est noté $|\vec{N}\rangle_0$, et correspond à $b_{q\eta} |\vec{N}\rangle_0 = 0$ pour tout q, η . Cet état fondamental ne contient aucune excitation. Par rapport à cet état, on définit l'ordre normal bosonique¹

$$\dagger ABC\dagger = ABC\dagger - {}_0\langle\vec{N}|ABC\dagger|\vec{N}\rangle_0, \quad ABC \in \{b_{q\eta}^\dagger, b_{q\eta}\} \quad (2.33)$$

2.2.2 Champs bosoniques

On définit un champ bosonique comme une somme de Fourier sur les opérateurs $b_{q\eta}^\dagger$ et $b_{q\eta}$. [12]

$$\varphi_\eta(x) = - \sum_{q>0} \frac{1}{\sqrt{n_q}} e^{-ikx} b_{q\eta} e^{-aq/2} \quad (2.34)$$

$$\varphi_\eta^\dagger(x) = - \sum_{q>0} \frac{1}{\sqrt{n_q}} e^{ikx} b_{q\eta}^\dagger e^{-aq/2} \quad (2.35)$$

La combinaison de ces deux champs donne

$$\phi_\eta(x) = \varphi_\eta(x) + \varphi_\eta^\dagger(x) = - \sum_{q>0} \frac{1}{\sqrt{n_q}} \left(e^{-ikx} b_{q\eta} + e^{ikx} b_{q\eta}^\dagger \right) e^{-aq/2} \quad (2.36)$$

1. Il faut noter qu'un ordre normal bosonique est un ordre normal fermionique en prenant $\vec{N} = \vec{0}$

a est un paramètre de régularisation pour éliminer le problème de divergence ultraviolette. La densité électronique prise dans l'ordre normal s'écrit

$$\rho_\eta(x) = \partial_x \phi_\eta(x) + \frac{1}{2\pi} \hat{N}_\eta \quad (2.37)$$

Les champs bosoniques possèdent les relations de commutation suivantes

$$[\varphi_\eta(x), \varphi_{\eta'}(x')] = [\varphi_\eta^\dagger(x), \varphi_{\eta'}^\dagger(x')] = 0 \quad (2.38)$$

$$[\varphi_\eta(x), \varphi_{\eta'}^\dagger(x')] = -\delta_{\eta\eta'} i\pi \text{sign}(x - x') \quad (2.39)$$

Il faut noter que $\psi_\eta(x) \left| \vec{N} \right\rangle_0$ est un état propre de $b_{q\eta}$ et par conséquent, cette représentation est cohérente.

2.2.3 Cas d'un liquide de Luttinguer chiral

Dans un tel système, on considère des électrons sans spin se déplaçant à droite et à gauche de l'échantillon. Le champ fermionique initial total s'écrit

$$\Psi_{phys} = e^{-ik_F x} \psi_L(x) + e^{ik_F x} \psi_R(x) \quad (2.40)$$

Bosoniser ce champ revient à introduire les opérateurs de création et d'annihilation bosoniques afin de redéfinir les champs bosoniques respectif. Les champs bosoniques chiraux s'écrivent

$$\phi_{L/R}(x) = - \sum_{q>0} \frac{1}{\sqrt{n_q}} \left(e^{\pm ikx} b_{q,L/R} + e^{\pm ikx} b_{q,L/R}^\dagger \right) e^{-aq/2} \quad (2.41)$$

La densité s'écrit en ordre normal

$$\rho_{L/R}(x) = \ddagger \psi_{L/R}^\dagger(x) \psi_{L/R}(x) \ddagger = \partial_x \phi_{L/R}(x) + \frac{1}{2\pi} \hat{N}_{L/R} \quad (2.42)$$

L'Hamiltonien dans ce cas s'écrit comme la somme d'un terme cinétique et d'un terme décrivant une interaction électron-électron locale des électrons libres

$$H_0 = H_{cin} + H_{int} \quad (2.43)$$

où

$$H_{cin} = \int \frac{dx}{2\pi} \left[\rho_L^2(x) + \rho_R^2(x) \right] \quad (2.44)$$

ce qui est compatible avec l'Hamiltonien défini dans le modèle hydrodynamique des états de bord (voir équation (2.9))

$$H_{int} = \int \frac{dx}{2\pi} \left[g_2 \rho_L(x) \rho_R(x) + \frac{g_4}{2} \left(\rho_L^2(x) + \rho_R^2(x) \right) \right] \quad (2.45)$$

g_2 et g_4 sont des constantes de l'interaction.

Pour se rapprocher plus de notre cas, on ajoute une impureté en $x = 0$. Cette impureté sera responsable de la rétrodiffusion des électrons au point $x = 0$, ce qui impose un terme supplémentaire de retrodiffusion dans l'Hamiltonien total. L'Hamiltonien total s'écrit alors comme $H = H_0 + H_B$. La diagonalisation de ce nouvel Hamiltonien se fait par la méthode de refemionisation que l'on introduira dans le paragraphe suivant où on abordera le modèle adopté pour notre travail.

2.2.4 Modèle

Comme on l'a précisé avant, on considère un liquide de Luttinger chiral en régime d'effet Hall quantique fractionnaire avec une impureté en $x = 0$ jouant le rôle d'un point diffuseur. La rétrodiffusion se manifeste par un courant tunnel entre les états de bords de l'échantillon. On considère une géométrie à 4 terminaux avec un centre diffuseur au milieu (voir figure 2.3). Au total on a quatre branches, deux entrantes et deux sortantes par rapport au centre diffuseur. Les branches entrantes sont en équilibre par rapport à leurs réservoirs d'origine et sont insensibles à l'effet tunnel.

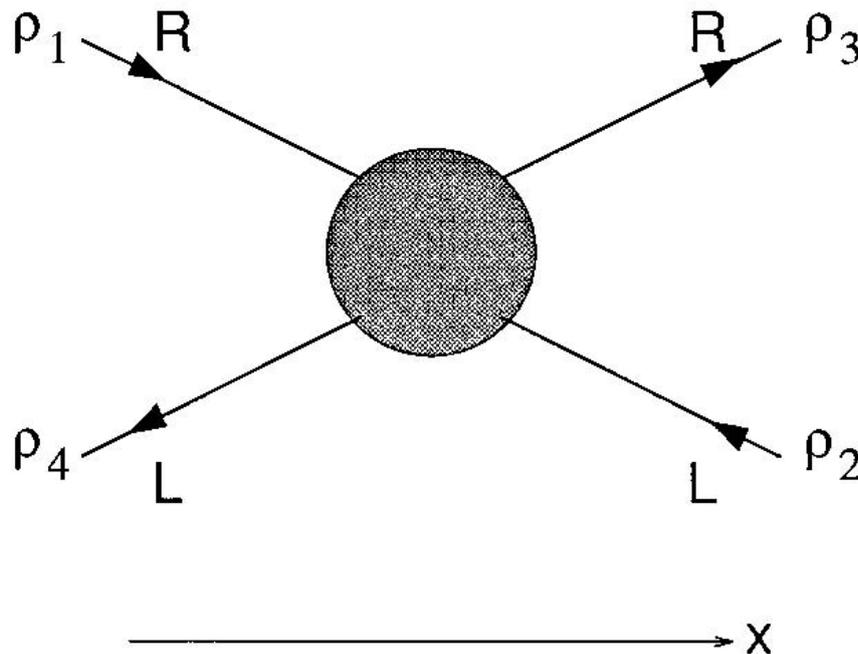


FIGURE 2.3 – les différentes branches se rejoignent où le centre diffuseur est localisé en $x = 0$

