

Ordre...../F.S.S.A/UAMOB/2021

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE AKLI MOAND OULHADJE-BOUIRA



Faculté des Sciences et des Sciences Appliquées

Département de Génie Mécanique

Mémoire de fin d'étude

Présenté par :

Mesdour AZIZ

Gacem OUSSAMA

En vue de l'obtention du diplôme de Master 02 en :

Filière : Génie Mécanique

Option : Energétique

Thème :

**Modélisation numérique de la convection double-
diffusive dans une cavité carrée.**

Devant le jury composé de :

..... MC...	UAMOB	Président
..... MC...	UAMOB	Encadreur
..... MC...	UAMOB	Examinateur
..... MC...	UAMOB	Examinateur

Année Universitaire 2020/2021

A decorative border of repeating floral motifs surrounds the text. The motifs are stylized, resembling small flowers or leaves, arranged in a continuous line.

Remerciement

Nous remercions avant tout Dieu qui nous a guidé vers la lumière du savoir, sans lui nous n'en serons pas là.

Nos chaleureux et sincères remerciements vont tout d'abord :

A notre promoteur : Dr. Saber Hamimid, nous lui témoignons toute notre gratitude et reconnaissance pour nous avoir encouragées, consacré son temps précieux et nous accordé son attention avec une extrême patience.

Nous présentons également nos remerciements aux membres du jury qui nous font l'honneur d'évaluer et de juger notre travail.

Nous remercions également nos familles respectivement qui nous ont aidées, encouragées et soutenues dans les moments difficiles tout au long de la préparation de ce mémoire, sans oublier tous les professeurs de l'université de Bouira qui nous ont suivies durant notre cursus universitaire.

Enfin, nous remercions toute personne parmi nos camarades ou autres qui nous ont aidées de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

A toute ces personnes, nous leurs disons merci infiniment.

A decorative border of repeating floral motifs surrounds the text.

Dédicace

Je dédie ce mémoire :

A mes chers parents, que je remercie, pour leurs amours, leurs patiences, leurs sacrifices à m'élever et à me rendre ce que je suis en ce moment ; et pour leur soutien moral et physique.

A mes chères frères et sœurs et à toute ma famille.

A mes chers amis qui ont partagé avec moi les joies et les peines de l'université.

A tous les enseignants qui ont contribué à ma formation.

A mes collègues de la promotion 2020/2021, et à tous qui me considèrent.

A vous tous, je dédie le fruit de ce travail.

Aziz

Oussama

Nomenclature :

A	La surface	$[m^2]$
H	Côté de la cavité	$[m]$
N	Rapport de flottement	
g	Accélération de la pesanteur	$[m.s^{-2}]$
T_h	Température froide	$[K]$
T_c	Température chaude	$[K]$
C_h, C_c	La concentration sur les parois verticales gauche et droite	
T_0	Température de référence	$[K]$
C_0	Concentration dimensionnelle du soluté sur la paroi active	
C	Concentration dimensionnelle du soluté	
K	Conductivité thermique	$[W.m^{-1}.K^{-1}]$
dT/dx	Gradient de température	$[K.m^{-1}]$
C_p	Capacité thermique à pression constante	$[j.kg^{-1}.K^{-1}]$
D	Coefficient de Diffusivité massique	$[m^2.s^{-1}]$
t	Temps	$[s]$
u, v	Composantes de la vitesse	$[m.s^{-1}]$
x, y	Coordonnées cartésiennes	$[m]$
U, V	Composantes adimensionnelles de la vitesse	
X, Y	Coordonnées cartésiennes adimensionnelles	
P	La pression	$[pa]$
\bar{p}	Pression thermodynamique moyennes	$[pa]$
\bar{P}	Pression thermodynamique adimensionnelle	
\vec{V}	Vecteur de vitesse de fluide	
S_p	La pente de \emptyset	
S_c	Partie constante de terme source linéaire	
S_u	La partie constante qui ne dépend pas explicitement de S_p	
S_ϕ	Terme source	

F_e, F_w, F_n, F_s	Flux convectifs aux interfaces e.w.n.s de l'équation de transport discrétisée
D_e, D_w, D_n, D_s	Flux diffusifs aux interfaces e.w.n.s de l'équation de transport discrétisée

Symboles Grecs :

ρ	La masse volumique	$[kg.m^{-3}]$
τ	Temps adimensionnel	
α	Diffusivité thermique	$[m^2.s^{-1}]$
μ	La viscosité dynamique	$[kg.m^{-1}.s^{-1}]$
ν	La viscosité cinématique	$[m^{-1}.s^{-1}]$
θ	Température adimensionnelle	
ϕ	Rapport de la distribution de l'irréversibilité	
ϕ	la propriété transportée	
\emptyset	flux de chaleur	$[W]$
ψ	la fonction de courant	$[m^2.s^{-1}]$
Γ	coefficient de diffusion	
Ω	le volume de contrôle	
ρ_0	La masse volumique de référence	$[kg.m^{-3}]$
β_T	coefficient d'expansion thermique	$[K^{-1}]$
β_C	coefficient d'expansion concentration	$[K^{-1}]$
ΔT	la différence de température	
ΔC	la différence de concentration	
$\Delta x, \Delta y$	dimension d'un volume de contrôle	

Nombres adimensionnels :

Ra_T	nombre de Rayleigh thermique
Ra_S	nombre de Rayleigh solutal
Gr_C	nombre de Grashof concentration
Gr_T	nombre de Grashof thermique
Pr	nombre Prandtl
Le	nombre de Lewis
Nu	nombre de Nusselt
Sh	nombre de Sherwood

Exposant :

*	paramètre estimé
'	paramètre corrigé
n	relatif au temps t
$n + 1$	relatif au temps $t + \Delta t$

Les indices :

c	Chaude
f	froide
i, j	$i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ composantes
P	Point au centre du volume fini
E, W, N, S	Nœuds des volumes de contrôle adjacents est, ouest, nord et sud respectivement
e, w, n, s	Faces du volume de contrôle est, ouest, nord et sud respectivement
0	Etat de référence
t	Thermique
s	Solutale

Sopérateurs mathématiques :

δ	Dirac
Δ	Différence
∇	Gradient
∂	Dérivée partielle

Liste des figures

Chapitre II :

Figure II.1 : Configuration physique du problème..... P 17

Chapitre III :

Figure III.1 : Volume de contrôle dans le cas de 2D..... P 24

Figure III.2 : Maillage de la formulation vitesse-pressure :

(a) maillage collocatif ; b) maillage décalé..... P 25

Figure III.3: Volumes de contrôle pour les scalaires et les vitesses..... P 25

Figure III.4 : volume de contrôle pour les quantités scalaires (P, ϕ) et l'équation de continuité..... P 27

Figure III.5 : volume de contrôle pour la composante u et ces voisines. P 27

Figure III.6 : volume de contrôle pour la composante v et ces voisines..... P 27

Figure III.7 : interpolation pour le gradient de ϕ P 30

Figure III.8 : diffusivité pour un matériau composite P 31

Figure III.9 : Interpolation linéaire entre les nœuds voisins..... P 33

Figure III.10 : interpolation selon le schéma Upwind P 34

Figure III.11 algorithme SIMPLER P 40

Figure III.12 : Application ligne par ligne de la méthode TDMA P 42

Figure IV.1 : lignes de courant (a), isothermes (b) et isoconcentration (c) pour $Ra = 10^6$, $Le = 1$ et différentes valeurs de N P 48

Figure IV.2 : distribution du nombre de Nusselt (Sherwood) local pour $Ra = 10^6$, $Le = 1$ et différentes valeurs de N P 49

Figure IV.3 : distribution du nombre de Nusselt (Sherwood) moyen pour $Ra = 10^6$, $Le = 1$ et différentes valeurs de N P 49

Figure IV.4 : lignes de courant (a), isothermes (b) et isoconcentration (c) pour $Ra = 10^6$, $N = 0.1$ et différentes valeurs de Le P 51

Figure IV.5 : distribution du nombre de Nusselt local pour $Ra = 10^6$, $N = 0.1$ et différentes valeurs de Le P 52

Figure IV.6 : distribution du nombre de Sherwood local pour $Ra = 10^6$, $N = 0.1$ et différentes valeurs de Le P 52

Figure IV.7 : distribution du nombre de Nusselt moyen en fonction de Le pour $Ra = 10^6$, $N = 0.1$ P 53

Figure IV.8 : distribution du nombre de Sherwood moyen en fonction de Le pour
 $Ra = 10^6$, $N = 0.1$ **P 53**

Liste des tableaux :

Tableau III.1 : Expressions de ϕ, Γ et S_ϕ pour les équations de conservation.....	P 28
Tableau III.2 : expression es coefficients convectifs	P 29
Tableau III.3 : Expressions des coefficients diffusifs.....	P 30
Tableau III.4 : Expressions de la fonction $A(P)$ pour les différents schémas.....	P 37
Tableau IV.1 : nombres de Nuselt et Sherwood moyens le long de la paroi chaude pour $Le = 1, Pr = 0.71$ et $Ra = 10^7$	P 45
Tableau (IV.2) : Valeurs moyennes des nombres de Nusselt et Sherwood.....	P49
Tableau (IV.3) : Valeurs moyennes des nombres de Nusselt et Sherwood.....	P 52

Table des matières :

Remerciement

Dédicace

Nomenclature

Liste des figures

Liste des tableaux

Table des matières

Résumé

Introduction générale P 1

Chapitre I: Revue bibliographique

Introduction..... P 5

1- La convection naturelle P 5

2- La convection double diffusive P 7

Conclusion P 14

Chapitre II : Formulation mathématique

Introduction P 16

1- Définition de problème P 16

2- Hypothèse de Boussinesq..... P 17

3- Equation de conservation (continuité, quantité de mouvement, énergie, masse)..... P 18

3.1 hypothèse simplificatrices P 18

3.2 équation de continuité P 18

3.3 Équation de bilan de la quantité de mouvement P 19

3.4 équation d'énergie P 19

3.5 équation de la masse P 19

4- Les conditions aux limites P 19

5- Les paramètres d'adimensionnalisation..... P 20

a- Equation de continuité P 20

b- Equation de quantité de mouvement P 20

c- Equation d'énergie P 21

d- Equation de la masse P 21

6- Les conditions aux limites adimensionnelles P 21

Conclusion P 22

Chapitre III : Résolution numérique

Introduction	P 23
1- Méthodes des volumes finis	P 23
2- Le maillage	P 24
2.1 maillage décalé	P 24
3- Discrétisation des équations de conservation par volumes finis	P 27
3.1 Forme générale de l'équation de transport.....	P 27
3.2 intégration l'équation générale de transport	P 28
3.3 l'intégration des différents termes	P 29
3.3.1 termes transitoire	P 29
3.3.2 terme convectif	P 29
3.3.3 terme diffusif	P 29
3.3.4 terme source.....	P 31
4- Schéma numérique	P 32
4.1 schéma Centré (CDS).....	P 32
4.2 schéma Upwind (UPS).....	P 33
4.3 schéma exponentiel	P 34
4.4 schéma Hybride (HDS).....	P 35
4.5 Schéma puissance (Power lawscheme).....	P 36
5- Méthode algorithme de calcul	P 37
5.1 Couplage vitesse-pression (algorithme SIMPLER)	P 37
5.1.1 Couplage vitesse-pression.....	P 37
5.1.2 Algorithme SIMPLER.....	P 38
5.2 Résolution du système discrétisé (Algorithme de THOMAS, Méthode line by line).....	P 41
5.2.1 Algorithme de THOMAS (TDMA).....	P 41
5.2.2 Application de l'algorithme de THOMAS à des problèmes à 2D (TDMA).	P 42
Conclusion	P 43

Chapitre IV : Résultat et interprétation

Introduction	P 45
Validation.....	P 45
1- Effet du nombre du rapport de flottabilité N	P 46
2- Effet du nombre de Lewis Le	P 49

Conclusion	P 53
Conclusion générale	P 56

Résumé :

On se propose une étude numérique sur le comportement thermique et dynamique de la convection de double diffusion d'un mélange gazeux supposé incompressible dans une cavité carrée soumise à de faibles gradients horizontaux de température et de concentration et isolée de ces parois horizontales. La méthode des *volumes finis basée sur l'algorithme SIMPLER* pour le couplage pression-vitesse a été utilisée pour discrétiser les équations du modèle mathématique. L'effet du rapport de flottabilité et le nombre de Lewis a été pris en considération. Les résultats de simulation sont présentés en terme de lignes de courant, isothermes et isoconcentrations, ainsi que les nombres de Nusselt et Sherwood locaux et moyens présentant le transfert thermique et massique au niveau des parois actives de la cavité.

المخلص :

نقترح دراسة عددية عن السلوك الحراري والديناميكي للانتشار الحراري المزدوج لخليط غازي من المفترض أن يكون غير قابل للضغط في تجويف مربع يخضع لتدرجات أفقية ضعيفة لدرجة الحرارة والتركيز ومعزول من جدرانه الأفقية. تم استخدام طريقة الحجم المتناهية المعتمدة على خوارزمية SIMPLER لاقتزان السرعة والضغط لتقدير معادلات النموذج الرياضي. تم أخذ تأثير نسبة الطفو ورقم لويس في الاعتبار. يتم عرض نتائج المحاكاة من حيث الانسيابية والتساوي الحرارة والتركيزات المتساوية، بالإضافة إلى أرقام نسلت (Nusselt) وشيروود (Sherwood) المحلية والمتوسطة التي توضح انتقال الحرارة والكتلة في الجدران النشطة للتجويف.

Abstract :

We propose a numerical study on the thermal and dynamic behavior of the double diffusion convection of a gaseous mixture supposed to be incompressible in a square cavity subjected to weak horizontal gradients of temperature and concentration and isolated from these horizontal walls. The finite volume method based on the SIMPLER algorithm for the pressure-velocity coupling was used to discretize the equations of the mathematical model. The effect of the buoyancy ratio and the Lewis number was taken into consideration. The simulation results are presented in terms of streamlines, isotherms and isoconcentrations, as well as local and average Nusselt and Sherwood numbers showing the heat and mass transfer at the active walls of the cavity.

Introduction générale

Introduction générale

Le transfert de chaleur est un processus d'une grande importance dans le domaine de l'industrie et des technologies, il se produit spontanément dès qu'il y a une différence de température et / ou de concentration entre deux points ou deux systèmes.

Le transfert simultané de chaleur et de masse dans un fluide est dû aux gradients de température et de concentration d'un composant du fluide. Ces gradients produisent les forces de poussée d'Archimède provoquant l'écoulement appelé convection de double diffusion. Cette dernière est essentiellement caractérisée par les phénomènes de transfert de chaleur et de masse, qui sont à l'origine de la production d'entropie, dus à la compétition des forces volumiques d'origine thermique et solutale.

A cause de son importance reconnue dans l'océanographie et dans les problèmes intervenant au cours des dépôts chimiques (dans le domaine des énergies renouvelables et pétrolières de stockage des déchets nucléaires, la dispersion des contaminants chimiques dans les couches d'eau souterraine,...etc.) de nombreuses études ont été menées la première étude a été par Bejan, 1984.

L'objectif de notre étude consiste à modéliser numériquement la convection double diffusive dans une cavité carrée supposé carrée et soumise à des gradients horizontaux de température et de concentration. L'effet de rapport de flottabilité thermique et le nombre de Lewis sur les régimes thermique et dynamique de l'écoulement a été discuté, ainsi que le transfert de chaleur et de masse au niveau des parois actives.

Notre travail est structuré en quatre chapitres comme suit :

- Le premier chapitre est consacré à la synthèse des principaux résultats antérieurs obtenus aussi bien théoriquement, qu'expérimentalement sur de la convection naturelle et double diffusive.
- Le deuxième chapitre aborde à la formulation mathématique des équations générales, les conditions aux limites et initiale gouvernant le problème.
- Nous détaillons la méthode de résolution numérique utilisée pour l'élaboration de notre code de calcul et la validation du modèle dans un troisième chapitre.

