REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE AKLI MOHAND OULHADJE-BOUIRA

Faculté des Sciences et des Sciences Appliquées
Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'étude

Présenté par :
Naouri Mostafa
Lounaci Brahim

En vue de l'obtention du diplôme de **Master 02** en **mathématique:**

Spécialité : RO

Thème :

Chaine de markov et leurs applications

Devant le jury composé de :

Mohamed Boudref	MCB	Univ. de Bouira	Président
Madjid Birouche	MAA	Univ. de Bouira	Encadreur
Hamdouni Omar	MAA	Univ. de Bouira	Examinateur
Demmouche Nacer	MAA	Univ. de Bouira	Examinateur

Année Universitaire 2018/2019

REMERCIMENTS

Nous remercions tout d'abord **Allah** le tout puissant de m'avoir donnée le courage et la patience afin de réaliser notre travail.

Nous tenons à exprimer nos profonde gratitude et nos remerciements les plus sincères vers notre promoteur **Ms MADJID BIROUCHE** , sous la direction du quel nous avons eu le plaisir de travailler. Ses conseils, ses critiques et pour sa patience et son encouragement tout au long de ce travail .

Nous exprimons nos sincéres remerciements à les membres du jury **BOUDREF AHMED MOHAMMED** le président et **M DEMMOUCH NACER**, **M HAMDOUNI OMAR** l'examinateur d'avoir accepter de juger notre mémoire.

Nous remercions tous ceux qui de prés ou de loin ont contribué à la réalisation de ce mémoire.

Dédicace

A la mémoire mes grands parents.

A mes parents.

A mes fréres et soeurs.

A mes niéces et neveux : aya , lilya , hadil, silin , mohammed.

A ma belle famille.

A mes amis(es).

Brahim

Dédicace

A la mémoire mes grands parents.

A mes parents.

A ma femme .

A mes fréres et soeurs.

A mes niéces et neveux.

A ma belle famille.

A mes amis(es).

mostafa

Table des matières

Introduction Générale :

Une chaîne de Markov est un processus aléatoire $(X_n)_{n\in N}$dont les transitions sont données par une matrice stochastique $P(X_n\ X_{n+1})$.Ces processus vérifient la propriété de Markov, c'est-a'-dire qu'observé sa' partir d'un temps (d'arrêt)T,$(X_{T+n})_{n\in N}$ ne dépend que de X_T et est de nouveau une chaîne de Markov. Les états d'une chaîne de Markov peuvent être classés en deux catégories : les états transitoires,qui ne sont visités qu'un nombre fini de fois presque (p.s.), et les états récurrents,qui une fois atteints sont visités p.s. une infinit fois, ainsi que tous les autres états dans la même classe de récurrence. Pour une chaîne de Markov irréductible récurrente et la loi marginale du pro-cessus convergent soit vers l'unique mesure de probabilité P-invariante, soit vers le vecteur nul (récurrence nulle). Cette théorie s'applique en particulier aux marches aléatoireset aux modélesdefiles d'attente [8]

Un processus stochastique est un phénoméne qui évolue dans le temps d'une maniére aléatoire. La vie quotidienne et la science nous donnent beaucoup d'exemples de ce genre de phénoméne, ou' en tout cas des phénoménes qui peuvent être compris de cette facon. La météo ; la population d'une ville ; le nombre de personnes dans une file d'attente et la position d'une particule de pollen dans un fluide, sont des exemples de processus stochastiques. Ce dernier fut étudié pour la premiére fois par le botaniste Robert Brown en 1827 et recu le nom de mouvement brownien. Il joue un rôle fondamental dans la théorie des processus aléatoires, un peu comme la distribution gaussienne dans la théorie des probabilités. En 1920, N. Wiener donne une définition mathématique du mouvement brownien. Il étudie en particulier ses trajectoires qui sont continues mais nulle part différentiables (ucun moment la vitesse ne peut être dnie car les changements de direction sont trop rapides). Dans les ann quarantes, K. Itô développa un calcul différentiel spécifique au mouvement brownien [5]

La fiabilité est née, sans doute, au cours de la 2^{ieme} guerre mondiale. Actuellement, l'étude de fiabilité devient une discipline art entiére. Les problémes économiques (cout de défaillance, gestion de personnel de maintenance, etc) rendent nécessaire la connaissance de fiabilité du systéme. L'analyse de la fiabilité constitue une phase indispensable dans toute étude de sûreté de fonctionnement d'un systéme. Il est ignaler que l'analyse de fiabilité dans n'importe quel domaine est un outil trés important pour caractériser le comportement d'un systéme dans les différentes phases de vie.

La théorie de la fiabilité a pour objectif d'étudier l'aptitude de dispositifs techniques (machines, équipements,...), ccomplir une fonction requise, dans des conditions données, durant un temps donné. Actuellement, c'est une discipline art entiére. Prévoir la fiabilité d'un systéme est essentielle pour des problémes de sécuritystémes de freinage, systémes nucléaires, systémes informatiques...). La quasi-impossibilité de réparer certains matériels (satellites), les problémes économiques coût des défaillances, gestion du personnel de maintenance, maintenance des stocks des piéces de rechange...) rendent nécessaire la connaissance de la fiabilité des systémes utilisés. Les défaillances se produisant généralement de facon aléatoire, il est logique de faire appel au calcul des probabilités pour étudier des problémes de fiabilité. Ainsi, nous définissons la fiabilité d'un dispositif comme étant sa probabilité de fonctionner correctement pendant une durée donnée, ou, ce qui revient au même, la probabilité qu'aucune défaillance ne se produise pendant cette durée.[1]

Chapitre 1

Processus Aléatoire :

Introduction :

Les processus aléatoires décrivent l'évolution d'une grandeur aléatoire en fonction du temps. Il existe de nombreuses applications des processus aléatoires notamment en physique statistique (par exemple le ferromagnétisme, les transitions de phases, etc.), en biologie (évolution, génétique et génétique des populations), médecine (croissance de tumeurs, épidémie), et bien entendu les sciences de l'ingénieur. Dans ce dernier domaine, les applications principales sont pour l'administration des réseaux, de l'Internet, des télécommunications et bien entendu dans les domaines économique et finance.[6]

1.1 Processus stochastique

Définition 1 :

On peut définir un processus stochastique comme étant une famille $(X_t)_{t \in T}$ de variables aléatoires indexées par le temps t. Les mots processus et stochastique signifient respectivement fonction et aléatoire.

Alors qu'une variable aléatoire X associe à chaque $\omega \in \Omega$ une réalisation $X(\omega)$ un processus stochastique $(X_{t \in T})$ associe á chaque une fonction (ou trajectoire) $(X_t(\omega)_{t \in T})$;

$T \to E$

$t \to X_t(\omega)$

oú E est l'espace d'arrivée des variables aléatoires $\{X_t\}$ .Passer des variables aléatoires aux processus stochastiques revient á passer en analyse des points aux fonctions. itre d'exemple, la trajectoire d'une mouche en fonction du temps peut $\hat{e}$tre modélisée par un processus stochastique aleurs dans E=R^3 Lorsque l'ensemble des temps T est au plus dénombrable (par exemple $T = N$), on parle de processus stochastiques á temps discret. Lorsqu'il est continu (i.e.$T = [0, t_0]$ ou $T = \mathbb{R}^+$), on parle de processus stochastiques á temps continu Dans ce travail, on abrège les expressions "variable aléatoire" en v.a. et "indépendantes et identiquement distribuées " en i.i.d. Les situations réelles pouvant être modélisées par des processus stochastiques sont nombreuses . [1]

Définition 2 :

On appelle processus stochastique une famille $X_t, t \in T$ de variables aléatoires définies dans le même espace de probabilité $(\Omega; F; P)$ et á valeurs dans l'espace mesurable $(E; \xi)$, $t \in T$ représente une date

Lorsque $T \subseteq \mathbb{Z}$, on parlera de processus á temps discret (suite stochastique) on notée $(X_n, n \in \mathbb{N})$

lorsque T est un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$, on parlera de processus á temps continu.[5]

Définition 4 :

Un processus (aléatoire ou stochastique) rend compte de l'évolution, d'un phénomène aléatoire ; au cours du temps,. La réalisation d'un processus est appelée trajectoire.

On note $X(t)$ l'état du phénomène au temps t. $X(t)$ est une variable aléatoire.

– La loi de $X(t)$ dépend en général de t.

– Pour deux dates t_1 et t_2 quelconques, $X(t_1)$ et $X(t_2)$ ne sont, en général, pas indépendantes.
Un processus prend ses valeurs dans un espace des états et évolue dans un espace des temps.[12]

Espace des temps.

On note T l'ensemble dans lequel évolue le temps. On peut distinguer :

– les processus ‘à temps discret pour lesquels les temps sont des entiers successifs : $T = 0, 1, ...m, ...$ On note X_m la valeur du processus à la date $t = m$.

– les processus à temps continu pout lesquel $\mathbb{T}$ est inclus dans $\mathbb{R}$. On note X_t la valeur du processus à la date Cet espace $\mathbb{T}$ est parfois appelé espace des indices. On peut en effet définir des processus évoluant non pas dans le temps mais dans l'espace ; dans ce cas $\mathbb{T}$ peut avoir plusieurs dimensions (exemple : hauteur des vagues en fonction de la latitude et de la longitude).

On n'étudiera ici que des processus temporels pour lesquels $\mathbb{T}$ a une seule dimension.[12]

Espace des états.

On note E l'espace dans lequel les variables $X(t)$ prennent leurs valeurs. On peut distinguer :

- les espaces des états dénombrables, finis ou infinis ;

- les espaces des états continus.

Le mouvement brownien qui décrit la trajectoire d'une particule au cours du temps est un exemple de processus space des états continus.

On n'étudiera ici que des processus pour lesquels E est dénombrable, et le plus souvent fini.[12]

1.1.1 Exemples de processus aléatoires :

Exemple 1 :

a) Signal télégraphique :

Ce processus, utilisé en théorie de la communication, rend compte de l'état d'occupation d'une ligne
A_k : instant du début de la K^{ime} communication ;

D_k : instant du la fin de la K^{ime} communication ;

$$T = \mathbb{R}_+ \ \ ; \ \ E = \{-1, 1\}$$

$X_t = 1$ si la ligne est libre, c'est-à-dire s'il existe k tel que $D_k \leq t < A_{k+1}$
$X_t = -1$ si la ligne est occupée, c'est-à-dire s'il existe k tel que $A_k \leq t < D_k$
On a là, un processus (dit à créneaux), markovien, à accroissements indépendants, homogène dans le temps.

b) Processus de ramification :

Ce processus est utilisé pour suivre l'évolution de certaines populations animales ou cellulaires, ou bien d'un nom chez les humains.
Chaque individu génère, indépendamment des autres, un nombre aléatoire de descendants. X_n est le nombre d'individus total à la n^{ime} génération

$$E = \mathbb{N} \ \ ; \ \ T = \mathbb{N}$$

Le processus est markovien.

c) Files d'attente :

Ces processus sont utilisés en recherche opérationnelle. Des clients se présentent à des guichets à des temps aléatoires, pour y recevoir des services de durée aléatoire (ex : banque, magasin, péage d'autoroute...)X_t est le nombre de clients en attente à l'instant t.

$$E = \mathbb{N} \ \ ; \ \ T = \mathbb{R}$$

d) Mouvement Brownien :

Dans un gaz, chaque particule est soumise aux impacts incessants de ses voisines. Les collisions provoquent des déplacements.
X_t est la position d'une particule donnée à l'instant t.

$X_t - X_s$est le déplacement pendant $[t; s[$: c'est la somme d'un grand nombre de petits déplacements et il sera légitime de supposer que sa loi est une loi Normale.

$$E \subset \mathbb{R} \ \ ; \ \ T = \mathbb{R}_+$$

Le processus est à accroissements indépendants, homogène dans le temps.
Ce travail a pour objectif de donner quelques éléments de théorie sur les processus aléatoires généraux : processus de Markov, de Poisson, de naissance et de mort, puis sur les systèmes d'attentes : files uniques et réseaux, avec entre temps une application à la fiabilité. [9]

Exemple 2 :

1. Auto fécondations :

ε est l'ensemble (fini) des génotypes possibles et $\mathbb{T}$ est discret puisqu'il représente les générations successives. Exemple : E = homozygote, hétérozygote, $\mathbb{T} = 0, 1, 2...$,X_m est le génotype du même descendant (chaque génération est composée d'un seul individu, voir Fig.1.1,

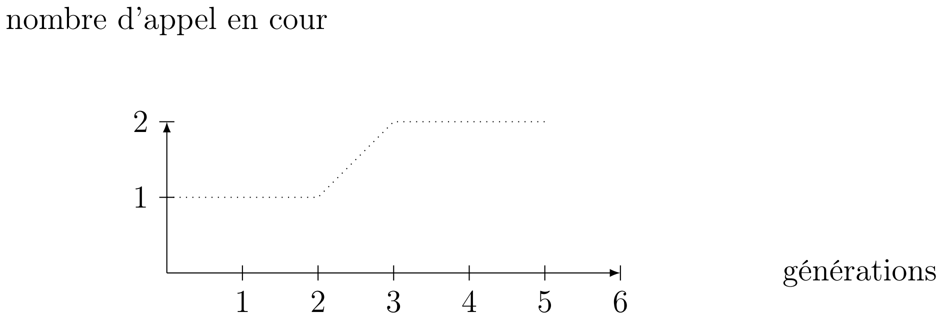


FIGURE 1.1 – Génotypes d'individus obtenus par auto fécondations successives

2. Appels téléphoniques :

ε est fini car la capacité du standard est finie et $\mathbb{T}$ est continu car les appels peuvent survenir à n'importe quel moment. Exemple : $\varepsilon = 0, 1, ..10$,$\mathbb{T} = [8h; 17h30]$,$X(t)$ est le nombre d'appels en attente au temps t (voir Fig.1.2).

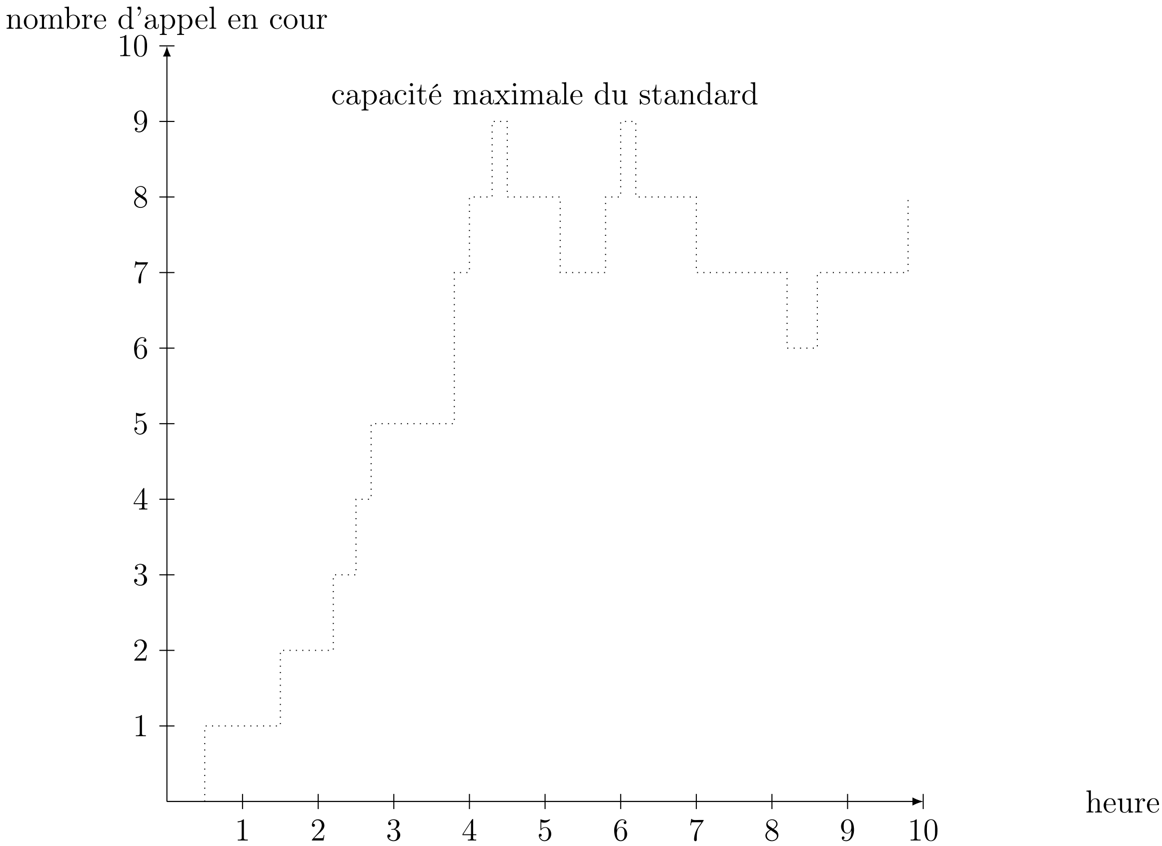


FIGURE 1.2 – – Nombre d'appels en attente à un standard téléphonique

3. Taille d'une famille :

ε est infini (dénombrable) car le nombre de descendants n'est pas limité et $\mathbb{T}$ est discret puisqu'il représente les générations successives. Ici $\varepsilon = \mathbb{T} = \mathbb{N}$, X_m est le nombre de descendants au bout de m générations (voir Fig.1.3)

