

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la  
Recherche Scientifique



Université AMO de Bouira  
Faculté des Sciences et des Sciences Appliquées  
Département de Mathématiques



# Mémoire de Master

Filière : Mathématiques

*Spécialité : Recherche Opérationnelle*

## Thème

---

Conditions de comparabilité et approximation  
de la probabilité de ruine dans un modèle de  
risque classique

---

Présenté par :

— REZKALLAH MOHAND  
— GANA AMINE

Devant le jury :

Promotrice	<i>M<sup>me</sup></i> ALEM LALA MAGHNIA	MAA	U. A/M/O Bouira.
Président de jury	<i>M<sup>r</sup></i> BEDDEK SAID	MAA	U. A/M/O Bouira.
Examineur	<i>M<sup>r</sup></i> L'HADI BOUGHANI	MAA	U. A/M/O Bouira.
Examinatrice	<i>M<sup>me</sup></i> HOCINE SAFIA	MAA	U. Béjaia.

2019/2020

# *Remerciements*

Nous tenons à remercier toutes les personnes qui nous ont aidé lors de la rédaction de ce mémoire. nous voudrions dans un premier temps remercier, notre chère promotrice madame **ALEM LALA MAGHNIA**, docteur à l'université de bouira, pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter notre réflexion.

Nous exprimons notre grand respect aux honorables membres du jury monsieur **BEDDEK SAID** et monsieur **BOUGHANI L'HADI** et madame **HOCINE SAFIA** d'avoir accepté d'examiner notre travail.

Nous remercions également toute l'équipe pédagogique de l'université de bouira et les intervenants professionnels responsables de notre formation, et toutes les personnes qui par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques ont guidé nos réflexions et ont accepté de nous rencontrer et de répondre à nos questions durant nos recherches.

Nous tenons tout simplement à exprimer notre profonde gratitude à tous ceux qui nous ont soutenu de près ou de loin durant tout notre cursus.

# *Dédicaces*

## *Je dédie ce modeste travail*

*À mes cher parents* : aucune dédicace ne saurait exprimer mon respect, mon amour éternel et ma considération pour les sacrifices que vous avez consenti pour mon instruction et mon bien être. Je vous remercie pour tout le soutien et l'amour que vous me portez depuis mon enfance et j'espère que votre bénédiction m'accompagne toujours, que ce modeste travail soit l'exhaussement de vos vœux tant formulés, le fruit de vos innombrables sacrifices, bien que je ne vous en acquitterai jamais assez. Puisse Dieu, le Très Haut, vous accorder santé, bonheur et longue vie et faire en sorte que jamais je ne vous déçoive.

*À ma chère adorable et unique sœur "YASMINE".*

*À mon cher oncle "REZKALLAH BOUALEM" .*

*À toutes ma famille paternelle "REZKALLAH", et ma famille maternelle "MESBOUA".*

*À mon binôme "GANA AMINE" et sa famille .*

*À ma promotrice "Mme. ALEM", à "Mr. BOUGHANI" qui est non seulement mon meilleur enseignant mais aussi un ami, et à "Mr. BEDDEK" mon conseiller, qui m'a assisté dans les moments difficiles et m'a pris doucement par la main pour traverser ensemble des épreuves pénibles et qui est aussi un ami de la famille.*

*À notre secrétaire "Mme. SABRINA".*

*À nos deux enseignant décédés "Mr. YOUSFI" et "Mme. BESSAAD".*

*À mes très chers amis qui sont ma deuxième famille "TAIBI DJAHIDA", "BAAZIZ LEILA", et "MAYOUF ABDERAHMANE".*

*À TOUTES LES PERSONNES QUI ONT PARTICIPÉ A L'ÉLABORATION DE CE TRAVAIL, À TOUS CEUX QUE J'AI OMIS DE CITER.*

***REZKALLAH MOHAND.***

*Win yebγan yeqqar amek, win yugin yeqqar ulamek.*

# *Dédicaces*

## *Je dédie ce modeste travail*

*À la mémoire de mon père* décédé. J'espère que, du monde qui est sien maintenant, il apprécie cet humble geste comme preuve de reconnaissance de la part d'un fils qui a toujours prié pour le salut de son âme. Puisse Dieu, le tout puissant, l'accueillir en son vaste paradis.

*À ma très chère mère* qui a toujours été là pour moi, et qui m'a donnée un magnifique modèle de labeur et de persévérance.

*À mes frères , à ma grande soeur et à toutes ma famille.*

*À mon binôme "REZKALLAH MOHAND".*

*À mes très chers amis : "CHENANE ADEL, MAYOUF ABDE-RAHMANE, REZIG AMINE ET TAIBI DJAHIDA.*

***GANNA AMINE.***

# Table des matières

<b>Introduction Générale</b>	<b>7</b>
<b>1 Probabilité de ruine et modèles de risque</b>	<b>9</b>
<b>Introduction</b>	<b>9</b>
1.1 Notation de risque . . . . .	9
1.2 L'actuariat . . . . .	9
1.3 Risque en assurance . . . . .	10
1.4 Théorie de la ruine . . . . .	10
1.5 Modèles de risque . . . . .	10
1.5.1 Modèle individuel et collectif . . . . .	10
1.5.2 Modèle Cramèr Lundberg (modèle de risque classique)	12
1.5.3 Modèle de Sparre Andersen . . . . .	13
1.6 Probabilité de ruine . . . . .	13
1.6.1 Le coefficient de sécurité . . . . .	14
1.6.2 Exposant de Lundberg . . . . .	15
1.6.3 Bornes d'une probabilité de ruine . . . . .	15
1.7 Modèles de risque multi-branches . . . . .	16
1.8 Quelques méthodes d'approximation de la probabilité de ruine	18
1.8.1 Approximation de Cramér-Lundberg . . . . .	18
1.8.2 Formule de Pollaczec-Khinchin . . . . .	19
<b>Conclusion</b>	<b>20</b>
<b>2 Généralités sur la théorie des inégalités stochastiques</b>	<b>21</b>
<b>Introduction</b>	<b>21</b>
2.1 Propriétés générales des ordres partiels . . . . .	21
2.1.1 Ordre stochastique . . . . .	24

2.1.2	Ordre convexe . . . . .	25
2.1.3	Ordre en transformée de Laplace . . . . .	27
2.1.4	Ordre en fonctions génératrices . . . . .	29
2.1.5	Ordre du rapport de vraisemblance(Likelihood Ratio) . . . . .	29
2.1.6	Ordre super-modulaire . . . . .	29
2.1.7	Relations entre les ordres partiels . . . . .	30
2.1.8	Propriétés de monotonie . . . . .	30
2.2	Mesure et comparaison des risques . . . . .	33
2.2.1	Mesure de risque . . . . .	33
2.2.2	Mesure de risque cohérente . . . . .	33
2.2.3	Propriété d'invariance et de convexité . . . . .	33
2.2.4	Mesure de risque comonotone additive . . . . .	34
2.2.5	Quelques mesures de risque . . . . .	34
2.3	Comparaison des risques . . . . .	35
2.3.1	Ordre des risques actuariels . . . . .	35
	<b>Conclusion</b>	<b>37</b>
	<b>3 Inégalités stochastiques pour le modèle de risque</b>	<b>38</b>
	<b>Introduction</b>	<b>38</b>
3.1	Description du modèle . . . . .	38
3.1.1	Probabilité de ruine . . . . .	39
3.1.2	Temps de ruine . . . . .	39
3.2	Inégalités stochastiques pour le modèle de risque classique . . . . .	39
3.2.1	Inégalités préliminaires . . . . .	39
3.2.2	Conditions de comparabilité des modèles de risque classique . . . . .	43
	<b>Conclusion</b>	<b>43</b>
	<b>4 Approche par simulation</b>	<b>44</b>
	<b>Introduction</b>	<b>44</b>
4.1	Simulation de la probabilité de ruine . . . . .	44
4.2	Simulation des probabilités de ruine pour le processus Cramèr Lundberg : . . . . .	47
4.2.1	Sinistres obéissant à une loi exponentielles . . . . .	47
4.2.2	Sinistres obéissant à une loi Gamma . . . . .	48
4.2.3	Le mélange de deux lois Exponentielles . . . . .	50
	<b>Conclusion</b>	<b>51</b>

Conclusion générale	53
Bibliographie	55
Annexe	58

## Résumé

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à deux méthodes d'approximation de la probabilité de ruine dans un modèle de risque classique, à savoir : la méthode de comparaison stochastique et la simulation. Dans un premier temps, nous avons présenté quelques notions principales de la théorie de la ruine, nous nous sommes intéressés au modèle de risque classique, en particulier à la probabilité de ruine, pour laquelle nous avons défini quelques approximations et expressions exactes. En outre, nous avons donné un aperçu général sur les différents ordres stochastiques appliqués au risque en assurance. Par la suite, nous avons étudié quelques problèmes de comparabilité pour un modèle de risque classique, en utilisant la méthode de comparaison stochastique.

**Mots-clés :** Modèle de risque, Probabilité de ruine, Ordres stochastiques, Simulation.

## Abstract

In this work, we were interested in two methods of approximation of the probability of ruin in a classical risk model, namely : the stochastic comparison method and simulation. First, we presented some main notions of the theory of ruin, we were interested in the classical risk model, in particular in the probability of ruin, for which we defined some approximations and exact expressions. In addition, we gave a general overview of the different stochastic orders applied to risk in insurance. Subsequently, we studied some comparability problems for a classical risk model, using the stochastic comparison method.

**Keywords :** Risk model, Probability of ruin, Stochastic orders, Simulation.



# Liste des tableaux

4.1	Valeurs exactes et approximations de la probabilité de ruine. . .	45
4.2	La probabilité de ruine pour la loi exponentielle des paramètre $\frac{1}{\mu} = 6,3789.10^{-9}$ et avec un chargement de sécurité $\theta = 0,3$ . . .	48
4.3	La probabilité de ruine pour la loi Gamma de paramètres $\alpha = 0,9185, \beta = 6.1662.10^{-9}$ , et avec un chargement de sécurité relatif $\theta = 0,3$ . . . . .	49
4.4	Approximation de la probabilité de ruine avec des sinistres obéissant à un mélange de deux lois exponentielles de para- mètres $\beta_1 = 0,9, \beta_2 = 0.075088, a = 0,0584$ et avec un char- gement de sécurité $\theta = 0,3$ . . . . .	51
4.5	Les distributions membres de la classe $(a, b, 0)$ . . . . .	59

# Table des figures

1.1	Trajectoire du processus de risque en fonction du temps. . . .	13
1.2	Coefficient d'ajustement. . . . .	16
4.1	Graphe de la probabilité de ruine pour $c = 1, \lambda = 0.01$ et $\mu = 0.07$ . . . . .	46
4.2	Graphe de la probabilité de ruine pour $c = 1, \lambda = 0.5$ et $\mu = 0.5$ . . . . .	46
4.3	Programme de simulation de la probabilité de ruine dans le cas où les sinistres suivent une loi exponentielle. . . . .	47
4.4	Variation de la probabilité de ruine, avec des montants de réclamation de loi exponentielle, en fonction de la réserve initiale $u$ . . . . .	48
4.5	Programme de simulation de la probabilité de ruine dans le cas où les sinistres suivent une loi de Gamma. . . . .	49
4.6	Variation de la probabilité de ruine, avec des montants de réclamation de loi gamma, en fonction de la réserve initiale $u$ . . . . .	50
4.7	Programme de simulation de la probabilité de ruine dans le cas où les sinistres suivent un mélange de deux lois exponentielles. . . . .	51
4.8	Variation de la probabilité de ruine, avec des sinistres obéissant à un mélange de deux lois exponentielles, en fonction de la réserve initiale $u$ . . . . .	52

# Introduction Générale

Les sciences actuarielles sont une discipline relativement récente bien que les bases de l'assurance soient quant à elles très anciennes. Les principales théories en actuariat ont été développées en grande partie dans le dernier siècle. De plus, avec l'amélioration de l'informatique, entre autres, on remarque une progression rapide dans un grand nombre de domaines en actuariat. Un de ces domaines est la théorie de la ruine où la complexité mathématique est souvent un facteur limitant les chercheurs. Cependant, en utilisant des ordinateurs pour des approximations numériques ou encore des simulations, du progrès est encore fait continuellement dans ce domaine. Le moyen le plus simple d'obtenir une valeur approximative de la probabilité de ruine est d'utiliser la méthode Monte Carlo pour simuler le processus de risque à plusieurs fois rapidement, puis à compter la fréquence relative pendant laquelle le processus passe en dessous de zéro. Cette méthode est appelée Crude Monte Carlo (CMC), mais ce n'est pas non plus facile. Si la probabilité de ruine est très petite, un grand nombre de simulations est nécessaire, et cela peut prendre beaucoup de temps même avec des ordinateurs modernes. Il est alors crucial de pouvoir comparer ces modèles de risque à des modèles de caractéristiques bien connues. Pour cela, il est nécessaire de disposer d'outils de comparaison et, comme la comparaison se fait sur des systèmes aléatoires, la théorie adoptée est celle de la comparaison stochastique [10, 3].

La comparaison stochastique est un outil mathématique utilisé pour étudier les changements internes de la performance en raison de variations de paramètres, à comparer des modèles distincts, afin de se rapprocher d'un modèle complexe à un autre modèle simple, et pour obtenir des bornes supérieures et inférieures pour les principales mesures de risque. Les solutions apportées par ces méthodes consistent à construire des modèles bornants plus faciles à étudier, à partir de ces modèles bornants, on pourra générer des mesures de risque bornantes (supérieures et inférieures) de la mesure exacte.

L'objectif de notre travail est de faire une étude qualitative (en utilisant les méthodes de comparaison stochastique) pour un modèle de risque classique et d'estimer sa probabilité de ruine en utilisant l'approche par simulation.

Ce travail comprend quatre chapitres, une introduction générale, une conclusion générale et une bibliographie. Dans le premier chapitre nous présentons quelques notions de base sur les modèles de risque et de la théorie de la ruine, nous nous intéressons en particulier au modèle de Cramer- Lundberg (modèle classique).

