

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Université Akli Mohand Oulhadj - Bouira -
Tasdawit Akli Muḥend Ulḥağ - Tubirett -



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة أكلي محمد أولحاج
- البويرة -

Faculté des Sciences et des Sciences Appliquées

كلية العلوم والعلوم التطبيقية

Référence :/MM/2022

المرجع :م / م / 2022

Mémoire de Master

Présenté au

Département : Génie Électrique

Domaine : Sciences et Technologies

Filière : Electronique

Spécialité : Electronique des systèmes embarqués

Réalisé par :

Douaidi Hamza

Belkadi Halim

Thème

Utilisation des techniques d'identification pour l'approximation des systèmes d'ordre fractionnaire

Devant la commission composée de :

M ^r :	RIAD DIB	M A A	Univ. Bouira	Président
M ^r :	ZAHIR ASRADJ	M A A	Univ. Bouira	Examineur
M ^r :	YASSINE BENSALIA	M.C.A	Univ. Bouira	Rapporteur

Année Universitaire : 2021-2022

Remerciements

Tout d'abord, nous tenons à remercier Dieu de nous avoir donné la force et le courage de mener à bien ce modeste travail et nous tenons à remercier tous ceux qui ont, de près ou de loin contribué à l'aboutissement de notre travail, et nous citerons en particulier :

Nos chers parents sans lesquels rien ne serait, pour toutes les nuits qu'ils ont passées à veiller pour que nous réussissions

Nos frères et sœurs pour leur soutien.

Nous tenons à remercier Mr Bensafia Yassine, notre cher promoteur pour sa patience et sa précieuse aide le long de cette période.

A tous les enseignants du département Génie électrique sans exception qui ont contribué à notre formation avec beaucoup de compétence et de dévouement.

Nos remerciements s'adressent, également, aux membres du jury pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant d'évaluer ce travail.

Enfin, nos plus vifs remerciements s'adressent aussi à tous ceux qui nous ont aidées, encouragées et soutenues.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail

A ma chère mère et mon cher père

A mes frères et mes sœurs que j'aime beaucoup

A mes chers grands parents; A tous mes ami(e)s

A tous ceux qui se reconnaîtront et qui me connaissent

Toute la promotion 2021/2022

Bon courage à tous

Table des matières

Introduction générale.....	5
I.1 Introduction	7
I.1.1 Historique	7
I.1.2.La modélisation d'ordre Fractionnaire	8
I.1.3.Commande d'ordre fractionnaire	9
I.2.Domains d'application des systèmes fractionnaires.....	10
I.3. Opérateurs d'ordre fractionnaire	10
I.4.1 Définitions fondamentales	10
I.4.1.1 Définition de Riemann-Liouville	10
I.4.1.2 Définition de Gröndwald-Leitnikov	11
I.4.1.3 Définition de Caputo	12
I.4.2.Propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire	12
I.5 Transformée de Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaire	13
I.5.1 Eléments de base de la Transformée de Laplace	13
I.5.2Transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire	14
I.5.3 Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire	14
I.6 Approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire	15
I.6.1 Méthodes Fréquentielles	15
I.6.1.1 Approximations utilisant l'expansion des fractions continues et les techniques d'interpolation	15
I.6.1.2 Approximations utilisant l'ajustement de courbes ou les techniques d'identification	17
I.6.2 Méthodes Numériques	21
I.6.2.1 Méthode directe de discrétisation	21
I.6.2.2 Méthode indirecte de discrétisation	23
I.7 Conclusion	25
II.1. Introduction.....	26
II.2. Définition du modèle	26
II.3. Type du modèle	26
II.3.1. Modèle de connaissance	27
II.3.2. Modèle de représentation	27
II.3.2.1. Modèles non paramétriques.....	27
II.3.2.2. Modèles paramétriques	27
II.4. Les structures du modèle	27

Table des matières

II.4.1. Structure S1	27
II.4.2. Structure S2	28
II.4.3. Structure S3	28
II.4.4. Structure S4	29
II.5. Les étapes d'identification	29
II.6. Quelques problèmes posés par l'identification	30
II.6.1. Choix de la période d'échantillonnage	30
II.7. Méthodes d'identification du modèle non paramétrique	31
II.7.1. Mesure par la réponse indicielle	31
II.7.2. Mesure par la réponse impulsionnelle	31
II.7.2.1. Mesure par la Transformée de Fourier (T.F)	32
II.7.2.2. Par corrélation	32
II.8. Méthodes d'identification du modèle paramétrique	33
II.8.1. Méthodes paramétriques graphiques	33
II.8.1.1. Méthode de Strejc-Quentin	34
II.8.1.2. Méthode de Broïda	35
II.8.1.3. Identification d'un processus intégrateur	36
II.8.2. Méthodes statistiques	37
II.8.2.1. Algorithme d'adaptation paramétrique	37
II.8.2.2. Les algorithmes d'identification récursifs	38
II.8.2.3. Initialisation de l'algorithme	42
II.8.2.4. Choix du gain d'adaptation	42
II-9- Conclusion	43
III.1. Introduction	44
III.2. Structure générale d'identification d'ordre fractionnaire	44
III.3. Les intégrateurs fractionnaires	45
III.4. Conclusion	49
Conclusion générale.....	52
Bibliographie	

Chapitre II

Figure (II.2) : Structure 1	27
Figure (II.2) : Structure 1	28
Figure (II.3) :Structure S3.....	29
Figure (II.4) : Structure S4.....	29
Figure (II.5) : Procédure d'identification d'un modele de système	30
Figure (II-6)la réponse indicielle du système.....	31
Figure(II.7) : la réponse impulsionnelle	32
Figure (II-8): application de la méthode d'auto- corrélation.....	32
Figure (II-9): application de la méthode d'intercorrélacion.....	Erreur ! Signet non défini.
Figure (II-10) : réponse indicielle du procédé	Erreur ! Signet non défini.
Figure (II-10) : réponse indicielle du procédé.	Erreur ! Signet non défini.
Figure (II-11) : réponse indicielle du processus intégrateur	Erreur ! Signet non défini.
Figure (II-12) : Procédure d'identification d'un modèle desystème.....	38

Chapitre III

Structure générale d'identification: (III.1) Figure	44
Figure (III.2) : La comparaison entre les méthodes d'approximations et la méthode d'identification.....	47
Figure (III.3) : La comparaison entre les méthodes d'approximations et la méthode d'identification	Erreur ! Signet non défini.
Figure (III.4) :La comparaison entre les méthodes d'approximations et la méthode d'identification	Erreur ! Signet non défini.

Liste des Tableaux

Chapitre II

Tableau (II.1) : Tableau de Strejc-Quentin	34
Tableau (II.2) : Tableau de processus intégrateur	36

Chapitre III

Tableau (III.1) : intégrateur fractionnaires approximé avec la méthode d'Oustaloup	45
Tableau (III.2) : intégrateur fractionnaires approximé avec la méthode Matsuda	46

Introduction générale

L'application des concepts du calcul fractionnaire dans le domaine des systèmes de commande automatique et de l'identification par des modèles d'ordre fractionnaire remonte aux années soixante, mais ce n'est que pendant les années 90 [1] que les contrôleurs fractionnaires gagnent de plus en plus d'intérêt au sein de la communauté de commande [2]. Le concept de commande d'ordre fractionnaire signifie que les systèmes commandés et les correcteurs sont représentés par des équations différentielles et des transferts d'ordre non entier. Dont le but principal est d'améliorer les performances et la robustesse des systèmes de commande classiques par l'introduction des opérateurs d'ordre fractionnaires dans les algorithmes de commande [3].

De nombreux phénomènes physiques peuvent être décrits par des modèles non entiers, tels que certains systèmes thermiques ou électrochimiques, mais vu le manque, voir l'inexistence, de moyens techniques (logiciels) pour l'analyse, simulation et implémentation ce genre de modèles, il est nécessaire de revenir vers des modèles d'ordre entier via des approximations [4].

L'objectif principal de ce travail est une comparaison entre la méthode d'identification et les différentes méthodes d'approximation des systèmes fractionnaires en utilisant comme référence la sortie du système fractionnaire original.

Le mémoire est organisé en trois chapitres dont les contenus sont comme suit :

Le premier chapitre présente les différentes définitions mathématiques de l'intégrale et de dérivée d'ordre fractionnaire : Riemann Liouville, Caputo et Grünwald-Letnikov, ainsi que les principales propriétés de la dérivation d'ordre fractionnaire, l'évaluation numérique des opérateurs d'ordre fractionnaire et la représentation mathématique d'un système d'ordre fractionnaire. Ainsi que « Méthodes d'approximation des systèmes d'ordre fractionnaire », on exposera les principales méthodes d'approximation des systèmes d'ordre fractionnaire, dans le domaine numérique et analogique dont les méthodes de Carlson, Matsupa, Charef et d'Oustaloup.

Introduction Générale

Dans le deuxième chapitre, Nous étudierons les méthodes générales d'identification du modèle non paramétrique et paramétrique des systèmes non bruités.

Le dernier chapitre présente la comparaison entre les méthodes d'approximation et la méthode d'identification des systèmes fractionnaires.

Chapitre I

Les Systèmes d'ordre Fractionnaire

I.1 Introduction :

Les systèmes d'ordre fractionnaire ont reçu un intérêt considérable dans de nombreux domaines des sciences appliquées et de l'ingénierie. Ces systèmes sont généralement décrits par des équations différentielles d'ordre fractionnaire. Dans le domaine fréquentiel, ils sont représentés par des fonctions de transfert irrationnelles. A cause de ces fonctions irrationnelles, les systèmes d'ordre fractionnaire ont été marginalement étudiés. Comme ils n'ont pas de solutions analytiques exactes, les techniques numériques et d'approximation sont largement utilisées pour leur résolution, analyse et implémentation.

Dans ce chapitre, nous allons donner des définitions du calcul fractionnaire et des opérateurs d'ordre fractionnaires, quelques propriétés principales et aussi la transformée de Laplace des dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire. Nous allons en particulier présenter quelques méthodes d'approximation des opérateurs et transferts d'ordre fractionnaire

I.1.1 Historique :

Le calcul d'ordre fractionnaire est le domaine des mathématiques qui traite l'étude et l'application des intégrales et dérivées d'ordre arbitraire. Il est considéré comme un ancien concept. Les graines du calcul d'ordre fractionnaire ont été plantées il y a 300 années. De nombreux mathématiciens comme, N.H. Abel, M. Caputo, L. Euler, J. Fourier, A.K. Grünwald, J. Hadamard, G.H. Hardy, O. Heaviside, H. J. Holmgren, P.S. Laplace, G.W. Leibniz, A.V. Letnikov, J. Liouville, B. Riemann, M. Riesz et H. Weyl ont contribué à ce développement jusqu'à la moitié du siècle passé [16].

Cependant, on peut considérer le calcul d'ordre fractionnaire comme un nouvel axe de recherche, puisque ce n'est que depuis un peu plus d'une trentaine d'années qu'il fait l'objet de beaucoup de travaux. Le premier livre dédié au calcul d'ordre fractionnaire a été publié en 1974, il revient à K.B. Oldham et J. Spanier [53], après un travail de collaboration entamé en 1968. Sur le plan mathématique, il faut citer l'ouvrage russe de Samko, Kilbas et Marichev [36] paru en 1993, qui regroupe un ensemble de définitions et de théories importantes sur le calcul d'ordre fractionnaire. Aujourd'hui, l'intérêt du calcul d'ordre fractionnaire et ces applications ne cesse de grandir, dans

plusieurs domaines. A partir de 2004, un workshop, qui se déroule tous les deux ans, spécialement dédié au calcul d'ordre fractionnaire et ses applications, a été créé.

I.1.2.La modélisation d'ordre Fractionnaire :

La représentation mathématique des systèmes fractionnaires dans le domaine fréquentiel donne des fonctions irrationnelles qui, dans le domaine temporel, correspondent à des équations différentielles difficiles à exploiter. Vu l'absence de méthodes mathématiques, les systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire étaient jusque là étudiés de façon marginale seulement, que ce soit en théorie ou en application. Pour des raisons d'analyse, de synthèse, et de simulation de tels systèmes, l'utilisation des fonctions rationnelles pour l'approximation s'avère d'une grande importance. Alors pour analyser et concevoir les systèmes de commande d'ordre fractionnaire il faut les approximer par des fonctions rationnelles.

La modélisation d'ordre fractionnaire consiste à décrire les phénomènes physiques associés à des dispositifs dont le comportement peut être régi par des équations aux dérivées partielles. Le calcul infinitésimal (différentiel et intégral) d'ordre fractionnaire marque son début au XVIIème siècle, après quelques travaux de Gottfried Wilhelm Leibniz (1697) et Leonhard Euler (1730). Cent ans plus tard il recommence à être étudié par un grand nombre de mathématiciens célèbres comme P. S. Laplace (1812), J. B. J. Fourier (1822), N. H. Abel (1823-1826), J. Liouville (1832-1873), B. Riemann (1847), H. Holmgren (1865-67), A. K. Grünwald (1867-1872) ou A.V. Letnikov (1868-1872) [14]. Bien qu'il ne soit pas nouveau, le calcul infinitésimal d'ordre fractionnaire est redevenu un sujet d'étude dans la deuxième moitié du XXème siècle. Le formalisme mathématique de la dérivation non entière associé au développement des outils informatiques a permis d'envisager des applications dans le domaine des sciences de l'ingénieur du FOD (FractionalOrderDifferential).

Aujourd'hui, l'approche fractionnaire est ainsi appliquée pour la modélisation des dispositifs électriques [4, 5, 6, 26, 35], pour la modélisation des conséquences des désastres naturels [32] ou pour la synthèse de la commande [20, 29, 31]. La modélisation d'ordre fractionnaire est aussi présente dans le domaine des sciences biologiques (les modèles des parties du corps humain) [11] ou même des sciences humaines et sociales (la modélisation des comportements des marchés) [19].

I.1.3. Commande d'ordre fractionnaire :

En automatique, ce n'est qu'au début des années 1990 que le régulateur CRONE (Commande Robuste d'Ordre Non Entier) était proposé par Oustaloup[30]. En profitant des propriétés avantageuses des systèmes d'ordre fractionnaire, ce régulateur permettait d'assurer la robustesse de la commande dans une bande de fréquences donnée. La synthèse d'une telle commande est effectuée de façon que l'équation différentielle d'ordre fractionnaire qui la décrit, soit de la même forme que celle qui régit la relaxation de l'eau sur une digue poreuse. Il a été remarqué qu'un tel phénomène physique est robuste au sens de l'automaticien. En effet, une observation attentive de la relaxation montre que son amortissement est indépendant de la nature de la digue, fluvial ou côtière, donc d'un certain nombre de paramètres, entre autre la masse d'eau en mouvement. Ce résultat est aussi remarquable que paradoxale dans l'approche entière de la mécanique où toute relaxation présente un amortissement lié à la masse transportée.

Depuis cette initiative, La commande d'ordre fractionnaire captiva l'intérêt de beaucoup de chercheurs. En 1999, Podlubny[33] a proposé le régulateur $PI^\alpha D^\beta$ comprenant une intégration fractionnaire d'ordre α et une dérivation fractionnaire d'ordre β , élargissant ainsi le champ d'application du calcul fractionnaire à la théorie de la commande. La commande adaptative d'ordre fractionnaire a connu ses premières publications au début des années 2000, avec les travaux de Ladaci et Charef[22-21], et Vinagre et al. [38]. Depuis, plusieurs dizaines de travaux sur les approches de commande adaptative d'ordre fractionnaire sont publiés annuellement [23].

L'objectif de ce chapitre est de présenter les bases théoriques des opérateurs d'ordre fractionnaire nécessaires pour le développement des chapitres qui suivent, tout en rappelant les définitions et les principales propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire.

