



## Mémoire de Master

### Présenté au

**Département** : Génie Électrique  
**Domaine** : Sciences et Technologies  
**Filière** : Electromécanique  
**Spécialité** : Electromécanique

### Réalisé par :

HAMLAOUI Abdelmounaim

Et

BOUZEGZA Redha

## Thème

### *La commande d'un pendule inversé*

Soutenu le: **30/10/2021**

Devant la commission composée de :

Mr : BENGHENIA Hadj abdelkader	M.A.A	Univ. Bouira	Président
Mr : ISSAOUNI Salim	M.A.A	Univ. Bouira	Rapporteur
Mr :KHERCHI Mohammed	M.A.A	Univ. Bouira	Examineur

# *Dédicace*

*A mes très chers parents qui n'ont jamais cessé de  
me soutenir tout au long de mon parcours d'étude*

*À mes sœurs*

*Je dédie ce mémoire, toute ma famille, tous  
mes fidèles amis, tous les enseignants et étudiants*

*Je dédie enfin ce mémoire à toute personne  
ayant contribué de pré ou loin à sa  
concrétisation.*

*Mounaim*

# *Dédicace*

***A mes très chers parents, source de vie  
d'amour et d'affection***

***A mes chers frères, source de joie  
et de bonheur***

***A toute ma famille, source d'espoir  
et de motivation***

***A tous mes amis, tout particulièrement mounaim***

*Redha*

# REMERCIEMENTS

*Ce travail a été effectué au sein du Département des Sciences et sciences appliquées de l'Université de Bouira.*

*Nous tenons à remercier avant tout le bon dieu de nous avoir donné la force et la volonté pour mener à ce modeste travail*

*Nous tenons bien évidemment, à remercier nos promoteurs Mr. ISSAOUNI Salim, Directeur de ce mémoire, pour nous avoir encadrés pendant toute la période de confection de ce mémoire*

*Je tenons à remercier également tous les membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail.*

*A tous nos enseignants qui nous ont aidé durant notre cursus, en signe d'un profond respect et d'une profonde gratitude.*

*Enfin, nous associons à ces remerciements tous ceux qui ont contribué à réaliser ce travail.*

**Merci**

# Table des Matières

Liste des Figures .....	II
Liste des Tableaux .....	II
Listes des Acronymes et Symboles.....	III

## **Introduction Générale** **1**

### **Chapitre 1 : Modélisation d'un pendule inversé**

I.1. Introduction.....	03
I.2. Pendule inversé.....	03
I.2.1. Intérêt d'étude un pendule inversée.....	03
I.2.2. Principe de fonctionnement.....	06
I.3. Modélisation du pendule inversé.....	07
I.3.1. Energie cinétique du système .....	08
I.3.2. Energie potentielle du système.....	09
I.3.3. Equations d'Euler-Lagrange.....	10
I.3.4. Modèle d'état de l'ensemble chariot-pendule.....	11
I.4. Résultats de la simulation.....	12
I.5. Conclusion.....	15

### **Chapitre 2 : La commande du pendule inversé par mode glissant**

II.1. Introduction.....	16
II.2. Définition du mode glissant .....	16
II.2.1. Commande a structure variable (CSV).....	17
II.2.2. Objectif de la commande par mode glissant.....	17
II.2.3. Déférents structures du contrôle par mode glissant.....	17
II.2.4. Théorie de la commande par mode glissant.....	17
II.2.5. Commande par modes glissants d'ordre 1.....	18
II.2.6. Commande par modes glissants d'ordre 2.....	18

---

II.2.7 Les Différents modes de glissants.....	19
II.2.8 Synthèse de la loi de commande.....	20
II.2.8.1 Choix de la surface de glissement.....	20
II.2.8.2 Conditions d'existence du mode Glissant.....	21
II.2.9.Le broutement.....	22
II.2.10.suppression du phénomène de réticence.....	23
II.2.11.Les avantages et les inconvénients de l'commande mode glissant.....	23
II.3. La commande par mode glissant d'un pendule inversé .....	23
II .3.1. Formulation mathématique .....	23
II.4. Résultats de la Simulation.....	25
II.4.1. Test de stabilisation.....	26
II.4.2. Test de poursuite d'une trajectoire.....	27
II.5. Conclusion.....	29
<b>Conclusion Générale</b>	<b>30</b>
<b>Références bibliographiques</b>	<b>32</b>

# Liste des Figures

- **Chapiter1 :**

Figure (I.1) : l'homme est un pendule inversé

Figure (I.2) : Scooter intelligent (segway)

Figure (I.3) : Robots EMIEW gauche et robot MIP

Figure (I.4) : Le robot BIPED

Figure (I.5) : pendule gyroscopique

Figure (I.6) : Pendule gyroscopique inversé

Figure (I.7) : Pendule inversé de coordonnées  $x$  et  $\theta$

Figure (I.8) : Schémas de chariot et pendule inversé

Figure (I.9) : schéma bloc de l'ensemble chariot-pendule sous Simulink

Figure (I.10) : Réponse du système en boucle ouverte pour un échelon de 0.1N avec

$$[x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0,0,0,0]$$

Figure (I.11) : Réponse du système en boucle ouverte pour un échelon de 1N avec

$$[x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0,0,0,0]$$

Figure (I.12) : Réponse du système en boucle ouverte pour un échelon de 0.1N avec

$$[x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0,0, \pi,0]$$

Figure (I.13) : Réponse du système en boucle ouverte pour un échelon de 1N avec

$$[x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0,0, \pi,0]$$

- **Chapitre 2 :**

Figure (II.1) : différents modes de convergence pour la trajectoire d'état

Figure (II.2) : Convergence de système glissant.

Figure (II.3) : les régimes glissants réels (droite) et idéal (gauche)

Figure (II.4) : Trajectoire de l'état vis-à-vis la surface de glissement

Figure (II.5) : Le phénomène de broutement

Figure (II.6) : Application de la commande floue au système simple pendule inversé

Figure (II.7) : Poursuite d'une trajectoire carrée pour la position  $x$

Figure (II.8) : Poursuite d'une trajectoire sinusoïdale pour la position  $x$

# Liste des Tableaux

Tab.I.1. Les paramètres de l'ensemble chariot-pendule

.

# Listes des Acronymes et Symboles

- **Acronymes**

**CMG** : Control Moment Gyro

**LFD** : la loi fondamentale de newtonienne de la dynamique

**CSV** : Commande a structure variable

**VSS** : Système à structure variable.

**CMG** : La commande par mode glissant.

**MC** : Le mode de convergence.

**MG** : Le mode de glissement.

**MRP** : Le mode du régime permanent.

**SAT** : La fonction de saturation.

- **Symboles**

$M$  : Masse du chariot

$b$  : Coefficient de frottement des roues du chariot

$m$  : Masse du pendule

$x(t)$  : Position du chariot

$J$  : Inertie du pendule en son centre de masse

$l$  : Demi-longueur de pendule

$\theta(t)$  : Angle de rotation du pendule

$F(t)$  : Force exercé sure le chariot

$g$  : Intensité de la pesanteur

$d$  : Coefficient de frottement de rotation du pendule

$E_c$  : L'énergie cinétique du système

$E_p$  : L'énergie potentielle du système

$L$  : Lagrangien du système

$E_{cc}$  : L'énergie cinétique du chariot

$E_{cp}$  : L'énergie cinétique du pendule

$v_c$  : Vitesse de centre de gravité du pendule

$\dot{\theta}$  : Vitesse angulaire du pendule

$r_c$  : Position du centre de gravité du pendule

$i$  et  $j$  : Vecteur unitaire du repère  $x, y$

$\varepsilon$  : Degré de liberté

$D_f$ : Désigne l'énergie dissipé par frottement

$X$ : Vecteur d'état

$S$ : Surface de glissement.

$U$ : L'entrée du système (la commande).

$u_{eq}$ : La commande équivalente.

$u_d$ : La commande discontinue.

$S(X)$ : Fonction de commutation.

$x_0$ : Condition initiale.

$n$ : Degré du système.

$\lambda$ : Constantes positif.

$g$ : Fonctions non linéaires.

$f$ : Fonctions non linéaires.

$x_d$ : La consigne désirée.

$e$ : L'erreur de poursuite.

$y$ : La sortie du système.

$V(x)$ : La Fonction de Lyapunov

$k$ : Gain positif.

$l$ : Degré d'atténuation.

$g$ : Constantes adaptatif.

$h$ : Constantes adaptatif.

$F$ : Fonction limite.

$\eta$ : Constantes positif.

---

---

# *Introduction générale*

---

---

---

# Introduction Générale

Le développement de la science et de la technologie nous permet aujourd'hui de mieux comprendre l'univers qui nous entoure et de mieux comprendre les principes qui le régissent. En conséquence, les humains sont désormais capables de créer des systèmes plus solides, plus précis et plus efficaces, et de repousser plus loin les limites imposées par les lois de la physique et un tel développement technologique est plus facile que la plupart des travaux humains, tels que la robotique est l'un des domaines où vous pouvez vraiment voir le degré de cette percée. En effet, on peut aujourd'hui concevoir des robots dotés d'une réelle intelligence qui peuvent agir précisément en fonction des tâches dont ils sont responsables et des conditions dans lesquelles ces tâches sont effectuées. Chaque fois il y a de nouveaux défis et difficultés et autres inventions modernes, et il passe par des systèmes, dont la plupart sont non linéaires.

Le pendule inversé est l'un des systèmes non linéaires qui occupent une place importante en tant que moyen de transport dans l'industrie, et il a été un sujet de discussion ces dernières années. Cet intérêt est dû au fait que les problèmes de commande d'un pendule inversé sont essentiellement les mêmes que ceux associés à de nombreux autres systèmes (tels que le lancement et la propulsion de missiles et de satellites stabilisateurs). Le pendule inversé a toujours été utilisé pour tester les nouvelles méthodes de contrôle car il présente plusieurs caractéristiques intéressantes : c'est un système non linéaire et est intrinsèquement instable. Il possède plusieurs implications pratiques [01].

L'approche utilisant des correcteurs linéaires a rapidement montré ses limites. Les systèmes réels étant pour la plupart non linéaires, mal définis, à coefficients variables et sujets à des perturbations externes, les recherches se sont orientées vers les techniques non linéaires, tel que les méthodes adaptatives ou de stabilité absolue, mais également la technique des modes glissants. Ce dernier fait partie de la théorie des systèmes à structure variable qui a émergé en Union soviétique au milieu de ce siècle. La loi de commande en mode glissant est mise en œuvre en entraînant et en forçant le système à rester près de la surface de commutation. Cette méthode présente deux avantages principaux. Tout d'abord, vous pouvez déterminer le comportement dynamique résultant en choisissant une surface appropriée. Deuxièmement, la réponse du système en boucle fermée est totalement insensible à certains types d'incertitude, ce qui fait de cette méthode un candidat important pour le développement d'une commande robuste.

L'objet de ce travail est l'étude et l'application de la commande par mode glissant d'un pendule inverse.

Pour cela, le présent mémoire est organisé en deux chapitres qui sont résumés comme suit :

- Le premier chapitre décrit la modélisation d'un pendule inversé.
- Le deuxième chapitre se compose de deux parties, dont la première partie présente l'étude théorique de la commande par mode glissement, et la deuxième partie représente l'application de la commande par mode glissant sur le pendule inversé.

Finalement nous terminons notre travail par une conclusion générale qui résume le travail.