Introduction générale

- Nous analysons dans un quatrième chapitre, le développement hydrodynamique, thermique et massique de la convection double diffusive. Cette analyse portera aussi, sur l'influence du rapport de flottabilité et le nombre de Lewis la convection double diffusive.
- Nous terminons ce mémoire par une conclusion générale et des propositions sur les perspectives de cette étude.

Chapitre I:Revue bibliographique

Introduction

La convection est le mode de transfert qui implique le déplacement d'un fluide gazeux ou liquide (écoulement) et échange avec une surface qui est à une température différente. Il a donc tendance à s'élever pour flotter au-dessus des régions froides plus dense. Ceci explique l'apparition de boucles convectives. Ce brassage permet de chauffer toute une pièce avec un seul radiateur ou tout un volume d'eau en ne chauffant que le bas de la casserole. [1]

Dans ce chapitre nous allons parler sur la convection naturelle, son domaine d'application, ...etc. aussi nous allons étudier la convection double diffusive et sa relation avec la convection naturelle.

1. La convection naturelle

La convection naturelle est un phénomène de la mécanique des fluides, qui se produit lorsqu'une zone change de température et qu'elle se déplace alors verticalement sous l'effet de la poussée d'Archimède. Le changement de température d'un fluide influe en effet sur sa masse volumique, qui se trouve modifiée par rapport à la masse volumique du fluide environnant. De tels déplacements s'appellent des mouvements de convection. Ils sont à l'origine de certains phénomènes océanographiques (courants marins), météorologiques (orages), géologiques (remontées de magma) par exemple. [2]

La convection naturelle a été un des sujets les plus étudiés en thermique, les domaines d'applications sont donc vastes, et concernent aussi bien l'isolation des canalisations que le refroidissement des circuits électriques et électroniques, la thermique du bâtiment et le confort humain, les panaches et la dispersion des effluents, ou encore la thermique de l'atmosphère et des océans.

Le phénomène de la convection naturelle faire l'objet de maintes différente applications à savoir: les problèmes océanographiques et atmosphériques tels que les effets de serre, les changements extrêmes de climat, ainsi que les problèmes technologiques, à savoir les équipements électriques et les réacteurs nucléaires, les capteurs solaires, le stockage des fluides, l'écoulement d'air dans les pièces d'habitation, les appareils ménagers, les réfrigérateurs et les échangeurs de chaleur sont tous des problèmes.

Lemembre et al, ont fait une étude extensive de la convection naturelle laminaire dans les cavités cylindriques avec multiples configurations et en faisant varier Ra , Pr , et il a mis un accent particulier sur l'influence du facteur d'aspect.[3]

M. Coricone, a étudié numériquement la convection naturelle dans une cavité rectangulaire en utilisant l'algorithme Simplé, pour plusieurs configurations de conditions aux limites, et il a interprété l'effet du facteur d'aspect et du nombre de Rayleigh sur les structures d'écoulement.[4]

H. Koizumi, dans le même contexte (M. Coricone) a étudié la formation des structures et la transition vers le chaos dans une cavité partiellement chauffée par le bas, par des mesures expérimentales et des calculs numériques.[5]

(Yang et al.) : ont traité une cavité inclinée chauffée par le bas pour plusieurs valeurs du facteur d'aspect, et ont trouvé une relation entre la largeur des cellules convectives et le nombre de Rayleigh.[6]

Adachi a étudié, une cavité légèrement inclinée, il a traité le problème en 3D, et il a mis en évidence la transition des structures longitudinales en structures transversales en fonction du nombre de Rayleigh. [7]

L'aspect tridimensionnel des écoulements de convection naturelle a intéressé plusieurs chercheurs comme Valencia et al. Qui a traité une cavité cubique en combinant les données expérimentale et les résultats de calcul numérique.

Plusieurs synthèses sur les transferts thermiques en convection naturelle dans une cavité remplie d'un milieu poreux ont été réalisées : Nield et Bejan (1992), Carbonell et Whitaker (1984), Cheng (1978), Kaviany (1991) et Oosthuizen (1998). Selon ces auteurs, quand le nombre de Rayleigh modifié (\tilde{Ra}) est inférieur à une valeur critique \tilde{Ra}_c , le transfert est principalement par conduction. Quand $\tilde{Ra} > \tilde{Ra}_c$, l'écoulement d'air entraîne des transferts par convection non négligeables.

L'écoulement d'air dans une cavité remplie d'un milieu poreux est en général laminaire, Un écoulement circulaire, similaire à celui observé dans une cavité vide apparaît. Celui-ci a lieu principalement dans la couche limite le long des parois et la vitesse est beaucoup plus faible au centre de la cavité.

2. La convection double diffusive

La convection naturelle double diffusive a fait l'objet de plusieurs études depuis quelques décennies, elle a été étudiée en premier par Bejan, 1984. Ce phénomène a une importance reconnue dans l'océanographie et dans les problèmes intervenant au cours des dépôts chimiques, par exemple, dans le domaine des énergies renouvelables et pétrolières de stockage des déchets nucléaires, la dispersion des contaminants chimiques dans les couches d'eau souterraine, la migration de l'humidité à travers les isolations fibreuses, les processus de séchage, les opérations de dessalement de l'eau de mer, pour le stockage de l'énergie solaire n'est efficace que si aucun écoulement convectif n'a lieu. Les conditions qui prévalent à l'apparition de la convection doivent être déterminées dans le but d'améliorer le fonctionnement des systèmes de stockages d'énergie solaire. En effet, des phénomènes de convection double diffusive se produisent dans le distillateur solaire, en raison des effets d'échanges des gradients thermiques et massique ainsi que la différence de température entre un couvercle et un absorbeur.

Ce type de convection concerne les processus combinés de transfert de masse et de chaleur générés par les forces de flottabilité. De tels phénomènes sont généralement appelés convection thermohaline, thermosolutale ou double-diffusion. Dans ce cas, le flux de masse est régi par la loi de Fick, le flux de masse est proportionnel au seul gradient de la fraction massique. [8]

(Stommel et al.), sont basés sur l'étude des propriétés du système de convection thermohaline, et ont découvert le phénomène de la fontaine salée, qui se produit lorsque l'eau chaude salée se situe au-dessus de l'eau douce froide. Ils ont montré l'existence de deux régions, l'une dite du "doigt de sel" précédemment analysée par Stern(1960), et l'autre dite région stable. Ce comportement différent est dû à l'inégalité entre les diffusivités de chaleur et du sel, et si ces diffusivités étaient égales, le système pourrait être correctement paramétré par un seul nombre de Rayleigh. [9]

Veronis (1965) a également étudié la théorie de la stabilité non-linéaire, dans une couche de fluide horizontale infinie soumise à un gradient solutal stabilisant et un gradient thermique déstabilisant. Il a montré que dans ce cas, le système devenait instable à une valeur suffisamment grande du gradient thermique. Il a aussi indiqué que le système devrait être instable à des perturbations sur stables ou oscillatoires pour une perturbation infinitésimale. Cependant, la convection d'amplitude finie pouvait exister pour des valeurs du gradient thermique déstabilisant aussi petites qu'un pour cent de la valeur critique, ΔT_C , prédite par la théorie de stabilité linéaire. Les intégrations numériques ont montré que, si le système est infinitésimalement perturbé avec $\Delta T > \Delta T_C$ ou par des perturbations appropriées d'amplitude finie avec $\Delta T < \Delta T_C$, l'état final du mouvement est celui prédit par l'analyse d'amplitude finie stable. L'étude a permis de prédire les seuils de l'amplitude finie pour la convection, et l'existence de la convection sous-critique. [10]

Nield (1967), l'œuvre pionnière, dans cette étude, le seuil critique du début de la convection double diffusive dans une couche horizontale de fluide immobile chauffée par le bas, a été prédit par cet auteur sur la base de la théorie de la stabilité linéaire. Une méthode de séries de Fourier a été utilisée pour l'obtention des équations aux valeurs propres, pour un ensemble de conditions aux limites ce qui a permis de prédire les nombres de Rayleigh supercritiques thermique et solutal, marquant le seuil de déclenchement de la convection. Les instabilités oscillatoire et monotone ont été prises en considération. D'après cette étude l'instabilité oscillatoire peut se produire lorsqu'un gradient de soluté fortement stabilisant est contré par un gradient thermique déstabilisant, et cela à un nombre de Rayleigh bien inférieur au supercritique. Concernant l'instabilité monotone, plusieurs cas peuvent exister selon que les équations aux perturbations de la température et la concentration, sont satisfaites ou non. [11]

Veronis (1968) a été montré qu'un gradient solutal stabilisant, empêchait l'apparition de la convection dans un fluide soumis à un gradient thermique opposé. En outre, l'apparition de l'instabilité pouvait se produire avec un mouvement oscillatoire en raison de l'effet stabilisateur du soluté. Ces résultats ont été obtenus à partir de la théorie de stabilité linéaire. Il a été constaté que l'instabilité d'amplitude finie se produisait, pour les fluides ayant un nombre de Prandtl un peu plus petit que l'unité. Lorsque le nombre de Prandtl égalait ou dépassait l'unité, l'instabilité s'installait d'abord comme un mouvement oscillatoire, et devenait ensuite

instable à des perturbations conduisant à des mouvements de convection cellulaires stationnaires, avec un flux de chaleur plus grand. [12]

Baines et al. (1969) ont examiné avec plus de détail le problème de stabilité de la convection thermohaline précédemment traité par Stern, Walin et Veronis. Ils ont effectué de nouveaux calculs pour diverses conditions aux limites, appliquées sur une couche d'un fluide immobile, présentant une stratification en température et en salinité. D'après Baines et Gill, la plupart des études précédentes étaient focalisées sur la détermination des critères de début de l'instabilité, et l'étude de la nature du mouvement pour les systèmes qui sont bel et bien instables, par la méthode habituelle des modes normaux. Ils étaient alors doublement motivés, leur but était de clarifier certains aspects de la théorie linéaire, et de proposer des approximations utiles pour les études de l'amplitude finie.

Leur travaux ont permis de prédire le nombre de Rayleigh thermique R_T pour lequel la convection directe pouvait se produire.

Lorsque le nombre de Rayleigh solutal R_S satisfaisait la condition $R_S \gtrsim 0.1$, le nombre de Rayleigh thermique prédit était moins que R_S de 100 fois.

Une représentation graphique a été mise au point, pour montrer l'importance relative des différents termes dans les équations du mouvement en fonction de R_T et R_S . Le mode le plus instable sur tous les nombres d'onde pour chaque R_T et R_S a été trouvé et il a été démontré que lorsque les deux modes instables direct et oscillant étaient présents, le mode le plus instable était celui direct dans la plupart des cas. D'après les auteurs, le principal intérêt dans le problème thermosolutal provient des régions du plan de (R_T, R_S) , où le système se comporte d'une manière fondamentalement différente que celle d'un système stratifié thermiquement seulement. [13]

Huppert et al. (1976) ont examiné le mouvement bidimensionnel d'un fluide confiné entre deux plans horizontaux longs chauffés et salés par le bas. Par une analyse de stabilité non-linéaire et une solution numérique directe des équations gouvernantes, les seuils de l'amplitude finie pour la convection ont été prédits. Les formes possibles du mouvement à grande amplitude ont été tracées en fonction des quatre paramètres adimensionnels qui spécifient le problème: le nombre de Rayleigh thermique, le nombre de Rayleigh solutal, le nombre de Prandtl et le rapport des diffusivités. L'étude a montré l'existence d'une bifurcation

d'une branche des solutions asymptotiques dépendant du temps, à partir du point d'instabilité oscillatoire linéaire. Trois autres transitions brusques dans la forme du mouvement ont eu lieu indépendamment des conditions initiales, pour des valeurs fixes du nombre de Rayleigh solutal, du nombre de Prandtl et du rapport des diffusivités, et pour un Rayleigh thermique qui augmente. [14]

Knobloch et al. (1981) ont traité la convection périodique non linéaire dans les systèmes double diffusifs, par une analyse de stabilité non-linéaire. Deux exemples de convection bidimensionnelle non linéaire double diffusive ont été étudiés: la convection thermohaline, et la convection dans un champ magnétique imposé vertical. Les solutions non linéaires sont trouvées analytiquement.

Pour le premier problème de la convection thermohaline, la branche stable des solutions est toujours sous-critique et la branche d'oscillation est supercritique et stable, et rencontre la branche sur une orbite hétéroclinique sans perte de stabilité. Pour le second cas de la convection dans un champ magnétique, le problème est beaucoup plus varié, les oscillations peuvent être stables ou instables, et rencontrent la branche stable, soit dans une orbite hétéroclinique soit dans une bifurcation de Hopf en fonction des paramètres physiques du problème. Les propriétés explicitement démontrées analytiquement, sont en accord qualitatif excellent avec les calculs numériques effectués. [15]

Proctor (1981) a traité l'étude du mouvement convectif dans une couche de fluide avec une stratification thermique instable et une stratification solutale stable à l'aide d'une théorie de perturbations. Il a été constaté que, indépendamment du nombre de Rayleigh solutal, la convection d'amplitude finie pouvait se produire à des valeurs du nombre de Rayleigh thermique beaucoup plus faible, que celui nécessaire pour les oscillations infinitésimales. Il a été démontré que les résultats analytiques de ces travaux constituaient un complément naturel à ceux numériques de Huppert et Moore (1976). Les résultats présentés s'appliquaient à la fois pour les frontières libres et les frontières rigides, et l'applicabilité de la méthode à d'autres problèmes connexes a été suggérée. [16]

(Kamotani et al.) ont fait une étude expérimentale de la convection naturelle, dans des enceintes rectangulaires à faible rapport de forme, avec des gradients de température et de

concentration horizontaux. Un système électrochimique a été employé pour imposer les gradients de concentration. Les forces de volume solutales considérées s'opposaient ou favorisaient les forces de volume thermiques. A cause d'une grande différence entre les flux de diffusion thermique et massique, l'écoulement possédait des caractéristiques de double diffusion. Pour différentes conditions expérimentales, des configurations d'écoulement complexes et variées ont été observés. Les distributions de température et des flux de transfert massiques ont été étudiés, et les conditions d'instabilité ont été rapportées. [17]

(Lee et al.) ont considéré une cavité rectangulaire remplie d'un fluide binaire d'eau salée, ayant un facteur de forme 0.2. Les parois de la cavité étaient soumises à des gradients de température et de concentration horizontaux. Les deux gradients étaient imposés de telle sorte que leurs effets coopèrent ou s'opposent. La visualisation de flux a montré deux configurations, l'une d'écoulement unicellulaire et l'autre multicouche. L'auteur a observé que la deuxième configuration apparaissait dans une certaine gamme des plans

($Ra_T - Ra_S$). La formation et la croissance d'une structure à écoulement stratifié avec le temps ont été observées et décrites. Plusieurs cas ont été observés selon que l'effet des gradients imposés était aidant ou opposé. [18]

(Lee et al.) ont étudié la convection naturelle permanente d'un fluide binaire composé d'eau salée, Les cavités utilisées étaient rectangulaires de facteur de forme 0.2 et 2, et étaient soumises à des gradients de température et de concentration horizontaux. Les résultats ont montré l'existence de deux types de configurations selon le rapport de flottabilité, celle comportant une seule cellule de mouvement et une autre multicouche. Une structure stratifiée a été observée, et le nombre de couches formées dépendait de la nature coopérante ou opposée des forces de volume thermiques et solutales. Les profils de température et de concentration obtenus étaient intéressants. [19]