Le deuxième chapitre est consacré à ce qu'il est d'usage d'appeler la méthode de comparaison stochastique. Nous nous sommes principalement basé sur des méthodes qui sont applicables aux risques (ordres actuariels).

Dans le troisième chapitre, nous obtenons les conditions de comparabilité dans un modèle de risque classique relativement à l'ordre likelihood ratio " $\leq_{lr}$ " et l'ordre stop-loss " $\leq_{sl}$ ".

Le dernier chapitre est consacré à la simulation de la probabilité de ruine en utilisant la méthode de Monte Carlo.

Enfin, dans la conclusion générale, nous synthétisons les principaux résultats de notre travail, et mentionnons les nombreux problèmes non résolus ou ceux que nous n'avons pas abordés mais qui constitueraient des perspectives de recherches intéressantes.

# Chapitre 1

## Probabilité de ruine et modèles de risque

### Introduction

En actuariat, nous utilisons la probabilité de surplus du portefeuille d'investissement d'une compagnie d'assurance comme une évaluation des risques. Dans un cas classique, il s'agit de la différence entre le total des primes reçues et le total des sinistres payés. Il devient négatif à un moment donné. À ce stade, on dit que le taux de cotisation de l'assuré a été mal calculé ou que le montant de la réclamation était trop élevé, ce qui conduit à la faillite (ruine).

La théorie de la ruine est un domaine des sciences actuarielles dont le but est de modéliser le surplus d'un portefeuille d'assurance par un processus stochastique.

### 1.1 Notation de risque

L'idée de "risque" qui est une norme abstraite au contenu mal défini occupe de plus en plus une place importante dans nos sociétés, en particulier dans les banques et les compagnies d'assurance [8].

### 1.2 L'actuariat

L'origine du mot actuariaire est latin (*actuarius*). Dans son acception moderne, le terme vient de l'anglais « *actuary* » ou il fait son apparition dès le 18<sup>ème</sup> siècle.

l'actuaire est un spécialiste en l'application de la statistique, notamment du calcul des probabilités aux opérations de finance et l'assurance [8].

## 1.3 Risque en assurance

En finance le risque est la déviation par rapport à un objectif. En assurance, on qualifie de risque la probabilité que le surplus d'un portefeuille d'une compagnie d'assurance devient négatif à un certain temps. A ce moment là, on dit que la ruine apparaît ou la compagnie est en état d'insolvabilité [8].

## 1.4 Théorie de la ruine

La théorie de la ruine appartient aux sciences de la gestion des risques et aux mathématiques appliquées à l'assurance [18]. Il s'agit de l'étude mathématique de modèles stochastiques et dynamiques adaptés aux réserves financières d'une compagnie d'assurances. Elle a pour objectif de définir un cadre permettant la bonne gestion :

- La compagnie doit être solvable à tout instant (la réserve ne doit pas tomber en dessous de 0).
- La tarification doit permettre à l'assureur d'engager des bénéficiaires.

La gestion comptable est rendue difficile, la compagnie reçoit les primes avant de verser les prestations (le provisionnement). Cela nécessite une évaluation des risques dans un univers aléatoire, L'analyse statistique permet de calibrer :

- Une loi pour les montants des sinistres.
- Une loi pour le nombre de sinistres.

## 1.5 Modèles de risque

### 1.5.1 Modèle individuel et collectif

Pour représenter et quantifier le montant cumulé de tous les sinistres à payer sur une période donnée, l'actuaire peut utiliser le modèle individuel ou collectif. L'avantage du modèle individuel est qu'il tient compte de l'hétérogénéité du portefeuille.

En effet, si tous les contrats ont les mêmes caractéristiques, alors le modèle individuel correspond exactement au modèle collectif, et fait intervenir les distributions composées [4].

## Modèle individuel

Soit  $n$  le nombre d'assurés, aussi appelé l'effectif du portefeuille d'assurance. Soit la variable aléatoire de Bernoulli  $I_i$  qui vaut 1 si au moins un sinistre a touché le  $i^{\text{ème}}$  assuré et vaut 0 sinon. La variable aléatoire  $Z_i$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$  représente le montant total de ces éventuels sinistres. La charge sinistre totale  $S$  sur la période considérée est alors donnée par la formule :

$$S^{ind} = \sum_{i=1}^n I_i Z_i. \quad (1.1)$$

En pratique, il est très difficile de mener les calculs dès que le nombre d'assurés est élevé, même sous des hypothèses restrictives. Le plus souvent, on supposera que les  $I_i$  sont indépendantes et identiquement distribuées, avec  $P(I_i = 1) = p$ ,  $\{Z_i\}$  est une séquence de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, et indépendantes des  $I_i$ . Dans ce cas, la fonction de répartition de  $S$  est donnée par la formule classique des convolutions

$$F_S(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k P^k (1-P)^{n-k} F_Z^{*k}(x), \quad (1.2)$$

où  $F_Z^{*k}$  est la fonction de répartition de  $Z_1 + \dots + Z_k$  et vérifie la relation de récurrence .

$$F_Z^{*k+1} = \int_0^x F_Z^{*k}(x-y) f_z(y) dy. \quad (1.3)$$

## Modèle collectif

Le modèle collectif consiste à approcher le modèle individuel non pas en regardant si chaque assuré fait défaut ou pas, mais en comptabilisant un nombre aléatoire de montants de sinistres indépendants et identiquement distribués. On définit ainsi la charge sinistre totale sur une période  $T$  dans le modèle collectif par la variable aléatoire positive suivante :

$$S^{coll} = \sum_{i=1}^N Z_i. \quad (1.4)$$

Où  $N$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$  représentant le nombre de sinistres sur la période  $T$ , et pour  $i \geq 1$ ,  $Z_i$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{R}^+$  représentant le coût du  $i^{\text{ème}}$  sinistre, avec la convention selon laquelle la somme est nulle si  $N = 0$ . Les variables aléatoires  $(Z_i)_{i \geq 1}$  sont supposées indépendantes et identiquement distribuées, et indépendantes de  $N$ . Une description plus détaillée du modèle est présentée dans [18, 34, 29].

## 1.5.2 Modèle Cramèr Lundberg (modèle de risque classique)

Le modèle de risque de Cramèr-Lundberg ou le modèle de risque classique, qui est désigné aussi sous le nom du modèle de risque de Poisson composé représente l'évolution des réserves d'une compagnie d'assurance par un processus Poisson-composé avec dérive, on note  $\{R(t), t \geq 0\}$  le processus qui modélise les réserves, avec :

$$R(t) = u + ct - Z(t) \quad t \geq 0, \quad (1.5)$$

où  $Z(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i(t)$  est le montant cumulé des réclamations à l'instant  $t$ , Le processus de risque associé est de la forme

$$S(t) = -ct + Z(t). \quad (1.6)$$

Les hypothèses selon lesquelles le modèle est construit sont :

- $u > 0$ , est la réserve initiale de la compagnie.
- $c > 0$ , est le taux de prime ou le taux de cotisation.
- $N(t)$ , Le processus de comptage (processus de Poisson d'intensité  $\lambda$ ) du nombre de réclamations.
- $\{X_i, \in N^*\}$ , est suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d) représentant les montants des réclamations, Elle est indépendante du processus de Poisson ( $N(t)$ ), de fonction de répartition  $F_x$ , de moyenne finie  $\mu$ .

### Cas particulier : Modèle de Lundberg ou P/P

Le modèle de Lundberg est un cas particulier du modèle de risque classique, qui est appelé aussi le modèle P/P [25]. Il se caractérise par la distribution exponentielle des montants des réclamations, c'est-à-dire :

$$F_X(z) = 1 - e^{-\mu z} \quad , \quad z \geq 0.$$

où  $F_X$  est la fonction de répartition de la variable aléatoire  $X$  qui génère le montant des réclamations.



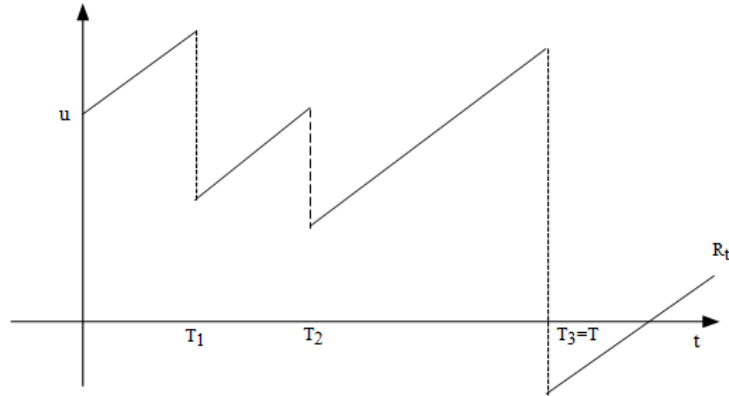


FIGURE 1.1 – Trajectoire du processus de risque en fonction du temps.

### 1.5.3 Modèle de Sparre Andersen

Sparre Andersen (1957), dans un article présenté au Congrès international des actuaires à New York [12], a proposé une première généralisation du modèle classique du risque. En effet, au lieu de supposer que les temps entre deux réclamations successives sont des variables aléatoires indépendantes et suivent une même loi exponentielle, il a conservé l'hypothèse d'indépendance tout en permettant que le temps entre les réclamations ait une distribution autre qu'exponentielle. Ce modèle implique des calculs généralement plus compliqués que dans le cas du modèle de Poisson composé, mais celui-ci apparaît déjà plus général pour la modélisation de produits d'assurance .

## 1.6 Probabilité de ruine

**Définition 1.6.1.** ( Probabilité de ruine [20, 28] )

Soit le processus de risque de Cramér-Lundberg défini comme suit :

$$R(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i(t).$$

La probabilité de ruine pour le modèle de risque noté  $\Psi(u)$  avec  $R(0) = u$ , est :

$$\Psi(u) = P(R(t) < 0 ; R(0) = u).$$

**Définition 1.6.2.** ( Le temps de ruine )

Soit  $\tau$  la variable aléatoire du moment de la ruine [25] :

$$\tau(u) = \inf\{t \geq 0 : R(t) < 0 / R(0) = u\} = \inf\{t \geq 0 : S(t) > u\}. \quad (1.7)$$

$\tau(u)$ , représente l'instant où le processus de réserve devient négatif, sachant que la réserve initiale est  $u$ . Autrement dit,  $\tau(u)$  est l'instant de ruine du portefeuille d'assurance.

**Définition 1.6.3.** ( Probabilité de ruine à horizon infini [9, 26] )

La Probabilité de ruine sur un horizon infini est donnée par :

$$\Psi(u) = P(t < \infty / R(t) < 0 / R(0) = u) = P(\tau(u) \leq \infty). \quad (1.8)$$

**Définition 1.6.4.** ( Probabilité de ruine à horizon fini [9, 26] )

La Probabilité de ruine sur un horizon fini  $T$  est donnée par :

$$\Psi(u, T) = P(\exists t \in [0, T] / R(t) > 0 / R(0) = u) = P(\tau(u) \leq T). \quad (1.9)$$

La relation entre ces deux probabilités de ruine est donnée par [19] :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \Psi(u, T) = \Psi(u).$$

**Définition 1.6.5.** ( Probabilité de survie (non ruine) [9] )

$$\varphi(u) = 1 - \Psi(u), \quad (1.10)$$

et

$$\varphi(u, T) = 1 - \Psi(u, T). \quad (1.11)$$

### 1.6.1 Le coefficient de sécurité

Soit le processus défini par :

$$Z(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i(t),$$

comme par indépendance des processus [9] :

$$E[Z(t)] = E[X_i(t)] E[N(t)] = \lambda \mu t,$$

et donc :

$$E[R(t)] = u + (c - \lambda\mu)t.$$

Nous définissons le coefficient (chargement) de sécurité, la quantité définie par [26] :

$$\theta = c - \lambda\mu.$$

### Propriété du coefficient de sécurité :

- si  $\theta > 0$  alors, presque sûrement,  $\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = +\infty$  et que  $\Psi(u) < 1$ , dans ce cas l'activité est donc rentable .
- si  $\theta \leq 0$  alors  $\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = -\infty$  et par conséquent  $\Psi(u) = 1$ , dans ce cas l'activité n'est pas rentable.

## 1.6.2 Exposant de Lundberg

Le coefficient d'ajustement appelé aussi l'exposant de Lundberg joue un rôle important dans le calcul de la probabilité de ruine [7, 23, 27].

Soit :  $\eta = \sup_t \{M_{X_i}(t)\} < \infty$ .

On considère des sinistres  $X_i$  dont la loi est du type de Cramér,

$$\exists t > 0, \text{ tel que } M_{X_i}(t) = E(e^{tX_i}) < \infty,$$

et soit  $R$  l'unique solution strictement positive de l'équation :

$$\lambda M_{X_i}(R) = \lambda + cR, \quad R < \eta,$$

avec  $R$  est le coefficient d'ajustement appelé aussi exposant de Lundberg.

## 1.6.3 Bornes d'une probabilité de ruine

L'inégalité de Lundberg garantit que quel que soit le capital de départ  $u$ , la probabilité de ruine  $\Psi(u)$  est bornée supérieurement par une fonction décroissante exponentiellement avec le capital de départ lorsque la loi des sinistres est de Cramér.

### Théoreme 1.6.1. [27]

Pour un processus de risque de distribution de Poisson composée avec un capital initial  $u$ , une prime par unité de temps  $c$ , des sinistres avec fonction de distribution  $F(y)$ , et une fonction génératrice des moments  $M_x(R)$ , et un coefficient d'ajustement  $R$ , nous avons l'inégalité suivante pour la probabilité de ruine :

$$\Psi(u) \leq e^{-Ru}.$$

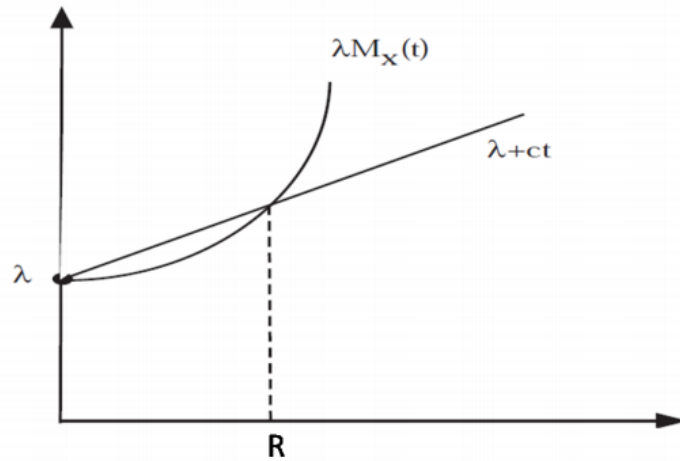


FIGURE 1.2 – Coefficient d'ajustement.