---

---

*Chapitre 1 : modélisation d'un  
pendule inversé*

---

---

# Chapitre 1:

## Modélisation d'un pendule inversé

### I.1. Introduction :

Dans la domaine scientifique, l'électronique a souvent recours à des études de cas particulières, qui représentent un grand nombre d'applications et dont les propriétés spectaculaires ont été prouvées. De plus, avec l'accumulation de l'expérience, la compréhension de ces cas s'est améliorée, et ils fournissent désormais une base idéale pour comparer efficacement les inconvénients et les avantages des différentes méthodes. Le pendule inversé est l'un de ces cas [04] et a toujours été l'une des problématiques majeures de tout système dont le centre de gravité se trouve au-dessus de son axe de pivotement ou de rotation. On en trouve des exemples d'applications dans de nombreux domaines mais plus particulièrement dans les transports. Ainsi, les trains de grandes vitesses, les Segway et différents robots et les fusées spatiales ...etc, représentent tous plus ou moins des pendules inversés. L'exemple le plus simple à observer reste néanmoins le corps humain parce que il est vu comme un double pendule inversé. Il s'agit en effet d'un triple pendule inversé où les chevilles, genoux et hanches représentent les axes de rotations. De ce fait, les prothèses médicales modernes intègrent aujourd'hui une électronique embarquée afin d'aider le patient à se maintenir en équilibre sans effort.

Dans ce chapitre, nous décrivons la modélisation du système de pendule inversé et expliquons ses diverses applications, puis développons son modèle mathématique basé sur le formalisme d'Euler-Lagrange. Enfin, nous présentons ce système dans l'espace d'état en plus des résultats de simulation.

### I.2. Le pendule inversé :

Le pendule inversé est un système dynamique multi variable non linéaire instable, et il est considéré comme un bon exemple de système instable et non linéaire. Depuis 1950, le pendule inversé est une plate-forme expérimentale classique pour les laboratoires automatisés. Ils sont utilisés pour tester les performances des technologies de contrôle avec des constantes de temps très rapides. Ils ont été utilisés pour illustrer l'idée de contrôle linéaire, comme les systèmes instables.

#### I.2.1. Intérêt d'étude un pendule inversé :

L'étude du système pendulaire n'est pas pour le plaisir. Des exemples de ces applications illustrent son importance :

- **En médecine :** Le corps humain est vu comme un double pendule inversé en série, basé sur deux axes principaux de rotation sont les chevilles et les hanches. Lorsque nous sommes debout, nos articulations continuent de travailler pour nous y maintenir. Les experts engagés dans les prothèses de hanche (remplacement chirurgical d'organes ; pièces ou dispositifs de remplacement : prothèses dentaires) doivent utiliser le modèle à double pendule inversé pour calculer toutes les contraintes sur la prothèse [05], comme le montre la figure 1 ci-dessous :

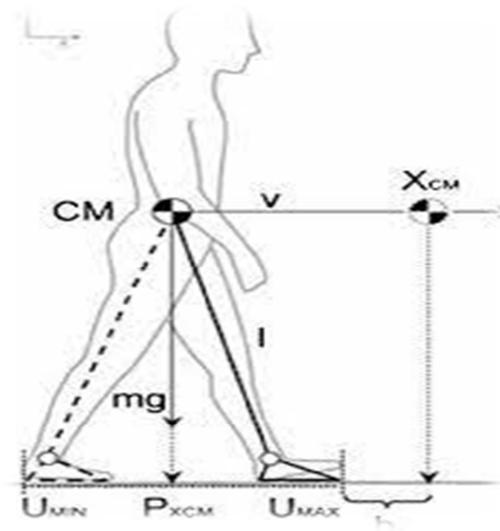


Figure 1.1 : L'homme est un pendule inversé

- **En robotique :** De même, le robot est vu comme un pendule inversé. Afin de maintenir le robot en équilibre, il suffit de stabiliser le pendule inversé en fonction de sa position verticale lors de son déplacement et en présence d'autres perturbations. Sur la base de ce principe [06]. La figure montre quelques exemples de redémarrages qui ont été utilisés sur la base du pendule inversé :



Figure 1.2: Scooter intelligent (segway)



Figure 1.3: Robots EMIEW gauche et robot MIP

Le Robot BIPED présenter par deux doubles pendules inversés en série, les deux pendules sont couplés par une tige avec deux articulations.

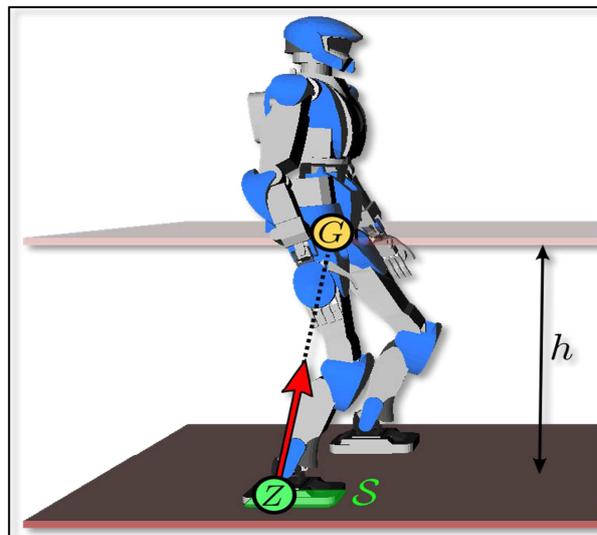


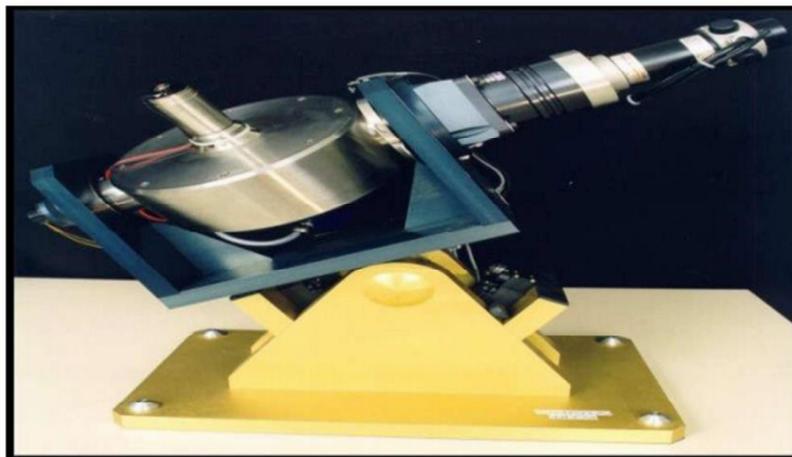
Figure 1.4: Le robot BIPED

- **Dans l'aérospatiale** : À cet égard, l'étude des systèmes pendulaires est également très importante, comme le contrôle et la stabilisation de l'attitude des satellites, le lancement de fusées. Afin de stabiliser l'attitude du satellite grâce à l'actionneur gyroscopique, l'actionneur gyroscopique, également appelé actionneur gyroscopique (**CMG** : Control Moment Gyro),

constitue un nouveau système d'actionneur pouvant générer un couple dynamique pour le contrôle de l'inclinaison d'attitude. L'expérience consistait à le ramener dans une position équilibrée (instable), de sorte qu'il était considéré comme un pendule inverse [07], voir les figures suivantes :



**Figure 1.5:** pendule gyroscopique



**Figure 1.6 :** Pendule gyroscopique inversé

- **Dans la recherche :** Vu sa complexité le pendule inversé est très utilisé pour tester des lois de commande modernes.

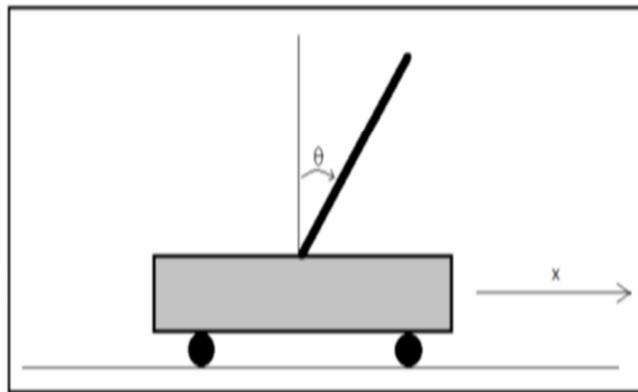
### **I.2.2. Principe de fonctionnement :**

Théoriquement, le principe est simple : lorsque le pendule bascule d'un côté (gauche ou droite), la voiture doit rattraper son retard en se déplaçant de ce côté.

Le problème qui se pose est d'ajuster la forme d'effort et de réaction que doit supporter le support en fonction de l'angle formé par le pendule et la ligne verticale. Pour cette raison, nous devons considérer plusieurs aspects ou particularités dans notre recherche, à savoir :

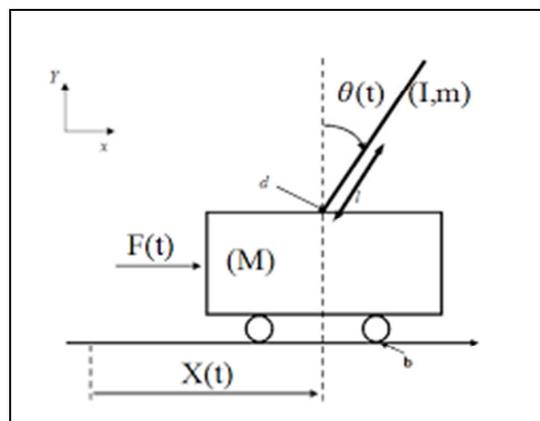
- L'instabilité du système.
- Le non linéarité.
- Modèle de connaissance incomplète
- Un seul actionneur.
- Deux grandeurs à asservir.

L'ensemble du chariot-pendule a deux degrés de liberté qui sont représentés par deux coordonnées généralisées  $x$  et  $\theta$ ,  $x$  pour le déplacement horizontale du chariot,  $\theta$  pour la rotation du pendule. La direction positive de  $x$  est le sens à droite en mètre et celui de l'angle est le sens des aiguilles d'une montre en radian comme montre la **Figure 1.7**.



**Figure 1.7** :Pendule inversé de coordonnées  $x$  et  $\theta$ .

### **I.3. La modélisation d'un pendule inversé :**



**Figure 1.8**: Schémas de chariot et pendule inversé

Pour tout le reste du chapitre, le **tableau I.1** présente les paramètres. Les paramètres de l'ensemble chariot-pendule [8] :

Paramètres	Description	Valeurs
$m$	la Masse du pendule	<b>0.2 Kg</b>
$b$	Coefficient de frottement des roues du chariot	<b>0.00005 N.s. m</b>
$M$	La Masse du chariot	<b>2.3 Kg</b>
$X(t)$	La Position du chariot (m).	/
$l$	Demi-longueur du pendule	<b>0.3 m</b>
$\theta(t)$	Angle de rotation du pendule (rad)	/
$F(t)$	La Force exercée sur le chariot (N)	/
$g$	Intensité de la pesanteur	<b>9.81m s<sup>2</sup></b>
$d$	Coefficient de frottement de rotation du pendule	<b>0.005 <math>\frac{N.m.s}{Rad}</math></b>

**Tableau I.1** : Les paramètres de l'ensemble chariot-pendule

Il ya deux méthodes pour déterminer l'équation du mouvement : la loi fondamentale de newtonienne de la dynamique (**LFD**) basée sur le concept de force et le formalisme Euler-Lagrangien [09,10], selon la loi de conservation de l'énergie mécanique.

Dans ce travail, nous intéressons au formalisme Euler-Lagrangien, où le Lagrangien (L) est défini comme la différence entre l'énergie cinétique ( $E_c$ ) et l'énergie potentielle ( $E_p$ ) du système :

$$L = E_c - E_p \tag{I.1}$$

### **I.3.1. Energie cinétique du système :**

Le système en mouvement comporte le chariot qui se déplace linéairement sur les rails et le pendule qui se balance sur un axe de rotation.