(WEE et al.) ont effectué une étude numérique et expérimentale portant sur le transfert simultané de chaleur et d'humidité par convection naturelle, dans une cavité remplie d'air de rapport de forme 7, pour une cavité horizontale ou verticale. Les nombres de Prandtl et de Schmidt étaient respectivement 0,7 et 0,6. Les équations aux différences finies ont été résolues par la méthode implicite dynamique à directions alternées. Ils ont calculé les écoulements

aidants et opposés pour des nombres de Grashof thermique et solutal, qui correspondent aux gradients réels de température et de concentration trouvés dans une cavité typique de bâtiment en Nouvelle-Zélande ($2 * 10^5 < Gr_T < 2 * 10^6$ et $1 * 10^4 < Gr_C < 2 * 10^5$). La technique expérimentale utilisait deux plaques plastiques poreuses comme parois de la cavité, permettant l'imposition des gradients simultanés de température et d'humidité. Les nombres expérimentaux de Nusselt et de Sherwood étaient en accord avec les valeurs théoriques. [20]

(Lee et al.) ont mené des expériences pour étudier la convection naturelle, dans une solution stratifiée stable sel-eau, induite par un chauffage latéral, dans une enceinte rectangulaire de rapport de forme 3,0. Selon le rapport de flottement N qui représente l'importance relative de la stratification solutale et du flottement thermique, quatre régimes distincts d'écoulement ont été observés: régime d'écoulement unicellulaire pour $N < 10$, régime à couche limite simultanée pour :

$10 \leq N < 40$, régime d'écoulement à couche successivement formée pour $40 \leq N < 55$ et régime stagnant pour $N \geq 55$. La formation et la croissance de la structure de l'écoulement à couche limite ont été observées et décrites, avec les distributions correspondantes de température et de concentration dans chaque couche. [21]

(Weaver et al.) sont intéressés à une étude portant sur l'influence des forces de flottabilité thermique et solutale coopérantes et opposées, sur la convection naturelle des gaz binaires, due aux gradients horizontaux de température et de concentration. L'étude a été menée expérimentalement sur une enceinte de dimension (5.5cm x 1cm). Ils ont utilisé des parois horizontales imperméables en lexan (plaques multicouches en polycarbonate, matériau difficilement inflammable découvert en 1953), et des parois verticales en verre optique. Une comparaison des flux et des distributions de température et de concentration mesurées avec celles prédites numériquement a été faite, et un bon accord était signalé. [22]

Mamou et al (2001) ont été étudiés analytiquement et numériquement le déclenchement de la convection thermosolutale et les écoulements de convection d'amplitude finie dans une cavité peu profonde, soumise à des gradients verticaux thermique et solutal, L'intérêt pour ce type de problème est motivé par son importance dans de nombreuses situations telles qu'en génie chimique et la métallurgie, où la convection dans des fluides à plusieurs composés est

impliquée. Les deux conditions aux limites de type Dirichlet et Neumann pour la température et la concentration, appliquées sur les parois horizontales du système, ont été considérées. Les seuils d'amplitude finie, des instabilités de la convection oscillatoire et monotone sont obtenus explicitement en termes de paramètres de contrôle. Les résultats indiquaient que pour les mêmes paramètres de contrôle, plusieurs états stables et instables pouvaient coexister. En outre, le seuil de bifurcation de Hopf (passage des états stationnaires aux états instationnaires) a été déterminé dans cette étude. [23]

Bhadoria (2006) a exprimé l'effet de la modulation de la température (variation périodique dans le temps de la température) sur le début de la convection, dans une couche de fluide binaire horizontale. L'analyse de la stabilité linéaire a été effectuée pour le début de la convection thermosolutale, dans une couche de fluide binaire horizontale avec des frontières rigides- rigides. L'auteur a considéré un champ de température entre les parois de la couche de fluide constitué de deux parties: une partie stable et une partie périodique dépendant du temps, qui oscille au cours du temps. Il a considéré seulement les perturbations infinitésimales, et a étudié l'effet de la modulation de la température sur l'apparition de la convection thermosolutale, en utilisant la méthode de Galerkin et la théorie de Floquet. Le nombre de Rayleigh critique a été calculé, comme étant une fonction de la fréquence et de l'amplitude de modulation, du nombre de Prandtl, du rapport de diffusivité et du nombre de Rayleigh. Les effets stabilisants et déstabilisants de la modulation sur l'apparition de la convection double diffusive ont été obtenus. Les effets du rapport de la diffusivité et du nombre de Rayleigh solutal sur la stabilité du système ont été également discutés. [24]

Garaud Pascale (2018) a étudié la convection double-diffusive à faible nombre de Prandtl, en utilisant les simulations numériques directes. Il a accordé une attention particulière à la modélisation du mélange induit par turbulence et à son impact dans diverses applications astrophysiques (planètes et étoiles) et métallurgiques. L'auteur a trouvé que la double diffusion à faible nombre de Prandtl différait significativement de celle à haut nombre de Prandtl. Les effets de la rotation, du cisaillement, des gradients latéraux et des champs magnétiques ont été brièvement discutés. [25]

Conclusion :

La combinaison des gradients de température et de concentration au sein d'un fluide est connue sous l'appellation double diffusion. Ce phénomène influe considérablement le processus de solidification dans un système binaire et en océanographie. Les applications pratiques correspondantes sont très nombreuses : mouvements convectifs dans les océans, dispersion des polluants dans l'atmosphère, migration d'humidité dans les fibres isolante... Les objectifs principaux de tels travaux sont souvent l'analyse des structures résultantes d'écoulements. Dans le chapitre suivant nous allons voir la formulation numérique de la convection double diffusive dans une cavité carrée.

Chapitre II :
Formulation
mathématique

Introduction

Chaque phénomène physique est souvent formulé par des équations mathématiques (équations différentielles) qui représentent une modélisation de ce phénomène. Une modélisation doit obligatoirement exprimer le comportement du phénomène dans l'espace et dans le temps. En mécanique des fluides, on suppose que le fluide est un milieu continu, ce qui permet d'utiliser les lois classiques de conservation à savoir [26]:

1. Conservation de masse.
2. conservation quantité de mouvement.
3. Conservation d'énergie.

1. Définition de problème

Le système étudié est schématisé dans la figure II.1. Il s'agit d'une cavité carrée remplie d'un mélange binaire gazeux. Les surfaces verticales de la cavité sont supposées isothermes et portées respectivement aux températures (concentration) T_h et T_c (c_h et c_c) avec $T_h > T_c$ ($c_h > c_c$) Les surfaces horizontales sont considérées adiabatiques et imperméables. Le domaine fluide est supposé dépourvu de toute source ou puits de chaleur.

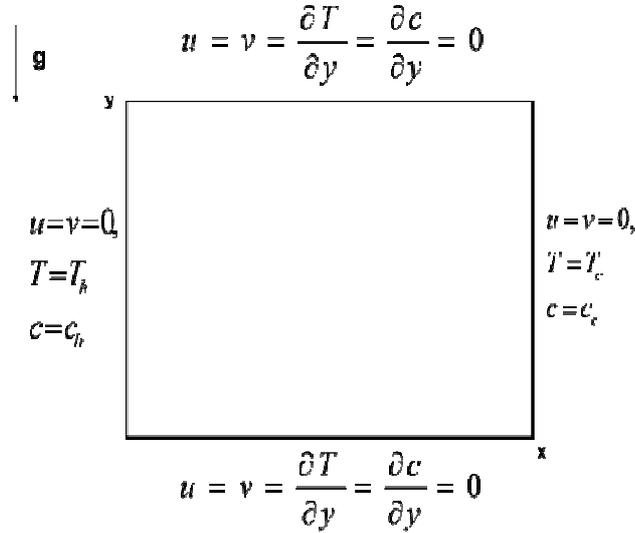


Figure II.1 : Configuration physique du problème

2. Hypothèse de Boussinesq

Dans le cas où les variations de température sont prises comme suffisamment faibles pour que les propriétés physiques du fluide (tels que sa dilatabilité thermique, sa diffusivité thermique et sa viscosité cinématique) puissent être considérées comme constantes, les variations de la masse volumique au sein du fluide sont faibles. Ainsi, il est possible de considérer le fluide comme quasi incompressible. Les variations de ρ sont négligées partout, exceptées dans le terme de poussée à l'origine du mouvement.

Les propriétés thermophysiques du fluide sont constantes et calculées à la température T_0 et la concentration C_0 de référence : $T_0 = \frac{T_h + T_c}{2}$ et $C_0 = \frac{C_h + C_c}{2}$.

Cependant, la masse volumique (dans le terme des forces de poussée d'Archimède) est modélisée selon l'approximation de Boussinesq :

$$\rho(T, C) = \rho_0 [1 - \beta_T (T - T_0) - \beta_C (C - C_0)] \quad (\text{II.1})$$

Où ρ_0 est la masse volumique du fluide à l'état de référence (T_0, C_0) et β_T et β_C représentent, respectivement, les coefficients d'expansion thermique et massique :

$$\beta_T = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_{p,C}, \quad \beta_C = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial C} \right)_{p,T}$$

β_T est généralement positif mais β_C est positif si le polluant a une masse molaire inférieure à celle du fluide dans lequel il diffuse (cas du mélange air-H₂O) et négatif dans le cas contraire (mélange air-CO₂).

3. Équations de conservation (continuité, quantité de mouvement, énergie, masse)

3.1. Hypothèse simplificatrices

Les hypothèses simplificatrices seront utiles dans la modélisation mathématique de notre problème :

- Le fluide est considéré newtonien, la viscosité est constante $\nu = \text{cste}$.
- L'écoulement est incompressible $\text{div } \mathbf{V} = 0$ et la masse volumique $\rho = \text{cst}$.
- L'écoulement du fluide au sein de la cavité est laminaire.
- Les propriétés physiques de l'écoulement sont constantes.
- Ecoulement isotherme $T = \text{cste}$.
- Ecoulement bidimensionnel (suivant les coordonnées cartésiennes x et y) pour le cas (2D) cavité carrée.

3.2. Équation de continuité

En considérant l'hypothèse d'un fluide incompressible, le principe de la conservation de la masse mène à l'équation de continuité. Pour un écoulement à deux-dimensions d'un fluide incompressible, l'équation de continuité se réduit à :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{II. 2})$$

3.3. Équation de bilan de la quantité de mouvement

Dans notre cas, la forme de l'équation de quantité de mouvement est comme suit :

Suivant x :

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II. 3})$$

Suivant y:

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \rho \beta_T (T - T_0) g + \rho \beta_C (C - C_0) g \quad (\text{II. 4})$$

3.4. Équation d'énergie

L'équation de l'énergie est obtenue en appliquant le principe de la conservation de l'énergie dans la direction x et y comme suit :

$$\rho C_P \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II. 5})$$

3.5. Équation de la masse

L'équation de conservation de la masse s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II. 6})$$

4. Les conditions aux limites

La résolution du système d'équations obtenu précédemment nécessite l'incorporation de conditions initiales et aux limites adimensionnelle pour chaque variable dépendante ; pour :

$$u = v = T = C = 0 \quad \text{où } t = 0$$

$$u = v = 0, T = T_h, \quad C = C_h \quad \text{pour } 0 \leq y \leq H \text{ et } x = 0$$

$$u = v = 0, \quad T = T_c, \quad C = C_c \quad \text{pour } 0 \leq y \leq H \text{ et } x = H$$

$$u = v = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial y} = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq x \leq H \text{ et } y = 0$$

$$u = v = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial y} = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq x \leq H \text{ et } y = H$$

5. Les paramètres d'adimensionnement

L'adimensionnalisation ou normalisation consiste à transformer les variables dépendantes et indépendantes en des variables sans dimension, c'est-à-dire qu'elles seront normalisées par rapport à certaines dimension caractéristiques. Cela permet de spécifier les conditions d'écoulement avec un nombre restreint de paramètres de façon rendre la solution plus générale.

De façon à rendre les équations précédentes adimensionnelles, elles seront transformées par les relations suivantes :

$$\tau = \frac{\alpha t}{H^2}, X = \frac{x}{H}, Y = \frac{y}{H}, U = \frac{uH}{\alpha}, V = \frac{vH}{\alpha}, P = \frac{\rho H^2}{\rho \alpha^2}, \quad \theta = \frac{T - T_0}{\Delta T}, \quad W = \frac{C - C_0}{\Delta T} \text{ ou}$$

$$\Delta T = T_h - T_c, \quad T_0 = \frac{T_h + T_c}{2} \text{ et } \Delta C = C_h - C_c, \quad C_0 = \frac{C_h + C_c}{2}$$

En introduisant les grandeurs sans dimension dans les équations de conservation de continuité, de mouvement, d'énergie et de masse, on obtient respectivement :

a) Equation de continuité

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \tag{II. 7}$$

b) Equation de quantité de mouvement

❖ Suivant x

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = - \frac{\partial P}{\partial X} + \text{Pr} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \tag{II. 8}$$

❖ Suivant y

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = - \frac{\partial P}{\partial Y} + \text{Pr} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) + \text{Ra} \cdot \text{Pr}(\theta + \text{NW}) \quad (\text{II. 9})$$

c) Equation d'énergie

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \quad (\text{II. 10})$$

d) Equation de la masse

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} + U \frac{\partial W}{\partial X} + V \frac{\partial W}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Le}} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right) \quad (\text{II. 11})$$

Les paramètres apparaissant dans ces équations sont :

Pr : Nombre de Prandtl

Ra_T : Nombre de Rayleigh thermique

Ra_S : Nombre de Rayleigh solutal

Le : Nombre de Lewis

6. Les conditions aux limites adimensionnelles

Les conditions aux limites deviennent sous forme adimensionnelles :

$$U = 0 ; V = 0 ; \theta = -0.5 ; W = -0.5 \text{ où } \tau = 0$$

$$U = 0 ; V = 0 ; \theta = 0.5 ; W = 0.5 \text{ pour } 0 \leq Y \leq 1 \text{ et } X = 0$$

$$U = 0 ; V = 0 ; \theta = -0.5 ; W = -0.5 \text{ pour } 0 \leq Y \leq 1 \text{ et } X = 1$$

$$U = V = 0 ; \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 ; \frac{\partial W}{\partial Y} = 0 \text{ pour } 0 \leq X \leq 1 \text{ et } Y = 0$$

$$U = V = 0 ; \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 ; \frac{\partial W}{\partial Y} = 0 \text{ pour } 0 \leq X \leq 1 \text{ et } Y = 1$$

Conclusion

Une fois les équations régissant le problème physique posé, avec les conditions aux limites associées, sont mises sous leurs formes adimensionnelles, et étant donné leur présentation sous forme d'équations aux dérivées partielles qui ne peuvent prétendre à une résolution analytique directe, nous avons donc opté pour une résolution numérique.

Chapitre III :

Résolution numérique

Introduction

Les écoulements de fluides en régimes laminaire ou turbulent, sont décrits par le système d'équations aux dérivées partielles. Ainsi tous les phénomènes physiques sont régis par ce système formé par les équations de continuité, de quantité de mouvement et d'énergie et de masse, qu'il convient de résoudre pour connaître les caractéristiques du champ thermique, massique et d'écoulement.

Pour la discrétisation de ces équations différentielle il existe plusieurs méthodes numériques se classent en trois grandes familles, à savoir les méthodes de :

- La méthode des différences finies.
- La méthode des volumes finis.
- La méthode des éléments finis.

Nous avons choisi la méthode des volumes finis, parce qu'elle est l'approche la mieux adaptée et la plus facile à appliquer en mécanique des fluides, elle présente également certains avantages comme sa fiabilité, son adaptation au problème physique et plus important son caractère conservatif.