Nous allons d'abord introduire l'Hamiltonien total écrit au moyen de champs bosoniques, puis le diagonaliser d'une manière exacte par la méthode de refermionisation de taille finie pour un facteur de remplissage $\nu = 1/2$. Cela permet d'obtenir des équations du mouvement dont la solution sont des fonctions d'onde des nouveaux fermions (après refermionisation), que l'on utilisera dans notre calcul. Commençons d'abord par écrire les nouveaux champs fermioniques en fonction des champs bosoniques $\phi_{L/R}(x)$. Un champ fermionique $\psi_{L/R}$ s'écrit alors [13]² :

$$\psi_{L/R}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} F_{L/R} e^{\mp i\phi_{L/R}(x)} \quad (2.46)$$

Le champ $\phi_{L/R}(x)$ est introduit dans l'équation (2.36). Cette expression provient de la dérivation de l'identité pour les champs bosoniques, en regardant l'action de $\psi_{L/R}$ sur un état quelconque d'excitations électron-trou $|\vec{N}\rangle$. $F_{L/R}$ sont les facteurs de Klein, qui sont des

2. En réalité $\psi_{L/R}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} F_{L/R} e^{\mp i\Phi_{L/R}(x)}$ où $\Phi_{L/R}(x) = \phi_{L/R}(x) + \frac{2\pi}{L}(\hat{N}_{L/R} - \delta_b/2)$. δ_b est un paramètre déterminant les conditions aux limites. A la limite $L \rightarrow +\infty$ $\exp\left(-i\frac{2\pi}{L}(\hat{N}_{L/R} - \delta_b/2)\right)$ peut être négligé et par conséquent $\Phi_{L/R}(x) = \phi_{L/R}(x)$.

opérateurs fermioniques unitaires $F_{L/R}F_{L/R}^\dagger = 1$, et qui satisfont aux relations d'anticommutations suivantes [12]

$$\{F_\eta, F_{\eta'}^\dagger\} = 2\delta_{\eta\eta'} \quad , \forall \eta \quad (2.47)$$

$$\{F_\eta^\dagger, F_{\eta'}^\dagger\} = \{F_\eta, F_{\eta'}\} = 0 \quad , \eta \neq \eta' \quad (2.48)$$

Il faut noter aussi que les facteurs de Klein commutent avec les opérateurs de création et d'annihilation bosoniques

$$[b_{q\eta}, F_{\eta'}] = [b_{q\eta}^\dagger, F_{\eta'}] = [b_{q\eta}, F_{\eta'}^\dagger] = [b_{q\eta}^\dagger, F_{\eta'}^\dagger] = 0 \quad , \forall \eta, \eta', q \quad (2.49)$$

Regardons maintenant l'Hamiltonien total qui s'écrit comme la somme de trois termes

$$H = H_R^0 + H_L^0 + H_B \quad (2.50)$$

L'Hamiltonien de rétrodiffusion est défini au point de diffusion $x = 0$, il est donné par l'expression suivante

$$H_B = \Gamma e^{-i\omega_0 t} \psi_L^\dagger(0) \psi_R(0) + \Gamma^* e^{-i\omega_0 t} \psi_R^\dagger(0) \psi_L(0) \quad (2.51)$$

$\omega_0 = \frac{e^* V_0}{\hbar}$ où V_0 est la tension appliquée aux bords de l'échantillon avec $e^* = \nu e$ où $\nu = 1/2$. Γ est l'amplitude tunnel. En remplaçant les fonctions d'onde par leurs expressions données en (2.46) on obtient [26]

$$\begin{aligned} H &= H_R^0 + H_L^0 + \frac{1}{2\pi a} \Gamma e^{-i\omega_0 t} F_L^\dagger F_R e^{\frac{i}{\sqrt{2}}[\phi_R(t,0) + \phi_L(t,0)]} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi a} \Gamma^* e^{i\omega_0 t} F_R^\dagger F_L e^{\frac{-i}{\sqrt{2}}[\phi_R(t,0) + \phi_L(t,0)]} \end{aligned} \quad (2.52)$$

2.2.5 Refermionisation

Considérons maintenant la transformation suivante [12]

$$\phi_\mp(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\phi_R(t, x) \pm \phi_L(t, x)] \quad (2.53)$$

Les densités électroniques pour ces nouveaux champs chiraux s'écrivent

$$\rho_\pm = \frac{1}{2\pi} \partial_x \phi_\pm \quad (2.54)$$

et sont liées aux anciennes densités par les relations

$$\rho_\pm(t, x) = \rho_R(t, x) \pm \rho_L(t, -x) \quad (2.55)$$

L'Hamiltonien pour ces nouveaux champs s'écrit :

$$H = H_+^0 + H_-^0 + \frac{1}{2\pi a} \Gamma e^{-i\omega_0 t} F_- e^{i\phi_-(t,0)} + \frac{1}{2\pi a} \Gamma^* e^{i\omega_0 t} F_-^\dagger e^{-i\phi_-(t,0)} \quad (2.56)$$

où $F_- = F_L^\dagger F_R$ sont les nouveaux facteurs de Klein avec la propriété $\{F_-, F_-^\dagger\} = 2$. On remarque que l'Hamiltonien se décompose en deux parties découplées $H = H_+ + H_-$ où $H_+ = H_+^0$ est un Hamiltonien libre.

Intéressons nous maintenant à la partie sans retrodiffusion de l'Hamiltonien $H_0 = H_+^0 + H_-^0$, sous une forme plus explicite cette partie s'écrit [32]

$$H_0 = \int \rho_L^2(x) dx + \int \rho_R^2(x) dx + \int \rho_{totale}(x) V(x) dx \quad (2.57)$$

où $V(x)$ est le potentiel qui intervient dans la partie interaction de cet Hamiltonien. Introduisant maintenant les nouvelles densités ρ_{\pm} à travers les relations suivantes

$$\rho_R(x) = \frac{1}{2}(\rho_+(x) + \rho_-(x)) \quad (2.58)$$

$$\rho_L(x) = \frac{1}{2}(\rho_+(-x) - \rho_-(-x)) \quad (2.59)$$

La partie interaction de cet Hamiltonien devient alors

$$H_{int} = \int \rho_+(x) \left(\frac{V(x) + V(-x)}{2} \right) dx + \int \rho_-(x) \left(\frac{V(x) - V(-x)}{2} \right) dx \quad (2.60)$$

En prenant $V(x) = \frac{-V_0}{2}$ et $V(-x) = \frac{V_0}{2}$ on obtient en final (voir figure 2.4)

$$H_{int} = \frac{-V_0}{2} \int \rho_-(x) dx \quad (2.61)$$

ce qui montre que seul ρ_- est couplée à la tension appliquée.