L'énergie cinétique du chariot ( $E_{cc}$ ) est exprimée par l'équation :

$$E_{cc} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 \quad (\text{I.2})$$

L'énergie cinétique du pendule ( $E_{cp}$ ) est exprimée par l'équation :

$$E_{cp} = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 \quad (\text{I.3})$$

Où :

$v_c$  : vitesse du centre de gravité d'un pendule

$\dot{\theta}$  : vitesse angulaire de pendule

$J$  : Moment d'inertie

La position du centre de gravité d'un pendule inversé, notée  $\vec{r}_c$  à partir de ces coordonnées, est donnée par l'équation suivant :

$$\vec{r}_c = (x + l\sin\theta)\vec{i} \quad (\text{I.4})$$

Avec :

$\vec{i}$  et  $\vec{j}$  sont respectivement les vecteurs unitaires des repères x et y

La vitesse centre de gravité exprimée par :

$$v_c = \frac{dr_c}{dt} = (\dot{x} + l\dot{\theta}\cos\theta)\vec{i} - (l\dot{\theta}\sin\theta)\vec{j} \quad (\text{I.5})$$

En substituant l'équation (I.5) dans l'équation (I.3), l'expression de l'énergie cinétique ( $E_{cp}$ ) du pendule devient :

$$E_{cp} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + 2\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + l^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta) + \frac{1}{2}j\dot{\theta}^2 \quad (\text{I.6})$$

Après simplification, l'expression de l'énergie cinétique ( $E_{cp}$ ) est donné par :

$$E_{cp} = \frac{1}{2}m(\dot{x} + 2\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}j\dot{\theta}^2 \quad (\text{I.7})$$

En fin, l'énergie cinétique totale ( $E_c$ ) de chariot-pendule s'écrit comme :

$$E_c = E_{cc} + E_{cp} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x} + 2\dot{x}l\dot{\theta}\cos\theta + l^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}j\dot{\theta}^2 \quad (\text{I.8})$$

### I.3.2. L'énergie potentielle du système :

Le chariot étant en mouvement sur un rail horizontal, seul le pendule en mouvement possède une énergie potentielle, l'énergie potentielle du centre de gravité du pendule est donnée par l'expression :

$$E_p = mgl \cos\theta \quad (\text{I.9})$$

### I.3.3. équations d'Euler-Lagrange :

Lorsqu'on établit les expressions de l'énergie cinétique ( $E_{cp}$ ) (Equation (I.8)) de la composante pendulaire et de l'énergie potentielle ( $E_p$ ) (Equation (I.9)) du système, on utilise l'équation générale d'Euler-Lagrange pour déterminer le support- L'équation du mouvement de la composante du pendule :

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + 2\dot{x}l\dot{\theta} \cos \theta + l^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}j\dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta \quad (\text{I.10})$$

L'équation générale d'Euler-Lagrange est donnée par :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varepsilon}_j} \right) + \frac{\partial D_f}{\partial \varepsilon_j} - \frac{\partial L}{\partial \varepsilon_j} = F_j \quad (\text{I.11})$$

Avec :

$\varepsilon_j(t)$  : Désigne les degrés de liberté d'un pendule

$D_f$  : Désigne l'énergie dissipée par frottement

$F_j$  : La force généralisée

$L$  : Représente le lagrangien (équation (I.1))

En considérant que le système ait deux degrés de liberté,  $x$  pour le déplacement horizontal du chariot et  $\theta$  pour la rotation du pendule, la modélisation du système selon la loi générale l'Euler-Lagrange est donnée par :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varepsilon}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varepsilon_j} = F_j \quad (\text{I.12})$$

Pour le degré de liberté  $\varepsilon(t) = x(t)$  :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = -b\dot{x} \quad (\text{I.13})$$

Où :  $F$  représenté la force exercée sur le chariot.

La dérivée partielle de lagrangien suivant  $\dot{x}$  s'écrit :

$$\frac{d}{dt} (M\dot{x} + m\dot{x} + ml\dot{\theta} \cos \theta) - 0 = F - b\dot{x} \quad (\text{I.14})$$

Le première équation de Lagrange s'écrit :

$$(M + m)\ddot{x} + ml\dot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta = F - b\dot{x} \quad (\text{I.15})$$

Pour le degré de liberté  $\varepsilon(t) = \theta(t)$  :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -d\dot{\theta} \quad (\text{I.16})$$

La dérivée de lagrangien suivant  $\theta$  et  $t$  s'écrit comme :

$$\frac{d}{dt}(ml\dot{x}\cos\theta + ml^2\dot{\theta} + J\dot{\theta}) - (-ml\dot{x}\sin\theta\dot{\theta} + mgl\sin\theta) = -d\dot{\theta} \quad (\text{I.17})$$

La deuxième équation de Lagrange :

$$(ml^2 + J)\ddot{\theta} + ml\ddot{x}\cos\theta - ml\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta + ml\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta - mgl\sin\theta = -d\dot{\theta} \quad (\text{I.18})$$

Le modèle de connaissance de l'ensemble chariot-pendule est donné par le systématisons :

$$\begin{cases} h\ddot{x} + b\dot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta = F \\ ml\ddot{x}\cos\theta + N\ddot{\theta} + d\dot{\theta} - mgl\sin\theta = 0 \end{cases} \quad (\text{I.19})$$

Où :

$$\begin{aligned} h &= M + m \\ N &= ml^2 + J \end{aligned}$$

Le système d'équations (I.19) montre la dépendance qui existe entre l'accélération du chariot  $\ddot{x}$  et l'accélération angulaire du pendule  $\ddot{\theta}$ . Ainsi, lorsque  $F = 0$  (Pas de force extérieure), si on déplace le pendule de sa position d'équilibre, il ne sera soumis qu'à sa propre inertie, il se mettrait alors à osciller et puisque le pendule est fixé sur le chariot, ce dernier commencerait également à se mouvoir.

#### I.3.4. Modèle d'état de l'ensemble chariot-pendule :

Le modèle d'état de l'ensemble chariot-pendule, on utilise le modèle (I.19), le vecteur d'état est donne comme :

$$X = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [x \ \dot{x} \ \theta \ \dot{\theta}]^T \quad (\text{I.20})$$

Après quelques manipulations mathématiques, on obtient le modèle non linéaire (I.21) où la grandeur de commande est la force  $F$  :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f_x(X) + g_x(X).U_x \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = f_\theta(X) + g_\theta(X).U_\theta \\ y_1 = x_1 \\ y_2 = x_3 \end{cases} \quad (\text{I.21})$$

Où :

$$f_x(X) = \frac{-bN}{hN - m^2l^2 \cos^2 x_3} x_2 - \frac{m^2l^2g}{hN - m^2l^2 \cos^2 x_3} \cos x_3 \sin x_3 + \frac{mlN \cdot \sin x_3}{hN - m^2l^2 \cos^2 x_3} x_4$$

$$+ \frac{mld \cdot \sin x_3}{hN - m^2l^2 \cos^2 x_3} x_4^2$$

$$g_x(X) = \frac{N}{hN - m^2l^2 \cos^2 x_3}$$

$$f_\theta(X) = \frac{mgl}{N} \sin x_3 - \frac{d}{N} x_4 + \frac{mlb \cos x_3}{hN - m^2l^2 \cos^2 x_3} x_2 + \frac{m^3l^3g \cos^2 x_3 \sin x_3}{N(hN - m^2l^2 \cos^2 x_3)}$$

$$- \frac{m^2l^2d \cos^2 x_3}{N(hN - m^2l^2 \cos^2 x_3)} x_4 - \frac{m^2l^2 \cos x_3 \sin x_3}{hN - m^2l^2 \cos^2 x_3} x_4^2$$

$$g_\theta(X) = -\frac{ml}{hN - m^2l^2 \cos^2 x_3} \cos x_3$$

$$U_x = U_\theta = F$$

#### I.4. Résultats de la simulation :

En ingénierie, la simulation est un moyen efficace et économique, couramment utilisé pour faire des études préliminaires et/ou comparatives, tant au stade du développement (conception), qu'au cours du fonctionnement normal des systèmes. Actuellement, plusieurs outils de simulation, parmi lesquels MATLAB/SIMULINK, sont utilisés dans l'industrie et dans les milieux universitaires.

Le schéma bloc de l'ensemble chariot-pendule sous Simulink est donnée par la **Figure 1.9**.

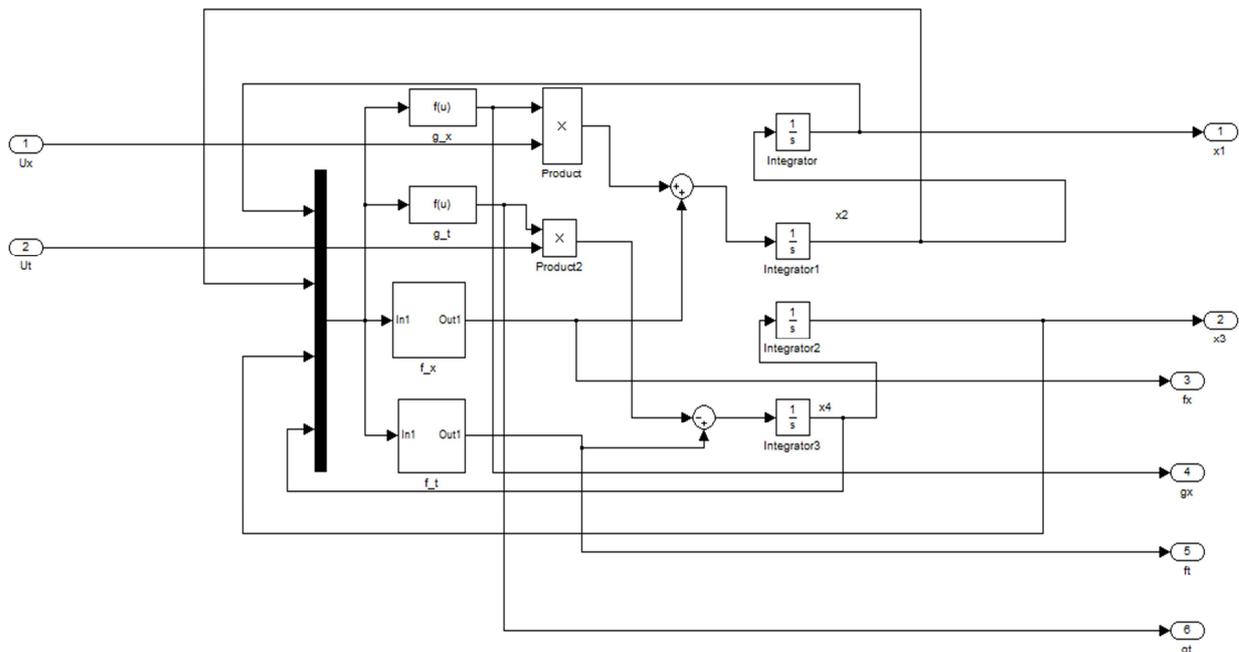
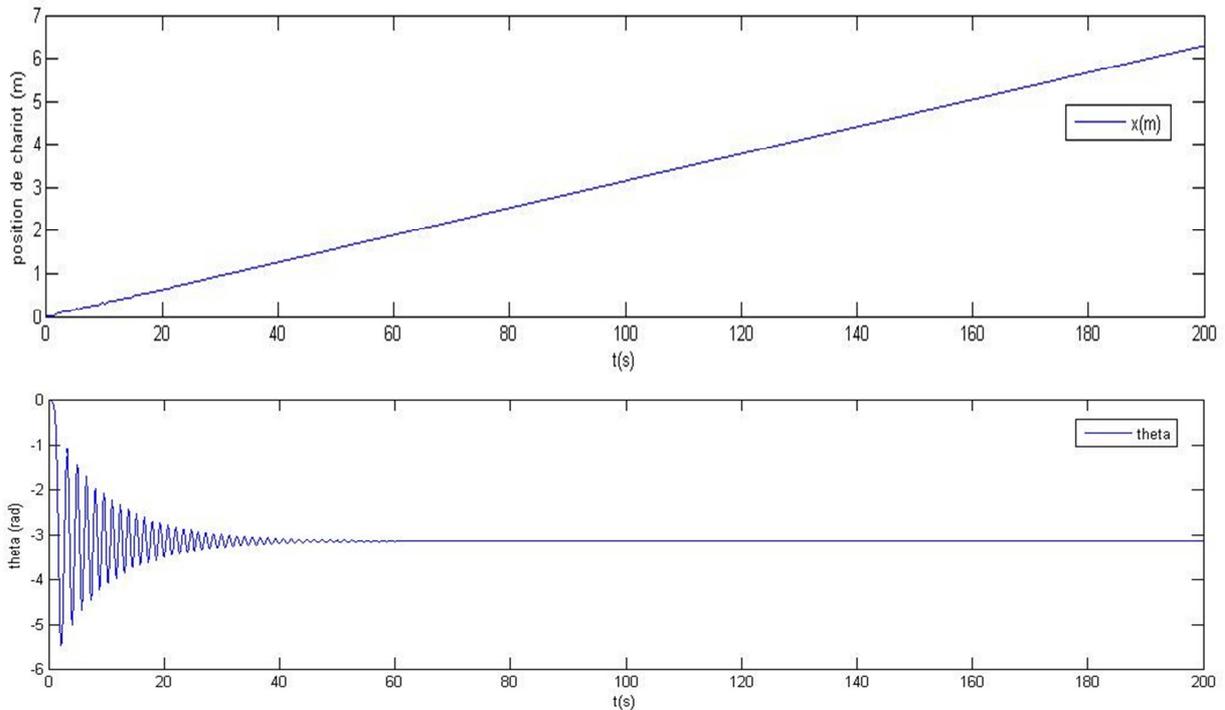