1. Méthodes des volumes finis

La méthode des volumes finis, décrites par Patankar 1980 [27], a été parmi les premières méthodes à atteindre un stade de développement avancé dans la résolution des problèmes liés à la mécanique des fluides. C'est une méthode semi intégrale qui consiste à fractionner le domaine physique en un nombre de volumes dits volumes finis (volumes de contrôle), ensuite d'intégrer les équations de conservation dans chaque volume. Le résultat de cette intégration, est l'obtention des équations algébriques, dites équations discrétisées [28].

2. Le maillage

Le domaine physique de calcul est divisé en un certain nombre de volumes. Chaque volume de contrôle a pour dimension $\Delta X \cdot \Delta Y$. Les faces d'un volume de contrôle typique sont localisées au point e, w, n, s.

Notons que P est le centre du volume de contrôle considéré et E, W, N, S sont les centres des volumes de contrôles adjacents situés respectivement à l'Est, à l'Ouest, au Nord et au Sud.

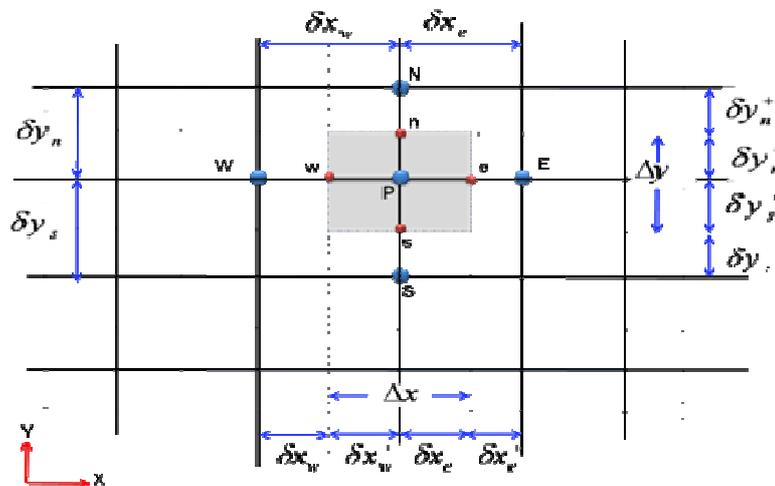


Figure III.1 : Volume de contrôle dans le cas de 2D.

2.1. Maillage décalé

Lorsque le maillage est structuré cartésien, il devient commode de positionner les inconnues à plusieurs endroits différents. Le maillage décalé proposé par Harlow & Welsh [29] dans les années soixante est très utilisé. Les composantes de vitesse sont localisées aux centres des faces des mailles et la pression est localisée au centre des mailles. Le décalage entre la grille de pression et les grilles de vitesse permet de calculer la divergence du champ de vitesse directement sur les nœuds de pression et d'éviter les oscillations de pression observées dans le cas de l'utilisation de maillages collocatifs.

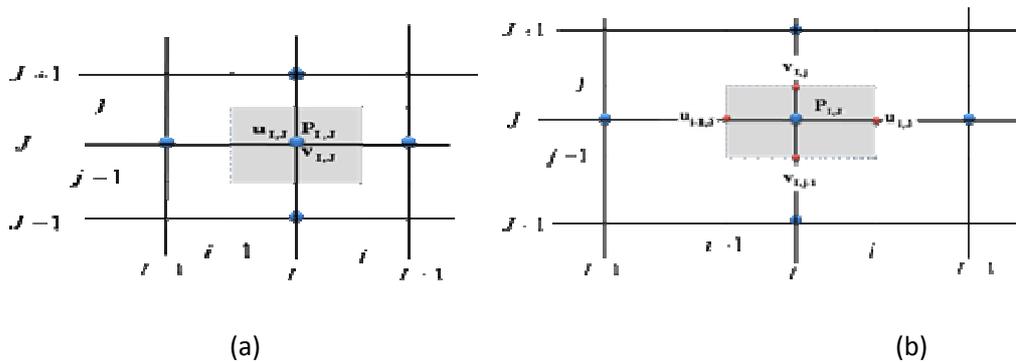


Figure III.2 : Maillage de la formulation vitesse-pression : (a) maillage collocatif ; (b) maillage décalé.

Le maillage principal (Fig. 2) est décomposé en trois maillages secondaires. Un maillage principal maître est créée pour calculer la pression, la température, la densité (P, ϕ, ρ) et une équation de conservation de masse (au centre de chaque volume de contrôle). Deux maillages décalés vers la droite et vers le haut sont utilisées respectivement pour calculer les vitesses (u, v) dans les deux directions (sur les faces du volume de contrôle). Cela signifie que les inconnues du problème ne sont pas toutes calculées sur le même maillage de calcul. Peut être utilisé pour des variables différentes des maillages différents, des volumes de contrôle différents, des points de stockage différents. L'arrangement relatif aux différentes variables est schématisé sur la figure 3

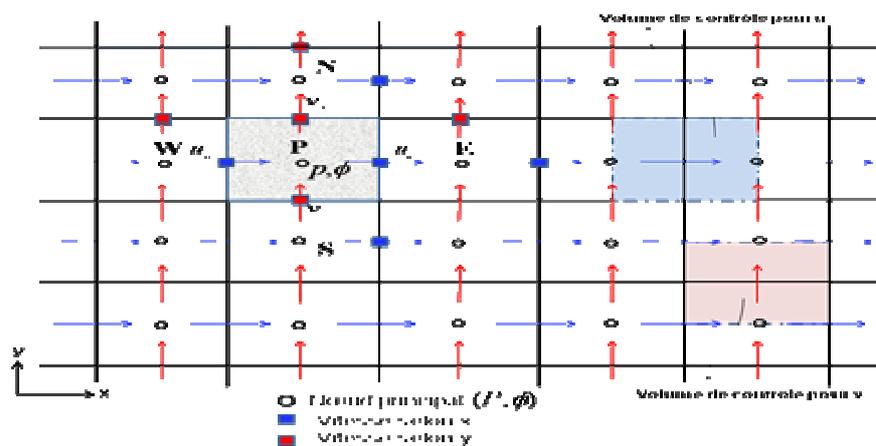


Figure III.3: Volumes de contrôle pour les scalaires et les vitesses.

Enfin, nous décomposons le maillage principale (fig. 4) en quatre maillage secondaires, un pour les quantités scalaires (P, ϕ) et pour l'équation de conservation de masse et trois autres pour les trois composantes de la vitesse (u, v, w).

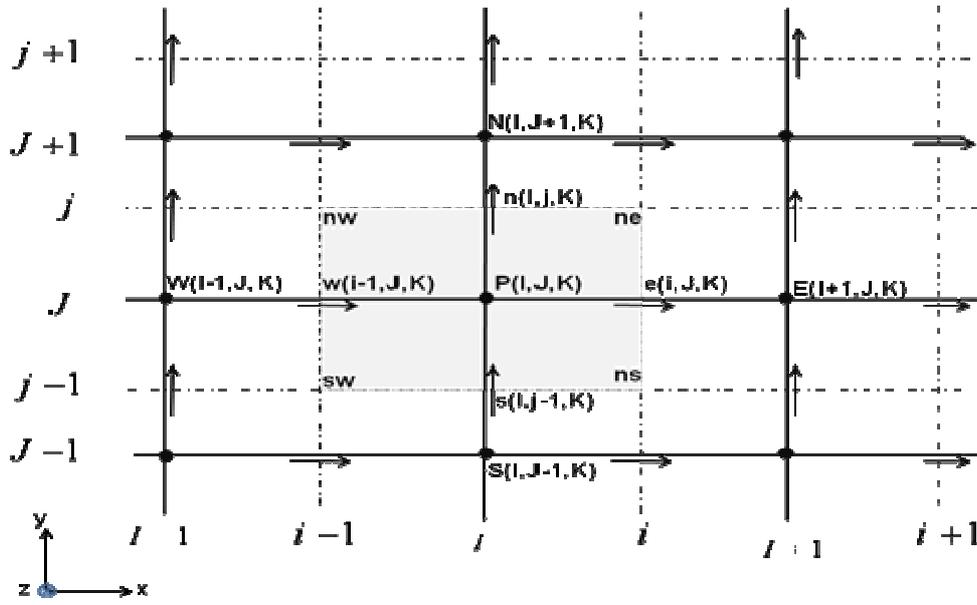


Figure III.4 : volume de contrôle pour les quantités scalaires (P, ϕ) et l'équation de continuité.

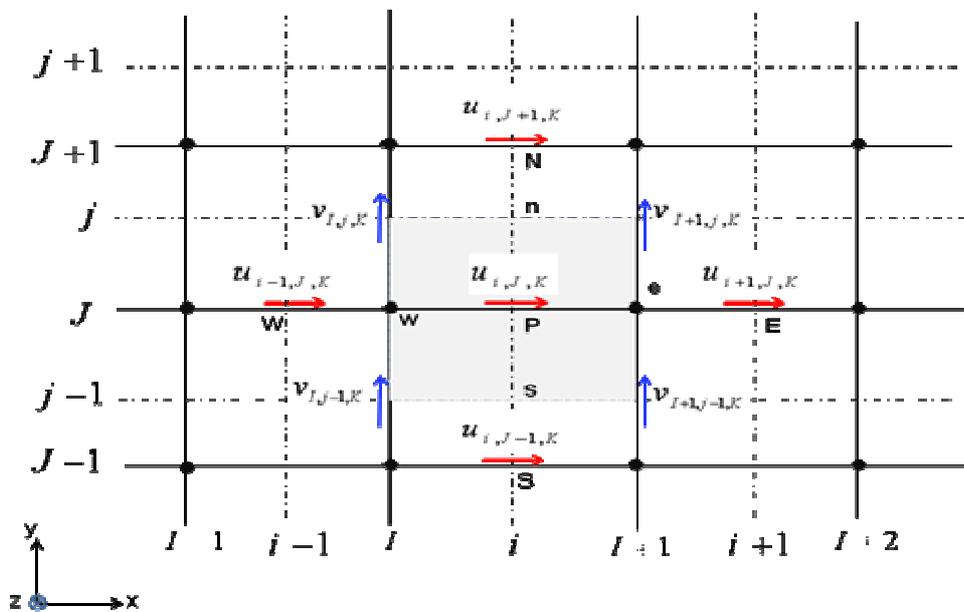


Figure III.5 : volume de contrôle pour la composante u et ses voisines.

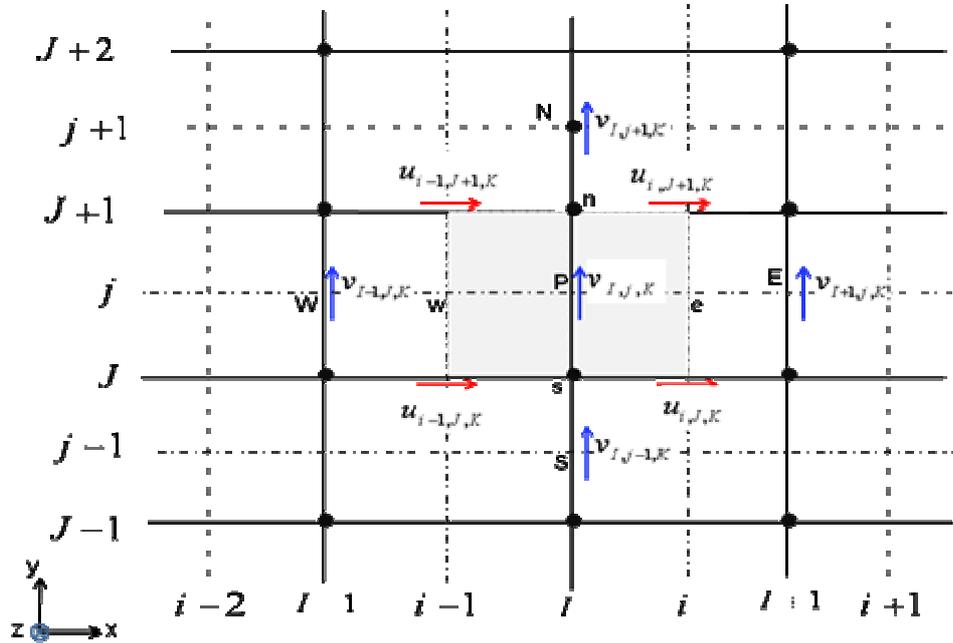


Figure III.6 : volume de contrôle pour la composante v et ces voisines.

3. Discrétisation des équations de conservation par volumes finis

3.1. Forme générale de l'équation de transport

Les équations de conservation présentées au chapitre précédent peuvent être réduites à une seule équation de transport de fonctions scalaires qui prennent la forme générale d'une équation de convection-diffusion de ϕ , en coordonnées cartésiennes selon la forme :

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\rho\phi) + \nabla \cdot (\rho\vec{V}\phi) = \nabla \cdot (\Gamma\nabla\phi) + S_\phi \quad (\text{III. 1})$$

Avec :

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\rho\phi) \quad \text{Le terme transitoire}$$

$$\nabla \cdot (\rho\vec{V}\phi) \quad \text{Le terme convectif}$$

$$\nabla \cdot (\Gamma\nabla\phi) \quad \text{Le terme diffusif}$$

Chapitre III : Résolution numérique

- S_ϕ Le terme source
 Γ coefficient de diffusion
 ϕ La propriété transportée

Tous ces termes sont listés dans le tableau suivant :

Equation	ϕ	Γ	S_ϕ
Continuité	1	0	0
Quantité de mouvement suivant X	U	Pr	$-\frac{\partial P}{\partial X}$
Quantité de mouvement suivant Y	V	Pr	$-\frac{\partial P}{\partial Y} + Ra_T Pr \theta + Ra_C \frac{1}{Le} W$
Energie	θ	1	0
Masse	W	$\frac{1}{Le}$	0

Tableau III.1 : Expressions de ϕ, Γ et S_ϕ pour les équations de conservation.

3.2. Intégration l'équation générale de transport

On fait l'intégration sur le volume de contrôle Ω_{cv} et sur le temps 00 on trouve : **(III.2)**

$$\int_t \int_{\Omega_{cv}} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) dt d\Omega + \int_t \int_{\Omega_{cv}} \text{div}(\rho \phi \vec{u}) dt d\Omega - \int_t \int_{\Omega_{cv}} \text{div}(\Gamma \text{grad} \phi) dt d\Omega = \int_t \int_{\Omega_{cv}} S_\phi dt d\Omega$$

Grace au théorème de la divergence de Gauss, on obtient : **(III.3)**

$$\int_t \int_{\Omega_{cv}} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) dt d\Omega + \int_t \int_{A_{cv}} \text{div}(\rho \phi \vec{u}) d\vec{A} dt - \int_t \int_{A_{cv}} \text{div}(\Gamma \text{grad} \phi) d\vec{A} dt = \int_t \int_{\Omega_{cv}} S_\phi dt d\Omega$$

Où A est la surface qui limite le volume de contrôle Ω_{cv} .

3.3. L'intégration des différents termes

3.3.1. Terme transitoire

$$I_1 = \int_t \int_{\Omega_{cv}} \frac{\partial}{\partial t} \rho \phi d\Omega dt = \{(\rho \phi)_P - (\rho \phi)_P^0\} \Delta \Omega \quad (\text{III.4})$$

Où :

Ω le volume de contrôle de ϕ

$\Delta \Omega = \Delta x \Delta y$ (dans le cas 2D)

Avec l'exposant 0 indique que la quantité est considérée au pas de temps précédent.

3.3.2. Terme convectif

$$I_2 = \int_t \int_{A_{cv}} (\rho \phi \vec{u}) d\vec{A}_n dt = \int_t \int_{A_{cv}} (\rho \phi \vec{u}) (d\vec{A}_e - d\vec{A}_w + d\vec{A}_s - d\vec{A}_n) dt$$

$$= \{(\rho \phi u A)_e - (\rho \phi u A)_w + (\rho \phi v A)_n - (\rho \phi v A)_s\} \Delta t \quad (\text{III.5})$$

On définit la variable $F_i = (\rho v A)_i$, qui représente le flux de masse convectif traversé par la surface (i), $i = (e, w, n, s)$.