I.2. Domaines d'application des systèmes fractionnaires:

Les applications de la théorie du calcul fractionnaire aussi bien dans les sciences fondamentales qu'en ingénieriesonttrès diverses (voir les ouvrages [15, 17]).

Les systèmes d'ordre fractionnaires sont tout particulièrement intéressants pour représenter finement et avec un ordre réduit les dispositifs dont le fonctionnement repose sur la diffusion d'une grandeur (champ, température, etc.). Ils apparaissent de plus en plus fréquemment dans les différents domaines de recherches tel que :Electronique, Electrotechnique, Chimie, Automatique, Mécanique...etc.

I.3. Opérateurs d'ordre fractionnaire :

Le calcul d'ordre fractionnaire (intégration et différentiation d'ordre fractionnaire) est un vieux concept qui date de l'époque de Cauchy, Riemann Liouville et Leitnikov au 19ème siècle. Il a été utilisé en mécanique depuis les années 1930 et en électrochimie depuis les années 1960. Dans le domaine de la commande, des travaux intéressants ont été réalisés par I.A. Brin [5], et plus tard plusieurs mathématiciens et physiciens ont étudié les opérateurs différentiels et les systèmes d'ordre fractionnaire [12-37].

L'opérateur intégro-différentiel ${}_c D_t^m$ ou m et t sont les limites de l'opération est défini ainsi:

$${}_c D_t^m = \begin{cases} \frac{d^m}{dt^m} \dots\dots\dots \Re(\alpha) > 0, \\ 1 \dots\dots\dots \Re(\alpha) = 0, \\ \int_c^t (d\tau)^{-m} \dots\dots\dots \Re(\alpha) < 0, \end{cases}$$

Où m et t l'ordre l'opération. généralement $m \in \mathbb{R}$

I.4.1 Définitions fondamentales :

Il existe plusieurs définitions mathématiques pour l'intégration et la dérivation d'ordre fractionnaire. Ces définitions ne mènent pas toujours à des résultats identiques mais sont équivalentes pour un large panel de fonctions [33].

I.4.1.1 Définition de Riemann-Liouville :

L'intégrale dite de Riemann-Liouville est définie ainsi :

Définition 1 Soient C et \mathbb{R} les anneaux des nombres complexes et réels respectivement,

$\Re(\cdot)$ Symbolise la partie réelle d'un nombre complexe.

Soient $\lambda \in C$ avec $\Re(\lambda) > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction localement intégrable définie sur

$[t_0, +\infty[$.

L'intégrale d'ordre λ de f de borne inférieure t_0 est définie par :

$$I_{t_0}^\lambda f(t) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_{t_0}^t (t - \xi)^{\lambda-1} f(\xi) d(\xi) \quad (I.2)$$

Avec $t \geq t_0$ et Γ la fonction gamma d'Euler.

Définition 2 Soient $\mu \in \mathbb{C}$ avec $\Re(\mu) > 0$, n un entier positif, $t_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction localement intégrable définie sur $[t_0, +\infty[$. La dérivée d'ordre μ de f de borne inférieure t_0 est définie par:

$$D_{t_0}^\mu f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\mu)} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{n-\mu-1} f(\tau) d\tau \quad (I.3)$$

Où le nombre entier n est tel que $(n-1) < \mu < n$.

Cette dérivée d'ordre fractionnaire peut aussi être définie à partir de l'équation (I.2) comme suit:

$$D_{t_0}^\mu f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \left\{ I_{t_0}^{(n-\mu)} f(t) \right\} \quad (I.4)$$

Remarque: pour simplifier l'écriture, on notera dans la suite I^λ pour $I_{t_0}^\lambda$ et D^μ pour $D_{t_0}^\mu$.

I.4.1.2 Définition de Grünwald-Leitnikov :

La dérivée d'ordre fractionnaire d'ordre $\mu > 0$ de G-L est donnée par:

$$D^\mu f(t) = \frac{d^\mu}{dt^\mu} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\mu} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{\mu}{j} f(kh - jh) \quad (I.5)$$

Où h est la période d'échantillonnage et les coefficients

$$\omega_j^{(\mu)} = \binom{\mu}{j} = \frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(j + 1)\Gamma(\mu - j + 1)}$$

Avec $\omega_0^{(\mu)} = \binom{\mu}{0} = 1$, sont les coefficients du binôme suivant :

$$(1 - Z)^\mu = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\mu}{j} Z^j = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j^{(\mu)} Z^j$$

La définition de Grünwald-Leitnikov de l'intégrale d'ordre fractionnaire est formulée

Comme sui

$$I^\lambda f(t) = D^{-\lambda} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^\lambda \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{-\lambda}{j} f(kh - jh)$$

(I.7)

Où h est la période d'échantillonnage et les coefficients $\omega_j^{(-\lambda)}$ avec $\omega_j^{(-\lambda)} \binom{-\lambda}{j} = 1$, sont les

Coefficients du binôme suivant :

$$(1 - Z)^{-\lambda} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{-\lambda}{j} Z^j = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j^{(-\lambda)} Z^j \quad (\text{I.8})$$

I.4.1.3 Définition de Caputo :

A la fin des années 60, dans le cadre de ses travaux sur la dissipation dans un matériau viscoélastique linéaire, Caputo a introduit une autre définition de la dérivation d'ordre fractionnaire.

L'expression mathématique de cette définition est : ${}_{t_0}^c D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(r-\alpha)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{r-\alpha-1} f^{(r)}(\tau) d\tau$

Avec r est un entier positif vérifiant l'inégalité $(r-1) < \alpha < r$.

$f^{(r)}(\tau)$, étant la dérivée d'ordre entier r , par rapport à τ , de la

fonction $f(\tau)$. ${}_{t_0}^c D_t^\alpha f(t)$, désigne la dérivée d'ordre fractionnaire α de la fonction $f(t)$ entre t_0 et t selon la définition de Caputo.

I.4.2. Propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire :

Les principales propriétés des dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire sont les suivantes :

1. si $f(z)$ est une fonction analytique de z , alors sa dérivée d'ordre fractionnaire $D^\alpha f(z)$ est

Une fonction analytique de z et α .

2. pour $\alpha = n$, ou n est un entier, l'opération $D^\alpha f(z)$ donne le même résultat que la

Différentiation classique d'ordre entier n .

3. pour $\alpha = 0$ l'opération $D^\alpha f(z)$ est l'opérateur identité: $D^\alpha f(z) = f(z)$.

4. la différentiation et l'intégration d'ordre fractionnaire sont des opérations linéaires

$$D^\alpha a f(z) + D^\alpha b g(z) = a D^\alpha f(z) + b D^\alpha g(z)$$

5. la loi additive (propriété du semi-groupe)

$$D^\alpha D^\beta f(z) = D^\beta D^\alpha f(z) = D^{\alpha+\beta} f(z)$$

Est valable sous certaines contraintes sur la fonction $f(z)$.

I.5 Transformée de Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaire:

I.5.1 Éléments de base de la Transformée de Laplace :

La fonction $F(s)$ de la variable complexe s définie par,

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t); s\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (\text{I.9})$$

Appelée la transformée de Laplace de la fonction $f(t)$, qui s'appellera l'originale. Pour l'existence de l'intégrale (1.9) la fonction $f(t)$ doit être d'ordre exponentiel α , ce qui veut dire qu'il existe deux constantes positives M et T telles que :

$$e^{-\alpha t} |f(t)| \leq M \text{ pour tous } t > T.$$

La fonction originale $f(t)$ peut être retrouvée à partir de la transformée de Laplace $F(s)$ avec la transformée inverse de Laplace :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s); t\} = \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{st} F(s) ds, \quad c = \Re(s) > c_0, \quad (\text{I.10})$$

Où c_0 se trouve dans le demi-plan droit de la convergence absolue de l'intégrale de Laplace (I.9).

L'évaluation directe de la transformée de Laplace inverse en utilisant la formule (I.9) est souvent compliquée ; mais elle peut fournir des informations utiles sur le comportement de l'originale inconnue $f(t)$ qu'on veut trouver.

La transformée de Laplace de la convolution

$$f(t) * h(t) = \int_0^t f(t - \tau) h(\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (\text{I.11})$$

des deux fonctions $f(t)$ et $h(t)$, qui sont nulles pour $t < 0$, est égale au produit de la transformée de Laplace des deux fonctions :

$$\mathcal{L}\{f(t) * h(t); s\} = F(s)G(s) \quad (\text{I.12})$$

Sous l'hypothèse que $F(s)$ et $G(s)$ existent. On utilisera la propriété (I.12) pour l'évaluation de la transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville.

Une autre propriété très utile dont nous aurons besoin est la formule de la transformée de Laplace de la dérivée d'un ordre entier n de la fonction $f(t)$:

$$\mathcal{L}\{f^n(t); s\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0) \quad (\text{I.13})$$

Dans la partie suivante nous considérons la limite inférieure $a = 0$.

I.5.2 Transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire :

Nous commencerons par la transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire

De Riemann-Liouville d'ordre $\lambda > 0$ définie par (I.2), qu'on peut écrire comme une convolution

Des fonctions $g(t) = t^{\lambda-1}$ et $f(t)$:

$$I^\lambda f(t) = D^{-\lambda} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\tau)^{\lambda-1} f(\tau) d\tau = t^{\lambda-1} * f(t) \quad (\text{I.14})$$

La transformée de Laplace de la fonction $t^{\lambda-1}$ est :

$$G(s) = \Gamma\{t^{\lambda-1}; s\} = \Gamma(\lambda) s^{-\lambda} \quad (\text{I.15})$$

En utilisant la formule de la transformée de Laplace de la convolution (I.15) on obtient

La transformée de Laplace de l'intégrale de Riemann-Liouville et celle de Grünwald-Leitnikov

$$\mathcal{L}\{I^\lambda f(t)\} = s^{-\lambda} F(s) \quad (\text{I.16})$$

I.5.3 Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire :

Nous citons dans ce qui *suit* la transformée de Laplace des différentes définitions de la

Dérivée.

- Dérivée de Riemann-Liouville :

$$\mathcal{L}\{D^\mu f(t)\} = s^\mu F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [D^{\mu-k-1} f(t)]_{t=0} \quad (\text{I.17})$$

Avec $n-1 < \mu < n$. Cette transformée de Laplace de la dérivée de Riemann-Liouville

Mais son applicabilité en pratique est limitée à cause de

L'absence d'interprétation physique des valeurs limites des dérivées d'ordre fractionnaire pour $t = 0$.

- Dérivée de Caputo :

$$\mathcal{L}\{D^\mu f(t)\} = s^\mu F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\mu-k-1} f^{(k)}(0) \quad (\text{I.18})$$

Avec $n-1 \leq \mu < n$.

Il faut mentionner ici que d'un point de vue mathématique pur, il y a différentes manières d'interpoler entre les intégrales et dérivées multiples d'ordre entier. La plus connue et la plus étudiée est la définition de Riemann-Liouville des dérivées d'ordre fractionnaire. L'avantage principal de la définition de Caputo par rapport à celle de Riemann-Liouville est qu'elle permet de considérer des conditions initiales conventionnelles faciles à interpréter telles que $y(0) = y_0, \dot{y}(0) = y_1, \text{etc.}$ De plus, la dérivée de Caputo d'une constante est bornée (égale à 0), alors que la dérivée de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas bornée à $t = 0$. La seule exception est quand on prend $t = -\infty$ comme point de départ (limite inférieure) dans la définition de Riemann-Liouville. Cependant, quand on s'intéresse à des processus transitoires, on ne peut pas accepter de déplacer le point de départ à $-\infty$; dans ce cas la définition de Caputo semble être la plus appropriée quand on la compare aux autres.

- Dérivée de Grünwald-Leitnikov

$$\mathcal{L}\{D^\mu f(t)\} = s^\mu F(s) \quad (\text{I.19})$$

Remarque :

La résolution des équations différentielles d'ordre fractionnaire avec la transformée de Laplace se fait de la même manière qu'avec les équations différentielles d'ordre entier.

I.6 Approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire :

Dans la suite nous allons présenter quelques méthodes d'approximation de l'opérateur d'ordre fractionnaire qui peuvent être divisées en deux catégories (fréquentielles et numériques)[10], avec un intérêt particulier à la méthode de la fonction singulière [9] qui sera entièrement détaillée dans ce chapitre.

I.6.1 Méthodes Fréquentielles :

I.6.1.1 Approximations utilisant l'expansion des fractions continues et les techniques d'interpolation :

L'expansion des fractions continues [25, 28] est une méthode d'évaluation des fonctions qui converge souvent beaucoup plus rapidement que le développement en série de puissances, et

converge dans un domaine plus large du plan complexe. Le résultat de cette approximation pour une fonction irrationnelle $G(s)$, peut être exprimé sous la forme

$$G(s) \cong a_0(S) + \frac{b_1(S)}{a_1(S) + \frac{b_2(S)}{a_2(S) + \frac{b_3(S)}{a_3(S) + \dots}}} \quad (\text{I.25})$$

$$G(S) = a_0(S) + \frac{b_1(S)}{a_1(S) + \frac{b_2(S)}{a_2(S) + \frac{b_3(S)}{a_3(S) + \dots}}} \quad (\text{I.26})$$

Où $a_i(S)$ et $b_i(S)$ sont des fonctions rationnelles de la variable S ou des constantes. L'application de cette méthode résulte en une fonction rationnelle $\hat{G}(S)$, qui est une approximation de la fonction irrationnelle $G(S)$.

D'autre part, pour l'interpolation, les fonctions rationnelles sont parfois supérieures aux polynômes, car elles permettent de modéliser les fonctions par des pôles. Ces techniques sont basées sur l'approximation d'une fonction irrationnelle $G(S)$ par une fonction rationnelle définie par le quotient de deux polynômes de la variable S :

$$G(S) \cong R_{i(i+1)\dots(i+m)} = \frac{P_\mu(S)}{Q_\nu(S)} = \frac{p_0 + p_1s + \dots + p_\mu s^\mu}{q_0 + q_1s + \dots + q_\nu s^\nu} \quad (\text{I.27})$$

qui passe par les points $(s_i, G(s_i)); \dots (s_{i+m}, G(s_{i+m}))$.

Dans la suite nous présenterons quelques unes des méthodes les plus connues de ce type.

1.6.1.1.1 Méthode Générale d'approximation des opérateurs intégro-différentiels d'ordre fractionnaire :

En général, une approximation rationnelle de la fonction $G(s) = s^\mu$ tel que $0 < \mu < 1$ (Intégration d'ordre fractionnaire dans le domaine de Laplace) peut être obtenue en utilisant l'expansion des fractions continues des fonctions :

$$G_h(s) = \frac{1}{(1+s.T)^\mu} \quad (\text{I.28})$$

$$G_l(s) = \left(1 + \frac{1}{s}\right)^\mu \quad (\text{I.29})$$

Où $G_h(s)$ est l'approximation pour les hautes fréquences ($w_T \gg 1$), et $G_l(s)$ l'approximation pour les basses fréquences ($w_T \ll 1$).

I.6.1.1.2 Méthode de Carlson :

La méthode proposée par Carlson tirée du processus régulier de Newton utilisé pour l'approximation itérative de la racine d'ordre α , peut être considérée comme appartenant à ce groupe [82]. Cette méthode se base sur l'hypothèse suivante :

$$(H(s))^{1/\mu} - G(s) = 0 \quad (\text{I.30})$$

$$H(s) = (G(s))^\mu \quad (\text{I.31})$$

En définissant $q = \frac{1}{\mu}$. $m = \frac{q}{2}$ à chaque itération, partant de la valeur initiale $H_0(s) = 1$, une fonction rationnelle approximée peut être donnée par :

$$H_i(s) = H_{i-1}(s) \frac{(q-m)(H_{i-1}(s))^2 + (q+m)G(s)}{(q+m)(H_{i-1}(s))^2 + (q-m)G(s)} \quad (\text{I.32})$$

Le modèle d'approximation est obtenu ensuite, en remplaçant chaque opérateur d'ordre fractionnaire de la fonction de transfert irrationnelle par son approximation rationnelle.