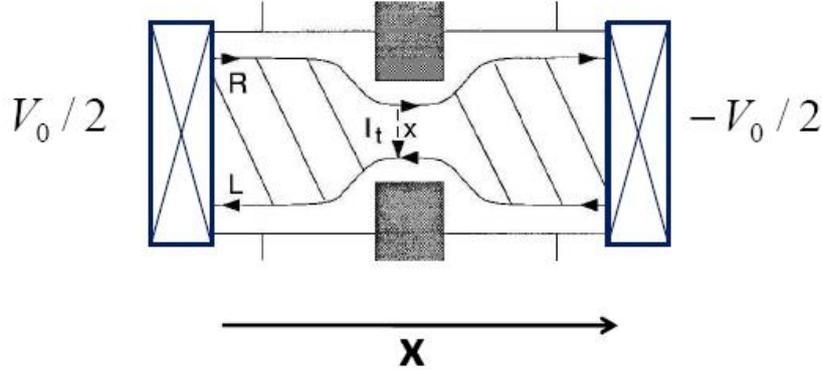


FIGURE 2.4 – schéma de l'échantillon pour des tensions des réservoirs $V(x) = \frac{-V_0}{2}$ et $V(-x) = \frac{V_0}{2}$

Regardons maintenant l'Hamiltonien $H_- = H_-^0 + H_B$. Par analogie à la relation (2.46), on définit un nouveau champ fermionique ψ_-

$$\psi_-(x) = \frac{1}{2\pi a} F_- e^{i\phi_-(t,x)} \quad (2.62)$$

Par conséquent, on peut réécrire l'Hamiltonien H_- sous la forme suivante

$$H_- = \int dx \{ \psi_-^\dagger(x) \left[-i \frac{\partial}{\partial x} - \omega_0 \right] \psi_-(x) + \sqrt{2\pi} \delta(x) \left[\Gamma \psi_-(x) + \Gamma^* \psi_-^\dagger(x) \right] \} \quad (2.63)$$

Ces nouveaux champs satisfont aux relations d'anticommutation suivantes :

$$\{\psi_-^\dagger(x), \psi_-(x')\} = \delta(x - x') \quad (2.64)$$

$$\{\psi_-(x), F_-\} = 0 \quad (2.65)$$

La densité ρ_- s'écrit en fonction des nouveaux champs fermioniques simplement comme $\rho_-(x) = \ddagger\psi_-^\dagger(x)\psi_-(x)\ddagger$. Grâce à ces nouveaux champs on peut écrire les équations du mouvement suivantes [26]

$$-i\partial_t\psi_-(x) = [H_-, \psi_-(x)] = \left(-i\frac{\partial}{\partial x} - \omega_0\right)\psi_-(x) + \sqrt{2\pi}\delta(x)\Gamma^* \quad (2.66)$$

$$-i\partial_t\psi_-^\dagger(x) = [H_-, \psi_-^\dagger(x)] = \left(i\frac{\partial}{\partial x} - \omega_0\right)\psi_-^\dagger(x) - \sqrt{2\pi}\delta(x)\Gamma \quad (2.67)$$

Pour $x \neq 0$, les champs ψ_- satisfont à l'équation du mouvement suivante

$$(i\partial_t + i\partial_x + \omega_0)\psi_- = 0 \quad (2.68)$$

En $x = 0$, il existe une discontinuité causée par la présence de l'impureté en ce point. Le champ alors en $x = 0$ doit être donné par $\frac{\psi_-(0^+) + \psi_-(0^-)}{2}$. La solution de l'équation (2.68) est donnée par les relations suivantes [26]

$$\psi_-(x_-) = \sum_{\omega} A_{\omega} e^{i(\omega+\omega_0)x} e^{-i\omega t}, \quad \forall x_- \in \mathbb{R}_-^* \quad (2.69)$$

$$\psi_-(x) = \sum_{\omega} B_{\omega} e^{i(\omega+\omega_0)x} e^{-i\omega t}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad (2.70)$$

et

$$\psi_-^\dagger(x_-) = \sum_{\omega} A_{-\omega}^\dagger e^{i(\omega-\omega_0)x} e^{-i\omega t}, \quad \forall x_- \in \mathbb{R}_-^* \quad (2.71)$$

$$\psi_-^\dagger(x) = \sum_{\omega} B_{-\omega}^\dagger e^{i(\omega-\omega_0)x} e^{-i\omega t}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad (2.72)$$

où l'opérateur B_{ω} s'écrit en fonction des opérateurs d'annihilation A_{ω} et de création $A_{-\omega}^\dagger$ des nouveaux fermions, en terme de coefficients de réflexion et de transmission

$$B_{\omega} = \frac{1}{2} \left[(1 + e^{i\phi(\omega)}) A_{\omega} + (1 - e^{i\phi(\omega)}) A_{-\omega}^\dagger \right] \quad (2.73)$$

où $e^{i\phi(\omega)} = \frac{i\omega + 4\pi|\Gamma|^2}{i\omega - 4\pi|\Gamma|^2}$. Les opérateurs A_{ω} et $A_{-\omega}^\dagger$ satisfont à la relation de d'anticommutation suivante :

$$\{A_{\omega_1}, A_{\omega_2}^\dagger\} = \delta_{\omega_1, \omega_2} \quad (2.74)$$

L'interprétation qui peut être donnée des solutions obtenues, est qu'une particule incidente d'énergie ω , provenant de la région $x < 0$, en équilibre avec son réservoir d'origine, subit une rétrodiffusion sur l'impureté en $x = 0$ et donne une particule d'énergie ω et un trou d'énergie $-\omega$ dans la région $x > 0$ (voir figure 2.5). La définition d'un état du diffusion est liée à l'hypothèse que tous les états qui quittent le réservoir sont en équilibre avec lui. Le réservoir a une énergie ω_0 , ce qui implique que tous les états dans la région $x < 0$ d'énergie

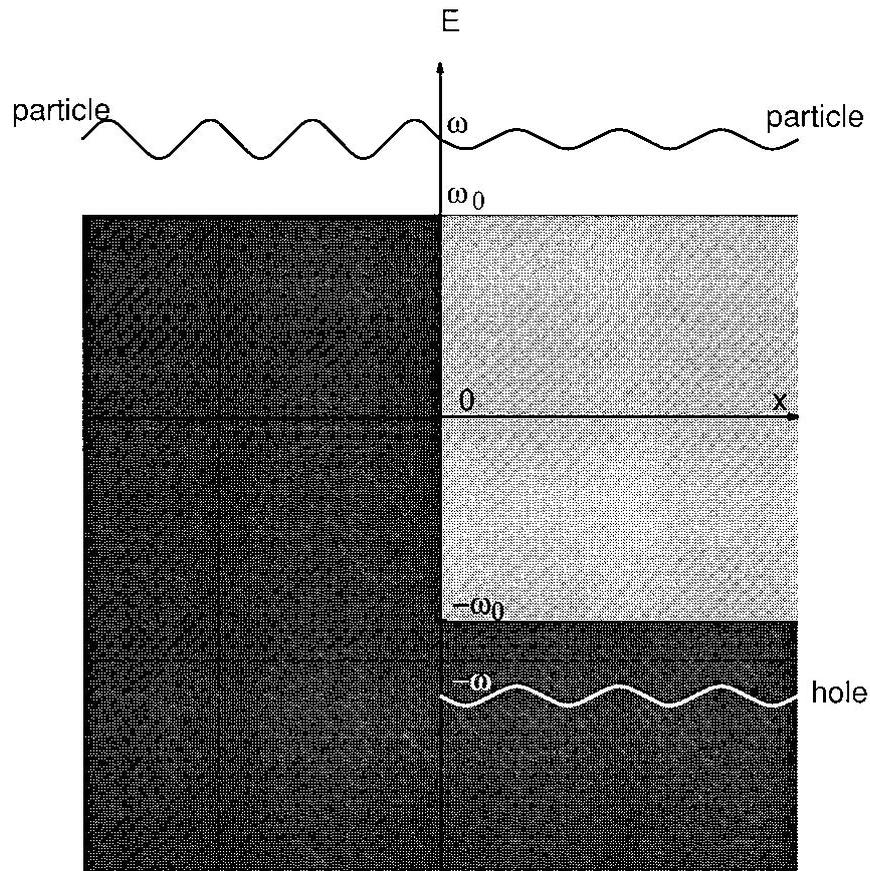


FIGURE 2.5 – diffusion de la particule provenant de la région des $x < 0$ d'énergie ω , en $x = 0$ en une particule d'énergie ω et d'un trou d'énergie $-\omega$.