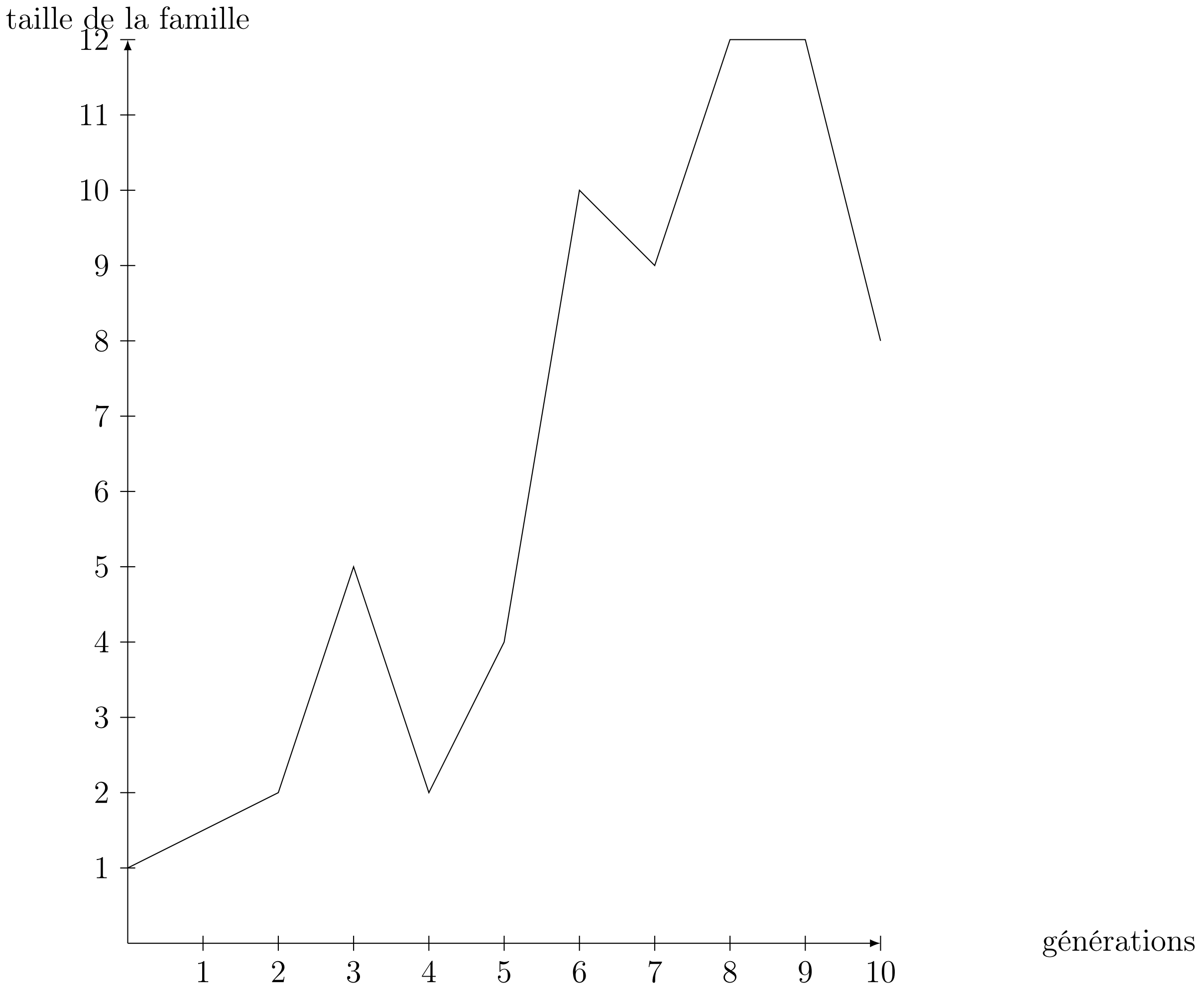


FIGURE 1.3 – Taille d'une famille au cours des générations successives

4. Dynamique d'une population :

ε est infini si on suppose que la taille de la population n'est pas limitée et $\mathbb{T}$ est continu car les individus peuvent naître ou mourir à n'importe quel moment. Ici $\varepsilon = \mathbb{N}$ et $\mathbb{T} = [0; +\infty[$, $X(t)$ est la taille de la population au temps t. [12]

1.2 Processus de Markov :

Définition :

Le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est dit de Markov, si

a) axiome de Markov :

pour tout $t_1 < t_2 < ..... < t_n < t_{n+1}$. pour tout $x_1, x_2, ..., x_{n+1} \in E$:

$$P([X_{tn+1} = x_{n+1}]/[X_{t1} = x_1]....... \cap [X_{tn} = x_n]) = P([X_{tn+1} = x_{n+1}]/[X_{tn} = x_n])$$

b)axiome d'homogénéité :

pour tous s et t, pour tous $x, y \in E$, $P([X_{t+s} = y]/X_s = x)$ ne dépend que de t (et non des instants s et $t + s$).

Propriétés :

1- P(t) est une matrice stochastique, .i.e. $p_{x,y}(t) \geq 0$ et $\sum_{y\in E} p_{x,y}(t) = 1$ pou tout x.

2- Pour tout s et pour tout t, $P(s+t) = P(s)P(t)$

3- Pour tout s et pour tout t, $\pi(s+t) = \pi(s)P(t)$

Démonstration :

1-

$P_{x,y}(t) \in [0,1]$ car c'est une probabilité. De plus, la ligne x correspond à la loi $P_{Xt}^{[X_0=x]}$ et on a bien

$\sum_{y\in E} p_{x,y}(t) = \sum_{y} P^{[X_0=x]}([X_t = y]) = 1$

2-

pour calcule $P_{x,y}(t+s) = P^{X_0=x}([X_{t+s} = y])$ on va faire intervenir les différents états pouvant être occupés à l'instant t :

$$\begin{aligned} P^{X_0=x}([X_{t+s} = y]) &= \frac{P([X_0=x]\cap[X_{t+s}=y])}{P([X_0=x])} \\ &= \sum_{z\in E} \frac{P([X_0=x]\cap[X_t=z]\cap[X_{t+s}=y])}{P([X_0=x])} \\ &= \sum_{z\in E} \frac{P([X_{t+s}=y]/[X_0=x]\cap[X_t=z])P([X_0=x]\cap[X_t=z])}{P([X_0=x])} \\ &= \sum_{z\in E} P([X_{t+s} = y]/[X_t = z]P([X_t = z])/[X_0 = x] \end{aligned}$$

d'après l'axiome de Markov (X_0 n'apporte rien de plus que Xt pour déterminer la loi de X_{t+s}). Ainsi, on a

$P_{x,y}(t+s) = \sum_{z\in E} P_{x,z}(t)P_{z,y}(s)$

qui est le coefficient (x, y) de la matrice produit P(t)P(s).

3-

$\pi_y(t+s) = P([X_t + s = y]) = \sum_{x\in E} P([X_t + s = y]/[X_t = x])P([X_t = x])$ c'est-à-dire

$\pi_y(t+s) = \sum_{x\in E} \pi_x(t)p_{x,y}(s)$ [9]

1.2.1 Types de processus de Markov :

On peut également distinguer deux types d'espace états, selon qu'il est discret ou continu comme respectivement dans les types 1 et 3 et les types 2 et 4 . [1]
On appelle espace des états (des phases) l'ensemble E oú les variables X_n prennent leurs valeurs. L'ensemble E peut $\hat{e}$ tre discret ou continu. Par conséquent, on distingue quatre types de processus :

1.processus Un espace des temps T discret

2.processus Un espace des temps T continue

3. processus Un espace des états E discret

4. Processus Un espace des états E non discret [5]

1. Processus un Espace d'états E discret :

Lorsque les variables aléatoires successives sont des variables discrètes munies d'une fonction de probabilité, on parle de chaîne de Markov.

Bien que les chaînes de Markov s'appliquent à des phénomènes dont l'aspect temporel est généralement sans intérêt, on peut associer aux valeurs successives X_i, les instants t_i,. La propriété markovienne selon laquelle la probabilité d'un état du système ne dépend que de son état précédent à travers une probabilité conditionnelle appelée probabilité de transition s'exprime par :

$$P(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}; x_{n-2}, t_{n-2}; ......; x_1, t_1; x_0, t_0) = P(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1})$$

$$t_n > t_{n-1} > .... > t_1 > t_0$$

Une chaîne de Markov est entièrement définie par la probabilité au premier ordre $P(x, t)$ et la probabilité de transition. On obtient par exemple la probabilité au second ordre par :

$$P(x_1, t_1; x_2, t_2) = P(x_1, t_1)P(x_2, t_2 | x_1, t_1) \; t_2 > t_1$$

Elle est donc également définie par la probabilité au second ordre. Enfin, elle peut être définie par l'état initial et la probabilité de transition.
c'est-á-dire fini ou dénombrable. Il sera, dans ce cas, souvent pratique d'identifier E avec une partie de $\mathbb{N}$ ou de$\mathbb{Z}$.[9]

2 : processus un espace d'états E continu :

Les chaînes de Markov trouvent des applications dans les domaines les plus divers mais les processus considérés dans les problèmes dynamiques, en particulier en vibrations, portent généralement sur des variables aléatoires continues.

Dans ces conditions, la probabilité d'obtenir une valeur donnée est généralement nulle et les probabilités d'apparition doivent être remplacées par des densités de probabilité dans la formule de la propriété markovienne :

$$P(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}; x_{n-2}, t_{n-2}; ......; x_1, t_1; x_0, t_0) = P(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1})$$

$$t_n > t_{n-1} > .... > t_1 > t_0$$

par exemple E = IR ou $E \subset \mathbb{R}^2$ (partie du plan) ou $E \subset \mathbb{R}^3$ (partie de l'espace)

3 : Processus un espace des temps T continu :

$T = \mathbb{R}_+$: le processus est dit continu
: on garde les yeux fixés sur un système qui évolue dans le temps â partir d'un instant t_0 que l'on prend pour origine des temps $t = 0$.

4 : Processus un espace des temps T discret :

$T = \mathbb{N}$: le processus est dit discret ;
on regarde ce qu'il se passe á chaque unité de temps, ou bien on fait une suite d'opérations et

on regarde ce qu'il se passe á chaque opération (ex : lancer d'une pièce). [9]

Exemple de Processus de Markov

1. La transmission du patrimoine génétique est typiquement un phénomène markovien puisque toute l'information apportée par les ancêtres est résumée dans le génotype des parents. C'est un phénomène homogène dans le temps puisque les lois qui gouvernent cette transmission ne varient pas au cours des générations.

2. Si les appels surviennent indépendamment les uns des autres, le nombre d'appels reçus durant un petit intervalle ne dépend pas du nombre d'appel déjà enregistré ; dans ce cas, le processus peut être considéré comme markovien . Par contre, il n'est pas homogène car la fréquence des appels peut varier au cours de la journée (heures de pointe, pause du midi, etc.).

3. Si la loi du nombre de descendants d'un individu est la même ‘a toutes les générations, alors l'évolution de la taille d'une famille est un processus markovien homogène. Cet exemple sera traité en détail .

4.Le processus décrivant l'évolution de la taille d'une population est appelé ”processus de naissances et morts”. Pour la même raison que celle invoquée , on peut considérer qu'il est markovien si les naissances et les morts ont lieu indépendamment les unes des autres. Il n'est, en général, pas homogène au cours du temps, par exemple si on considère l'influence du cycle des saisons sur les reproductions.

5. Le cours d'une action est fréquemment présenté comme un exemple de processus ayant une mémoire longue. Les évolutions ne d épandent pas seulement de la dernière valeur du titre, mais aussi des évolutions passées (phases de croissance, chocs boursiers, etc.) Dans ce cas, l'hypothèse de Markov n'est pas raisonnable. L'homogénéité temporelle peut elle aussi être mise en doute selon le modèle économique sous-jacent.[12]

Chapitre 2

Chaîne de Markov et matrice de transition

2.1 Introduction :

Une chaîne de Markov est une suite de variables aléatoires $(X_n, n \in N)$ qui permet de modéliser l'évolution dynamique d'un système aléatoire : X_n représente l'état du système à l'instant n. La propriété fondamentale des chaînes de Markov, dite propriété de Markov, est que son évolution future ne dépend du passé qu'au travers de sa valeur actuelle. Autrement dit, conditionnellement 'a X_n,$(X_0, ..., X_n)$ et $(X_{n+k}$, $k \in N)$ sont indépendants. Les applications des chaînes de Markov sont très nombreuses (réseaux, génétique des populations, mathématiques financières, gestion de stock,algorithmes stochastiques d'optimisation, simulation, . . .).[3]

Définition 1 :

on appelle matrice de transition, la matrice $P = (p_{i;j})_{i;j \in E}$

$$P = \begin{pmatrix} p_{i_0,j_0} & p_{i_0,j_1} & p_{i_0,j_2} & \cdots & \cdots \\ p_{i_1,j_0} & p_{i_1,j_1} & p_{i_1,j_2} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

la matrice de transition P de la chaine discret (X_n) est une matrice carrée, constituée par les probabilités de transition . elle ver-ire les propriétés : pour tout couple (i, j) de E :

$$0 \leq p_{i,j} \leq 1$$

pour tout $i \in E$ ona

$$\sum_{j \in E} p_{i,j} = 1$$

[8]

Lien avec les graphes.

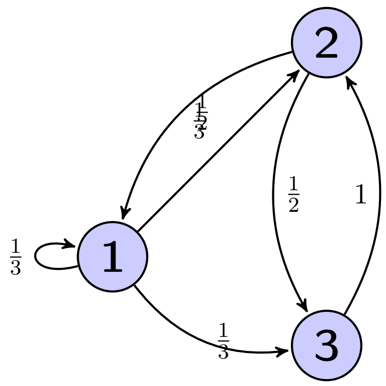
La matrice de transition d'une chaîne de Markov houmogéne finie peut être associée à un graphe dont les sommets sont les états. Deux états i et j sont reliés par un arc

$$\text{i} \xrightarrow{p(i,j)} \text{j}$$

de valeur $p(i, j)$ si $p(i, j)$ est non nul. Par exemple, la chaîne associée à la matrice P :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a le graphe associé présenté en Fig



2.2 Condition nécessaire et suffisante :

Pour simplifier les notations on notera $X_{0:n}$ au lieu de $(X_0; ...; X_n)$ et $x_{0:n}$ au lieu de $(x_0; ...; x_n)$.

Proposition :

Soit $\{X_n; n \geq 0\}$ une suite de variables aléatoires. $\{X_n; n \geq 0\}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition P et de loi initiale μ si et seulement si pour tout $n \in N$la loi du vecteur aléatoire $(X_0; ...; X_n)$ est donnée par :

$$P(X_0 = x_0; ...; X_n = x_n) = \mu(x_0)P(x_0; x_1)...P(x_{n-1}; x_n) :$$

Démonstration :

$\Longrightarrow$ Supposons que $\{X_n; n \geq 0\}$ soit une chaîne de Markov de matrice de transition P et de loi initiale μ. Soit $n \in N$. On a

$$P(X_{0:n} = x_{0:n}) = P(X_n = x_n | X_{0:n-1} = x_{0:n-1})P(X_{0:n-1} = x_{0:n-1}) :$$

Puis par définition d'une chaîne de Markov,

$$P(X_{0:n} = x_{0:n}) = P(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1})P(X_{0:n-1} = x_{0:n-1}).$$

Comme P est la matrice de transition de $\{X_n; n \geq 0\}$

$$P(X_{0:n} = x_{0:n}) = P(x_{n-1}; x_n)P(X_{0:n-1} = x_{0:n-1}).$$

On obtient par itérations :

$$P(X_{0:n} = x_{0:n}) = P(x_{n-1}; x_n)...P(x_0; x_1)P(X_0 = x_0).$$

Enfin, on conclut en utilisant le fait que μ est la loi initiale de $\{X_n; n \geq 0\}$:

$$P(X_{0:n} = x_{0:n}) = P(x_{n-1}; x_n)...P(x_0; x_1)\mu(x_0).$$

$\Longleftarrow$Supposons maintenant que pour tout $n \in N$ la loi de $(X_0; ...; X_n)$ est donnée par :

$$P(X_0 = x_0; ...; X_n = x_n) = \mu(x_0)P(x_0; x_1)...P(x_{n-1}; x_n).$$

Soient $k \in N$ et $(x_0; ...; x_{k-1}; x; y) \in E^{k+2}$.

$$\begin{aligned}
P(X_{k+1} = y | X_{0:k} = (x_{0:k-1}; x)) &= \frac{P(X_{0:k+1}=(x_{0:k-1};x;y))}{P(X_{0:k}=(x_{0:k-1};x))} \\
&= \frac{(x_0)P(x_0;x_1)...P(x_{k-1};x)P(x;y)}{\mu(x_0)P(x_0;x_1)...P(x_{k-1};x)} \\
&= P(x; y).
\end{aligned}$$

Donc $\{X_n; n \geq 0\}$ est une chaîne de Markov homogène de matrice de transition P. L'hypothèse nous donne aussi avec $n = 0$ et $x \in E$, $P(X_0 = x) = \mu(x)$. Donc $\{X_n; n \geq 0\}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition P et de loi initiale μ.

proposition :

Soit $\{X_n; n \geq 0\}$ une chaîne de Markov de matrice de transition P. La matrice P est dite stochastique, c'est à dire qu'elle vérifie les deux propriétés suivantes :

(a) $\forall x; y \in E, P(x; y) \geq 0$

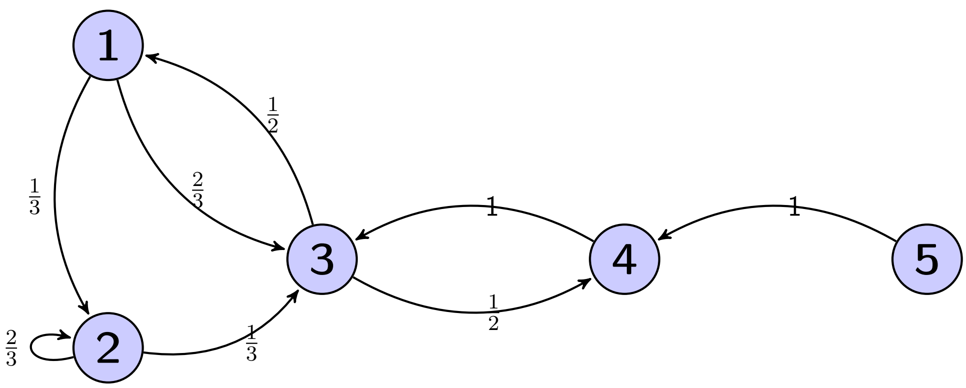
(b) $\forall x \in E, \sum\limits_{y \in E} P(x; y) = 1$:[3]

Exemple :

la matrice de transition est :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

le graphe associe :



.[5]

Définition 1 :

Soit $(X_n)_{n \in N}$ une suite de v.a. à valeurs dans un espace E fini ou dénombrable, appelé espace d'états. On dit que $(X_n)_{n \in N}$ est une chaîne de Markov si :

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_1 = i_1, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i) ,$$

pour tout entier $n \in N$, pour tout état j et pour toute suite d'états $i_0, i_1, ..., i_{n-1}$, i pour lesquels la probabilité conditionnelle a un sens, i.e.

