

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Université Akli Mohand Oulhadj - Bouira -
Tasdawit Akli Muḥend Ulḥağ - Tubirett -



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة أكلي محمد أولحاج
- البويرة -

Faculté des Sciences et des Sciences Appliquées

كلية العلوم والعلوم التطبيقية

Référence :/MM/2021

المرجع :/م/م / 2021

Mémoire de Master

Présenté au

Département: Génie Électrique
Domaine: Sciences et Technologies
Filière: Télécommunications
Spécialité: Systèmes des Télécommunications

Réalisé par :

ZERROUKI Hinda

Thème :

**Diagramme de bifurcation d'une dynamique non linéaire
simulée**

Soutenu le: 06/11/2021

Devant la commission composée de :

Mr. HOUASSINE Hamza	M.C.B	Univ. Bouira	Président
Mr. NOURINE Mourad	M.C.A	Univ. Bouira	Encadreur
Mr. CHELBI Salim	M.C.B	Univ. Bouira	Examineur

Année Universitaire: 2020-2021

REMERCIEMENTS

T*out d'abord, je tiens à remercier Allah, le tout puissant, de m'avoir donné la santé, la volonté et la patience pour mener à terme ma formation de Master*

J*e tiens à remercier Mr : Nourine Mourad d'avoir encadré ce travail, tout au long de ce mémoire, ses conseils m'ont été très précieux*

M*es remerciements s'adressent également à tous les enseignants du département de génie électrique qui m'ont aidée tout au long des années de ma scolarité*

E*nfin, je remercie mes amies et mes camarades de promotion pour ce parcours passés ensemble, dans les meilleurs moments comme dans les pires*

DEDICACE

Par la grâce de dieu Je dédie ce travail...

A mes chers parents qui m'ont encouragé, aidés et soutenus et d'avoir été à mes côtés, sans vous je n'aurais jamais atteint ce jour.

Je dédie ce travail aussi à :

Mes frères HANI et JHAB

A toutes mes amies

A toute ma promotion deuxième année master télécommunication

2020-2021

A tous ceux qui me portent dans leurs cœurs

Table des Matières

Liste des Figures	iii
Les abréviations	iv
Introduction générale	1

Chapitre I : Généralités sur les systèmes dynamiques

I.1. Introduction	4
I.2. Systèmes dynamiques	4
I.3. Modélisations des systèmes dynamiques non linéaires	5
I.3.1. Systèmes conservatifs et Systèmes dissipatifs.....	6
I.4. Introduction à la théorie des systèmes dynamiques.....	6
I.4.1 Système dynamique à temps discret.....	6
a. Système de Hénon	7
b. Système Hénon-Heiles ou Hénon modifié.....	7
I.4.2 Système dynamique à temps continu.....	7
a. Système de Lorenz.....	8
b. Système de Rössler.....	8
I.4.3. Systèmes autonomes ou non autonomes.....	9
I.5. Les Systèmes chaotiques.....	9
I.6. Propriétés des systèmes chaotiques.....	9
I.6.1. La non-linéarité.....	10
I.6.2. Le déterministe.....	10
I.6.3. Sensibilité aux conditions initiales.....	10
I.6.4. Aspect aléatoire	11
I.6.5. Degré de liberté.....	12
I.7. L'espace de phase.....	12
I.8. Notion d'attracteur.....	13
I.8.1 Le bassin d'attraction	15
I.8.2. les différents types d'attracteurs.....	16

I.9. Les bifurcations et route vers le chaos	17
I.10. Conclusion.....	18

Chapitre II : Système dynamique discret

II.1. Introduction	20
II.2. Définitions	20
II.3. Un attracteur unique.....	21
II.4. Caractérisation des systèmes dynamiques discrets.....	22
II.5. Diagramme de bifurcation	26
II.6. Algorithme de traçage du diagramme de bifurcation	28
II.7. Résultats de simulation	29
II.8. Conclusion.....	31

Chapitre III : Système dynamique continu

III.1. Introduction	33
III.2. Système chaotique	33
III.3. Principes.....	33
III.3.1. Oscillateur non linéaire.....	33
III.3.2. chaos en longueur d'onde	35
III.4. Quelques méthodes de résolution des EDR	36
III.4.1. Méthode d'Euler	37
III.4.2. Méthode Runge Kutta d'ordre 4.....	38
III.5. Résultats de simulation	39
III.6. Conclusion	45
Conclusion générale	46
Bibliographie	47
Annexe I: Programme Matlab	50

Liste des figures

Figure I.1 : Illustration de la propriété de sensibilité aux conditions initiales.....	11
Figure I.2 : Aspect aléatoire du système de Rössler.....	11
Figure I.3 : Aspect aléatoire du système de Hénon.....	12
Figure I.4 : Séries temporelles en haut et espaces de phase correspondant	13
Figure I.5 : Attracteur de Lorenz.....	14
Figure I.6 : Attracteur de Rössler.....	14
Figure I.7 : Attracteur de Hénon.....	15
Figure I.8 : Points fixes et attracteurs	15
Figure I.9 : Signal quasi périodique typique	16
Figure I.10 : Quelques exemples d'attracteurs étranges	17
Figure II.1 : Illustration d'un cycle d'ordre 1 (un attracteur unique).....	21
Figure II.2 : Itération graphique d'une trajectoire 1-D.....	23
Figure II.3 : Types de point fixe.....	24
Figure II.4 : Exemple de dédoublement de la période.....	25
Figure II.5 : Principe du calcul de la distribution de probabilité	27
Figure II.6 : Résultat de simulation	29
Figure III.1 : Schéma élémentaire du système générateur de chaos	34
Figure III.2 : Schéma du générateur de chaos en longueur d'onde.....	36
Figure III.3 : Résultats de simulation en fonction du paramètres de bifurcation.....	40

Les abréviations

PFE	Projet de fin d'études
NL	Non- linéaire
PB	Passe -bas
EDR	Equation différentielle à retard
ODE	Equation différentielle ordinaire

Introduction générale

Les systèmes dynamiques en général nous ont non seulement aidé à mieux comprendre le monde qui nous entoure, mais ont également apporté des applications dans de nombreuses disciplines scientifiques tels que : la biologie, la médecine, la physique, l'électronique, la cryptographie, ...etc. Ces systèmes peuvent être classés en général en deux catégories, selon le type de domaine temporel étudié : discret et continu. Dans le cadre de ce Projet de Fin d'Etude (PFE), nous allons nous y intéresser à deux exemples particuliers de signaux, l'un est généré par un système dynamique discret – l'application logistique – et l'autre est produit par un système dynamique non linéaire à retard : un générateur de chaos en longueur d'onde. Ces deux exemples sont choisis à cause principalement de leur richesse en termes de leurs évolutions dynamiques, c'est-à-dire selon le paramètre de bifurcation étudié, ces deux systèmes dynamiques choisis peuvent évoluer d'un état stationnaire constant vers des états très complexes entièrement hyperchaotiques, sans oublier les états intermédiaires : périodiques et quasi-périodiques. L'étude de l'ensemble de ces états nécessite l'utilisation d'un outil de représentation visuelle – diagramme de bifurcation – qui permet de cartographier l'ensemble des régimes dynamiques d'un système discret ou continu.

L'un des objectifs de ce PFE est de s'initier à la construction d'un diagramme de bifurcation pour les deux cas choisis système discret et système continu. La maîtrise de sa construction va nous permettre à moyen terme d'aborder l'étude d'un système dynamique destiné à la cryptographie des données optiques par porteuse chaotique.

Ce manuscrit est divisé en trois chapitres :

Le chapitre I est constitué de rappels sur les systèmes dynamiques avec un accent particulier porté sur les systèmes à temps continu et discret. Nous donnerons une définition générale de système dynamique chaotique et ces caractérisations.

Le chapitre II est dédié à l'étude du système dynamique discret non linéaire. Nous donnerons la formulation analytique de la suite logistique et l'algorithme que l'on utilise pour le traçage du digramme de bifurcation sous le langage de programmation Matlab.

Le chapitre III est consacré à l'étude du système dynamique continu. Nous donnerons la définition du générateur de chaos en longueur d'onde et de ses équations différentielles à retard, les méthodes numériques utilisées, et nous exposerons aussi les résultats obtenus.

Enfin, nous terminerons par une conclusion générale et quelques perspectives.

CHAPITRE I :
GÉNÉRALITÉS SUR LES SYSTÈMES
DYNAMIQUES

I.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous avons passé en revue quelques concepts généraux des systèmes dynamiques déterministes. Nous commencerons par définir le concept lui-même, et nous pourrions discuter d'autres concepts mathématiques, notamment les attracteurs, les bassins d'attraction. Enfin, nous présenterons les principales caractéristiques du comportement chaotique.

I.2. Systèmes dynamiques :

En général, les systèmes dynamiques décrivent des phénomènes qui évoluent avec le temps. Le terme «système» fait référence à un ensemble de variables d'état (dont les valeurs changent avec le temps) et à l'interaction entre ces variables [1].

Un système dynamique peut avoir de multiples solutions d'équilibre. Pour un ensemble donné de paramètres et une condition initiale donnée, le système converge vers l'une des solutions d'équilibre. Cette solution d'équilibre est appelée attracteur [2].

Soit le système dynamique non-linéaire de dimension n :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, u) \quad (\text{I.1})$$

Tel que :

u : un paramètre de système ;

x : la solution du système (I-1);

t : le temps.

Un système dynamique est spécifié par [3] :

- **Une représentation d'état:** décrit ce qui relève du domaine structurel. Il s'agit d'une liste de variables, que l'on appelle vecteur d'état, permettant de décrire à tout instant notre ensemble d'objets. Le nombre de ces variables correspond au nombre de degrés de liberté du système.
- **une fonction de transition:** décrit ce qui relève du domaine temporel. Elle définit toutes les forces, contraintes élastiques, collisions, et plus généralement les échanges

d'énergie entre les objets. Elle décrit l'évolution d'un vecteur d'état entre deux instants t_1 et t_2 .

I.3. Modélisations des systèmes dynamiques non linéaires

Un système non linéaire ne peut pas être décrit par des équations différentielles linéaires à coefficients constants. Cette définition explique la complexité et la diversité des systèmes non linéaires et des méthodes qui s'y appliquent. Il n'y a pas une théorie générale pour ces systèmes, mais plusieurs méthodes adaptées à certaines classes de systèmes non linéaires [4].

L'évolution déterministe du système dynamique peut alors se modéliser de deux façons distinctes [4] :

- Une évolution **continue** dans le temps, représentée par une équation différentielle ordinaire.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (\text{I.2})$$

Où : $x \in \mathcal{R}^n$ est le vecteur d'état, f est une fonction $\mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$ appelée champ de vecteur, et $x_0 \in \mathcal{R}^n$ représente le vecteur des états initiaux à l'instant initial t_0 .

- Une évolution **discrète** dans le temps, si un système prend ses valeurs uniquement à des instants régulièrement distribués. Sa représentation mathématique est donnée par le système d'équations suivant.

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k)) \\ x(k_0) = x(0) \end{cases} \quad (\text{I.3})$$

Avec :

k est l'instant discret, k_0 est l'instant discret initial et $x(0)$ est le vecteur des états initiaux.

Le système dynamique progresse au cours du temps d'une manière causal et déterministe :

- Causale, où son avenir ne dépend que de phénomènes du passé ou du présent.
- Déterministe, c'est-à-dire qu'à partir d'une condition initiale donnée à l'instant présent va correspondre à chaque instant ultérieur un et un seul état futur possible.

I.3.1. Systèmes conservatifs et Systèmes dissipatifs

En physique, un système conservatif est un système qui conserve l'énergie totale, et possède une intégrale première (ou constante) du mouvement, par contre un système dissipatif est un système qui dissipe de l'énergie, et possède au moins un terme dépendant de la vitesse. Les systèmes considérés dans ce PFE sont des systèmes déterministes, et pour préciser cette définition, on dit qu'un système déterministe est conservatif, si et seulement si la dynamique du système associée à chaque condition initiale x_0 a un et un seul état final $x_0(t)$, il faut pour cela qu'il existe une application bijective ϕ de l'espace des phases [5]:

$$\begin{aligned} \phi: I \times \mathbb{R} &\rightarrow I \\ (x, t) &\rightarrow \phi_t(x) = \phi(x, t) \end{aligned} \quad (\text{I.4})$$

I.4. Introduction à la théorie des systèmes dynamiques

La théorie des systèmes dynamiques est utilisée pour étudier les systèmes physiques qui évoluent au cours du temps.

Du point de vue mathématique, les systèmes dynamiques sont classés en deux catégories [6] :

- Systèmes dynamiques discrets.
- Systèmes dynamiques continus.

I.4.1 Systèmes dynamiques à temps discret

Un système dynamique dans le cas discret est représenté par une équation aux différences sous la forme [7]:

$$x_{i+1} = f(x_i, \alpha) \quad (\text{I.5})$$

Où f est une fonction continue $x_i \in \mathcal{R}^i$ et le vecteur d'état à l'instant i ($i \in \mathbb{N}$) et $\alpha \in \mathcal{R}^r$ est celui des paramètres. La fonction f peut, dans certains cas, être inversible, ce qui introduit la notion de réversibilité qui permet de remonter dans le temps.

Parmi les systèmes chaotiques discrets très répondus dans la littérature scientifique, nous pouvons citer les systèmes de Hénon, Hénon modifié, Lozi, la fonction logistique [8].

a) Système de Hénon

Introduit par l'astronome Michel Hénon en 1976, il est présenté par les équations suivantes [8]:

$$\begin{cases} x(k+1) = y(k) + 1 - a \cdot x(k)^2 \\ y(k+1) = b \cdot x(k) \end{cases} \quad (\text{I.6})$$

Tel que :

$(x(k), y(k)) \in R^2$: Représente le vecteur d'état ;

a, b : les paramètres du système .

b) Système Hénon-Heiles ou Hénon modifié

Il est donné par les équations suivantes [8]:

$$\begin{cases} x(k+1) = a - y^2(k) - bz(k) \\ Y(k+1) = x(k) \\ Z(k+1) = y(k) \end{cases} \quad (\text{I.7})$$

Tel que :

x, Y, Z : représentent les états du système à chaque instant

a, b : les paramètres du système

I.4.2 Systèmes dynamiques à temps continu

Un système dynamique en temps continu est décrit par un système d'équations différentielles sous la forme [8]:

$$\dot{x} = f(t, x, u), y = h(t, x, u) \quad (\text{I.8})$$

Où :

x : le vecteur d'état de dimension n ,

$f : R^n \rightarrow R^n$ est une fonction non linéaire désignant le champ de vecteur,

$h : R^n \rightarrow R$ est une fonction éventuellement non linéaire qui désigne le vecteur de

sortie et $u \in V \subseteq \mathcal{R}^p$ représente l'entrée du système.