inférieure à ω_0 sont remplis à température nulle. Par conséquent, on peut définir un état de diffusion $|\Phi\rangle$ qui satisfait les relations suivantes

$$A_{\omega}^{\dagger} |\Phi\rangle = 0 \quad \omega < \omega_0 \quad (2.75)$$

$$A_{\omega} |\Phi\rangle = 0 \quad \omega > \omega_0 \quad (2.76)$$

A partir de la relation (2.74), on obtient le résultat suivant

$$\langle \Phi | A_{\omega_1} A_{\omega_2} | \Phi \rangle = 0 \quad (2.77)$$

$$\langle \Phi | A_{\omega_1}^{\dagger} A_{\omega_2} | \Phi \rangle = n_{\omega_1} \delta_{\omega_1, \omega_2} \quad (2.78)$$

n_{ω_1} est la fonction de distribution de Fermi-Dirac, à température nulle elle vaut

$$n_{\omega} = \begin{cases} 1 & \omega < 0 \\ 0 & \omega > 0 \end{cases} \quad (2.79)$$

et à température non nulle, elle est donnée sous la forme suivante :

$$n_{\omega} = \frac{1}{e^{\beta(\omega - \omega_0)} + 1} \quad (2.80)$$

où $\beta = 1/k_B T$.

3.1 Bruit à fréquence finie

Le bruit de chaleur est défini comme la transformée de Fourier du corrélateur courant-courant de chaleur. Il s'écrit :

$$S(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \delta I(0) \delta I(t) \exp^{iwt} dt \rangle \quad (3.1)$$

où le corrélateur vaut :

$$\delta I = I - \langle I \rangle$$

avec le courant de chaleur qui s'écrit en terme de la densité de chaleur :

$$I_{R/L} = \pm \nu \tilde{\rho}_{R/L}(x; t)$$

Le produit des corrélateurs donne :

$$\delta I(0) \delta I(t) = I(0)I(t) - \langle I \rangle^2 \quad (3.2)$$

Notons que $\langle I \rangle^2$ s'élimine avec avec partie déconnecté du bruit. Ce qui donne au final :

$$S(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(x, 0) \tilde{\rho}(x, t) \exp^{iwt} dt \quad (3.3)$$

En $x = 0$ une rétrodiffusion se produit, ceci implique pour $x < 0$ on dispose de porteur de charge libre. Pour $x > 0$ les porteurs de charge subissent la rétrodiffusion (voir la fin du chapitre deux). Remarquons que la densité de chaleur est le carré de la densité de charge $\tilde{\rho} = e^2 \psi^+ \psi \psi^+ \psi$. Ce qui conduit à calculer quatre contributions où chacune comprend huit fonctions d'onde. Les quatre contributions sont les suivantes :

$$C_1 = \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp^{iwt} \langle \tilde{\psi}^+(-x, 0) \tilde{\psi}(-x, 0) \tilde{\psi}^+(-x, t) \tilde{\psi}(-x, t) \rangle \quad (3.4)$$

$$psi^+(-x, 0) \psi(-x, 0) \psi^+(-x, t) \psi(-x, t) \rangle$$

$$C_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp^{iwt} \langle \tilde{\psi}^+(x, 0) \tilde{\psi}(x, 0) \tilde{\psi}^+(x, 0) \tilde{\psi}(x, 0) \rangle \quad (3.5)$$

$$psi^+(x, 0) \psi(x, 0) \psi^+(x, 0) \psi(x, 0) \rangle$$

$$C_3 = \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp^{iwt} \langle \tilde{\psi}^+(-x, 0) \tilde{\psi}(-x, 0) \tilde{\psi}^+(x, t) \tilde{\psi}(x, t) \rangle \quad (3.6)$$

$$psi^+(-x, 0) \psi(-x, 0) \psi^+(x, t) \psi(x, t) \rangle$$

$$C_4 = \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp^{iwt} \langle \tilde{\psi}^+(x, 0) \tilde{\psi}(x, 0) \tilde{\psi}^+(x, t) \tilde{\psi}(x, t) \rangle \quad (3.7)$$

$$psi^+(x, 0) \psi(x, 0) \psi^+(x, t) \psi(x, t) \rangle$$

Physiquement, les quatre contributions représente respectivement : C_1 c'est un autocorrelateur LL (de gauche), C_2 est la corrélation croisée RL, C_3 est la corrélation croisée LR, et C_4 est l'autocorrelateur RR (de droite)

Calculons la contribution C_1 . Commençons par remplacer les fonctions d'onde obtenues en fin du chapitre deux :

$$C_1 = \frac{\nu^4 e^2}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt dw_1 dw_2 \dots dw_3 \exp^{i(-w_1+w_2-w_3+w_4-w_5+w_6-w_7+w_8+\frac{e\nu}{\hbar})\frac{x}{\nu_F}} \quad (3.8)$$

$$* \exp^{it(-w_5+w_6-w_7+w_8+w)} \langle a_{w_1}^+ a_{w_2} a_{w_3}^+ a_{w_4} a_{w_5}^+ a_{w_6} a_{w_7}^+ a_{w_8} \rangle$$

D'après le théorème de wick existe, il existe 4 contribution connectées :

$$\langle a_{w_1}^+ a_{w_4} \rangle \langle a_{w_2} a_{w_3}^+ \rangle \langle a_{w_5}^+ a_{w_8} \rangle \langle a_{w_6} a_{w_7}^+ \rangle \quad (3.9)$$

$$\langle a_{w_1}^+ a_{w_8} \rangle \langle a_{w_2} a_{w_7}^+ \rangle \langle a_{w_3}^+ a_{w_6} \rangle \langle a_{w_4} a_{w_5}^+ \rangle \quad (3.10)$$

$$\langle a_{w_1}^+ a_{w_6} \rangle \langle a_{w_2} a_{w_5}^+ \rangle \langle a_{w_3}^+ a_{w_8} \rangle \langle a_{w_4} a_{w_7}^+ \rangle \quad (3.11)$$

$$\langle a_{w_1}^+ a_{w_8} \rangle \langle a_{w_2} a_{w_5}^+ \rangle \langle a_{w_3}^+ a_{w_6} \rangle \langle a_{w_4} a_{w_7}^+ \rangle \quad (3.12)$$