$P(X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_1 = i_1, X_0 = i_0) > 0$.

Si de plus la quantité $P(X_{n+1} = j|X_n = i)$ ne dépend pas de n, i.e.

$P(X_{n+1} = j|X - n = i) = P(X - 1 = j|X - 0 = i)$ alors la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in N}$ est dite homogène.

Il faut comprendre une chaîne de Markov $(X - n)_{n\in N}$ comme une promenade dans l'espace d'états E, la variable X_n indiquant l'état dans lequel on est à l'instant n. La v.a. X_0 représente l'état initial duquel démarre la chaîne. Selon le contexte, $X - 0$ pourra être aléatoire ou déterministe. La propriété de Markov signifie que, connaissant le dernier état visité (disons à l'instant n), la loi du prochain état visité (i.e. la loi de X_{n+1}) ne dépend pas des états visités depuis l'instant 0 jusqu'à l'instant $n - 1$. Plus prosaïquement, on dit que

conditionnellement au présent, le futur ne dépend pas du passé.

Mais il dépend du présent :$X - n$ et $X - n + 1$ n'ont aucune raison d'être indépendantes ! La propriété d'homogénéité d'une chaîne de Markov exprime quant à elle que la probabilité d'aller de i en j reste la même au cours du temps. Elle permet de regrouper en une seule matrice (indépendante de n) les probabilités de transition entre deux états quelconques.

Définition 3 :

Une matrice $P = (P(x, y), x, y \in E)$ est dite matrice stochastique si ses coefficients sont positifs et la somme sur une ligne des coefficients est égale à 1 :

$P(x, y) \geq 0$ et $\sum_{z\in E} P(x, z) = 1$, pour tous $x, y \in E$.

Définition 4 :

Soit P une matrice stochastique sur E. Une suite de variables aléatoires $(X_n, n \in N)$ à valeurs dans E est appelée chaîne de Markov de matrice de transition P si pour tous $n \in \mathbb{N}$,$x \in \mathbb{E}$, on a

$P(X_{n+1} = x|X_n, ..., X_0) = P(Xn + 1 = x|X_n) = P(X_n, x)$.
On dit que la chaîne de Markov est issue de μ_0 si la loi de X_0 est μ_0 .
Comme l'espace d'état est discret l'équation est équivalente à : pour tous $x_0, ..., x_n \in E$, tels que $P(X_n = x_n, ..., X_0 = x_0) > 0$,

$P(X_{n+1} = x|X_n = x_n, ..., X_0 = x_0) = P(X_{n+1} = x|X_n = x_n) = P(x_n, x)$.

Si $P(X_0 = x) = 1$, autrement dit μ_0 est la masse de Dirac en x, on dira plus simplement que la chaîne de Markov est issue de x.

Exemple :

Transmission d'un bit informatique.

Un bit informatique valant 0 ou 1 est transmis d'un poste A vers un poste B en passant par N intermédiaires. Chacun de ces intermédiaires transmet correctement le bit avec probabilité p et l'inverse avec probabilité $1 - p$, indépendamment les uns des autres. Le bit (aléatoire) d'entrée, disons X_0, est supposé indépendant des intermédiaires. Pour $n = 1, ..., N$, notons X_n le bit intermédiaire. La suite de v.a. $(X_n)_{0\leq n\leq N}$ est à valeurs dans l'espace d'états $\mathbb{E} = 0, 1$. Vérifions que c'est une chaîne de Markov. Considérons pour ce faire, une suite $i_0, ..., i_n, i_{n+1}$ d'éléments de $0, 1$

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{P}(X_{n+1} = i-n+1|X_n = i_n, ..., X_0 = i_0) & = & \frac{\mathbb{P}(X_{n+1}=i_{n+1} et X_n=i_n,...,X_0=i_0)}{\mathbb{P}(X_n=i_n,...,X_0=i_0)} \\ & = & \frac{\mathbb{P}(|X_{n+1}-X_n|=|i_{n+1}-i_n| et X_n=i_n,...,X_0=i_0)}{\mathbb{P}(X_n=i_n,...,X_0=i_0)} \\ & = & \mathbb{P}(|X_{n+1} - X_n| = |i_{n+1} - i_n|),\end{array}$$

du fait de l'indépendance entre la v.a.$X_{n+1} - X_n$ (qui représente l'action du $(n+1)^e$ intermédiaire) et l'état du bit à la sortie des n premiers intermédiaires. Pour la même raison ;

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1}|X_n = i_n, ..., X_0 = i_0) & = & \frac{\mathbb{P}(|X_{n+1}-X_n|=|i_{n+1} i_n|)\mathbb{P}(X_n=i_n)}{\mathbb{P}(X_n=i_n)} \\ & = & \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1}|X_n = i_n)\end{array}$$

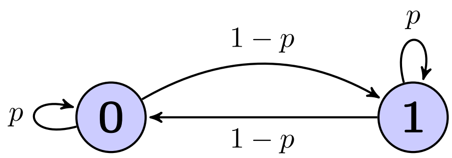
.

Enfin, le caractère homogène de la chaîne $(X_n)_{0 \leq n \leq N}$ résulte du calcul :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j|X_n = i) = \mathbb{P}(|X_{n+1} - X_n| = |j - i|) = \left\{ \begin{array}{ccl} p & : & sii = j \\ 1-p & : & sinon \end{array} \right. .$$

. Voici la matrice et le graphe de transition de cette chaîne :

$$p = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$



La marche aléatoire simple.

Soient $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d., chacune valant 1 avec probabilité p et -1 avec probabilité $1-p$. Soit $Y_0 \in \mathbb{Z}$ une v.a. indépendante des Y_n, représentant le point de départ sur l'axe Z de la chaîne. On définit la marche aléatoire simple par

$$\begin{array}{rcl}X_{n+1} & = & X_n + Y_{n+1} \\ & = & Y_0 + Y_1 + ... + Y_n + Y_{n+1}\end{array}$$

,

pour tout $n \in \mathbb{N}$ Le processus stochastique $(X_n)_{n \geq 1}$ est une chaîne de Markov homogène. Son espace d'états $\mathbb{E} = \mathbb{Z}$ est cette fois infini. Comme dans l'exemple du bit informatique, le caractère markovien provient de l'indépendance des Y_n :

$$\begin{array}{rcl}P(X_{n+1} = i_{n+1}|X_n = i_n, ..., X_0 = i_0) & = & \frac{P(X_{n+1}=i_{n+1} et X_n=i_n,...,X_0=i_0)}{P(X_n=i_n,...,X_0=i_0)} \\ & = & \frac{P(Y_{n+1}=i_{n+1}-i_n et X_n=i_n,...,X_0=i_0)}{P(X_n=i_n,...,X_0=i_0)} \\ & = & P(Y_{n+1} = i_{n+1} - i_n) \\ & = & \frac{P(Y_{n+1}=i_{n+1}-i_n)P(X_n=i_n)}{P(X_n=i_n)} \\ & = & \frac{P(X_{n+1}-X_n=i_{n+1}-i_n X_n=i_n)}{P(X_n=i_n)} \\ & = & P(X_{n+1} = i_{n+1}|X_n = i_n)[1]\end{array}$$

2.3 Chaînes de Markov homogènes :

Définition 1 :

Soit $\{X_n, n \geq 0\}$ une suite de variables aléatoires sur $(\Omega; F; P)$ à valeurs dans E. $\{X_n, n \geq 0\}$ est une chaîne de Markov si pour tout $n \in N$ et pour tous $(x_0; ...; x_{n+1}) \in \mathbb{E}^{n+1}$ on a

$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}|X_n = x_n; ...; X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}|X_n = x_n)$ E est appelé l'espace des états. Pour $n \in \mathbb{N}$, X_n est l'état de la chaîne à l'instant n. En particulier, X_0 est l'état initial de la chaîne.

Remarque 1 :

Une réalisation du vecteur aléatoire $(X_0; .....; X_n)$ est parfois appelée trajectoire de la chaîne de Markov $\{X_n, n \geq 0\}$

Remarque 2 :

La propriété ci-dessus s'appelle la propriété de Markov. On peut aussi l'énoncer de cette façon : conditionnellement au présent, le futur et le passé sont indépendants.

Définition 2 :

Soit $\{X_n, n \geq 0\}$ une chaîne de Markov d'espace d'états E. $\{X_n, n \geq 0\}$ est dite homogène si

$$P(X_{n+1} = y|X_n = x)$$

ne dépend que de x et de y.
Dans toute la suite, on ne considérera que des chaînes de Markov homogènes d'espace d'états E.

Définition 3 :

Soit $\{X_n, n \geq 0\}$; une chaîne de Markov telle que pour tous $x; y \in \mathbb{E}$,

$$\mathbb{P}(X_1 = y|X_0 = x) = P(x; y) et P(X_0 = x) = \mu(x). Alors :$$

(a) la matrice P définie par $P = (P(x; y))_{x;y\in\mathbb{E}}$ est la matrice de transition de la chaîne de Markov.
(b) le vecteur μ défini par $\mu = (\mu(x))x \in \mathbb{E}$ est la loi initiale de la chaîne de Markov. On dit que $\{X_n, n \geq 0\}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition P et de loi initiale

Proposition 1 :

Soit $\{X_n, n \geq 0\}$ une suite de variables aléatoires.$\{X_n, n \geq 0\}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition $\mathbb{P}$ et de loi initiale μ si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$ la loi du vecteur aléatoire $(X_0; ....; X_n)$ est donnée par :

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0; .....; X_n = x_n) = \mu(x_0)P(x_0; x_1)......\mathbb{P}(x_{n-1}; x_n)$$

Preuve

$\Rightarrow$) Supposons que $\{X_n, n \geq 0\}$ soit une chaîne de Markov de matrice de transition P et de loi initiale μ. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\mathbb{P}(X_{0:n} = x_{0:n}) = \mathbb{P}(X_n = x_n|X_{0:n-1} = x_{0:n-1})\mathbb{P}(X_{0:n-1} = x_{0:n-1})$$

Puis par définition d'une chaîne de Markov,

$$\mathbb{P}X_{0:n} = x_{0:n}) = \mathbb{P}(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1})\mathbb{P}(X_{0:n-1} = x_{0:n-1}).$$

Comme P est la matrice de transition de $\{X_n, n \geq 0\}$

$\mathbb{P}(X_{0:n} = x_{0:n}) = \mathbb{P}(x_{n-1}; x_n)\mathbb{P}(X_{0:n-1} = x_{0:n-1})$

On obtient par itérations :

$\mathbb{P}(X_{0:n} = x_{0:n}) = \mathbb{P}(x - n - 1; x_n).....\mathbb{P}(x_0; x_1)\mathbb{P}(X_0 = x_0)$

Enfin, on conclut en utilisant le fait que μ est la loi initiale de $\{X_n, n \geq 0\}$:

$\mathbb{P}(X_{0:n} = x_{0:n}) = \mathbb{P}(x_{n-1}; x_n).......\mathbb{P}(x_0; x_1)\mu(x_0)$

$\Longleftarrow$) Supposons maintenant que pour tout $n \in N$ la loi de $(X_0; ....; X_n)$ est donnée par :

$\mathbb{P}(X_0 = x_0; .....; X_n = x_n) = \mu(x_0)\mathbb{P}(x_0; x_1).......\mathbb{P}(x_{n-1}; x_n)$

Soient $k \in \mathbb{N}$ et $(x_0; ....; x_{k-1}; x; y) \in \mathbb{E}^{k+2}$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{k+1} = y | X_{0:k} = (x_{0:k-1}; x)) &= \frac{\mathbb{P}(X_{0:k+1} = (x_{0:k-1}; x; y))}{\mathbb{P}(X_{0:k} = (x_{0:k-1}; x))} \\
&= \frac{\mu(x_0)\mathbb{P}(x_0; x_1)........\mathbb{P}(x_{k-1}; x)P(x; y)}{\mu(x_0)P(x_0; x_1).......P(x_{k-1}; x)} \\
&= P(x; y)
\end{aligned}$$

$Donc \{X_n, n \geq 0\}$ est une chaîne de Markov homogène de matrice de transition P. L'hypothèse nous donne aussi avec $n = 0$ et $x \in \mathbb{E}$,$\mathbb{P}(X_0 = x) = \mu(x)$. Donc $\{X_n, n \geq 0\}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition P et de loi initiale μ.[3]

2.4 Loi d'une chaîne de Markov :

Proposition :

la loi de chaîne de markove homogéne $(X_n)_{n \in N}$ est entièrment détermineé par la donnée sa matrice de transition p et de la loi de X_0 appelée loi initiale et notée μ_0

pour tout $i \in \mathbb{E}, \mu_0(i) := \mathbb{P}(X_0 = i)$.

Plus précisément, pour tout entier n et toute suite d'états $i_0, i_1, ..., i_{n-1}, i_n$ *de* $\mathbb{E}$.

$$\mathbb{P}(X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_1 = i_1, X_0 = i_0) = \mu_0(i_0)p_{i_0,i_1}...p_{i_{n-1},i_n}.$$

La formule permet d'écrire la probabilité d'une intersection, i.e.

$$\mathbb{P}(X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_1 = i_1, X_0 = i_0).$$

comme un produit de probabilités conditionnelles, les coefficients $p_{i,j}$. En divisant par $\mu_0(i_0)$ dans il s'ensuit que :

$$\mathbb{P}(X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_1 = i_1 | X_0 = i_0) = p_{i_0,i_1}...p_{i_{n-1},i_n}.$$

Démonstration :

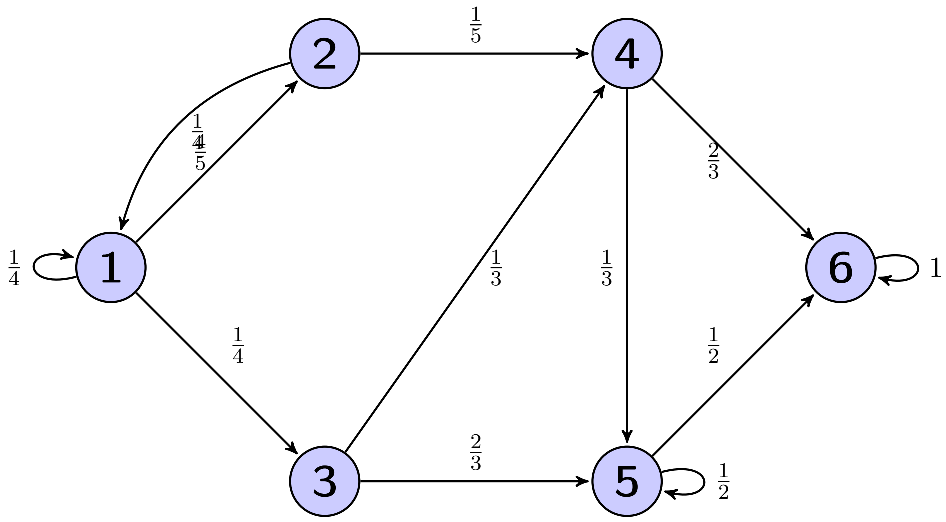
Le résultat repose sur la formule :

$$\mathbb{P}(\bigcap_{k=0}^{n} A_k) = \mathbb{P}(A_0)\mathbb{P}(A_1|A_0)\mathbb{P}(A_2|A_1 \cap A_0)...\mathbb{P}(A_n|A_{n-1} \cap ... \cap A_0)$$

a démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ et appliquée aux événements $A_k = X_k = i_k$. Il ne reste plus qu'à identifier les termes : $\mathbb{P}(A0) = \mathbb{P}(X_0 = i_0)$ vaut $\mu(i0)$, $\mathbb{P}(A_1|A_0) = \mathbb{P}(X_1 = i_1|X_0 = i_0)$ vaut par définition p_{i_0,i_1} et

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_2|A_1 \cap A_0) &= \mathbb{P}(X_2 = i_2|X_1 = i_1, X_0 = i_0) \\ &= \mathbb{P}(X_2 = i_2|X_1 = i_1) \\ &= p_{i_1,i_2}. \end{aligned}$$

par la propriété de Markov. C'est pareil pour les autres termes.



$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{4}{5} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Partant de $X_0 = 1$, quel est le chemin le plus probable permettant $X_3 = 6$? On dénombre 3 chemins permettant de rejoindre l'état 6 depuis 1 en 3 coups :
$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 6, 1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 6et1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 5 \longrightarrow 6$. Leurs probabilités respectives sont :

$$\mathbb{P}(X_3 = 6, X_2 = 4, X_1 = 2|X_0 = 1) = p_{1,2}p_{2,4}p_{4,6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{15}$$

$$\mathbb{P}(X_3 = 6, X_2 = 4, X_1 = 3|X_0 = 1) = p_{1,3}p_{3,4}p_{4,6} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{18}$$

$$\mathbb{P}(X_3 = 6, X_2 = 5, X_1 = 3|X_0 = 1) = p_{1,3}p_{3,5}p_{5,6} = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

Le plus probable est donc $1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 5 \longrightarrow 6$.