## 1.7 Modèles de risque multi-branches

Si la compagnie d'assurance possède plusieurs types d'activités, que nous appelons branches (en anglais dans les articles " lines of business "), l'évolution conjointe des branches est décrite par l'arrivée déterministe du vecteur des primes et par le vecteur des montants globaux des sinistres de chaque branche qui est équivalente à la sommation algébriques de toutes les richesses. Ces branches peuvent représenter des filiales différentes, des secteurs d'activité différents (assurance santé, habitation, automobile, responsabilité civile...etc), ou encore des activités différentes ou identiques, dans différents continents, pays ou régions.

Récemment, des modèles de risque multidimensionnels ont été introduits et étudiés dans la littérature [39]. Les modèles tels qu'ils sont présentés dans Sundt (1999) [6], sont composés de  $p$  branches d'activité donc  $p$  sous réserves. Le nombre d'événements de réclamation jusqu'au temps  $t$  est modélisé généralement par un processus de Poisson  $\{N(t), t \geq 0\}$ , sachant qu'un seul événement peut produire jusqu' à  $p$  types de réclamations.

Notons pour tout  $j = 1, \dots, p$  :

$u_j$  : la réserve initiale de la  $j^{\text{ème}}$  branche,

$c_j$  : le taux de prime constant de la  $j^{\text{ème}}$  branche,

$Z_j^i$  le montant de la réclamation de type  $j$  produite par le  $i^{\text{ème}}$  événement,

le modèle de risque multi-branches est alors décrit par le processus suivant :

$$R(t) = \begin{pmatrix} R_1(t) \\ R_2(t) \\ \vdots \\ R_p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + c_1 t + \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i^1 \\ u_2 + c_2 t + \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i^2 \\ \vdots \\ u_p + c_p t + \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i^p \end{pmatrix}, \quad t \geq 0. \quad (1.12)$$

$(N(t), t \geq 0)$  est un processus de Poisson de paramètre  $\lambda$  et  $\{(Z_i^1, \dots, Z_i^p), i \geq 1\}$  est une séquence de vecteurs aléatoires non négatifs, indépendants et identiquement distribués et aussi indépendante de  $\{N(t), t \geq 0\}$ . Soit :

$$\theta_i = \frac{c_j}{\lambda E(Z_i^j)} - 1 > 0 \quad \text{pour tout } 1 \leq j \leq p.$$

Notons par :

$$\bar{S}^j(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Z_i^j - c_j t, \quad t \geq 0 \quad j = 1, \dots, p.$$

Les mesures de risque définies précédemment possèdent plusieurs propositions d'extension dans les modèles de risque multidimensionnels. Elles sont définies soit par rapport à la richesse globale de la compagnie ou par rapport à quelques branches spécifiques suivant le critère choisi par le décideur dans la compagnie d'assurance [41].

Puisqu'on s'intéresse à l'évaluation des probabilités de ruine, nous allons présenter quelques définitions les plus étudiées dans la littérature :

- La probabilité qu' à un instant  $t$ , le montant total des réclamations de toutes les branches du modèle est supérieure à la réserve initiale totale :

$$\Psi_{som}(u) = \mathbb{P} \left( \sup_{0 \leq t \leq \infty} \left\{ \sum_{j=1}^p \bar{S}^j(t) \right\} > u \right), \quad (1.13)$$

où,  $u = \sum_{j=1}^p u_j$ .

- La probabilité que la ruine apparaît au moins dans une branche d'activité de la compagnie d'assurance :

$$\Psi_{min}(u_1, \dots, u_p) = \mathbb{P} \left( \bigcup_{j=1}^p \left\{ \sup_{0 \leq t \leq \infty} (\bar{S}^j(t)) > u_j \right\} \right), \quad (1.14)$$

- La probabilité que la ruine apparaît dans toutes les branches, pas nécessairement en même temps :

$$\Psi_{max}(u_1, \dots, u_p) = \mathbb{P} \left( \bigcap_{j=1}^p \left\{ \sup_{0 \leq t \leq \infty} (\bar{S}^j(t)) > u_j \right\} \right). \quad (1.15)$$

## 1.8 Quelques méthodes d'approximation de la probabilité de ruine

Les solutions proposées pour estimer la probabilité de ruine sont basées sur les théorèmes limites des marches aléatoires [21, 22], les représentations matricielles avec modèles markoviens [32], la théorie des martingales et inégalités de probabilité [37], les méthodes d'optimisation [15], les transformations analytiques [14], les approximations des chaînes de Markov [30], la théorie des distributions [16, 17, 40], les méthodes statistiques ( comme l'analyse non paramétrique de la probabilité de ruine ) [24], ... etc.

### 1.8.1 Approximation de Cramér-Lundberg

Soit  $\Psi(u)$ ,  $u \geq 0$ , la probabilité de ruine du modèle (1.5). On suppose que le chargement de sécurité relatif  $\rho = \frac{(c-\lambda\mu)}{\lambda\mu}$  est strictement positif. On note  $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ , où  $F$  est la fonction de distribution des moments des réclamations. En utilisant les arguments de renouvellement et en conditionnant par rapport au temps et au montant de la première réclamation, on a la probabilité de ruine qui vérifie l'équation intégrale suivante [5] :

$$\Psi(u) = \frac{\lambda}{c} \int_u^\infty \bar{F}(y) dy + \frac{\lambda}{c} \int_u^\infty \Psi(u-y) \bar{F}(y) dy. \quad (1.16)$$

En général, il est très difficile de dériver des expressions explicites de la probabilité de ruine. Cependant, sous certaines conditions convenables, on peut obtenir quelques approximations de cette quantité. Les premiers travaux sur ces approximations ont été réalisés par Cramér-Lundberg dès 1930[41]. La condition Cramér-Lundberg stimule l'existence d'une constante ( $k > 0$ ) satisfaisant l'équation de lundberg :

$$\int_0^\infty e^{kx} \bar{F}(x) dx = \frac{c}{\lambda}, \quad (1.17)$$

qui est équivalente à :

$$\int_0^\infty e^{kx} dG(x) = 1 + \rho, \quad (1.18)$$

Où,  $G(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty S^{kx} \bar{F}(y) dy$  est la distribution équilibrée de  $F$ . Supposons que l'équation (1.18) est vérifiée. La formule asymptotique de la probabilité de ruine est donnée comme suit :

- Si  $\int_0^\infty e^{kx} dG(x) < \infty$ , alors

$$\Psi(u) \sim \frac{\varrho u}{k \int_0^\infty y e^{ky} \bar{F}(y) dy} e^{-ku} \quad \text{quand } u \rightarrow \infty.$$

- Si  $\int_0^\infty e^{kx} dG(x) = \infty$ , alors

$$\Psi(u) = o(e^{-ku}) \quad \text{quand } u \rightarrow \infty.$$

et aussi, on a l'inégalité de Lundberg donnée par :

$$\Psi(u) \leq e^{-ku}, \quad u \geq 0.$$

### ★ Cas particulier

Si les montants des réclamations sont distribués exponentiellement, c'est-à-dire,  $\bar{F}(x) = e^{-\mu x}$ ,  $x \geq 0$ , la probabilité de ruine possède la formule explicite suivante :

$$\Psi(u) = \frac{1}{1 + \varrho} \exp \left\{ -\frac{\varrho}{\mu(1 + \varrho)} u \right\}, \quad u \geq 0.$$

## 1.8.2 Formule de Pollaczek-Khinchin

Le théorème suivant fournit une formule explicite pour la probabilité de ruine à horizon infini  $\Psi(u)$  dans le cas du modèle de risque classique.

### Théorème 1.8.1. [36]

Pour tout  $u \geq 0$ ,

$$\Psi(u) = \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n \overline{(F_X^s)^{*n}}(u), \quad (1.19)$$

Où,  $\overline{(F_X^s)^{*n}}(u) = 1 - (F_X^s)^{*n}(u)$  et  $(F_X^s)^{*n}$  est la  $n^{\text{ème}}$  convolution de la fonction  $F_X^s$  telle que,  $F_X^s$  est la fonction de répartition de  $X$  définie par :

$$F_X^s(u) = \frac{1}{\mu} \int_0^u (1 - F_X(y)) dy, \quad u \geq 0.$$

### Formule de Pollaczek-Khinchine dans le modèle P/P

En utilisant la formule de Pollaczek-Khinchine (1.19) pour des montants de réclamations de distributio exponentielle et de moyenne  $\mu$ , on peut déduire l'expression :

$$\Psi(u) = \left(\frac{\lambda}{\mu c}\right) e^{-(\mu - \lambda/c)u}. \quad (1.20)$$

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté quelques notions de base de la théorie de la ruine à savoir, des expressions exactes, des approximations et des bornes de la probabilité de ruine pour le modèle de risque classique. Une attention particulière est portée au le modèle de Cramèr-Lundberg (modèle classique), connu comme le fondement théorique de la théorie du risque dû à plusieurs études.



# Chapitre 2

## Généralités sur la théorie des inégalités stochastiques

### Introduction

Les ordres stochastiques sont de plus en plus utilisés dans plusieurs domaines de recherche bien établi, qui est toujours en développement intensif et qui offre plusieurs problèmes ouverts. Ils mènent à des méthodes d'approximation robustes et des bornes dans des situations où les modèles stochastiques réels sont trop complexes pour un traitement rigoureux. Le but de la recherche mathématique est alors de trouver des ordres bien adaptés qui mènent à des bornes raffinées (closed bound) et de bonnes approximations. Les ordres stochastiques sont aussi utiles dans des situations où les distributions fondamentales d'un modèle sont seulement connues partiellement.

Dans ce chapitre nous allons présenté quelques théorèmes, résultats, propriétés, corollaires et définitions qui sont à l'origine du livre de D. Stoyan [3, 10].

### 2.1 Propriétés générales des ordres partiels

On appelle un ordre partiel, noté " $\prec$ ", une relation binaire définie sur un ensemble  $D$  d'éléments  $a, b, c, \dots$ , satisfaisant les trois axiomes :

- (i)  $a \prec a$  (réflexivité).
- (ii) si  $a \prec b$  et  $b \prec c$  alors  $a \prec c$  (transitivité).
- (iii) si  $a \prec b$  et  $b \prec a$  alors  $a = b$  (antisymétrie).

Notons que  $a \prec b$  est équivalent à dire que  $b \succ a$ .

Cette section est consacrée à quelques propriétés de l'ordre partiel défini sur l'ensemble  $D$  de toutes les fonctions de répartition de variables aléatoires réelles (ou bien l'un de ses sous-ensembles)  
 Pour les deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  de fonctions de répartition  $F$  et  $G$  (respectivement) on a par convention :

$$F \prec G \Leftrightarrow X \prec Y.$$

On suppose que deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont définies sur le même espace de probabilité, alors leurs fonctions de répartition respectives  $F$  et  $G$  peuvent satisfaire la propriété d'antisymétrie (iii) sans pour autant avoir

$$X = Y.$$

Lorsque les variables aléatoires sont dégénérées, certaines propriétés des ordres partiels définies sur  $D$  découlent directement des propriétés de l'ordre des nombres réels. Pour cela, on utilisera la distribution de Dirac, notée par  $\Theta_c(\cdot)$  définie pour tous les nombres réels comme suit :

$$\Theta_c(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < c, \\ 1 & \text{si } x \geq c. \end{cases}$$

**Définition 2.1.1.**

Soit un ordre partiel donné " $\prec$ " défini sur (un sous ensemble de) l'espace  $D$  des fonctions de répartition.

On dit que cet ordre possède la propriété :

- (R) : si  $\forall a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $a \leq b$ , alors  $\Theta_a \prec \Theta_b$  .
- (E) : si  $F \prec G$ , alors  $m_F \leq m_G$  lorsque les moyennes existent .
- (M) : si  $F \prec G$  , alors  $F^c \prec G^c, \forall c > 0$  , où  $F^c(x) = F(x/c), \forall x$  .
- (C) : si  $F_1 \prec F_2$  alors  $F_1 * G \prec F_2 * G$ , où  $(F_i * G)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_i(x - y)dG(y), i = 1, 2$  .
- (W) :  $F_n$  et  $G_n$  convergent faiblement vers  $F$  et  $G$  (respectivement) alors :

$$\forall_n, F_n \prec G_n \Rightarrow F \prec G.$$

**Remarque 2.1.1.**

Pour les deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  :  
la propriété (M) assure que :

$$X \prec Y \Leftrightarrow cX \prec cY \text{ pour tout } c \in ]0, +\infty[.$$

La propriété (C) assure que :

$$X_1 \prec X_2 \Rightarrow X_1 + Y \prec X_2 + Y.$$

où  $Y$  est une variable aléatoire indépendante de  $X_1$  et  $X_2$ .

La propriété (E) assure que :

$$X \prec Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y).$$

On remarque que la propriété (E) découle des autres propriétés .

**Proposition 2.1.1.**

Un ordre partiel " $\prec$ " sur un ensemble (ou bien sur un sous ensemble de)  $D$  qui vérifie les propriétés (R) ; (M) ; (C) et (W), vérifie aussi la propriété (E).

**Définition 2.1.2.**

Pour une classe de fonctions réelles  $\mathfrak{S}_\prec$ , l'ordre partiel  $\prec$  défini sur l'ensemble (ou sur le sous ensemble)  $D$  est dit généré par  $\mathfrak{S}_\prec$  si :

$$F \prec G \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dF(x) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dG(x),$$

pour toute fonction  $f$  dans  $\mathfrak{S}_\prec$  , telle que les intégrales existent .