Face	e	w	n	s
Flux de masse convectif	$F_e = \rho_e u_e A_e$	$F_w = \rho_w u_w A_w$	$F_n = \rho_n u_n A_n$	$F_s = \rho_s u_s A_s$

Tableau III.2 : Expression des coefficients convectifs

Donc :

$$I_2 = \{F_e \phi_e - F_w \phi_w + F_n \phi_n - F_s \phi_s\} \Delta t \quad (\text{III.6})$$

3.3.3. Terme diffusif

Le gradient de ϕ aux interfaces est finalement calculé en supposant que ϕ varie linéairement entre chaque point du maillage. On obtient ainsi:

Chapitre III : Résolution numérique

$$I_3 = \int_t \int_{A_{cv}} (\Gamma \text{grad} \phi) d\bar{A} dt = \left\{ \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} A \right)_e - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} A \right)_w + \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} A \right)_n - \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} A \right)_s \right\} \Delta t$$

$$I_3 = \left(\left(\Gamma \frac{\phi_E - \phi_P}{(\delta x)_e} A \right)_e - \left(\Gamma \frac{\phi_P - \phi_W}{(\delta x)_w} A \right)_w + \left(\Gamma \frac{\phi_N - \phi_P}{(\delta x)_n} A \right)_n - \left(\Gamma \frac{\phi_P - \phi_S}{(\delta x)_s} A \right)_s \right) \Delta t \quad (\text{III. 7})$$

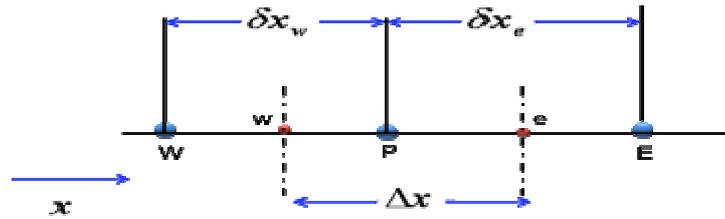


Figure III.7 : interpolation pour le gradient de ϕ

On pose $D_i = \frac{\Gamma_i A_i}{\delta x_i}$ qui représente le coefficient diffusif, où $i = (e, w, n, s)$

Face	E	W	n	s
Conductance de diffusion	$D_e = \frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_e}$	$D_w = \frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_w}$	$D_n = \frac{\Gamma_n A_n}{\delta x_n}$	$D_s = \frac{\Gamma_s A_s}{\delta x_s}$

Tableau III.3 : Expressions des coefficients diffusifs

Donc :

$$I_3 = (D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W) + D_n(\phi_N - \phi_P) - D_s(\phi_P - \phi_S)) \Delta t \quad (\text{III. 8})$$

Calcul de la conductance Γ

En général $\Gamma_e \neq \Gamma_w$, la conductivité thermique étant fonction de la température $\Gamma = \Gamma(T)$, ou même fonction de l'espace $\Gamma = \Gamma(x)$ pour les matériaux composites.

Si l'on considère le flux à l'interface "e", il peut être écrit ainsi :

$$q_e = \frac{T_P - T_E}{\frac{\delta x_e^-}{\Gamma_P} + \frac{\delta x_e^+}{\Gamma_E}} = \frac{T_P - T_E}{\frac{\delta x_e}{\Gamma_e}} \quad (\text{III. 9})$$

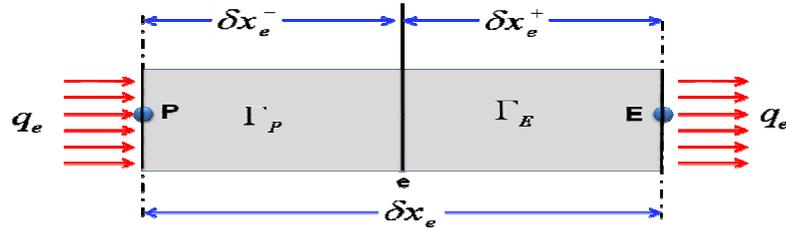


Figure III.8 : diffusivité pour un matériau composite

De la relation on sort l'expression de la conductivité thermique à l'interface du volume de contrôle:

$$\Gamma_e = \frac{\delta x_e}{\frac{\delta x_e^-}{\Gamma_P} + \frac{\delta x_e^+}{\Gamma_E}} = \delta x_e \frac{\Gamma_P \Gamma_E}{\Gamma_P \delta x_e^+ + \Gamma_E \delta x_e^-} \quad (\text{III. 10})$$

Si on définit les paramètres : $f_e = \frac{\delta x_e^+}{\delta x_e}$ et $1 - f_e = \frac{\delta x_e^-}{\delta x_e}$, la relation devient:

$$\Gamma_e = \frac{1}{\frac{1-f_e}{\Gamma_P} + \frac{f_e}{\Gamma_E}} = \delta x_e \frac{\Gamma_P \Gamma_E}{f_e \Gamma_P + (1-f_e) \Gamma_E} \quad (\text{III. 11})$$

3.3.4. Terme source

$$I_4 = \int_t \int_{\Omega_{cv}} S_\phi d\Omega = \bar{S} \Delta t \Delta \Omega \quad (\text{III. 12})$$

Où \bar{S} est la valeur moyenne de S sur le volume considéré.

Souvent le terme source S_ϕ dépend de la variable ϕ . Il est exprimé comme une fonction linéaire de ϕ_P . La méthode de Pantakar est recommandée dans la linéarisation du terme source; elle consiste à écrire :

$$\bar{S} = S_C + S_P \phi_P \quad (\text{III. 13})$$

Où S_C représente la partie constante de \bar{S} (qui ne dépend pas de ϕ_P), alors que S_P est le coefficient de ϕ_P (S_P ne représente pas \bar{S} évalué au point P).

L'utilisation des expressions de I_1, I_2, I_3 et I_4 permet d'écrire l'équation sous forme discrétisée:

$$\{(\rho\phi)_P - (\rho\phi)_P^0\}\Delta\Omega + \{F_e\phi_e - F_w\phi_w + F_n\phi_n - F_s\phi_s\}\Delta t - \\ (D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W) + D_n(\phi_N - \phi_P) - D_s(\phi_P - \phi_S))\Delta t = (S_C + S_P\phi_P)\Delta t\Delta\Omega \quad (\text{III. 14})$$

4. Schémas numériques

4.1. Schéma centré(CDS)

Ce schéma consiste en des interpolations linéaires entre les nœuds voisins [30]. L'erreur de troncature du CDS est du second ordre. Le schéma est performant dans les régions où la diffusion domine et/ou pour les maillages fins. Le CDS peut produire des solutions oscillatoires.

Si on définit les paramètres :

$$f_e = \frac{\delta x_e^+}{\delta x_e}$$

et

$$1 - f_e = \frac{\delta x_e^-}{\delta x_e}$$

On obtient :

$$\phi_e = f_e\phi_P + (1 - f_e)\phi_E \quad (\text{III. 15})$$

On aura donc :

Les valeurs de ϕ par interpolation linéaire

$$\begin{aligned} \phi_e &= f_e\phi_P + (1 - f_e)\phi_E \\ \phi_w &= f_w\phi_W + (1 - f_w)\phi_P \\ \phi_n &= f_n\phi_P + (1 - f_n)\phi_N \\ \phi_s &= f_s\phi_S + (1 - f_s)\phi_P \end{aligned} \quad (\text{III. 16})$$

Pour un maillage uniforme on obtient :

Les valeurs de ϕ pour un maillage uniforme

$$\phi_e = \frac{1}{2}(\phi_E + \phi_P)$$

$$\phi_w = \frac{1}{2}(\phi_W + \phi_P)$$

$$\phi_n = \frac{1}{2}(\phi_N + \phi_P) \tag{III. 17}$$

$$\phi_s = \frac{1}{2}(\phi_S + \phi_P)$$

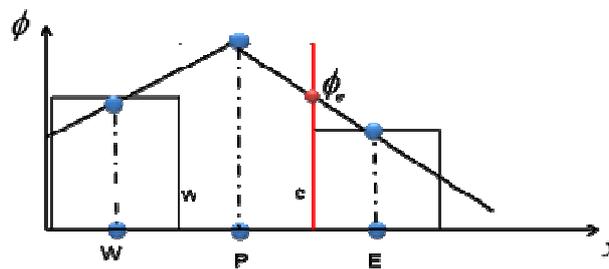


Figure III.9 : Interpolation linéaire entre les nœuds voisins

4.2. Schéma Upwind (UPS)

On appelle aussi le schéma amont. Dans ce schéma, la valeur de variable à l'interface n'est pas interpolée, mais elle est directement assignée à la valeur du nœud en amont au sens de l'écoulement.

Pour : $(F_e, F_w, F_n, F_s) > 0$

$$\phi_e = \phi_P$$

$$\phi_w = \phi_W \tag{III. 18}$$

$$\phi_n = \phi_P$$

$$\phi_s = \phi_S$$

Pour : $(F_e, F_w, F_n, F_s) < 0$

$$\phi_e = \phi_E$$

$$\phi_w = \phi_P$$

$$\phi_n = \phi_N \quad (\text{III. 19})$$

$$\phi_s = \phi_P$$

On obtient alors :

$$F_e \phi_e = \langle F_e, 0 \rangle \phi_P - \langle -F_e, 0 \rangle \phi_E$$

$$F_w \phi_w = \langle F_w, 0 \rangle \phi_W - \langle -F_w, 0 \rangle \phi_P \quad (\text{III. 20})$$

$$F_n \phi_n = \langle F_n, 0 \rangle \phi_P - \langle -F_n, 0 \rangle \phi_N$$

$$F_s \phi_s = \langle F_s, 0 \rangle \phi_S - \langle -F_s, 0 \rangle \phi_P$$

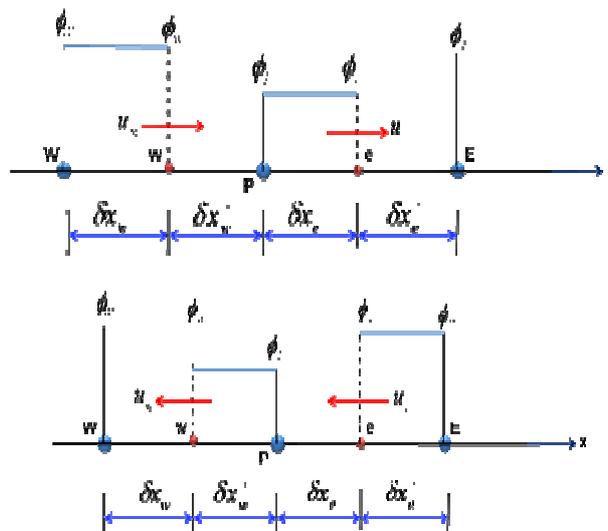


Figure III.10 : interpolation selon le schéma Upwind

4.3. Schéma exponentiel

Dans ce cas, on utilise un profil se situant entre les points P et E pour l'évaluation du flux total convection-diffusion, avec ϕ_P et ϕ_E qui remplacent ϕ_0 et ϕ_L , et la distance

$$\delta x_e = x_E - x_P \text{ qui remplace } L.$$

Chapitre III : Résolution numérique

On a donc :

$$\phi = \phi_P + \frac{\exp(Pex_e/\delta x_e) - 1}{\exp(Pe) - 1}(\phi_E - \phi_P) \quad (\text{III. 21})$$

On utilise cette formule pour déterminer j_e, j_w, j_n, j_s

Donc :

$$\begin{aligned} j_e &= F_e \phi_P + A^+[D_e, F_e](\phi_P - \phi_E) \\ j_w &= F_w \phi_W + A^+[D_w, F_w](\phi_W - \phi_P) \end{aligned} \quad (\text{III. 22})$$

$$j_n = F_n \phi_P + A^+[D_n, F_n](\phi_P - \phi_N)$$

$$j_s = F_s \phi_S + A^+[D_s, F_s](\phi_S - \phi_P)$$

4.4. Schéma Hybride(HDS)

Ce schéma est la combinaison des deux schémas (centré et Upwind), il consiste à rapprocher le comportement des coefficients $A^+[D, F]$ du schéma exponentiel, il se réduit à l'approximation centrée lorsque $P_i < -2$, et devient identique au schéma Upwind lorsque $P_i > 2$. L'erreur maximale est pour $P_i \leq 2$.

On trace les trois tangentes du profil de la solution exacte :

$$A^+[D_i, F_i] = 0 \quad \text{pour } P_i > 2$$

$$A^+[D_i, F_i] = D_i - \frac{F_i}{2} \quad \text{pour } -2 \geq P_i \geq 2$$

$$A^+[D_i, F_i] = -F_i \quad \text{pour } P_i < -2$$

On obtient finalement la relation générale :

$$A^+[D_i, F_i] = \text{Max}\left(-F_i, D_i - \frac{F_i}{2}, 0\right) \quad (\text{III. 23})$$

Donc pour toutes les faces on a :

$$A^+[D_e, F_e] = \text{Max} \left(-F_e, D_e - \frac{F_e}{2}, 0 \right)$$

$$A^+[D_w, F_w] = \text{Max} \left(-F_w, D_w - \frac{F_w}{2}, 0 \right) \quad (\text{III. 24})$$

$$A^+[D_n, F_n] = \text{Max} \left(-F_n, D_n - \frac{F_n}{2}, 0 \right)$$

$$A^+[D_s, F_s] = \text{Max} \left(-F_s, D_s - \frac{F_s}{2}, 0 \right)$$

4.5. Schéma puissance (Power lawscheme)

Ce schéma est recommandé pour les problèmes de convection-diffusion, il s'avère très efficace puisqu'il approche beaucoup mieux la solution exacte et fournit une stabilité pour la simulation numérique. Le comportement du schéma puissance est similaire au CDS pour les faibles nombres de Péclet, et au schéma Upwind pour les grands nombres de Péclet. Bien qu'il ait une précision du premier ordre concernant l'erreur de troncature, le schéma puissance est une formulation conservative et ne souffre pas du problème d'oscillations numériques.

La computation de l'exponentiel $A^+[D, F] = \frac{F}{\exp(F/D)-1}$ est une opération très coûteuse.

$$A^+[D, F] = \frac{F}{\exp(F/D) - 1} = D \max(0, (1 - 0.1|F|/D)^5) + \max(0, -F) \quad (\text{III. 25})$$

Bilan :

Si on pose $P_e = \frac{F}{D}$ qui désigne le nombre de Péclet de maille, l'équation de conservation une fois discrétisée implicitement en temps, est de la forme :

$$a_P^{n+1} \phi_P^{n+1} = a_E^{n+1} \phi_E^{n+1} + a_W^{n+1} \phi_W^{n+1} + a_N^{n+1} \phi_N^{n+1} + a_S^{n+1} \phi_S^{n+1} + b$$

Où les coefficients de l'équation sont exprimés sous la forme générale suivante :

$$a_E = D_e A(|P_e|) + [-F_e, 0]$$

$$a_W = D_w A(|P_w|) + [-F_w, 0]$$

$$a_N = D_n A(|P_n|) + [-F_n, 0]$$

(III. 26)

$$a_S = D_S A(|P_S|) + [-F_S, 0]$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_P^0 - S_P$$

$$a_P^0 = \rho_P^0 \frac{\Delta\Omega}{\Delta t}$$

$$b = S_C \Delta\Omega + a_P^0 \phi_P^0$$

On introduit la fonction $A(|P|)$ du nombre de Péclet, pour différents schémas de discrétisation comme suite :

Schéma	$A(P)$
CDS	$1 - 0.5 P $
Upwind	1
Exponentiel	$ P / (\exp(P) - 1)$
Hybride	$[0.1 - 0.5 P]$
Power Law	$[0(1 - 0.1 P)^5]$

Tableau III.4 : Expressions de la fonction $A(|P|)$ pour les différents schémas.