Si ce système ne dépend pas de l'entrée, on aura alors :

$$x(t) = f(t, x) \quad (\text{I.9})$$

L'ensemble des solutions d'un système différentiel constitue un système dynamique. Il existe plusieurs systèmes chaotiques continus dans la littérature. Parmi eux, on peut citer les systèmes de Lorenz, Rössler, Bogdanov, le circuit de Chua.

a) Système de Lorenz

Le système de Lorenz est généré par le système d'équations suivant [8] :

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = x(b - z) - y \\ \dot{z} = xy - cz \end{cases} \quad (\text{I.10})$$

Tel que :

x, y, z : représentent les états du système à chaque instant.

a, b, c : les paramètres du système.

Cet exemple a été publié en 1963 dans un journal météorologique [8].

Le système présente un comportement chaotique et présente un attracteur étrange en forme d'ailes de papillon.

b) Système de Rössler

Le système de Rössler est donné par les équations suivantes [8] :

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y - z) \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + z(x - c) \end{cases} \quad (\text{I.11})$$

Tel que :

x, y, z : représentent les états du système.

a, b, c : les paramètres du système réels.

Lorsque les paramètres et les conditions initiales de cette équation ont été choisis, un comportement chaotique peut être observé.

I.4.3. Systèmes autonomes et non autonomes

Un système autonome est tout système dynamique qui ne dépend pas explicitement du temps. Il est donné comme suit [9]:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ \dot{y} = g(x, u) \end{cases} \quad (\text{I.12})$$

Un système autonome est indépendant du temps initial, alors qu'un système non autonome ne l'est pas. Dans un système autonome, tout instant peut être considéré comme instant initial, et tout état $x(t)$ du système peut être considéré comme un état initial.

I.5. Les Systèmes chaotiques

Un système chaotique est un système dynamique déterministe non linéaire qui se distingue par son imprévisibilité due à son extrême sensibilité aux conditions initiales [10]. Il est modélisé par des équations différentielles non linéaires.

I.6. Propriétés des systèmes chaotiques

En général, le chaos est défini comme un comportement particulier d'un système dynamique. Il existe un ensemble de propriétés qui résument les caractéristiques observées dans les systèmes chaotiques. Elles sont considérées comme des critères mathématiques qui le définissent. Les plus connues sont [5]:

- La non- linéarité
- Le déterministe
- Sensibilité aux conditions initiales
- Aspect aléatoire
- Degré de liberté

I.6.1. La non-linéarité

Un système chaotique est un système dynamique non linéaire. La notion de systèmes dynamiques concerne tous les systèmes dont l'évolution dépend du temps. De manière générale, pour prédire les phénomènes réels produits par ces systèmes, le processus consiste à construire un modèle mathématique qui établit une relation entre un ensemble de causes et un ensemble de résultats. Si cette relation est une opération de Proportionnalité, le phénomène est linéaire. Dans le cas d'un phénomène non linéaire, l'effet n'est pas proportionnel à la cause [9].

I.6.2. Le déterministe

Un système chaotique a des règles fondamentales déterministes et non probabilistes. Il est généralement régi par des équations différentielles non linéaires qui sont connues, donc par des lois rigoureuses et parfaitement déterministes. Et la notion de déterminisme signifie donc la capacité de prédire le futur d'un phénomène à partir d'un événement passé ou présent [5] [9].

I.6.3. Sensibilité aux conditions initiales

Certains phénomènes dynamiques non linéaires sont très sensibles aux conditions initiales, et même s'ils sont régis par des lois déterministes strictes et parfaites, des prédictions précises sont impossibles. Evidemment, la moindre erreur ou imprécision des conditions initiales ne permet à aucun moment de déterminer le chemin réel à suivre, et donc ne peut prédire l'évolution à long terme du système. Par conséquent, une caractéristique fondamentale du chaos est la sensibilité aux conditions initiales [11].

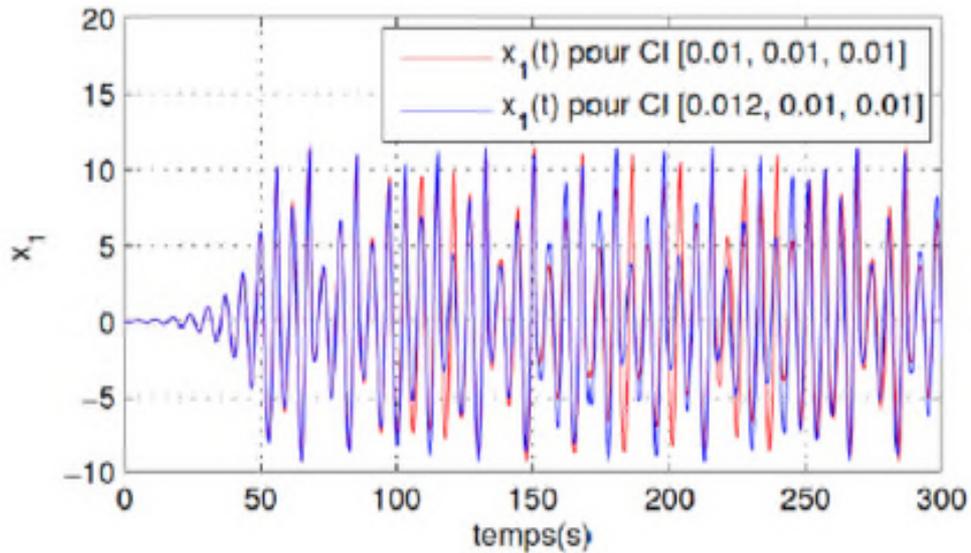


Figure I.1 : Illustration de la propriété de sensibilité aux conditions initiales sur l'état x_1 [11]

I.6.4. Aspect aléatoire

Les systèmes chaotiques se comportent, en effet d'une manière qui peut sembler aléatoire. Cet aspect aléatoire du chaos vient du fait que l'on est incapable de donner une description mathématique du mouvement, mais ce comportement est en fait décrit par des équations non linéaires parfaitement déterministes. Les figures ci-dessus illustrent les aspects aléatoires du système chaotique continu (Figure I.2) et discrets (Figure I.3) [8]. L'évolution ressemble à du bruit, la différence entre le bruit et le chaos : le premier est aléatoire et le deuxième est déterministe

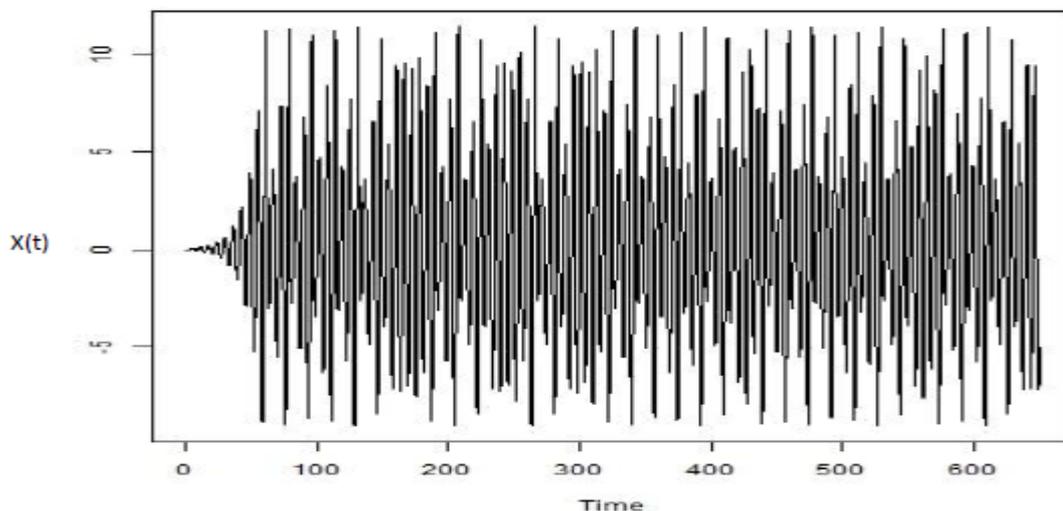


Figure I.2 : Aspect aléatoire du système de Rössler [8].

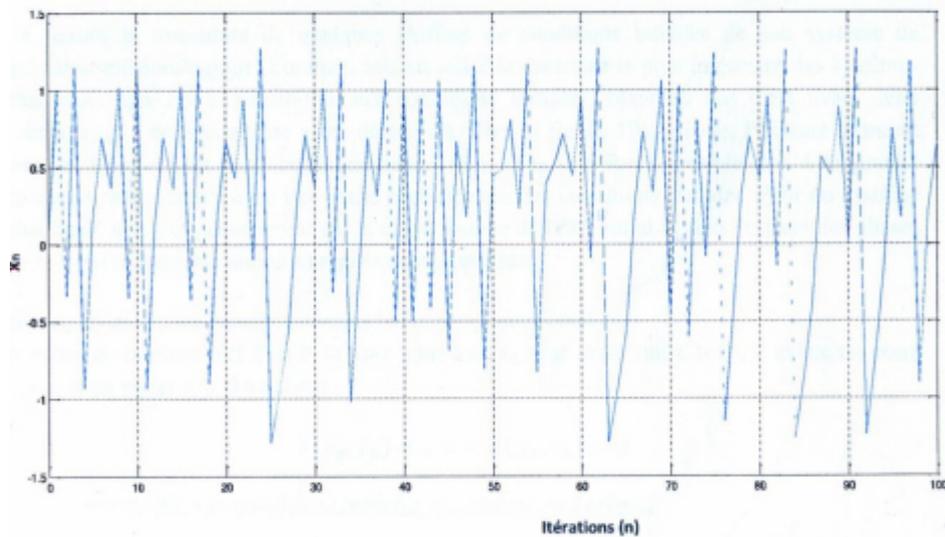


Figure I.3: Aspect aléatoire du système de Hénon [8].

I.6.5. Degré de liberté

La naissance du chaos a besoin de travailler sur trois degrés de liberté. Tout système continu avec moins de trois degrés de liberté ne sera pas chaotique [5].

I.7. L'espace de phase

Le système dynamique est caractérisé par un certain nombre de variables d'état à un instant donné. Le comportement dynamique du système est ainsi relié à l'évolution de chacune de ces variables d'état. Cet espace est appelé « l'espaces des phases », dont chaque point définit un état et le point associé à cet état définit une trajectoire appelé une orbite [5].

On appelle aussi l'espace des phases, un espace abstrait dont les axes sont les variables dynamiques du système, et trajectoire de phases toute courbe dans cet espace représentative d'une évolution du système. Un ensemble de trajectoires de phases constitue un portrait de phases. L'espace des phases est donc un outil visuel d'analyse de la dynamique des systèmes complexes. Une courbe fermée et régulière représente un comportement stable ou cyclique : (Figure I4.b) une courbe déformée ou une succession de boucles signifie que les mouvements subissent une perturbation. Cette représentation graphique rend plus aisé d'évaluer la stabilité et la complexité d'un système dynamique [4].

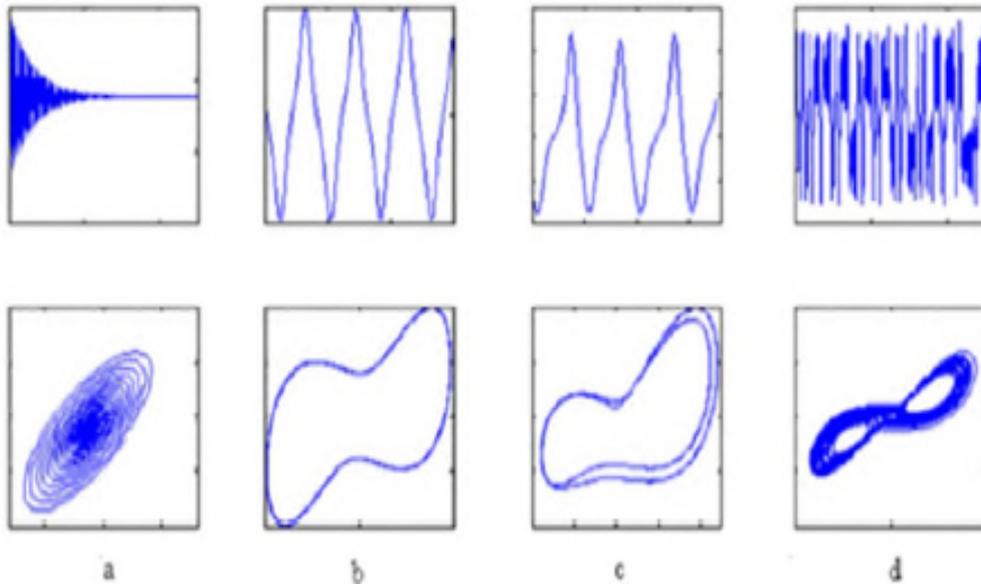


Figure I.4 : Séries temporelles en haut et espaces de phase correspondant [11].

I.8. Notion d'attracteur

Dans l'étude des systèmes dynamiques, un attracteur est un ensemble ou un espace vers lequel un système évolue de façon irréversible en l'absence de perturbations.

L'étude du comportement asymptotique d'un système dynamique régi par un ensemble d'équations différentielles non linéaires révèle très souvent la notion d'attracteur, défini comme l'ensemble compact de l'espace des phases invariant par cet ensemble et vers lequel convergent toutes les trajectoires du système [5].

L'attracteur est une géométrie de l'espace de phase indiquant le comportement d'un système chaotique. L'attracteur peut être étrange avec structure fractale, une courbe ou surface de forme irrégulière ou morcelée qui se crée en suivant des règles déterministes ou stochastiques ou point fixe ou encore cycle limite[8].