**Définition 2.1.3.**

La classe  $\Upsilon$  de fonctions réelles définies sur la droite réelle  $\mathbb{R}$  (resp. la demi-droite  $\mathbb{R}_+$  ) est dite invariante par translation, si pour tout  $a \in \mathbb{R}$  (resp.  $a \in \mathbb{R}_+$ , lorsque  $f \in \Upsilon$  , on a aussi  $f_a \in \Upsilon$  , où  $f_a$  est la fonction définie par :

$$f_a = f(x + a) , \forall x \in \mathbb{R} \text{ (resp. } \forall x \in \mathbb{R}_+).$$

### 2.1.1 Ordre stochastique

On dit que la variable aléatoire  $X$  de fonction de répartition  $F$ , est stochastiquement inférieure (ou bien inférieure en distribution) à la variable aléatoire  $Y$  de fonction de répartition  $G$ , et on note  $F \leq_{st} G$ , lorsque :

$$F(x) \geq G(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On écrit aussi :  $X \leq_{st} Y$  ( $\leq_{st}$  est aussi noté par  $\leq_d$ ).

Dans le cas où  $X$  et  $Y$  sont des variables aléatoires discrètes prenant des valeurs sur  $\mathbb{Z}$ , et en notant par  $P_i^{(1)} = P\{X = i\}$  et  $P_i^{(2)} = P\{Y = i\}$  pour  $i \in \mathbb{Z}$ , alors :

$$X \leq_{st} Y \Leftrightarrow \sum_{j=-\infty}^i P_j^{(1)} \geq \sum_{j=-\infty}^i P_j^{(2)} \quad i \in \mathbb{Z},$$

ce qui est équivalent à :

$$\sum_{j=i}^{\infty} P_j^{(1)} \leq \sum_{j=i}^{\infty} P_j^{(2)} \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Remarquons que l'ordre stochastique  $\leq_{st}$  satisfait les axiomes de l'ordre partiel  $\prec$ .

#### Proposition 2.1.2.

Si  $F_1 \leq_{st} F_2$ , alors il existe deux variables aléatoires  $X_1$  et  $X_2$  définies sur le même espace de probabilité  $(\Omega, A, P)$  pour lesquelles :

$$X_1(\omega) \leq X_2(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega,$$

et

$$P(\omega : X_k(\omega) \leq x) = F_k(x) \text{ pour } k = 1, 2.$$

Notons par  $\mathfrak{R}_{st}(\mathbb{R})$  la classe des fonctions réelles non décroissantes, alors la classe  $\mathbb{R}_{\leq_{st}}$  des fonctions  $\leq$ -monotones est confondue avec la classe  $\mathfrak{R}_{st}(\mathbb{R})$ , c'est-à-dire,  $\mathbb{R}_{\leq_{st}} = \mathfrak{R}_{st}(\mathbb{R})$ .

#### Théorème 2.1.1.

L'inégalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dF_1(t) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dF_2(t), \quad (2.1)$$

est vérifiée pour toute fonction  $f$  appartenant à  $\mathfrak{R}_{st}(\mathbb{R})$ , Pour laquelle l'intégrale existe, si et seulement si  $F_1 \leq F_2$ . Pour une fonction  $f$  donnée, l'inégalité (1.1) est vérifiée pour tout  $F_1$  et  $F_2$  telles que  $F_1 \leq F_2$  uniquement si  $f$  est non décroissante.

### Corollaire 2.1.1.

Pour deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  non négatives, avec  $X \leq_{st} Y$ ,  
On a :

$$E(X^r) \leq E(Y^r) , (r \geq 0),$$

$$E(X^r) \geq E(Y^r) , (r < 0),$$

lorsque les espérances existent, Et si celles-ci sont bien définies

$$E(X^r) \leq E(Y^r) , (r = 1, 3, 5, \dots),$$

pour des variables quelconques (pas forcément non négatives).

### 2.1.2 Ordre convexe

On note par  $x_+ = \max(0, x)$ , on dit que la variable aléatoire  $X$ , de fonction de répartition  $F$ , est inférieure en moyenne de vie résiduelle à la variable aléatoire  $Y$ , de fonction de répartition  $G$ , et on écrit  $X \leq_{cv} Y$ , ou bien  $F \leq_{cv} G$ , si et seulement si :

$$\begin{aligned} E((X - x)_+) &= \int_x^{+\infty} (t - x)dF(t) = \int_x^{+\infty} (1 - F(t))dt & (2.2) \\ &\leq \int_x^{+\infty} (1 - G(t))dt = E((Y - x)_+), \end{aligned}$$

lorsque les espérances (ou bien les intégrales) sont bien définies.

Dans le cas discret, on a :

$$X \leq_{cv} Y \Leftrightarrow \sum_{i=k}^{\infty} \sum_{j=i}^{\infty} P_j^{(1)} \leq \sum_{i=k}^{\infty} \sum_{j=i}^{\infty} P_j^{(2)}.$$

Une conséquence immédiate de cette définition :

$$\text{si } F \leq_{st} G \text{ et } E(Y_+) < \infty \text{ alors } F \leq_{cv} G .$$

**Théoreme 2.1.2.**

1. L'inégalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dF_1(t) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dF_2(t), \quad (2.3)$$

est vérifiée pour toute fonction  $f$  appartenant à  $\mathfrak{R}_{cv}(\mathbb{R})$  pour laquelle les intégrales sont bien définies, si et seulement si  $F_1 \leq_{cv} F_2$ .

2. Pour une fonction donnée  $f$ , l'inégalité (1.3) a lieu pour toutes les fonctions  $F_1$  et  $F_2$  telles que  $F_1 \leq_{cv} F_2$  uniquement si  $f$  est une fonction convexe et non décroissante.

3. Si  $F_1 \leq_{cv} F_2$  et leurs moyennes existent et sont égales, alors l'inégalité (2.3) est vérifiée pour toute fonction convexe  $f$  donnée.

**Corollaire 2.1.2.**

Pour deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  non négatives telles que  $X \leq_{cv} Y$ ,

On a :

$$E(X^r) \leq E(Y^r), (r \geq 1),$$

lorsque les espérances existent.

En général, pour des variables aléatoires  $X$  et  $Y$  telles que,

$$E(X) = E(Y), \text{ et } X \leq_{cv} Y,$$

alors

$$E(X^r) \leq E(Y^r), (r = 2, 4, 6, \dots).$$

Il est intéressant de remarquer que pour deux variables aléatoires telles que  $X$  et  $Y$  sont non négatives et  $X \leq_{cv} Y$ , alors l'égalité  $E(X^r) = E(Y^r)$ , pour tout  $r \geq 1$  implique l'égalité  $X =_{st} Y$ .

En effet,

$$E(X^r) = \int_0^{+\infty} r x^{r-1} (1 - F(x)) dx = \int_0^{+\infty} r(r-1) x^{r-2} dx \int_x^{+\infty} (1 - F(y)) dy.$$

Cette propriété est l'analogue de la propriété suivante pour l'ordre stochastique

$$X \leq_{st} Y \text{ et } E(X) = E(Y) \Rightarrow X =_{st} Y.$$

### Proposition 2.1.3.

Supposons que les suites de variables aléatoires  $X_n$  et  $Y_n$  convergent faiblement vers  $X$  et  $Y$  (respectivement),  
Si

$$\begin{aligned} E(X_+) \text{ et } E(Y_+) \text{ sont finis,} \\ E((X_n)_+) \rightarrow E(X_+) \text{ quand } n \rightarrow +\infty, \\ E((Y_n)_+) \rightarrow E(Y_+) \text{ quand } n \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

et si  $X_n \leq_{cv} Y_n$ , alors

$$X \leq_{cv} Y.$$

### 2.1.3 Ordre en transformée de Laplace

#### Transformée de Laplace

Lorsque la variable aléatoire  $X$  est du type continu, sa distribution peut être caractérisée par la transformée de Laplace de la densité  $f(x)$  :

$$\widehat{f}(s) = E(e^{-sX}) = \int_0^{\infty} f(x)e^{-sx} dx,$$

Où,  $s$  est une variable complexe. Cette intégrale est définie au moins pour  $Re(s) \geq 0$ . La transformée de Laplace est notée aussi  $L[f(x)]$ .

#### Propriétés

- Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, la transformée de Laplace de  $X + Y$  est le produit des transformées de Laplace de  $X$  et de  $Y$ .
- $L[f'(x)] = s\widehat{f}(s) - f(0)$ .
- $L[f''(x)] = s^2\widehat{f}(s) - sf(0) - f'(0)$ .
- $L\left[\int_0^x f(u)du\right] = \frac{\widehat{f}(s)}{s}$ .
- Si  $f(x)$  est la fonction de répartition de  $X$  et si  $R(x) = 1 - F(x)$  alors

$$\lim_{s \rightarrow 0} \widehat{R}(s) = \int_0^{\infty} R(x)dx = E(X).$$

**Définition 2.1.4.**

Pour deux variables aléatoires non négatives  $X$  et  $Y$  de fonctions de répartition  $F$  et  $G$  (respectivement),  $F$  est dite inférieure par rapport à l'ordre laplacien à  $G$ , et on note  $F \leq_L G$ , si pour tout  $s$  positif on a l'inégalité suivante :

$$E(\exp(-sX)) = \int_0^{\infty} \exp(-sx)dF(x) \geq \int_0^{\infty} \exp(-sx)dG(x) = E(\exp(-sY)).$$

Il est clair que l'ordre en transformée de Laplace est réflexif, transitif et antisymétrique.

**Théoreme 2.1.3.**

Soit une fonction  $f$  strictement monotone, alors  $F \leq_L G$  implique

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dF_1(t) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dF_2(t).$$

**Corollaire 2.1.3.**

- (1) Pour deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$  non négatives, de fonctions de répartition  $F$  et  $G$  respectivement, telles que  $X \leq_L Y$  alors, on a l'inégalité suivante :

$$\frac{1 - E(\exp(-sX))}{s} \leq \frac{1 - E(\exp(-sY))}{s}, \quad \forall s > 0.$$

- (2) Lorsqu'on fait tendre  $s$  vers 0, on obtient le résultat suivant :

$$X \leq_L Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y),$$

lorsque les espérances existent.

Le résultat qui suit donne une caractérisation de l'ordre en transformée de Laplace.

**Théoreme 2.1.4.**

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires quelconques de fonctions de répartition  $F$  et  $G$  respectivement, alors

$$X \leq_L Y \Leftrightarrow E(f(X)) \leq E(f(Y)),$$

pour toute fonction  $f$  strictement monotone, telle que les espérances existent.



### 2.1.4 Ordre en fonctions génératrices

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires non négatives discrètes de fonctions de répartition  $F$  et  $G$  respectivement. On dit que  $X$  est inférieure à  $Y$  par rapport à l'ordre en fonctions génératrices, et on note  $F \leq_g G$ , si et seulement si :

$$E(z^X) \geq E(z^Y),$$

où

$$E(z^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)z^n \quad \text{et} \quad E(z^Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y = n)z^n, \quad |z| < 1.$$

Cet ordre peut-être déduit de l'ordre laplacien en posant  $s = -\ln z$ .

### 2.1.5 Ordre du rapport de vraisemblance(Likelihood Ratio)

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires de densités  $f$  et  $g$  telles que :

$$\frac{f(t)}{g(t)} \quad \text{décroit sur l'union des supports de } X \text{ et } Y.$$

Ou de manière équivalente :

$$f(u)g(v) \geq f(v)g(u), \quad \text{pour tout } u \leq v,$$

alors,  $X$  est dite inférieure à  $Y$  par rapport à l'ordre du rapport de vraisemblance, noté  $X \leq_{LR} Y$ .

### 2.1.6 Ordre super-modulaire

#### Définition 2.1.5. (Fonction super-modulaire)

Une fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est dite super-modulaire si pour tout couple  $x, y \in \mathbb{R}^n$  on a :

$$f(x \vee y) + f(x \wedge y) \geq f(x) + f(y).$$

Où les opérateurs  $\wedge$  et  $\vee$  sont définis comme :

$$\begin{aligned} x \vee y &= \max(x_1, y_1), \dots, \max(x_n, y_n), \\ x \wedge y &= \min(x_1, y_1), \dots, \min(x_n, y_n). \end{aligned}$$

### **Théoreme 2.1.5.**

a) Si  $f$  est doublement différentiable, alors  $f$  est super modulaire si et seulement si :

$$\frac{d^2}{dx_i dx_j} f(x) \geq 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n, 1 \leq i \leq j \leq n.$$

b) Si  $g_1, \dots, g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  les fonctions augmentent et que  $f$  est supermodulaire, alors  $f(g_1(\cdot), \dots, g_n(\cdot))$  est également supermodulaire.

### **Définition 2.1.6.**

Soit la suite  $X = (X_1, \dots, X_n)$  est dit inférieur au sens super-modulaire à la suite  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ , et on écrit  $X \leq_{sm} Y$ , lorsque pour toute fonction supermodulaire  $f$  telle que  $\mathbb{E}[f(X)]$  et  $\mathbb{E}[f(Y)]$  existent, on a l'inégalité :

$$\mathbb{E}[f(X)] \leq \mathbb{E}[f(Y)].$$

### **2.1.7 Relations entre les ordres partiels**

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires de fonctions de répartition  $F$  et  $G$  respectivement. Alors, on a les relations suivantes :

- Si  $F \leq_{st} G$  et  $E(Y_+) < \infty \Rightarrow F \leq_{cv} G$ .
- Si  $E(X) = E(\max(0, -x)) < \infty \Rightarrow F \leq_v G$ .
- Si  $E(X) = E(Y)$ , alors  $F \leq_v G \Leftrightarrow F \leq_{cv} G$ .
- $F \leq_{st} G \Rightarrow F \leq_L G \Rightarrow F \leq_g G$ .
- $F \leq_v G \Rightarrow F \leq_L G \Rightarrow F \leq_g G$ .
- Si  $E(X) = E(Y)$  et  $F \leq_{cv} G \Rightarrow F \leq_L G \Rightarrow F \leq_g G$ .
- $F \leq_L G \Rightarrow F \leq_g G$ .