Ces contributions sont complètement identique, avec $\langle a_w^+ a_{w'} \rangle = f(\hbar w) \delta(w, w') \langle a_w a_{w'}^+ \rangle = (1 - f(\hbar w)) \delta(w, w')$. Ceci permet de réécrire la contribution C_1 sous la forme suivante :

$$C_1 = \frac{\nu^4 e^2}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt dw_1 dw_2 \dots dw_3 \exp^{i(-w_1+w_2-w_3+w_4-w_5+w_6-w_7+w_8+\frac{e\nu}{\hbar})\frac{x}{\nu_F}} \quad (3.13)$$

$$* \exp^{it(-w_5+w_6-w_7+w_8+w)} \langle a_{w_1}^+ a_{w_8} \rangle \langle a_{w_2} a_{w_5}^+ \rangle \langle a_{w_3}^+ a_{w_6} \rangle \langle a_{w_4} a_{w_7}^+ \rangle$$

intègre par rapport à t permet d'avoir :

$$C_1 = \frac{\nu^4 e^2}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dw_1 dw_2 \dots dw_3 \exp^{i(-w_1+w_2-w_3+w_4-w_5+w_6-w_7+w_8+\frac{e\nu}{\hbar})\frac{x}{\nu_F}} \quad (3.14)$$

$$* \exp^{i(-w_5+w_6-w_7+w_8+w)} \langle a_{w_1}^+ a_{w_8} \rangle \langle a_{w_2} a_{w_5}^+ \rangle \langle a_{w_3}^+ a_{w_6} \rangle \langle a_{w_4} a_{w_7}^+ \rangle$$

donc $\delta(w - w_5 + w_6 - w_7 + w_8) \implies w_8 = w' = -w + w_5 + w_6 w_7$

$$C_1 = C_1 = \frac{\nu^4 e^2}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dw_1 dw_2 \dots dw_3 \exp^{i(-w_1 + w_2 - w_3 + w_4 - w_5 + w_6 - w_7 + w_8 + \frac{e\nu}{\hbar}) \frac{x}{\nu_F}} \quad (3.15)$$

$$\langle a_{w_1}^+ a_{w''} \rangle \langle a_{w_2} a_{w_5}^+ \rangle \langle a_{w_3}^+ a_{w_6} \rangle \langle a_{w_4} a_{w_7}^+ \rangle$$

\longrightarrow

$$w_5 = w' + w + w_6 - w_7$$

$$w_7 = w' + w + w_6 - w_5$$

$$\longrightarrow w_5 = w_7 \text{ et note : } w_7 = w_5 = w'' = w' + w + w_6 - w_5$$

$$w_6 = w'' - w' + w_5 \text{ on pose } \tilde{w} = w'' + w' - w \implies w_6 = \tilde{w} + w_5 = \tilde{w} + w''$$

$$C_1 = \frac{\nu^4 e^2}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dw_1 dw_2 \dots dw' \exp^{i \frac{x}{\nu_F} (-w' + w_2 - w_3 + w_4 + \frac{e\nu}{\hbar})} f(w') (1 - f(w_2)) \delta_{w_2, w''} \\ * f(w_3) \delta_{w_3, (\tilde{w} + w'')} \quad (3.16)$$

on pose : $w_6 - w_5 = w'' - w' - w = \tilde{w}$

$\longrightarrow w'' = \tilde{w} + w' + w$ nous obtenus enfin :

$$C_1 = \frac{\nu^4 e^2}{4\pi^2} \int dw' \int d\tilde{w} f \hbar w' + \frac{e\nu}{2} [1 - f \hbar (\tilde{w} + \hbar w' + \hbar w) + \frac{e\nu}{2}] f((2\tilde{w} + w' + w) + \frac{e\nu}{2}) \\ * [1 - f(\hbar(\tilde{w} + w' + w) + \frac{e\nu}{2})] \quad (3.17)$$

calculer C_2

$$C_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp^{iwt} \langle \tilde{\psi}^+(x, 0) \tilde{\psi}(x, 0) \tilde{\psi}^+(x, 0) \tilde{\psi}(x, 0) \rangle \quad (3.18)$$

$$psi^+(x, 0) \psi(x, 0) \psi^+(x, 0) \psi(x, 0) \rangle$$

$$C_2 = \frac{\nu^4 e^2}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt dw_1 dw_2 \dots dw_8 \exp^{i(w_1 - w_2 + w_3 - w_4 + w_5 - w_6 + w_7 - w_8)} * \exp^{it(w_5 - w_6 + w_7 - w_8 + w)} \\ \langle a_{w_1}^+ b_{w_8} \rangle \langle a_{w_2} b_{w_7}^+ \rangle \langle a_{w_3}^+ b_{w_6} \rangle \langle a_{w_4} b_{w_5}^+ \rangle \quad (3.19)$$

D'après le théorème de wick il existe 4 contribution connectées

$$\langle a_{w_1}^+ a_{w_4} \rangle \langle a_{w_2} a_{w_3}^+ \rangle \langle b_{w_5}^+ b_{w_8} \rangle \langle b_{w_6} b_{w_7}^+ \rangle \quad (3.20)$$

$$\langle a_{w_1}^+ b_{w_8} \rangle \langle a_{w_2} b_{w_7}^+ \rangle \langle a_{w_3}^+ b_{w_6} \rangle \langle a_{w_4} b_{w_5}^+ \rangle \quad (3.21)$$

$$\langle a_{w_1}^+ b_{w_6} \rangle \langle a_{w_2} b_{w_5}^+ \rangle \langle a_{w_3}^+ b_{w_8} \rangle \langle a_{w_4} b_{w_7}^+ \rangle \quad (3.22)$$

$$\langle a_{w_1}^+ b_{w_8} \rangle \langle a_{w_2} b_{w_5}^+ \rangle \langle a_{w_3}^+ b_{w_6} \rangle \langle a_{w_4} b_{w_7}^+ \rangle \quad (3.23)$$

$$C_2 = \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp^{iwt} \langle \tilde{\psi}^+(x, 0) \tilde{\psi}(x, 0) \tilde{\psi}^+(x, 0) \tilde{\psi}(x, 0) \rangle \quad (3.24)$$

$$psi^+(x, 0) \psi(x, 0) \psi^+(x, 0) \psi(x, 0) \rangle$$

on a $b_w = t(w)a_w + r(w)a_{-w}^+ \implies b^+(w) = t^*(w)a_w^+ + r^*(w)a_{-w}$

$t(w)$ et $r(w)$ représente les amplitudes de transitions de réflexion respectivement. Développons d'abord les valeurs moyennes

$$\begin{aligned} \langle a_{w_1}^+ b_{w_8} \rangle &= \langle a_{w_1}^+ (b_w = t(w_8)a_{w_8} + r(w_8)a_{w_8}^+) \rangle \\ \langle a_{w_2} b_{w_7}^+ \rangle &= \langle a_{w_2} (b^+(w_7) = t^*(w_7)a_{w_7}^+ + r^*(w_7)a_{-w_7}) \rangle \\ \langle a_{w_3}^+ b_{w_6} \rangle &= \langle a_{w_3}^+ (b_{w_6} = t(w_6)a_{w_6} + r(w_6)a_{-w_6}^+) \rangle \\ \langle a_{w_4} b_{w_5}^+ \rangle &= \langle a_{w_4} (b^+(w) = t^*(w)a_w^+ + r^*(w)) \rangle \end{aligned}$$

donc C_2

$$C_2 = \frac{\nu^4 e^2}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt dw_1 dw_2 \dots dw_8 \exp^{i(w_1 - w_2 + w_3 - w_4 + w_5 - w_6 + w_7 - w_8)} * \exp^{it(w_5 - w_6 + w_7 - w_8 + w)}$$

$$\langle a_{w_1}^+ b_{w_8} \rangle \langle a_{w_2} b_{w_7}^+ \rangle \langle a_{w_3}^+ b_{w_6} \rangle \langle a_{w_4} b_{w_5}^+ \rangle \quad (3.25)$$

en intègre par rapport à dt

$$C_2 = \frac{\nu^4 e^2}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dw_1 dw_2 \dots dw_8 \exp^{i(w_1 - w_2 + w_3 - w_4 + w_5 - w_6 + w_7 - w_8)} * \exp^{i(w_5 - w_6 + w_7 - w_8 + w)} \quad (3.26)$$

$$\langle a_{w_1}^+ b_{w_8} \rangle \langle a_{w_2} b_{w_7}^+ \rangle \langle a_{w_3}^+ b_{w_6} \rangle \langle a_{w_4} b_{w_5}^+ \rangle$$