I.6.1.1.3 Méthode de Matsuda :

La méthode proposée par [27] est basée sur l'approximation de l'opérateur d'ordre fractionnaire $G(s) = s^\alpha$ par une fonction rationnelle $\hat{G}(s)$ en identifiant le modèle d'approximation à partir de son gain. Le gain est calculé en utilisant M fréquences réparties dans une bande de fréquence $[\omega_0, \omega_M]$ dans laquelle se fait l'approximation. Pour un ensemble de points sélectionnés $\omega_i, i = 0, 1, 2 \dots M$, l'approximation prend la forme :

$$\hat{G}(s) = a_0 + \frac{s-\omega_0}{a_1+s} \frac{s-\omega_1}{a_2+s} \frac{s-\omega_2}{a_3+s} \dots = [a_0; \frac{s-\omega_{i-1}}{a_i}]_{i=1}^M \quad (\text{I.33})$$

Où

$$a_i = f(\omega_i), f_0(\omega) = G(s), f_{i+1}(s) = \frac{s-\omega_i}{f_i(s)-a_i} \quad (\text{I.34})$$

Le modèle d'approximation est obtenu en remplaçant chaque opérateur d'ordre fractionnaire de la fonction de transfert irrationnelle explicite par son approximation.

I.6.1.2 Approximations utilisant l'ajustement de courbes ou les techniques d'identification :

En général toutes les méthodes d'identification dans le domaine fréquentiel peuvent être appliquées pour obtenir une fonction rationnelle, dont la réponse fréquentielle se rapproche de celle de la fonction irrationnelle originale. Par exemple cela peut être la minimisation de la fonction coût suivante :

$$J = \int W(s) |G(w) - \hat{G}(w)|^2 dw \quad (\text{I.35})$$

Où $W(s)$ est une fonction de pondération, $G(w)$ la réponse fréquentielle originale, et $\hat{G}(w)$ est la réponse fréquentielle de la fonction rationnelle approximée. Les deux approches les plus connues sont celles proposées par Oustaloupet Charef.

1.6.1.2.1 La méthode d'Oustaloupet :

L'approximation d'Oustaloupet d'un dérivateur généralisé, dont l'action différentielle couvre tout l'espace des fréquences, repose sur une distribution récursive d'une infinité de zéros et de pôles réels négatifs (afin d'assurer un comportement à phase minimale) [30]. Dans le cadre d'une synthèse réaliste (pratique) fondée sur un nombre fini de zéros et de pôles, il convient de réduire le comportement différentiel généralisé sur un intervalle fréquentiel borné, choisi selon les besoins de l'application [30].

Ainsi, l'approximation de l'opérateur α , $\alpha \in R^+$, dans une bande de fréquence $[\omega_0, \omega_M]$ est donnée par une fonction rationnelle [113] :

$$\hat{G}(s) = C \prod_{k=-N}^N \frac{1+s/z_k}{1+s/w'_k} \quad (I.36)$$

En utilisant l'ensemble des formules de synthèse suivantes :

$$w'_0 = \alpha^{0.5} \cdot w_u ; w_0 = \alpha^{0.5} w_u ; \frac{w'_{k+1}}{w'_k} = \frac{w_{k+1}}{w_k} = \alpha \cdot \eta > 1 ; \quad (I.37)$$

$$\frac{w_{k+1}}{w_k} = \eta > 1 ; \frac{w_k}{w'_k} = \alpha > 0 ; N = \frac{\log(w_N/w_0)}{\log(\alpha \cdot \eta)} ; \mu = \frac{\log \alpha}{\log(\alpha \cdot \eta)} ; \quad (I.38)$$

w_u étant le gain fréquentiel unité et la fréquence centrale d'une bande de fréquences distribuées géométriquement autour. Soit, $w_u = \sqrt{w_h \cdot w_b}$ et w_b sont la haute et basse fréquence respectivement.

1.6.1.2.2 Méthode de Charef: Fonction de singularité

Dans le but d'implémenter des modèles d'ordre fractionnaire dans les schémas de commande présentés dans ce travail, nous utiliserons la méthode appelée "Méthode de la fonction de singularité" développée par Charef et al. [9-7], qui est présentée dans cette section. La méthode d'approximation sera différente selon que le transfert d'ordre fractionnaire à approximer soit du premier ou du second ordre.

- **Système du premier ordre fractionnaire**

Pour un système d'ordre fractionnaire du premier ordre :

$$G(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{P_T}\right)^\beta} \quad (I.39)$$

On peut réécrire la fonction (I.39) comme suit (voir aussi [7]) :

$$G(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{P_T}\right)^\beta} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{Z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{P_i}\right)} \quad (\text{I.40})$$

où $(N + 1)$ est le nombre total des singularités qui peut être déterminé par la bande de fréquences du système. L'équation (I.40) peut être tronquée à un nombre fini N , et l'approximation devient :

$$G(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{P_T}\right)^\beta} \approx \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{Z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{P_i}\right)} \quad (\text{I.41})$$

Les pôles et les zéros de la fonction de singularités peuvent être obtenus comme suit :

$$p_i = (ab)^i p_{0i} = 1, 2, 3, \dots, N \quad (\text{I.42})$$

$$z_i = (ab)^i a p_{0i} = 1, 2, 3, \dots, N - 1 \quad (\text{I.43})$$

avec,

$$p_0 = P_T 10^{\frac{\epsilon p}{20\beta}} \quad (\text{I.44a})$$

$$a = 10^{\frac{\epsilon p}{10(1-\beta)}} \quad (\text{I.44b})$$

$$b = 10^{\frac{\epsilon p}{10\beta}} \quad (\text{I.44c})$$

$$\beta = \frac{\log(a)}{\log(ab)} \quad (\text{I.44d})$$

ϵp est l'erreur tolérée en dB .

Avec une pente de -20β dB/dec et son approximation par des lignes droites en zig-zig avec des pentes individuelles de -20 dB/dec et 0 dB/dec.

- **Système du second ordre fractionnaire :**

Pour un système de second ordre décrit par l'équation (I.45):

$$G(s) = \frac{1}{\left(\frac{s^2}{w_n^2} + 2\xi \frac{s}{w_n} + 1\right)^\beta} \quad (\text{I.45})$$

avec β un nombre réel positif tel que $0 < \beta < 1$, on peut distinguer deux cas :

- Cas où $0 < \beta < 0.5$:

On peut exprimer la fonction (I.45) comme suit :

$$G_e(s) = \frac{\left(\frac{s}{w_n} + 1\right) \left(\frac{s}{w_{n+1}}\right)^\eta}{\left(\frac{s^2}{w_n^2} + 2\alpha \frac{s}{w_n} + 1\right)} \quad (\text{I.46})$$

avec $\alpha = \xi^\beta$ et $\xi = 1 - 2\beta$, ce qui peut aussi être approximé par la fonction,

$$G_e(s) \approx \frac{\left(\frac{s}{w_n} + 1\right) \prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{Z_i}\right)}{\left(\frac{s^2}{w_n^2} + 2\alpha \frac{s}{w_n} + 1\right) \prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{P_i}\right)} \quad (\text{I.47})$$

Les singularités (pôles P_i et zéros Z_i) sont données par les formules suivantes :

$$p_i = (ab)^{i-1} z_{1i} \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (\text{I.48})$$

$$z_i = (ab)^{i-1} z_{1i} \quad i = 2, 3, \dots, N - 1 \quad (\text{I.49})$$

avec

$$Z_1 = w_n \sqrt{b} \quad (\text{I.50a})$$

$$a = 10^{\frac{\epsilon p}{10(1-\eta)}} \quad (\text{I.50b})$$

$$b = 10^{\frac{\epsilon p}{10\eta}} \quad (\text{I.50c})$$

$$\eta = \frac{\log(a)}{\log(ab)} \quad (\text{I.50d})$$

ϵp est l'erreur tolérée en dB

L'ordre d'approximation N est calculé en fixant la bande de fréquences de travail, spécifiée par w_{max} telle que : $P_{N-1} < w_{max} < P_N$, ce qui mène à la valeur suivante :

$$N = \text{Partie entière de} \left[\frac{\log\left(\frac{w_{max}}{P_1}\right)}{\log(ab)} + 1 \right] + 1 \quad (\text{I.51})$$

$G_e(s)$ peut alors être écrite sous la forme d'une fonction paramétrique d'ordre $N + 2$:

$$G_e(s) = \frac{b_{m_0} s^N + b_{m_1} s^{N-1} + \dots + b_{m_N}}{s^{N+2} + a_{m_1} s^{N+1} + \dots + a_{m_N}} \quad (\text{I.52})$$

Les coefficients a_{m_i} et b_{m_i} sont calculés à partir des singularités P_i , Z_i ainsi que α et w_n .

- Pour $0.5 < \beta < 1$

La fonction d'approximation est donnée comme suit :

$$G_e(s) = \frac{\left(\frac{s}{w_n} + 1\right)}{\left(\frac{s^2}{w_n^2} + 2\alpha \frac{s}{w_n} + 1\right) \left(\frac{s}{w_{n+1}}\right)^\eta} \quad (\text{I.53})$$

Où $\alpha = \xi^\beta$ et $\eta = 1 - 2\beta$, qui développée comme précédemment avec les valeurs singulières suivantes :

$$P_i = (ab)^{i-1} p_{1i} \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (\text{I.54})$$

$$Z_i = (ab)^{i-1} a p_{1i} \quad i = 2, 3, \dots, N - 1 \quad (\text{I.55})$$

$$\text{avec } Z_1 = w_n \sqrt{b} \quad (\text{I.56a})$$

$$a = 10^{\frac{\epsilon p}{10(1-\eta)}} \quad (\text{I.56b})$$

$$b = 10^{\frac{\epsilon p}{10\eta}} \quad (\text{I.56c})$$

$$\eta = \frac{\log(a)}{\log(ab)} \quad (\text{I.56d})$$

ϵp est l'erreur tolérée en dB.

$G_e(s)$ peut alors être écrite sous la forme de la fonction paramétrique (I.52).

I.6.2 Méthodes Numériques :

Le principe de ces méthodes consiste à approximer le modèle d'ordre fractionnaire par un modèle rationnel discret en substituant l'opérateur de Laplace s dans le modèle fractionnaire par son équivalent en temps discret. La discrétisation est une étape nécessaire lorsqu'on utilise des machines fonctionnant en discret pour commander ou simuler des modèles continus. Dans le cas des opérateurs d'ordre fractionnaire analogiques, il existe deux méthodes permettant d'obtenir l'équivalent discret de ces opérateurs analogiques [49].

I.6.2.1 Méthode directe de discrétisation :

La première méthode est appelée méthode directe de discrétisation, car elle permet d'approximer directement l'intégrateur et le dérivateur d'ordre fractionnaire dans le domaine discret. Parmi les techniques de discrétisation existantes on peut citer les plus utilisées, la technique de l'expansion en série entière et la technique de l'expansion en fraction continue [13].

1.6.2.1.1 Discrétisation utilisant la technique de l'expansion de série entière

La combinaison de la fonction génératrice d'Euler donnée par la règle de discrétisation de l'opérateur dérivateur $s = \frac{1-z^{-1}}{T}$ et la technique de l'expansion de série entière (PSE) pour l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire $s^m = \left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right)^m$, mène à l'expression suivante [34]:

$$s^m \cong T^{-m} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{m}{k} z^{-k}$$

Cette équation est l'expression du dérivateur d'ordre fractionnaire de Grunwald-Leitnikov d'ordre m [121]. Alors, la dérivée d'ordre fractionnaire m d'une fonction causale $f(t)$ est obtenue à partir de l'expression (1.24) comme suit :

$$\frac{d^m f(t = nT)}{dt} = T^{-m} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{m}{k} f((n-k)T)$$

où T est la période d'échantillonnage. L'exécution de la PSE pour l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire $s^{-m} = \left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right)^{-m}$ mène aussi à la formule donnée par Lubich comme suit :

$$s^{-m} \cong T^m \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-m}{k} z^{-k}$$

Donc, l'intégration d'ordre fractionnaire m d'une fonction causale $f(t)$ est obtenue aussi à partir de l'expression (2.26) par :

$$I^m f(t = nT) = T^m \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-m}{k} f((n-k)T)$$

Où I^m dénote l'opération d'intégration d'ordre fractionnaire m .

Une autre possibilité pour la discrétisation des opérateurs d'ordre fractionnaire analogiques avec la technique de l'expansion de série entière (PSE) est l'utilisation de la règle de Tustin (bilinéaire) $s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ comme une fonction génératrice.

1.6.2.1.2 Approximation discrète en utilisant l'intégration numérique et l'expansion de fraction continue :

La technique de l'expansion en fraction continue (CFE) qui approxime une fonction irrationnelle par une fonction rationnelle a été aussi utilisée pour la discrétisation des opérateurs d'ordre fractionnaire. Cette technique d'approximation a été appliquée pour le dérivateur et l'intégrateur

d'ordre fractionnaires s^m et s^{-m} respectivement, lorsque la fonction génératrice de Tustin donnée par la règle de discrétisation de l'opérateur dérivateur $S = \frac{2}{T} \frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}}$ est utilisé. Alors, l'expression suivante a été obtenue :

$$s^{\pm m} = \left(\frac{2}{T} \frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}} \right)^{\pm m} \cong T^{\mp m} CFE \left[\left(\frac{2}{T} \frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}} \right)^{\pm m} \right] = T^{\mp m} \frac{P_p(Z^{-1})}{Q_q(Z^{-1})}$$

où T est la période d'échantillonnage, p et q sont les ordres de l'approximation des polynômes P et Q.

1.6.2.2 Méthode indirecte de discrétisation :

La deuxième méthode, appelée la méthode indirecte, se déroule en deux étapes. Dans la première étape on calcule le modèle rationnel continu qui approxime l'opérateur d'ordre fractionnaire comme suit :

$$s^{\pm m} \cong G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Puis dans une seconde étape, en utilisant les méthodes de discrétisation usuelles pour obtenir le modèle rationnel discret qui approxime le modèle fractionnaire analogique comme suit :

$$s^{\pm m} \cong G(s)|_{s=F(z)}$$

où F(z) est la fonction génératrice de discrétisation donnée par :

- Euler [32]: $s = F(z) = \frac{1-z^{-1}}{T}$
- Tustin [32]: $s = F(z) = \frac{2}{T} \frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}}$
- Al-Alaoui[33]: $s=F(z) = \frac{8}{7T} \frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}/7}$

où T est la période d'échantillonnage.

Dans ce qui suit, on présente le modèle rationnel discret obtenu en utilisant les trois méthodes classiques de discrétisation appliquées au modèle rationnel analogique obtenu par la méthode de Charef [8].