Figure 1.9 : schéma bloc de l'ensemble chariot-pendule sous Simulink

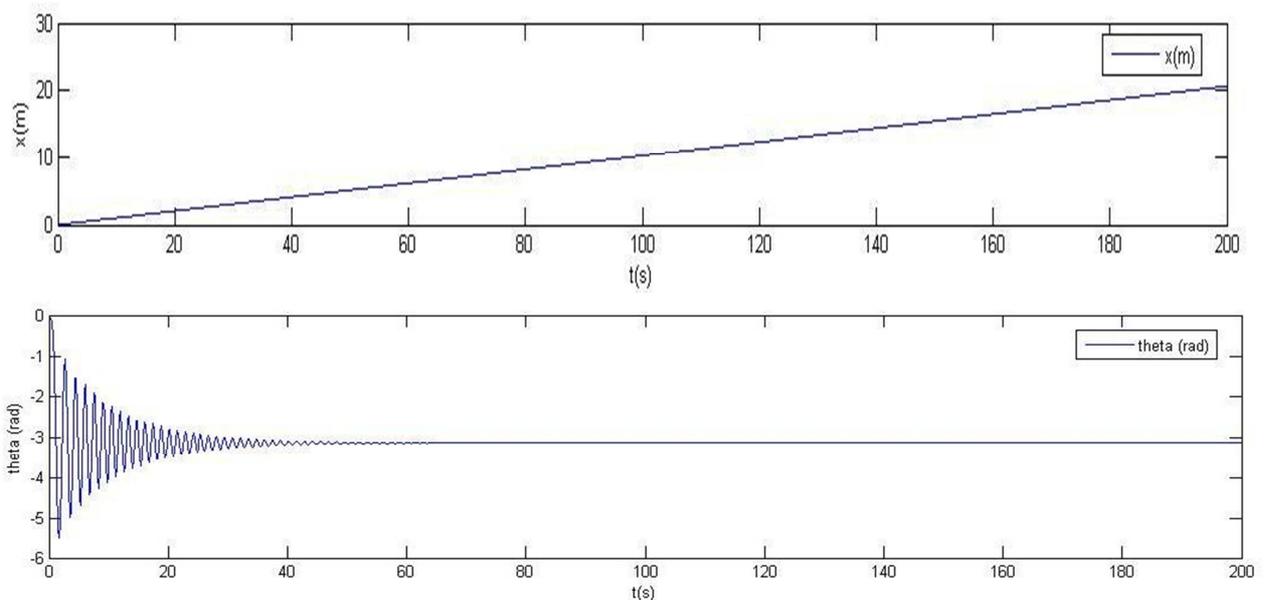
On représente dans les figures ci-dessous les résultats de simulation du modèle du pendule inversé pour différents cas de la position du pendule :

➤ **1er cas :** position du chariot et du pendule  $[x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0,0,0,0]$

On applique une force sous forme d'impulsion de durée  $T=0.2$  second et d'amplitude de  $0.1N$  ensuite une autre force sous forme d'impulsion de durée  $T=0.2$  second et d'amplitude de  $1N$ .



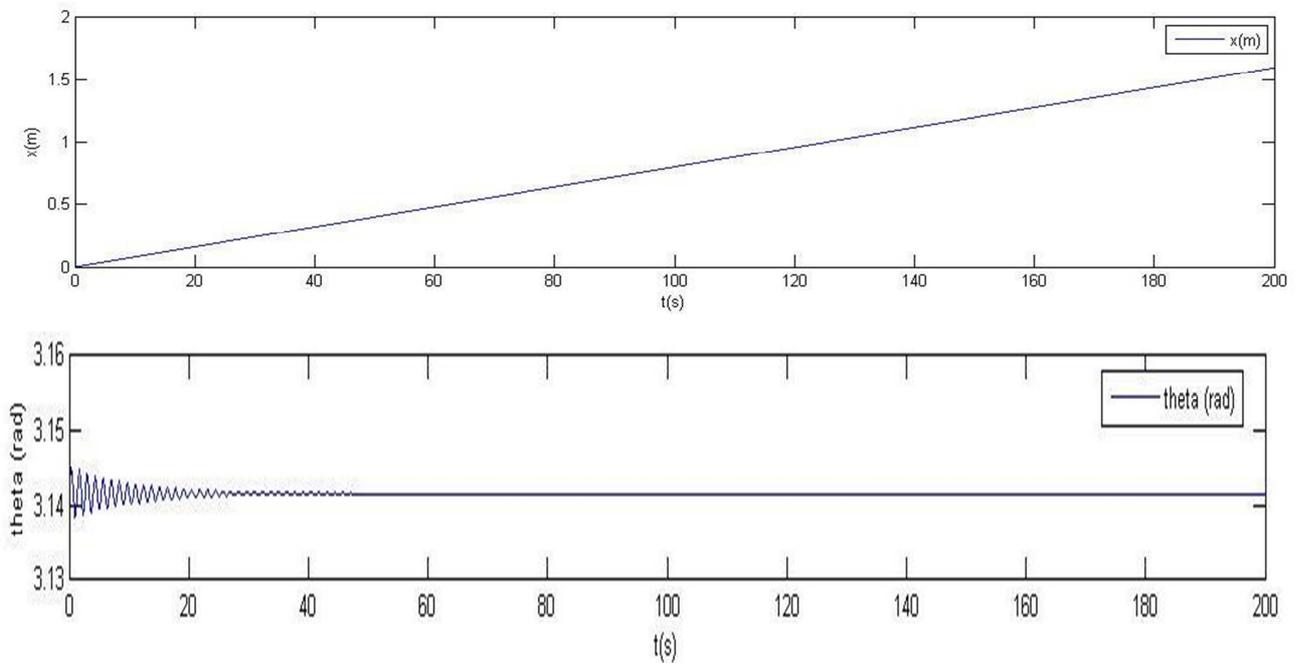
**Figure 1.10 :** Réponse du système en boucle ouverte pour un échelon de  $0.1N$  avec  $[x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0,0,0,0]$



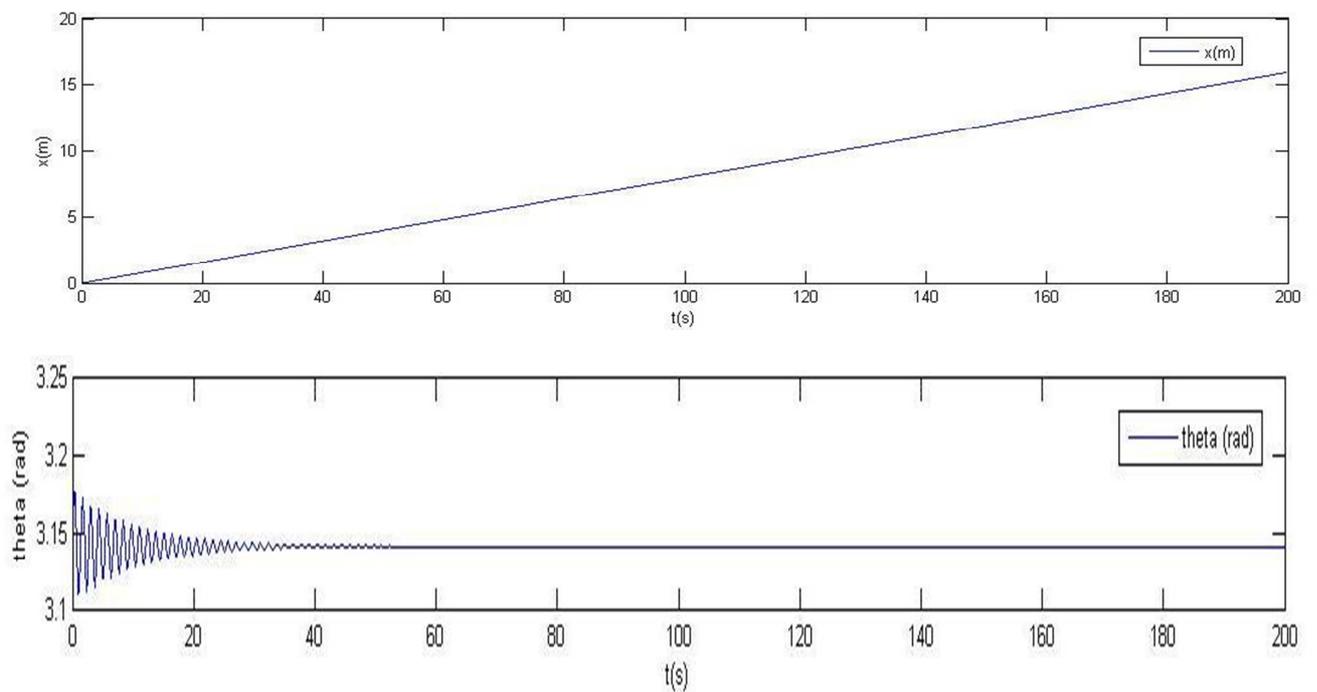
**Figure 1.11 :** Réponse du système en boucle ouverte pour un échelon de  $1N$  avec  $[x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0,0,0,0]$

➤ **2er cas** : position du chariot et du pendule  $[x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0,0,\pi,0]$

On applique une force sous forme d'impulsion de durée  $T=0.2$  second et d'amplitude de 0.1N ensuite une autre force sous forme d'impulsion de durée  $T=0.2$  second et d'amplitude de 1N.



**Figure 1.12** : Réponse du système en boucle ouverte pour un échelon de 0.1N  
avec  $[x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0,0, \pi,0]$



**Figure 1.13** : Réponse du système en boucle ouverte pour un échelon de 1N  
avec  $[x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}] = [0,0, \pi,0]$

Ces résultats illustrent la complexité du modèle. Les figures (I.10 et I.11) montrent que lorsque le pendule est initialement en position instable ( $\theta = 0$ ), il se stabilise après un régime transitoire dans sa position d'équilibre stable ( $\theta = \pi$ ).