Ci-dessous, nous donnerons des exemples d'attracteurs étranges pour les différents systèmes chaotiques continus tirés de la référence [7].

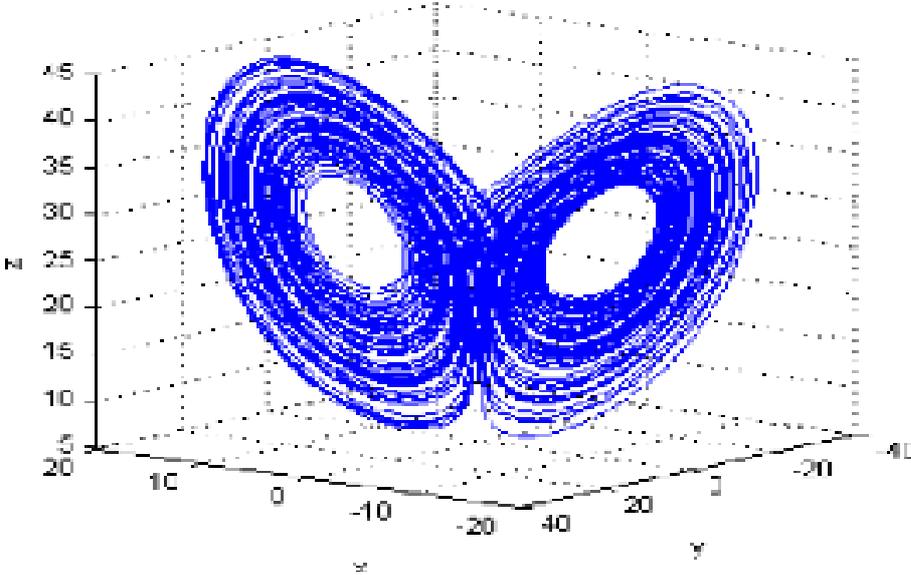


Figure I.5: Attracteur de Lorenz [7].

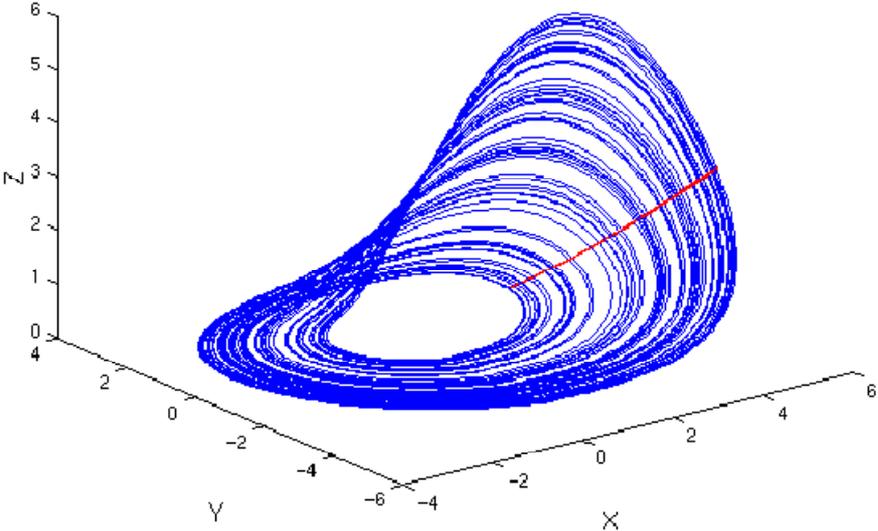


Figure I.6: Attracteur de Rössler [7]

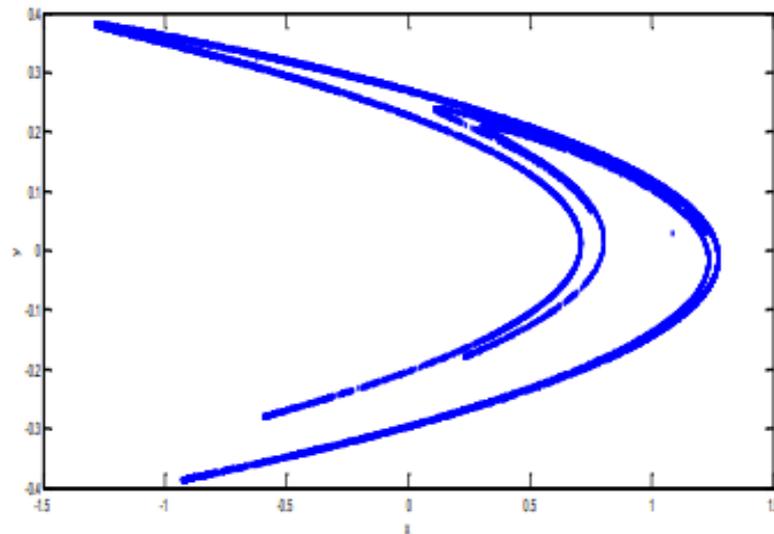


Figure I.7 : Attracteur de Hénon [7].

I.8.1 Le bassin d'attraction

Le bassin d'attraction d'un attracteur est l'ensemble des points de l'espace des phases qui donnent une trajectoire évoluant vers l'attracteur considéré [9].

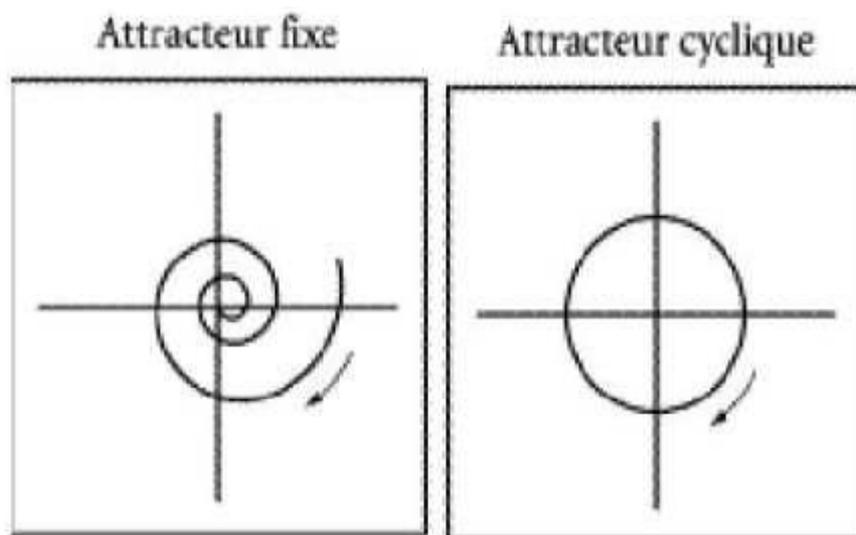


Figure I.8 : Points fixes et attracteurs [12].

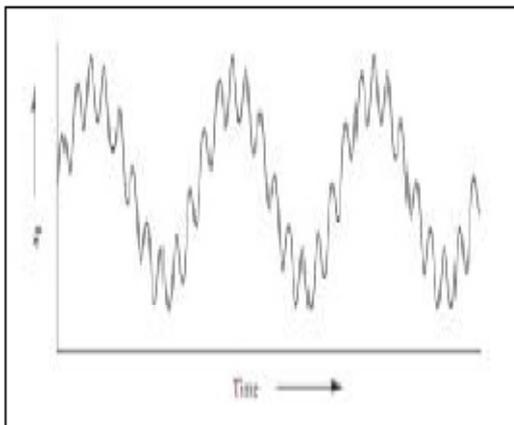
I.8.2. Les différents types d'attracteurs

Il existe deux types d'attracteurs : les attracteurs réguliers et les attracteurs étranges ou chaotiques [6]:

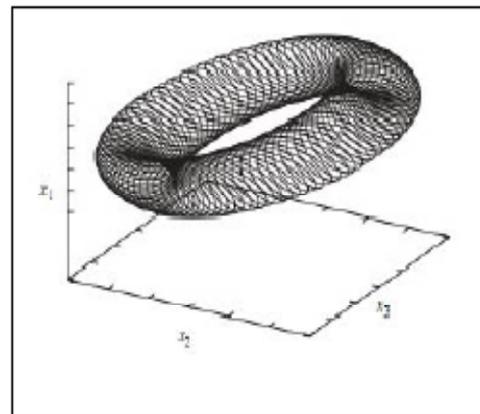
I.8.2.1. Attracteurs réguliers

Les attracteurs réguliers caractérisent l'évolution des systèmes non chaotiques, et peuvent être de trois sortes :

- **Le point fixe** : c'est le plus simple attracteur, le système évolue vers un état de repos (point).
- **Le cycle limite périodique** : il peut arriver que la trajectoire de phase se referme sur elle-même. L'évolution temporelle est alors cyclique, le système présentant des oscillations permanentes.
- **Le cycle limite pseudopériodique** : c'est presque un cas particulier du précédent. La trajectoire de phase ne se referme pas sur elle-même, mais s'enroule sur une variété de dimension 2 (par exemple un tore).



-a-



-b-

Figure I.9 a : Signal quasi périodique typique ;
b : allure d'un tore dans un espace de phase [6].

I.8.2.2 Attracteurs étranges

Les attracteurs étranges sont des formes géométriques complexes qui caractérisent l'évolution des systèmes chaotiques : au bout d'un certain temps, tous les points de l'espace des phases (et appartenant au bassin d'attraction de l'attracteur) donnent des trajectoires qui tendent à former l'attracteur étrange [6]:

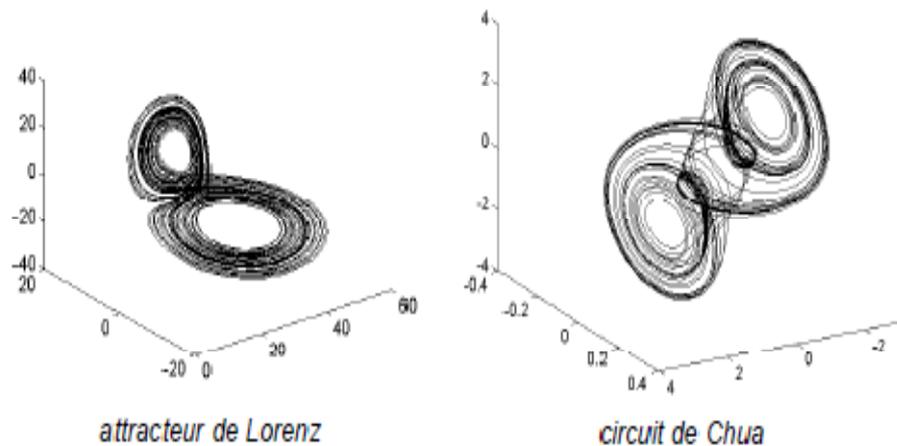


Figure I.10 : Quelques exemples d'attracteurs étranges [6].

I.9 Les bifurcations et route vers le chaos

L'aspect fondamental de l'étude des systèmes dynamiques chaotique est la notion de bifurcation. Notons que la bifurcation est consacrée à des systèmes dynamiques paramétriques (c'est-à-dire contient les paramètres de contrôle). Le mot " bifurcation ", introduit par Poincaré, est employé pour désigner un changement qualitatif du comportement du système (tel que le nombre ou le type de solutions) au cours de l'évolution d'un ou plusieurs paramètres. C'est-à-dire pour certaines valeurs des paramètres, la solution du système dynamique change qualitativement : on dit qu'il y a bifurcation [13]. Par bifurcation locale, on entend une modification du comportement du système au voisinage d'un point fixe (ou d'une solution périodique). Tout autre changement sera désigné par le terme de bifurcation globale.

Le point où se produit la bifurcation est appelé point de bifurcation ou encore point critique. La représentation des branches de points fixes dans cet espace, afin de localiser les bifurcations, permet d'établir ce qu'on appelle un "diagramme de bifurcation"[13]. Ce dernier est l'un des objectifs à atteindre de ce PFE.

I.10. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné une définition des systèmes dynamiques déterministes et leurs concepts généraux, nous avons ainsi défini le système dynamique discret et le système dynamique à temps continu, tout en les accompagnants par quelques exemples. Nous avons vu par la suite la description du système chaotique et ses propriétés, les différents types d'attracteurs ainsi que les bifurcations et route vers le chaos, nous avons cité vers la fin les principales caractéristiques du comportement chaotique.

CHAPITRE II :
SYSTÈME DYNAMIQUE DISCRET

II.1. Introduction

Ce chapitre est dédié à l'étude d'un diagramme de bifurcation dans le cas d'un signal discret. Ce signal est l'application logistique, il est choisi à cause de sa simplicité en terme de programmation et de sa richesse en terme de comportement dynamique.

L'application logistique est définie par l'équation suivante [14]:

$$X_{(n+1)} = f_{(x_n)} \quad \text{Avec} \quad f(x) \equiv r \cdot x \cdot (1 - x) \quad \text{et} \quad \begin{cases} r \in [0; 4] \\ x_0 \in [0; 1] \\ n \geq 0 \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

Avec une condition initiale connue $X_{(0)} = x_0$

Dans le cas d'un système d'ordre supérieur ($r \geq 2$) :

$$X_{(n+r)} = f_{(x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+r-1})} \quad , n \geq 0 \quad (\text{II.2})$$

Il s'agit d'un modèle de l'évolution d'une population animale .Ce modèle a été étudié par R. May pour l'observation de cette population dans un contexte proie-prédateur [14]. Chaque année (ou chaque intervalle de temps t), les individus se reproduisent et donnent naissance à une nouvelle génération qui perpétue l'espèce, tandis que l'ancienne meurt. Le facteur r correspondrait à un taux de reproduction de la population. Pour un faible taux, la population finit par s'éteindre. Pour un taux moyen, la population se stabilise et pour un grand taux, la population varie continuellement d'années en années [15].

La figure II.1 donne l'allure de la fonction $f(x)$ (la parabole noire, symétrique autour de l'axe $x = \frac{1}{2}$) et les valeurs successives de la suite (x_n) (la courbe rouge).