1.6.2.2.1 Discrétisation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire par la transformation Bilinéaire, Backward et Al-Alaoui :

Dans notre cas, l'implémentation numérique de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire est la discrétisation de la fonction rationnelle GI(s) de l'équation (I.41) approximant l'intégrateur d'ordre fractionnaire s^{-m} (avec $0 < m < 1$) par les trois méthodes d'Euler, Tustin et Al-Alaoui [3,16]. Par conséquent, les filtres à Réponse Impulsionnelle Infinie (RII) obtenus sont donnés par les fonctions de transfert suivantes :

$$\text{- Euler : } s^{-m} \cong \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\left(1 + \frac{\frac{1-z^{-1}}{T}}{p_i}\right)} = \sum_{i=0}^N \frac{h_i z}{(\delta_i z - \chi_i)}$$

$$\text{- Tustin : } s^{-m} \cong \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\left(\frac{21-z^{-1}}{T} + \frac{1+z^{-1}}{p_i}\right)} = (z+1) \sum_{i=0}^N \frac{h_i z}{(\alpha_i z - \lambda_i)}$$

$$\text{- Al-Alaoui : } s^{-m} \cong \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\left(\frac{8}{7T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}/7} + \frac{1}{p_i}\right)} = \sum_{i=0}^N \frac{h_i (z + \frac{1}{7})}{(l_i z - \sigma_i)}$$

Avec :

$$\alpha_i = 1 + \frac{2}{Tp_i}, \lambda_i = \frac{2}{Tp_i} - 1, \quad \delta_i = 1 + \frac{1}{Tp_i}$$

$$\chi_i = \frac{1}{Tp_i}, \quad l_i = 1 + \frac{8}{7Tp_i}, \quad \sigma_i = \frac{8}{7Tp_i} - \frac{1}{7}$$

1.6.2.2.2 Discrétisation du dérivateur d'ordre fractionnaire par la transformation Bilinéaire, Backward et Al-Alaoui :

De la même manière, l'implémentation numérique de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire est la discrétisation de la fonction rationnelle GD(s) de l'équation (1.23) approximant le dérivateur d'ordre fractionnaire s^m (avec $0 < m < 1$) par les trois méthodes d'Euler, Tustin et Al-Alaoui [3, 16]. Donc, les filtres à Réponse Impulsionnelle Infinie (RII) obtenus sont donnés par les fonctions de transfert suivantes :

$$\text{- Euler: } s^m \cong K_D + \sum_{i=0}^N \frac{g_i \frac{1-z^{-1}}{T}}{\left(1 + \frac{\frac{1-z^{-1}}{T}}{p_i}\right)} = K_D + \sum_{i=0}^N \frac{g_i(z-1)}{T(\delta_i z - \chi_i)}$$

$$\text{- Tustin: } s^m \cong K_D + \sum_{i=0}^N \frac{g_i \frac{21-Z^{-1}}{T}}{\left(1 + \frac{\frac{21-Z^{-1}}{T}}{p_i}\right)} = K_D + \sum_{i=0}^N \frac{2}{T} \frac{g_i(z-1)}{(\alpha_i z - \lambda_i)}$$

$$\text{- Al-Alaoui : } s^m \cong K_D + \sum_{i=0}^N \frac{g_i \frac{8}{7T} \frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}/7}}{\left(1 + \frac{\frac{8}{7T} \frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}/7}}{p_i}\right)} = K_D + \sum_{i=0}^N \frac{8}{7T} \frac{g_i(z-1)}{(l_i z - \sigma_i)}$$

$$\text{Avec : } \alpha_i = 1 + \frac{2}{Tp_i}, \lambda_i = \frac{2}{Tp_i} - 1, \delta_i = 1 + \frac{1}{Tp_i}, \chi_i = \frac{1}{Tp_i}, l_i = 1 + \frac{8}{7Tp_i}, \sigma_i = \frac{8}{7Tp_i} - \frac{1}{7}$$

I.7 Conclusion :

Ce chapitre est une introduction aux éléments de base du calcul fractionnaire. Nous avons présenté quelques définitions mathématiques des opérateurs fractionnaires avec leurs propriétés et leur transformées de Laplace. Nous avons présenté aussi deux classes de méthodes d'approximation de la dérivée et l'intégrale d'ordre fractionnaire à savoir les méthodes fréquentielles et les méthodes numériques.

Chapitre II

Méthodes d'Identification des Systèmes Linéaires

II.1. Introduction:

L'identification de système est une technique de l'automatique consistant à proposer une structure entre sa commande et sa réponse afin de déterminer à partir des mesures des entrées/sorties, les valeurs des paramètres du modèle. Ainsi trouvé, le modèle doit être capable de reproduire aussi fidèlement que possible le système physique, chimique, biologique, économique

Un système linéaire peut être déterminé par plusieurs méthodes d'identification. Les premiers travaux ont été réalisés dans les années 1970 pour qu'elles puissent être appliquées à des procédés industriels. La procédure d'identification s'effectue essentiellement en deux étapes : la première consiste à fixer la forme des équations, c'est l'étape qualitative, et la deuxième étape a pour but de trouver les valeurs numériques des coefficients qui interviennent dans ces équations, c'est l'étape quantitative ou (estimation des paramètres. Ces valeurs numériques sont déterminées pour que le comportement du modèle soit le plus proche de celui du système, cette approximation se mesure à l'aide d'un critère à choisir [39]

II.2. Définition du modèle :

Le modèle est un ensemble d'équations mathématiques qui relie l'entrée $u(t)$ à la sortie $y(t)$, le modèle et le système doivent se conduire identiquement dans des conditions aussi variées que possible: le modèle doit être fidèle, précis et simple.

II.3. Type du modèle : [40]

Il existe divers types de modèle chacun étant destiné à une application particulière, nous pouvons les classer en deux grandes catégories :

II.3.1. Modèle de connaissance :

Les modèles de connaissances sont basés généralement sur les lois mathématiques (de la physique, de la chimie ...) qui permettent de décrire complètement le système pour une meilleure simulation et conception des procédés. Ce type de modèle est souvent complexe et peu utilisé en automatique.

II.3.2. Modèle de représentation :

Lorsque l'analyse interne du système n'est pas possible (lois internes inconnues, mesures internes impossible ou difficiles) ou trop complexes, on est amené à considérer le système comme une boîte noire et à partir de l'observation de ses entrées –sorties (comportement externe) et de mesures expérimentales, on établit alors la relation mathématique qui lui correspond au mieux. Ce type de modèle est le plus utilisé en automatique. On distingue deux classes de modèle dynamique linéaire :

II.3.2.1. Modèles non paramétriques : Ils sont décrits par des réponses impulsionnelles ou par des réponses indicielles, permettant de caractériser un système dynamique linéaire.

II.3.2.2. Modèles paramétriques : Ils sont décrits par des équations différentielles dans le cas continu, ou bien par des équations aux différences dans le cas discret.

II.4. Les structures du modèle : [41]

On distingue quatre types de structures :

II.4.1. Structure S1 : de la forme suivante

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-d}B(q^{-1})u(t) + e(t) \quad (\text{II.1})$$

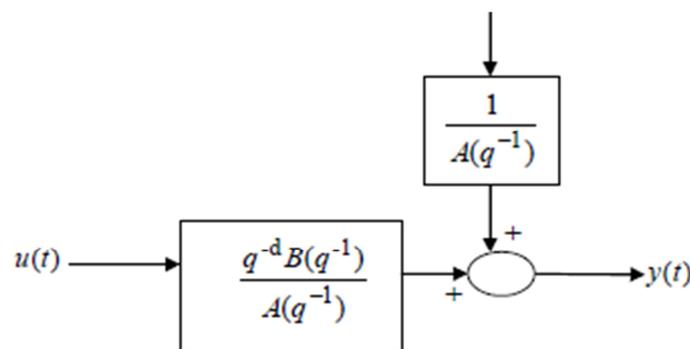


Figure II-1: Structure S1

Avec :

$u(t), y(t)$: Entrée et sortie du procédé.

$e(t)$: Bruit blanc gaussien.

d : Retard.

q^{-1} : Opérateur retard.

$A(q^{-1})$, $B(q^{-1})$: polynômes en la variable q^{-1} .

Les méthodes d'identification récursives utilisant cette structure sont :

- Moindres carrés récursifs.
- Variable instrumentale à modèle auxiliaire.
- Variable instrumentale à observations retardées.
- Erreur de sortie à compensateur fixe.
- Erreur de sortie à compensateur ajustable.

II.4.2. Structure S2 : de la forme suivante :

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-d}B(q^{-1})u(t) + w(t) \quad (\text{II.2})$$

Où $w(t)$ est une perturbation.

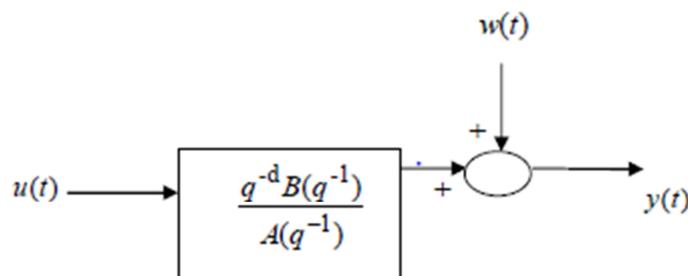


Figure II-2 : Structure S2

Les méthodes d'identification récursives utilisant cette structure sont :

- Moindres carrés récursifs (si $A(q^{-1})w(t) = e(t)$)
- Variable instrumentale à modèle auxiliaire
- Variable instrumentale à observations retardées. (si $A(q^{-1})w(t) = C(q^{-1})e(t)$)
- Erreur de sortie à compensateur fixe.
- Erreur de sortie à compensateur ajustable.

II.4.3. Structure S3 : de la forme suivante :

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-d}B(q^{-1})u(t) + C(q^{-1})e(t) \quad (\text{II.3})$$

Avec

$C(q^{-1})$: polynôme en la variable q^{-1}

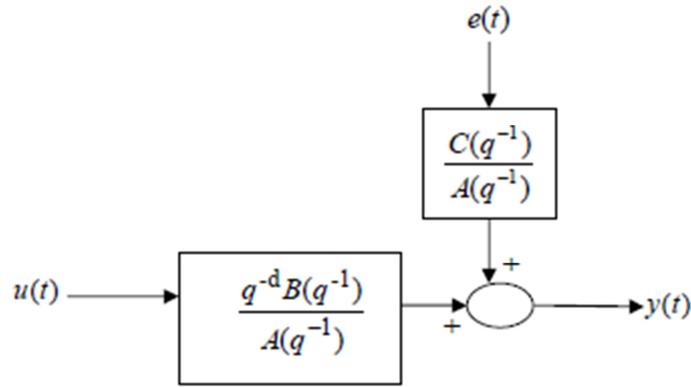


Figure II-3: Structure S3

Les méthodes d'identification récursives utilisant cette structure sont :

- Moindres carrés étendus.
- Maximum de vraisemblance récursif.
- Erreur de sortie avec modèle de prédiction étendu.

II.4.4. Structure S4 : de la forme suivante :

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-d}B(q^{-1})u(t) + \frac{1}{C(q^{-1})}e(t) \text{ (II.4)}$$

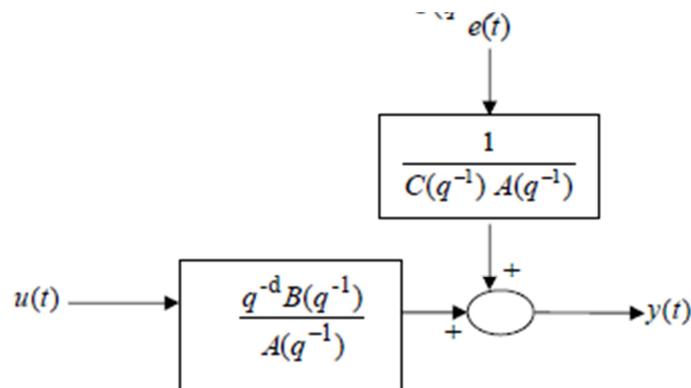


Figure II-4 : Structure S4

Cette structure est utilisée dans les moindres carrés généralisés.

II.5. Les étapes d'identification [40, 43, 44,45, 46] :

L'identification est une approche expérimentale pour la détermination du modèle dynamique d'un système. Cette approche peut être décomposée en quatre étapes selon la figure ci-après.

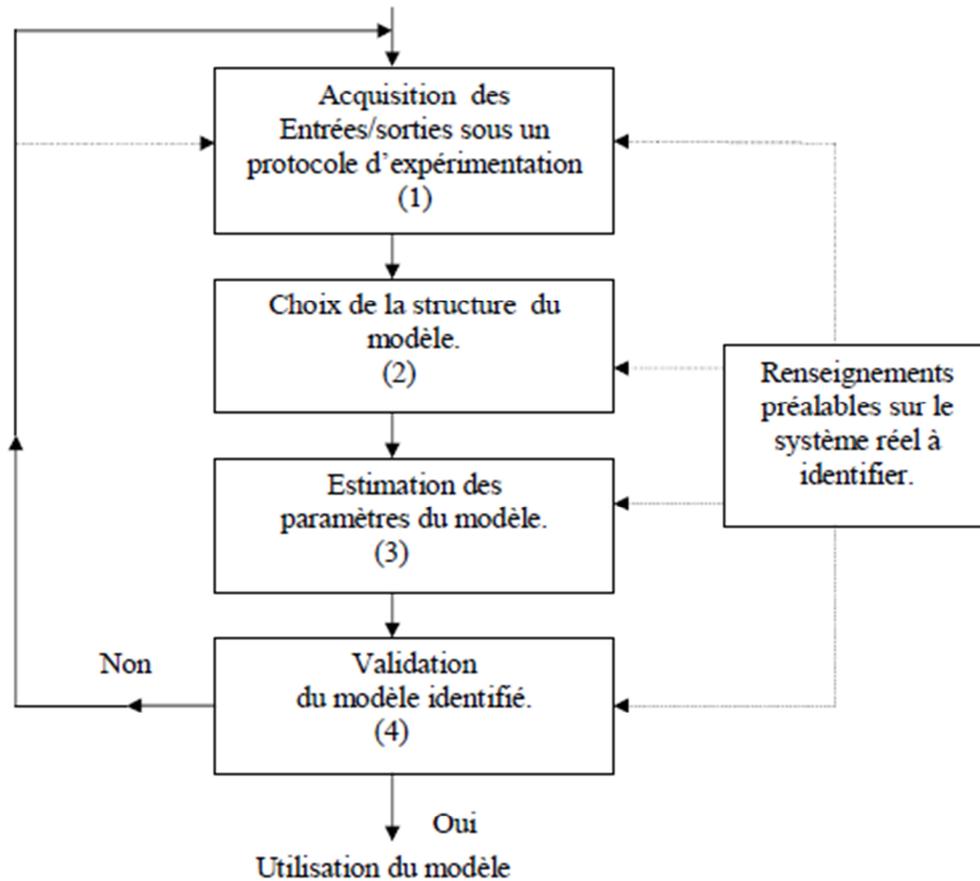


Figure II-5 : Procédure d'identification d'un modèle de système.

II.6. Quelques problèmes posés par l'identification [44] :

II.6.1. Choix de la période d'échantillonnage [44] :

Afin de pouvoir restituer un signal continu à partir de sa séquence discrétisée, il faut que sa fréquence d'échantillonnage $F_e = (F_e \frac{1}{T_e})$ vérifie le théorème de Shannon :

$$F_e \geq 2F_{max}$$

Où :

F_e : est la fréquence d'échantillonnage.

F_{max} : est la fréquence maximale contenue dans le signal à transmettre.

$F_e = 2 F_{max}$ est une limite théorique ; en pratique, il faut choisir une fréquence d'échantillonnage plus grande avec une marge de sécurité, ce qui nous donne :

$$F_{max} < F_e < 25F_{max}$$

II.7. Méthodes d'identification du modèle non paramétrique [48] :

Pour ces méthodes, le système est caractérisé par sa réponse indicielle ou impulsionnelle dont cette dernière peut être déterminée, soit par corrélation, soit par la transformée de Fourier.

II.7.1. Mesure par la réponse indicielle :

La réponse indicielle est une grandeur temporelle à partir de laquelle, on peut déduire la réponse impulsionnelle $h(t)$.

Cette méthode consiste à appliquer à l'entrée du système un échelon unitaire $u(t)$.