Les figures (I.12 et I.13) montrent que lorsque le pendule est initialement dans sa position d'équilibre stable ( $\theta = \pi$ ), lorsqu'il est écarté grâce à la force  $F$ , il y revient après le régime transitoire.

En plus, à travers ces simulations on peut affirmer que le pendule inversé est un système instable en boucle ouverte. Il est donc nécessaire d'introduire une commande pour le stabiliser. Pour cela nous proposons l'utilisation d'une commande par mode glissant.

### **I.5. Conclusion :**

Ce chapitre est dédié à la modélisation du pendule inversé, ainsi qu'au développement du modèle chariot-pendule sur Simulink, Ce qui nous permet de mettre en évidence la forte non-linéarité de ce système.

---

---

*Chapitre 2 : La commande du  
pendule inversé par mode glissant*

---

---

## Chapitre 2:

# La commande du pendule inversé par mode glissant

### II.1. Introduction :

Lors du contrôle de systèmes non linéaires ou avec des paramètres non constants, la loi des systèmes de contrôle traditionnels peuvent ne pas être assez puissants car ils ne sont pas assez robustes, en particulier lorsque les caractéristiques dynamiques telles que la précision du système sont strictement requises. Il faut utiliser une loi de commande insensible aux perturbations et aux changements de paramètres non linéaires.

La commande par mode glissant est relativement simple à mettre en œuvre (par rapport à d'autres méthodes de commande), et un grand nombre d'études théoriques ont prouvé l'efficacité de cette commande. Ses principaux domaines d'application sont les robots et les moteurs de commande. L'avantage important de cette commande est sa robustesse dans la modélisation des interférences et de l'incertitude. Il fait partie de la commande dite à structure variable, adaptée aux systèmes non linéaires.

Le principe du contrôle de mode de glissement est de forcer la trajectoire du système à atteindre une surface donnée, c'est-à-dire la surface de glissement, puis d'y rester. Cependant, le contrôle du mode de glissement peut provoquer une commutation à haute fréquence appelée dither en pratique. Ces conversions peuvent stimuler des dynamiques non désirées, pouvant porter atteinte à la stabilité, à la détérioration voire à la destruction du système à l'étude.

Dans ce chapitre, nous intéressons à l'application de la commande de mode glissant à un pendule inversé. Le pendule est représenté sous sa forme simplifiée (Figure I.5), qui a la force  $F$  à appliquer au support, la position angulaire du pendule, et la position  $x$  du support en sortie du système.

### II.2. Définition du mode glissant :

Qu'est-ce qu'un mode glissant ?

La méthode du mode glissant consiste à amener le chemin d'état du système à la surface de glissement et à utiliser une logique de commutation appropriée autour de celle-ci pour basculer vers le point d'équilibre, générant ainsi le phénomène de glissement.

### **II.2.1 Commande a structure variable (CSV) :**

Un système à structure variable fait référence à un système dont la structure change pendant le fonctionnement, et sa caractéristique est la logique de sélection et de commutation de la structure. Ce choix permet au système de passer d'une structure à une autre à tout moment. Dans un système à structure variable avec mode de glissement, le chemin d'état est amené à une surface (hyperplan), puis en utilisant la loi commutative, il est forcé de rester près de cette surface. Cette dernière est appelée surface de glissement et le mouvement qui se produit le long de celle-ci est appelé mouvement de glissement.

### **II.2.2. Objectif de la commande par mode glissant :**

L'objectif de la commande par mode glissant se résume en deux points essentiels [11] :

- ✓ Synthétiser une surface  $S(x, t)$ , telle que toutes les trajectoires du système obéissent à un comportement désiré de poursuite, de régulation et de stabilité.
- ✓ Déterminer une loi de commande  $U(x, t)$  qui est capable d'attirer toutes les trajectoires d'état vers la surface de glissement et les maintenir sur cette surface.

### **II.2.3. Différentes structures de contrôle par mode glissant :**

Dans la littérature, il existe trois configurations de base pour synthétiser différentes commandes. La première correspond à la structure la plus simple, où l'interrupteur est au niveau du contrôleur lui-même. Nous l'appellerons,

La structure de commutation de l'unité de commande. La deuxième structure implique la commutation des niveaux de retour d'état, et la dernière est une structure d'ajustement avec des commandes équivalentes ajoutées[12].

### **II.2.4. Théorie de la commande par mode de glissement :**

La théorie du système à structure variable (mode glissant) est une technologie de contrôle non linéaire, qui se caractérise par la discontinuité du contrôle au niveau du canal à travers une surface de commutation appelée mode glissant. La technologie du mode glissant consiste à faire en sorte que le chemin d'état du système soit face à la surface de glissement et à basculer vers le point d'équilibre en le contournant de manière appropriée. En résumé, le contrôle de séquence glissante est divisé en deux parties : la détermination de la zone d'espace d'état et la définition de la loi de contrôle.

### II.2.5. Commande par modes glissants d'ordre 1 :

Le contrôle en mode glissant de 1er ordre (SMC) est un contrôle structurel. Les variables peuvent changer de structure selon la logique et basculer entre deux valeurs. Commutateur  $S(x)$  très spécifique.

Le principe de la commande en mode glissant est de forcer le système à atteindre une surface donnée est appelée surface de glissement et y reste jusqu'à l'équilibre. Cette commande s'effectue en deux temps : converger vers la surface, puis glisser le long de celui-ci (figure II.1).

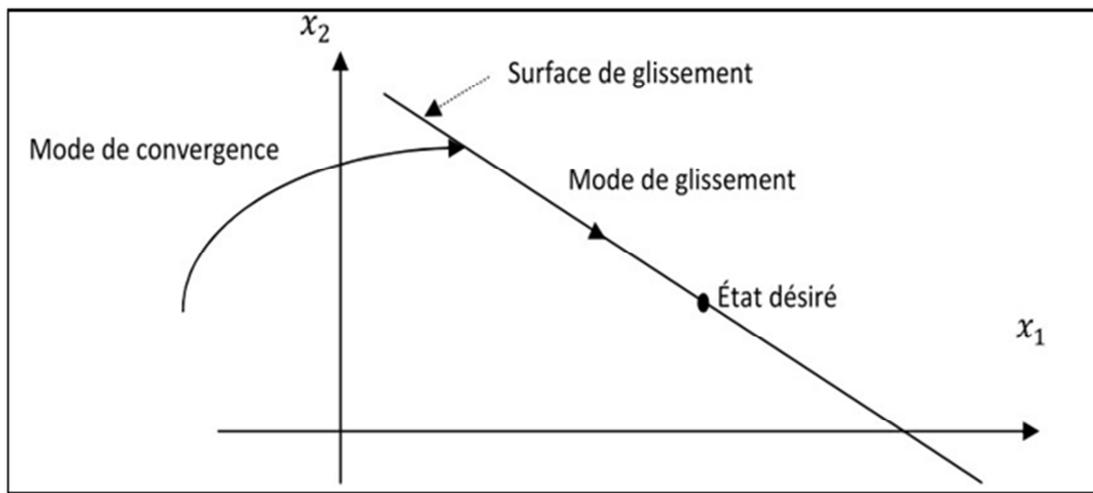


Figure II.1 : différents modes de convergence pour la trajectoire d'état

### II.2.6. Commande par mode glissant d'ordre 2 :

L'une des méthodes de contrôle non linéaire les plus intéressantes de la littérature est le contrôle en mode glissant (CMG). Cependant, certaines lacunes sont apparues dans sa mise en œuvre réelle, telles que le broutage et les effets mécaniques indésirables. Afin de réduire l'influence de ces phénomènes, la commande en mode glissant d'ordre élevé est proposée comme une solution très intéressante[19].

Afin de conserver les caractéristiques d'atténuation de la gigue tout en limitant le nombre de capteurs nécessaires à l'exécution des commandes, dans nos recherches, nous nous sommes limités au mode glissant de 2ème ordre. Le but de ce type de contrôleur est de générer un second ordonnancement des états de glissement sur la surface  $S$  en annulant  $S$  lui-même et sa dérivée  $\dot{S}$  en un temps fini ( $S = \dot{S} = 0$ ).

II.2.7. Les Différents modes de glissants :

❖ **Mode de convergence (MC) :**

C'est le mode durant lequel la variable à régler se déplace à partir de n'importe quel point initial dans le plan de phase, et tend vers la surface de commutation  $S(x) = 0$ . Ce mode est caractérisé par la loi de commande et le critère de convergence [13].

❖ **Mode de glissement (MG) :**

C'est le mode durant lequel la variable d'état a atteint la surface de glissement et tend vers l'origine du plan de phase. La dynamique de ce mode est caractérisée par le choix de la surface de glissement  $S(x) = 0$ [13].

❖ **Mode du régime permanent (MRP) :**

Ce mode est ajouté pour l'étude de la réponse du système autour de son point d'équilibre (origine du plan de phase), il est caractérisé par la qualité et les performances de la commande [13].

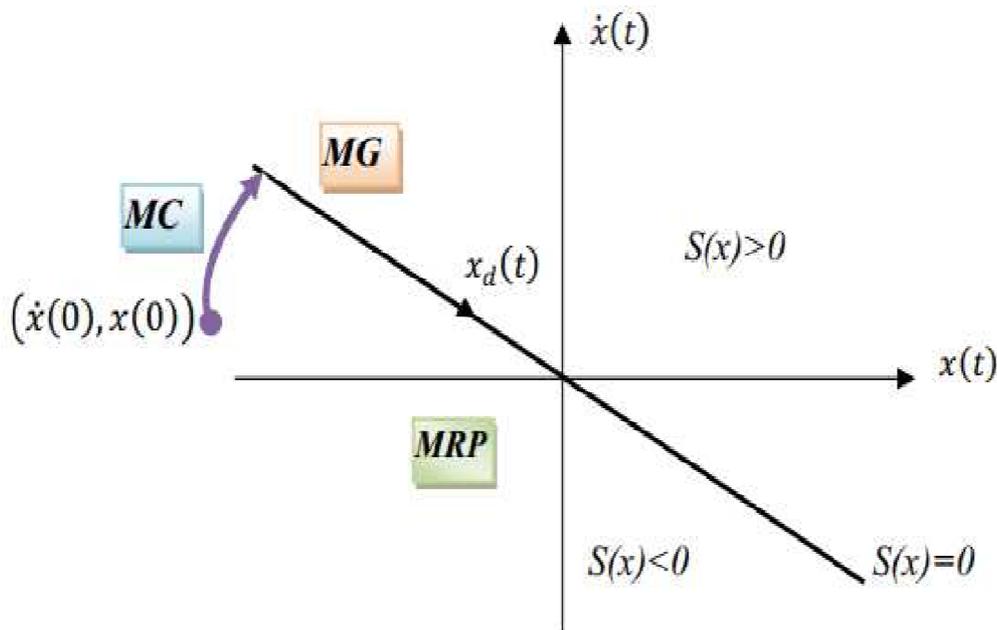


Figure II.2 : Convergence de système glissant.

• **Régime glissant idéal :**

En théorie, l'organe de commutation est supposé insensible aux bruits, et la trajectoire en régime glissant décrit parfaitement l'équation  $S(x) = 0$ . Le régime glissant idéal correspond à une oscillation de fréquence infinie et d'amplitude nulle, le point représentatif de l'évolution du système glisse parfaitement sur l'hyper surface de commutation[14].