### **2.1.8 Propriétés de monotonie**

Étudier mathématiquement les modèles stochastiques, c'est d'obtenir des estimations des quantités qui, pour un modèle  $\Sigma$  donné, avec une structure spécifique et des distributions  $F_i$  des  $X_i, \dots$ , décrivent son comportement, Soit  $c_\Sigma$  une caractéristique dans  $\Sigma$  et soit  $C_\Sigma$  l'ensemble des valeurs possibles de  $c_\Sigma$ .

Pour une structure donnée et une distribution initiale  $U$ ,  $c_\Sigma$  dépend uniquement des  $F_i$ , et on écrit :

$$c_\Sigma = c_\Sigma(F_1, F_2, \dots) \in C_\Sigma.$$

Pour des modèles simples, on peut déduire une expression explicite de  $c_\Sigma$ . Cependant, dans plusieurs situations, cela n'est pas possible et les calculs mathématiques peuvent mener à des formules compliquées qui ne peuvent pas être exploitées en pratique.

De telles circonstances nous suggèrent de rechercher les propriétés qualitatives de  $c_\Sigma$  par rapport aux  $F_i$ , i.e, la manière avec laquelle  $c_\Sigma$  est affectée par les changements en  $F_i$ . Parmi les propriétés qualitatives importantes des modèles stochastiques on trouve la monotonie (i.e, si les  $F_i$  croissent dans un certain sens, alors  $c_\Sigma$  croît aussi).

### Monotonie interne :

Soit  $\Sigma$  un modèle stochastique constitué de distributions paramétriques  $(U, F_1, F_2, \dots) \equiv (U, F)$ , où  $U$  est la distribution initiale.

On note par  $c_\Sigma$  les indices de performance du système  $\Sigma$ . Par exemple, pour un système de files d'attente  $\Sigma$ ,  $c_\Sigma$  peut-être le temps moyen d'attente virtuel à l'instant  $t$ , ou la distribution de probabilité du nombre de clients dans le système à l'instant  $t$ , ou bien ses mesures de performance seront calculées à une suite d'instant  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  (déterministe ou aléatoire). D'une manière plus précise, on peut exprimer  $c_\Sigma$  comme suit :

$$c_\Sigma(t) = c_\Sigma(t, U, \{F_i\}), \text{ ou bien}$$

$$c_\Sigma(t_n) = c_\Sigma(n) = c_\Sigma(n, U, \{F_i\}).$$

On note par  $\prec$  l'ordre partiel défini sur  $C_\Sigma$ .

### Définition 2.1.7.

L'indice de performance  $c_\Sigma(\cdot)$  est non décroissant (resp. non croissant) par rapport à la distribution initiale  $U$  si pour tout  $t < u$ , on a :

$$t < u \Rightarrow c_\Sigma(t) \prec c_\Sigma(u) \text{ (resp. } c_\Sigma(t) \succ c_\Sigma(u)).$$

ou bien pour les entiers  $m < n$  :

$$m < n \Rightarrow c_\Sigma(m) \prec c_\Sigma(n) \text{ (resp. } c_\Sigma(m) \succ c_\Sigma(n)).$$

Cette propriété est appelée monotonie interne. D'autres appellations sont utilisées telles que, monotonie temporelle ou intrinsèque. Celles-ci découlent du fait que cette monotonie ne dépend en aucun cas des distributions paramétriques  $\{F_i\}$ , mais seulement peut-être de la distribution initiale

### Monotonie externe :

On note par  $\mathcal{D}_k$  l'ensemble des distributions  $F_k$  partiellement ordonnées par l'ordre " $<_k$ " (qui est l'ordre de la  $k^{\text{ème}}$  distribution paramétrique), et soit " $<_c$ " l'ordre partiel défini sur  $C_\Sigma$ .

#### Définition 2.1.8.

L'indice de performance  $c_\Sigma$  est non décroissant sur  $\mathcal{D}_k$  par rapport à l'ordre " $<_k$ " si pour tout F et G dans  $\mathcal{D}_k$  et toute autre distribution paramétrique constante, on a :

$$F <_k G \Rightarrow c_\Sigma(F_1, \dots, F_{k-1}, F, F_{k+1}, \dots) <_c (F_1, \dots, F_{k-1}, G, F_{k+1}, \dots).$$

Cette propriété est appelée monotonie externe.

Lorsque un système possède la propriété de monotonie externe, les indices de performance des modèles stochastiques, possédant la même structure avec des distributions paramétriques comparables mais différentes, sont comparables.

On peut interpréter la monotonie externe comme suit :

Soient  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  deux modèles stochastiques ayant la même structure et la même distribution initiale. On dira que ces modèles possèdent la propriété de monotonie externe lorsque pour deux distributions paramétriques F et G dans  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  respectivement, on a :

$$F \prec G \Rightarrow c_\Sigma(F) <_c c_\Sigma(G),$$

pour l'indice de performance  $c_\Sigma$ .

La monotonie externe est un outil d'une grande importance dans la construction des bornes pour les mesures de performance d'un système donné. Ainsi, la distribution paramétrique  $F_k$  peut être bornée par les distributions  $G_1$  et  $G_2$  appartenant à l'ensemble  $\mathcal{D}_k$  pour lesquelles :

$$G_1 <_k F_k <_k G_2,$$

alors pour les mesures de performance correspondantes, on obtient :

$$c_\Sigma(G_1) <_k c_\Sigma(F) <_k c_\Sigma(G_2),$$

lorsque les systèmes ont la propriété de la monotonie externe.

## 2.2 Mesure et comparaison des risques

### 2.2.1 Mesure de risque

#### Définition 2.2.1.

Une mesure de risque univarié est une fonction  $\varrho$  associant à chaque variable aléatoire du montant de perte  $X$  une valeur réelle  $\varrho(X)$  [42].

### 2.2.2 Mesure de risque cohérente

Une mesure de risque est cohérente, si elle vérifie les propriétés suivantes[27] :

#### 1. Invariance par translation

Soit  $X$  un risque, pour chaque constante  $a$ , on a :

$$\varrho(X + a) = \varrho(X) + a.$$

#### 2. Homogénéité

Pour chaque constante positive  $a$ , on a :

$$\varrho(aX) = a\varrho(X).$$

#### 3. Monotonie

Soient les risques  $X$  et  $Y$  tels que  $P[X \leq Y] = 1$ , alors :

$$\varrho(X) \leq \varrho(Y).$$

#### 4. Sous-additivité

Quels que soient les risques  $X$  et  $Y$  :

$$\varrho(X + Y) \leq \varrho(X) + \varrho(Y).$$

### 2.2.3 Propriété d'invariance et de convexité

#### Définition 2.2.2.

Une mesure de risque  $\varrho$  est invariante en loi, si pour deux risques  $X$  et  $Y$  :

$$X = Y \Rightarrow \varrho(X) = \varrho(Y).$$

#### Définition 2.2.3.

Une mesure de risque  $\varrho$  est dite convexe, si elle est monotone et vérifie :

$$\forall \alpha \in [0, 1], \varrho[\alpha X + (1 - \beta)Y] \leq \alpha\varrho(X) + (1 - \beta)\varrho(Y).$$

## 2.2.4 Mesure de risque comonotone additive

### Définition 2.2.4.

Une mesure de risque  $\varrho$  est comonotone additive, si pour tout vecteur comonotone  $(X_1, X_2)$  on a :

$$\varrho(X_1 + X_2) = \varrho(X_1) + \varrho(X_2).$$

## 2.2.5 Quelques mesures de risque

### • La variance :

La variance est la première mesure de risque qui a été utilisée, elle est considérée comme une mesure de risque d'une variable aléatoire autour de sa moyenne.

Soit  $X$  une variable aléatoire, sa variance est définie par :

$$Var(X) = E(X - E(X))^2,$$

La variance admet une représentation de la forme :

$$Var(X) = \inf E[(X - x)^2].$$

### • La Value-at-Risk :

L'une des plus populaires mesures de risque est la Value-at-Risk (VaR), appelée également "Valeur à Risque" [42].

### Définition 2.2.5.

On appelle Value-at-Risk de niveau  $\alpha \in (0, 1)$  le quantile de niveau  $\alpha$  :

$$VaR(X, \alpha) = \inf(x \in \mathbb{R} / P(X \leq x) \geq \alpha) = F^{-1}(\alpha).$$

### Proposition 2.2.1.

Si on désigne par  $Y$  la perte reliée à un investissement tel que  $Y = -X$ , alors on obtient :

$$VaR(Y, \alpha) = -VaR(X, \alpha - 1).$$

•Tail Value-at-Risk :

**Définition 2.2.6.**

La Tail Value-at-Risk au niveau  $\alpha$ , notée  $TVaR[X; \alpha]$  est définie par :

$$TVaR[X, \alpha] = \frac{1}{1 - \alpha} \int_{\alpha}^1 VaR[X, t] dt,$$

alors, la Tail-VaR est la moyenne des VaR de niveau supérieur à  $\alpha$ .

Notons que la TVaR est plus grande que la VaR correspondante [1].

## 2.3 Comparaison des risques

### 2.3.1 Ordre des risques actuariels

Le problème de la comparaison des risques est au cœur de l'activité d'assurance. Un risque supporté par une compagnie d'assurance est le plus naturellement décrit par une variable aléatoire  $S$ . Si la compagnie d'assurance ne veut pas supporter tout ce risque, alors elle en transmettra une partie à un soi-disant société de réassurance. La partie qui reste avec la première compagnie est généralement appelée rétention. Si le contrat est tel qu'il existe une rétention fixe  $t$ , alors il s'agit d'un contrat en excédent de pertes (stop-loss contract). Cela signifie que la première compagnie porte tout le risque total, tant qu'il est inférieur à  $t$ .

Si, toutefois,  $S > t$ , alors la compagnie de réassurance prendra en charge le montant de  $S - t$  de sorte que seul le montant de  $t$  reste à la première entreprise. D'où le coût prévu pour la compagnie de réassurance, appelée prime nette, est :  $\pi_S(t) = E(S - t)_+$ .

La fonction  $\pi_S$  est appelée la transformée stop-loss du risque  $S$  et il existe une correspondance simple entre la fonction de distribution  $F_S$  et la transformée stop-loss  $\pi_S$ , à savoir :

$$\pi_S(t) = E(S - t)_+ = \int_t^{\infty} \bar{F}_S(x) dx. \quad (2.4)$$

**Définition 2.3.1.**

Si  $S$  et  $S'$  sont deux risques, alors  $S$  est inférieur à  $S'$  par rapport à l'ordre stop-loss, noté,  $S \leq_{sl} S'$ , si

$$\pi_S(t) \leq \pi_{S'}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Cette définition signifie que  $S'$  est dit plus risqué que  $S$  s'il entraîne des primes nettes plus élevées pour la compagnie de réassurance.

**Théoreme 2.3.1.**

Soient  $X = (X_1, \dots, X_n)$  et  $X' = (X'_1, \dots, X'_n)$  deux suites de variables aléatoires avec,  $X \leq_{sm} X'$  et soient :

$$S = \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{et} \quad S' = \sum_{i=1}^n X'_i,$$

alors :

$$S \leq_{sl} S'.$$

**Théoreme 2.3.2.**

Soit  $X = (X_1, \dots, X_n)$  et  $X' = (X'_1, \dots, X'_n)$  deux suites de variables aléatoires avec les mêmes marges, et supposer que les composantes de  $X$  sont indépendants, tandis que les composantes de  $X'$  sont associés, alors :

$$\sum_{i=1}^n X_i \leq_{sl} \sum_{i=1}^n X'_i.$$

**Définition 2.3.2.**

Le vecteur  $X = (X_1, \dots, X_n)$  des risques non négatifs est dit mutuellement exclusif si :

$$P(X_i > 0, X_j > 0) = 0 \quad \text{pour tous } 1 \leq i < j \leq n.$$

Cela signifie que lorsque l'un des risques est positif, tous les autres doivent être nuls. Cela ne peut tenir que si :



$$\sum_{i=1}^n P(X_i > 0) \leq 1,$$

où de façon équivalente, si :

$$\sum_{i=1}^n P(X_i = 0) \geq n - 1.$$

**Corollaire 2.3.1.**

Soit  $X = (X_1, \dots, X_n)$  un vecteur de risques mutuellement exclusifs, et soit  $X' = (X'_1, \dots, X'_n)$  un vecteur de risques avec les mêmes distributions marginales  $F_1, \dots, F_n$ , alors :

$$\sum_{i=1}^n X_i \leq_{sl} \sum_{i=1}^n X'_i.$$

## Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté quelques concepts de base de la théorie des ordres stochastiques et quelques propriétés de la monotonie et des modèles stochastiques. On s'est basé principalement sur les risques actuariels qui feront l'objet du chapitre suivant sur un modèle de risque classique.

# Chapitre 3

## Inégalités stochastiques pour le modèle de risque

### Introduction

L'objectif de ce chapitre est l'étude des conditions de comparabilité pour un modèle de risque classique, en utilisant la théorie générale des ordres stochastiques.

La probabilité de ruine est une caractéristique très importante en théorie de risque, cette dernière ne possède malheureusement pas de forme explicite dans la plupart des modèles de risque. Pour cela on fait appel aux méthodes d'approximation tel que la comparaison stochastique. Cette méthode est basée sur la théorie des ordres stochastique qui permet d'établir des bornes sur des mesures de risque ou des quantités liées aux risques. Dans ce chapitre on applique la méthode de comparaison stochastique pour étudier les conditions de comparabilité dans un modèle de risque classique.

### 3.1 Description du modèle

Considérons le modèle de risque classique d'une compagnie d'assurance

$$R(t) = u + ct - Z(t), \quad t \geq 0. \quad (3.1)$$

Où :

- $Z(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i(t)$ , est le montant cumulé des réclamations à l'instant  $t$ ,
- $u > 0$ , est la réserve initiale de la compagnie d'assurance,

- $c > 0$ , est le taux de primes,
- $N_t$ , est un processus de comptage (Poisson) d'intensité  $\lambda > 0$  du nombre de réclamations,
- $X_i, i \geq 1$ , est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d) représentant les montants des réclamations. Elle sont indépendantes de  $N(t)$ .