Dans toute la suite, considérons une chaîne de Markov homogène $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans E, de matrice de transition P et de loi initiale μ_0.

Proposition :

La loi de la chaîne de Markov homogène $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est invariante par translation dans le temps. Autrement dit, pour tous entiers n, m, toute suite d'états $i_0, i_1, ..., i_n, i_{n+1}, ..., i_{n+m}$ pour lesquels

$$\mathbb{P}(X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_1 = i_1, X_0 = i_0) > 0$$

,

il vient :

$\mathbb{P}(X_{n+m} = i_{n+m}, ..., X_{n+1} = i_{n+1}|X_n = i_n, ..., X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_m = i_{n+m}, ..., X_1 = i_{n+1}|X_0 = i_n)$.

La probabilité conditionnelle d'une trajectoire donnée (i.e. les états $_{in+1}, ..., i_{n+m}$) reste la même au cours du temps, qu'elle ait lieu entre les instants $n+1$ et $n+m$ ou entre les instants 1 et m. Seul compte le dernier état visité, en l'occurrence in. Dans l'exemple donné dans la gure 1.2,Fi $1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 5 \longrightarrow 6$ reste le chemin le plus probable pour rejoindre l'état 6 depuis l'état 1 en 3 coups, que ce soit entre les instants 0 et 3, 47 et 50, ou encore 1234 et 1237 !

Une généralisation de ce résultat est connue sous le nom de relation de Chapman-Kolmogorov :

$$\mathbb{P}(X_{n+m} = j|X_0 = i) = \sum_{k \in \mathbb{E}} \mathbb{P}(X_m = j|X_0 = k)\mathbb{P}(X_n = k|X_0 = i)\ .$$

Il faut la lire comme suit : aller de i à j en $n+m$ pas, c'est aller de i à un certain état k en n pas puis de k à j en m pas.

Notons par μ_n la loi de X_n. C'est une mesure de probabilité sur E que l'on peut écrire sous la forme d'un vecteur ligne $(\mu_n(j)_{j \in E})$(i.e. un élément de $R^{Card(E)}$. L'objectif de la fin de cette section consiste à établir une relation matricielle liant μ_n à la loi initiale μ_0 et à la matrice P Pour ce faire, notons par $(p(n)i, j)i, j \in E$les coefficients de la matrice P^n, puissance ne de P. L'expression brute de $p_{i,j}^{(n)}$ est

$$p_{i,j}^{(n)} = \sum_{i_1,...,i_{n-1 \in \mathbb{E}}} p_{i,i_1} p_{i_1,i_2} .... p_{i_{n-1},j}$$

Cette formule étant purement algébrique, voici une nouvelle expression du coefficient $p_{i,j}^{(n)}$ lui donnant davantage de sens .

Proposition :

Soient n un entier et i, j des états.

(1) $\mathbb{P}(X_n = j|X_0 = i) = p_{i,j}^{(}n)$

(2) $\mu_{n+1} = \mu_n \mathbb{P}$

(3) $\mu_n = \mu_0 \mathbb{P}^n$,

ce qui signifie que $\mathbb{P}(X_n = j)$ est le je élément du vecteur ligne $\mu_0 \mathbb{P}^n$.

En utilisant des vecteurs colonnes pour décrire les lois de X_n et X_{n+1}, le point (2) devient

$$t\mu_{n+1} = tP^t \mu_n.$$

On peut donc voir l'évolution en loi de la suite $(X_n)_n \in \mathbb{N}$comme un système itératif linéaire dont $\mathbb{P}$ est la matrice d'évolution : on obtient la loi de X_{n+1} en multipliant (matricielle ment et par la gauche) la loi de X_n par $\mathbb{P}$.

Reprenons l'exemple donné dans la probabilité de rejoindre l'état 6 depuis l'état 1, en 3 coups et quel que soit le chemin emprunté, se calcule :

$$\begin{array}{rcl} p_{1,6}^{(3)} & = & \sum_{i,j\in\mathbb{E}} p_{1,i}p_{i,j}p_{j,6} \\ & = & p_{1,2}p_{2,4}p_{4,6} + p_{1,3}p_{3,4}p_{4,6} + p_{1,3}p_{3,5}p_{5,6} \\ & = & \frac{1}{15} + \frac{1}{18} + \frac{1}{12} \simeq 0.20 \end{array}$$

En partant de l'état 1 avec probabilité 1, les lois de X_1 et X_2 se calculent de la manière suivante.

$$\mu_1 = \mu_0 P = (1\,0\,0\,0\,0\,0) * \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0.25\,, 0.5\,, 0.25\,, 0\,, 0\,, 0).$$

$\mu_2 = \mu_1 P = \mu_0 P^2 \simeq (0.46\,, 0.12\,, 0.07\,, 0.18\,, 0.17\,, 0).$

De même,
$\mu_5 \simeq (0.15\,, 0.12\,, 0.06\,, 0.04\,, 0.16\,, 0.48).$

Démonstration :

Seul le cas $n = 2$ sera traité pour donner l'intuition concernant le point (1). Le coefficient $p_{i,j}^{(2)}$ de la i ligne et de la j colonne de la matrice P^2 vaut

$$p_{i,j}^2 = \sum_{k\in E} p_{i,k}p_{k,j}.$$

La formule des probabilités totales et la proposition permettent d'écrire les égalités :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(X_2 = j, X_0 = i) & = & \sum\limits_{k\in E} \mathbb{P}(X_2 = j, X_1 = k, X_0 = i) \\ & = & \mu_0(i) \sum\limits_{k\in E} p_{i,k}p_{k,j} \end{array}$$

des quelles on en déduit le résultat ;
$\mathbb{P}(X_2 = j | X_0 = i) = p_{i,j}^{(2)}$. Par ailleurs,

$$\begin{array}{rcl} \mu_{n+1}(j) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j) & = & \sum\limits_{i\in E} \mathbb{P}(X_{n+1} = j, X_n = i) \\ & = & \sum\limits_{i\in E} \mathbb{P}(X_{n+1} = j, X_n = i)\mathbb{P}(X_n = i) \\ & = & \sum\limits_{i\in E} p_{i,j}\mathbb{P}(X_n = i) \end{array}$$

Cette égalité implique la relation matricielle $\mu_{n+1} = \mu_n\mathbb{P}$ (i.e. le point (2)). Enfin, le point (3) s'obtient par une récurrence immédiate.[1]

2.5 Chaînes de Markov sur un ensemble fini :

2.5.1 chaîne de markov irréductibles :

Définition 1 :

Soient i et j deux états de E. On dit que l'état j est accessible depuis l'état i si

$$\exists n \in \mathbb{N}$$

, $\mathrm{p}_{i,j}^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = j|X_0 = i) > 0$.

On dit que les états i et j communiquent si chacun est accessible depuis l'autre. On note alors $i \longleftrightarrow j$.

Proposition :

La relation $\longleftrightarrow$ est une relation d'équivalence sur E.

Démonstration :

La réflexivité $(i.e. i \longleftrightarrow i)$ est immédiate : pour $n = 0$, $\mathbb{P}(X_0 = i|X_0 = i) = 1$. Il en va de même pour la symétrie $(i \longleftrightarrow j impliquej \longleftrightarrow i)$. Enfin, la transitivité repose sur la relation de Chapman- Kolmogorov. Supposons que $i \longleftrightarrow j$ et $j \longleftrightarrow k$. En particulier, les états j et k sont respectivement accessibles depuis i et j. Il existe donc des entiers m et n tels que $\mathbb{P}(X_m = k|X_0 = j) > 0$ et $\mathbb{P}(X_n = j|X_0 = i) > 0$. Par conséquent,

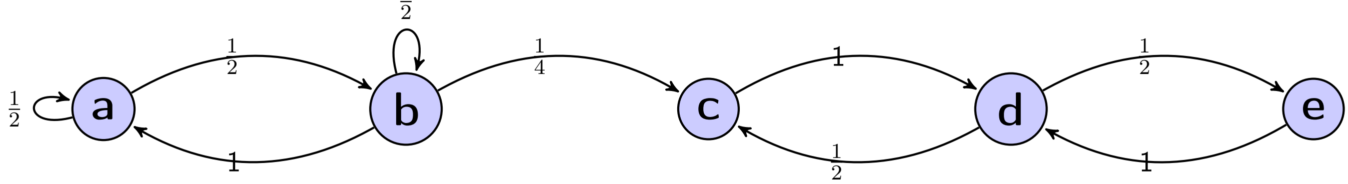
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+m} &= k|X_0 = i) = \sum_{l \in E} \mathbb{P}(X_m = k|X_0 = l)\mathbb{P}(X_n = l|X_0 = i) \\ &\geq \mathbb{P}(X_m = k|X_0 = j)\mathbb{P}(X_n = j|X_0 = i) > 0. \end{aligned}$$

d'ou k est accessible depuis l'état i. C'est la même chose dans l'autre sens. L'espace E peut donc être partitionné en classes d'équivalence pour la relation $\longleftrightarrow$, appelles classes irréductibles. Nous insisterons dans les paragraphes suivants sur le fait que les états d'une même classe irréductible ont des propriétés équivalentes vis à vis de la chaîne (récurrence, transience et périodicité). Lorsque l'espace E est réduit à une seule classe (i.e. tous les états communiquent), on dit que la chaîne est irréductible. En général, E se partitionne en états isolés dans lesquels on ne revient jamais une fois qu'on les a quittés, et en classes irréductibles disjointes. Pour déterminer les classes irréductibles d'une chaîne de Markov, il est commode de travailler sur le graphe de transition plutôt que sur la matrice de transition P.

Exemple :

Considérons une chaîne de Markov à valeurs dans $E = (a, b, c, d, e)$ et dont la matrice et le graphe de transition sont données par :

$$p = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



La chaîne comporte deux classes irréductibles : (a, b) et (c, d, e).[1]

2.5.2 Chaînes de Markov réguliére :

définition :

soit le matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & ... & ... & w_m \\ w_1 & w_2 & w_3 & ... & ... & w_m \\ w_1 & w_2 & w_3 & ... & ... & w_m \\ w_1 & w_2 & w_3 & ... & ... & w_m \end{pmatrix}$$

est dit réguliére si la matice w^2 est positif

exemple :

considérons la matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

La chaîne est-elle réguliére ? la matrice

$$P^2 = P.P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

les etat de P^2 sont positif
donc le chaîne est réguliére [2]

2.5.3 Chaînes de Markov réversibles :

Dans cette section, l'ensemble X peut être infini (mais doit être dénombrable). Rappelons que E^X dénote l'ensemble des applications $f : X \longrightarrow E$.

Définition :

Soit P une matrice stochastique. Un vecteur $a = a_{i i \in X} \in [0, \infty)^X$, $a \neq 0$, est dit réversible par rapport à P si

$$a_i p_{ij} = a_j p_{ji}$$

$\forall \;\; i, j \in X.$
$Unechane de Markov est dit erversible si sa matrice admet un vecteur rversible.$

La condition est appelée condition d'équilibre détaillé en physique. Elle signifie que si les états i et j sont occupés avec probabilités proportionnelles à a_i et a_j respectivement, alors les taux de transition de i à j et de j à i sont égaux.

Théorème :

Soit P une matrice stochastique et $a \in [0, \infty)$ X un vecteur non nul.

1. Si a est réversible par rapport à P, alors a est une mesure invariante.

2. Si a est réversible par rapport à P, et $\sum_{j \in X} a_j < \infty$, alors la mesure π définie par $\pi_i = a_i / \sum_{j \in X} a_j$ est une distribution stationnaire.

3. Si π est une distribution stationnaire, alors

$$P_\pi X_0 = i_0, X_1 = i_1, ..., X_n = i_n = P_\pi X_0 = i_n, X_1 = i_{n-1}, ..., X_n = i_0$$

pour tout $n \in N$ et tout choix de $i_0, ..., i_n \in X$.

Démonstration :

1. On a X
$$\sum_{i \in X} a_i p_{ij} = a_j \sum_{i \in X} p_{ji} = a_j.$$

2. Suit immédiatement de 1.

3. Par le Théorèm

$$\begin{aligned} P_\pi X_0 = i_0, X_1 = i_1, ..., X_n = i_n &= \pi_{i_0} p_{i_0 i_1} p i_1 i_2 ... p_{i_{n-1} i_n} \\ &= p_{i_1 i_0} \pi_{i_1} p_{i_1 i_2} ... p_{i_{n-1} i_n} \end{aligned}$$

qui est égal à $P_\pi X_0 = i_n, X_1 = i_{n-1}, ..., X_n = i_0$.

La relation signifie qu'une trajectoire a la même probabilité que la trajectoire renversée dans le temps. C'est ce qui justifie le terme de réversibilité.

Exemple :

On considère une chaîne de Markov d'espace d'états $E := \{1; 2; 3\}$ et de matrice de transition

$$p = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la chaîne est-elle réversible ?

la chaîne n'est pas réversible car :

on donne

$$\pi = \frac{1}{9}(4; 2; 3)$$

donc

$$\pi_1 p_{12} = \frac{2}{9} \neq \pi_2 p_2 1 = \frac{1}{9}$$

donc n'est pas réversible. [4]

2.5.4 Chaînes de Markov absorbantes :

Définition 1 :

On dit qu'un état $j \in E$ est accessible depuis un autre état $i \in E$, et on note $i \rightsquigarrow j$, s'il existe un temps $n \in N$ tel que $p_{ij}^{(n)} > 0$, c'est-à-dire que partant de i, on atteint j avec probabilité positive en un nombre fini de pas. On notera $i \sim j$ si on a à la fois $i \rightsquigarrow j$ et $j \rightsquigarrow i$. On vérifie facilement que la relation est réflexive et transitive, et que $\sim$ est une relation d'équivalence.[13]

Définition 2 :

Un état $i \in X$ est dit absorbant si $p_{ii} = 1$ (et donc nécessairement $p_{ij} = 0$ pour tout $j \neq i$). Une chaîne de Markov est dite absorbante s'il existe, pour tout état de X, un état absorbant accessible depuis cet état. Dans le reste de cette section, nous allons considérer des chaînes absorbantes avec $r \geq 1$ états absorbants. Nous conviendrons de numéroter les états de manière à placer d'abord les $q = N - r$ états non absorbants, et ensuite les r états absorbants. La matrice de transition prend alors la forme canonique

$$p = \begin{pmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

ou' Q est une matrice de taille $q * q$, R est une matrice de taille $q * r$, 0 désigne la matrice nulle de taille $r * q$, et I la matrice identité de taille r. Il est facile de montrer par récurrence que

$$p^n = \begin{pmatrix} Q^n & [I + Q + ... + Q^{n-1}]R \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

Proposition :

Soit P la matrice de transition d'une chaîne de Markov absorbante, écrite sous forme canonique. Alors 1. On a

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} Q^n = 0$$

2. La matrice $I - Q$ est inversible, et son inverse vaut

$$[I - Q]^{-1} = \lim_{n \longrightarrow \infty} Q^n$$

Démonstration :

1. Soit $i \neq q$ un état non absorbant. L'élément de matrice $(Q^n)_{ij}$ de Qn est la probabilité de se trouver dans l'état non absorbant j, après n pas, partant de i. Par conséquent, $(Q^n)_{ij}$ est inférieur ou égal à la probabilité de ne pas avoir atteint d'état absorbant en n pas. Soit

$$m_i = \min\{n \geq 1 : \exists k > q, (P^n)_{ik} > 0\}$$

le nombre minimal de pas nécessaire à atteindre un état absorbant k depuis i. Soit

$$p_i = P_i\{X_{mi} \leq q\} < 1$$

la probabilité de ne pas atteindre d'état absorbant en m_i pas, partant de i. Soit enfin

$$M = \max_{i=1,...,q} m_i$$

, $p = \max_{i=1,...,q} p_i Alorslaprobabilitdenepasatteindred'tatabsorbantenMpas, partantden'importequeltatnonc$
M$_n$ pas est bornée par p^n. Cette probabilité tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. La probabilité de ne pas être absorbé après un nombre arbitraire m de pas étant une fonction décroissante de m, elle tend nécessairement vers 0. Par conséquent, $(Q^n)_{ij}$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini, pour tout $j \in \{1, ..., q\}$.

2- Supposons qu'il existe un vecteur x tel que $Q_x = x$. Dans ce cas on a

$$x = Q_x = Q_x^2 = ... = Q_x^n = ... = \lim_{n \longrightarrow \infty} Q_x^n = 0,$$

ce qui montre que Q n'admet pas la valeur propre 1. Par conséquent, $I-Q$ est inversible. Enfin, comme

$$[I-Q]\sum_{k=0}^{n} Q^n = I - Q^{n+1} \longrightarrow I$$

lorsque$n \longrightarrow \infty$

on obtient multipliant à gauche par $[I-Q]^{-1}$. Nous noterons F la matrice $[I-Q]^{-1}$, et nous l'appellerons la matrice fondamentale de la chaîne. montre que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} p^n = \begin{pmatrix} 0 & FR \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

Le fait que Q^n tend vers zéro traduit donc le fait que la probabilité d'absorption tend vers 1 lorsque le temps tend vers l'infini. La matrice $B = FR$ devrait représenter les probabilités de transition, dans la limite des temps infinis, entre états non absorbants et absorbants. Ceci est confirmé par le résultat suivant

théorème :

Soit F la matrice fondamentale d'une chaîne de Markov absorbante.