\longrightarrow

$$w_5 = w' + w + w_6 - w_7$$

$$w_7 = w' + w + w_6 - w_5$$

$$\longrightarrow w_5 = w_7 \text{ et on note : } w_7 = w_5 = w'' = w' + w + w_6 - w_5$$

$$w_6 = w'' - w' + w_5 \text{ on pose } \tilde{w} = w'' + w' - w \longrightarrow w_6 = \tilde{w} + w_5 = \tilde{w} + w''$$

$$C_2 = \frac{\nu^4 e^2}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dw_1 dw_2 \dots dw_8 \exp^{i(w_1 - w_2 + w_3 - w_4 + w_5 - w_6 + w_7 - w_8)} * \exp^{i(w_5 - w_6 + w_7 - w_8 + w)} \quad (3.27)$$

$$t(w_8) \langle a_{w_1}^+, a_{w_8} \rangle r^*(w_7) \langle a_{w_2} a_{-w_7}^+ \rangle t(w_6) \langle a_{w_3}^+ a_{w_6} \rangle r^* \langle a_{w_4} a_{-w_5}^+ \rangle$$

$$C_2 = \frac{\nu^4 e^2}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dw_1 dw_2 \dots dw_8 \exp^{i(w_1 - w_2 + w_3 - w_4 + w_5 - w_6 + w_7 - w_8)} * \exp^{i(w_5 - w_6 + w_7 - w_8 + w)}$$

$$t(w'' + \tilde{w} - w) f(w'' + \tilde{w} - w) \delta(w_1, (w'' + (\tilde{w} - w))) t(\tilde{w}) f(\tilde{w} + w'') \quad (3.28)$$

$$\delta(w_3, \tilde{w} + w'') r^*(w'') (1 - f(w'')) \delta(w_3, w_6)$$

$$r^*(-w'') (-w'') (1 - f(-w'')) \delta(w_4, -w'')$$

On obtient à la fin :

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{\nu^4 e^2}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dw'' f((\hbar w'' + 2(\tilde{w}) - w) + \frac{e\nu}{2}) \\ &\quad (1 - f(\hbar w'' + \frac{e\nu}{2})) [t(w'' + \tilde{w} - w) t(\tilde{w}) \\ &\quad \quad \quad + r^*(w'') r^*(-w'')] \end{aligned} \quad (3.29)$$

Calcule C_3

$$C_3 = \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp^{iwt} \langle \tilde{\psi}^+(-x, 0) \tilde{\psi}(-x, 0) \tilde{\psi}^+(x, t) \tilde{\psi}(x, t) \rangle \quad (3.30)$$

$$psi^+(-x, 0) \psi(-x, 0) \psi^+(x, t) \psi(x, t) \rangle$$

$$C_3 = \frac{\nu^4 e^2}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt dw_1 dw_2 \dots dw_8 \exp^{i(w_1+w_2-w_3+w_4-w_5+w_6-w_7+w_8)} * \exp^{it(w_5-w_6+w_7-w_8+w)} \langle a_{w_1}^+ a_{w_2} b_{w_3}^+ b_{w_4} a_{w_5}^+ a_{w_6} b_{w_7}^+ b_{w_8} \rangle \quad (3.31)$$

d'après la théorème de WICK :exists 4 contributions connectées

$$\langle a_{w_1}^+ b_{w_4} \rangle \langle a_{w_2} b_{w_3}^+ \rangle \langle a_{w_5}^+ b_{w_8} \rangle \langle a_{w_6} b_{w_7}^+ \rangle \quad (3.32)$$

$$\langle a_{w_1}^+ b_{w_8} \rangle \langle a_{w_2} b_{w_7}^+ \rangle \langle b_{w_3}^+ a_{w_6} \rangle \langle b_{w_4} a_{w_5}^+ \rangle \quad (3.33)$$

$$\langle a_{w_1}^+ a_{w_6} \rangle \langle \langle a_{w_2} a_{w_5}^+ \rangle \langle b_{w_3}^+ b_{w_8} \rangle \rangle \langle b_{w_4} b_{w_7}^+ \rangle \quad (3.34)$$

$$\langle a_{w_1}^+ b_{w_8} \rangle \langle a_{w_2} a_{w_5}^+ \rangle \langle b_{w_3}^+ a_{w_6} \rangle \langle b_{w_4} b_{w_7}^+ \rangle \quad (3.35)$$

$$C_3 = \frac{\nu^4 e^2}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt dw_1 dw_2 \dots dw_8 \exp^{i(w_1+w_2-w_3+w_4-w_5+w_6-w_7+w_8)} * \exp^{it(w_5+w_6-w_7-w_8-w)} \langle a_{w_1}^+ b_{w_8} \rangle \langle a_{w_2} b_{w_7}^+ \rangle \langle b_{w_3}^+ a_{w_6} \rangle \langle b_{w_4} a_{w_5}^+ \rangle \quad (3.36)$$

→

$$w_5 = w' + w + w_6 - w_7$$

$$w_7 = w' + w + w_6 - w_5$$

$$\rightarrow w_5 = w_7 \text{ et on note : } w_7 = w_5 = w'' = w' + w + w_6 - w_5$$

$$w_6 = w'' - w' + w_5 \text{ on pose } \tilde{w} = w'' + w' - w \rightarrow w_6 = \tilde{w} + w_5 = \tilde{w} + w''$$

$$C_3 = \frac{\nu^4 e^2}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt dw_1 dw_2 \dots dw_8 \exp^{i(w_1+w_2-w_3+w_4-w_5+w_6-w_7+w_8)} * \exp^{it(w_5+w_6-w_7+w_8-w)} t(w_8) \langle a_{w_1}^+, a_{w_8} \rangle r^*(w_7) \langle a_{w_2} a_{-w_7}^+ \rangle t(w_6) \langle a_{w_3}^+ a_{w_6} \rangle r^* \langle a_{w_4} a_{-w_5}^+ \rangle \quad (3.37)$$

$$C_3 = \frac{\nu^4 e^2}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt dw_1 dw_2 \dots dw_8 \exp^{i(w_1+w_2-w_3+w_4-w_5+w_6-w_7+w_8)} * \exp^{it(w_5+w_6-w_7+w_8-w)} t(w'' - \tilde{w} + w) f(w'' - \tilde{w} + w) \delta(w_1, (w'' - (\tilde{w} + w))) t(\tilde{w}) f(\tilde{w} + w'') \delta(w_3, \tilde{w} - w'') r^*(-w'') (1 - f(-w'')) \delta(-w_3, w_6) r^*(w'') (-w'') (1 - f(w'')) \delta(w_4, w'') \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned}
C_3 = 4 \frac{\nu^4 e^2}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dw'' f(\hbar w'' - 2(\hbar \tilde{w} + \hbar w) + \frac{e\nu}{2}) \\
(1 - f(\hbar w'' + \frac{e\nu}{2})) [t(w'' - \tilde{w} + w)t(\tilde{w}) \\
+r^*(-w'')r^*(w'')]
\end{aligned} \tag{3.39}$$