### 3.1.1 Probabilité de ruine

La Probabilité de ruine noté  $\Psi(u)$ , pour le modèle de risque (3.1), avec  $R(0) = u$ , est :

$$\Psi(u) = P(\inf R(t) < 0 : R(0) = u). \quad (3.2)$$

### 3.1.2 Temps de ruine

Soit  $\tau$  la variable aléatoire du moment de la ruine donné comme suit :

$$\tau = \inf\{t : R(t) < 0\}. \quad (3.3)$$

## 3.2 Inégalités stochastiques pour le modèle de risque classique

Dans cette section on utilise la théorie générale des ordres partiels pour l'étude des conditions de comparabilité dans un modèle de risque classique relativement aux ordres supermodulaire " $\leq_{sm}$ " et l'ordre stop-loss " $\leq_{sl}$ ".

On introduit les notations suivantes :

Soient  $R^{(1)}(t)$  et  $R^{(2)}(t)$ , deux modèles de risque classique de paramètres (respectivement, pour  $i = 1, 2$ ) :

- $\lambda^{(i)}$  :taux de réclamations.
- $u^{(i)}$  :réserve initial dans  $R^{(i)}(t)$ .
- $c^{(i)}$  :taux de primes dans  $R^{(i)}(t)$ .
- $\mu^{(i)}$  :taux du montant de réclamation.

### 3.2.1 Inégalités préliminaires

Les lemmes suivants donnent les conditions, sur les paramètres des deux modèles de risque, sous lesquelles les montants cumulé des réclamations  $\{Z_n^{(i)}, i = 1, 2 \text{ et } n \in \mathbb{N}\}$  sont comparables suivant les ordres partiels supermodulaire " $\leq_{sm}$ " et l'ordre stop-loss " $\leq_{sl}$ ".

**lemme 3.2.1.** Soient  $R^{(1)}$  et  $R^{(2)}$  deux modèles de risque classique,

si  $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$  et  $F_{(1)}^n \preceq_{sm} F_{(2)}^n$  alors  $\{G_n^{(1)}\} \preceq_{sm} \{G_n^{(2)}\}$ ,

où,

$$G_n^{(i)} = P(Z^{(i)}(t) = x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda^{(i)}t} \frac{(\lambda^{(i)}t)^n}{n!} F_{(i)}^n(x), i = 1, 2.$$

*Démonstration.*

□

Supposons que  $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$  et  $F_{(1)}^n(x) \leq_{sm} F_{(2)}^n(x)$ ,  
par définition de l'ordre stochastique  $\leq_{st}$ , on a pour une lois discrète, les  
équivalences suivants :

$$\begin{aligned} \{G_n^{(1)}\} \leq_{sm} \{G_n^{(2)}\} &\Leftrightarrow G_n^{(1)} = \sum_{m=n}^{+\infty} G_m^{(1)} \leq \sum_{m=n}^{+\infty} G_m^{(2)} = G_n^{(2)}, \\ &\Leftrightarrow \sum_{m=n}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} e^{-\lambda^{(1)}t} \frac{(\lambda^{(1)}t)^m}{m!} F_{(1)}^{(m)}(x), \\ &\leq \sum_{m=n}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} e^{-\lambda^{(2)}t} \frac{(\lambda^{(2)}t)^m}{m!} F_{(2)}^{(m)}(x) \quad (*). \end{aligned}$$

pour prouver l'inégalité numérique (\*) on doit prouver que la fonction :

$$f_n(t, \lambda) = \sum_{m=n}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^m}{m!}.$$

est non décroissante .

On a :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}f_n(t, \lambda) &= \sum_{m=n}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} -\lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^m}{m!} + e^{-\lambda t} m \lambda \frac{(\lambda t)^{m-1}}{m!} \\
&= \sum_{m=n}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} -\lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^m}{m!} + \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{m-1}}{(m-1)!} \\
&= \sum_{m=n}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} -\lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^m}{m!} + \sum_{m=n}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{m-1}}{(m-1)!} \\
&= \sum_{m=n}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} -\lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^m}{m!} + \sum_{m=n+1}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{m-1}}{(m-1)!} + \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} > 0, \forall t \geq 0.
\end{aligned}$$

Donc  $f_n(t, \lambda)$  est une fonction croissante en  $t$ .

La dérivée par rapport  $\lambda$  s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\lambda}f_n(t, \lambda) &= \sum_{m=n}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} -te^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^m}{m!} + e^{-\lambda t} mt \frac{(\lambda t)^{m-1}}{m!} \\
&= \sum_{m=n}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} -te^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^m}{m!} + te^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{m-1}}{(m-1)!} \\
&= \sum_{m=n}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} -te^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^m}{m!} + \sum_{m=n}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} te^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{m-1}}{(m-1)!} \\
&= \sum_{m=n}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} -te^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^m}{m!} + \sum_{m=n+1}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} te^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{m-1}}{(m-1)!} + te^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= te^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} > 0, \forall t \geq 0.
\end{aligned}$$

On remarque que la dérivée est positive pour toutes les valeurs positives que peut prendre le paramétré  $\lambda$ . Alors, la fonction  $f_n(t, \lambda)$  est croissante par

rapport aux valeurs du paramètre  $\lambda$ , En effet :

$$\frac{d}{d\lambda} f_n(t, \lambda) = t e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} > 0,$$

Comme  $f_n(t, \lambda)$  est une fonction croissante en  $t$ , et  $F_{(1)}^n(x) \leq_{sm} F_{(2)}^n(x)$  alors, l'inégalité (\*) est vérifiée.

**lemme 3.2.2.** Soient  $R^{(1)}$  et  $R^{(2)}$  deux modèles de risque classique,

$$\text{si } \lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)} \quad \text{et} \quad F_{(1)}^n \preceq_{sl} F_{(2)}^n \quad \text{alors} \quad \{G_n^{(1)}\} \preceq_{sl} \{G_n^{(2)}\},$$

où,

$$G_n^{(i)} = P(Z^{(i)}(t) = x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda^{(i)} t} \frac{(\lambda^{(i)} t)^n}{n!} F_{(i)}^n(x), i = 1, 2.$$

**preuve 3.2.1.**

Par définition de l'ordre stop-loss  $\leq_{sl}$  on a :

$$\begin{aligned} \{G_n^{(1)}\} \leq_{sl} \{G_n^{(2)}\} &\Leftrightarrow \bar{G}_n^{(1)} = \sum_{m=n}^{+\infty} \bar{G}_m^{(1)} \leq \sum_{m=n}^{+\infty} \bar{G}_m^{(2)} = \bar{G}_n^{(2)} \\ &\Leftrightarrow \sum_{m=n}^{+\infty} \sum_{l=m}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} e^{-\lambda^{(1)} t} \frac{(\lambda^{(1)} t)^l}{l!} F_{(1)}^{(l)}(x), l = 1, 2 \\ &\leq \sum_{m=n}^{+\infty} \sum_{l=m}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} e^{-\lambda^{(2)} t} \frac{(\lambda^{(2)} t)^l}{l!} F_{(2)}^{(l)}(x), l = 1, 2 \\ &\Leftrightarrow \sum_{m=n}^{+\infty} f_m(t, \lambda^{(1)}) F_{(1)}^{(l)}(x) \leq \sum_{m=n}^{+\infty} f_m(t, \lambda^{(2)}) F_{(2)}^{(l)}(x), \quad (**) \end{aligned}$$

avec,

$$f_m(t, \lambda^{(i)}) = \sum_{l=m}^{+\infty} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(\lambda^{(i)} t)^l}{l!} \exp\{-\lambda^{(i)} t\}.$$

Les fonctions  $f_m(t, \lambda)$  sont croissantes par rapport à  $\lambda$ , alors la fonction définie par :  $\bar{f}_n(t, \lambda) = \sum_{m=n}^{+\infty} f_m(t, \lambda)$  l'est aussi. D'autre part, on a

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{f}_n(t, \lambda) = \lambda \frac{\partial}{\partial t} f_{n-1}(t, \lambda) = \lambda^2 \left( \frac{(\lambda t)^{n-2}}{(n-2)!} \right) \exp\{-\lambda t\} > 0.$$

Par conséquent,  $\bar{f}_n(t, \lambda)$  est croissante et convexe par rapport à la variable  $t$ , alors, l'inégalité (\*\*) est vérifiée.

### 3.2.2 Conditions de comparabilité des modèles de risque classique

**Théoreme 3.2.1.** Soient  $R^{(1)}$  et  $R^{(2)}$  deux modèles de risque classique, si  $u^{(1)} \leq u^{(2)}$  et  $c^{(1)} \leq c^{(2)}$ , alors,

$$\{R^{(1)}(t)\} \preceq_{sm} \{R^{(2)}(t)\}.$$

**Théoreme 3.2.2.** Soient  $R^{(1)}$  et  $R^{(2)}$  deux modèles de risque classique, si  $u^{(1)} \leq u^{(2)}$  et  $c^{(1)} \leq c^{(2)}$ , alors,

$$\{R^{(1)}(t)\} \preceq_{sl} \{R^{(2)}(t)\}.$$

## Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons utilisé la théorie des ordres stochastiques pour déterminer les conditions de comparabilité dans un modèle de risque classique relativement aux ordres likelihood ratio et l'ordre stop-loss.

# Chapitre 4

## Approche par simulation

### Introduction

La théorie de la ruine concerne la définition et l'étude de processus stochastiques introduits dans la modélisation et l'évaluation de la richesse d'une compagnie d'assurance. Le but premier de la théorie de ruine a donc logiquement été de modéliser l'évolution de la richesse de la compagnie par un processus stochastique, d'évaluer la probabilité de ruine, et d'estimer le niveau de réserve initiale pour rendre cette probabilité de ruine suffisamment faible. En plus de l'approche stochastique pour l'évaluation de la probabilité de ruine, les méthodes de Monte Carlo permettent d'estimer des quantités en utilisant la simulation de variables aléatoire.

Ce chapitre est consacré à la présentation des différents résultats numériques et graphiques obtenus lors de l'étude de l'approximation de la probabilité de ruine par simulation dans le modèle de risque classique.

### 4.1 Simulation de la probabilité de ruine

La méthode la plus simple et intuitive pour simuler la probabilité de ruine est probablement la méthode Monte Carlo simple. L'idée de cette méthode est de simuler un nombre fixé de parcours du processus de surplus et de calculer la ratio du nombre de parcours menant à la ruine sur le nombre de parcours simulés. Ce ratio correspond évidemment à l'approximation de la probabilité de ruine dans ce cas.



La probabilité de ruine sur un horizon infini est donnée par :

$$\Psi(u) = \left(\frac{\lambda}{\mu c}\right)e^{-(\mu-\lambda/c)u}.$$

Dans le tableau suivant, nous présentons quelques résultats de simulation de la probabilité de ruine avec la valeur exacte, pour différentes valeurs de sinistres ( ou réclamations), de montant de réclamation. en prenant comme paramètres d'entrés le taux de prime  $c = 1$ .

$\lambda$	u	$\mu$	$\Psi(u)$	valeur exacte
0.01	1	0.0101	0.99	0.99
		0.02	0.49502	0.4950
		0.03	0.3267	0.3267
		0.07	0.1345	0.13
		0.1	0.0913	0.0914
	10	0.0101	0.9891	0.9891
		0.02	0.4524	0.4524
		0.03	0.2729	0.273
		0.07	0.0784	0.08
		0.1	0.0406	0.0407
0.5	1	0.501	0.9970	0.9970
		0.6	0.7540	0.8
		0.7	0.5848	0.5848
		0.8	0.4630	0.4630
		0.9	0.3724	0.3724
	10	0.501	0.9880	0.99
		0.6	0.3065	0.3066
		0.7	0.0966	0.0967
		0.8	0.0311	0.0311
		0.9	0.0101	0.0102

TABLE 4.1 – Valeurs exactes et approximations de la probabilité de ruine.

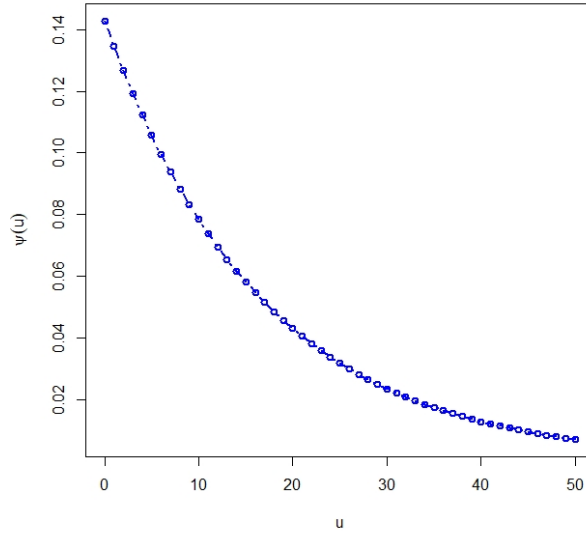


FIGURE 4.1 – Graphe de la probabilité de ruine pour  $c = 1, \lambda = 0.01$  et  $\mu = 0.07$ .

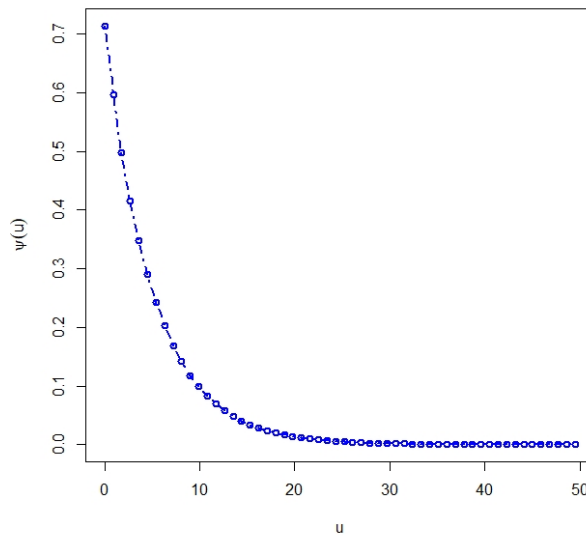


FIGURE 4.2 – Graphe de la probabilité de ruine pour  $c = 1, \lambda = 0.5$  et  $\mu = 0.5$ .