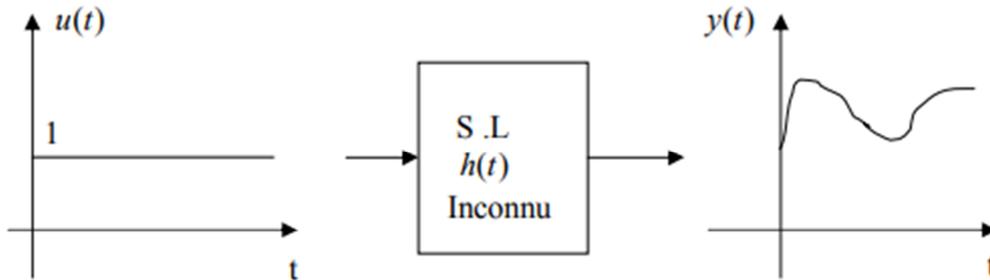


Figure II-6: la réponse indicielle du système.

En effet, on peut montrer que la réponse impulsionnelle $h(t)$, qui caractérise le système, n'est rien d'autre que la dérivée par rapport au temps de la réponse indicielle.

Le calcul de : $\frac{dy(t)}{dt}$

On a : $y(t) = u(t) * h(t)$ (II.5)

$$Y(p) = U(p) \cdot H(p) \Rightarrow Y(p) = \frac{K}{p} H(p) \Rightarrow H(p) = \frac{p \cdot Y(p)}{K} \quad (\text{II.6})$$

Avec

$$U(p) = \frac{K}{p} = TL\{u(t)\} \quad (\text{II.7})$$

$$Y(t) \xrightarrow{TL} Y(p) \quad (\text{II.8})$$

$$\frac{dy(t)}{dt} \xrightarrow{TL} p \cdot Y(p) \quad (\text{II.9})$$

$$h(t) = \frac{1}{K} \frac{dy(t)}{dt} \Rightarrow \frac{dy(t)}{dt} = K h(t) \quad (\text{II.10})$$

II.7.2. Mesure par la réponse impulsionnelle :

On applique à l'entrée du système linéaire une impulsion de Dirac $u(t) = \delta(t)$ et on obtient en sortie $y(t) = h(t)$, qui est la réponse impulsionnelle du système.

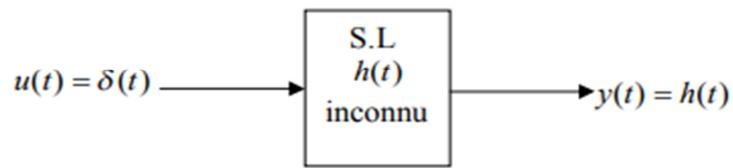


Figure (II.7) la réponse impulsionnelle

$$y(t) = u(t) * h(t) = h(t) \text{ (II.11)}$$

II.7.2.1. Mesure par la Transformée de Fourier (T.F):

L'usage de cette méthode permet de translater au domaine fréquentiel, les signaux d'entrées $u(t)$, et de sorties $y(t)$, afin de pouvoir substituer le produit de convolution dans le domaine de temps par un produit simple dans le domaine de fréquence.

$$u(t) \xrightarrow{TL} U(f) \text{ (II.12)}$$

$$y(t) \xrightarrow{TL} Y(f) \text{ (II.13)}$$

On a :

$$y(t) = u(t) * h(t) \xrightarrow{TL} Y(f) = H(f) \cdot U(f) \Rightarrow H(f) = \frac{Y(f)}{U(f)} \text{ (II.14)}$$

II.7.2.2. Par corrélation :

On distingue deux types de mesures :

II.7.2.2.1. Mesure par autocorrélation :

Comme le montre le schéma suivant :

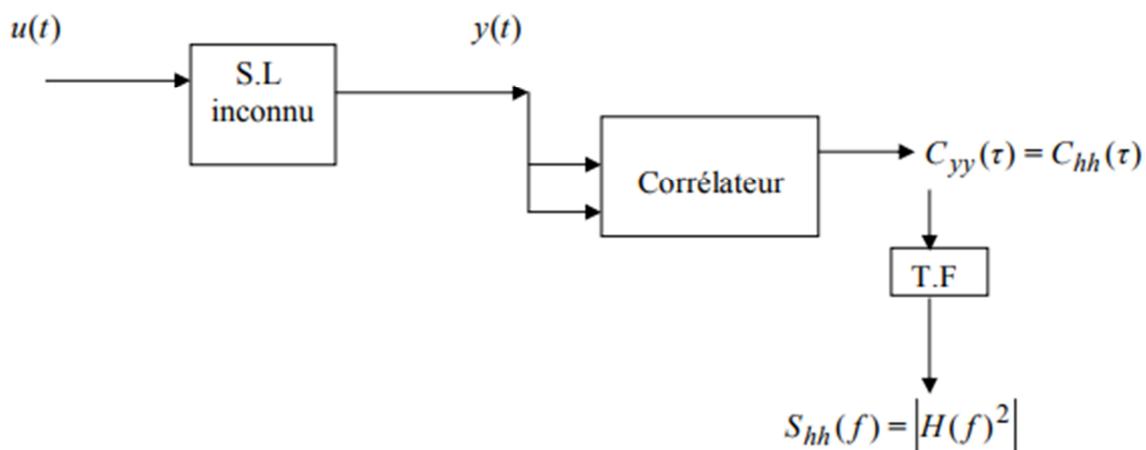


Figure II-8: application de la méthode d'auto- corrélation

$$c_{yy}(\tau) = C_{uu}(\tau) * C_{hh}(\tau) \text{ (II.15)}$$

Si tu choisis tel que :

$$c_{uu}(\tau) = \delta(\tau) \text{ (II.16)}$$

Alors :

$$C_{uu}(\tau) = \delta(\tau) * C_{hh}(\tau) \text{ (II.17)}$$

II.7.2.2.2. Mesure par intercorrélation :

On a aussi la relation suivante entre l'entrée $u(\tau)$ et la sortie $y(\tau)$ d'un système linéaire.

$$C_{yu}(\tau) = C_{uu}(\tau) * h(t) \text{ (II.18)}$$

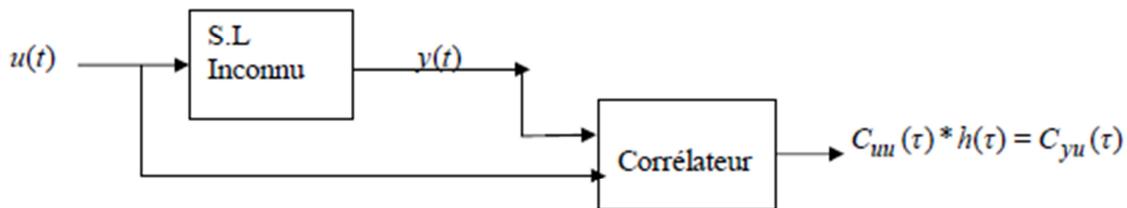


Figure (II-9): application de la méthode d'intercorrélation

Si on choisit $u(t)$ tel que $C_{uu}(\tau) = \delta(\tau)$ on obtient à la sortie du corrélateur :

$$C_{yu}(\tau) = \delta(\tau) * h(\tau) \text{ (II.19)}$$

II.8. Méthodes d'identification du modèle paramétrique : [40, 49, 41, 44]

Dans cette partie, on va étudier les méthodes utilisant le modèle paramétrique. Ce dernier consiste à caractériser un système par l'ensemble des paramètres qu'il convient de déterminer, ce qui revient à trouver le vecteur paramètres correspondant. Ces méthodes sont souvent utilisées dans l'industrie pour identifier les systèmes dynamiques.

Il existe deux types :

- Méthodes paramétriques graphiques (déterministes).
- Méthodes paramétriques statistiques.

II.8.1. Méthodes paramétriques graphiques : [40, 49]

Nous présentons successivement quelques méthodes fondamentales susceptibles d'obtenir un modèle paramétrique à partir du modèle non paramétrique en utilisant la réponse à un échelon (Strejc - Quentin).

II.8.1.1. Méthode de Strejc-Quentin : [40]

Cette méthode permet d'identifier un processus présentant une réponse indicielle aperiodique. Le modèle mathématique proposé par Strejc-Quentin est de la forme suivante :

$$T(p) = \frac{K}{(1+T_p)^n} e^{-rp} \quad (\text{II.20})$$

Les paramètres à identifier sont :

- K : le gain statique.
- r : le retard.
- T : la constante de temps.
- n : l'ordre.

Tableau de Strejc-Quentin :

n	$\frac{T_1}{T}$	$\frac{T_2}{T}$	$\frac{T_1}{T_2}$
1	0	1	0
2	0.282	2.718	0.104
3	0.805	3.695	0.218
4	1.425	4.463	0.319
5	2.100	5.119	0.410

Tableau II-1 : tableau de Strejc-Quentin

Pour identifier les paramètres du modèle à partir de la réponse indicielle du système, on trace la tangente au point d'inflexion Q. Cette dernière permet de déterminer T1 et T2.

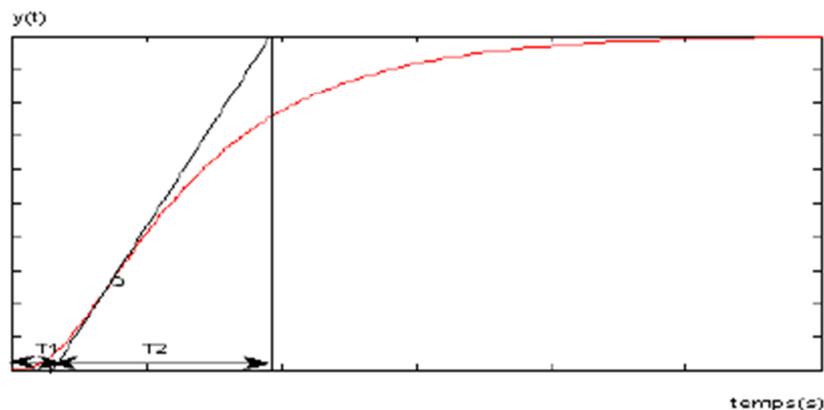


Figure II-9 : réponse indicielle du procédé

II.8.1.2. Méthode de Broïda [49] :

Le modèle proposé pour approcher le comportement du système est un premier ordre avec un retard pur. Sa fonction de transfert est donnée par :

$$T(p) = \frac{K}{1+T_p} \quad (\text{II.21})$$

Avec :

K : Gain statique.

r : Retard du modèle.

T : Constante de temps.

Le principe n'est pas de faire coïncider la tangente au point d'inflexion (souvent imprécis), mais d'ajuster les paramètres T et r pour que les courbes de réponse du modèle et du processus aient deux points communs judicieusement choisis. Les points communs C1 et C2 habituellement utilisés correspondent respectivement à 28% et 40% de la valeur finale. Le modèle de Broïda donne les points C1 et C2.

$$\frac{y(t)}{KE_0} = 0.28 \Rightarrow \frac{t-r}{T} = 0.328 \quad (\text{II.22})$$

$$\frac{y(t)}{KE_0} = 0.40 \Rightarrow \frac{t-r}{T} = 0.510 \quad (\text{II.23})$$

La méthode d'identification s'appuie sur les résultats de (II.1), (II.2). Soient t_1 et t_2 les temps au bout desquels la réponse expérimentale atteint respectivement 28% et 40% de la valeur finale. On va simplement résoudre le système donné par :

$$\frac{t_1-r}{T} = 0.328 \Rightarrow t_1 - r = 0.328T \quad (\text{II.24})$$

$$\frac{t_2-r}{T} = 0.510 \Rightarrow t_2 - r = 0.510T \quad (\text{II.25})$$

La résolution de ces équations donne :

$$T = 5.5(t_1 - t_2) \quad r = 2.8t_1 - 1.8t_2$$

Le gain K est déterminé comme dans la méthode de Strejc-Quentin.

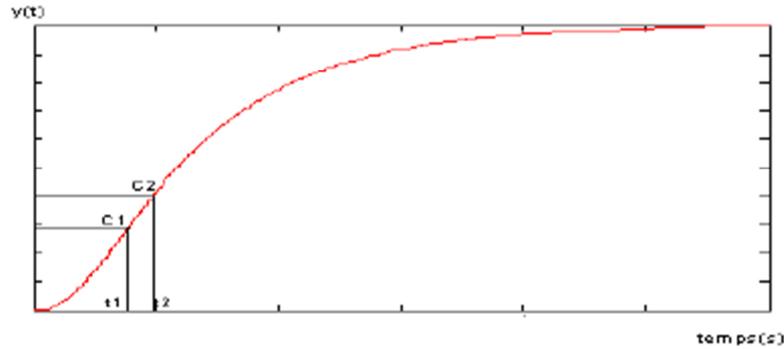


Figure II-10 : réponse indicielle du procédé.

II.8.1.3. Identification d'un processus intégrateur : [40]

Un processus du type intégrateur est caractérisé par le fait qu'une variation en échelon appliquée à son entrée correspond à une variation en rampe de sa sortie lors du régime permanent (voir figure II-10).

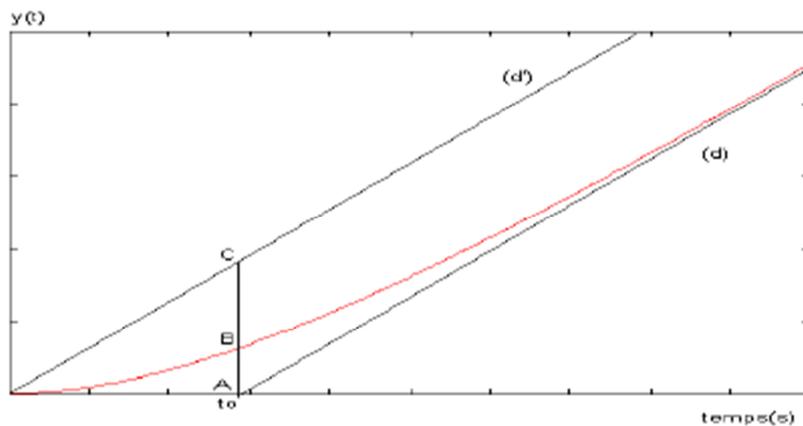


Figure II-11 réponse indicielle du processus intégrateur

n	AB/AC
1	0.368
2	0.271
3	0.224
4	0.195
5	0.175

Tableau II-2 : Tableau de processus intégrateur

On trace une droite (d') passant par l'origine, parallèle à l'asymptote (d) pour une fonction de transfert de la forme :

$$T(p) = \frac{K_0}{p} \frac{1}{(1+T_p)^n} \tag{II.26}$$

Avec :

- K_0 : Gain en vitesse.
- T : Constante de temps.
- n : Ordre du modèle.

Il est aisé de tirer de la mesure de AB/AC , grâce au tableau (II-2), la valeur de n ; la constante de temps T est déterminée par la relation : $T = \frac{t_0}{n}$

Les méthodes d'identification graphiques sont simples à utiliser et ne nécessitent que peu de matériels, mais rien n'empêche qu'elles présentent plusieurs inconvénients et parmi eux on cite :

- Sont limitées dans le choix des modèles.
- Nécessitent des signaux test d'amplitude importante (rarement tolérés par les installations industrielles)
- Sont sensibles aux perturbations (et il n'est pas possible ici de modéliser les perturbations)
- La procédure est longue, et il n'y a pas de procédures explicites de validation des modèles.

II.8.2. Méthodes statistiques [44, 41] :

La disponibilité d'un calculateur numérique permet de mettre en place des algorithmes d'estimation automatique des paramètres des modèles échantillonnés des procédés.

Le traitement de données E/S peut se faire à l'aide d'algorithmes non récursifs (traitement en bloc de données obtenues sur un horizon de temps) ou récursifs (traitement pas à pas de données), le second type d'algorithme présente l'avantage d'être en temps réel et nécessite moins de ressources en terme de calcul. [6]

L'identification paramétrique statistique est généralement basée sur l'erreur entre la sortie du procédé $y(t)$ et celle prédite $\hat{y}(t)$ par le modèle (erreur de prédiction).