On remarque que $C_2 = C_3$, ceci montre que les corrélations croisées sont réelles.
Calcul C_4 :

$$\begin{aligned}
C_4 = \frac{\nu^4 e^2}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt dw_1 \dots dw_8 \exp^{i(w_1+w_2-w_3+w_4-w_5+w_6-w_7+w_8+\frac{e\nu}{\hbar})\frac{x}{\nu_F}} \\
\exp^{it(w_1+w_2-w_3+w_4-w_5+w_6-w_7+w_8+w)} \langle b^+(w_1)b(w_2)b^+(w_3)b(w_4)b^+(w_5)b(w_6)b^+(w_7)b(w_8) \rangle
\end{aligned} \tag{3.40}$$

D'après la théorème de Wick, il existe quatre contributions connectées

$$\begin{aligned}
&\langle\langle b^+(w_1)b(w_4) \rangle\rangle \langle\langle b(w_2)b^+(w_3) \rangle\rangle \langle\langle b^+(w_5)b(w_8) \rangle\rangle \langle\langle b(w_6) \rangle\rangle \\
&\langle\langle b^+(w_1)b(w_8) \rangle\rangle \langle\langle b(w_2)b^+(w_7) \rangle\rangle \langle\langle b^+(w_3)b(w_6) \rangle\rangle \langle\langle b(w_4)b^+(w_5)b(w_6) \rangle\rangle \\
&\langle\langle b^+(w_1) \rangle\rangle \langle\langle b(w_6) \rangle\rangle \langle\langle b(w_2)b^+(w_5) \rangle\rangle \langle\langle b^+(w_3)b(w_8) \rangle\rangle \langle\langle b(w_4)b^+(w_7) \rangle\rangle \\
&\langle\langle b^+(w_1)b(w_8) \rangle\rangle \langle\langle b(w_2)b^+(w_7) \rangle\rangle \langle\langle b^+(w_3)b(w_6) \rangle\rangle \langle\langle b(w_4)b^+(w_7) \rangle\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_4 = \frac{\nu^4 e^2}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt dw_1 \dots dw_8 \exp^{i(w_1+w_2-w_3+w_4-w_5+w_6-w_7+w_8+\frac{e\nu}{\hbar})\frac{x}{\nu_F}} \\
\exp^{it(w_1+w_2-w_3+w_4-w_5+w_6-w_7+w_8+w)} \langle\langle b^+(w_1)b(w_8) \rangle\rangle \langle\langle b(w_2)b^+(w_7) \rangle\rangle \langle\langle b^+(w_3)b(w_6) \rangle\rangle \langle\langle b(w_4)b^+(w_7) \rangle\rangle
\end{aligned} \tag{3.41}$$

développement des valeurs moyenne

$$\langle\langle b^+(w_1)b(w_8) \rangle\rangle = (t^*(w_1)a_{w_1}^+ + r^*a_{-w_1})(t(w_8)a_{w_8} + r(w_8)a_{-w_8}) \tag{3.42}$$

$$\langle\langle b(w_2)b^+(w_7) \rangle\rangle = (t(w_2)a_{w_2} + r(w_2)a_{-w_2})(t^*(w_7)a_{w_7}^+ + r_{w_7}^*a_{-w_7}) \tag{3.43}$$

$$\langle\langle b^+(w_3)b(w_6) \rangle\rangle = (t^*(w_3)a_{w_3}^+ + r_{w_3}^*a_{-w_3})(t(w_6)a_{w_6} + r(w_6)) \tag{3.44}$$

$$\langle\langle b(w_4)b^+(w_7) \rangle\rangle = t(w_4)a_{w_4} + r(w_4)(t^*(w_7)a_{w_7}^+ + r_{w_7}^*a_{-w_7}) \tag{3.45}$$

$$\langle\langle b^+(w_1)b(w_8) \rangle\rangle \langle\langle b(w_2)b^+(w_7) \rangle\rangle \langle\langle b^+(w_3)b(w_6) \rangle\rangle \langle\langle b(w_4)b^+(w_7) \rangle\rangle = t^*(w_1)t(w_8)t(w_2)t^*(w_7)$$

$$t^*(w_3)t(w_6)t(w_4)t^*(w_7) \langle\langle a^+(w_1)a(w_8) \rangle\rangle \langle\langle a(w_2)a^+(w_7) \rangle\rangle \langle\langle a^+(w_3)a(w_6) \rangle\rangle \langle\langle a(w_4)a^+(w_7) \rangle\rangle$$

$$t^*(w_1)t(w_8)t(w_2)t^*(w_7) \langle\langle a^+(w_1)a(w_8) \rangle\rangle$$

$$\langle\langle a(w_2)a^+(w_7) \rangle\rangle \langle\langle r^*(w_3)r(w_6)r(w_4)r^*(w_5) \rangle\rangle \langle\langle a^+(w_3)a(w_6) \rangle\rangle \langle\langle a(w_4)a^+(w_7) \rangle\rangle \langle\langle r^*(w_1)r(w_8)r^*(w_7)r^*$$

$$(w_3)r(w_6))r(w_4)r^*(w_5) \langle\langle a_{w_1}a_{-w_8}^+ \rangle\rangle \langle\langle a_{w_2}a_{-w_7}^+ \rangle\rangle \langle\langle a_{w_3}a_{-w_6}^+ \rangle\rangle \langle\langle a_{-w_4}a_{w_5}^+ \rangle\rangle
\end{aligned} \tag{3.46}$$

donc :en intègre par rappport à dt

$$\begin{aligned}
C_4 &= \frac{\nu^4 e^2}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dw_1 \dots dw_8 \exp^{i(w_1+w_2-w_3+w_4-w_5+w_6-w_7+w_8+\frac{e\nu}{\hbar})\frac{x}{\nu_F}} \\
&\quad \exp^{i(w_1+w_2-w_3+w_4-w_5+w_6-w_7+w_8+w)} \\
&\quad t^*(w_1)t(w_8)t(w_2)t^*(w_7)t^*(w_3)t(w_6)t(w_4)t^*(w_7) < a_{w_1}^+ a_{w_8} > < a_{w_2} \\
&\quad a_{w_7}^+ > < a_{w_3}^{+3} a_{w_6} > < a_{w_4} a_{w_5}^+ > r^*(w_1)r(w_8)r^*(w_7)r^* \\
&\quad (w)_3 r(w_6))r(w_4)r^5(w_5) < a_{w_1} a_{-w_8}^+ > \\
&\quad < a_{w_2}^+ a_{-w_7} > < a_{w_3} a_{-w_6}^+ > < a_{-w_4}^+ a_{w_5} >
\end{aligned} \tag{3.47}$$

On utilise le même changement de variable

$$\begin{aligned}
C_4 &= \frac{\nu^4 e^2}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dw_1 \dots dw_8 \exp^{i(w_1+w_2-w_3+w_4-w_5+w_6-w_7+w_8+\frac{e\nu}{\hbar})\frac{x}{\nu_F}} \\
&\quad \exp^{i(w_1+w_2-w_3+w_4-w_5+w_6-w_7+w_8+w)} \\
&\quad f(w_1)\delta(w_1, w')(1 - f(w_2))\delta(w_2, w'') \\
&\quad f(w_3)\delta(w_3, (\tilde{w} + w''))t^*(w_1)t(w_8)t(w_2)t^*(w_7)t^*(w_3)t(w_6)t(w_4)t^*(w_7) \\
&\quad +(1 - f(w_1))\delta(w_1, w')f(w_2)\delta(w_2, w'')(1 - f(w_3))\delta(w_3, \tilde{w} + w'')f(w_4)\delta(w_4, w'') \\
&\quad r^*(w_1)r(w_8)r^*(w_7)r^*(w_3)r(w_6))r(w_4)r_{w_5}^*(w_5) \\
C_4 &= \frac{\nu^4 e^2}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dw' \int d(\tilde{w}) \exp^{\tilde{w}(w+w'')} f(\hbar w' \\
&\quad (1 - f(\hbar w'' + \frac{e\nu}{2})) + (1 - f(\hbar w' + \frac{e\nu}{2}))f(\hbar w'' \\
&\quad (1 - f(\tilde{w} + w'')) + \frac{e\nu}{2})f(\hbar w'' + \frac{e\nu}{2}) \times [t^*(w_1)t(w_8)t(w_2)t^*(w_7)t^*(w_3)t(w_6)t(w_4)t^*(w_7) + r^*(w_1)r(w_8)r^* \\
&\quad (w)_3 r(w_6))r(w_4)r^*
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Le bruit totale est obtenu par la somme de toute les contributions :

$$S_\omega = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 \tag{3.50}$$

Il faut noter que le résultat final s'obtient en exécutant l'intégrale double obtenu dans les quatre contributions. Cette intégration se fait numériquement.