• Régime glissant réel :

En pratique l'organe de commutation est réalisé à partir de relais qui présentent des imperfections comme les retards de commutations, dans ce cas la trajectoire de phase du régime glissant reste au voisinage de la surface de commutation donnant naissance à des oscillations indésirables qui éliminent la précision du système et néanmoins sa stabilité [14].

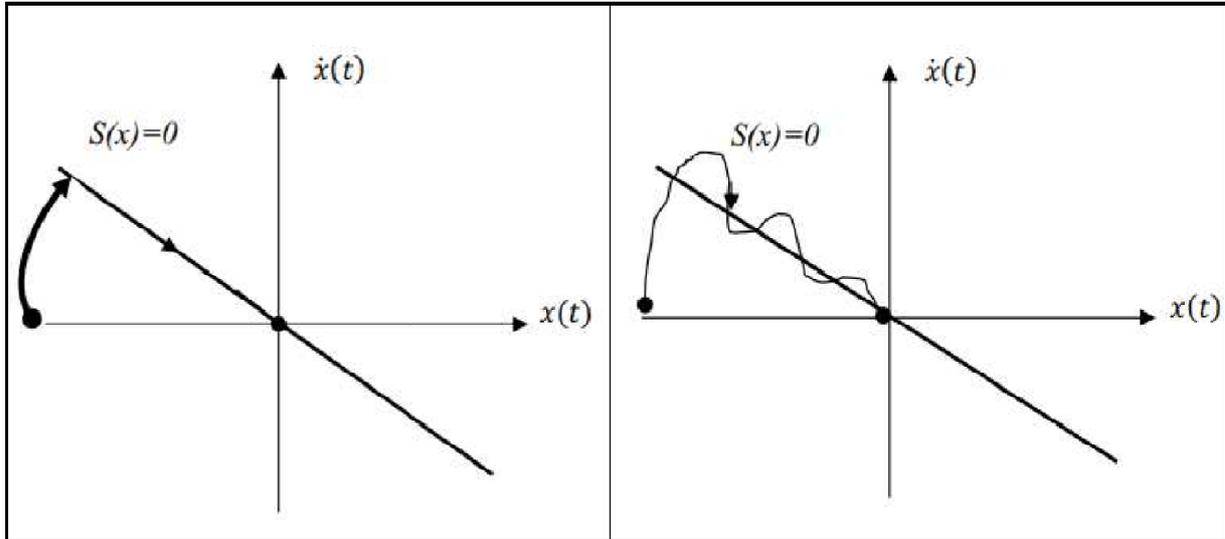


Figure II.3 : le régimes glissant réel (à droite) et idéal (à gauche).

II.2.8. Synthèse de la loi de commande :

La mise en œuvre de cette méthode de commande nécessite principalement trois étapes :

- ✚ choix de la surface de glissement
- ✚ Etablir la condition de convergence
- ✚ déterminer la loi de commande qui permet d'atteindre la surface et d'y demeurer

II.2.8.1. Choix de la surface de glissement :

Soit le système décrit par l'équation différentielle suivante :

$$x^n = f(x, t) + g(x, t)u \tag{II.1}$$

Avec :

f et g : Sont des fonctions non linéaires,

u : L'entrée du système.

x : État du système.

**J.J Slotine** propose une forme générale pour déterminer la surface de glissement qui assure la convergence. cette fonction est définie en fonction de l'ordre du système comme suit :

$$s(x) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda\right)^{n-1} e(x) \quad (\text{II.2})$$

Avec :

$$e = x - x_d \quad (\text{II.3})$$

$x_d$  : la consigne désirée et  $e$  l'erreur de poursuite.

### II.2.8.2. Condition d'existence du mode de glissement :

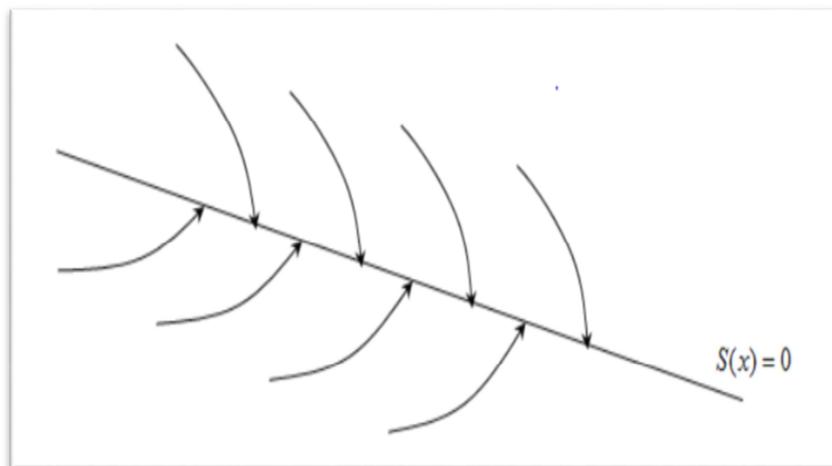
La condition d'existence et de convergence est de permettre aux différentes dynamiques du système de converger vers la surface de glissement et de maintenir le critère indépendant de la perturbation. Il existe deux types de conditions :

➤ **Fonction discrète de commutation :**

Cette approche est la plus ancienne, elle est proposée et étudiée par Emilyanov et Utkin. Elle est donnée sous la forme [03], [15] :

$$\dot{s} \cdot s < 0 \quad (\text{II.4})$$

Cette équation montre que le carré de la distance à la surface, mesuré par  $s^2 > 0$ , a diminué, forçant le chemin du système à se déplacer vers les surfaces des deux côtés. Cette situation suppose un régime glissant idéal.



**Figure II.4 :** Trajectoire de l'état vis-à-vis la surface de glissement

➤ **Fonction de Lyapunov :**

La fonction de Lyapunov est une fonction scalaire positive  $V(x) > 0$ , pour les variables d'état du système. Il permet d'estimer les performances de la commande utilisée pour étudier la robustesse. Il assure la stabilité du système non linéaire et l'attractivité de la variable commandée à sa valeur de référence. Il se présente sous les formes suivantes [03], [16] :

$$V(x) = \frac{1}{2} s^2 \tag{II.5}$$

Sa dérivée est :

$$\dot{V}(x) = s(x) \cdot \dot{s}(x) \tag{II.6}$$

La loi de la commande doit faire décroître cette fonction ( $\dot{V}(x) < 0$ ) ; l'idée est de choisir une fonction scalaire  $S(x)$ ; pour garantir l'attraction de la variable à contrôler vers sa valeur de référence, et concevoir une commande ( $U$ ) tel que le carré de la surface correspond à une fonction de Lyapunov.

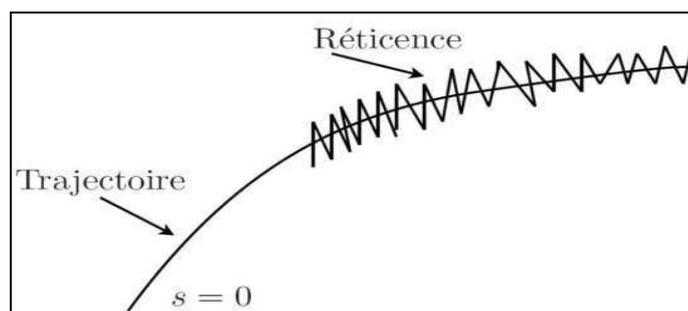
Pour que la fonction  $V(x)$ ; puisse décroître, il suffit d'assurer que sa dérivée est négative. D'où la condition de convergence exprimée par l'équation (II.4).

Pour une convergence en temps fini, la condition (II.4) qui ne garantit qu'une convergence asymptotique vers la surface de glissement est remplacée par une condition plus restrictive dite de  $\eta$ -attractivité et donnée par [03] :

$$\dot{s}s \leq -k|s| ; k > 0 \tag{II.7}$$

**II.2.9. le broutement :**

La vitesse de glissement idéale nécessite un contrôle qui peut être commuté à l'infini. Ainsi, lors de l'état de glissement, la discontinuité appliquée à la commande peut conduire au phénomène de tremblement, que l'on appelle réticence ou (tremor) en anglais. Sa particularité est que la trajectoire du système oscille fortement autour de la surface de glissement (Figure (II.4)). La principale raison de ce phénomène est la limitation de l'actionneur ou le retard de commutation de commande. Ces interrupteurs réduiront la précision du contrôle, et provoqueront un vieillissement prématuré du système mécanique et une augmentation de la température du système électrique (perte d'énergie importante), ce qui est préjudiciable au contrôleur.



**Figure II.5 :** Le phénomène de broutement[03].

### II.2.10. Suppression du phénomène de réticence :

Dans le but de réduire ou d'éliminer ce phénomène, de nombreuses solutions ont été proposées, comme la solution de couche limite, mode glissant flou, mode glissant d'ordre supérieur etc., exemple pour la commande :

- Commande signe
- Commande avec un seul seuil
- Commande adoucie
- Commande intégral
- Commande SAT

### II.2.11. les avantages et les inconvénients de commande mode glissant :

Comme nous le savons tous, la robustesse du modèle aux perturbations et à l'incertitude est la force du contrôle en mode glissant. De plus, réduire l'ordre du système est un autre avantage de ce type de contrôle, car il permet de simplifier la complexité du système.

Cependant, ces performances se font au prix de certains inconvénients :

- Le broutage ou phénomène de broutage causé par la partie discontinue de la commande peut nuire à l'actionneur.
- Le système est toujours sous contrôle élevé pour s'assurer qu'il converge vers l'état souhaité, mais ce dernier (contrôle élevé) n'est pas souhaitable.

### II.3. La commande par mode glissant d'un pendule inversé :

L'objectif est d'utiliser une loi de commande, qui peut suivre la trajectoire de référence dans un temps limité, a une grande précision, une bonne robustesse et une réluctance réduite, ce qui reste le principal problème introduit par la commande en mode glissant au final.

#### II .3.1. Formulation mathématique :

La modélisation du processus est une étape primordiale dans la mise en œuvre d'un contrôleur. En général, un système non linéaire ayant  $U$  pour entrée de commande et  $\mathcal{Y}$  comme sortie, peut être décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}^{(n)} = F(x, \dot{x}, \dots, \dots, x^{(n-1)}, u) \\ y = H(x, \dot{x}, \dots, \dots, \dot{x}^{(n-1)}) \end{cases} \quad (\text{II.8})$$

Où  $F(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}, u)$  et  $H(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})$  sont deux fonctions non linéaires continues, représentant les états du système. Cette description ne permet pas la mise en œuvre de contrôleurs pour assurer la poursuite des trajectoires. Pour pallier à ce problème, la linéarisation entrée-sortie a été largement utilisée, afin de trouver une relation explicite entre l'entrée du système et sa sortie, en utilisant des techniques de la géométrie différentielle [18]. Ainsi un système non linéaire d'ordre  $n$  affine dans la commande peut être décrit par la relation suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}^{(n)} = F(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}) + g(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (\text{II.9})$$

Où  $f(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})$  et  $g(x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)})$  sont des fonctions non linéaires continues. Cette nouvelle description permet d'utiliser facilement les différentes approches basées sur la rétroaction pour résoudre les problèmes de poursuites de trajectoires et de régulations.

Le modèle utilisé est le modèle trouvé en chapitre précédent (equation I.21). La dynamique complète d'un pendule inversé, peut être représentée par deux sous-systèmes non linéaires d'ordre deux [06].