II.8.2.1. Algorithme d'adaptation paramétrique [41] :

L'objectif de cet algorithme est de piloter les paramètres du modèle ajustable de prédiction à partir des informations recueillis sur le système à chaque pas d'échantillonnage.

La figure suivante montre le principe d'estimation des paramètres du modèle par un algorithme d'adaptation paramétrique.

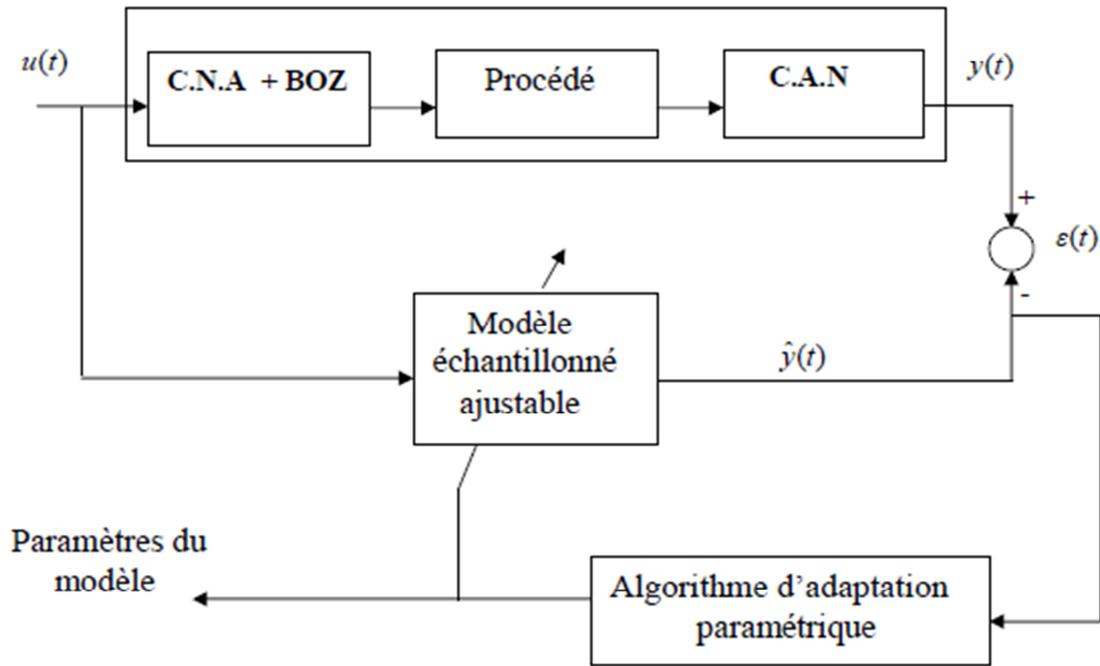


Figure II-12: principe de l'estimation des paramètres d'un modèle

Principe de l'algorithme :

Soit le système discret de la forme :

$$Y(t) = \frac{q^{-d}B(q^{-1})}{A(q^{-1})} \quad (\text{II.27})$$

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_{n_A}q^{-n_A} \quad (\text{II.28})$$

$$B(q^{-1}) = b_1q^{-1} + \dots + b_{n_B}q^{-n_B} \quad (\text{II.29})$$

Qui s'écrit encore à l'instant (t+1) sous la forme :

$$Y(t+1) = -\sum_{i=1}^{n_A} a_i y(t+1-i) + \sum_{i=1}^{n_B} b_i (t-d+1-i) = \theta^T \phi(t) \quad (\text{II.30})$$

d : est le retard pur échantillonné

y(t) et u(t) sont respectivement l'entrée et la sortie du procédé

$$\theta^T = [a_1 \dots \dots a_{n_A}, b_1 \dots \dots b_{n_B}] \quad (\text{II.31})$$

$$\phi(t)^T = [-y(t) \dots -y(t+1-n), u(t-d) \dots u(t-d-n_B+1)] \quad (\text{II.32})$$

II.8.2.2. Les algorithmes d'identification récursifs [41] :

Contrairement aux méthodes en temps différé qui nécessitent l'acquisition de toutes les données avant le calcul des paramètres, les méthodes en temps réel du type récursif réactualisent les valeurs des paramètres à chaque nouvelle acquisition

II.8.2.2.1. Algorithme de gradient :

L'algorithme d'adaptation paramétrique du gradient a comme objectif de minimiser un critère quadratique en terme de l'erreur de prédiction.

Considérons le modèle discrétisé d'un procédé décrit par :

$$y(t+1) = a_1 y(t) - a_2 y(t-1) + b_1 u(t) + b_2 u(t-1) = \theta^T \phi(t) \quad (\text{II.33})$$

Où :

$$\theta^T = [a_1 \ a_2 \ b_1 \ b_2] \quad (\text{II.34})$$

est le vecteur des paramètres

$$\phi(t)^T = [-y(t) \ -y(t-1) \ u(t) \ u(t-1)] \quad (\text{II.35})$$

est le vecteur d'observation (mesure).

Le modèle de prédiction ajustable (a priori) sera décrit dans ce cas par :

$$\hat{y}^0(t+1) = \hat{a}_1(t)y(t) - \hat{a}_2(t)y(t-1) + \hat{b}_1(t)u(t) + \hat{b}_2(t)u(t-1) = \hat{\theta}(t)^T \phi(t) \quad (\text{II.36})$$

Où :

$\hat{y}^0(t+1)$: Représente la prédiction a priori dépendant des valeurs des paramètres estimés à l'instant t.

$$\hat{\theta}(t)^T = [\hat{a}_1(t) \ \hat{a}_2(t) \ \hat{b}_1(t) \ \hat{b}_2(t)] \quad (\text{II.37})$$

est le vecteur des paramètres estimés.

La sortie à posteriori de prédiction sera donnée par :

$$\hat{y}(t+1) = -\hat{a}_1(t+1)y(t) - \hat{a}_2(t+1)y(t-1) + \hat{b}_1(t+1)u(t) + \hat{b}_2(t+1)u(t-1) = \hat{\theta}(t+1)^T \phi(t) \quad (\text{II.38})$$

On définit l'erreur de prédiction « a priori » :

$$\varepsilon^0(t+1) = y(t+1) - \hat{y}^0(t+1) \quad (\text{II.39})$$

et une erreur de prédiction « a posteriori » :

$$\varepsilon(t+1) = y(t+1) - \hat{y}(t+1) \quad (\text{II.40})$$

On cherche un algorithme d'adaptation paramétrique récursif. La structure d'un tel algorithme est donné comme suite :

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + \Delta \hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + f(\hat{\theta}(t), \varphi(t), \varepsilon^0(t+1)) \quad (\text{II.41})$$

Le terme de correction $f(\cdot)$ doit dépendre uniquement des informations disponibles à l'instant $t+1$.

Le terme de correction doit nous permettre de minimiser à chaque pas le critère :

$$\min_{\hat{\theta}(t)} J(t+1) = [\varepsilon^0(t+1)]^2 \quad (\text{II.42})$$

L'algorithme d'adaptation paramétrique correspondant aura la forme :

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) - F \frac{\delta J(t+1)}{\delta \hat{\theta}(t)} \quad (\text{II.43})$$

Où :

$F = \alpha I$ ($\alpha > 0$) est le gain d'adaptation matriciel

I : matrice diagonale unitaire et $\frac{\delta J(t+1)}{\delta \hat{\theta}(t)}$ est le gradient du critère de l'équation par rapport à $\hat{\theta}(t)$.

$$\text{De l'équation (II-16) on obtient } \frac{1}{2} \frac{\delta J(t+1)}{\delta \hat{\theta}(t)} = \frac{\delta \varepsilon^0(t+1)}{\delta \hat{\theta}(t)} \varepsilon^0(t+1) \quad (\text{II.44})$$

$$\text{Sachant que : } \varepsilon^0(t+1) = y(t+1) - \hat{y}^0(t+1) = y(t+1) - \hat{\theta}(t)^T \varphi(t) \quad (\text{II.45})$$

$$\text{Donc : } \frac{\delta \varepsilon^0(t+1)}{\delta \hat{\theta}(t)} = \phi(t) \quad (\text{II.46})$$

Introduisant l'équation (II-20) dans l'équation (II-18), ce qui donne

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) F \phi(t) \varepsilon^0(t+1) \quad (\text{II.47})$$

L'algorithme d'adaptation paramétrique donné dans l'équation (II-21) présente des risques d'instabilité si le gain d'adaptation est grand. Pour éviter ce problème d'instabilité, on utilise la même approche du gradient mais on considère un autre critère :

$$\min J_{\hat{\theta}(t+1)}(t+1) = [\varepsilon(t+1)]^2 \quad (\text{II.48})$$

On refait les mêmes calculs que précédemment, l'algorithme d'adaptation devient alors :

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + \frac{F \phi(t) \varepsilon^0(t+1)}{1 + \phi(t)^T F \phi(t)} \quad (\text{II.49})$$

qui est un algorithme stable quel que soit le gain F (positif).

II.8.2.2.2. Algorithme des Moindres Carrés Récursifs :

On considère les mêmes équations pour le procédé, le modèle de prédiction et les erreurs de prédiction utilisées dans l'algorithme du gradient, à savoir les équations (II-33) à (II-40).

L'objectif est de trouver un algorithme récursif de la forme de l'équation (II-41) qui minimise le critère des moindres carrés.

$$\min_{\hat{\theta}(t)} J(t) = \sum_{i=1}^t [y(i) - \hat{\theta}(t)^T \phi(i-1)]^2 \quad (\text{II.50})$$

Le terme $\hat{\theta}(t)^T \phi(i-1)$ correspond à :

$$\hat{\theta}(t)^T \phi(i-1) = \hat{a}_1 y(i-1) - \hat{a}_2(t) y(i-2) + \hat{b}_1(t) u(i-1) + \hat{b}_2(t) u(i-2) \quad (\text{II.51})$$

C'est donc la prédiction de la sortie à l'instant i ($i \leq t$) basée sur l'estimation des paramètres à l'instant « t » obtenue à l'aide de « t » mesures.

Dans un premier temps, il s'agit d'estimer le vecteur de paramètres à l'instant t pour qu'il minimise la somme des carrés des écarts entre le procédé et le modèle de prédiction sur un horizon de t mesures. La valeur de $\hat{\theta}(t)$ qui minimise le critère (II-50) s'obtient en cherchant la valeur qui

annule $\frac{\delta J(t)}{\delta \hat{\theta}(t)}$

$$\frac{\delta J(t)}{\delta \hat{\theta}(t)} = -2 \sum_{i=1}^t [y(i) - \hat{\theta}(t)^T \phi(i-1)] \phi(i-1) \quad (\text{II.52})$$

De l'équation (II-26), tenant compte de :

$$[\hat{\theta}(t)^T \phi(i-1)] \phi(i-1) = \phi(i-1) \phi(i-1)^T \hat{\theta}(t) \quad (\text{II.53})$$

On obtient :

$$\phi(i-1) \phi(i-1)^T \hat{\theta}(t) = \sum_{i=1}^t y(i) \phi(i-1) \quad (\text{II.54})$$

Il en résulte :

$$\hat{\theta}(t) = \left[\sum_{i=1}^t \phi(i-1) \phi(i-1)^T \right]^{-1} \sum_{i=1}^t y(i) \phi(i-1) \quad (\text{II.55})$$

$$= F \sum_{i=1}^t y(i) \phi(i-1) \quad (\text{II.56})$$

Où :

$$F(t)^{-1} = \sum_{i=1}^t \phi(i-1) \phi(i-1)^T \quad (\text{II.57})$$

Cet algorithme d'estimation n'est pas récursif, on considère l'estimation de $\hat{\theta}(t+1)$:

$$\hat{\theta}(t+1) = F(t+1) \sum_{i=1}^{t+1} y(i) \phi(i-1) \quad (\text{II.58})$$

$$F(t+1)^{-1} = \sum_{i=1}^{t+1} \phi(i-1) \phi(i-1)^T \quad (\text{II.59})$$

Pour éviter l'inversion de la matrice $F(t+1)$ à chaque pas d'échantillonnage, on utilise le Lemme d'inversion matricielle (voir l'annexe) :

Considérons:

$$A = F(t)^{-1} \quad , \quad B = \phi(t) \quad , \quad C = 1 \quad , \quad D = \phi(t)^T$$

On aura :

$$F(t+1) = F(t) - \frac{F(t)\phi(t)\phi(t)^T F(t)}{1 + \phi(t)^T F(t)\phi(t)} \quad (\text{II. 60})$$

En regroupant les différentes équations, nous donnons ci-après une formulation de l'algorithme d'adaptation paramétrique (A.A.P) des moindres carrés récursifs (M.C.R).

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t)F(t)\phi(t)\varepsilon(t+1) \quad (\text{II. 61})$$

$$F(t+1)^{-1} = F(t)^{-1} + \phi(t)\phi(t)^T \quad (\text{II. 62})$$

$$F(t+1) = F(t) - \frac{F(t)\phi(t)\phi(t)^T F(t)}{1 + \phi(t)^T F(t)\phi(t)} \quad (\text{II. 63})$$

$$\varepsilon(t+1) = \frac{y(t+1) - \hat{\theta}(t)\phi(t)}{1 + \phi(t)^T F(t)\phi(t)} \quad (\text{II. 64})$$

II.8.2.3. Initialisation de l'algorithme : [44]

La matrice $F(t+1)$ appelée « gain d'adaptation », est une matrice définie positive [voir l'annexe]. Son rôle est de moduler automatiquement la longueur du pas de correction. En pratique, On démarre l'algorithme à $t=0$ en posant :

$$F(0) = \frac{1}{\delta}I = GI, \quad 0 < \delta \ll 1 \quad (I \text{ est une matrice identité, } G = \frac{1}{\delta})$$

Généralement les valeurs de δ varient entre 10^{-2} et 10^{-4} .

Aucune entrée de table des matières n'a été trouvée.

II.8.2.4. Choix du gain d'adaptation : [41]

L'algorithme des M.C.R est à gain décroissant et tend vers zéro quand l'horizon d'estimation augmente, ce qui garantit la convergence de l'algorithme lorsque les paramètres à estimer sont constants.

Dans le cas des paramètres variables, l'algorithme ne converge pas, il faut donc augmenter à chaque pas la valeur du gain en fonction des variations des paramètres, et ceci en introduisant deux facteurs de pondération $\lambda_1(t)$ et $\lambda_2(t)$ dans l'équation de $F(t+1)^{-1}$ qui sera écrite comme suit :

$$F(t+1)^{-1} = \lambda_1(t)F(t) + \lambda_2(t)\phi(t)\phi(t)^T \quad (\text{II.65})$$

Avec :

$\lambda_1(t)$: Facteurs de croissance tel que $0 < \lambda_1(t) \leq 1$

$\lambda_2(t)$: Facteurs de croissance tel que $0 < \lambda_2(t) \leq 2$

Pour chaque choix des facteurs $\lambda_1(t)$ et $\lambda_2(t)$ correspond un profil de variation de la matrice du gain F , qui peut être utilisée pour l'identification des paramètres variables.

En utilisant le Lemme d'inversion matricielle, on obtient :

$$F(t+1) = \frac{1}{\lambda_1(t)} \left[F(t) - \frac{F(t)\phi(t)\phi(t)^T F(t)}{\frac{\lambda_1(t)}{\lambda_2(t)} + \phi(t)^T F(t)\phi(t)} \right] \quad (\text{II. 66})$$

Les méthodes statistiques est une approche moderne de l'identification. Elle présente beaucoup d'avantages. On cite :

- Obtention d'une estimation du modèle au fur et à mesure que le procédé évolue.
- Compression importante des données, car les algorithmes récursifs ne traitent à chaque instant qu'une paire entrée / sortie au lieu de l'ensemble de données entrée / sortie.
- Mise en œuvre aisée sur micro-ordinateur.
- Possibilité de réalisation de systèmes d'identification temps réel.
- Élimine les défauts mentionnés des méthodes graphiques et permet un suivi des paramètres en temps réel.
- Permet de modéliser (et supprimer si besoin) les perturbations.