1. L'élément de matrice f_{ij} de F est l'espérance du nombre de passages en j partant de i :

$$f_{ij} = E_i \sum_{n\geq 0} \mathbb{1}\{X_n = j\})$$

2. Soit $\tau = \inf\{n \geq 1 : X_n > q\}$ la variable aléatoire donnant le temps jusqu'à absorption. Alors

$$E_i(\tau) = \sum_{j=1}^{q} f_{ij}$$

3. Les éléments de matrice bik de $B = FR$ donnent les probabilités d'être absorbés dans les différents états :

$$b_{ik} = P\{X_\tau = k\}$$

Exemple :

(Jeu de Pile ou Face). Anatole et Barnabé jouent ‘a la variante suivante de Pile ou Face. Ils jettent une piéce de monnaie (parfaitement équilibrée) de maniére répétée. Anatole gagne dés que la piéce tombe trois fois de suite sur Face, alors que Barnabé gagne dés que la suite Pile-Face-Pile apparaît.

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

On calcule alors la matrice fondamentale

$$F = [I-Q]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$B = FR = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Ainsi, partant de l'un des états PP, PF ou FP, Atonale gagne avec probabilité 1/3, et Barnabé gagne avec probabilité 2/3. Partant de l'état FF, c'est Barnabé qui gagne avec probabilité 1/3, et Atonale qui gagne avec probabilité 2/3. Comme personne ne gagne lors des deux premiers jets, et que les quatre états PP, PF, FP et FF sont atteints avec la même probabilité, il faut choisir la distribution initiale $v = (\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; 0, 0)$. Par conséquent, Atonale gagne le jeu avec probabilité

$$P_v\{X_\tau = "Agagne"\} = \sum_{i=1}^{4} v_i b_{i1} = \frac{5}{12}.[4]$$

2.6 Chaînes de Markov sur un ensemble dénombrable

2.6.1 Récurrence et transition :

Définition 1 :

Soit $i \in E$. La v.a. $\mathbb{T}_i$ définie par

$$\mathbb{T}_i = inf\{n \geq 1, X_n = i\}$$

est appelée temps d'atteinte de i ou encore temps de retour à i lorsque la chaîne $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ part de i. Par convention, lorsque pour tout $n \geq 1, X_n \neq i$, on pose $\mathbb{T}_i = +\infty$.

Il faut bien comprendre que l'événement

$$\{\mathbb{T}_{i<+\infty}\} = \{\exists n \geq 1, X_n = i\} = \cup_{n\geq 1}\{X_n = 1\}$$

signifie que la chaîne $(X_n)_{n\in E}$ repassera par l'état i (au moins une fois) alors que

$$\{\mathbb{T}_i = +\infty\} = \{\forall n \geq 1, X_n \neq i\} = \cap_{n\geq 1}\{X_n \neq i\}$$

signifie que la chaîne $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ne repassera jamais par i.

Définition 2 :

Un état $i \in E$ est dit récurrent si, partant de i, on y revient presque sûrement en temps fini.

$$\mathbb{P}(\mathbb{T}_{i<+\infty}|X_0 = i) = 1$$

L'état i est dit transient dans le cas contraire, i.e. lorsque $\mathbb{P}(\mathbb{T}_{i<+\infty}|X_0 = i) > 0$. Autrement dit, un état est transient si avec probabilité strictement positive, on peut le quitter pour ne jamais y revenir. Comme cas particulier d'état transient, on retrouve les états pour lesquels $p_{i,i}^{(n)} = 0$ pour tout $n \geq 1$. Ce sont ceux que l'on quitte au premier pas pour ne jamais y revenir :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathbb{T}_{i<+\infty}|X_0 = i) &= \mathbb{P}(\exists \geq 1, X_n = i|X_0 = i) \\ &= \mathbb{P}(\cup_{n\geq 1}\{X_n = i\}|X_0 = 1) \\ &\leq \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X_n = i|X_0 = 1) \\ &\leq \sum_{n\geq 1} p_{i,i}^{(n)} \end{aligned}$$

Lemme :

Pour tout entier n et tous états i et j,

$\mathbb{P}(N_i \geq n+1|X_0 = j) = \mathbb{P}(\mathbb{T}_i < +\infty|X_0 = j)\mathbb{P}(N_i \geq n|X_0 = i)$.

Les états transients sont ceux dans lesquels on ne passe qu'un nombre fini de fois. Par opposition, on revient une infinité de fois dans un état récurrent.

Proposition :

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) l'état i est récurrent : $\mathbb{P}(T_i < +\infty|X_0 = i) = 1$;

(2) conditionnellement à $X_0 = i$, la chaîne de markove $(X_n)_{n\in N}$ revient presque sûrement une infinité de fois en i :

$$\mathbb{P}(N_i = +\infty|X_0 = i) = 1.$$

(3) la série $\sum p_{i,i}^{(n)}$ diverge.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(4) l'état i est transient : $\mathbb{P}(T_i < +\infty|X_0 = i) < 1$

(5) conditionnellement à $X_0 = i$, la v.a.$N_i + 1$ suit la loi géométrique de paramètre $1 - a_i$, avec $a_i = \mathbb{P}(T_i < +\infty|X_0 = i)$:

$$\forall n \in N, \mathbb{P}(N_i = n|X_0 = i) = a_i^n(1 - a_i).$$

(en particulier N_i est presque sûrement finie) .

(6) conditionnellement à $X_0 = i$, la variable aléatoire N_i est integrable : $E[N_i|X_0 = i] = \sum p_{i;i}^{(n)} < +\infty$

Remarquons que l'identité entre l'espérance conditionnelle $E[N_i|X_0 = i]$ et la série $p_{i,i}^{(n)}$ est valable quelle que soit la nature de cette dernière, en la considérant comme un élément de $[0, +\infty]$. Elle repose sur le théorème de Fubini.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[N_i|X_0 = i] &= \mathbb{E}[\sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{X_n=i}|X_0 = i] \\
&= \sum_{n\geq 1} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{X_n=i}|X_0 = i] \\
&= \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}[\mathbb{1}_{X_n=i}|X_0 = i] \\
&= \sum_{n\geq 1} p_{i,i}^{(n)}
\end{aligned}$$

Reprenons l'exemple On a déjà établit que

$$\mathbb{P}(T_b = +\infty|X_0 = b) \geq \frac{1}{4}.$$

On peut montrer qu'il y a en fait égalité (en effet, partir de b pour aller en a et ne jamais en revenir est un événement non vide, certes, mais de probabilité nulle). Ainsi la Proposition affirme que le nombre de passages en l'état b, partant de b, suit la loi géométrique de paramètre $\frac{3}{4}$. On en déduit son espérance :

$$\mathbb{E}[N_b|X_0 = b] = \mathbb{E}[N_b + 1|X_0 = b] - 1 = \frac{1}{1-\frac{3}{4}} - 1 = 3$$

Les deux propositions ci-dessus se démontrent simultanément.

Preuve :

Prouvons (1) $\Rightarrow$ (2). En combinant, $\mathbb{P}(T_i < +\infty | X_0 = i) = 1$ et le Lemme , il vient :

$$\mathbb{P}(N_i \geq n+1 | X_0 = i) = \mathbb{P}(N_i \geq n | X_0 - i) = ... = \mathbb{P}(N_i \geq 1 | X_0 = i),$$

en itérant. Par ailleurs, $N_i \geq 1 = \{t_i < +\infty\}$. On en déduit que pour tout n, $\mathbb{P}(N_i \geq n | X_0 = i) = 1$.

Il ne reste plus qu'à faire tendre n vers l'infini pour obtenir (2) :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(N_i = +\infty | X_0 = i) & = & \mathbb{P}(\cap_{n \geq 1}\{N_i \geq n\} | X_0 = i) \\ & = & \lim_{n \longrightarrow +\infty} P(N_i \geq n | X_0 = i) \\ & = & 1. \end{array}$$

L'implication (2) $\Rightarrow$(3) repose sur :

$$\sum_{n \geq 1} p_{i,i}^{(n)} = \mathbb{E}[N_i | X_0 = i] \geq (+\infty)\mathbb{P}(N_i = +\infty | X_0 = i) = +\infty.$$

Supposons (4) : $a_i = \mathbb{P}(T_i < +\infty | X_0 = i) < 1$. Le Lemme donne :

$$\mathbb{P}(N_i \geq n+1 | X_0 = i) = a_i \mathbb{P}(N_i \geq n | X_0 = i) = ... = a_i^n \mathbb{P}(N_i \geq 1 | X_0 = i).$$

Ainsi,

$$P(N_i \geq n+1 | X_0 = i) = a_i^n P(T_i < +\infty | X_0 = i) = a_i^{n+1}$$

.

On en déduit d'une part que N_i est presque sûrement finie

$$P(N_i = +\infty | X_0 = i) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} P(N_i \geq n | X_0 = i) = 0$$

$(car a_i < 1)$ et d'autre part que sa loi est géométrique de paramètre a_i. Ce qui prouve (5).

$$P(N_i = n | X_0 = i) = P(N_i \geq n | X_0 = i) - P(N_i \geq n+1 | X_0 = i) = a_i^n (1 - a_i).$$

L'implication (5) $\Rightarrow$(6) est immédiate :

$$E[N_i | X_0 = i] = \sum_{n \geq 1} P(N_i \geq n | X_0 = i) = \frac{a_i}{1 - a_i} < +\infty.$$

Enfin,(3) $\Rightarrow$ (1) et (6) $\Rightarrow$ (4) sont respectivement les contraposées de(4) $\Rightarrow$ (6) et (1) $\Rightarrow$ (3). Les boucles sont bouclées ![1]

Exemple :

On considère une chaîne de Markov d'espace d'états $E := \{1; 2; 3; 4\}$ et de matrice de transition

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1- déterminer les états transitoires et récurrents de la chaîne ;

Les classes de la chaîne sont les suivantes :
$\{1\}$, $\{2;3\}$ et $\{4\}$. Les classes $\{1\}$ et $\{4\}$ sont clairement récurrentes puisque pour $x \in \{1;4\}$ on a $P_x(T_x < \infty) = 1$. La classe $\{2;3\}$ est quant à elle transi-ente. En effet, si elle était récurrente, 2 serait récurrent et on aurait $N_2 = +\infty P_2 - p$. où $N_2 = \sum_{n\geq 0} 1_{X_n} = 2$. Mais $N_2 = 1$ sur l'évènement $\{X_1 = 1\}$ qui est de mesure > 0 puisque $P_2(X_1 = 1) = p(2;1) = \frac{1}{2} > 0$.[4]

2.6.2 Les chaînes dans tous leurs états :

Soit (X_n) une $CM(E, \nu, P)$. Définissons la quantité $\rho(x, y) := P^x(T_y < 1)$. Un état x est qualifié de récurrent lorsque les propriétés équivalentes suivantes sont réalisées : $\rho(x, x) = 1$, $G(x, x) = \infty$, $H(x, x) = \infty$. Il est qualifié de transitoire sinon. Le tableau 1 regroupe des propriétés utiles. Pour un état récurrent x, la propriété de Markov forte appliquée récursivement permet de définir une infinité de temps de retours successifs en x, qui délimitent des excursions de même loi enracinées en x (cela correspond à un système de renouvellement sur N^*). On note E_R l'ensemble des états récurrents et $E_T = E\ E_R$ celui des états transitoires. On dit que $F \subset E$ est clos lorsque $P^x(T_{F^c} < \infty) = 0$ pour tout $x \in F$. La chaîne ne s'échappe jamais d'un ensemble clos. Un état x est dit absorbant (ou point cimetière) lorsque les conditions équivalentes suivantes sont réalisées : x est clos, $P(x, x) = 1$.

État x récurrent	État x transitoire
$\rho(x,x) = 1,\ H(x,x) = \infty$	$\rho(x,x) < 1, H(x,x) < \infty$
$\rho(x,y) > 0) \Rightarrow P^x(N_y = \infty) = 1$	$P^x(N_x = \infty) = 0$
$\rho(y,x) = P^y(N_x = \infty)$	$L(N_x \vert X_0 = x) = G(\rho(x,x)$
$\rho(y,x) > 0 \Rightarrow H(y,x) = \infty$	$H(y,x) = \rho(y,x)/(1-\rho(x,x)) < \infty$

Exemple :

1 . (Processus de Bernoulli).

Considérons le processus de Bernoulli

$$p(x,y) = \begin{cases} p & \text{si y=x+1} \\ 1-p & \text{si y=x} \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

Si $p > 0$.
alors tous les états sont transitoires car $P^x(T_x = \infty) = 1$.
Si $p = 0$,
tous les états sont absorbants (la chaîne est constante).[11]

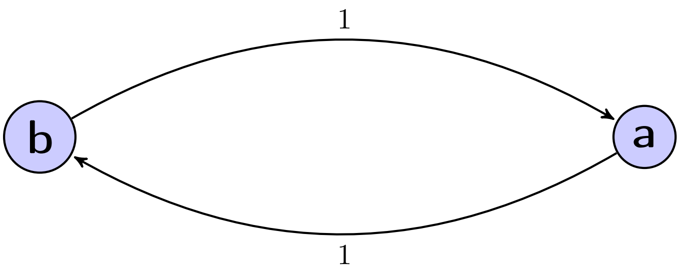
2.6.3 Périodicité :

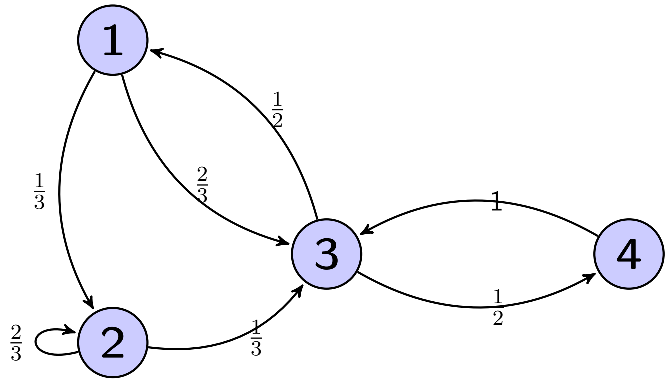
Définition 1 :

La période d'un état i est l'entier $d(i)$ défini par $d(i) = PGCDn \geq 1, p_{i,i}^{(n)} > 0$. Lorsque $d(i) = 1$, l'état i est qualifié de apériodique. Un état en lequel on peut rester avec probabilité non nulle, i.e.$p_{i,i} > 0$, est automatiquement apériodique. Voici deux exemples. à gauche, l'état a est de période 2 (idem pour b). En effet, chaque chemin de probabilité non nulle partant de a et y revenant comprend un nombre pair de pas. à droite, tous les états sont apériodiques. étudions en particulier le cas de l'état 1. Depuis cet état, il est possible d'y revenir en 3 pas (en faisant $1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 1$) :

$$p_{1,1}^{(3)} = \sum_{i,j\in E} p_{1,i}p_{i,j}p_{j,1} \geq p_{1,2}p_{2,3}p_{3,1} > 0.$$

Il est également possible d'y revenir en 5 pas : $p_{1,1}^{(5)} > 0$ (en faisant $1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 3 \longrightarrow 1$). Puisque 3 et 5 sont premiers entre eux, l'état 1 est apériodique.





La périodicité est une propriété de classe irréductible

Proposition :

Si les états i et j communiquent alors ils ont la même période. Tous les états d'une même classe irréductible ont donc la même période. Si celle-ci vaut 1, la classe est alors qualifiée de apériodique.