II.2. Définitions

Nous adoptons ici quelques définitions pour clarifier la présentation et simplifier la compréhension :

- une trajectoire (ou orbite) est l'ensemble des itérés $\{x_0, x_1, \dots\}$
- la fonction f possède un cycle d'ordre p s'il existe un terme x_0 tel que les itérés de f reviennent à la valeur de départ x_0 au bout de p itérations.
- un point fixe est un cycle périodique d'ordre $p = 1$ il y a une bifurcation lorsque les attracteurs changent de nature (stable ou instable).

II.3. Un attracteur unique [16]

En fonction du paramètre de bifurcation, les solutions de ce système dynamique sont de type point fixe, cycle périodique ou chaotique. Le point fixe représente l'état stationnaire. À titre d'exemple pour le cas $r = 2,8$, la figure II.1 montre pour ce cas que la suite (II.1) converge vers un point fixe, c'est-à-dire vers une valeur x^* telle que $f(x^*) = x^*$.

On remarque qu'il y a deux points fixes. Le premier point fixe est $x^* = 0$ et le deuxième $x^* = 0,64$. Le graphique suggère que le premier est instable et le deuxième stable.

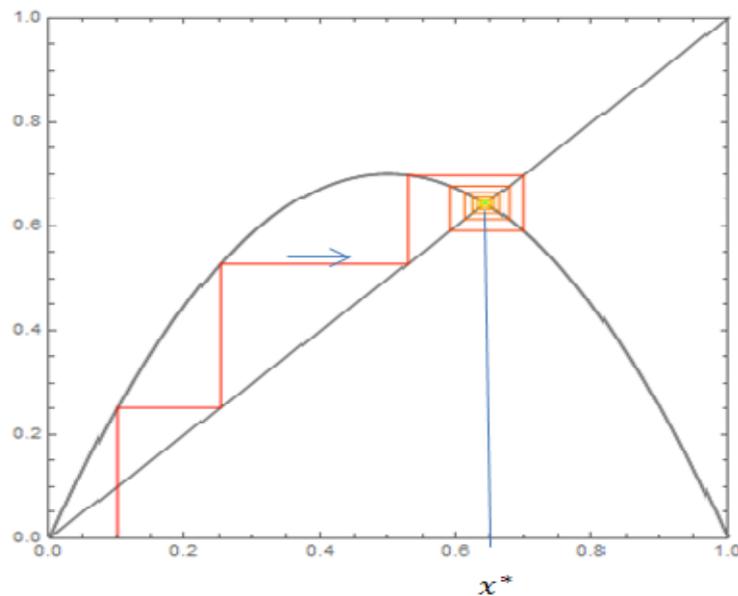


Figure II.1 : Illustration d'un cycle d'ordre 1 (un attracteur unique) [16].

Pour confirmer la stabilité du point fixe, nous allons présenter la méthodologie à suivre pour ce point fixe x^* quelconque. Pour x_n proche de x^* , un développement limité de la fonction f donne :

$$f(x_n) \approx f(x^*) + f'(x^*) \cdot (x_n - x^*) \quad (\text{II.3})$$

Puisque $f(x_n) = x_{n+1}$ et $f(x^*) = x^*$, on a l'égalité suivante :

$$f'(x^*) = \frac{x_{n+1} - x^*}{x_n - x^*} \quad (\text{II.4})$$

Deux cas se présentent alors :

- Si $|f'(x^*)| < 1$, alors le point x_{n+1} est plus proche de x^* , la suite revient vers x^* qui est stable (attractif).
- Si $|f'(x^*)| > 1$, alors le point fixe est instable (répulsif).

Dans notre cas où $f(x) \equiv r \cdot x \cdot (1 - x)$, on montre facilement que les deux points fixes de f sont $x^* = 0$ ou bien $x^* = 1 - 1/r$. La dérivée de f est la fonction

$f'(x) = r \cdot (1 - 2x)$. Sa valeur est égale à r pour le premier point fixe ; et à $2 - r$ pour le deuxième.

Pour $r = 2,8$, Comme application numérique les deux points fixes sont $x^* = 0$ et $x^* \approx 0,643$. La valeur absolue de la dérivée vaut $2,8 > 1$ pour le premier point fixe et $0,8 < 1$ pour le deuxième. On en déduit que le premier point fixe est instable et que le deuxième est stable [17].

II.4. Caractérisation des systèmes dynamiques discrets

Dans le cas général, un système dynamique discret est décrit par un système d'équations aux différences finies, qui génère une fonction de récurrence appliquée à chaque point du système [18].

L'application logistique (eq (II.1)) est un système de premier ordre, unidimensionnelle. Elle représente un système à boucle fermée avec une seule sortie

Nous appellerons orbite ou trajectoire de $f x_n$ la représentation X_{n+1} vs, X_n du système à la suite générée par l'itération du système, à partir d'une condition Initiale :

$$O_{x_0} = \{x_0, X_1, X_2, \dots\} \quad (\text{II.5})$$

Une manière très utile dans la visualisation de l'évolution d'un système dynamique en temps discret consiste à utiliser l'itération graphique.

L'itération graphique s'effectue en superposant deux courbes : la fonction sous étude ($y = f(x)$), et la diagonale de pente unitaire ($y = x$). Nous allons utiliser la diagonale pour retrouver le point obtenu sur l'axe des y , dans l'axe des x , afin d'exécuter graphiquement une itération de f , à partir d'une condition initiale x_0 (figure II.2).

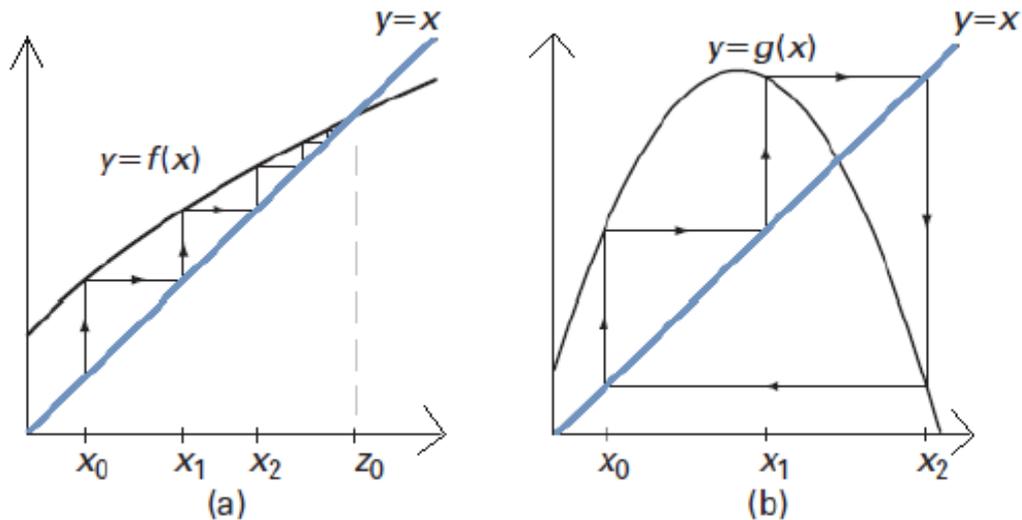


Figure II.2 : Itération graphique d'une trajectoire 1-D [18].

La figure II.2 illustre l'itération graphique de deux fonctions, f et g . La fonction $f(x)$ (II.2.a) converge au bout des itérations vers un point fixe, z_0 , tant que $g(x)$ continue les itérations autour d'une trajectoire fermée de façon indéfinie (II.2.b).

En appliquant les définitions des types d'attracteurs (étranges et réguliers), nous pouvons obtenir des relations utiles pour l'analyse des orbites :

a) point fixe :

La condition de point fixe est atteinte quand un point x_k vérifie :

$$f(x_k) = x_k$$

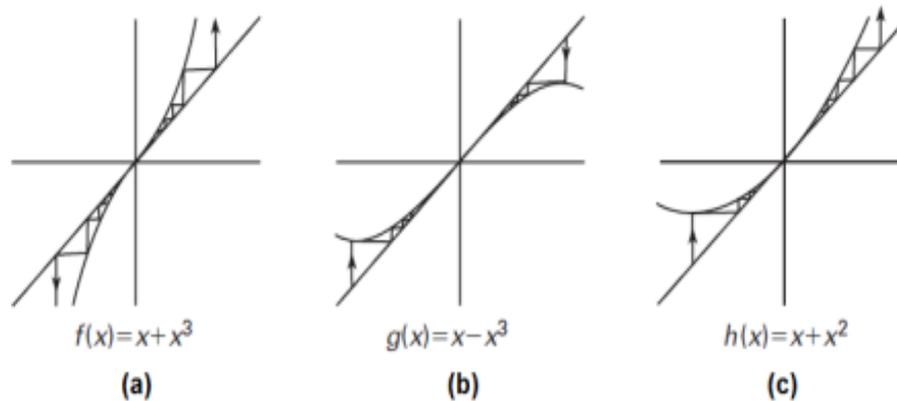


Figure II.3 : Types de point fixe [18].

Un critère d'identification de cette caractéristique consiste à analyser la première dérivée de la fonction autour du point fixe. Une illustration est proposée en Fig. II.3. Soit x_0 un point fixe de f , avec la fonction f soumise à un paramètre λ :

- Si $|f'(x_0)| > 1$, x_0 est un point répulsif, à partir de ce point il y a différents points adjacents divergents vers des valeurs différentes de ce point après un certain nombre d'itérations (2.3a).
- Si $|f'(x_0)| < 1$, x_0 est un point attracteur, les points adjacents convergent vers ce point après un nombre d'itérations (II.3b).
- Si $|f'(x_0)| \pm 1$, x_0 est un point invariant où nous ne pouvons rien indiquer en particulier concernant x_0 (II.3c).

b) Périodicité :

La condition de périodicité, (cycle d'ordre p) d'une orbite se vérifié quand elle revient vers la valeur de départ au bout de p itérations :

$$X_{(n+p)} = X_{(n)}, p > 0 \tag{II.6}$$

Les points périodiques vérifient :

$$f_{(x)}^p = \underbrace{f \left(f \left(f \left(\dots f(x) \right) \dots \right) \right)}_{p \text{ fois}} = x \tag{II.7}$$

$$X_{(n+kp)} = X_{(n)}, \quad \forall k \quad (\text{II.8})$$

II.4.1. Le phénomène de bifurcation

Le phénomène de bifurcation indique un changement significatif sur la dynamique d'un système, qui se produit lorsque ses paramètres changent. Donc en fonction du changement d'un paramètre, un système peut aller vers une caractéristique monotone, périodique ou chaotique. La valeur pour laquelle l'effet de bifurcation se produit est nommée point de bifurcation.

Il existe une bifurcation (un changement dans le nombre de points fixes) si f_λ possède un point fixe invariant, pour une valeur de λ donné. Si, par rapport aux voisinages de λ , il présente la transition d'un point attracteur vers un répulsif, le système présente un dédoublement de la période [18].

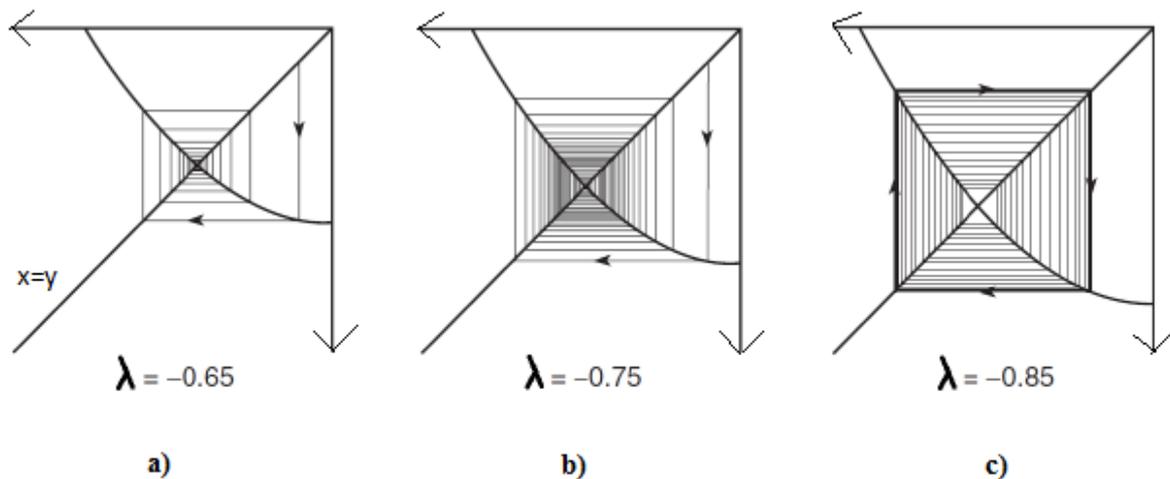


Figure II.4 : Exemple de dédoublement de la période [18].

La figure II.4 illustre un exemple de dédoublement de la période à l'aide des itérations graphiques sur une fonction. La fonction, ici sous étude, est tirée de la référence [18] :

$$f_{(x)\lambda} = x^2 + \lambda \quad (\text{II.9})$$

Possédant un point fixe x_0 sur $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1-4\lambda}}{2}$

En analysant $f'(x)_\lambda = 2x$, autour du point $\lambda_0 = -0,75$ sur une des solutions $x_0 = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1-4\lambda}}{2}$, nous obtenons $f'(x_0)_{\lambda_0} = -1$, indiquant que pour cette valeur de λ , il existe un point invariant. En analysant les voisinages, nous trouvons $\lambda > -0,75$ implique un comportement d'attracteur et $\lambda < -0,75$ un comportement de point répulsif. Le point $\lambda = -0,75$ correspond à la définition d'un point de bifurcation, avec dédoublement de la période dans la dynamique du système.

II.5. Diagramme de bifurcation

Le diagramme de bifurcation est un diagramme de relation fonctionnelle entre les points de l'état fixe du système et les paramètres de bifurcation. Les graphiques qui expliquent ces bifurcation sont logiquement appelées diagramme de bifurcation. Habituellement, un état variable est sélectionné et sa valeur limite est tracée sur la base d'un seul paramètre de bifurcation [19].