Elle représente aussi des inconvénients. On cite:

- Il n'y a pas de structure unique « procédé + perturbation » pour décrire toutes les situations rencontrées en pratique, et il n'y a pas non plus une méthode unique d'identification donnant dans toutes les situations des estimations non biaisées.

II-9- Conclusion :

Ce chapitre a pour objectif l'identification des systèmes d'ordre fractionnaire par la méthode du modèle. Cette méthode permet de ramener le problème d'identification à un problème d'optimisation, dont les variables de décision sont les paramètres du modèle à identifier. Ce problème d'optimisation consiste à minimiser l'erreur entre la sortie mesurée et celle prédite par le modèle.

Chapitre III La Comparaison entre les méthodes d'approximation et la méthode d'identification

III.1. Introduction :

Après avoir présenté les bases du calcul fractionnaire et des systèmes d'ordre fractionnaire dans le Chapitre I, montré la nécessité d'approximer ces systèmes par des modèles d'ordre entier, ainsi que les méthodes d'identifications dans le Chapitre II.

Ce présent Chapitre va traiter des exemples d'application en utilisant les différentes méthodes d'approximations des systèmes fractionnaires (Matsuda, Oustaloup) présentées précédemment (voir chapitre 1) et la méthode d'identification qui présentée dans le chapitre 2 pour l'objectif de comparaison avec le systèmes d'ordre fractionnaires .

III.2. Structure générale d'identification d'ordre fractionnaire :

La Structure générale de comparaison entre la sortie du système d'ordre fractionnaire avec celles obtenues par la méthode d'identification et les deux méthodes d'approximation qui sont Oustaloup et Matsuda est donnée par la figure (III-1).

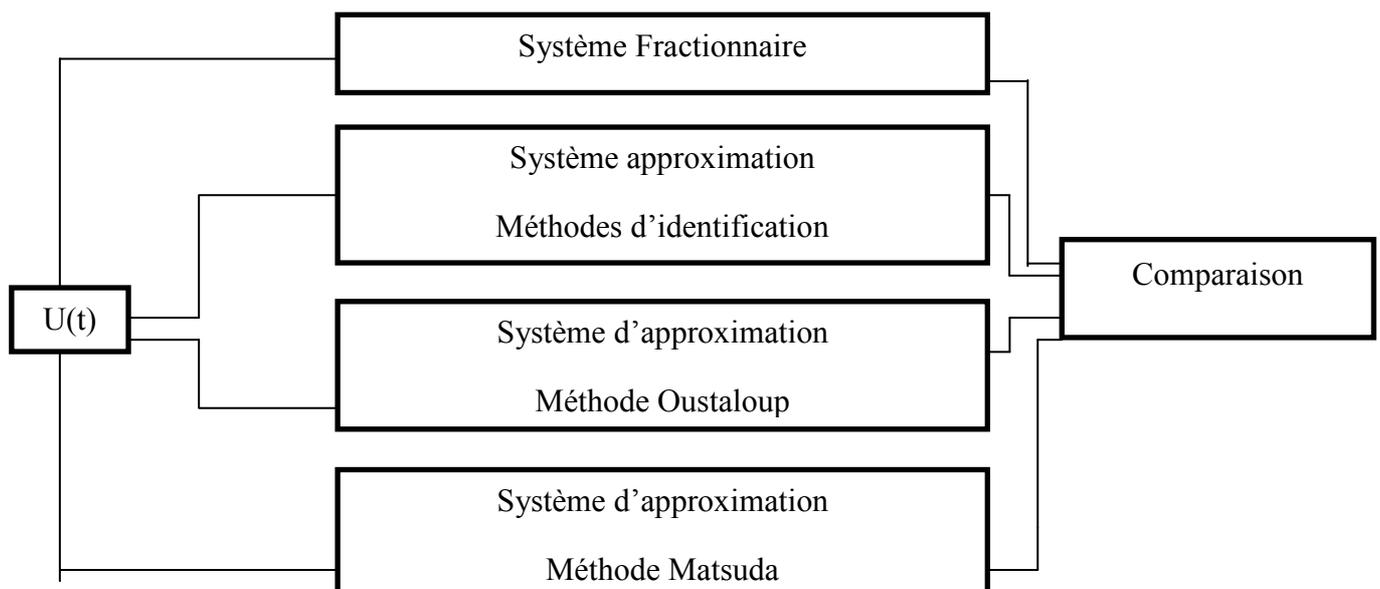


Figure III.1 Structure générale d'identification d'ordre fractionnaire

III.3. Les intégrateurs fractionnaires :

Les tableaux suivants présente les différents intégrateur fractionnaires approximés obtenus en utilisant les deux méthodes d'approximation qui sont Oustaloup et Matsuda:

Table III.1. Intégrateur fractionnaires approximé avec la méthode d'Oustaloup

$G_{\alpha}(s) = \frac{1}{s^{\alpha}}$	Méthode d'Oustaloup
$G_{0.1}(s)$	$\frac{0.5012s^5 + 197.6 s^4 + 7081 s^3 + 25120 s^2 + 8826 s + 281.8}{s^5 + 313.2s^4 + 8914s^3 + 25120 s^2 + 7011 s + 177.8}$
$G_{0.2}(s)$	$\frac{0.2512s^5 + 111.1 s^4 + 4468 s^3 + 17790 s^2 + 7011 s + 251.2}{s^5 + 279.1s^4 + 7081s^3 + 17790 s^2 + 4423 s + 100}$
$G_{0.3}(s)$	$\frac{0.1259 s^5 + 62.48 s^4 + 2819 s^3 + 12590 s^2 + 5569 s + 223.9}{s^5 + 248.7s^4 + 5624s^3 + 12590 s^2 + 2791 s + 56.23}$
$G_{0.4}(s)$	$\frac{0.0631s^5 + 35.14 s^4 + 1779 s^3 + 8914 s^2 + 4423 s + 199.5}{s^5 + 221.7s^4 + 4468 s^3 + 8914 s^2 + 1761 s + 31.62}$
$G_{0.5}(s)$	$\frac{0.03162 s^5 + 19.76 s^4 + 1122 s^3 + 6311 s^2 + 3514 s + 177.8}{s^5 + 197.6 s^4 + 3549s^3 + 6311 s^2 + 1111 s + 17.78}$
$G_{0.6}(s)$	$\frac{0.01585s^5 + 11.11 s^4 + 708.1 s^3 + 4468 s^2 + 2791 s + 158.5}{s^5 + 176.1s^4 + 2819s^3 + 4468s^2 + 701.1 s + 10}$
$G_{0.7}(s)$	$\frac{0.007943s^5 + 6.248 s^4 + 446.8 s^3 + 3163 s^2 + 2217 s + 141.3}{s^5 + 156.9 s^4 + 2239 s^3 + 3163 s^2 + 442.3 s + 5.623}$
$G_{0.8}(s)$	$\frac{0.003981s^5 + 3.514 s^4 + 281.9 s^3 + 2239 s^2 + 1761 s + 125.9}{s^5 + 139.9s^4 + 1779s^3 + 2239s^2 + 279.1 s + 3.162}$
$G_{0.9}(s)$	$\frac{0.001995s^5 + 1.976 s^4 + 177.9 s^3 + 1585 s^2 + 1399 s + 112.2}{s^5 + 124.7s^4 + 1413s^3 + 1585s^2 + 176.1 s + 1.778}$

Table III.2. Intégrateur fractionnaires approximé avec la méthode Matsuda

$G_{\alpha}(s) = \frac{1}{s^{\alpha}}$	Méthode de Matsuda
$G_{0.1}(s)$	$\frac{0.4342 s^5 + 347.1 s^4 + 15130 s^3 + 54070 s^2 + 16070 s + 281.8}{s^5 + 570.1 s^4 + 19190 s^3 + 53670 s^2 + 12320 s + 154.1}$
$G_{0.2}(s)$	$\frac{0.1877 s^5 + 180.5 s^4 + 8971 s^3 + 36260 s^2 + 12240 s + 281.8}{s^5 + 487.1 s^4 + 14440 s^3 + 35710 s^2 + 7186 s + 74.71}$
$G_{0.3}(s)$	$\frac{0.0803 s^5 + 94.29 s^4 + 5357 s^3 + 24490 s^2 + 9372 s + 223.9}{s^5 + 418.6 s^4 + 10940 s^3 + 23930 s^2 + 4212 s + 35.87}$
$G_{0.4}(s)$	$\frac{0.0338 s^5 + 49.41 s^4 + 3216 s^3 + 16630 s^2 + 7214 s + 199.5}{s^5 + 361.6 s^4 + 8336 s^3 + 16120 s^2 + 2476 s + 16.94}$
$G_{0.5}(s)$	$\frac{0.01386 s^5 + 25.92 s^4 + 1940 s^3 + 11350 s^2 + 5576 s + 177.8}{s^5 + 313.5 s^4 + 6383 s^3 + 10910 s^2 + 1458 s + 7.797}$
$G_{0.6}(s)$	$\frac{0.005466 s^5 + 13.6 s^4 + 1174 s^3 + 7778 s^2 + 4324 s + 158.5}{s^5 + 272.8 s^4 + 4908 s^3 + 7405 s^2 + 858.3 s + 3.449}$
$G_{0.7}(s)$	$\frac{0.00202 s^5 + 7.128 s^4 + 712 s^3 + 5348 s^2 + 3363 s + 141.3}{s^5 + 238.1 s^4 + 3786 s^3 + 5040 s^2 + 504.6 s + 1.43}$
$G_{0.8}(s)$	$\frac{0.0006621 s^5 + 3.723 s^4 + 432.7 s^3 + 3687 s^2 + 2622 s + 125.9}{s^5 + 208.3 s^4 + 2929 s^3 + 3437 s^2 + 295.8 s + 0.526}$
$G_{0.9}(s)$	$\frac{0.0001622 s^5 + 1.936 s^4 + 263.4 s^3 + 2548 s^2 + 2049 s + 112.2}{s^5 + 182.6 s^4 + 2271 s^3 + 2347 s^2 + 172.5 s + 0.1446}$

III-4. Simulation:

Systeme 1:

Soit un système d'ordre fractionnaire suivant :

$$G_f(s) = \frac{5}{s^{1.2}+10} \quad (\text{III-1})$$

La figure suivante présente les différentes sorties du système (III-1) en utilisant la méthode d'identification existante dans le logiciel matlab (interface IDENT) et les deux méthodes d'approximation qui sont Oustaloup et Matsuda .

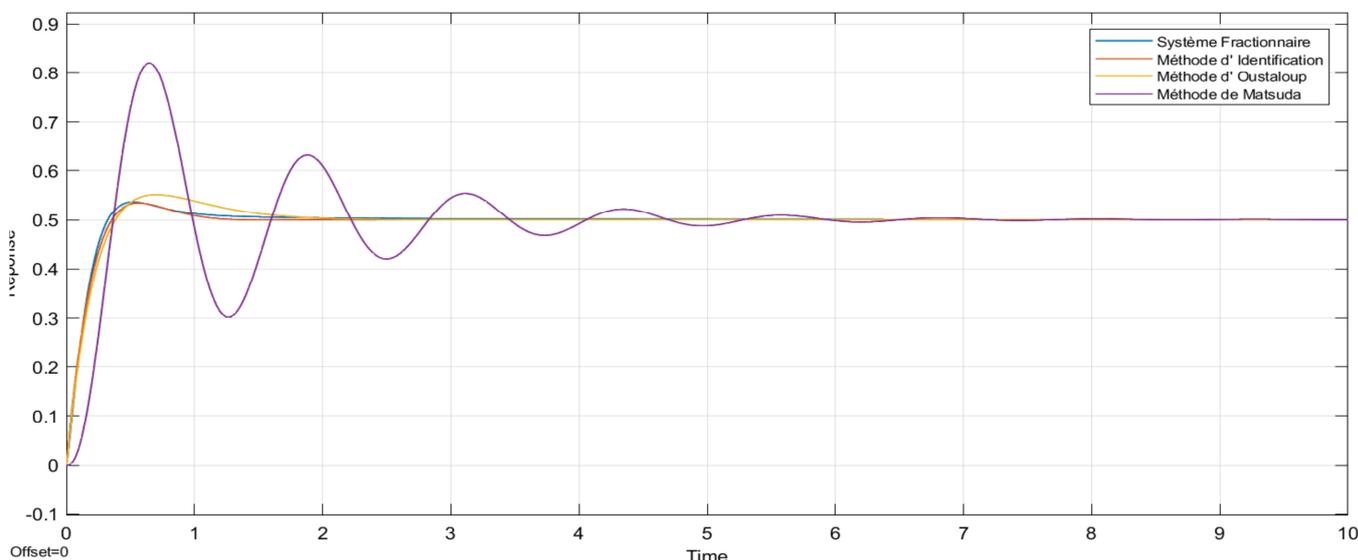


Figure III.2. La comparaison entre les méthodes d'approximations et la méthode d'identification

Systeme 2:

Soit un système d'ordre fractionnaire suivant :

$$G_f(s) = \frac{25}{3s^{1.5}+7} \quad (\text{III-2})$$

La figure suivante présente les différentes sorties du système (III-2) en utilisant la méthode d'identification existante dans le logiciel matlab (interface IDENT) et les deux méthodes d'approximation qui sont Oustaloup et Matsuda .

Chapitre III La Comparaison entre la méthode les méthodes d'approximation et la méthode d'identification

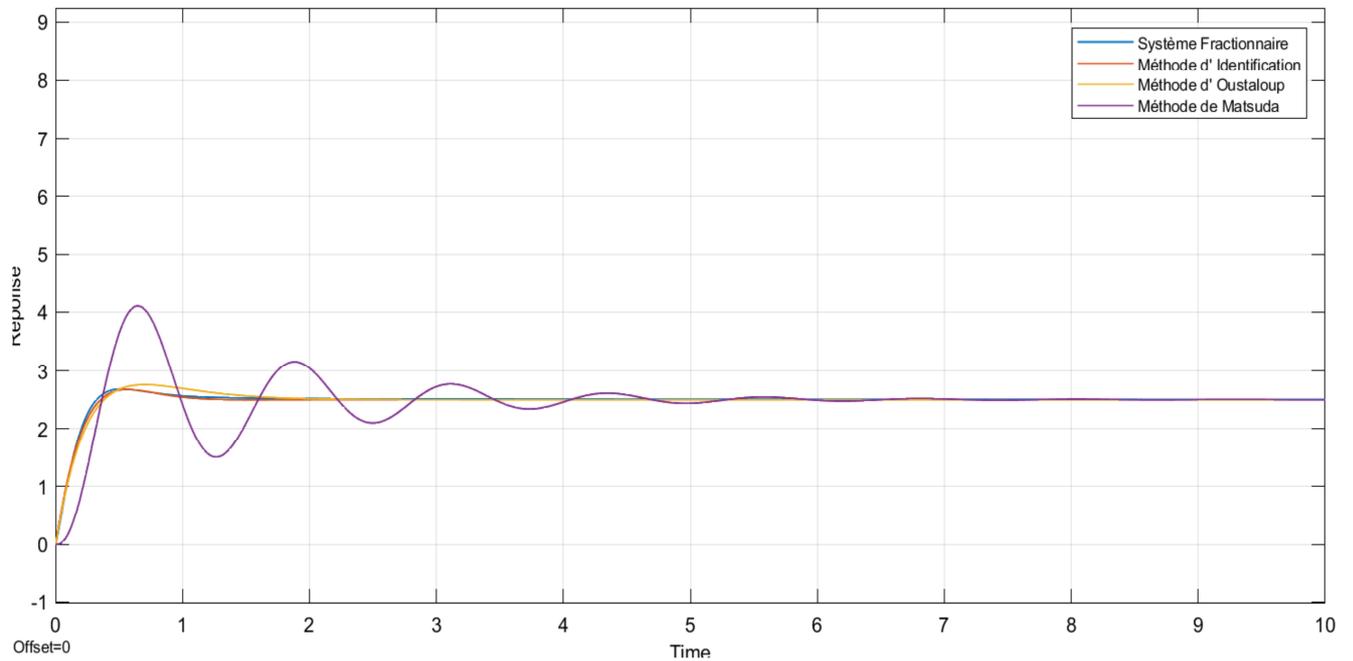


Figure III.3. La comparaison entre les méthodes d'approximations et la méthode d'identification

Systeme 3:

Soit un système d'ordre fractionnaire suivant :

$$G_f(s) = \frac{30}{2.s^{1.8}+9} \quad (\text{III-3})$$

La figure suivante présente les différentes sorties du système (III-3) en utilisant la méthode d'identification existante dans le logiciel matlab (interface IDENT) et les deux méthodes d'approximation qui sont Oustaloup et Matsuda .