Démonstration :

Soient i et j deux états qui communiquent. Il suffit de montrer que $d(j)$ divise $d(i)$. En effet, par symétrie, on aura également $d(i)$ divise $d(j)$, et donc $d(j) = d(i)$. Comme i et j communiquent, il existe deux entiers l et m tels que $p_{i,j}^{(l)} > 0$ et $p_{j,i}^{(m)}$. Considérons maintenant un entier n tel que $p_{i,i}^{(n)} > 0$ Les inégalités

$$\begin{array}{rcl} p_{j,j}^{(m+n+l)} & \geq & p_{j,i}^{(m)} p_{i,i}^{(n)} p_{i,j}^{(l)} > 0 \\ etp_{j,j}^{(m+l)} & \geq & p_{j,i}^{(m)} p_{i,j}^{(l)} > 0 \end{array}$$

impliquent respectivement que $d(j)$ divise les entiers $m+n+l$ et $m+l$: il divise donc la différence, i.e. n. Autrement dit, $d(j)$ divise tous les entiers n tels que $p_{i,i}^{(n)} > 0$. Il divise donc leur PGCD $d(i)$.[1]

Exemple :

On considère 5 points équirépartis sur un cercle. Un promeneur saute à chaque instant, d'un point à l'un de ses voisins avec la probabilité 1/2 pour chaque voisin. Déterminer la matrice de transition de la chaîne ainsi obtenue. Quelle est la période de ses états ?
L'ensemble des états est $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
la matrice de treansition

$$p = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

La chaîne est irréductible (tous les états communiquent) et finie donc récurrente positive. Comme tous les états sont dans la même classe, leur période est la même. On a

$$d(1) = PGCD\{n \geq 1; p_{1,1}^{(}n) > 0\}.$$

Or

$$p_{1,1}^{(2)} \geq p_{1,2}p_{2,1} = \frac{1}{4} > 0$$

et $p_{1,1}^{(5)} \geq p_{1,2}p_{2,3}p_{3,4}p_{4,5}p_{5,1} = \frac{1}{2^5} > 0.$
$Orleseuldiviseurcommun2et5est1.Onadonc\mathrm{d} = \mathrm{d}(1) = 1$

cette chaîne est donc apériodique [4]

2.6.4 Distributions stationnaires :

Définition 1 :

Supposons que $\rho < 1$, et soit $\prod = (\pi_0; \pi_1; \pi_2; ......)$ la distribution de la chaîne de Markov induite . Il ne sera généralement pas possible de trouver la distribution π elle-même, mais nous pouvons calculer la fonction génératrice correspondante $\prod$

$$\prod = \prod P$$

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} p_{ij}\pi_i i = 1; 2; ....$$

$$\pi_j = a_j\pi_0 + \sum_{i=1}^{j+1} a_{j-i+1}\pi_i$$

$$\pi_j = a_j\pi_0 + \sum_{i=0}^{j+1} a_{j-i+1}\pi_i - a_{j+1}\pi_0; \qquad (j = 0; 1; 2; ....)$$

Si l'on multiplie cette equation précédente par z^j et si l'on somme sur j, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty} z_j\pi_j &= \pi_0 \sum_{j=0}^{\infty} z_j a_j + \sum_{j=0}^{\infty} z_j \sum_{i=0}^{j+1} a_{j-i+1}\pi_i - \pi_0 \sum_{j=0}^{\infty} z_j a_{j+1} \\ &= \pi_0 \sum_{j=0}^{\infty} z_j a_j + \frac{1}{z} \sum_{j=0}^{\infty} c_j + 1z^{j+1} - \frac{\pi_0}{z} \sum_{j=0}^{\infty} z^{j+1} a_{j+1}\end{aligned}$$

ou' $c_{j+1} = \sum_{i=0}^{j+1} a_{j-i+1}\pi_i$
est le terme général du produit de convolution des deux distributions $a = (a_0; a_1; a_2; ....)$ et $\prod$. En introduisant les fonctions génératrices

$$\prod(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i Z^i$$

$$a(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i Z^i$$

et

$$cz() = \sum_{i=0}^{\infty} c_i Z^i = \prod(z)a(z)$$

on obtient

$$\prod(z) = \pi_0 a_z + \frac{1}{z}[c(z) - c_0] - \frac{\pi_0}{z}[a(z) - a_0]$$

d'ou'

$$\prod(z) = \frac{\pi_0 a_(z)(z-1)}{z - a(z)}$$

alors

$$E(a_{n+1}) = P(X_n > 0) = 1 - P(X_n = 0)$$

d'ou'

$$\rho = 1 - \pi_0) \Rightarrow \pi_0 = 1 - \rho$$

et la fonction génératrice de la distribution stationnaire s'écrit

$$\prod(z) = \frac{(1-\rho)a(z)(z-1)}{z - a(z)}[5]$$

Exemple :

on considérons la matrice suuivants :

$$p = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1- la distribution stationaire :
d'pres la forme génerale

$$\pi = \pi.p$$

on applique la formule

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$$

$$\begin{cases} \frac{\pi_2}{4} = \pi_1 & (1) \\ \pi_1 + \frac{\pi_2}{2} + \frac{\pi_3}{2} = \pi_2 & (2) \\ \frac{\pi_2}{2} + \pi_4 = \pi_3 & (3) \\ \frac{\pi_3}{2} = \pi_4 & (4) \end{cases}$$

on remlace (1) et (4) dans (2) et (3) on trouve

$$\begin{cases} \pi_1 + 2\pi_1 + \frac{\pi_3}{2} = 4\pi_1 & (5) \\ 2\pi_1 + \frac{\pi_3}{2} = \pi_3 & (6) \end{cases}$$

on trouve

$$\begin{cases} \pi_1 = \pi_4 \\ \pi_2 = 4\pi_1 \\ \pi_3 = 2\pi_1 \end{cases}$$

la distribution stationaire $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = (\frac{1}{8}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8})$[4]

2.7 Chaîne de Markov à temps discret :

Définition 1 :

on appelle chaîne de Markov à temps discret un processus stochastique à espace d'état discret et à temps discret et qui v terrifier la propriété d'absence de mémoire c-à-d :Un processus stochastique $\{X_n\}_{n \in N}$ à valeurs dans l'espace mesurable (E, ϵ) est markovien si et seulement s'il vérifie la propriété de Markov

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

pour tout $n \in N$,pour tout état j et pour toute suite d'états $i_0, ..., i_{n-1}$,i pour lesquels la probabilité conditionnelle à un sens .On peut alors définir la probabilité de transition d'un état i vert un état j , par p_{ij}

$$p_{ij} - P(X_n = j | X_{n-1} = i), \qquad \forall n \in N$$

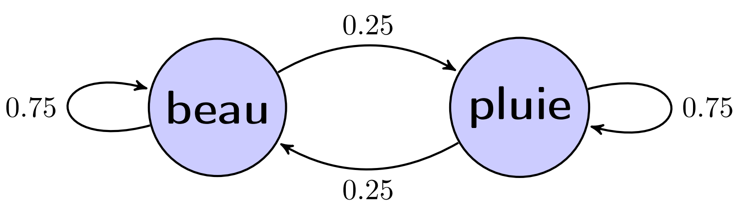
La matrice de transition $P - [p_{ij}]_{i,j \in E}$ est une matrice carrée d'ordre fini ou infini.[5]

Exemple :

On dispose de statistiques, de tableaux de chires, indiquant qu'il fait beau 50façon naive de prédire le temps est la suivante

$$P(beau) = P(mauvais) = 0 : 5$$

La justification est la loi des grands nombres : l'hypothése de base est que le climat du lendemain est indépendant du climat des autres jours. Malheureusement, on constate en examinant les chiffres qu'il y a 3 fois plus de chances que le climat du lendemain reste le même que celui d'aujourd'hui (plutôt qu'il ne change). On représente ce modéle par le diagramme



ou encore par la matric

$$p = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.25 & 0.75 \end{pmatrix}$$

2.8 Chaînes de Markov à temps continu :

On s'intéresse à des processus $(X_t)_{t\geq 0}$ indexés par le temps continu $t \in R^+$ à valeurs dans un espace fini ou dénombrable I. Une trajectoire du processus est donc une fonction $t \longrightarrow X_t(w)$ de R_+ dans I qui dépend d'un aléa w, tout comme une trajectoire d'une chaîne de Markov $(Y_n)_{n\in N}$ est une suite $(Y_n(w))_{n\in N}$ à valeurs dans I qui dépend de l'aléa w. On supposera dans toute la suite que les trajectoires de X sont continues à droite : pour (presque tout) w et tout $t \geq 0$, il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$\forall s \in [t, t+\epsilon], X_s(w) = X_t(w).$$

Pour une trajectoire donnée, trois comportements différents sont alors possibles :

1. la trajectoire devient constante à partir d'un certain instant,

2. la trajectoire possé de un nombre infini de sauts sur R^+ mais seulement un nombre fini sur tout intervalle compact,

3. la trajectoire possé de un nombre infini de sauts dans un intervalle de temps compact. Il existe alors un temps d'explosion ζ fini. Après ce emier instant d'explosion, la trajectoire peut repartir, exploser à nouveau ou non... Dans toute la suite, nous considèrons les processus jusqu'à leur premier temps d'explosion. On parle alors de processus minimal. On appelle $J_0, J_1, \ldots..$ les temps de saut de $(X_t)_{t\geq 0}$ et $S_1, S_2, \ldots.$ les temps d'attente. Ils se déduisent de $(X_t)_{t\geq 0}$ par les relations

$$J_0 = 0, J_{n+1} = \inf\{t \geq J_n; X_t \neq X_{j_n}\},$$

pour $n \in N$ avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$ et pour $n \in N^*$,

$$s_n = \begin{cases} J_n - J_{n-1} \text{ si y=x+1} \\ \infty \text{ sinon .} \end{cases}$$

Remarque :

La propriété de continuité à droite assure que $S_n > 0$ pour tout n. Si $J_{n+1} = \infty$ alors on peut définir $X_1 = X_{J_n}$, sinon, X_1 n'est pas défini. Le (premier) temps d'explosion ζ est défini par

$$\zeta = \sup_n J_n = \sum_{n=1}^{\infty} S_n.$$

Le processus à temps discret $(Y_n)_{n\in N}$ défini par $Y_n = X_{J_n}$ pour tout $n \in N$ est appelée chaîne incluse. Il représente la suite des valeurs prises par $(X_t)_{t\geq 0}$.

Définition :

Soit I un espace dénombrable. Un générateur sur I est une matrice $Q = (q_{ij})_{i,j\in I}$ vérifiant

1. pour tout $i \in I, 0 \leq -q_{ii} < \infty$,

2. pour tous $i \neq j, q_{ij} \geq 0$,

3. pour tout $i \in I, \sum_{j\in I} q_{ij} = 0$.

On notera $q_i = q(i) = -q_{ii}$ pour tout $i \in I$. à un générateur Q, on associe la matrice de saut $\Pi = (\pi_{ij})_{i,j\in I}$ donnée par

$$\pi_{ii} = \begin{cases} 0 & si \qquad q \neq 0 \\ 1 & si \qquad q = 0 \end{cases}$$

$$\pi_{ij} = \begin{cases} q_{ij}/q_i & \text{si } j \neq i \text{ et } q \neq 0 \\ \quad 1 & \text{si q=0 .} \end{cases}$$

Remaque :

La matrice Π est stochastique : ces coefficients sont positifs et leur somme sur chaque ligne vaut 1.
Une chaîne de Markov à temps continu $(X_t)_{t\geq 0}$ est déterminée par une mesure λ sur I (identifiée à un vecteur ligne) et un générateur Q. La mesure λ détermine la distribution initiale (c'est la loi de X_0) et la matrice Q détermine la dynamique de la chaîne. On peut décrire de deux manières équivalentes la dynamique de $(X_t)_{t\geq 0}$. La première description se fait par l'intermédiaire de la chaîne incluse et des temps d'attente.

Définition :

Le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est une chaîne de Markov à temps continu si, pour tout $n \in N$, tous $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq .... \leq t_{n+1}$ et tous états $i_0, ..., i_{n+1}$
,

$$P(X_{t_{n+1}=i_{n+1}|X_{t_0}=i_0,...,X_{t_n}=i_n)=p_{i_n}i_{n+1}(t_{n+1}-t_n)}.$$

2.9 Propriété de chaîne de Markov :

On vérifie facilement que, pour toute chaîne de Markov $(X_n)_{n\in N}$de probabilité de transition P et tout couple d'états (x, y) tel que $P(X_0 = x) > 0$, on a $P(x, y) = P(X_1 = y|X_0 = x)$. Plus généralement :

$$P(X_{n+1} = y|X_0 = x_0, X_1 = x_1, ..., X_{n-1} = xn?1, X_n = x) = P(x, y)$$

pour toute suite $(x_0, x_1, ..., x_{n?1})$ d'états telle que

$$P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, ..., X_{n?1} = x_{n-1}, X_n = x) > 0.$$

On voit donc que la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $(X_0, ..., X_n)$ ne dépend que de X_n :

$$\begin{aligned} P(x, y) &= P(X_{n+1} = y|X_0 = x_0, X_1 = x_1, ..., X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x) \\ &= P(X_{n+1} = y|X_n = x) \\ &= P(X_1 = y|X_0 = x) \end{aligned}$$

C'est précisément lé le caractére markovien dont nous avions parlé en introduction. Le but de cette section est d'étendre cette propriété é des variables aléatoires autres que X_{n+1} et des temps d'arrêt non nécessairement constants.

2.9.1 chaîne de markov forte :

Définition 1 :

Soit $\{X_n; n \geq 0\}$g une chaîne de Markov.
Pour simplifier les notations nous allons noter P_x la probabilité conditionnelle sachant $X_0 = x$,

c'est-à-dire $P_x(A) = P(A|X_0 = x)$

$$F_n = \{\{w; (X_0(w); .....; X_n(w)) \in B_n\}; B_n \in P(E^{n+1})\}$$

Définition 2 :

Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $N \cup \{+\infty\}$ On dira que T est un temps d'arrêt si pour tout $n \in N$, $\{t = n\} \subset f_n$

théorem :

Soit $\{X_n; n \geq 0\}$ une chaîne de Markov de loi initiale μ et de matrice de transition P et T un temps d'arrêt. Alors pour tout $A \in F_T$ et pour tout $m \geq 1$, $x_1; ....; x_m \in E$,

$$P(A \cap \{X_{T+1} = x_1; ....; X_{T+m} = x_m\} | X_T = x; T < \infty) = P(A|X_T = x; T < \infty) P_x(X_1 = x_1; ....; X_m = x_m)$$

ou' $F_T = \sigma(X_0; ....; X_T)$.

2.9.2 chaîne de makove faible :

Notation :

Dans toute la suite on notera F_n la tribu engendrée par les v.a. $X_0; ...; X_n$, autrement dit $F_n = \sigma(X_0; ...; X_n)$. On notera également P_x la probabilité conditionnelle sachant $\{X_0 = x\}$, $x \in E$.

Théorème de chaîne de markove faible :

Soit $(X_n)_{n \in N}$ une chaîne de Markov. Alors pour tous $n \in N$, $x \in E$ et conditionnellement à $\{X_n = x\}$, $(X_{n+p})_{p \in N}$ est une chaîne de Markov de loi initiale δ_x. Deplus elle est indépendante de F_n ; c'est-à-dire, pour tout $A \in F_n$, pour tous $m > 0$, $x_0; x_1; ...; x_m \in E$

$$\begin{array}{rl} P & (A \cap \{X_{n+1} = x_1; ...; X_{n+m} = x_m\} | X_n = x) \\ = & P(X_{n+1} = x_1; ...; X_{n+m} = x_m | X_n = x) P(A|X_n = x) \\ = & P_x(X_1 = x_1; ...; X_m = x_m) P(A|X_n = x) : \end{array}$$

Avant de faire la démonstration, nous allons établir 2 lemmes.

Lemme :

Soit $(\omega; F; P)$ un espace probabilisé et soient $A; B; C \in F$ tels que $P(B \cap C) > 0$: Alors

$$P(A|B|C) = P(A|B \cap C)$$

Démonstration :

Soit $Q(.) := P(.|C)$. Q est une probabilité. Par définition de la probabilité conditionnelle, on a

$$\begin{array}{rcl} P(A|B|C) = Q(A|B) & = & \frac{Q(A \cap B)}{Q(B)} = \frac{P(A \cap B|C)}{P(B|C)} \\ & = & \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} \\ & = & P(A|B \cap C) \end{array}$$

Lemme :

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov. Soit ≥ 0 et $x_0; x_n; x_{n+1} \in E$ tels que

$$P(\{X_n = x_n\} \cap \{X_0 = x_0\}) > 0.$$

Alors

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n; X_0 = x_0) = P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n)[3]$$

Chapitre 3

Fiabilité du la loi exponentielle :

3.1 Fiabilité du la loi exponentielle :

Définition :

La loi exponentielle est la loi suivie par la variable aléatoire T lorsque le taux d'avarie est constant. Autrement dit, pour tout $t \geq 0$, on a

$$\lambda(t) = \lambda$$

où λ est une constante réelle strictement positive.

• La fonction de fiabilité est définie pour tout $t \geq 0$ par

$$R(t) = e^{-\lambda t}.$$

• La fonction de défaillance est définie pour tout $t \geq 0$ par

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

• La densité de probabilité de la variable aléatoire T est définie pour tout $t \geq 0$ par

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}.[7]$$

3.2 Généralités sur la loi exponentielle :

On rappelle qu'une variable aléatoire suit la loi exponentielle de paramètre $\mu(\mu > 0)$ si elle admet pour densité la fonction f_μ définie par

$$f_\mu(x) = \begin{cases} \mu e^{-\mu x} & si\ x \geq 0 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}$$

1. Soit X une variable aléatoire suivant :
la loi exponentielle de paramètre μ
a) On a $E(X) = \frac{1}{\mu}$ et $V(X) = \frac{1}{\mu^2}$

b) Idée : comparer avec une fonction de référence (Riemann ou exponentielle)

$$x^n e^{-\mu x}/x^{-2} = x^{n+2}e^{-\mu x} = x^{n+2}/e^{\mu x} \longrightarrow 0$$

par croissance comparée quand $x \longrightarrow +\infty$:

$$Donc$$

$x^n e^{-\mu x} = o(\frac{1}{x^2})$ $\ \ etcomme\ \ \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ converge, alors par comparaison de fonctions positive, $\int_0^{+\infty} x^n e^{-\mu x}dx$ converge également.

Et comme $\int_{-\infty}^{0} x^n f_\mu(x)dx = 0$ alors

$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_\mu(x)dx$ converge absolument et (transfert)

Conclusion :

X^n a bien une espérance.
On intégré $\int_0^M x^{n+1}\mu e^{-\mu x}dx$par parties

$u(x) = x^{n+1} : u^{'}(x) = (n+1)x^n$

et $v^{'}(x) = \mu e^{-\mu x} : v(x) = e^{-\mu x}$

avec u et v de classe C^1 :
$\int_0^M x^{n+1}\mu e^{-\mu x}dx = [_0^M -e^{-\mu x}X^{n+1}] + \int_0^M (n+1)x^n e^{-\mu x}dx = -e^{-\mu M}M^{n+1} + \frac{(n+1)}{\mu}\int_0^{+\infty} x^n \mu e^{\mu x}dx$
$etquandM \longrightarrow +\infty$ on a $e^{-\mu M}M^{n+1} = \frac{M^{n+1}}{e^{\mu M}} \longrightarrow 0$ donc

$$E(X^{n+1}) = \frac{(n+1)}{\mu}E(X^n)$$

c) avec $E(X^1) = \frac{1}{\mu}$ on a alors par récurrence,

Conclusion :

pour tout $n \in N*: E(X^n) = \frac{n!}{\mu^n}$ d) en particulier :
$E(x^2) = \frac{2}{\mu^2}$ et $v(x) = E(x^2) - (E(x))^2 = \frac{2}{\mu^2} - \frac{1}{\mu^2} = \frac{1}{\mu^2}$ ce qui est cohérent.