5. Méthode et algorithme de calcul

5.1. Couplage vitesse-Pression (Algorithme SIMPLER)

5.1.1 Couplage vitesse-Pression

Par couplage pression-vitesse, on entend la liaison qui existe entre le champ de pression et le champ de vitesse. En effet l'équation de conservation de la quantité de mouvement, contient le gradient de pression.

Cependant cette équation ne peut être résolue que si le terme de pression est spécifié, c'est-à-dire on fixe un champ de pression. Alors pour différents champs de pression, qu'on aura fixés, on aura différents champs de vitesse. Si le champ de pression est exact, le champ de vitesse résultant de la résolution de l'équation de conservation de la quantité de mouvement doit satisfaire également l'équation de continuité. La contrainte qui permet la détermination du champ de pression est donc l'équation de continuité.

5.1.2. Algorithme SIMPLER

L'algorithme SIMPLER (Semi Implicit Method for Pressure Links Equation Revised). Il a été introduit par Patankar [31]. Dans cet algorithme l'équation de continuité discrétisée est utilisée pour obtenir une équation discrétisée pour la pression au lieu d'une équation pour la correction de pression. Le champ de pression intermédiaire est donc obtenu directement sans utiliser de correction.

❖ **Equation de pression (équation de mouvement)**

$$a_e U_e = \sum a_{nb} u_{nb} + (P_P - P_E) A_e + b_u$$

Ou :

$$U_e = \frac{\sum a_{nb} u_{nb} + b_u}{a_e} + d_e (P_P - P_E)$$

Avec :

$$d_e = \frac{A_e}{a_e}$$

Lorsqu'on initialise le champ de vitesse, le champ de pression est inconnu. On annule donc le terme qui représente la pression et on introduit les pseudo-vitesses définies comme suit:

$$\hat{U}_e = \frac{\sum a_{nb} u_{nb} + b_u}{a_e}$$

Donc :

$$U_e = \hat{U}_e + d_e (P_P - P_E)$$

D'une manière similaire :

$$V_n = \hat{V}_n + d_n (P_P - P_N)$$

❖ **L'équation de continuité**

L'intégration de l'équation de continuité sur un volume de contrôle donne lieu à :

$$(U_e - U_w) \Delta Y + (V_n - V_s) \Delta X = 0$$

Substitutions U_i et V_i par $\hat{U}_i + d_i (P_P - P_E)$ et $\hat{V}_i + d_i (P_P - P_N)$ tel que i représente e, w, n et s .

D'où l'équation de pression :

$$a_P P_P = a_W P_W + a_E P_E + a_S P_S + a_N P_N + b$$

Avec :

Chapitre III : Résolution numérique

$$\begin{aligned} a_E &= d_e \Delta Y \\ a_W &= d_w \Delta Y \end{aligned} \quad (\text{III. 33})$$

$$\begin{aligned} a_N &= d_n \Delta X \\ a_S &= d_s \Delta X \\ b &= (\hat{U}_w - \hat{U}_e) \Delta Y + (\hat{V}_s - \hat{V}_n) \Delta X \end{aligned} \quad (\text{III. 34})$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S \quad (\text{III. 35})$$

Remarque :

Aucun terme n'a été négligé pour aboutir à l'équation de pression.

Dans le cas de la convection naturelle, le champ dynamique est couplé avec le champ thermique. Les différentes étapes de l'algorithme Simpler, dans ce cas, sont les suivants :

- 1- Choix initial des vitesses U^* , V^* et de température θ^* de soluté S^* .
- 2- Calculer les coefficients des équations du mouvement et obtenir les pseudo vitesses
$$\hat{U}_e = \frac{\sum a_{nb} u_{nb} + b}{a_e} \quad (\text{III. 36})$$
- 3- Calculer les coefficients dans les équations de pression et résoudre celles-ci pour obtenir P.
- 4- Utiliser cette pression comme choix initial P^* et résoudre les équations du mouvement pour obtenir U^* , V^* .
- 5- Calculer le terme b et résoudre l'équation de correction de pression pour obtenir P' .
- 6- Corriger les vitesses $U_i = U_i^* + (P'_p - P'_i)$ mais pas la pression.
- 7- Résoudre les équations d'énergie et solutale pour obtenir θ et S .
- 8- Prendre ces valeurs comme nouveau choix initial et retourner à l'étape 2.
- 9- Répéter le processus jusqu'à convergence.

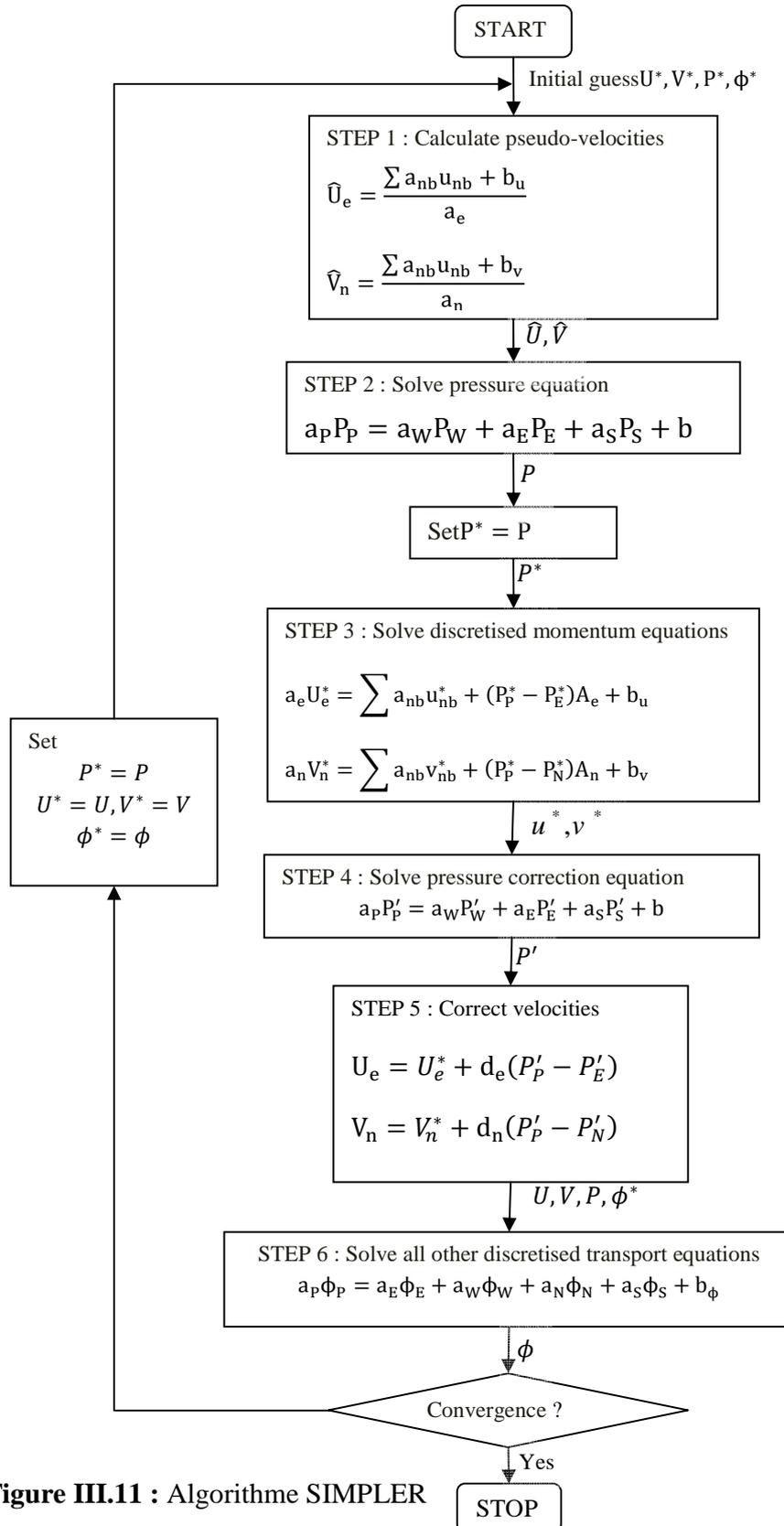


Figure III.11 : Algorithme SIMPLER

5.2. Résolution du système discrétisé (Algorithme de THOMAS, Méthode line by line)

5.2.1. Algorithme de THOMAS (TDMA)

C'est un algorithme développé par Thomas en 1949, c'est une méthode directe pour la situation unidimensionnelle (1D), mais peut être utilisée d'une manière itérative ligne par ligne (line by line) pour la résolution des problèmes bidimensionnel (2D). [31]

La discrétisation par volumes finis donne un système tridiagonal pour le cas 1D, un système penta-diagonal pour le cas 2D et un système septa-diagonal pour le cas 3D. D'autres schémas de discrétisation donnent plusieurs diagonal, par exemple le schéma QUICK donne sept diagonal dans le cas 2D. Dans ce cas on pose deux diagonal dans le terme source.

Un système tridiagonal peut s'écrire sous la forme générale.

$$a_i\phi_{i-1} + b_i\phi_i + c_i\phi_{i+1} = d_i \tag{III. 37}$$

Sous forme d'une matrice, ce système s'écrit :

$$\begin{bmatrix} b_1c_1 & 0 & & & 0 \\ & a_2b_2c_2 & & & \\ & a_3b_3c_3 & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & c_{n-1} \\ 0 & & & & a_nb_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \phi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ d_n \end{bmatrix}$$

Le calcul se fait de la manière suivante :

- Pour $i=2$, on utilise les équations :

$$P_2 = \frac{b_2}{a_2}, Q_2 = \frac{d_2 + c_2\phi_1}{a_2} \tag{III. 38}$$

- Pour i variant de 3 à $N-1$, on utilise les équations :

$$P_i = \frac{b_i}{a_i - c_iP_{i-1}}, Q_i = \frac{d_i + c_iQ_{i-1}}{a_i - c_iP_{i-1}} \tag{III. 39}$$

Avec : $P_N = 0$ et $Q_N = \phi_N$ (où ϕ_N est une condition aux limites).

- La dernière étape détermine les inconnues, pour i variant de $N-1$ à 1 , on utilise l'équation :

$$\phi_i = P_i\phi_{i+1} + Q_i \tag{III. 40}$$

ϕ_1 et ϕ_N sont des valeurs aux limites du domaine.

Chapitre III : Résolution numérique

5.2.2. Application de l'algorithme de THOMAS à des problèmes à 2D (TDMA)

TDMA c'est l'abréviation de (Tri – Diagonal – Matrix –Algorithme).L'algorithme de Thomas peut être appliqué itérativement pour résoudre un problème d'un système d'équations bidimensionnel [32]. Considérons le maillage envisagé dans la figure et une équation générale de transport discrétisée sous la forme :

$$a_p \phi_p = a_B \phi_B + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \quad (\text{III. 41})$$

Pour résoudre ce système, l'algorithme de Thomas est appliqué pour une ligne choisie, par exemple la ligne Nord-Sud (N-S). L'équation de transport discrétisée est réarrangée sous la forme :

$$-a_S \phi_S + a_B \phi_B - a_N \phi_N = a_E \phi_E + a_W \phi_W + b \quad (\text{III. 42})$$

Le membre droit de l'équation (48) est supposé temporairement connu. L'équation (48) est de la même forme que l'équation (38), avec :

$$a_i \phi_{i-1} + b_i \phi_i + c_i \phi_{i+1} = d_i \quad (\text{III. 43})$$

$$a_i = -a_s$$

$$b_i = a_p$$

$$c_i = -a_N$$

$$d_i = a_W \phi_W + a_E \phi_E + b \quad (\text{III. 44})$$

On peut maintenant résoudre le système le long de la direction (N-S) de la ligne choisie pour des valeurs $j = 2, 3, 4, \dots, n$ comme indiqué sur la figure (12).

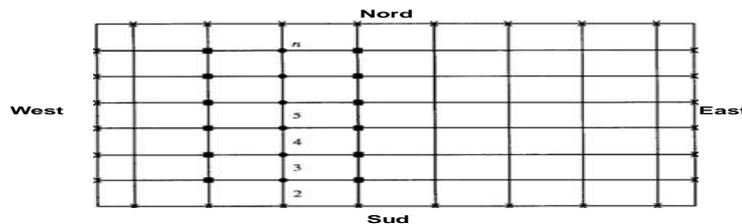


Figure III.12 : Application ligne par ligne de la méthode TDMA

Chapitre III : Résolution numérique

- Points auxquels les valeurs sont calculées
- Points auxquels les valeurs sont considérées être temporairement connues

Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre, la méthode des volumes finis adoptée pour la discrétisation des équations établies dans le chapitre précédent. Différents schémas numériques ont été présentés comme le schéma CDS, Upwind, Exponentiel, Hybride et le schéma Puissance qui ont l'efficacité en résultats et en temps de calcul. L'algorithme SIMPLER est adopté pour résoudre le système d'équations algébriques et traiter le couplage pression-vitesse. Nous avons présenté aussi l'algorithme de Thomas qui permet de résoudre les équations algébrique par la méthode ligne par ligne (line by line).

Chapitre IV :
Résultat et
interprétation

Résultats et interprétation

Introduction

L'objectif de cette section est d'analyser l'effet du rapport de flottabilité N et le nombre de Lewis Le sur la convection double diffusive dans une cavité carrée pour des gradients thermiques et solutal horizontaux. L'ensemble des résultats obtenus, sont présentés sous forme de lignes de courant, isothermes et isoconcentrations, ainsi que la variation du nombre de Nusselt et Sherwood local et moyen sur la paroi active chaude. Les paramètres de simulation utilisés sont le nombre de Rayleigh qui prend la valeur $Ra = 10^6$, le nombre de Prandtl $Pr = 0.71$, le nombre du rapport de flottabilité N qui prends des valeurs entre -5 et $+5$ et le nombre de Lewis qui varie entre 0.1 et 5 .

Validation

La validation du code numérique porte sur un écoulement de convection double diffusive dans une cavité de section carrée et différentiellement chauffée. Ce problème a fait l'objet d'un test de comparaison et des solutions, qu'on peut considérer comme précises, et qui sont disponibles en littérature, rapporté dans les travaux de Béghein et al.[1] et les travaux de Sezai et al. [2]. Les nombres de Nusselt et Sherwood moyen de la paroi chaude, (tableau 1), sont comparés aux résultats de [1,2]. Un excellent accord a été observé pour toutes les valeurs du nombre de N testées et sur les deux parois actives.

Tableau IV.1 : nombres de Nusselt et Sherwood moyens le long de la paroi chaude pour $Le = 1$, $Pr = 0.71$ et $Ra = 10^7$.

N	-0.01	-0.1	-0.2	-0.5	-0.8	-0.9	-1	-1.5	-5.0
$Nu (Sh)$	16.465	16.049	15.55	13.69	10.67	8.81	2.88	13.69	23.86
present travail									
[33]	16.4	16.0	15.5	13.6	10.6	8.8		13.6	23.7
[34]	16.3	15.9	15.4	13.5	10.5	8.6		13.5	13.6

1- Effet du nombre de rapport de flottabilité N

la figure (IV.1) représente les isovaleurs des lignes de courant, isothermes et iso-concentrations pour $Ra = 10^6$, $Le = 1$, $Pr = 0.71$ et différentes valeurs de N.

Le plus remarquable est que les isothermes et les isoconcentrations sont confondus et cela n'est pas valide que pour le cas où le nombre de Lewis est égal à 1. Pour des valeurs de N entre -5 et -1, les forts gradients thermique et massique sont observés près de la partie supérieure de la paroi chaude et près de la partie inférieure de la paroi froide.