Le diagramme de bifurcations unidimensionnel est un tracé repérant la nature des différentes solutions du système et leur stabilité lorsqu'un paramètre varie. Il est composé d'intervalles sur lesquelles les solutions asymptotiques (ou les ensembles limites qui leur correspondent) Évoluent continument avec le paramètre et les intervalles sont séparés par les points de bifurcation. Le diagramme de bifurcation est un outil efficace pour Évaluer rapidement l'ensemble des solutions possibles d'un système en fonction des variations de l'un de ses paramètres. Il permet de repérer les valeurs particulières du paramètre qui induisent des bifurcations. C'est un diagramme qui porte les valeurs du paramètre en abscisse et des valeurs particulières d'une des variables d'Etat en ordonnée lorsque le régime asymptotique est atteint [20].

Le diagramme de bifurcation rend compte du comportement de l'application logistique en fonction du paramètre r . Sur ce diagramme, en abscisses, sont représentées les différentes valeurs du paramètre r et en ordonnées celles de f . Nous construisons le diagramme en repérant pour chaque valeur de r le ou les points de convergence de la suite $(x_n)_N$ définie par $x_0 \in [0; 1]$ et $X_{(n+1)} = f(x_n)$ [21].

Un diagramme de bifurcation consiste à représenter la densité de probabilité fonction du paramètre r . Pour obtenir ce diagramme on choisit les min et les max de r et le nombre d'intervalles de la densité de probabilité : en abscisses : le paramètre r , en ordonnées : la densité de probabilité. On trace un histogramme d'abord et on calcul la densité de probabilité pour obtenir une matrice qui affiche le diagramme de bifurcation

II.5.1. La densité de probabilité d'un signal [22]

La distribution de probabilité $P(x)$ traduit la répartition en amplitude du signal $x(t)$. $P(x)$ est la probabilité pour que $x(t)$ ait une amplitude donne x . C'est une distribution continue de la variable , elle aussi échantillonnée x_i .il est impossible d'obtenir la distribution exacte , mais seulement une approximation . Obtenue par un simple calcul d'histogramme.

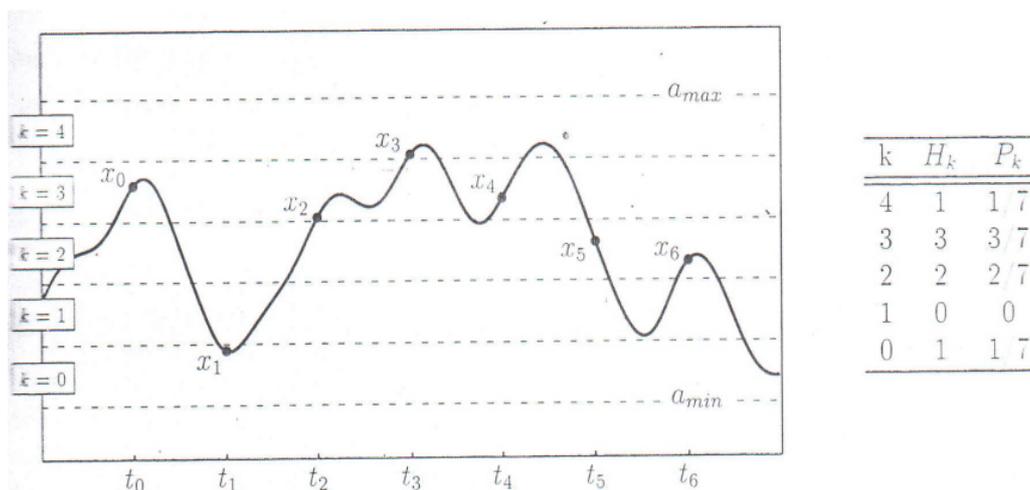


Figure II.5 : Principe du calcul de la distribution de probabilité [22].

Le principe, schématisé sur la Figure II.5, en est le suivant. On définit une plage d'amplitude délimitée par deux valeurs a_{min} et a_{max} en N_H segments. On établit un lien entre la valeur x_i et l'indice l_i du segment dans lequel elle est comprise, donné par la relation (II.10).

$$l_i = \text{ceil} \left[\frac{(N_H - 1)(x_i - a_{min})}{a_{max} - a_{min}} \right] \tag{II.10}$$

On calcule ensuite N_H valeurs H_k , où H_k est le nombre d'occurrences de k dans

L'ensemble des valeurs l_i , ce qui se traduit mathématiquement par la relation (II.11).

$$H_k = \sum_{i=0}^{N_E-1} \delta_{kl_i} \quad (\text{II.11})$$

Il suffit ensuite de, normaliser les valeurs H_k . Le résultat de ce calcul, donné par la relation (II.12), aboutit à un ensemble de N_H valeurs P_k dont la somme est 1.

$$P_k = \frac{H_k}{\sum_{m=0}^{N_H-1} H_m}, \quad k = 0 \dots N_H - 1 \quad (\text{II.12})$$

Cette distribution de probabilité approchée est d'autant plus proche de la distribution théorique que le nombre N_H de segments est important et que la durée Δt du signal x_i est longue.

II.6. Algorithme de traçage du diagramme de bifurcation

```

1  % suite logistique
2  %   Exemple de chaos classique. Valeurs des tracés semi-stables de
3  %   x(n+1) = r*x(n)*(1-x(n)) lorsque r augmente jusqu'à 4.
4  - clear
5  - scale = 10000; % détermine le niveau d'arrondi
6  - maxpoints = 200; % détermine les valeurs maximales à tracer
7  - N = 1000; % nombre de valeurs "r" à simuler
8  - a = 2; % valeur de départ de "r"
9  - b = 4; % valeur finale de "r"... tout ce qui est plus élevé diverge.
10 - rs = linspace(a,b,N); % vecteur de valeurs "r"
11 - M = 500; %nombre d'itérations de l'équation logistique
12 - % Parcourir les valeurs "r"
13 - for j = 1:length(rs)
14 -
15 -     r=rs(j); % obtenir le "r" actuel
16 -     x=zeros(M,1); % allouer de la mémoire
17 -     x(1) = 0.5; % condition initiale (peut être n'importe quoi de 0 à 1)
18 -
19 -     for i = 2:M, % répéter
20 -         x(i) = r*x(i-1)*(1-x(i-1));
21 -     end
22 -     % n'enregistrez que ces valeurs uniques et semi-stables
23 -     out{j} = unique(round(scale*x(end-maxpoints:end)));
24 - end
25 - % Réorganiser le tableau de cellules dans un grand vecteur n par 2 pour le traçage
26 - data = [];
27 - for k = 1:length(rs)
28 -     n = length(out{k});
29 -     data = [data; rs(k)*ones(n,1),out{k}];
30 - end

```

```

31 % Tracer les données
32 - figure(1)
33 - h=plot(data(:,1),2*data(:,2)/scale-1,'k. ');
34 - title('Digramme de bifurcation de la suite X(n)=logi[X(n-1)]');
35 - ylabel('densite de probabilite '),xlabel('paramètre r')
36 - set(h,'markersize',1)
37 - set(gcf,'color','white')
38

```

II.7. Résultats de simulation

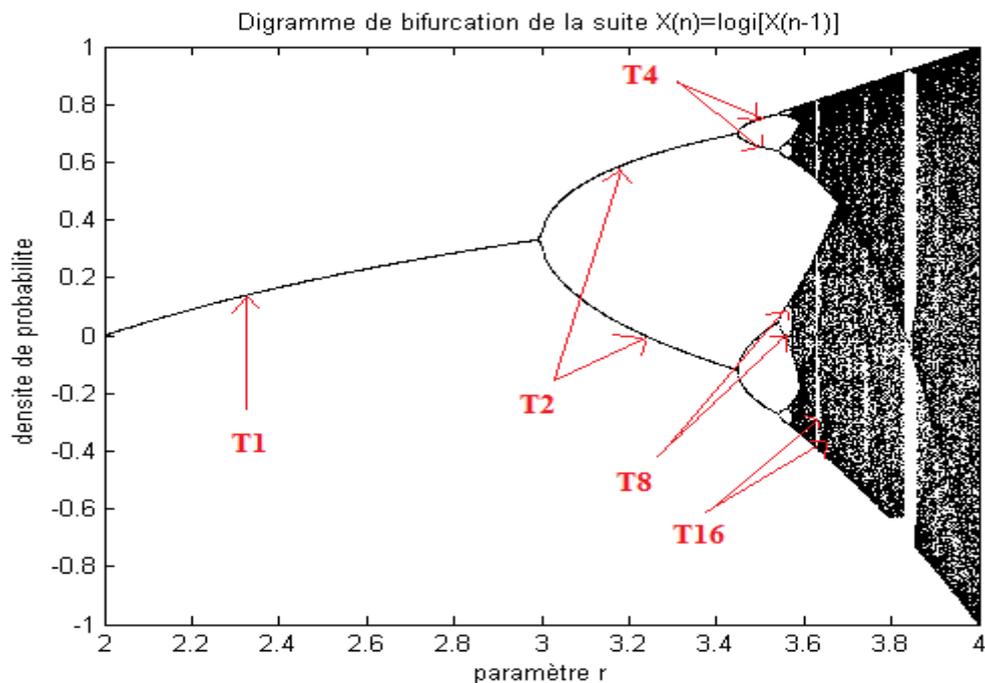


Figure II.6. : Résultat de simulation

On obtient La figure II.6 qui représente un diagramme bifurcation, qui décrit la transition de la suite logistique vers le chaos. Il s'agit dans ce cas d'une bifurcation par doublement de période.

Le scénario de transition vers le chaos est sans doute le plus connu par augmentation du paramètre de contrôle de l'expérience, la fréquence du régime périodique double, puis est multipliée par 4, par 8, par 16, 32... etc. Les doublements étant de plus en plus rapprochés, on tend vers un point d'accumulation auquel on obtiendrait hypothétiquement une fréquence infinie. C'est à ce moment que le système devient chaotique. Donc à partir de cette figure nous pouvons constater les caractéristiques suivantes :

- T1 pour $2 < r < 3$ le système a tendance à se stabiliser autour d'une seule valeur, il est attiré par un cycle limite de période 1.
- T2 pour $3 < r < 3,45$ environ, le système finit par osciller entre 2 valeurs, on dit qu'il possède un cycle de période double (dédoublement de période).
- T4 pour $3,45 < r < 3,57$ environ, il y a une période de quatre valeurs finales.
- T8 pour $3,57 < r < 3,65$ environ, il y a une période de huit valeurs finales.
- T16 pour $r > 3,65$, il y a une courte période de seize valeurs finales, jusqu'à environ 3,7 où commence une période de 32 valeurs.
- Les plages de valeurs associées à une périodicité sont de plus en plus courtes quand celle-ci croît. Cette suite de doublements est interrompue par le fait que pour $r = 3,9$, il y a une période de trois valeurs dans une sorte de « fenêtre ».
- Pour $r = 4$, l'état final est apériodique : il y a une infinité d'états distincts quel que soit le rang de l'itération d'observation considéré, chaque état n'étant atteint qu'une fois.

Le doublement des périodes successives par bifurcation ne se poursuit pas indéfiniment, il apparaît des fenêtres chaotiques. Dans une telle fenêtre, on trouve des valeurs où la période change brusquement, par exemple celle à 3,9 où la période est 3. Les plages de forte sensibilité aux conditions initiales contiennent des valeurs apériodiques. Chaque plage contenant une valeur chaotique contient aussi une fenêtre périodique.

D'où l'intérêt du traçage du diagramme de bifurcation qui par conséquent très intéressant pour visualiser l'ensemble de ces états.

II.8. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié une équation très simple, telle que l'application logistique, qui peut présenter des comportements non linéaires complexes. Nous avons tracé un diagramme de bifurcation dans le cas d'un système dynamique discret. Donc, à partir du diagramme de bifurcation que nous avons tracé, nous pouvons conclure que la certitude de la fonction permet de prédire son évolution, mais ne peut pas prédire de manière fiable sa valeur à long terme. Cette prédiction ne peut être réalisée qu'en effectuant les calculs de fréquence nécessaires, et elles peuvent être perturbées par la sensibilité aux conditions initiales.

Nous avons ainsi obtenu un diagramme à double période, il apparaît des fenêtres chaotiques. Dans une telle fenêtre, on trouve des valeurs où la période change brusquement, Chaque plage qui contient une valeur chaotique contient aussi une fenêtre périodique.

Par conséquent, le but du traçage de ce diagramme est primordial pour la visualisation de l'ensemble de ces états.

CHAPITRE III :
SYSTÈME DYNAMIQUE CONTINU

III.1. Introduction

Ce chapitre est dédié au traçage d'un diagramme de bifurcation dans cas d'un signal continu. Pour atteindre cet objectif nous avons choisi la génération d'un signal continu modélisé mathématiquement par une équation différentielle du 1^{er} ordre à retard (EDR), et réaliser expérimentalement par un générateur de chaos en longueur d'onde. Ce choix est motivé par la simplicité du modèle à étudier, et de la richesse des comportements dynamiques produits : point fixes, périodique, quasi périodique et chaotique. La route vers le chaos est fortement illustrée par ce type de générateur de chaos, qui s'appuie principalement sur une dynamique non –linéaire à retard.

III.2. Système chaotique

Un système est dit chaotique si son comportement est irrégulier, désordonné tout en étant déterministe. En particulier, on dira d'un système qu'il est chaotique (dans le temps) si son spectre de puissance comporte une partie continue, une bande large, indépendamment de la présence éventuelle de quelques raies [23].

III.3. Principes

Présentons pour commencer le principe de la génération de signal chaotique sans entrer dans des détails théoriques. Le système choisi ici est basé sur une structure générale très simple. Il est composé de 2 éléments fondamentaux : un élément non linéaire et un élément retardant, reliés par une boucle de contre-réaction, il s'agit donc d'un oscillateur non linéaire.

III.3.1. Oscillateur non linéaire

Nous présentons ici quelques principes généraux associés à la réalisation d'un oscillateur non linéaire schématisé sur la figure III.1.