Le premier décrit la dynamique du chariot comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f_x(x) + g_x(x)u_x \\ y_1 = x_1 \end{cases} \quad (\text{II.10})$$

Le second sous-système représente la dynamique du pendule qui est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = f_\theta(x) + g_\theta(x)u_\theta \\ y_2 = x_3 \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

Avec :

$$f_x(X) = \frac{-bN}{hN - m^2 l^2 \cos^2 x_3} x_2 - \frac{m^2 l^2 g}{hN - m^2 l^2 \cos^2 x_3} \cos x_3 \sin x_3 + \frac{mlN \sin x_3}{hN - m^2 l^2 \cos^2 x_3} x_4 + \frac{mld \sin x_3}{hN - m^2 l^2 \cos^2 x_3} x_4^2$$

$$g_x(X) = \frac{N}{hN - m^2 l^2 \cos^2 x_3}$$

$$f_\theta(X) = \frac{mgl}{N} \sin x_3 - \frac{d}{N} x_4 + \frac{mlb \cos x_3}{hN - m^2 l^2 \cos^2 x_3} x_2 + \frac{m^3 l^3 g \cos^2 x_3 \sin x_3}{N(hN - m^2 l^2 \cos^2 x_3)} - \frac{m^2 l^2 d \cos^2 x_3}{N(hN - m^2 l^2 \cos^2 x_3)} x_4 - \frac{m^2 l^2 \cos x_3 \sin x_3}{hN - m^2 l^2 \cos^2 x_3} x_4^2$$

$$g_\theta(X) = -\frac{ml}{hN - m^2 l^2 \cos^2 x_3} \cos x_3$$

$$U_x = U_\theta = F$$

Afin de réguler le déplacement du chariot et la position du pendule, on choisit les surfaces de glissements d'ordre 2 dans l'équation (II.2). Les surfaces de glissement sont définies comme suit :

$$\begin{cases} S_x = \dot{e}_x + \lambda_1 e_x \\ S_\theta = \dot{e}_\theta + \lambda_2 e_\theta \end{cases} ; \lambda_1 > 0 \text{ et } \lambda_2 > 0 \quad (\text{II.12})$$

Avec :  $e_x = x_{1d} - x_1$  ;  $e_\theta = x_{3d} - x_3$

On propose les fonctions de Lyapunov suivantes :

$$\begin{cases} V_x = \frac{1}{2} S_x^2 > 0 \\ V_\theta = \frac{1}{2} S_\theta^2 > 0 \end{cases} \quad (\text{II.13})$$

Donc ;

$$\begin{cases} \dot{V}_x = S_x \dot{S}_x \\ \dot{V}_\theta = S_\theta \dot{S}_\theta \end{cases} \quad (\text{II.14})$$

Alors ;

$$\begin{cases} \dot{V}_x = S_x (\ddot{x}_{1d} - f_x(x) - g_x(x)u_x + \lambda_1 \dot{e}_x) \\ \dot{V}_\theta = S_\theta (\ddot{x}_{3d} - f_\theta(x) - g_\theta(x)u_\theta + \lambda_2 \dot{e}_\theta) \end{cases}$$

Pour assurer que  $\dot{V}_x < 0$  et  $\dot{V}_\theta < 0$  il suffit d'assurer que :

$$\begin{cases} u_x = \frac{1}{g_x(x)} (\ddot{x}_{1d} - f_x(x) + \lambda_1 \dot{e}_x + K_1 S_x) \\ u_\theta = \frac{1}{g_\theta(x)} (\ddot{x}_{3d} - f_\theta(x) + \lambda_2 \dot{e}_\theta + K_2 S_\theta) \end{cases} \quad (\text{II.15})$$

#### **II.4. Résultats de la simulation :**

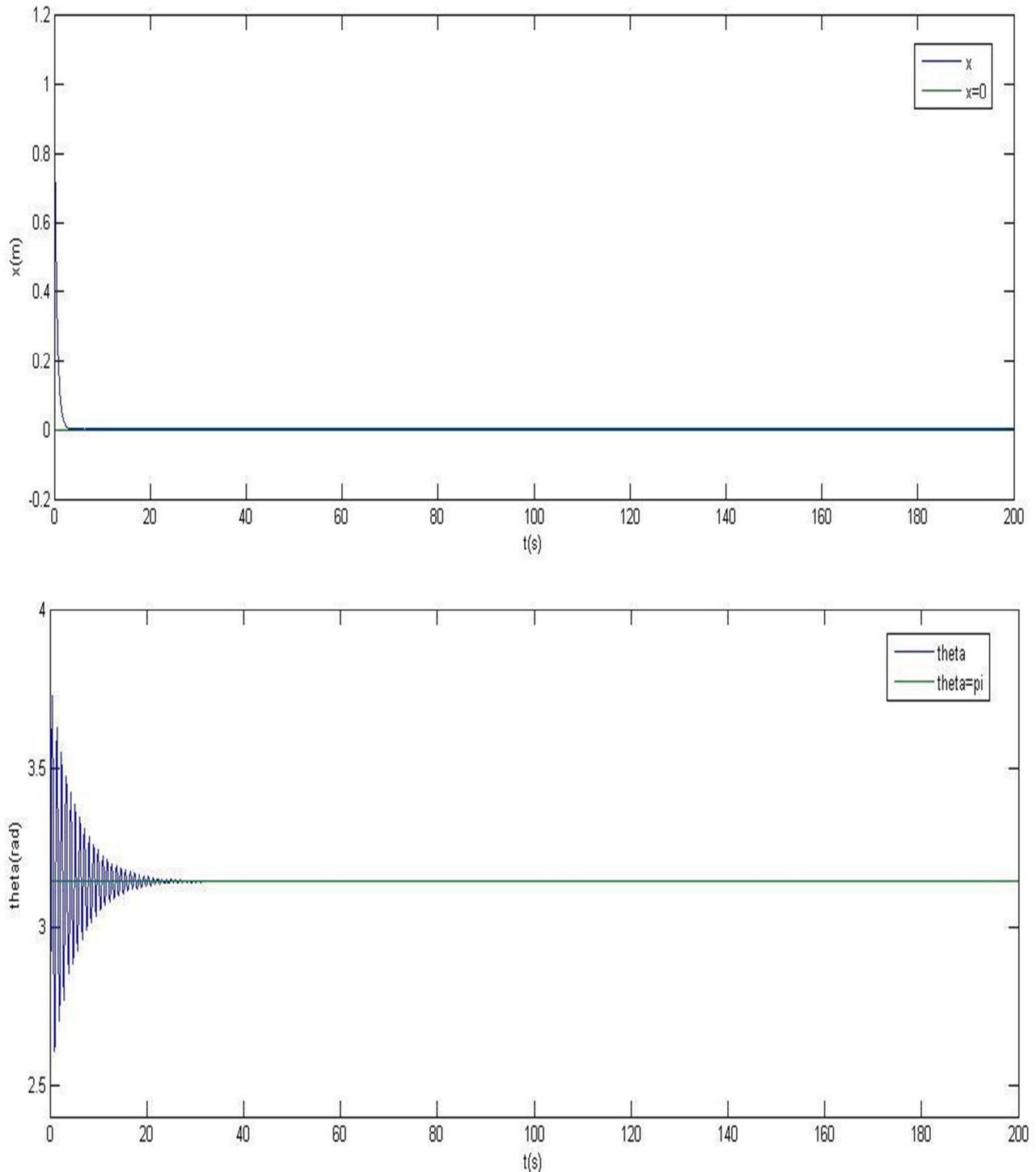
Les simulations en boucle fermée ont été réalisées sur le modèle non linéaire. L'algorithme de résolution utilisée est celui de Runge-Kutta d'ordre 4 avec un pas de simulation de 0.01s.

Nous avons testé cette commande pour des problèmes de stabilisation et de poursuite de trajectoires.

Les paramètres de régulateur mode glissant sont prêts comme suit :

$$\lambda_1 = 1.95 \quad ; \quad \lambda_2 = 0.0005 \quad ; \quad K_1 = 50 \quad ; \quad K_2 = 0.0035$$

#### II.4.1. Test de stabilisation :



**Figure II.6 :** Application de la commande par mode glissant au système simple pendule inversé ; Test de stabilisation en  $x=0$  et  $\theta = \pi$  rad

II.4.2. Test de poursuite d'une trajectoire :

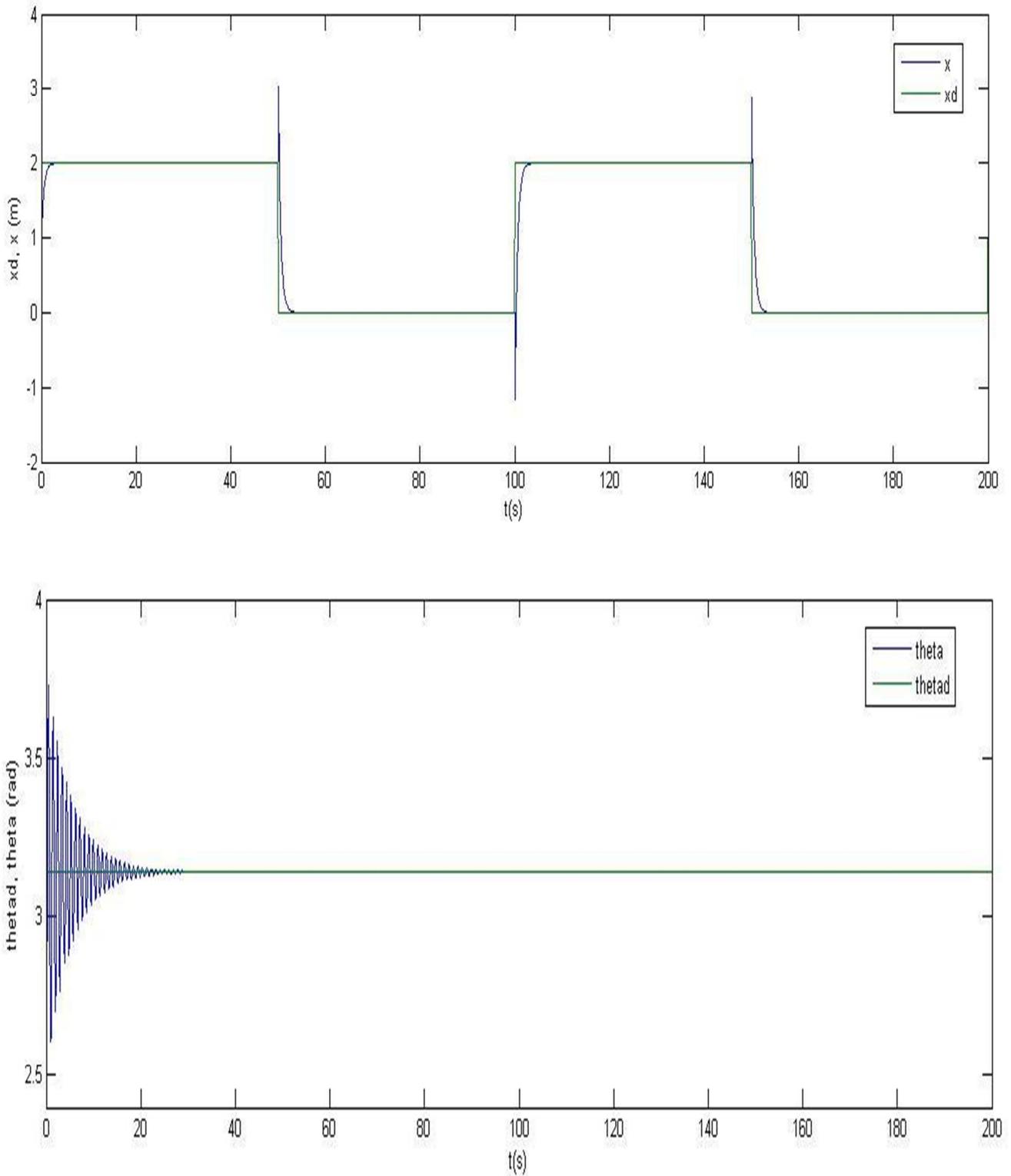
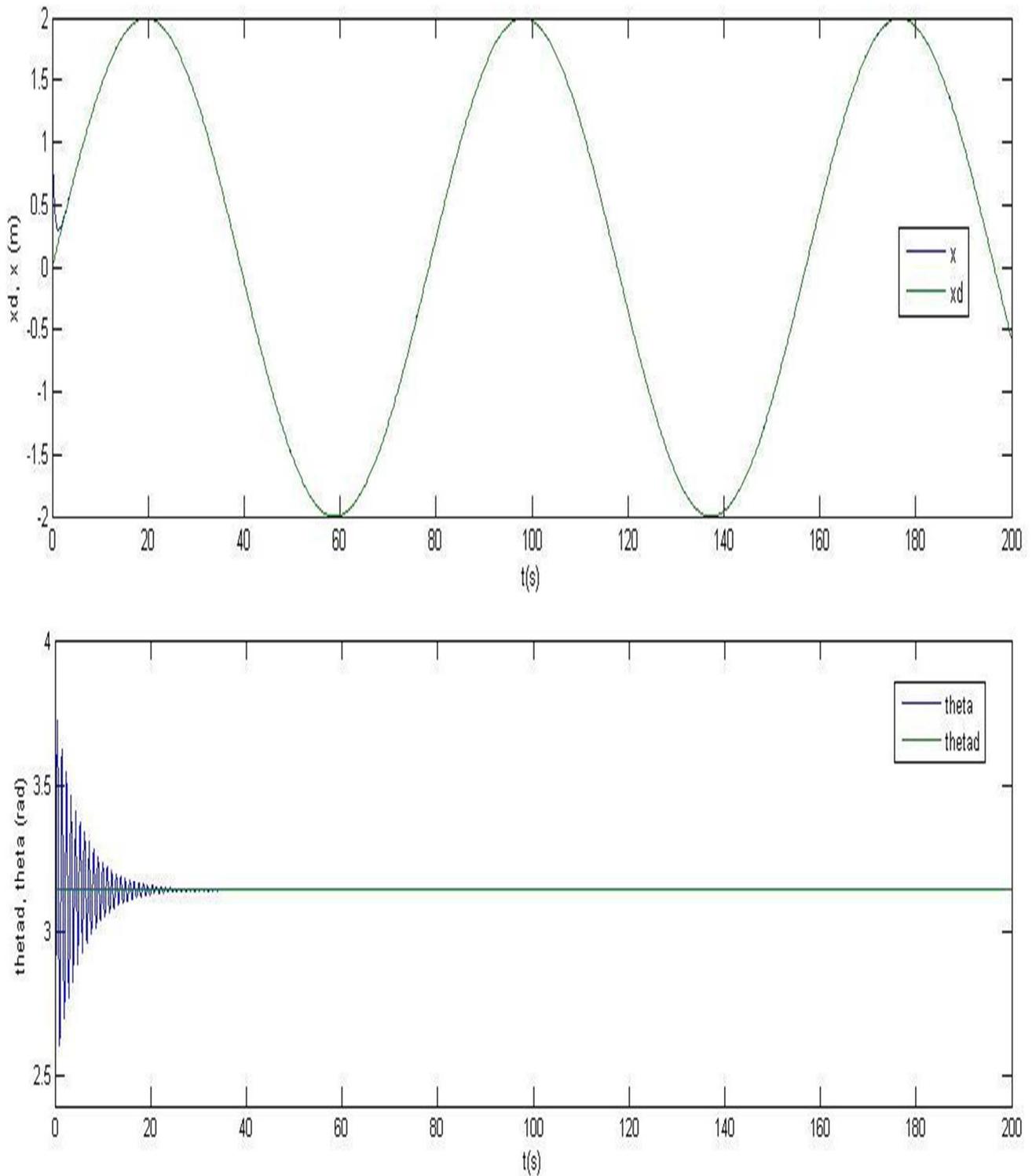