Les lignes de courant montrent une rotation dans le sens contraire des aiguilles d'une montre et caractérisées par des contours dans le centre de la cavité de la forme de la lettre (Z).

Pour des valeurs de N supérieures à (-1), l'écoulement change de direction et devient dans le sens des aiguilles d'une montre. L'intensité de l'écoulement augmente de plus en plus en augmentant la valeur de N.

Les forts gradients thermique et massique sont observés près de la partie inférieure de la paroi chaude et près de la partie supérieure de la paroi froide.

Dans le cas particulier au $N=1$ à laquelle les forces de flottabilité d'origine thermique et massique sont au même ordre et dans des sens contraires, l'écoulement est caractérisé par une cellule de convection thermique de faible intensité, les isothermes et les isoconcentrations sont des lignes verticales et parallèles caractérisant un régime conductif du transfert thermique et massique.

Nous remarquons aussi dans la figure qui présente les contours des isothermes et iso-concentrations ($N= (-5,-2)$) que ces deux derniers sont identiques et que la stratification de température au cœur de la cavité explique l'état de repos du fluide dans cette zone. Le mouvement symétrique du fluide est généré par les forts gradients thermiques qui se forment au voisinage des parois actives. on distingue un écoulement principal forme de couches limites le long des parois actives (une montante du long de la paroi froide et une descendante du long de la paroi chaude), ainsi que des jets pariétaux du long du plancher et du plafond reliant ces deux couches limites de plus la présence de zones de recirculation secondaires est également à noter au-dessus du jet pariétal au plancher et en-dessous de celui au plafond, en d'autre sens les isothermes sont presque parallèles à la paroi froide au limite inférieure de cavité jusqu'à la ligne médiane horizontale ($y=1/2$), une progressive déviation a été remarquée.

Chapitre IV : résultat et interprétation

Cette déviation augmente pour atteindre une valeur maximale à la limite supérieure de l'enceinte. Ce phénomène est le même pour la paroi chaude, mais de sens inverse (la déviation commence à la limite inférieure). la même forme pour les cavités de $N=(1,2,5)$ mais de sens inverse (une montante du long de la paroi chaude et une descendante du long de la paroi froide). Pour $N=-1$ les isothermes sont stratifiés et pratiquement parallèles aux parois verticales.

La figure (IV.2) représente la distribution du nombre de Nusselt (Sherwood) local pour $Ra = 10^6$, $Le = 1$ et différentes valeurs de N . pour les valeurs faibles de N nous remarquons que la valeur maximale de transfert est plus élevée à $Y \approx 1$, cette valeur diminue avec l'augmentation de N . pour $N=-1$ les valeurs de transfert sont stables et bas. Lors de l'augmentation de N nous remarquons que la valeur maximale de transfert est plus élevée à $Y \approx 0$, cette valeur augmente avec l'augmentation de N .

La figure (IV.3) représente la distribution du nombre de Nusselt (Sherwood) moyen pour $Ra = 10^6$, $Le = 1$ et différentes valeurs de N . L'échange thermique (massique) diminue en augmentant la valeur de N jusqu'à la valeur -1 de N ou la valeur moyen de Nusselt (Sherwood) commence à augmenter en augmentant la valeur de N , (tableau 1).

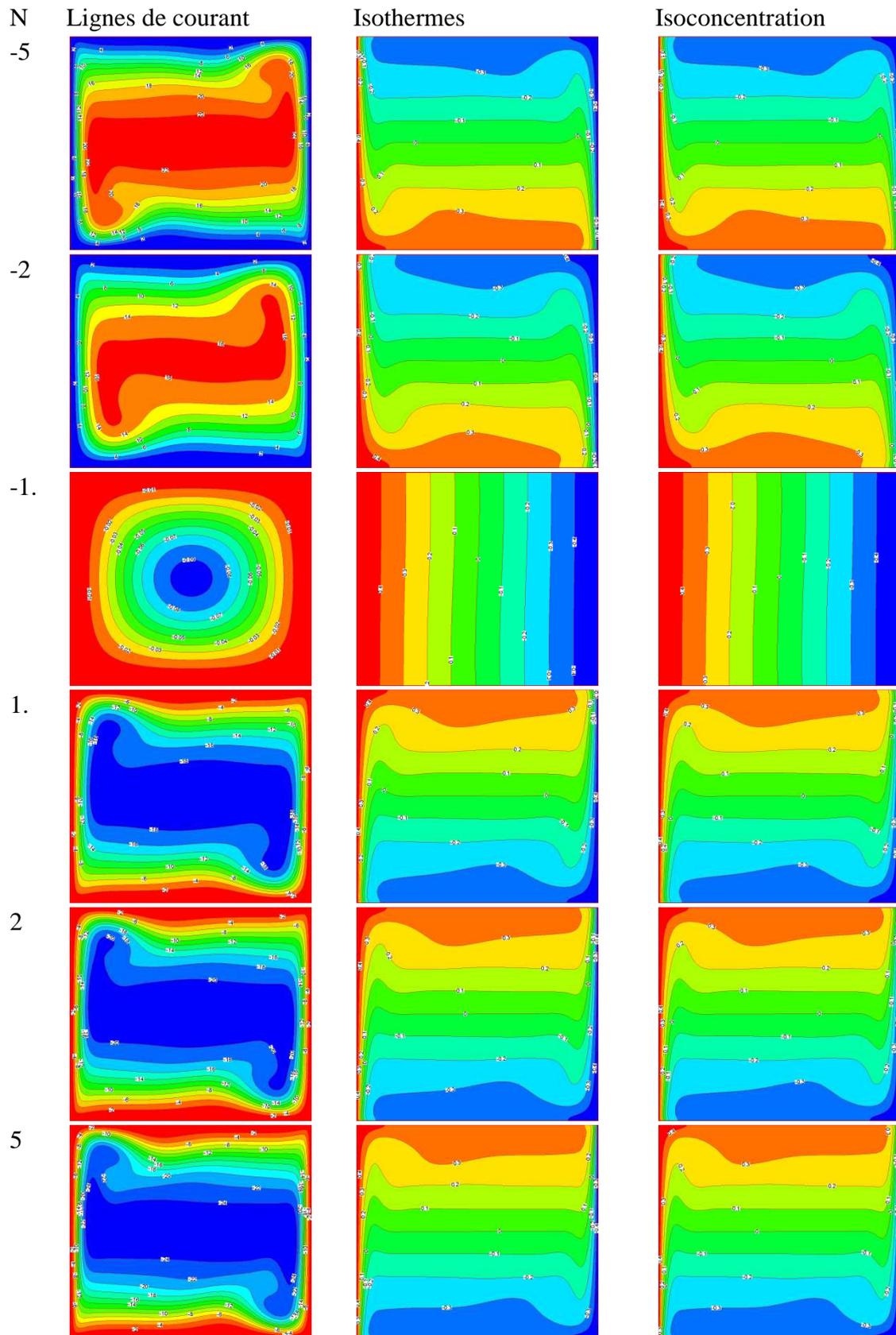


Figure (IV.1) : lignes de courant (a), isothermes (b) et isoconcentration (c) pour $Ra = 10^6$, $Le = 1$ et différentes valeurs de N .

Tableau (IV.2) : Valeurs moyennes des nombres de Nusselt et Sherwood.

N	-5	-2	-1	1.005	2	5
$Nu_{avg} (Sh_{avg})$	12.92	8.81	1.00	10.7	11.95	14.42

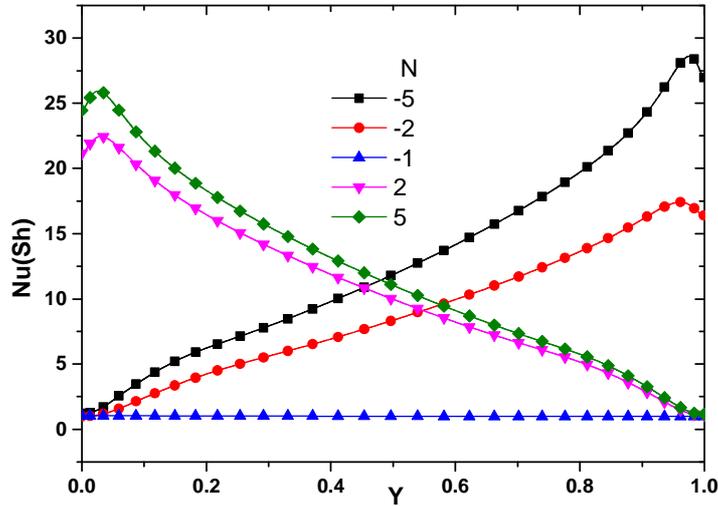


Figure (IV.2) : distribution du nombre de Nusselt (Sherwood) local pour $Ra = 10^6$, $Le = 1$ et différentes valeurs de N .

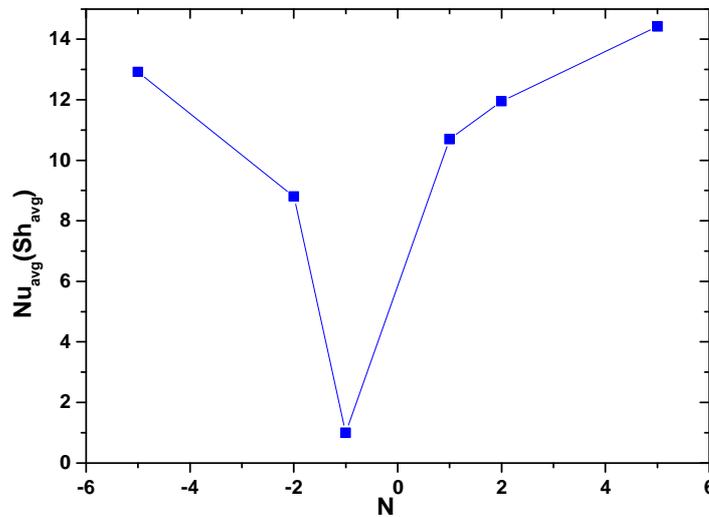


Figure (IV.3) : distribution du nombre de Nusselt (Sherwood) moyen pour $Ra = 10^6$, $Le = 1$ et différentes valeurs de N .

2- Effet du nombre de Lewis Le :

la figure (IV.4) représente les contours des lignes de courant, isothermes et iso-concentrations pour $Ra = 10^6$, $N = 0.1$, $Pr = 0.71$ et différentes valeurs de Le .

Chapitre IV : résultat et interprétation

Les contours des lignes de courant pour différents nombres de Le sont présentés dans les figures (IV.4.a). Nous observons que la cellule centrale occupe pratiquement la plus part de la cavité, et le cœur de cette cellule a un zed inversé à cause du grand mouvement, ce qui explique la convection dominante. Lorsque on augmente la valeur de Le la cellule centrale est diminué.

La figure (IV.4.b) présente les contours des isothermes où nous observons que les résultats sont identiques pour les différents valeurs de Le . Le mouvement symétrique du fluide est généré par les forts gradients thermiques qui se forment au voisinage des parois actives. On distingue un écoulement principal forme de couches limites le long des parois actives (une montante du long de la paroi froide et une descendante du long de la paroi chaude), ainsi que des jets pariétaux du long du plancher et du plafond reliant ces deux couches limites de plus la présence de zones de recirculation secondaires est également à noter au-dessus du jet pariétal au plancher et en-dessous de celui au plafond.

La figure (IV.4.c) présente les contours des iso-concentrations. Nous remarquons que les profils des isothermes et des isoconcentrations sont identiques pour les cas des faibles nombres de Le , plus la valeur de ce dernier est élevée nous regardons de manière quantitative la stratification thermique au centre de la cavité est diminué et l'épaisseur de la couche limite thermique sur les murs latéraux est décroît.

La figure (IV.5) représente la distribution du nombre de Nusselt local pour $a = 10^6$, $N = 0.1$ et différentes valeurs de Le . Nous remarquons que la valeur maximale est plus élevée dans la partie inférieure de la paroi, l'effet du nombre de Lewis n'a pas d'effet considérable sur l'échange thermique.

Ou contraire pour l'échange massique ou on a un effet considérable du nombre de Lewis sur la distribution du nombre de Sherwood, comme montre la figure (IV.6), la valeur maximale de Sherwood est près de la partie inférieure de la paroi et croit de plus en plus en augmentant la valeur de Lewis.

est plus élevée à la paroi où cette valeur être plus grand quand le nombre de Le augmente, puis ces valeurs diminuent jusqu'à la valeur minimale.

La figure (IV.7) représente la distribution du nombre de Nusselt moyen en fonction de Le pour $a = 10^6$, $N = 0.1$. Nous constatons que l'intensité du transfert de chaleur diminue avec l'augmentation du nombre de Le , (tableau 2).

Chapitre IV : résultat et interprétation

La figure (IV.8) représente la distribution du nombre de Sherwood moyen en fonction de Le pour $Ra = 10^6$, $N = 0.1$. Nous constatons que l'intensité du transfert de masse augmente avec l'augmentation du nombre de Le , (tableau 2).

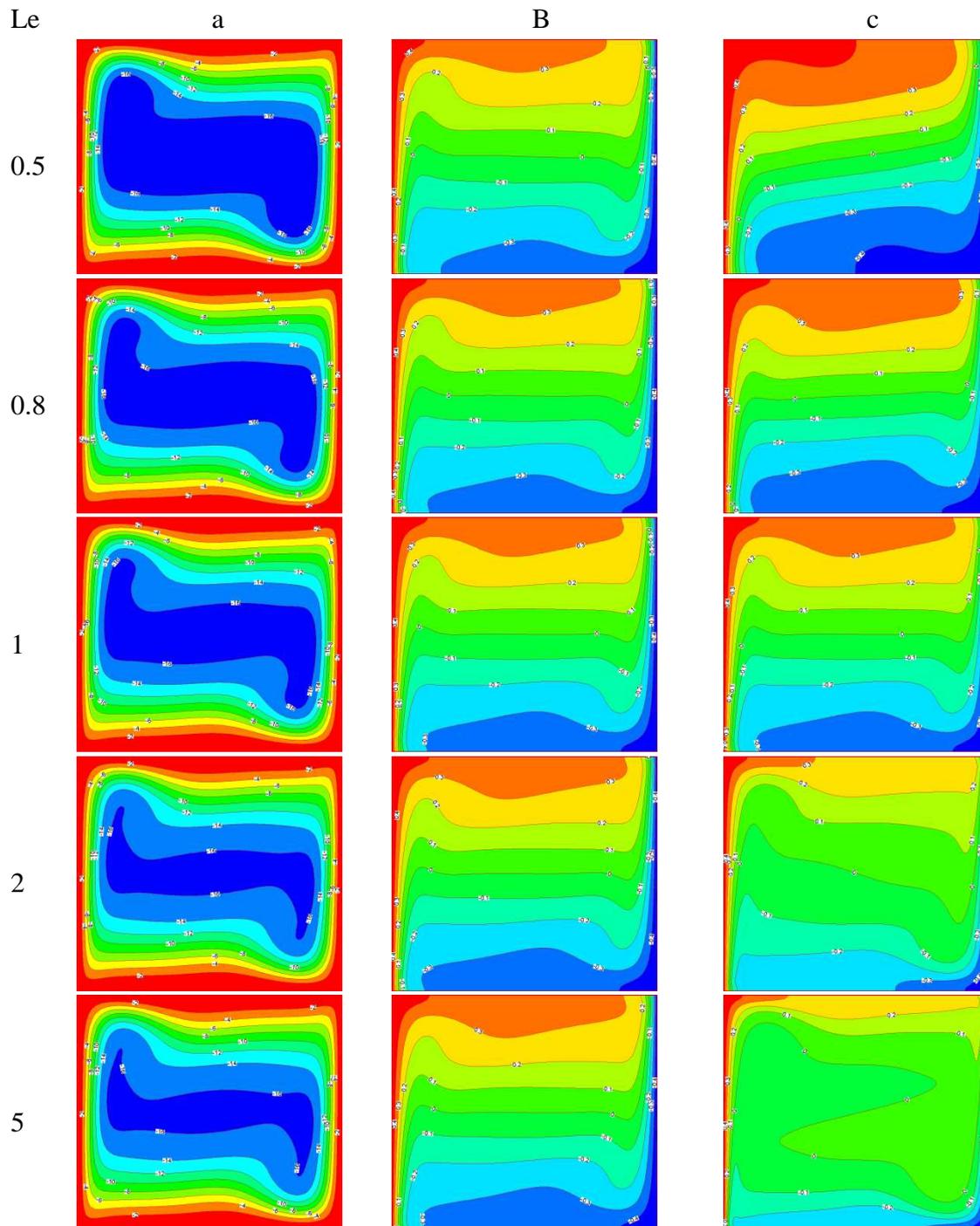


Figure (IV.4) : lignes de courant (a), isothermes (b) et isoconcentration (c) pour $Ra = 10^6$, $N = 0.1$ et différentes valeurs de Le .