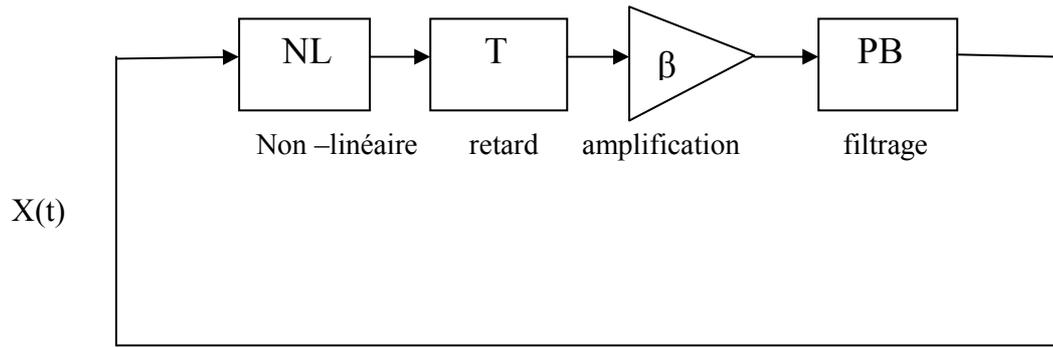


Figure III.1 : Schéma élémentaire du système générateur de chaos

Décrivons plus précisément cet oscillateur dont les éléments sont au nombre de quatre :

- **NL** : la fonction de transfert de l'élément non linéaire présente dans la boucle de contre-réaction. Elle sera présentée plus en détails dans la suite, mais on peut déjà noter qu'elle doit posséder au moins un extremum pour que le système génère un signal chaotique [22].
- **Retard T** : introduit dans la boucle est caractéristique de ce type de système et constitue avec l'élément non linéaire l'essentiel du générateur de signaux chaotiques
- **Gain β** : la boucle de contre-réaction comprend un élément amplificateur dont le gain appelé β .
- **PB** : comment dans tout système physique, le temps de réaction de l'oscillateur non linéaire n'est pas infiniment court. Cette constante de temps non nulle - appelée τ - est représentée sur la figure III.1 par un filtre passe-bas. En effet, ce type de filtre ne laisse passer que les basses fréquences et atténue les haute fréquences associées à des oscillations très rapides du signal généré dans la boucle.

Cet oscillateur non linéaire à contre-réaction retardée est modélisé par une équation différentielle à retard du premier ordre, exprimée par la relation (III.1), où x représente le signal généré par l'oscillateur et ϕ et un paramètre lié à l'élément non linéaire. Cette équation s'apparente à l'équation d'Ikeda [22].

$$x(t) + \tau \frac{dx(t)}{dt} = \beta NL[x(t - T) + \phi] \quad (\text{III.1})$$

Ce type de système générateur de chaos produit donc une multitude de comportements dynamique différents, bien périodique que chaotique.

Cependant, nous pouvons déjà présenter rapidement le rôle des différents paramètres du système. Le gain β est aussi appelé paramètre de bifurcation et permet comme le paramètre ϕ de modifier le comportement dynamique du système. On peut retenir que dans la plupart des cas, un régime chaotique correspond à un gain élevé. Le retard T joue un rôle dans les régimes périodiques dont la période est un multiple de T . Un régime chaotique la complexité du chaos est caractérisée par le rapport T/τ [22]. Bien que la littérature, il existe plusieurs types de générateurs de chaos, nous avons choisi, pour la mise en pratique de l'équation (III.1), le générateur de chaos en longueur d'onde [24].

III.3.2. Chaos en longueur d'onde [25]

Un système permettant de générer une fluctuation chaotique de la longueur d'onde a été réalisé au laboratoire d'optique P.M. Duffieux à la fin des années 1990. Le système mis au point est donné sur la figure III.2, il se compose de :

- D'une diode laser DBR accordable en longueur d'onde,
- D'une non-linéarité sinusoïdale en longueur d'onde réalisée au moyen d'un filtre biréfringent qui convertit des fluctuations de longueur d'onde en fluctuation d'intensité,
- D'une photo détectrice qui convertit ces fluctuations d'intensité en signal électrique,
- D'un système d'amplification de filtrage électronique de type passe-bas.

$$\tau \frac{d\lambda}{dt} = -\delta \lambda(t) + \beta \sin^2 [\delta \lambda(t - T) + \phi_0] \quad (\text{III.2})$$

$\delta \lambda(t)$: correspond aux fluctuations de longueur d'onde au cours du temps,

τ : est la constante de temps du système,

β : est le gain optoélectronique souvent choisi pour être le paramètre de bifurcation,

T : est le retard temporel dans la contre-réaction,

ϕ_0 : est une référence de phase dépendant de la longueur d'onde centrale et de la différence de chemin optique du filtre biréfringent.

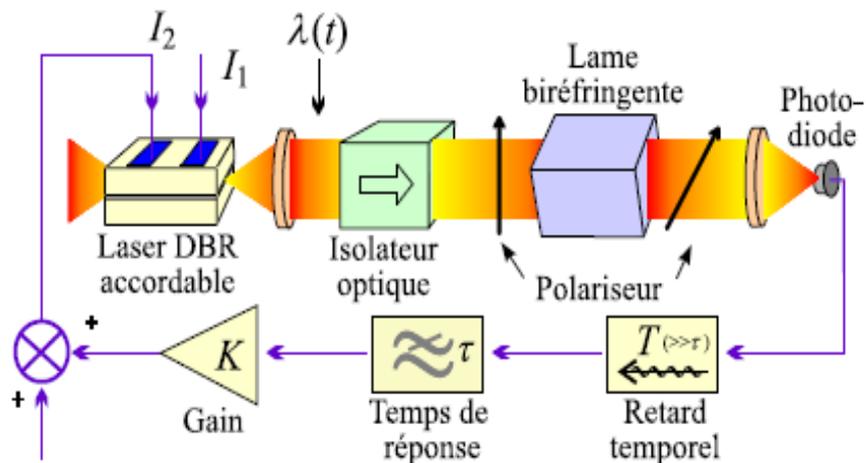


Figure III.2 : Schéma du générateur de chaos en longueur d'onde [26].

À partir de l'équation (III.2), on déduit aisément le terme non linéaire de l'équation (III.1). Celui-ci est donné par :

$$NL[x(t - T) + \phi] = \sin^2 [\delta\lambda(t - T) + \phi_0] \quad (\text{III.3})$$

La visualisation des signaux continus, donnés par l'EDR (III.2), nécessite la résolution numérique de cette équation. Dans la partie suivante, nous allons présenter certaines méthodes numériques de résolution des EDR.

III.4. Quelques méthodes de résolution des EDR

Dans cette partie, on s'intéresse plus particulièrement à l'étude des différentes méthodes d'intégrations numériques des équations différentielles. Celles-ci permettront d'accéder à la dynamique du dispositif considéré par des simulations numériques via le modèle mathématique utilisé, deux méthodes seront présentées : méthodes d'Euler et la méthode Runge kutta d'ordre 4 [26].

Les méthodes d'intégration numérique des équations différentielles peuvent être classées en deux types: les méthodes explicites et les méthodes implicites. Une méthode est dite explicite si la valeur X_{i+1} peut être calculée directement à l'aide des valeurs précédentes (ou

d'une partie d'entre elles). Une méthode est dite implicite si la valeur X_{i+1} n'est définie que par une relation implicite fonction de X_i

Généralement, la connaissance des conditions initiales est nécessaire pour rechercher la solution d'une équation différentielle ordinaire (ODE), c'est ce qu'on appelle communément le problème de Cauchy, ou encore tout simplement problème aux valeurs initiales. Il suffit de connaître $X(0)$ et $X'(0)$ pour trouver les solutions d'une ODE du second ordre par exemple.

Cependant, la présence du terme retardé d'une durée égale au retard temporel T dans les équations différentielles à retard (EDR), implique qu'une condition initiale particulière appartient à l'ensemble des valeurs définies sur l'intervalle de temps $[0;T]$. La taille de chacune de ces conditions initiales dans ce cas est infinie. En d'autres termes, la détermination de la solution exacte d'une EDR est liée à la connaissance d'un nombre infini de valeurs [27].

III.4.1. Méthode d'Euler

C'est la plus simple et traditionnellement la méthode la plus utilisée pour trouver une solution Approchée d'une équation différentielle. Mais d'abord considérons la forme générale (IV.4) de cette équation, qui sera également utilisée pour expliquer les autres méthodes de résolutions numériques.

$$\frac{dx}{dt}(t) = F(x, t) \quad (\text{III.4})$$

L'approximation numérique s'effectue par un développement de Taylor à l'ordre 1 du terme dérivée première de l'équation :

$$\frac{dx}{dt}(t) = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} = F(x, t) \quad (\text{III.5})$$

Où h est le pas d'échantillonnage de la méthode. En discrétisant la variable temporelle ($t = h \cdot i$; $i = 0, 1, 2, \dots$ entier), on obtient donc la relation de récurrence suivante :

$$X_{i+1} = X_i + h \cdot F(x_i, t_i) + 0(h^2) \quad (\text{III.6})$$

Les termes d'ordre 2 sont négligés, et donc la formule est d'ordre 1. À titre indicatif, le calcul de N premiers échantillons s'effectue de la manière suivante [27] :

$$\begin{aligned}x_1 &= x_0 + h \cdot F(x_0, t_0) \\x_2 &= x_1 + h \cdot F(x_1, t_1) \\&\dots = \dots \dots \dots \\x_N &= x_{N-1} + h \cdot F(x_{N-1}, t_{N-1})\end{aligned}\tag{III.7}$$

Cette méthode utilise un pas d'intégration constant, et converge très mal. L'erreur de rapprochement de la solution exacte est due principalement, en plus des erreurs de troncature inhérente à tous les calculs informatiques, à l'erreur d'intégration. Celle-ci est de l'ordre du pas d'échantillonnage au carré, et par conséquent h devra être pris suffisamment petit afin de la réduire. L'avantage majeur de cette méthode est sa rapidité d'exécution, car elle demande relativement peu d'opérations de calculs.

III.4.2. Méthode Runge Kutta d'ordre 4

L'algorithme de Runge-Kutta utilise plusieurs points intermédiaires pour calculer la valeur de X_{i+1} à partir de la valeur de X_i . Cette méthode est dite d'ordre 4 car elle est basée sur un développement de Taylor à l'ordre 4, suivie d'une moyenne pondérée sur toutes les estimations de ainsi réalisées. L'expression liant X_{i+1} et X_i est donnée par l'équation suivante [27] :

$$X_{i+1} = X_i + \frac{h}{6} \cdot (k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4) + 0(h^5)\tag{III.8}$$

Avec :

$$\begin{aligned}K_1 &= F(x_i, t_i) \\K_2 &= F\left(x_i + \frac{h}{2} \cdot k_1, t_i + \frac{h}{2}\right) \\K_3 &= F\left(x_i + \frac{h}{2} \cdot k_2, t_i + \frac{h}{2}\right) \\K_4 &= F(x_i + h, t_i + h)\end{aligned}\tag{III.9}$$

Cette méthode est à pas constant, très utilisée pour réaliser les intégrations numériques. Elle a le principal avantage d'avoir une précision en h^4 et converge rapidement. Néanmoins, elle

reste assez coûteuse en temps de calcul car, elle nécessite d'évaluer de manière itérative 4 fois la fonction F.

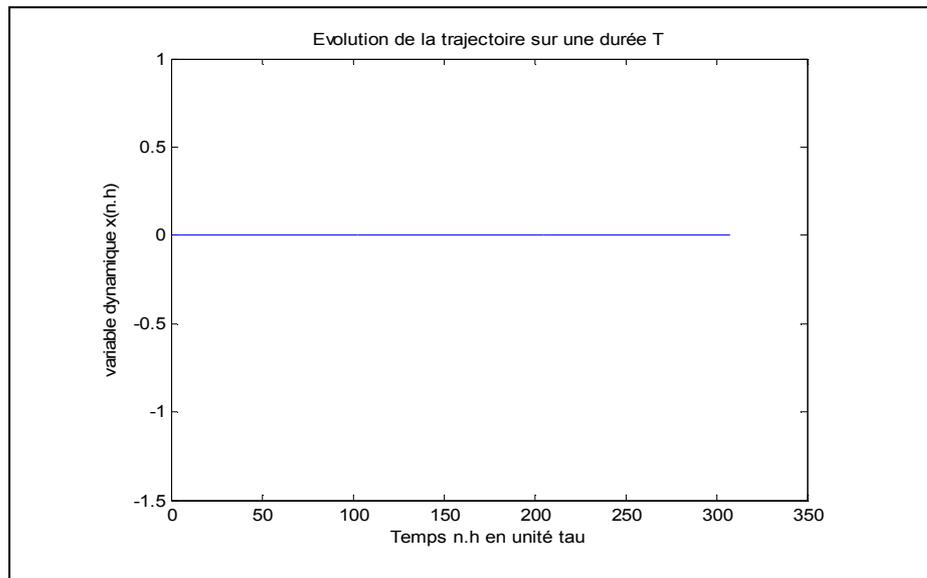
III.5. Résultats de simulation :

L'implémentation sous Matlab de l'EDR (III.2), en utilisant la méthode de résolution numérique Runge Kutta d'ordre 4, nous a permis d'obtenir une multitude de signaux, allant du point fixe jusqu'à l'évolution chaotique en fonction du paramètre de bifurcation β (le gain optoélectronique de la contre-réaction du système). Les paramètres de simulation utilisés sont choisis arbitrairement de la manière suivante :

Paramètre :	Symbole :	Valeur :
Constante de temps du système	τ	$\tau=1$ ns
Retard temporel	T	61.5τ
Pas d'échantillonnage	h	0.002τ
Gain optoélectronique	β	Variable
Phase de NL	ϕ_0	1.375 rad
Condition initiale	X_0	1.0