Chapitre III La Comparaison entre la méthode les méthodes d'approximation et la méthode d'identification

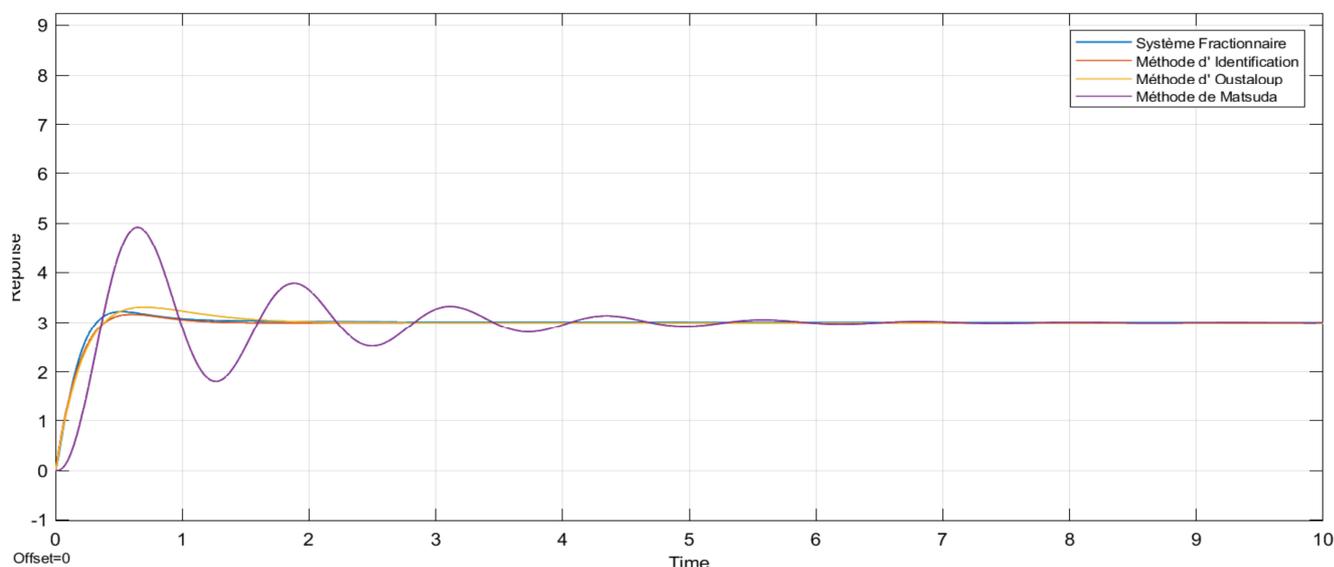


Figure III.4. La comparaison entre les méthodes d'approximations et la méthode d'identification

Commentaires:

D'après les figures (III-2), (III-3) et (III-4) on remarque que:

- La sortie du système approximé en utilisant la méthode d'identification et celle d'oustaloup est presque identique à celle du système fractionnaire original.
- La sortie du système approximé en utilisant la méthode de matsuda converge vers la même valeur finale de sortie du système fractionnaire original mais malheureusement présente des oscillations amorties en régime transitoire.
- La méthode d'identification est meilleure par rapport a celle d'oustaloup et matsuda (voir la courbe en couleur orange).

III.4. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté une comparaison entre la sortie du système d'ordre fractionnaire avec celles obtenues par la méthode d'identification et les deux méthodes d'approximation qui sont Oustaloup et Matsuda.

D'après les résultats de simulation obtenus, nous avons remarqué que la sortie du système obtenue par la méthode d'identification est meilleure par rapport à celles obtenues en utilisant les deux méthodes d'approximations d'oustaloup et de Matsuda.

Conclusion Générale

Ce travail porte essentiellement sur l'approximation et l'identification des systèmes d'ordre fractionnaire. En effet de nouvelles techniques sont proposées dans ce sens, tout en montrant leurs avantages en les appliquant aux différents procédés.

La première partie de ce travail est consacrée à la présentation de notions de base sur le calcul fractionnaire et les différentes méthodes d'approximations des systèmes d'ordre fractionnaires. Dans la deuxième partie nous avons présenté les méthodes d'identification des systèmes et la troisième partie de ce travail a été consacrée à l'application des différentes méthodes (identification et les méthodes d'approximation) pour l'objectif de comparaison entre des différentes sortie obtenues avec celle du systèmes fractionnaire original .

D'après les résultats de simulation obtenus , nous avons remarqué que la sortie du système obtenue par la méthode d'identification est meilleure par rapport a celles obtenues en utilisant les deux méthodes d'approximations d'oustaloup et de Matsuda.

Perspectives...

Ce travail pourrait donner lieu à des études complémentaires dans les directions suivantes :

- Jusqu'à présent, nous avons considéré des systèmes bien modélisés, mais on sait qu'en pratique, les modèles sur lesquels on s'appuie sont incertains. La prise en charge de modèles incertains est un challenge important pour les futurs travaux.
- Généraliser les résultats obtenus au cas des systèmes multi-variables.
- Utiliser la méthode d'identification pour approximer les différents systèmes d'ordre fractionnaire.

Bibliographie

- [1] A. Djouambi « Contribution à la commande CRONE ». Thèse de Doctorat, Université Mentouri de Constantine. Soutenue en 2008.
- [2] M. Assaba « Contribution à la commande d'ordre fractionnaire ». Thèse de Doctorat. Université de Constantine. Soutenue en 2015.
- [3] K. Bettou « Analyse et réalisation de correcteurs analogiques d'ordre fractionnaire ». Thèse de Doctorat. Université Mentouri de Constantine. Soutenue en 2011.
- [4] A. SI Ammour « Contribution à la commande par mode glissants d'ordre fractionnaire ». Thèse de Doctorat. Université Mouloud Mammeri Tizi Ouzou 2006.
- [5] I.A. Brin. On the stability of certain systems with distributed and lumped parameters, Automatic Remote Control, N° 23, 1962.
- [6] R Caponetto ., G Dongola ., L Fortuna .,I Petrás .“A Fractional Model for IPMC Actuators,” IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference Proceedings, IMTC 2008, pp. 2103-2107, 12-15 May 2008.
- [7] A Charef .“Analogurealisation of fractional-order integrator, differentiator and fractional $PI^{\lambda}D^{\mu}$ controller,” IEE Proc.-Control Theory Appl., Vol. 153, pp. 714-720,2006.
- [8]A Charef ., “Modeling and Analog Realization of the Fundamental Linear Fractional Order Differential Equation”, Nonlinear Dynamics, Vol. 46, pp. 195-210, 2006.
- [9]A Charef ., H.H Sun.,Y.Y Tsao .,B Onaral. . “Fractal system as represented by singularity function,” IEEE Trans. On Automatic Control, Vol.37, No. 9, pp.1465-1470,1992.
- [10] R Colbaugh .,K Glass ., H Seraji ., “Adaptive tracking control of manipulators: Theory and experiments,” Robotics& Computer-Integrated Manufacturing; pp209–216,1996.
- [11] D Craiem .O.,Armentano R.L. “Arterial viscoelasticity: a fractional derivative model,” 28th Annual International Conference of the IEEE on Engineering in Medicine and Biology Society, EMBS '06, pp. 1098-1101, September 3, 2006.
- [12]A.M.A. El-Sayed and F.M. Gaafar. Fractional calculus and some intermediate physical processes. Applied Mathematics and Computation, 144, 2003.
- [13]Y Ferdi . “Computation of Fractional Order Derivative and Integral via Power Series Expansion and Signal Modelling”. Nonlinear Dynamics, Vol. 46, pp. 1-15, 2006.

Bibliographie

- [14] R Gorenflo ,F Mainardi . “ Fractional Calculus: Integral and Differential Equations of Fractional Order, Fractals and Fractional Calculus ,” in Continuum Mechanics, Springer Verlag, pp. 223 – 276, Wien and New York, 1997.
- [15] R Hilfer . “Applications of Fractional Calculus in Physics,” World Scientific, 2000.
- [16] K Hamdaoui . A Charef. “A New Discretization Method for Fractional Order Differentiators via Bilinear Transformation,” 15th Int. Conference on Digital Signal Processing, Cardiff, UK, July 1-4, pp. 280-283, 2007.
- [17] T Houmor . “Analyse du Chaos dans un Système d’Équations Différentielles Fractionnaires,” Thèse Doctorat en sciences, Université Mentouride Constantine, 2014.
- [19] V Kulish V. W.K Chan . “Fractional Model of Market Behavior: a New Modeling Approach,” International Conference on Cyberworlds, pp. 289-296, 23-25 November 2005.
- [20] S Ladaci , Y Bensafia . “Indirect fractional order pole assignment based adaptive control”, Engineering Science and Technology, an International Journal, Elsevier, [DOI: 10.1016/j.jestch.2015.09.004], 2015.
- [21] S Ladaci , A Charef. “An Adaptive Fractional $PI^{\lambda}D^{\mu}$ Controller” in Proceedings Sixth International Symposium on Tools and Methods of Competitive Engineering, TMCE 2006. Edited by I. Horvath and J. Duhovnik, Ljubljana, Slovenia, pp. 1533-1540, Avril 18-22, 2006.
- [22] S Ladaci , A Charef A. “Commande adaptative à modèle de référence d’ordre fractionnaire d’un bras de robot,” Revue Communication Sciences & Technologie, pp. 50–52, 2002.
- [23] S Ladaci , A Charef . “Fractional order adaptive control systems: A survey,” In: E. W. Mitchell, S. R. Murray (Ed.), Classification and Application of Fractals. Nova Science Publishers, USA, pp. 261-275, October 2012.
- [24] S Ladaci , A Charef , J.J Loiseau. ., “Robust fractional adaptive control based on the strictly positive realness condition,” Int. J. of Applied Mathematics and Computer Science; Vol. 19, No. 1, pp. 69-76, 2009.
- [25] S Ladaci “Contribution a la Commande Adaptative d'Ordre Fractionnaire,” Thèse de Doctorat, Département d'Electronique, Université Mentouri de Constantine, 2007.

Bibliographie

- [26] R. Martinez, Y. Bolea, A. Grau, H. Martinez. "Fractional DC/DC converter in solar-powered electrical generation systems," IEEE Conference on Emerging Technologies & Factory Automation, ETFA 2009, pp. 1-6, 22-25 September 2009.
- [27] K. Matsuda, H. Fuji. "H1 optimized wave-absorbing control: analytical and experimental results," J. Guidance, Contr. & Dynamics, Vol. 16, pp. 1146–1153, 1993.
- [28] A. Monje, Y. Q. Chen. "Fractional-order Systems and Controls, Fundamentals and Applications", pp. 193-194, Springer, 2010.
- [29] I. N'Doye, M. Zasadzinski, N. E. Radhy, A. Bouaziz. "Robust Controller Design for Linear Fractional-Order Systems with Nonlinear Time-Varying Model Uncertainties," 17th Mediterranean Conference on Control and Automation, MED'09, pp. 821-826, Thessaloniki, 24-26 June 2009.
- [30] Oustaloup A., Mathieu B., Lanusse P. "The CRONE control of resonant plants: application to a flexible transmission," European J. Contr., Vol. 1, pp. 113–121, 1995.
- [31] A. Oustaloup. "La Commande CRONE," Hermès science publications, Paris, 1991.
- [32] A. Oustaloup, X. Moreau, M. Nouillant. "The CRONE suspension," Control Eng. Practice, Vol. 4, No. 8, pp. 1101–1108, 1996.
- [33] I. Podlubny. "Fractional Differential Equations," Academic Press, New York, 1999.
- [34] I. Petras, I. Podlubny, P. O'Leary, L. Dorcak, B.M. Vinagre. "Analogue Realization of Fractional Order Controllers," Fakulta Berg, TU Kosice, 2002.
- [35] S. Racewicz, D. Riu, N. Retière, J. Chrzan. "Non linear half-order modeling of synchronous machine," IEMDC 2009, pp. 778-783, Miami, Florida, 3-6 May 2009.
- [36] S.G. Samko, A.A. Kilbas, and O.I. Marichev. Fractional integrals and derivatives: "Theory and applications. Gordon and Breach Science Publishers." 1993.
- [37] H.M. Srivastava and R.K. Saxena. Operators of fractional integration and their applications. Applied Mathematics and Computation, 118, 2001.
- [38] B.M. Vinagre, I. Petras, I. Podlubny, Y.Q. Chen. "Using fractional-order adjustment rules and fractional order reference models in model reference adaptive control," Nonlinear Dynamics and

Bibliographie

Chaos in Engineering Systems, Nonlinear Dynamics, Vol. 29, pp. 269-279, 2002.

[39] Document Internet (Traitement des signaux numériques -II filtrage adaptatif et analysespectrale) Auteur : Jacob Benesty, 2005.

[40] Maurice Rivoire /Jean-louis Ferrier : « Commande par ordinateur identification (tome 3) ».Edition Eyrolles 1997.

[41] Ioan Dore Landau : « Identification et commande des systèmes », Edition Hermès Paris – Londres –Lausanne1993.

[42] S. Guermah: Etude et mise en œuvre des méthodes d'identification dynamique de procédé , projet de fin d'études , 1993

[43] Ioan Dore Landau : « Identification des systèmes ».Edition Hermès Paris –Londres – Lausanne. 1998

[44] Projet de fin d'études : « Etude de deux algorithmes d'identification l'algorithme des moindres carrés récursifs et algorithme de Levy . » année 2006 Mr. Mansouri.

[45] <https://pagespro.isae-supaero.fr>

[46] https://www.academia.edu/5458333/Identification_dessys_emes_lin%C3%A9aires

[47]H.-S Ahn.,V Bhambhani ,Y.-Q Chen . Fractional-order integral and derivative controller for temperature profile tracking. Sadhana. Vol. 34, No. 5, pp. 833-850, October 2009.

[48]M. Aoun, R Malti ,F Levron ,A Oustaloup . Numerical Simulations of Fractional Systems:An Overview of Existing Methods and Improvements. Nonlinear Dynamics, Vol. 38, pp. 117-131, 2004.

[49]T Bensouici. , A Charef.. “Design of fractional order digital FIR integrator and differentiator,” 1^{ère}ConférenceInternationale enGénieElectrique, CIGET'09, Tébessa, Algérie, 25-26 Octobre, 2009.

[50]N. Bertrand., J. Sabatier , O.Briat ,J.M. Vinassa . “Fractional non-linear modelling of ultracapacitors,” Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Elsevier, Vol.15, No. 5, pp. 1327-1337, 2010.