Dans ce travail nous avons présenté une étude hors équilibre pour un système d'états de bord de l'effet Hall quantique fractionnaire. Cette étude consiste à calculer la densité spectrale ou bruit de chaleur non symétrisé à fréquence finie. Le résultat obtenu est exact, non perturbatif, valable pour toute fréquence, tension appliqué, et pour toute température. Le modèle est obtenu grâce à un mapping. Le mapping permet de faire l'équivalence entre le système d'états de bords en présence de tension de grille, et un liquide de Luttinger chiral en présence d'impureté. Le calcul exacte est obtenu par l'application de la bosonisation et la refermionisation. L'inconvénient est le fait que cette méthode n'est valable que pour un paramètre d'interaction $K = 1/2$ équivalent à une valeur unique du facteur de remplissage ν de l'effet Hall. La résolution complète du modèle permet d'obtenir les fonctions d'onde des nouveaux fermions.

Les fonctions d'onde obtenues permettent de calculer le bruit de chaleur. Celui-ci se compose de quatre contributions. Chacune de ces contributions est calculer au moyen du théorème de Wick où on garde que les termes connectés. L'intégration successive permet d'obtenir le résultat final. La densité spectrale obtenue dépend de la fréquence, la tension appliquée, et de la température. Les amplitudes de transmission et de réflexion traduisent la présence d'une rétrodiffusion au niveau du point $x = 0$ représentant la position de l'impureté.

- [1] K. von Klitzing, G. Dorda, M. Pepper, Phys. Rev. Lett. **45**, 494 (1980).
- [2] D. C. Tsui, H. Stömer, and A. C. Grossard, Phys. Rev. Lett. **48**, 1559 (1982).
- [3] S. M. Gervin, Introduction to the Fractional Quantum Hall Effect, Séminaire Poincaré 2 (2004).
- [4] R. B. Laughlin, Phys. Rev. Lett. **50**, 1395 (1983).
- [5] D. Arovas, J. R. Schieffer, and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **53**, 722 (1984).
- [6] H. L. Stömer, Physica B**177**, 401 (1992).
- [7] V. J. Goldman and B. Su, Science **267**, 1010 (1995)
- [8] G. P. Collins, Phys. Today, Nov 1997, p.17.
- [9] L. Saminadayar and D. C. Glattli, Phys. Rev. Lett. **79**, 2526 (1997).
- [10] F. E. Camino, Wei Zhou, and V. J. Goldman, Phys. Rev. **B72**, 075342 (2005).
- [11] X. G. Wen, Phys. Rev. **B41**, 12838 (1990).
- [12] J. von Delft and H. Schoeller, [cond-mat/9805275v3].
- [13] C. L. Kane, Lectures on Bosonization, Boulder summer school (2005).
- [14] S. Tomonaga, Prog. Theo. Phys. **5**, 544 (1950).
- [15] J.M. Luttinger, J. Math. Phys. **4**, 1154 (1963).
- [16] A. Crépieux, cours, école des Houches.
- [17] P. Dutta and M. P. Horn. Rev. Mod. Phys., **53**, 497 (1981).
- [18] M. B. Weissman, Rev. Mod. Phys., **60**, 537 (1988).
- [19] S. Feng, P. A. Lee and A. D. Stone, Phys. Rev. Lett. **56**, 1960 (1986).
- [20] J. B. Johnson, Phys. Rev. **32** :97 (1928).
- [21] H. Nyquist, Phys. Rev. **32** :97 (1928).
- [22] W. Schottky, Annalen der Physik, **57**, 541 (1918).
- [23] C. L. Kane, and M. P. A. Ficher, Phys. Rev. Lett. **76**, 17 (1996).
- [24] F. Ronetti, M. Acciai, D. Ferraro, J. Rech 2, T. Jonckheere, T. Martin, and M. Sassetti, Entropy **21**, 730 (2019).

- [25] F. Ronetti, M. Acciai, D. Ferraro, J. Rech 2, T. Jonckheere, T. Martin, and M. Sasseti, Phys. Rev. B **99**, 205406 (2019).
- [26] C. de C. Chamon, D. E. Freed, X. G. Wen, Phys. Rev. B **53**, 4033 (1996).
- [27] R. Zamoum, A. Crépieux, et I. Safi, Phys. Rev. B **85**, 125421 (2012).
- [28] I. Safi et H. Saleur, Phys. Rev. Lett. **93**, 126602 (2004).
- [29] X. G. Wen, Phys. Rev. B **41**, 12838 (1990).
- [30] I. Safi et P. Joyez, Phys. Rev. B **84**, 205129 (2011).
- [31] R. E. Prange, S. M. Girvin, The Quantum Hall Effect, Springer-Verlag (1990).
- [32] C. de C. Chamon, D. E. Freed and X. G. Wen, Phys. Rev. B **51**, 2363 (1995).

Abstract

In this work we calculate the non-symmetrized finite frequency thermal noise. Our système is the edge states of fractionnal quantum Hall effect with gate voltage. The system is mapped into a chiral Luttinger liquid with impurity loclized in the ceter. The bosonisation and the refermionisation procedures allows us to obtain wave functions required to our calculation. The obtained result is exact and valuable for all frequency, gate voltage, qnd temperature ranges. However, the result is valuable only for $K=1/2$ of the interaction parameter which is equivqlent to q unique value of filling factor ν .

Résumé

Ce travail est dédié au calcul du bruit de chaleur non symétrisé à fréquence finie. Le système d'états de bords de l'effet Hall quantique fractionnaire est mappé à un liquide de Luttinger chiral en présence d'impureté. Les outil employés sont la bosonisation et la refermionisation qui permettent l'obtension des fonctions d'onde requise pour le calcu du bruit. Le résultat obtenu est exacte et valable pour toute fréquence, tension, et température. Cependant, il n'est valable que pour une valeur $K=1/2$ du paramètre d'interaction équivalent à une valeur unique du facteur de remplissage

الملخص

في هذا العمل تم حساب الضوضاء المتعلقة بتواتر غير معدوم بالنسبة لحلة في مفعول هال الكسري. هذه الجملة توافق سائل لوتينجر بوجود شائبة في المركز. لهذا الغرض نستعمل تقنية البوزونية و اعادة الفرميونية للحصول على الدوال الموجية التي تستعمل في حسابنا. النتيجة المتحصل عليها دقيقة و شاملة من نظر المتغيرات لكنها صالحة من أجل قيمة محددة لعامل الملء. الأطراف