Figure II.7 : Poursuite d'une trajectoire carrée pour la position  $x$



**Figure II.8 :** Poursuite d'une trajectoire sinusoïdale pour la position  $x$

A travers les résultats de simulation effectuée sur le modèle non linéaire du système, nous pouvons constater que les régulateurs mode glissant synthétisés ont permis de stabiliser le système aussi bien en régulation qu'on poursuite de trajectoire. Cette poursuite est atteinte en un temps très court.

## **II.5.Conclusion :**

Dans cette partie, nous avons introduit la méthode de contrôle en mode glissant d'ordre 2 pour commander le pendule inversé. Tant que les résultats de suivi de trajectoire sont bons malgré les interférences dans le processus de simulation, la conclusion tirée est que le contrôle est fiable et robuste.

---

---

## *Conclusion générale*

---

---

---

## Conclusion Générale

Les recherches proposées dans cette mémoire visent à résoudre le problème de la commande en mode glissant, qui est généralement utilisée en mode automatique pour répondre au mieux aux objectifs de performance et de robustesse de la régulation des procédés. La loi de commande proposée est appliquée à un pendule inversé stable, qui est un système instable avec une non-linéarité non négligeable

Pour y parvenir, nous devons d'abord comprendre la composition de ce système et comprendre son fonctionnement. Afin de synthétiser la loi de commande proposée dans notre travail, la modélisation du pendule inversé est nécessaire, ce qui fait l'objet du premier chapitre

Le chapitre 2 dans la première partie présentée le principe de la commande par mode glissant et en deuxième partie pour objectif d'appliquer le contrôle en mode glissant à notre système (pendule inversé), qui permet de contrôler l'angle du pendule inversé et la position du chariot du système. L'application de la commande en mode glissant au pendule a rapidement montré le principal inconvénient de cette commande. Afin de le réduire ou de l'éliminer, une solution est proposée

A la fin de ce travail, on peut dire que la commande de mode de glissement est robuste, mais pour qu'elle remplisse correctement ce rôle, il est nécessaire de sélectionner la surface de glissement et les paramètres de la commande à utiliser. Ensuite, nous devons vérifier les conditions de convergence.

Notre recherche est théoriquement limitée. Cependant, nous avons démontré l'importance du contrôle en mode glissant et sa capacité à stabiliser le pendule inversé par simulation. Ensuite il faut vérifier les résultats obtenus sur banc d'essai pour donner un avis définitif

---

---

## *Références bibliographiques*

---

---

## Références bibliographiques

- [1] A. Djoudi, T. Benabdellah, "synthèse et Application des lois de commande non linéaires sur un pendule inverse", Mémoire d'Ingénieur, Ecole Nationale Polytechnique, 2007.
- [02] Ferhat Lahouazi. « Mise en œuvre d'une stratégie de commande nuer floue Application a un pendule inversé », Mémoire de magister, université Mouloud Mammeri Tizi-Ouzou, 2011.
- [03] DeghboudjImen. « Commande des systèmes non linéaires par mode glissant d'ordre supérieur », Thèse de Magister de l'Université de Constantine 1, 2013.
- [04] Mudry Freddy. « Modélisation et régulation d'un pendule inversé. », Fascicule de travaux pratiques, Institut d'Automatisation industrielle de l'Ecole d'Ingénieurs du Canton de Vaud, Suisse2003
- [05] Sofiane IAMARENE, Ferhat AISSANI : "Commande d'un pendule inversé". Mémoire de Master. Université Abderrahmane Mira, Bejaia. 2015.
- [06] Jong H. Park and Kyoung, "Biped robot walking using gravity-compensated inverted pendulum mode and computed troque control ". International Conférence on Robotics and Automation, Belgium, 1998.
- [07] Saadallah Ala Eddine, Boudab Abderrafik : "Commande PID robuste d'un pendule inversé rotatif" 'mémoire de master, Université Mohammed Seddik Benyahia – Jijel.2019
- [08] kacimi M.A. «Utilisation des algorithmes génétiques multi-objectif pour la conception d'un contrôleur flou appliqué a un système non linéaire et complexe », mémoire de magister, Universités A.MIRA de Bejaïa, 2014
- [09] Bugeja M. « Non linear swing-up and stabilizing control of an inverted pendulum system», EUROCON, Computer as a Tool, The IEEE Region 8. Vol. 2, IEEE, Slovenia2003.
- [10] : Lam J. «Control of an inverted pendulum »,Dept of Electrical &computer Engineering, University of California, USA 2004
- [11] : TOUATI Bilal, MOUSSAOUI Mahdi : " Commande d'un pendule inversé par mode glissant", Mémoire Présenté en vue de l'obtention du diplôme de Master en Automatique, Université Abderrahmane Mira – Bejaia, 2017

- [12] : B. ABDELOUHAB et H. Adel. «Commande par mode de glissement d'une suspension active d'un véhicule », PFE, Ecole Nationale Polytechnique, Juin, 2006.
- [13] F. Benchabane.« Commande en position et en vitesse par mode de glissement d'un moteur synchrone triphasé a aimants permanents avec minimisation du chattering », Mémoire De Magistère En Electrotechnique, Université Mohammed Khider De Biskra, Algérie, 2005.
- [14] M.C. SOUSE ALAOUI. «Commande et observateur par modes glissants d'un système de pompage et d'un bras manipulateur », thèse de doctorat, Université d'Angers,08 Juliet 2009
- [15] A. L. Nemmour. «Contribution à la commande vectorielle de la machine asynchrone à double alimentation», Mémoire de Magister, l'Université de Batna, 2002.
- [16] ZAHARIEVA.T « commende a structure variable appliquée a un moteur synchrone », thèse pour l'obtention du diplôme de recherche de l'INSA de Toulouse, France, 2000.
- [17] NICOLAS.B. « Contribution à la commande de loi de commutation à l'aide de la théorie des mode glissant », Thèse de doctorat, Institut national polytechnique de Toulouse, France 1996.
- [18] Slotine, J.-J. E., & Li, W. « Applied Nonlinear Control», London : Prentice-Hall, Inc. 1991
- [19] M. Rashed, K.B. Goh, M.W. Dunnigan, P.F.A. MacConnell, A.F. Stronach and B.W. Williams, 'Sensor less Second-Order Sliding-Mode Speed Control of a Voltage-Fed Induction-Motor Drive Using Nonlinear State Feedback', IEE Proceedings - Electric Power Application, Vol. 152, N°5, pp. 1127 - 1136, 2005.

## ملخص

يهدف العمل المقدم في هذه المذكرة إلى تطبيق التحكم في الوضع المنزلق لتثبيت بندول مقلوب. في الجزء الأول قمنا بدراسة وعرض البندول المقلوب وحصلنا على النموذج الرياضي للنظام. اما في الجزء الثاني يحتوي على مرحلتين الأولى تتحدث عن الوضع المنزلق وفي المرحلة الثانية يتناول دراسة أمر الوضع المنزلق مع تطبيق التحكم في هذا الوضع على البندول المقلوب، وقد أظهرت نتائج هذه المحاكاة بوضوح متانة وموثوقية التحكم لتثبيت البندول المقلوب.

## Résumé

Ce travail présenté dans cette mémoire vise à appliquer la commande de mode glissant pour stabiliser le pendule inversé.

Après l'introduction et les recherches sur le pendule inversé, nous avons obtenu le modèle mathématique du système. Le deuxième chapitre porte sur l'étude de commande en mode glissant et L'application de cette méthode au pendule inversé. Les résultats de la simulation montrent clairement la robustesse et la fiabilité de la commande et la stabilité du pendule inversé

## Abstract

The objective of the work presented in this dissertation is to apply the sliding mode control to stabilize an inverted pendulum.

After presentation and study of inverted pendulum we have obtained a mathematical model of the system. The second part deals with the study of the sliding mode control and The application of sliding mode control on the inverted pendulum is the aim, the simulation results showed the robustness, and the reliability of the control, and the stabilization of inverted pendulum.