Propriété caractéristique :

Soient $\mu > 0$ et X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre μ. On a pour tout $x \in R^+ : P(X > x) = e^{-x} > 0$. et pour tous réels positifs x et y,

$$\begin{aligned} P_[X > x](X > x + y) &= \frac{P(X>x+y \cap X>x)}{P(X>x)} \\ &= \frac{P(X>x+y)}{P(X>x)} carx + y \geq x \\ &= \frac{e^{(-x+y)}}{e^{-x}} = e^{-y}; \\ &= P(X > y) \end{aligned}$$

Réciproquement, soit X une variable aléatoire positive admettant une densité f continue et strictement positive sur R_+, et telle que pour tous réels positifs x et y,

$$P[X > x](X > x + y) = P(X > y)$$

i. Soit $R(x) = P(X > x)$. Comme la densité de f est continue sur R_+, sa fonction de répartition F est C^1 sur R^+ et $F' = f > 0$ donc F est strictement croissante sur R Sa limite en $+\infty$ est 1. Donc pour tout $x \in R_+$; $F(x) < 1$ et $R(x) = 1 - F(x) > 0$

$R(x) > 0$ pour tout $x \geq 0$

ii : On pose $\mu = f(0)$. On a $R(x) = 1 - F(x)$ donc R est dérivable sur R_+ et $R'(x) = -F'(x) = -f(x)$ On fait apparaître R dans l'égalité$P_{[X>x]}(X > x + y) = P(X > y)$:

$$P_{[X>x]}(X > x+y) = \frac{R(x+y)}{R(x)} donc$$

$$R(x+y) = R(x)R(y)$$

Astuce : et en dérivant par rapport à y (x est une constante) on a pour tout x et $y \in R^+$,

$$R'(x+y) = R'(y)R(x)$$

en particulier pour $y = 0$: $R'(x) = R'(0)R(x)$et avec $R'(0) = -f(0) = -\mu$
soit $R'(x) + \mu R(x) = 0$ pour tout x positif.
iii. Soit $G(x) = R(x)e^{\mu x}$. G est dérivable sur R_+ et $G'(x) = R'(x)e^{\mu x} + \mu R(x)e^{\mu x} = (R'(x) + \mu R(x))e^{\mu x}0$

iv. Donc G est constante sur R_+ :
Et comme $G(0) = R(0) = 1$ (car X est positive) alors pour tout $x \in R_+$: $R(x) = e^{-\mu x}$
Finalement

$$P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & six < 0 \\ 1 - e^{-\mu x} & six \geq 0 \end{cases}$$

conclusion :

$$x :\longrightarrow \varepsilon(\mu)$$

3. Soient deux réels strictement positifs μ_1 et μ_2. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois exponentielles de paramètres μ_1 et μ_2.

a) On pose $Y = \max(X_1; X_2)$.
Pour tout $x \in R$: $(Y \leq x) = [\max(X_1; X_2) \leq x] = (X_1 \leq x \; X_2 \leq x)$ et comme X_1 et X_2 sont indépendantes :

$$F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(X_1 \leq x)P(X_2 \leq x) = F_{X_1}(x)F_{X_2}(x)$$

Comme X_1 est à densité alors F_{X_1} est continue sur R et C^1 sur $R*$ et de même pour F_{X_2} Donc comme produit, il en est de même pour F_Y

Donc Y est à densité et une densité est : pour $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} f_Y(x) &= F'_{X_1}(x)F_{X_2}(x) + F_{X_1}(x)F'_{X_2}(x) \\ &= f_{X_1}(x)F_{X_2}(x) + F_{X_1}(x)f_{X_2}(x) \\ &= \begin{cases} \mu_1 e^{-\mu_1 x}(1 - e^{-\mu_2 x}) + \mu_2 e^{-\mu_2 x}(1 - e^{-\mu_1 x}) & six > 0 \\ 0 & six < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

b) On pose $Z = \min(X_1; X_2)$.

On passe par l'événement contraire :

$(Z > x) = [\min(X_1; X_2) > x] = (X_1 > x \cap X_2 > x)$ et comme X_1 et X_2 sont indépendantes :

$F_Z(x) = 1 - P(X_1 > x)P(X_2 > x) = 1 - (1 - F_{X_1}(x))(1 - F_{X_2}(x))$ et comme précédemment Z est à densité On simplifié alors l'écriture de

$$F_Z(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu_1 x}e^{-\mu_2 x} = 1 - e^{-(\mu_1+\mu_2)x} & si x \geq 0 \\ 0 \quad x < 0 \end{cases}$$

et on reconnaît la fonction de répartition de Conclusion :

$$Z \longrightarrow \varepsilon(\mu_1 + \mu_2)[14]$$

3.3 Fiabilité :

Soit T une variable aléatoire positive qui représente la durée de vie (c'est-à-dire le temps de fonctionnement avant la survenue d'une première panne) d'un système. On suppose que T est une variable à densité f_T continue sur R_+ et ne s'annulant pas sur $R*_+$.

On appelle fiabilité de T la fonction R_T définie sur R_+ par

$$R_T(t) = P(T \geq t) = P(T > t) = 1 - F_T(t)$$

où F_T est la fonction de répartition de T.

1. Soient t un réel positif ou nul et h un réel strictement positif. La dégradation du système sur l'intervalle $[t; t + h]$ est mesurée par la probabilité

$$P(t \leq T \leq t + h).$$

Comme

$$t \leq t + h$$

alors

$$P(t \leq T \leq t + h) = F_T(t + h) - F_T(t) = 1 - R_T(t + h) - 1 + R_T(t)$$

Conclusion :

$$P(t \leq T \leq t + h) = R_T(t) - R_T(t + h)$$

2. Pour tout réel t positif ou nul,

$$\frac{P(t \leq T \leq t + h)}{h} = \frac{F_T(t + h) - F_T(t)}{t + h - t}$$

est le taux d'accroissement de $F - T$ et comme f_T est continue sur R_+ alors F_T est C^1 et le taux d'accroissement tend vers F'_T

$$\lim_{h \longrightarrow 0, h>0} P(t \leq T \leq t + h)h = F'_T(t) = f_T(t)$$

a) Comme $F'_T(t) = f(t) > 0$ sur R_+ alors F_T est strictement croissante sur R_+ : De plus $\lim_+ \infty F_T = 1$ donc pour tout $t \in R$: $F_T(t) < 1$ et $1 - F_T(t) > 0$

Conclusion :
pour tout réel t positif, $R_T(t) > 0$ ce qui permet de définir le « taux de défaillance » la fonction définie sur R_+ par le rapport

$$\lambda(t) = \frac{f_T(t)}{R_T(t)}$$

b) $R_T = 1 - F_T$ est dérivable sur R_+ et $R'_T(t) = -F'_T(t) = -f_T(t)$ et comme $R_T(t) \neq 0$ alors $t \longrightarrow \frac{1}{R_t(t)}$ est dérivable et

$$\frac{d}{dt}\log(\frac{1}{R_t(t)} = -\frac{R'_T(t)}{R_T(t)} = \frac{f_T(t)}{R_T(t)} = \lambda(t)$$

c) En intégrant (fonction continue car R_T est C^1) de 0 à $x \geq 0$ on a donc

$$\begin{array}{rcl} \int_0^x \frac{d}{dt}(\frac{1}{R_t(t)})dt & = & [\ln \frac{1}{R_t(t)}]_{t=0}^x \\ & = & -\ln(R_T(x)) + ln(R_T(0)) \\ & = & -ln(R_T(x)) \end{array}$$

Donc

$$\ln(R_T(x)) = -\int_0^x \lambda(t)dtet$$

$$R_T(x) = exp(-\int_0^x \lambda(t)dt)$$

3. Soit Z une variable aléatoire réelle positive de densité g continue sur R_+, admettant une espérance. On pose $R_Z(t) = P(Z > t)$ pour $t \geq 0$.

N.B.

par rapport à la question 2. on n'a plus l'hypothèse « densité non nulle sur R_+ »

a) Soit v la fonction définie sur R_+ par $v(t) = tR_Z(t)$.

g est continue sur R_+ donc $R_T = 1 - F_T$ est C^1 et $R'_T(t) = -g(t)$:

v est donc dérivable sur R_+ et

$$\begin{array}{rcl} v'(t) & = & R - Z(t) + tR' - Z(t) \\ & = & R_Z(t) - tg(t)donc \\ tg(t) & = & R_Z(t) - v'(t) \end{array}$$

b) On a $v(t) = tR_Z(t)$ .Montrer que $\lim_{t\longrightarrow+\infty} v(t) = 0$:
N.B.
si on n'a pas déjà rencontré cette astuce, il faut plus de 4h pour la trouver ! Idée : utiliser l'existence de l'espérance et chercher le lien avec

$$R_Z(x) = \int_x^{+\infty} g(t)dt$$

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} tg(t)dt = \lim_{x\longrightarrow+\infty} \int_{-\infty}^{x} tgdt$$

donc (astuce)

$$E(Z) - \int_{-\infty}^{x} tgdt = \int_{x}^{+\infty} tgdt \longrightarrow 0$$

et on y est presque :

Pour tout $t \geq x$; $tg(t) \geq xg(t)$ car $g(t) \geq 0$ et, puisque les intégrales convergent :

$$\int_{x}^{+\infty} tg(t)dt \geq \int_{x}^{\infty} xg(t)dt = xR_Z(x) \geq 0$$

et par encadrement $xR_Z(x) \longrightarrow 0$ quand $x \longrightarrow +\infty$:
c) Z a une espérance donc $E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} tg(t)dt$ converge $\int_{0}^{+\infty} tg(t)dt = 0$ car Z est positive

donc sa densité sur $R-$ est nulle.

et donc $\int_{0}^{+\infty} tg(t)dt$ converge et vaut E (Z)

$$\begin{array}{rcl}\int_0^M R_Z(t) & = & \int_0^M tg(t) + v'(t)dt \\ & = & \int_0^M R_Z(t)dt - \int_0^M v_0(t)dt \\ & = & \int_0^M tg(t)dt - [v(t)]_0^M \\ & = & \int_0^M tg(t)dt - v(M) - v(0) \\ & = & \int_0^M tg(t)dt \end{array}$$

Conclusion :

$$E(Z) = \int_{0}^{M} R_Z(t)dt$$

4. On suppose désormais que T admet une espérance. Soit t un réel positif fixé ; le système ayant fonctionné sans panne jusqu'à la date t, on appelle durée de survie la variable aléatoire $T_t = T - t$ représentant le temps s'écoulant entre la date t et la première panne. On a donc, pour tout réel x positif

$$R_{T_t(x)} = P(T_t > x) = P[T > t](T > t + x)$$

Je ne comprends pas .... la probabilité pour T_t n'est-elle pas conditionnelle ?

a) Pour tout réel x positif,

$$\begin{array}{rcl} R_{T_t}(x) & = & P_{[T>t]}(T > t + x) \\ & = & \frac{P(T>t+x \cap T>t)}{P(T>t)} \\ & = & \frac{P(T>t+x)}{P(T>t)} car t + x \geq t \\ & = & \frac{R_T(t+x)}{R_T(t)} \end{array}$$

b) On réutilise alors le 3.c) puisque ses hypothèses (T_t positive, densité continue sur R_+ et ayant une espérance) sont satisfaites par T_t

$$\begin{array}{rcl} E(T_t) & = & \int_0^{+\infty} R_{T_t}(x)dx \\ & = & \int_0^{+\infty} R_T(t+x)R_T(t)dt \\ & = & \frac{1}{R_t(t)} \int_0^{+\infty} R_T(t+x)dt \end{array}$$

et par changement de variable
$u = t + x : dt = dx : x = 0 \Leftrightarrow u = t$ et $x \longrightarrow +\infty \Leftrightarrow u \longrightarrow +\infty$

$$E(T_t) = \frac{1}{R_t(t)} \int_t^{+\infty} R_T(u)du$$

5. a) On suppose que T suit la loi exponentielle de paramètre μ. la fiabilité est $R_T(t) = P(T \geq t) = P(T > t) = 1 - F_T(t) = e^{-\mu t}$ si $t \geq 0$ le taux de défaillance est $\lambda(t) = \frac{f_t(t)}{R_t(t)} = \frac{\mu e^{-\mu t}}{e^{-\mu t}} = \mu$ qui est donc constant.

b) On suppose que le système est composé de deux organes 1 et 2 montés en série, dont les durées de vie sont supposées indépendantes, ce qui implique qu'il tombe en panne dès que l'un d'eux tombe en panne. On note T_i la durée de vie de l'organe i, f_{T_i} la densité de sa loi qu'on suppose exponentielle de paramètre μ_i. La durée de fonctionnement du système est donc $T = \min(T_1; T_2)$ et d'après le I3a) $\hookrightarrow (\mu_1 + \mu_2)$ et donc sa fiabilité est celle du a)

Conclusion :

$R_T(t) = e^{-(\mu_1+\mu_2)t}$ et son taux de défaillance $\mu_1 + \mu_2$

c) On suppose que le système est composé de deux organes 1 et 2 montés en parallèle, dont les durées de vie sont supposées indépendantes, ce qui implique qu'il tombe en panne quand les deux organes sont en panne. On note T_i la durée de vie de l'organe i, f_{T_i} la densité de sa loi qu'on suppose exponentielle de paramètre μ_i.

On a vu qu'alors $T = \max(T_1; T_2)$ sa fonction de répartition $F_T(x) = F_{T_1}(x)F_{T_2}(x)$
Donc sa Fiabilité est

$$R_T(x) = 1 - F_{T_1}(x)F_{T_2}(x) = 1 - (1 - e^{-\mu_1 x})(1 - e^{-\mu_2 x}) si x \geq 0$$

6. Soit $\varphi_{n,\beta}$;
la fonction définie par

$$\varphi_{n;\beta}(t) = \begin{cases} \frac{\beta}{(n-1)!}(\beta t)^{n-1}e^{-\beta t} < 0 & si t \geq 0 \\ 0 & si t < 0 \end{cases}$$

où
$\beta > 0$ est une constante strictement positive et n un entier naturel non nul.

a) $\varphi_{n,\beta}$;
est positive sur R et continue sur $\mathbb{R}^*$
On montre par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^* : \int_0^{+\infty} \varphi_{n,\beta}(t)dt = 1$

Pour $n = 1 : \int_0^{+\infty} \varphi_{n,\beta}(t)dt = \int_0^{+\infty} \beta e^{-\beta t} = 1$ densité de $\varepsilon(\beta)$
Soit $n \geq 1$ tel que $\int_0^{+\infty} \varphi_{n,\beta}(t)dt$ converge et vaut 1 alors par parties on a

$$\int_0^M \frac{\beta}{n!}(\beta t)^n e^{-\beta t}dt$$

$par\ IPP$
$u(t) = \frac{(\beta t)^{n-1}}{n!} : u'(t) = \beta n \frac{(\beta t)^{n-1}}{n!}$
$v'(t) = \beta e^{-\beta t} : v(t) = -e^{-\beta t} et\ u\ et\ v\ declasse \quad C^1$
$= [-e^{-\beta t}\frac{(\beta t)^{n-1}}{n!}]_0^M - \int_0^M -e^{-\beta t}\beta\frac{(\beta t)^{n-1}}{(n-1)!}dt$
$= \int_0^{+\infty} \beta e^{-\beta t}\beta\frac{(\beta t)^{n-1}}{(n-1)!}dt = 1$

Donc pour tout entier n :

$$\int_{-\infty}^{-\infty} \varphi_{n,\beta}(t)dt = 1$$

Conclusion :

$\varphi(n, \beta)$ est une densité de probabilité (loi d'erlang)
b) On suppose que T a pour densité la fonction $\varphi_{(\beta,n)}$;
. Sa fiabilité est à l'instant t est $R_T(t) = 1 - F(t)$

On vérifie $\Phi(t) = 1 - e^{-\beta t} \sum_{k=0}^{n-1} (\beta t)^k k!$ est la primitive de $\varphi_{n,\beta}$; s'annulant en 0

Φ est dérivable sur R_+ et

$$\begin{aligned}
\Phi'(t) &= \beta e^{-\beta t}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\beta t)^k}{k!} - e^{-\beta t}\sum_{k=1}^{n-1}\beta k\frac{\beta t^{k-1}}{k!} \\
&= \beta e^{-\beta t}(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\beta t)^k}{k!} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{\beta t^{k-1}}{(k-1)!} - 0) \\
&= \beta e^{-\beta t}(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\beta t)^k}{k!} - \sum_{k=1}^{n-2}\frac{\beta t^h}{(h)!}) \\
&= \beta e^{-\beta t}\frac{(\beta t)^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \varphi_{n,\beta}(t)
\end{aligned}$$

et

$$\Phi(0) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(0)^k}{k!} = 1 - 1 - \sum_{k=1}^{n-1} 0 = 0$$

Donc Φ est la primitive de $\varphi_{n;\beta}$ s'annulant en 0 et

$$\begin{aligned}
F_t(x) = \int_{-\infty}^x \varphi_{n;\beta}(t)dt &= \int_0^x \varphi_{n;\beta}(t)dt \\
&= \Phi(x)
\end{aligned}$$

Finalement,

$$R_T(t) = 1 - F(t) = e^{-\beta t}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\beta t^k}{k!}$$

7. Soit $\psi_{\beta,n}$ la fonction dnie par

$$\psi_{\beta,n} = \begin{cases} \frac{\beta}{\eta}(\frac{t}{\eta})^{\beta-1}e^{(-\frac{t}{\eta})\beta} & sit \geq 0 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

où $\beta \geq 1\,;\eta > 0$

a) $\psi_{n,\beta}$est continue sur R^* et positive sur R
On remarque que $\frac{\beta}{\eta}(\frac{t}{\eta}^{\beta-1})$ est la dérivée $\frac{t}{\eta}^{\beta}$ donc

$$\begin{array}{rcl} \int_0^M \psi_{n,\beta} t dt & = & [-e^{-\frac{t}{\eta}\beta}]_0^M \\ & = & -e^{-\frac{M}{\eta^{\beta}+1}} \\ & \longrightarrow & 1 \text{quand M} \longrightarrow +\infty \end{array}$$

donc

$$\int_{\infty}^{+\infty} \psi_{n,\beta}(t)dt$$

converge et vaut 1

Conclusion :