Tableau (IV.3) : Valeurs moyennes des nombres de Nusselt et Sherwood.

Le	0.5	0.8	1	2	5
Nu_{avg}	9.14	9.09	9.06	9.00	8.90
Sh_{avg}	6.11	8.12	9.06	11.95	16.75

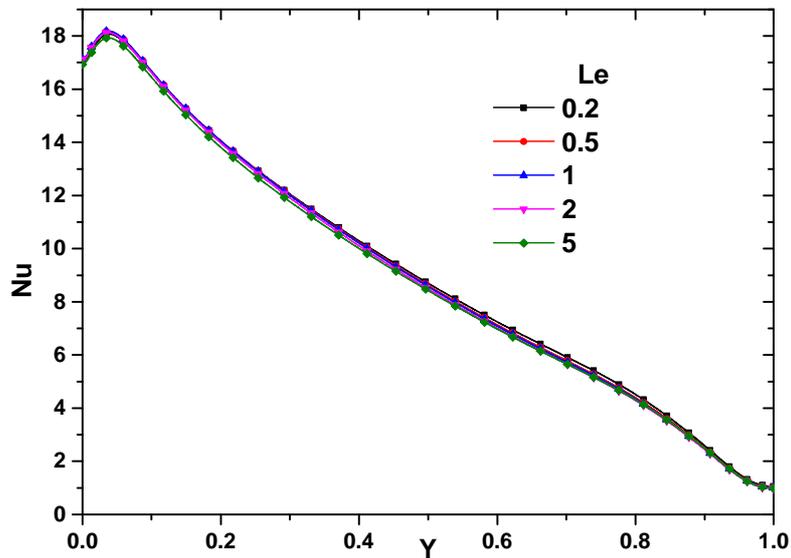
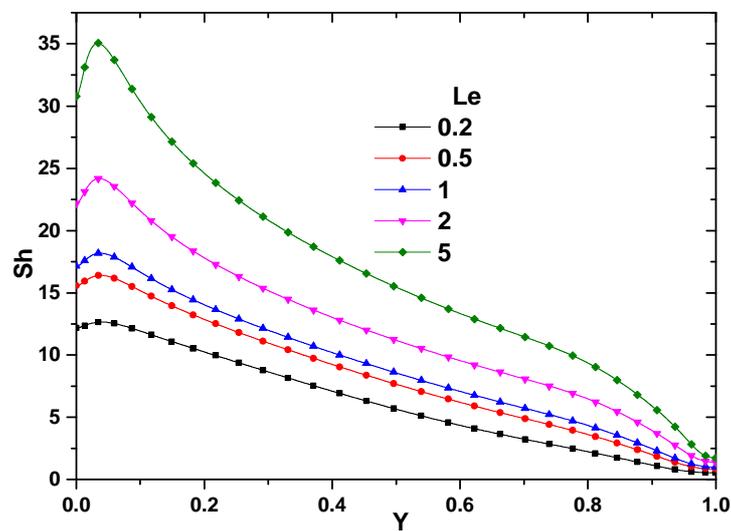


Figure (IV.5) : distribution du nombre de Nusselt local pour $Ra = 10^6$, $N = 0.1$ et différentes valeurs de Le .



Figure(IV.6) : distribution du nombre de Sherwood local pour $Ra = 10^6$, $N = 0.1$ et différentes valeurs de Le .

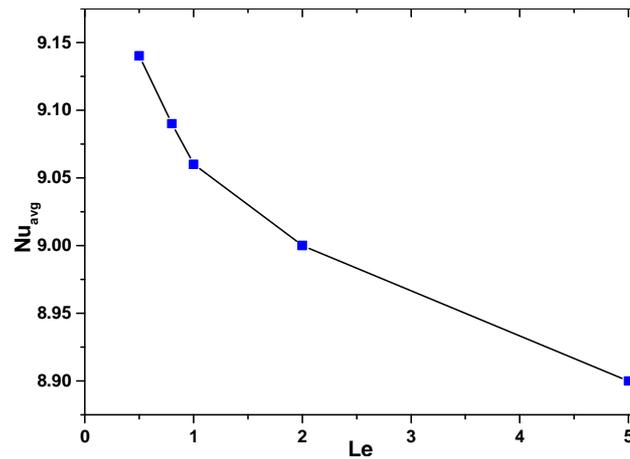


Figure (IV.7) : distribution du nombre de Nusselt moyen en fonction de Le pour $Ra = 10^6$,
 $N = 0.1$.

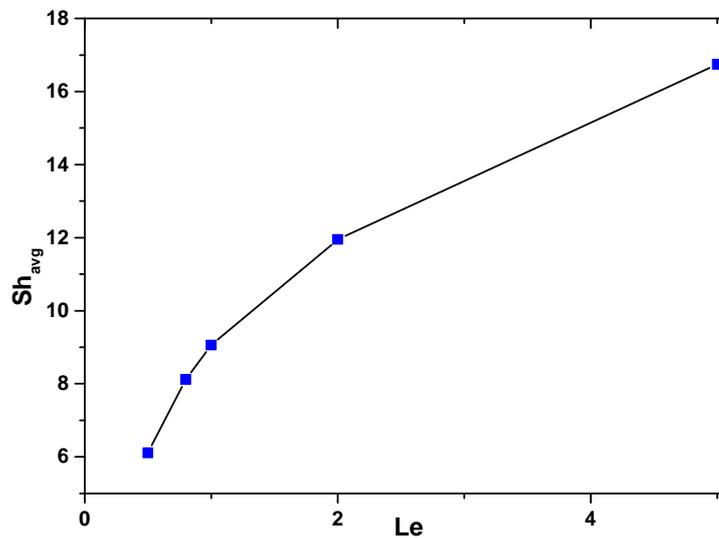


Figure (IV.8) : distribution du nombre de Sherwood moyen en fonction de Le pour $Ra = 10^6$,
 $N = 0.1$.

Conclusion :

Dans cette partie, nous avons étudié une analyse du transfert de chaleur par convection naturelle double-diffusive dans une géométrie bidimensionnelle.

L'objectif est d'analyser l'étude de l'effet de variation des paramètres suscités, sur les transferts de matière et de chaleur. Nous avons également analysé et discuté les effets de nombre de rapport de flottabilité N et de nombre de Lewis Le sur les transferts. Les résultats numériques ont été présentés en termes des lignes de courants, des isothermes, des iso-concentrations et des nombres de Nusselt et Sherwood moyens et locaux.

Chapitre IV : résultat et interprétation

Ce travail a permis d'apporter un certain nombre de résultats correspondant à une gamme très variée. Ces résultats aideront sans doute à mieux comprendre les phénomènes des écoulements dus à la convection double-diffusive.

Conclusion générale

Conclusion générale

Le travail présenté dans ce mémoire est une étude numérique du transfert de chaleur par convection naturelle double-diffusive dans une cavité carrée. Les surfaces verticales de la cavité sont supposées isothermes et portées respectivement aux températures (concentration), Les surfaces horizontales sont considérées adiabatiques et imperméables.

La formulation mathématique est représentée par les équations de continuité, de quantité de mouvement, de l'énergie et de la masse dans les coordonnées cartésiennes pour le cas bidimensionnel. On a L'approximation de Boussinesq et des hypothèses simplificatrices sont adoptées afin de simplifier le système d'équations. La discrétisation des équations est réalisée par la méthode des volumes finis et l'algorithme SIMPLER a été utilisé pour résoudre le couplage pression-vitesse, ainsi le système algébrique obtenu est résolu itérativement par l'algorithme TDMA (la méthode de Balayage).

Pour la simulation numérique le modèle mathématique et les programmes de calcul (TECPLOT et Origin) qui été élaborés dans notre travail ont été testés pour nombre de Rayleigh $Ra = 10^6$, nombre de Prandtl $Pr = 0.71$ et différentes valeurs de nombre de flottabilité N et de nombre de Lewis Le . Les résultats obtenus concernant les lignes de courant, les isothermes et les isoconcentrations ainsi que le nombre de Nusselt et nombre de Sherwood sont en conformité avec les résultats obtenus de la littérature [33,34] pour la validation de notre code de calcul. Un excellent accord a été observé pour toutes les valeurs du nombre de N testées et sur les deux parois actives.

Références

Conclusion générale

Référence bibliographique

- [1] BENZAADA S., BOUZIANE M.T : TRANSFERT DE CHALEUR, mémoire de Magister- l'Université BISKRA (2019)
- [2] <https://www.techno-science.net/glossaire-definition/Convection.html> 04/06/2021; 13:15.
- [3] : A. Lemembre, J. P. Petit, Laminar natural convection in a laterally heated and upper cooled vertical cylindrical enclosure, *Int J. Heat Mass Transfer*, 41 (1998), 2437- 2454,
- [4] : M. Corcione, Effects of the thermal boundary conditions at the sidewalls upon natural convection in rectangular enclosures heated from below and cooled from above, *International Journal of Thermal Sciences*, 42 (2003), 199–208.
- [5] : H. Koizumi, Flow pattern and the transition to chaos in a confined container heated locally from below, *International Journal of Thermal Sciences*, 46 (2007), 953–962.
- [6] : H. Yang, Z. Zhou, Exploring supercritical properties of secondary flows of natural convection in inclined channels, *Int J. Heat Mass Transfer*, 47 (2004), 1217- 1226.
- [7] : T. Adachi, Stability of natural convection in an inclined square duct with perfectly conducting side walls, *Int J. Heat Mass Transfer*, 49 (2007), 2372- 2380.
- [8] : Riethmuller M.L., (2003), *Vélocimétrie et Granulométrie Laser en Mécanique des Fluides- Vélocimétrie par Images de Particules ou PIV*, Ecole d'automne Saint-Pierre d'Oléron, Association Francophone de Vélocimétrie Laser.
- [9] : Ramesh N., and Venkateshan S.P., (2001), Experimental study of natural convection in a square enclosure using differential interferometer, *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, vol. 44, p.1107-1117.
- [10] : <https://www.maxicours.com/se/cours/transferts-thermiques-flux-thermique-resistance-thermique/>. 4/06/2021; 22:13.
- [11] : <https://www.bluejean.fr/mysteres/centrale-solaire.php>; 4/06/2021 ; 22 :20 .
- [12] : <http://www.traiteurchevalblanc.fr/chauffage-solaire-thermique-chauffage-electrique-convecteur-13130/> ; 04/06/2021 ; 23 :43.
- [13] : KHIDER fatma Zohra, "Amélioration de la convection mixte en utilisant des ailettes cylindriques avec des ouvertures au niveau de la base ", mémoire de master Université de M'sila, 2016.

Conclusion générale

[14] : R. W. Schmitt. Double diffusion in oceanography. Annual Review of Fluid Mechanics, 26 :255–285, 1994.

[15] : G.Veronis, "Effect of a stabilizing gradient of solute on thermal convection", J. Fluid Mech. 34, pp.315–368, 1968.

[16] : G.Veronis, "Effect of a stabilizing gradient of solute on thermal convection", J. Fluid Mech. 34, pp.315–368, 1968.

[17] : J. A. Weaver , R. Viskanta , "Natural Convection in Binary Gases Due to Horizontal Thermal and Solutal Gradients", J. Heat Transfer 113(1), pp.141-147, Feb 01, 1991.

[18] : J. A. Weaver , R. Viskanta , "Natural Convection in Binary Gases Due to Horizontal Thermal and Solutal Gradients", J. Heat Transfer 113(1), pp.141-147, Feb 01, 1991.

[19] : J. A. Weaver , R. Viskanta , "Natural Convection in Binary Gases Due to Horizontal Thermal and Solutal Gradients", J. Heat Transfer 113(1), pp.141-147, Feb 01, 1991.

[20] : J. A. Weaver , R. Viskanta , "Natural Convection in Binary Gases Due to Horizontal Thermal and Solutal Gradients", J. Heat Transfer 113(1), pp.141-147, Feb 01, 1991.

[21] : J. A. Weaver , R. Viskanta , "Natural Convection in Binary Gases Due to Horizontal Thermal and Solutal Gradients", J. Heat Transfer 113(1), pp.141-147, Feb 01, 1991.

[22] : J. A. Weaver , R. Viskanta , "Natural Convection in Binary Gases Due to Horizontal Thermal and Solutal Gradients", J. Heat Transfer 113(1), pp.141-147, Feb 01, 1991.

[23] : J. A. Weaver , R. Viskanta , "Natural Convection in Binary Gases Due to Horizontal Thermal and Solutal Gradients", J. Heat Transfer 113(1), pp.141-147, Feb 01, 1991.

[24] : J. A. Weaver , R. Viskanta , "Natural Convection in Binary Gases Due to Horizontal Thermal and Solutal Gradients", J. Heat Transfer 113(1), pp.141-147, Feb 01, 1991.

[25] : J. A. Weaver , R. Viskanta , "Natural Convection in Binary Gases Due to Horizontal Thermal and Solutal Gradients", J. Heat Transfer 113(1), pp.141-147, Feb 01, 1991.

Conclusion générale

[26] : M.A. Yahiaoui, "Simulation numérique de la convection induite par double diffusion et effet Soret dans une cavité cylindrique concentrique", Thèse de Philosophiae Doctor, Ecole Polytechnique de Montréal, Canada. 2007

[27] : M.A. Yahiaoui, "Simulation numérique de la convection induite par double diffusion et effet Soret dans une cavité cylindrique concentrique", Thèse de Philosophiae Doctor, Ecole Polytechnique de Montréal, Canada. 2007

[28] : P. Garaud, "Double-Diffusive Convection at Low Prandtl Number", *Ann. Rev. Fluid Mech.* 50,pp. 275-298, 2018.

[29] : P. Garaud, "Double-Diffusive Convection at Low Prandtl Number", *Ann. Rev. Fluid Mech.* 50,pp. 275-298, 2018.

[30] : P. Garaud, "Double-Diffusive Convection at Low Prandtl Number", *Ann. Rev. Fluid Mech.* 50,pp. 275-298, 2018.

[31] : P. Garaud, "Double-Diffusive Convection at Low Prandtl Number", *Ann. Rev. Fluid Mech.* 50,pp. 275-298, 2018.

[32] : R. W. Schmitt. Double diffusion in oceanography. *Annual Review of Fluid Mechanics*,
26 255–285, 1994.

[33] : C. Béghein, F. Haghghat, and F. Allard, "Numerical study of double-diffusive natural convection in a square cavity," *Int. J. Heat Mass Transf.*, vol. 35, no. 4, pp. 833-846, Apr. (1992).

[34] : I. Sezai and A. A. Mohamad, "Double diffusive convection in a cubic enclosure with opposing temperature and concentration gradients," *Phys. Fluids*, vol. 12, no. 9, pp. 2210-2223, Aug. (2000).