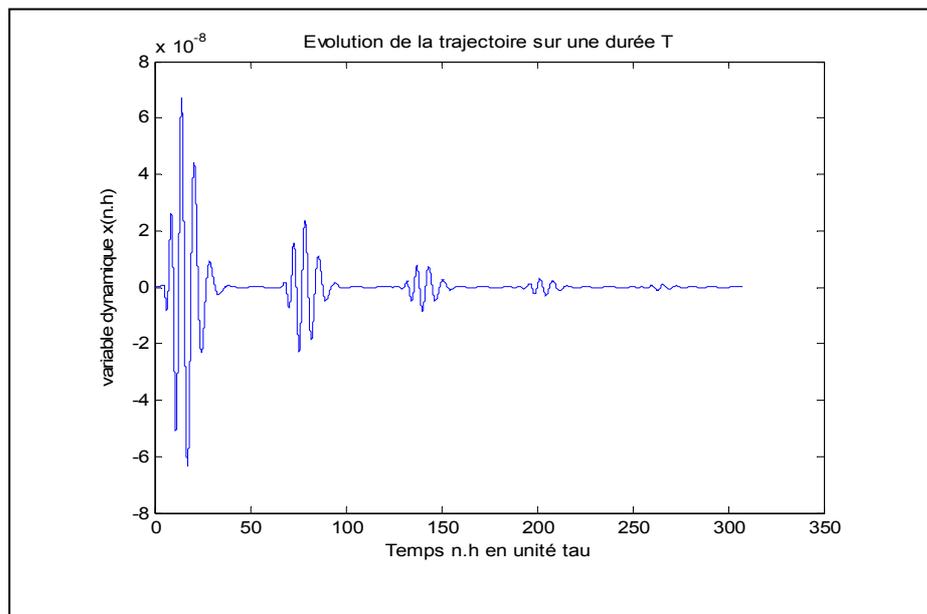
Les résultats obtenus en fonction du paramètre de bifurcation β sont :

➤ Pour $\beta=0.2$:



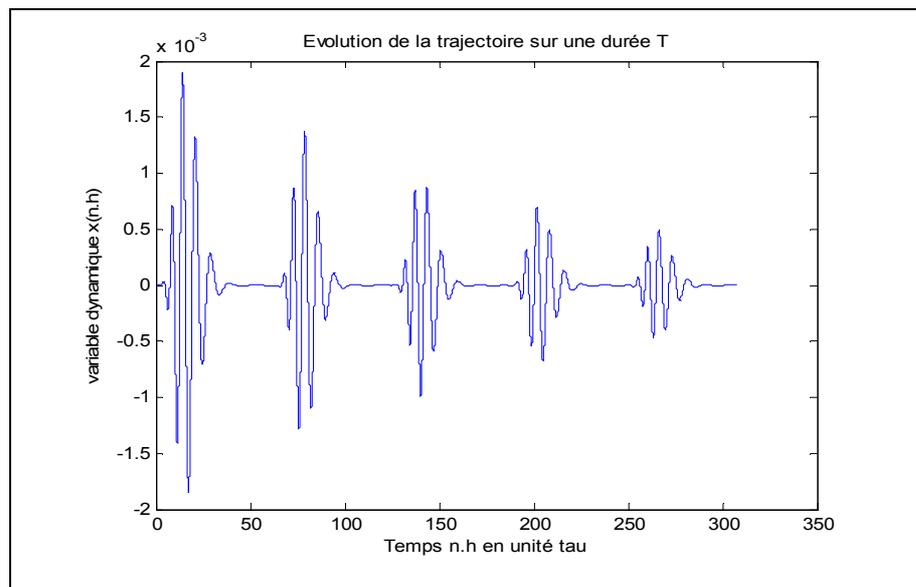
(a)

➤ Pour $\beta=1$:



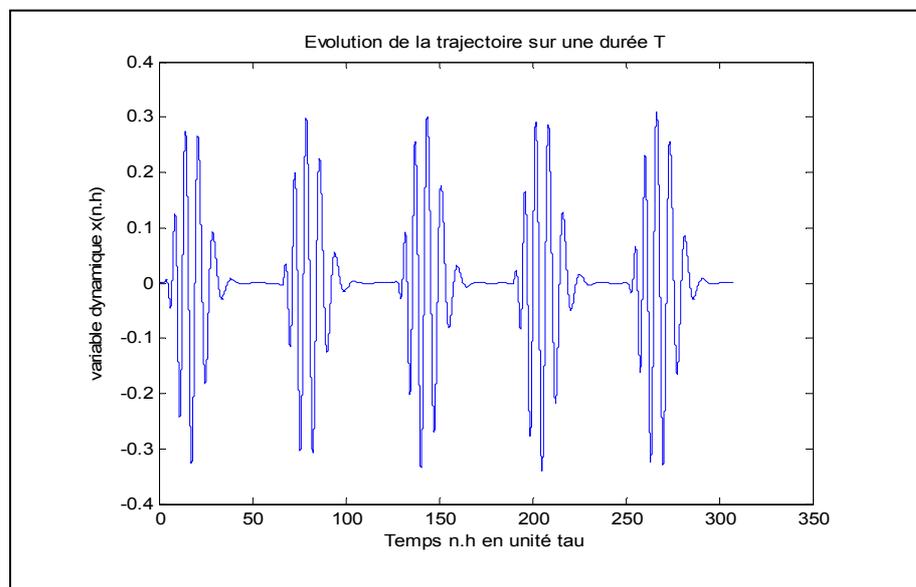
(b)

➤ Pour $\beta=2$:



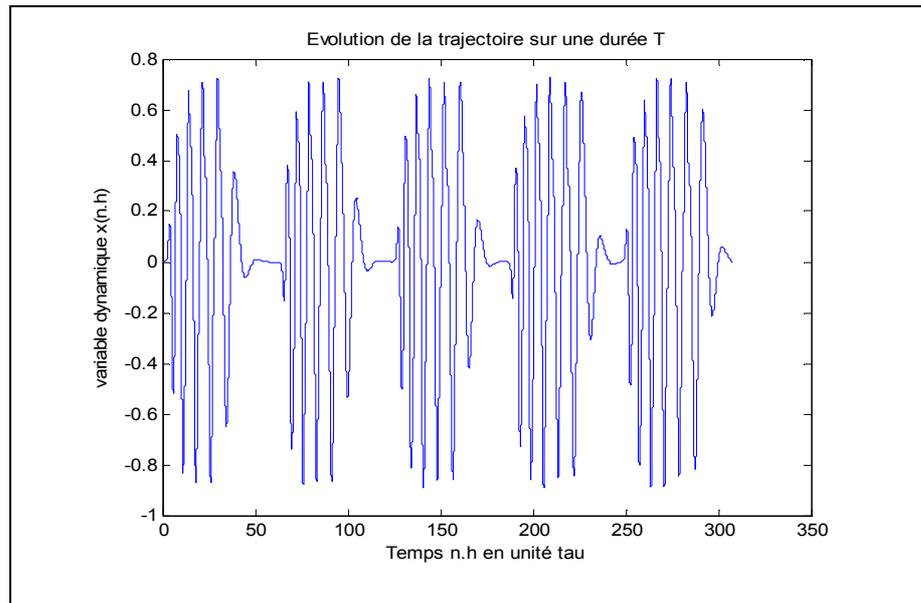
(c)

➤ Pour $\beta=3$:



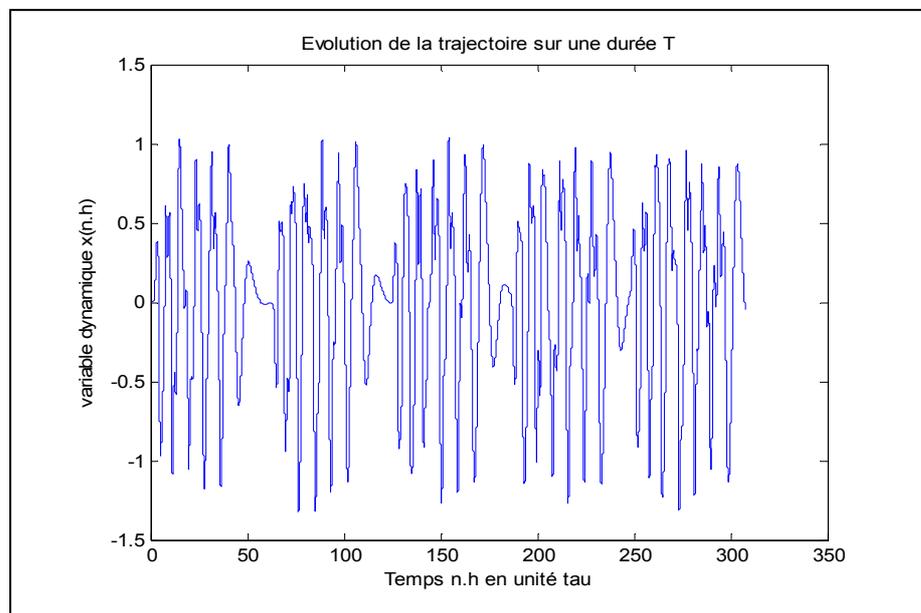
(d)

➤ Pour $\beta=4$:



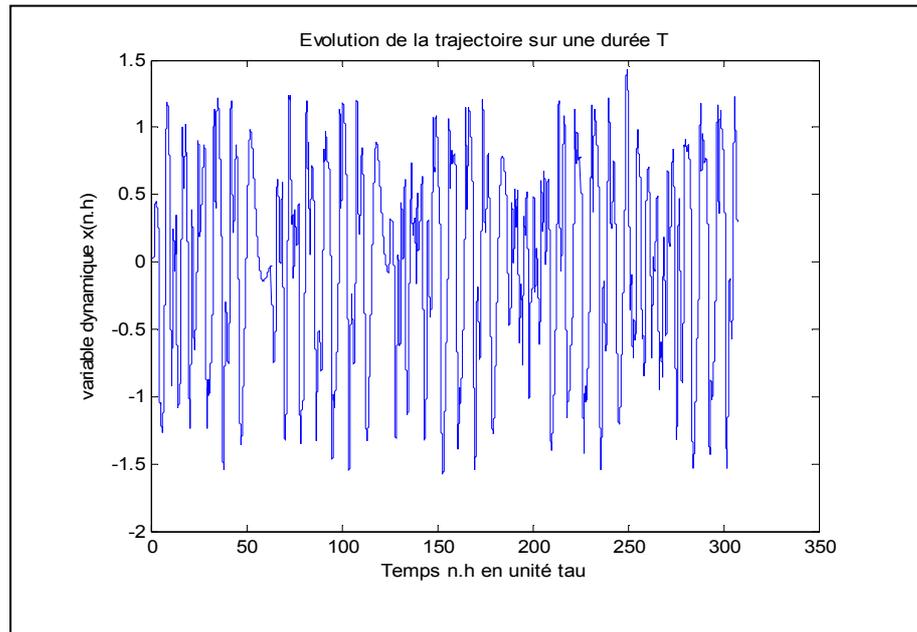
(e)

➤ Pour $\beta=5$:



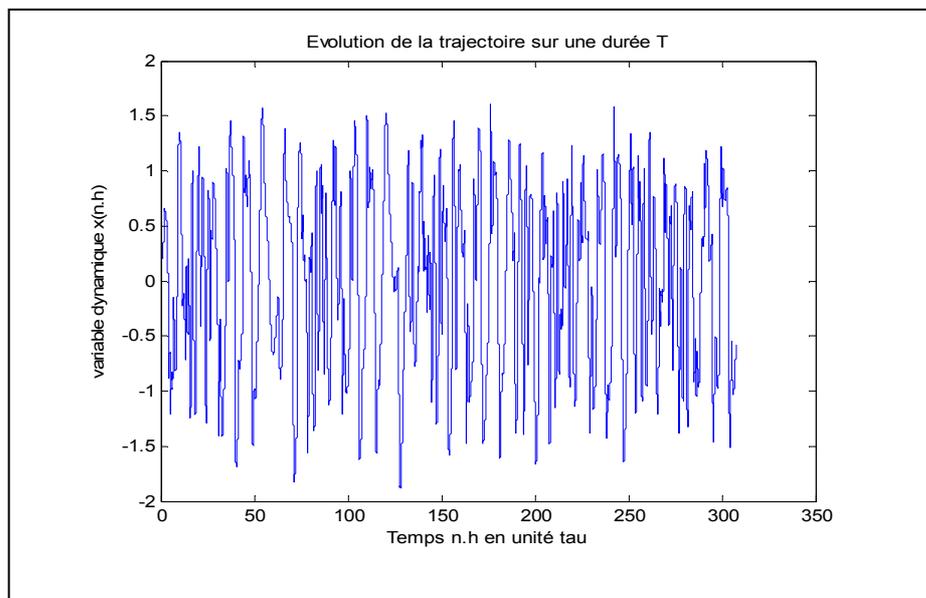
(f)

➤ Pour $\beta=6$:



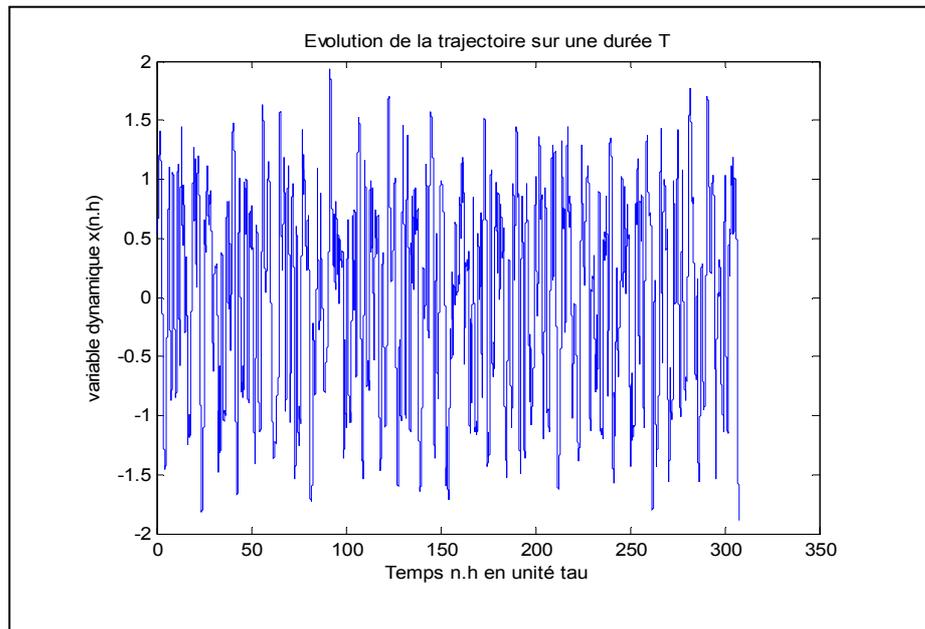
(g)

➤ Pour $\beta=7$:



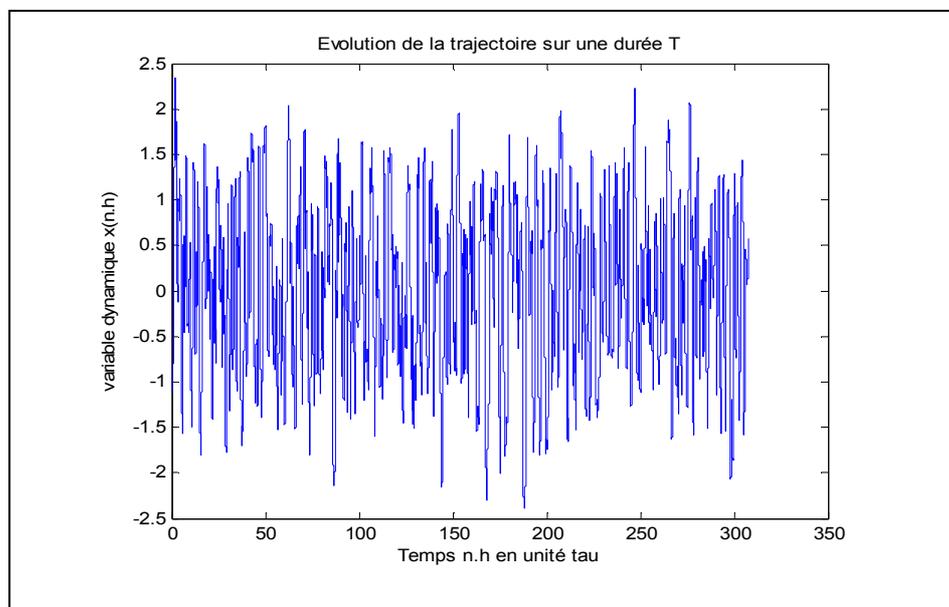
(h)

➤ Pour $\beta=8$:



(i)

➤ Pour $\beta=10$:



(j)

Figures III.3: Résultats de simulation en fonction du paramètres de bifurcation

D'après ces résultats de simulation, la dynamique générée dépend fortement du paramètre de bifurcation β . Autrement dit, plus ce paramètre est élevé, plus le signal continu produit devient complexe en ressemblant visuellement à un bruit. Le régime constant est obtenu pour un gain faible ($\beta = 0.2$), le régime périodique est observé pour un gain de l'ordre $\beta = 4$. Le quasi-périodique est nettement identifié d'après ces résultats pour l'ordre $\beta = 5$, et le pseudo-chaotique est représenté pour $\beta = 7$. Enfin, un régime chaotique est donné pour un gain relativement fort $\beta = 10$.

À partir de ces résultats de simulation, on constate qu'à chaque valeur du paramètre de bifurcation on obtient un signal continu différent en terme de forme, d'où l'intérêt du diagramme de bifurcation. Ce dernier permet de cartographier l'ensemble des signaux en fonction du paramètre de bifurcation β , allant du point fixe jusqu'au chaotique hypercomplexe. La construction du diagramme de bifurcation dans ce cas de signal continu n'est pas encore achevée dans le cadre de ce PFE, à cause principalement du court temps alloué à ce projet. Nous espérons que cette partie sera reprise dans de futurs travaux en guise de perspective.

III.6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit un type d'équation différentielle à retard, puis, nous avons donné un exemple concret de dynamique continue, c'est le générateur de chaos en longueur d'onde et son équation. Nous avons donné les méthodes numériques de caractérisation des dynamiques non linéaires à retard, parmi ces méthodes, nous avons utilisé la méthode de résolution numérique Runge Kutta d'ordre 4, ce qui nous a permis d'obtenir une multitude de signaux continus.

Conclusion générale

Ce PFE nous a permis de s'initier à la recherche dans le domaine des systèmes dynamiques, bien que discrets que continus. L'étude de l'application logistique nous a permis de voir, de comprendre et d'analyser l'ensemble des régimes dynamiques générés, allant du point fixe stable jusqu'aux régimes chaotiques hypercomplexes.

La recherche bibliographique sur les systèmes dynamiques non linéaires à retard nous a permis de découvrir le générateur de chaos en longueur d'onde. Ce dernier a été utilisé pour générer un signal continu, pour le traçage du diagramme de bifurcation. La programmation sous Matlab, avec la mise en pratique de la méthode de Runge Kutta d'ordre 4 pour la résolution des équations différentielles du 1^{er} ordre à retard de ce générateur de chaos, nous a permis de visualiser les séries temporelles constantes, périodiques, quasi-périodiques et chaotiques. Cependant, l'exploration de ces signaux continus sur un diagramme de bifurcation reste une tâche non achevée, à cause principalement de la contrainte du manque de temps consacré à ce PFE.

Nous espérons donc, que dans un futur proche, la suite de ce PFE sera reprise par la réalisation d'un diagramme de bifurcation pour le cas de système dynamique continu, et plus particulièrement sur des relevés expérimentaux de traces temporelles. L'exploitation pratique d'un diagramme de bifurcation sera d'autant intéressante que l'exploration d'un modèle mathématique numériquement, pour confirmer la concordance des résultats numériques et expérimentaux.

Bibliographie

- [1] F. Bouchakour, « La stabilité du système hyperchaotique le plus général de dimension quatre », Mémoire de Master, département de Mathématiques et Informatique, Université de Larbi Ben M'hidi, Oum El-Bouaghi, 2018.
- [2] R. Gavagsaz Choachani, « Comportement dynamique non linéaire dans les convertisseurs statiques : régulateurs de courant et stabilité des réseaux DC », Thèse de doctorat, département Génie électrique, Université de Lorraine, France, 2012.
- [3] M. Cherif, « Capacité d'une mémoire associative a fonction de sortie chaotique », Mémoire de Master, département d'Informatique, Université de Québec à Montréal, Canada, décembre 2010.
- [4] A. Hank, R. Rofia, « Systèmes chaotique pour la transmission sécurisée de données », Mémoire de Master, département d'Electronique, Université Mohammed Seddik Benyahia, Jijel, 2020.
- [5] N. Madjeralli, « La borne extrême et l'ensemble positivement invariant pour le système hyperchaotique de pan », Mémoire de Master, département de Mathématiques, Université Larbi Ben M'hidi, Oum El -Bouaghi, 2019.
- [6] Ch. Bouchelaghem, I. Zentout, « Nouveau schéma de communication sécurisée à base du chaos », Mémoire de Master, département de Mathématiques et Informatique, Universitaire Abd Elhafid Boussouf, Mila, 2020.
- [7] H. Filali, k. Chouchane, « Sur un algorithme pour le calcul des exposants de Lyapunov d'un système dynamique », Mémoire de Master, département de Mathématiques et Informatique, Universitaire Abd Elhafid Boussouf, Mila, 2020.
- [8] A. Berkane, « Transmission sécurisé a base de la synchronisation impulsive de deux systèmes chaotique discrets », Mémoire de Master, département d'électronique, Université Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou, 2016.

- [9] F. Zamime, M-A. Slimane Fissa, « Analyse et synchronisation des systèmes chaotique de type hyper jerk », Mémoire de Master, département d'électronique, Université Saad Dahlab, Blida, 2019.
- [10] A. Bessam, « Etude d'un système dynamique chaotique », Mémoire de Master, département de Mathématiques, université Mohamed Khider, Biskra.
- [11] FZ. Mesli, I. Benbarka, « Laser a semi conducteur dans les communications optiques sécurisées par chaos », Mémoire de Master, département de Télécommunication, Université Abou Bakr Belkaid, Tlemcen ,2015.
- [12] Ch. Benhabib, « Etude d'un Système Chaotique pour la Sécurisation des Communications Optiques », Mémoire de Master, Photonique et Réseaux Optiques de Télécommunications, Université de Tlemcen, Tlemcen, 2014.
- [13] H. Boulifane, « Étude des systèmes dynamiques à temps discrets », Mémoire de Master, département de Mathématiques et Informatique, Université Larbi Ben M'hidi, Oum El-Bouaghi, 2020.
- [14] R. May, « Simple mathematical models with very complicated dynamics », Nature, 261, pp.459-467, 1976.
- [15] Y.Schaepi, 2008, « itérations et fonctions chaotiques bifurcation diagrammes », article en ligne, <https://owl-ge.ch/travaux-d-eleves/2007-2008/article/bifurcations#top> , consulter, avril 2021.
- [16] J-R. Chazottes, M. Monticelli, 2013, « Itérations de l'application logistique », article en ligne, <http://experiences.math.cnrs.fr/Iterations-de-l-application.html>, consulter, septembre 2021.
- [17] O. Bonnefoy, « Systèmes Dynamiques et instabilités hydrodynamiques », Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, version 1.9, 8 avril 2021.
- [18] J-A. Aguilar Angulo, « Conception d'un générateur de valeurs aléatoires en technologie CMOS AMS 0.35 μ m », Thèse de Doctorat, Micro et nano technologies / Microélectronique, Université de Toulon, 2015.

- [19] M. Mammeri, « Sur les Applications Discrètes en Dimension N , $N > 1$ », Thèse de Doctorat, département de mathématiques, Université de Frères Mentouri, Constantine, Algérie, 2017.
- [20] KH .Lakhdari, « Analyse et contrôle de systèmes dynamiques chaotiques », Mémoire de Master, département de Mathématique, Université Mohamed KHider, Biskra, 2020.
- [21] A. Rechman, « Les bifurcations de l'application logistique », Septembre 2012.
- [22] J-B. Cuénot, « Système Optoélectronique de Communication Sécurise par Chaos en Longueur D'onde », Thèse de Doctorat, UFR des Sciences et Techniques, Université de Franche-Comté, France ,2002.
- [23] K. Ait Hocine, L. Aimeur, «Étude des systèmes chaotiques et leurs potentialités sur les systèmes de télécommunication », Mémoire de Master, Département d'Electronique, Université Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou, 2008.
- [24] L.Larger, J-P.Goedgebuer and F.Delorme, « Optical cryptosystem based on synchronization of hyperchaos generated by a delayed feedback tunable maser diode », Phys.Rev.Lett, 80(10), pp.2249-2252 (juin1998).
- [25] L. Larger, « Cryptage de signaux par chaos en longueur d'onde », Thèse de Doctorat, V.F.R des Sciences et Techniques de l'Université de Franche-Comté, 1997.
- [26] E. Genin, « Étude et Réalisation d'un Générateur de Chaos Optoélectronique sur la Phase Optique pour les Télécommunications Cryptées Haut-débit », Thèse de Doctorat, UFR des Sciences et Techniques, Université de Franche-Comté, France ,2003.
- [27] Ch. Benhabib, « Étude d'un Système Chaotique pour la Sécurisation des Communication Optique », Mémoire de Master, Photonique et Réseaux Optique de Télécommunication, Université de Tlemcen, Tlemcen, 2014.

Annexe I :

```
% suite logistique
%      Exemple de chaos classique. Valeurs des tracés semi-stables de
%       $x(n+1) = r*x(n)*(1-x(n))$  lorsque r augmente jusqu'à 4.
clear
scale = 10000; % détermine le niveau d'arrondi
maxpoints = 200; % détermine les valeurs maximales à tracer
N = 1000; % nombre de valeurs "r" à simuler
a = 2; % valeur de départ de "r"
b = 4; % valeur finale de "r"... tout ce qui est plus élevé diverge.
rs = linspace(a,b,N); % vecteur de valeurs "r"
M = 500; % nombre d'itérations de l'équation logistique
% Parcourir les valeurs "r"
for j = 1:length(rs)

    r=rs(j); % obtenir le "r" actuel
    x=zeros(M,1); % allouer de la mémoire
    x(1) = 0.5; % condition initiale (peut être n'importe quoi de 0 à 1)

    for i = 2:M, % répéter
        x(i) = r*x(i-1)*(1-x(i-1));
    end
    % n'enregistrez que ces valeurs uniques et semi-stables
    out{j} = unique(round(scale*x(end-maxpoints:end)));
end
% Réorganiser le tableau de cellules dans un grand vecteur n par 2 pour le
traçage
data = [];
for k = 1:length(rs)
    n = length(out{k});
    data = [data;  rs(k)*ones(n,1),out{k}];
end
% Tracer les données
figure(1)
h=plot(data(:,1),2*data(:,2)/scale-1,'k. ');
title('Digramme de bifurcation de la suite  $X(n)=\text{logi}[X(n-1)]$ ');
ylabel('densite de probabilite '),xlabel('paramètre r')
set(h,'markersize',1)
set(gcf,'color','white')
```

RÉSUMÉ

Lorsque un système dynamique génère une multitude de signaux (constants, périodiques, quasi-périodique, chaotiques) en fonction de l'un de ses paramètres, un diagramme de bifurcation peut résumer l'ensemble des ses évolutions dynamiques. Dans ce rapport de PFE, deux type de systèmes sont explorés, l'un est discret et l'autre est continu.

Mots-Clés : Système chaotique, Systèmes Dynamiques Discrets, Système Dynamique continu, Diagramme de bifurcation, Bifurcations, Suite logistique, Générateur de chaos.

ABSTRACT

When a dynamic system generates a multitude of signals (constant, periodic, quasi-periodic, chaotic) according to one of its parameters, a bifurcation diagram can take all of its dynamic evolutions. In this PFE report, two types of systems are explored, one is discrete and the other is continuous.

Keywords: Chaotic System, Discrete Dynamic Systems, Continuous Dynamic System, Bifurcation Diagram, Bifurcations, Logistic Suite , Chaos generator.

المخلص

عندما يولد نظام ديناميكي عددًا كبيرًا من الإشارات (ثابت ، دوري ، شبه دوري ، فوضوي) وفقًا لإحدى معالمته ، يمكن أن يأخذ مخطط التشعب كل تطوراته الديناميكية. في تقرير مشروع نهاية الدراسة هذا، تم استكشاف نوعين من الأنظمة، أحدهما منفصل والآخر مستمر.

الكلمات الرئيسية:

النظام الفوضوي ، الأنظمة الديناميكية المنفصلة ، النظام الديناميكي المستمر ، مخطط التشعب ، التشعب، الجناح اللوجستي ، مولد الفوضى.