## 4.2 Simulation des probabilités de ruine pour le processus Cramèr Lundberg :

### 4.2.1 Sinistres obéissant à une loi exponentielles

1. La densité de probabilité de la loi exponentielle est donnée par :

$$h(z; \frac{1}{\mu}) = \frac{1}{\mu} e^{-\frac{z}{\mu}}, \quad z \geq 0, \mu \geq 0.$$

2. Le chargement de sécurité relatif  $\theta$  est donné par :

$$\theta = \frac{c}{\lambda\mu} - 1.$$

3. Le coefficient de Lundbreg  $\rho$  est donné par :

$$\rho = \frac{\theta}{(\theta + 1) * \mu} = \frac{c - \lambda\mu}{c\mu}.$$

La probabilité de ruine avec les sinistres obéissant à une loi Exponentielle :

$$\Psi(u) = \frac{1}{1 + \theta} \exp\left(-\frac{\theta u}{\mu(1 + \theta)}\right), \quad \forall u \geq 0.$$

L'exécution du programme ci-dessus nous permet d'estimer la probabilité de ruine, pour des sinistres obéissant à une loi  $\text{Exp}(\frac{1}{\mu})$ ,

```
u=seq(0,10,0.09)
m=1/(6.3789*10^{-9})##
t=0.3
f=function(tt,mm,uu)
{
  R=tt/(1+tt)
  w=(1/(1+tt))*exp(-(R/mm)*uu)
  return(w)
}
x11()
plot(u,f(t,m,u),type='l',lty=8,col="red",lwd=4,"ylab"=expression(psi(u)))
```

FIGURE 4.3 – Programme de simulation de la probabilité de ruine dans le cas où les sinistres suivent une loi exponentielle.

Les résultats de la simulation sont dans le tableau suivant :

u	0	1	2	3	4	5
$\Psi(u)$	0.7692308	0.1765029	0.0404992	0.0092927	0.0021322	0.0004892

TABLE 4.2 – La probabilité de ruine pour la loi exponentielle des paramètre  $\frac{1}{\mu} = 6,3789.10^{-9}$  et avec un chargement de sécurité  $\theta = 0,3$ .

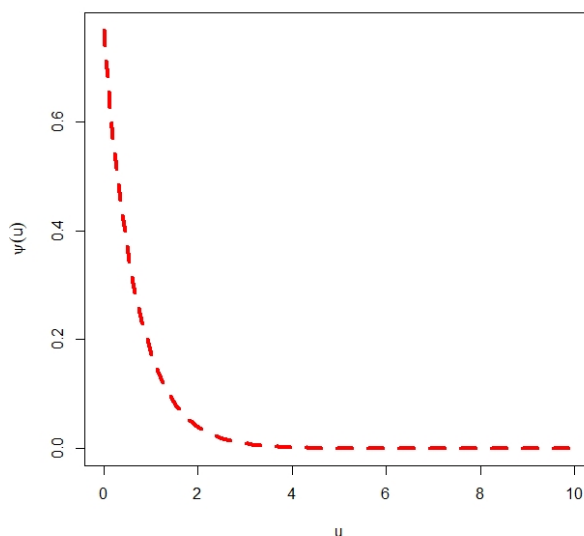


FIGURE 4.4 – Variation de la probabilité de ruine, avec des montants de réclamation de loi exponentielle, en fonction de la réserve initiale  $u$ .

#### 4.2.2 Sinistres obéissant à une loi Gamma

1. La densité de probabilité de la loi Gamma est donnée par :

$$k(z; \alpha; \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} z^{\alpha-1} e^{-\beta z}, \quad z \geq 0 \quad \alpha, \beta \geq 0.$$

2. L'espérance est donné par :

$$\mathbb{E}(Z) = \frac{\alpha}{\beta}.$$

3. Le chargement de sécurité relatif  $\theta$  est donné par :

$$\theta = \frac{c\mathbb{E}(W)}{\mathbb{E}[Z]} - 1 = \frac{c}{\lambda\mathbb{E}[Z]} - 1 = \frac{c\beta}{\lambda\alpha} - 1.$$

La probabilité de ruine avec les sinistres obéissant à une loi Gamma :

$$\Psi(u) = \frac{\theta(1 - \frac{R}{\alpha})\exp(-Ru)}{1 + (1 + \theta)R - (1 + \theta)(1 - \frac{R}{\alpha})} + \frac{\alpha\theta\sin(\alpha\pi)}{\pi}.I,$$

ou,

$$I = \int_0^\infty \frac{x^\alpha \exp\{-(x+1)\alpha x\}}{[x^\alpha\{1 + \alpha(1 + \theta)(1 + x)\} - \cos(\alpha\pi)]^2 + \sin^2(\alpha\pi)} dx.$$

L'exécution du programme ci-dessous nous permet d'estimer la probabilité de ruine, pour des sinistres obéissant à une loi Gamma,

```
u=seq(0,5,0.09)
theta=0.3
alpha=0.9185
R=0.584
I=15.17
f=function(u)
{
(theta*(1-R/alpha)*exp(-R*u)/1+(1+theta)*R-(1+theta)*(1-R/alpha))+(alpha*theta*sin(alpha*pi)/pi)*I
}
x11()
plot(u,f(u),type='l',lty=1,col="red",lwd=2.5,"ylab"=expression(psi(u)))
```

FIGURE 4.5 – Programme de simulation de la probabilité de ruine dans le cas où les sinistres suivent une loi de Gamma.

Les résultats de la simulation sont dans le tableau suivant :

u	0	1	2	3	4	5
$\Psi(u)$	0.741312	0.6858614	0.6505045	0.62796	0.613585	0.6044191

TABLE 4.3 – La probabilité de ruine pour la loi Gamma de paramètres  $\alpha = 0.9185, \beta = 6.1662 \cdot 10^{-9}$ , et avec un chargement de sécurité relatif  $\theta = 0.3$ .

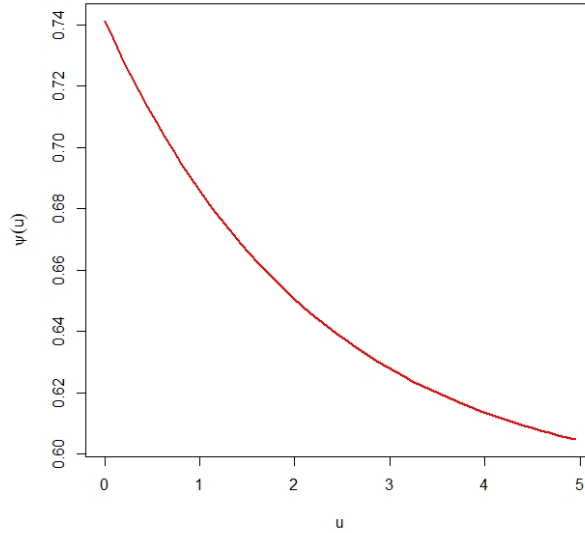


FIGURE 4.6 – Variation de la probabilité de ruine, avec des montants de réclamation de loi gamma, en fonction de la réserve initiale  $u$ .

### 4.2.3 Le mélange de deux lois Exponentielles

La probabilité de ruine avec les sinistres obéissant à un mélange de deux lois Exponentielles :

$$\Psi(u) = \frac{1}{(1 + \theta)(r_2 - r_1)} \{(\rho - r_1)\exp(-r_1u) + (r_2 - \rho)\exp(-r_2u)\}$$

où

$$r_1 = \frac{\rho + \theta(\beta_1 + \beta_2) - [\{\rho + \theta(\beta_1 + \beta_2)\}^2 - 4\beta_1\beta_2\theta(1 + \theta)]^{1/2}}{2(1 + \theta)},$$

$$r_2 = \frac{\rho + \theta(\beta_1 + \beta_2) + [\{\rho + \theta(\beta_1 + \beta_2)\}^2 - 4\beta_1\beta_2\theta(1 + \theta)]^{1/2}}{2(1 + \theta)},$$

et

$$p = \frac{a\beta_1^{-1}}{a\beta_1^{-1} + (1 - a)\beta_2^{-1}},$$

$$\rho = \beta_1(1 - p) + \beta_2p.$$

L'exécution du programme ci-dessous nous permet d'estimer la probabilité de ruine, pour des sinistres obéissant à un mélange de deux lois exponentielles, les résultats cités dans le tableau (4.4),

```

u=seq(0,10)
a=0.900
b=0.075088
q=0.0584
t=0.3
p=(q*a^(-1))/(q*a^(-1)+(1-q)^(b-1))
rho=a*(1-p)+b*p
r1=((rho+t*(a+b)+((rho+t*(a+b))^2-4*a*b*t*(1+t))^(0.5)))/(2*(1+t))
r2=((rho+t*(a+b)+((rho+t*(a+b))^2+4*a*b*t*(1+t))^(0.5)))/(2*(1+t))
f=function(u)
{
  1/((1+t)*(r2-r1))*((rho-r1)*exp(-r1*u)+(r2-rho)*exp(-r2*u))
}
x11()
plot(u,f(u),type='o',col="blue",lwd=3,"ylab"=expression(psi(u)))

```

FIGURE 4.7 – Programme de simulation de la probabilité de ruine dans le cas où les sinistres suivent un mélange de deux lois exponentielles.

u	0	1	2	3	4	5
$\Psi(u)$	0.7692308	0.3101132	0.1249593	0.0503255	0.0202566	0.0081487

TABLE 4.4 – Approximation de la probabilité de ruine avec des sinistres obéissant à un mélange de deux lois exponentielles de paramètres  $\beta_1 = 0,9$ ,  $\beta_2 = 0.075088$ ,  $a = 0,0584$  et avec un chargement de sécurité  $\theta = 0,3$ .

**Interprétation des résultats** Le Tableau (4.1) montre que toutes les valeurs de la probabilité de ruine obtenues pour une réserve initiale inférieure à 10 sont presque identiques, ce qui signifie que les valeurs simulées sont très proches des valeurs exactes de la probabilité de ruine. Les figures (4.4), (4.6), (4.8) montrent que, pour toutes les distributions des montants de réclamation considérés, la variation de la probabilité de ruine est inversement proportionnelle à la variation de la réserve initiale. En augmentant la réserve initiale, la probabilité de ruine se rapproche au fur et à mesure de zéro.

## Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté le modèle de risque classique auquel on a effectué une simulation par la méthode de Monté Carlo. On a élaboré un simulateur sous le langage R nous permettant de simuler la probabilité de ruine avec des sinistres obéissant à différentes lois de probabilité.

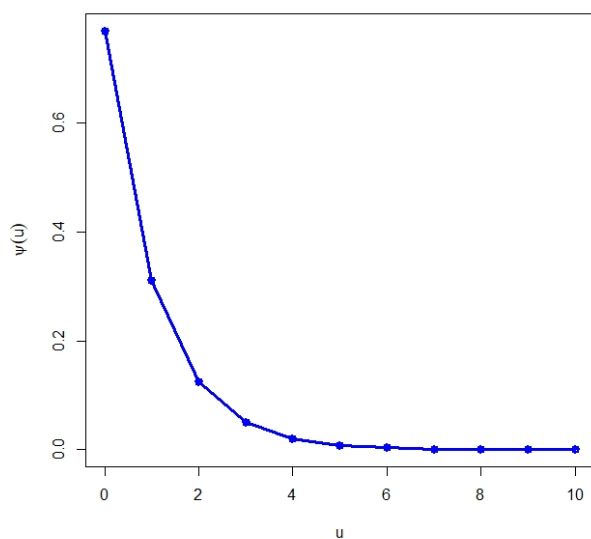


FIGURE 4.8 – Variation de la probabilité de ruine, avec des sinistres obéissant à un mélange de deux lois exponentielles, en fonction de la réserve initiale  $u$ .



## Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons vu dans un premier temps que le modèle de risque est un outil fort utile pour les actuaires. Il permet de présenter, de façon claire l'évolution de la richesse d'une compagnie d'assurance par un processus stochastique. A l'aide de ce processus, nous avons défini plusieurs mesures de risque, en particulier, la probabilité de ruine qui est une caractéristique très importante dans un modèle de risque. la recherche d'approximations pour la probabilité de ruine dans les modèles de risque a été l'un des points principaux en mathématiques de l'assurance. Pour cela, nous avons présenté quelques techniques d'approximation de cette dernière.

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à deux méthodes d'approximation de la probabilité de ruine dans un modèle de risque classique, à savoir : la méthode de comparaison stochastique et la simulation.

Dans un premier temps, nous avons présenté quelques notions principales de la théorie de la ruine, nous nous sommes intéressés au modèle de risque classique, en particulier à la probabilité de ruine, pour laquelle nous avons défini quelques approximations et expressions exactes. En outre, nous avons donné un aperçu général sur les différents ordres stochastiques appliqués au risque en assurance.

Par la suite, nous avons étudié quelques problèmes de comparabilité pour un modèle de risque classique, en utilisant la méthode de comparaison stochastique. L'avantage de ce type de méthodes d'approximation réside dans le fait que des résultats explicites puissent être obtenus pour des situations relativement complexes où les méthodes numériques et les expériences de simulation constituaient souvent la seule alternative. On a établi des conditions de comparabilité sur les paramètres d'un modèle de risque classique au sens des ordres likelihood ratio et stop-loss.

Finalement, on a conçu un simulateur pour estimer la probabilité de ruine pour différentes distributions des montants des sinistres. Nous avons obtenu

des résultats numérique et graphique.

Parmi les perspectives de recherche, citons :

- Introduire d'autres ordres stochastiques pour l'étude du modèle considéré.
- Comparaison des résultats obtenus avec les résultats obtenus avec d'autres méthodes.
- Elargir le champ d'application de ces méthodes au modèles de risque multidimensionnel.