$\psi_{n,\beta}$ est une densité de probabilité (loi de Weibull).

b) On suppose que T a pour densité la fonction
$\psi_{\beta,n}$

On a alors pour $t \in R_+$:

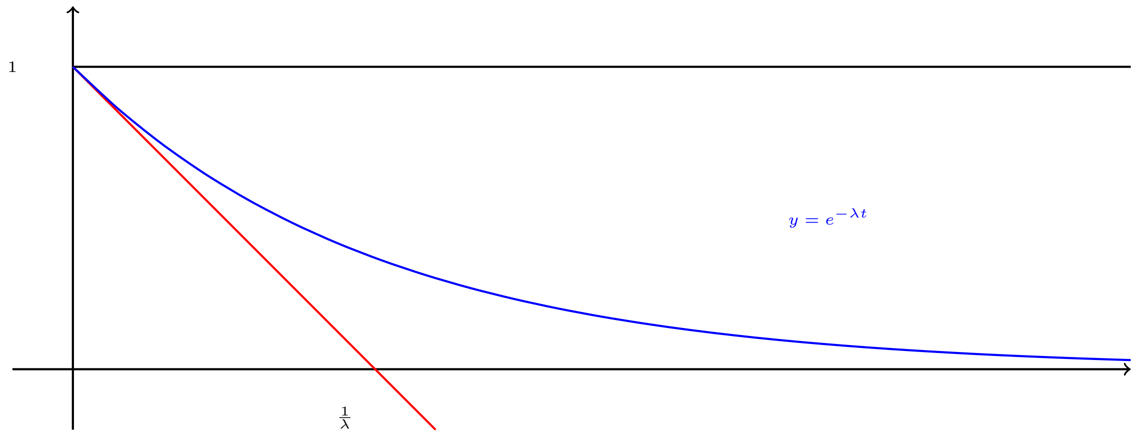
$$\begin{array}{rcl} F_T(t) & = & \int_0^t \psi_{\beta,n}(t)dt \\ & = & 1 - e^{-(\frac{t}{\eta})\beta} etdonc \\ R_T(t) & = & e^{-(\frac{t}{\eta})\beta} \end{array}$$

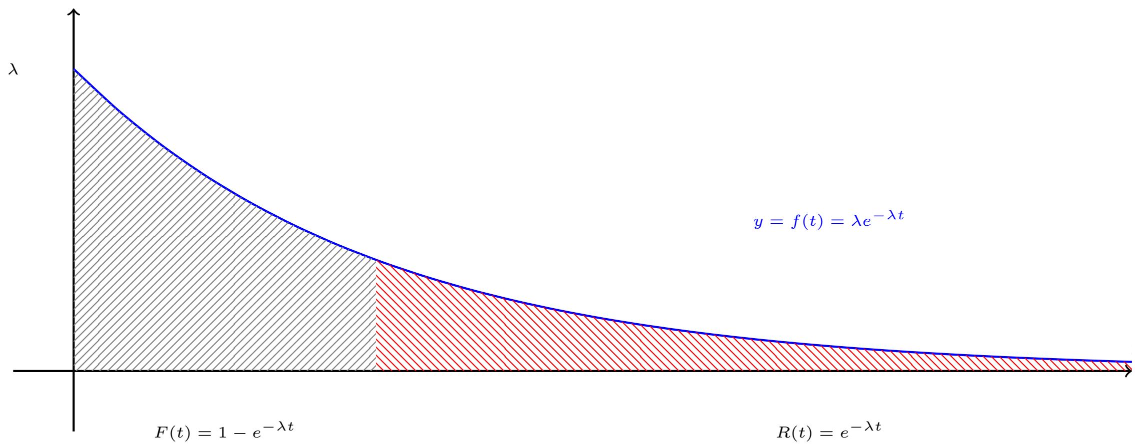
et le taux de défaillance $\lambda(t)$ à la date t :

$$\begin{array}{rcl} \lambda(t) & = & \frac{f_t(t)}{R_t(t)} \\ & = & \frac{\beta}{\eta}(\frac{t}{\eta})^{\beta-1} e^{(-\frac{t}{\eta})\beta} e^{(-\frac{t}{\eta})\beta} \\ & = & \frac{\beta}{\eta}(\frac{t}{\eta})^{\beta-1} \end{array}$$

c) Donc
si
$\beta > 1$ alors $\lambda(t) \longrightarrow +\infty$ quand $t \longrightarrow +\infty$
si
$\beta = 1$ on retrouve une loi $\varepsilon(\frac{1}{\eta})$ alors $\lambda(t) = \frac{1}{\eta}$ est constante.[7]

3.4 Graphe de loi exponentielle :





[10]

Chapitre 4

Application de fiabilité :

4.1 Introduction :

les problémes posés par la planification et l'exploitation des réseaux électrique sont trés complexes . le choix d'une configuration des réseaux et son équipement doit prendre en compte aussi bien les conditions techniques que les contraintes économiques
c'est pourquoi une analyse de fiabilité devient indispensable elle détecte les cas de défaillances entrainant une détérioration de l'état d'exploitation et détermine les mesures a' prendre afin de maintenir le réseau dans un état normal
précisions que la partie protection a été traités et que l'application d'une méthode analytique (markovienne) pour l'obtention des indices de fiabilité du réseau urbain a été réalisée
ce travail fait partie d'une protocole spécifique en voie de finalisation entre le L.AMOS - Béjaia et la direction de la distrubition SONALGAZ-ALger

4.2 présentation du réseau MT de Béjaia :

le réseau sur lequel porte cette étudeest un réseau de distribution MT urbain bouclé et alimenté a' partir du poste de transformation 80/30 Rv de Béjaia
Il est constitué de deux départs ville 2 et ville 3 et est entiérement réalisé en souterrain . Il comporte 27 postes MT/MB , dont 14 postes de distribution publique , 7 postes de livraison et 6 postes mixtes . ces postes sont racoordés en coupure d'artére
Al'état de fonctionnement normal , les deux départs sont séparés par l'intermédiaire d'un interrupteur . Lorsque un départ tombe en panne , l'interrupteur se ferme et l'alimentation du départ défaillant se fera a' partir du départ voisin

4.3 Pricncipe de la méthode de résolution :

Elle est basée sur l'application de la méthode de Monte Carlo . Il s'agit de simuler les défaillances du réseau de distribution MT , afin d'évaluer les différent indices de fiabilité.
La simulation est réalisé sur un simulateur numérique (Siemens) en turbo pascal version 5.5 1990 Barland International.

a) Structure des données :

L'application de cette méthode nécessite l'utilisation de deux types de données :

*** Données SONALGAZ :**

représentées par les temps de bon fonctionnement TBF(I) et temps de remise en service TRS(I) du réseau qui sont étalés sur quatre années (87,88,89,90).

Elle sont évaluées d'aprés les manoeuvres effectuées par le personnel de SONAlGAZ et sot sauvegardées dans deux fichiers (TBF,TRS)

*** Données internationales :**

représentées trois :
* le teaux de défaillance de chaque élément du réseau (câble , boite de jonction (B,j) intersect , sectionneur et disjoncteur).
*les données techniques du réseau a' savoire : la longueur du c$\hat{}$ble LC , le nombre B.j Nb , de sectionneurs Ns , d'intersect Ni et de disjoncteur Nd .
* le temps de remise en service a été estimé d'apés les doées SONALGAZ

$$TBSr = \sum_{i=1}^{27} TRSr(1)/27,$$

ou' 27 représente le nombre de défauts en registrés

b) Les indices de fiabilité :

le programme de simulation nous donne les résultats suivants :

- la moyenne des temps de bon fonctionnement (MTBFr) :

$$MTBFr = Neta_1.\Gamma(i + 1/\beta_1)$$

ou' $\Gamma(1 + 1/\beta)$: est tirer de la table de loi Gamma

- la moyenne des temps de remise en service (MTRSr) :

$$MTRSr = Neta_2.\Gamma(i + 1/\beta_2)$$

ou' $Neta_1$(respectivement β_1) représente le paramétre d'échelle (resp. le paramétre de forme) des TBFr (pour i=1) et des TRSr(pour i=2) du réseau .

-le taux de défaillance K$_1$:

$$K_1 = 1/MTBFr$$

-le taux de remise en service V$_1$:

$$V_1 = 1/MTRSr$$

-L'indisponibilité du réseau D$_1$:

$$D_1 = K_1/(K_1 + V_1)$$

-le temps de coupure Tc :

$$Tc = D_1.8760$$

-l'énergie non distribuée En :

$$En = P.Tc$$

ou' P est la puissance moyenne du réseau

-la fonction fiabilité R(t) :

Application de la méthode de Monte Carlo :

pour chaque élément du réseau , on génére une v.a u_i comprise entre 0 et 1 par la méthode congruentielle multiplicative :

$$X(i) = u(i)/m\,;$$

$$u(i+1) = A.u(i).mod(m)\,;$$

$$m = 2^{20} \text{ : terme de la congruence;}$$

$$A = 1443 \text{ : facteur multiplicatif :}$$

$$u(0) = A \text{ : racine du générateur;}$$

on détermine ensuite le temps de bon fonctionnement $TBF(i)$ correspondant a' l'élément i (cable ,B,j , sectionneur , intersect , disjoncteur) , par la loi distribution exponentielle .

$$TBFi = (1/k_i).\ln(1/1-u_i)$$

la connaissance de la structure du réseau (les relations entre les divers éléments), nous permet d'évaluer le temps de bon fonctionnement (TBFr) et le temps de remise en service (RRSr) correspondant a' l'élément tombé en défaut .
Ces v.a sont ajustées séparément par la loi de distribution de WEIBULL définie par sa fonction de répartition :

$$F(t) = 1 - \exp(-t/Neta)^{\beta}$$

les paramétre β et Neta caractérisant cette loi serant estimés par la méthode du maximum de vraisemblance .
Enfin un test d'adéquation : le test de KOLMOGOROV - SMIRNOV est appliqué par vérifier la validité de l'ajustement .

4.4 Description du programme de simulation :

Il est constitué de 8 procédures : - la procédure INTDONNEES est appelée pour lire données internationnales et le nombre de séquence Nc dont dépend la convergence de la méthode .
ONfait appel a' la procédure ALEATOIR pour la génération des nombres aléatoires compris entre 0 et 1 . pour chaque nombre aléatoire généré on calcule les TBF(i) .

-la procédure MINIMUM est appelée pour déterminer le minimum des TBF(i) qui répresente le temps de bon fonctionnement du réseau

-le temps de remise en service (TRSr) correspondant est obtenu a' partir de la procédure ALEATOIRE et la loi de distribution exponentielle la génération des TBFr et TRSr est répétée

Nc fois
pour les temps de bon fonctionnement TBFr ; on appelle :

- la procédure PARAM pour estimer les paramétres de la loi Weibull β et Neta par la méthode du maximum de vraisemblance .

-LA PROCéDURE permut pour ordonner les TBFr en ordre croissant .

-la procédure SMIRNOV pour vérifier la validité de l'ajustement .

-la procédure MTBFTR pour estimer la moyeen desv temps de bon fonctionnement (MTBFr) , ainsi qui leurs écart - types .

le mêm procédé est utilisé pour le temps de remis en service (TRDr).

Enfin , pour l'étude comparative on fait appel a' la procédure données , dans laquelle on intoduit les données SONALGAZ.

Par ailleurs , le programme permet de faire la représentation graphique des différent indices de fiabilité

4.5 Interprétation des résultats(obtenus sur le réseau de Béjaia) :

4.5.1 Paramétre de forme :

on constate que l'ajustement des TBFr , respectivement TRSr , (en utilisant les données internationales) selon la loi de Weibull est positif (don le test de kolmogorov - Smirnov est vérifié) .

Il nous donne les valeurs du paramétre de forme ($\beta_1 = 1.043, \beta_2 = 0.900$)qui sont prouche de 1 , ce qui veut dire que les résultats de la simulation correspondant a' la réalité , cela s'explique par la fait que notre systéme est constitue du point de vue fiabilité d'élement en série , dont chaque suit une loi exponentielle .

pour les données SONALGAZ , l'ajustement des TBFr selon la loi de Weibull est positif . par contre , pour le temps de remise es service du réseau il est ngatif . la non validité de l'ajustement est de a' proiri au manque de données (taille réduite de l'échantillon).

le programme nous donne les paramétre de la loi de distribution
$\beta_1 = 1.079, \beta_2 = 1.681$

4.5.2 Moyenne des temps de bon fonctionnement et de remise en service :

pour les données internationeles , la moyenne des temps de bon fonctionnement MTBFr(avac intervalle de confiance) est :

$$MTBFr = 3253.07 \pm 273.64(heures)$$

De même , la moyenne des temps de remise en service MTRSr évaluée avec intervalle de confaice

$$MTRSr = 0.514 \pm 0.50(heures)$$

pour les données SONALGAZ , on a obtenue :

$$MTBFr = 1188.445 \pm 416.12(heures)$$

de même :

$$MTRSr = 0.580 \pm 0.135(heures)$$

La MTBFr obtenue par les données internationales est trois fois plus grande que celle obtenue avec les données SONALGAZ . cet écart est de essentiellement aux facteurs suivants :

- les modes et techniques de poses de cable qui ne n'effectuent pas selon les normes .

- Jonction et réparation des cables : cette opération nécessite des moyens humains (personnel qualifié) et matériels performants .

- les atteuntes tiers lors des travaux .

Par contre , pour la MTRSr ,on constate que la différence des résultats (entre les données internationals et SONALGAZ) est faible ; cela est du au fait que le temps moyen de remise en service du réseau ne figure pas sur le tableau des données internationales .
ce paramétre est estimé a' partir des données SONALGAZ par la formule

$$TRSr = \sum_{i=1}^{27} TRSr(i)/27$$

.

4.5.3 temps de coupure annuel, Energie non distribuée :

On remarque que le temps de coupure (Tc) et l'énergie non distribuée (En) déterminer avec les données internationales sont diminuées de 60 par rapport a' celle SONALGAZ . cela est du aux différents facteurs cités précédemment.

-Données internationales :

$$Tc = 1.384 \pm 0.147(heures)$$

$$En = 9884.528(kwh)$$

Données SONALGAZ :

$$Tc = 4.325 \pm 1.537(heures)$$

$$En = 30892.089(kwh)$$

Remarque 1 :

l'énergie non distribuée est é valuée en connaissant le nombre de postes restants dans le noir pendant la durée de non fonctionnement du réseau .

Remarque 2 :

le temps de basculement utilisé pour la méthode markovienne ne représente pas réellement un temps de remise en service . cela a' été vérifier en consultat les fichiers au niveau de SONALGAZ ou sont enregistrées toutes les manoeuvers effectuées lors de chaque défaut .
les résultats de l'étude comparative sont exposés

4.6 Conclusion :

les curbures de faibilité obtenues avec les données internationales et SONALGAZ montent l'impotance de l'amélioration du taux de déffaillance du systéme (donc des éléments le constituant) pour améliorer la fiabilité du réseau .

les curbures d'indisponibilité , ainsi que l'évalution de l'érgie annuelle non distribuée montent que quand le temps moyen de remise en service du réseau diminue , l'énergie non distribuée ainsi que le temps de cuepure pendant une année diminuent.

une série de mesures sont proposées . néanmoins la décision d'invertissement et son caractére optimal ne peuvent s'analyser sans tenir compte des conséquence de cette décision a' la fois sur les frais d'exploitation résultant et sur la gêne éconimique au niveau de l'utillisateur du réseau .

c'est pourquoi elle doit être justifier par une étude technico- économique

Conclusion générale :

Dans ce travail ,nous avons de matrice du transition et en utilisant l'équation de chaîne de moarkov induit aux instante sous cette condition et la même approche nous avons établir le graphe de la loi exponentielle. quelque espectives de recherche.

Application de
faibilité (SONALGAZ)

étude d'autres processus aléatoire

Bibliographie

[1] André Monim. Processus stochastique estimation filtrag. université de toulouse . 09/2009

[2] Amélie Guilbaut. Chaînes de markov cachées .université de lille 1 .11 mai 2018

[3] Bechkit Abderahmane. Processus de sauts de markov application a la $M = E^r = 1$ .université de m'hamed bougarra .28/ 06 /2017

[4] Bts Domotique. Fiabilité. université de mosd sil 2008-2010

[5] Claudie Hassenforder Ismag master. Processus stochastiques modélisation.université de toulous .

[6] Djalil Chafaî. Quelques aspects des chaînes de Markov.université telemcen .18 janvier 2007

[7] Édouard. Pardoux. Processus de markov et applications .université d'oran .11 septembre 2006

[8] Jean-Yves Dauxios.Recherche de mathématiques probabilités.université de franche-comté.année scolaire 2008-2009

[9] Jean-Christophe Breton. Processus stochastiques.université de rennes 1.octobre 2018.

[10] Jean-Jacques Ruch et Marie-Line Chabanol. Chaîne de markove .2014

[11] Nils Berglund. Processus aléatoires et applications.université d'orléans.janvier 2014

[12] Omar Belabbci. La penalisation des trajectoire du mouvement browien.universite aboubeker belkaid - tLemcen.2008

[13] Sébastien Loustau. Chaînes de markov et processus markoviens .ecole centrale de marseille,2008-2009

[14] Takhadmit Baya. Analyse des systéme de files d'attent par la methode des martingal.université A. mira bejaia .10 /06 /2012.