# Bibliographie

- [1] A. Charpentier. Value at risk et probabilité de ruine, entre vaccination et banque d'affaires. Risques, vol 76. Pages : 103-106, 2008.
- [2] A. GROUS. Éléments d'analyse de la fiabilité et du contrôle de qualité : statistiques appliquées par l'exemple. Lavoisier, 2013.
- [3] A. Müller, and D. Stoyan . Comparison methods for stochastic models and risk. John wiley and sons, ltd , 2002.
- [4] A. Touazi, et N. Benmamas. Illustration numérique de la dualité entre un système de file d'attente et un modèle de risque. Mémoire de master. Université de a. Mira. Béjaia, 2011.
- [5] B. Silverman. Density estimation for statistic and data analysis. chapman and hall. London, 1986.
- [6] B. Sundt. On multivariate Panjer Recursions. Astin bulletin 29. pages : 29–45, 1999.
- [7] C. Suquet. Assurances et probabilités . Université des sciences et technologies de Lille, 2007 .
- [8] D. Aïssani et Collaborateurs. Actuariat et mathématiques financières. Actes du workshop national. Béjaia, mai 2009.
- [9] D. Jean-Jacques,S.Gilbert. Approches statistiques du risque. Editions technip , 2014.
- [10] D. Stoyan. Comparaison methods for queues and others stochastic models. Darel j daley, 1983.
- [11] E. S. Andersen. On the collective theory of risk in case of contagion between claims. Transaction of the 15th international congress of actuaries. New york, 1957.
- [12] F. Adékambi. Les sommes de renouvellement escomptées avec taux d'intérêt général. Thèse de doctorat université de Laval, 2011.

- [13] F. Avram. Un aperçu de la théorie du risque, 17 mars 2018 .
- [14] F. De Vylder, E. Marceau. Explicit analytic ruin probabilities for bounded claims. *Insurance : mathematics and economics* 16. Pages 79–105, 1995.
- [15] F. De Vylder, M. Goovaerts, and E. Marceau. The bi-atomic minimal solution of Schmitter’s problem. *Insurance : mathematics and economics* 20. Pages : 59–78, 1997.
- [16] G. E. Willmot. Refinements and distributional generalizations of Lundberg’s inequality. *Insurance : mathematics and economics* 15. Pages : 49–63, 1994.
- [17] G. E. Willmot and X. S. Lin. Simplified bounds on the tails compound distributions. *Journal of appl. Probability* 34. Pages : 127–133, 1997.
- [18] H. H. Panger, and G. E. Willmot. *Insurance risk models*, society of actuaries, schaumburg,il, 1992.
- [19] H. Schmidli. *Risk theory*. Springer, 2017.
- [20] H. U. Gerber, and E. SW Shiu. The joint distribution of the time of ruin, the surplus immediately before ruin, and the deficit at ruin. *Insurance : mathematics and economics* 21.2. Pages : 129-137, 1997.
- [21] J. Grandell. *Aspect of Risk theory*. springer-verlage. New york, 1991.
- [22] J. L. Teugels. Estimation of the ruin probability. *Insurance : mathematics and economics* 1. Pages : 169–175, 1982.
- [23] K. burnecki, P. Mista. Ruin probabilities in infinite time. Hugo steinhaus center. wroclaw university of technology-poland. ([www. im. pwr. wroc. pl/~ hugo/hejnice arp main. pdf](http://www.im.pwr.wroc.pl/~hugo/hejnice_arp_main.pdf)), 2005.
- [24] K. Croux and N. Veraverbeke. Nonparametric estimators for the probability of ruin. *Insurance : mathematics and economics* 19, issue 2-3. Pages : 127–130, September 1990.
- [25] L. Tlilane, H. ALLAOUA , Z. Benouaret et D. Aissani. Quelques méthodes d’approximation des probabilités de ruine et application au modèle de Lundberg, 2016.
- [26] L. Tlilane, H. Allaoua, Z. benouaret, et D. Aissani. Calcul de la probabilité de ruine. Unité de recherche Lamos. Université de Bejaia, Algérie, 2015.
- [27] M. Denuit, A. charpentier. C. Bébéar. *Mathématiques de l’Assurance non-vie. Tome I : Principes Fondamentaux de théorie du Risque*, 2004.
- [28] N. Baradel. *Théorie du risque-FA2F2*, 18 mai 2020.

- [29] N. L. Bowers, H. E. Gerber. Actuariel mathematics. Society of Actuaries. Schaumburg, 1997.
- [30] N. V. Kartashov. Strong Stable Markov Chains. VSP, Utrecht, 1996.
- [31] R. Leblanc. Étude de l'effet de la dépendance dans le modèle collectif de risque. Département de mathématiques et de statistique, Université Laval, Québec, Avril 2000.
- [32] S. Asmussen and T. Rolski. Computational methods in risk theory : a matrix algorithmic approach. Insurance : mathematics and economics 10. Pages : 259–274, 1991.
- [33] S. A. Klugman, H. H. Panjer, and G. E. Willmot. Loss Models : From Data to Decisions. Wiley, new york, 1998.
- [34] S. A. Klugman. Loss models : From data to decisions. Wiley. New york, 1998.
- [35] S. Asmussen, H. Albrecher. Ruin Probabilities (2nd Edition). World scientiic, 2010.
- [36] T. ROLSKI, H. Schmidli. V. Schmidt, et al. Stochastic processes for insurance and finance. John wiley et Sons, 2009.
- [37] V. Kalashnikov and D. Konstantinidis. Ruin Probability. Fundamental'naya i Prikladnaya Matematika, 2, Nr 4, 1996.
- [38] V. Kalashnikov and G. Sh. Tsitsishvili. On the stability of queueing systems with respect to disturbances of their distribution functions. Queueing theory and reliability . Pages : 211–217, 1971.
- [39] W. S. Chan, H. Yang, and L. Zhang. Some results on ruin probabilities in a two-dimensional risk model. Insurance : mathematics and economics 32. Pages : 345–358, 2003.
- [40] X. S. Lin. Tail of compound distributions and excess time. Journal of applied probability, 33 . Pages : 184–195, 1996.
- [41] Z. Benouaret. Stabilité dans les modèles de risque. Mémoire de magister en mathématiques appliquées. Université de Béjaïa , 2012.
- [42] Z. Kenioua. Sur les mesures de risques et leurs applications. Thèse de doctorat. Université Mohamed Kheider-Biskra, 2017.

# Annexe

## 1. Distributions du nombre de réclamations

On donne dans la première partie de l'annexe, une liste des lois discrètes les plus couramment utilisées en actuariat pour modéliser le nombre de sinistres (ou de réclamations). Ces informations sont extraites de l'annexe de Klugman et al. (1998) [31, 33]. On note par  $P_N$  la fonction génératrice de  $N$ .

### 1. Poisson

$$\begin{cases} P(N = n) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \\ E(N) = \lambda \\ Var(N) = \lambda \\ P_N(t) = e^{-\lambda(t-1)} \end{cases}$$

### 2. Binomiale (m,p)

$$\begin{cases} P(N = n) = \binom{m}{n} p^n (1-p)^{m-n}, & n = 0, 1, \dots, m \\ E(N) = mp \\ Var(N) = mp(1-p) \\ P_N(t) = [1 + (1-p)(t-1)]^m \end{cases}$$

### 3. Binomiale négative (r,p)

$$\begin{cases} P(N = n) = \binom{n+r-1}{r-1} p^r (1-p)^n, & n = 0, 1, \dots \\ E(N) = \frac{rp}{1-p} \\ Var(N) = \frac{rp}{(1-p)^2} \\ P_N(t) = \left[ 1 + \frac{(1-p)}{p}(t-1) \right]^r \end{cases}$$

### 4. Géométrique (p)

$$\begin{cases} P(N = n) = p(1-p)^n, & n = 0, 1, \dots \\ E(N) = \frac{(1-p)}{p} \\ Var(N) = \frac{(1-p)}{p^2} \\ P_N(t) = 1 + \frac{(1-p)}{p}(t-1) \end{cases}$$

### 5. Poisson Inverse Gaussienne ( $\mu, \beta$ )

$$\begin{cases} P(N = 0) = e^{-\mu(\sqrt{1-2\beta}-1)/\beta} \\ P(N = n) = p_0 \frac{\mu^n}{n!} \left\{ \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-1+m)!}{(n-1+m)!m!} \left( \frac{\beta}{2\mu} \right)^m (1+2\beta)^{-\frac{n+m}{2}} \right\} \\ E(N) = \frac{\alpha}{\beta} \\ Var(N) = \frac{\alpha(\beta+1)}{\beta^2} \\ P_N(t) = e^{-\mu(\{1+2\beta(1-t)\}^{1/2}-1)/\beta} \end{cases}$$

Distribution	a	b	$p_0$
Poisson	0	$\lambda$	$e^{-\lambda}$
Binomiale	$\frac{-q}{1-q}$	$(m+1)\frac{q}{1-q}$	$(1-q)^m$
négative Géométrique	$\frac{\beta}{1+\beta}$	0	$(1-\beta)^{-r}$

TABLE 4.5 – Les distributions membres de la classe  $(a, b, 0)$

## 2. Distributions du montant d'une réclamation

Nous présentons dans cette deuxième partie de l'Annexe, une liste des lois continues les plus couramment utilisées en actuariat pour modéliser le montant d'une réclamation généré à l'intérieur d'un portefeuille. Ces informations sont extraites de l'annexe de Klugman et al. (1998) [31, 33]. On note par  $M_X$  la fonction génératrice et par  $\phi_X$  la fonction caractéristique de  $X$

### 1. Exponentielle ( $\lambda$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0 \\ F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x > 0 \\ E(X) = \frac{1}{\lambda} \\ Var(X) = \frac{1}{\lambda^2} \\ M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}, \quad s < \lambda \\ \phi_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}, \quad s < \lambda \end{array} \right.$$

### 2. Gamma ( $\alpha, \beta$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}, \quad 0 \leq x < \infty, \alpha, \beta > 0 \\ F_X(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} \\ E(X) = \alpha\beta \\ Var(X) = \alpha\beta^2 \\ M_X(t) = \left(\frac{1}{1-\beta t}\right)^\alpha, \quad t < \frac{1}{\beta} \\ \phi_X(t) = \left(\frac{1}{1-\beta it}\right)^\alpha, \quad t < \frac{1}{\beta} \end{array} \right.$$

### 3. Log-normale ( $\mu, \sigma$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} f_X(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left\{\frac{\log(x)-\mu}{\sigma}\right\}^2}, \quad x \geq 0 \\ F_X(x) = \Phi\left(\frac{\log(x)-\mu}{\sigma}\right), \quad x \geq 0 \\ E(X) = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}} \\ Var(X) = (e^{\sigma^2} - 1)e^{2\mu+\sigma^2} \end{array} \right.$$



#### 4. Pareto ( $\alpha, \beta$ )

$$\begin{cases} f_X(x) = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha+1}, & x > \beta \\ F_X(x) = 1 - \left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha, & x > 0 \\ E(X) = \frac{\alpha\beta}{\alpha-1} \\ Var(X) = \frac{1}{\alpha^2} \end{cases}$$

#### 5. Burr ( $\alpha, \theta, \delta$ )

$$\begin{cases} f_X(x) = \frac{\alpha\delta(\theta)^\delta}{x\{1+(x/\theta)^\delta\}^{\alpha+1}} \\ F_X(x) = 1 - \left\{ \frac{1}{1+(x/\theta)^\delta} \right\}^\alpha, & x > 0 \\ E(X) = \frac{\theta\Gamma(1+1/\delta)\Gamma(\alpha-1/\delta)}{\Gamma(\alpha)} \\ Var(X) = \frac{\theta^2\Gamma(1+\frac{2}{\delta})\Gamma(\alpha-\frac{2}{\delta})}{\Gamma(\alpha)} - \left\{ \frac{\theta\Gamma(1+1/\delta)\Gamma(\alpha-1/\delta)}{\Gamma(\alpha)} \right\}^2 \end{cases}$$

#### 6. Pareto généralisée ( $\alpha, \tau, \theta$ )

$$\begin{cases} f_X(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\tau)\theta^\alpha x^{\tau-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\tau)(x+\theta)^{\alpha+\tau}}, & x > 0 \\ F_X(x) = \beta(\tau, \alpha \frac{x}{x+\theta}) = \frac{\Gamma(\alpha+\tau)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\tau)} \int_0^{\frac{x}{x+\theta}} t^{\tau-1}(1-t)^{\alpha-1} dt, & x > 0 \\ E(X) = \frac{\theta\Gamma(\tau+1)\Gamma(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\tau)} \\ Var(X) = \frac{\theta^2\Gamma(\tau+2)\Gamma(\alpha-2)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\tau)} - \left\{ \frac{\theta\Gamma(\tau+1)\Gamma(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\tau)} \right\}^2 \end{cases}$$

#### 7. Weibull ( $\delta, \beta$ )

$$\begin{cases} f_X(x) = \delta x^{\delta-1} e^{-x^\delta/\beta}, & x \geq 0 \\ F_X(x) = 1 - e^{-x^\delta/\beta}, & x > 0 \\ E(X) = \beta^{1/\delta} \Gamma(1+1/\delta) \\ Var(X) = \beta^{2/\delta} \{ \Gamma(1+2/\delta) - \Gamma^2(1+1/\delta) \} \end{cases}$$

## 8. Inverse gaussienne $(\mu, \beta)$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_X(x) = \mu(2\pi\beta x^3)^{-1/2} e^{-(x-\mu)^2/(2\beta x)}, \quad x > 0 \\ F_X(x) = \Phi\{(x-\mu)/\sqrt{\beta x}\} + e^{2\mu\beta^{-1}} \Phi\{-(x-\mu)/\sqrt{\beta x}\} \\ E(X) = \mu \\ \text{Var}(X) = \mu^3\beta \\ M_X(t) = \frac{\exp(\mu/\beta)}{\exp\left(\sqrt{\frac{\mu^2}{\beta^2} - \frac{2\mu^2 it}{\beta}}\right)} \\ \phi_X(t) = \frac{\exp(\mu/\beta)}{\exp\left(\sqrt{\frac{\mu^2}{\beta^2} - \frac{2\mu^2 it}{\beta}}\right)} \end{array} \right.$$