République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université AMO de Bouira
Faculté des Sciences et des Sciences Appliquées
Département du Mathématiques

Mémoire de Master

Filière : Mathématiques

Spécialité : Recherche Opérationnelle

Thème

Contributions à l'étude des équations différentielles stochastiques

---

Présenté par :

- Boubekeur Djihad
- Bouslimani Rim

Devant le jury composé de :

Présidente	M^{me} BOUDANE Khadidja	MAA	U. A/M/O Bouira.
Encadreur	M^{r} BOUDREF Mouhamed.Ahmed	MCA	U. A/M/O Bouira.
Examinatreur	M^{r} DEMMOUCH Nacer	MCB	U. A/M/O Bouira.
Examinatrice	M^{me} MELOUANE Nassima	MAA	U. A/M/O Bouira.

2019/2020

Table des matières

1 Equations différentielles stochastiques **8**

1.1 Notions sur les processus aléatoires . . . 8

1.1.1 Continuité stochastique . . . 9

1.1.2 Continuité stochastique uniforme . . . 9

1.1.3 Continuité en moyenne L_p . . . 10

1.2 Processus wienerien ou mouvement brownien . . . 10

1.2.1 Comportement des trajectoires d'un mouvement brownien . . . 13

1.2.2 Continuité au sens de Hölder . . . 14

1.3 Intégrale stochastique . . . 14

1.4 Estimation des moments . . . 17

1.5 Formules d'Itô . . . 19

1.5.1 Formules d'Itô unidimensionnelles . . . 21

1.5.2 Formule d'Itô multidimensionnelle . . . 23

1.6 Intégrale de Stratonovich . . . 24

1.7 Equations différentielles stochastiques . . . 26

1.7.1 Unicité trajectorielle . . . 28

1.7.2 Solutions fortes . . . 28

1.7.3 Existence et unicité forte . . . 30

1.7.4 Solutions faibles . . . 34

1.7.5 Equations différentielles d'ordres supérieurs à un . . . 35

1.7.6 Equation différentielle stochastique de type Stratonovich . . . 36

2 Nouvelles formes de l'inégalité de Gronwall et applications **38**

2.1 Formule de Gronwall . . . 38

2.2 Généralisation de la formule de Gronwall . . . 39

2.3 Applications . . . 49

2.3.1 Théorème d'existence et l'unicité . . . 49

Remerciements

Nos remerciements vont tout premièrement à ***Allah*** le tout puissant pour la volonté, la santé et la patience quíl nous a donné pour terminer ce travail.

Nous remercions notre promoteur **Mouhamed.Ahmed.Boudref** pour avoir accepté de diriger ce travail ainsi que pour ses conseils avec beaucoup de patience et d ' encouragements.

Nous aimerons exprimer nos gratitudes aux êtres les plus chers aux mondes Nos Parents pour tous les effort et sacrifices qu'il ont entrepris afin de nous voir réussir et pour l'éducation qu'ils nous ont prodigué

Nous exprimons nos remerciements aux membres du jury qui ont accepté de juger notre travail.

Merci à Tous

Abstract

Stochastic differential equations play an important role in mathematical applications, mainly, in the modeling of real physical and biological phenomena, of which the random aspect is an element essential leader. So many books, articles and monographs have studied this option of mathematics, i.e. the theory of differential equations known stochastic tials (abbreviation EDS), making the link with the known knowledge and notions of ordinary differential equations which have been developed for several years. Differential equations stochastics serve as mathematical models for systems intercome two types of forces, one deterministic and the other random or stochastic.

The study of the existence and uniqueness of the solutions of differential equations stochastic is an important point in this mathematical theory, and to do this using several methods, among these methods : the method analytic.

The latter consists in demonstrating the existence and uniqueness of solutions of the DES using Gronwall's theorem. In this work, we will demonstrate some new forms of the Gronwall inequality, which will be used later to demonstrate the theorems of existence and uniqueness of solutions for Itô's DES.

Résumé

Les équations différentielles stochastiques jouent un rôle important dans les applications mathématiques, principalement,dans la modélisation des phénomènes réels physiques, biologiques,... dont l'aspect aléatoire est un élément essentiel dirigeant.Autant de livres, d'articles et de monographies ont étudié cette option de mathématiques,i.e. la théorie des équations différentielles stochastiques connues (abréviation **EDS**), en faisant le lien avec les connaissances et notions connues sur les équations différentielles ordinaires qui ont été développés depuis plusieurs années. Les équations différentielles stochastiques servent de modèles mathématique à des systèmes faisant intervenir deux types de forces, l'une déterministe et l'autre aléatoire ou stochastique.

L'étude de l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles stochastiques est un point important dans cette théorie mathématique, et pour ce faire en utilisant plusieurs méthodes, parmi ces méthodes : la méthode analytique. Cette dernière consiste à démontrer l'existence et l'unicité des solutions des EDS en se servant du théorème de Gronwall.

Dans ce travail, nous allons démontrer quelques nouvelles formes de l'inégalité de Gronwall, qui seront utilisées par la suite pour démontrer les théorèmes d'existence et d'unicité des solutions pour les EDS d'Itô.

Introduction générale

Dans le calcul différentiel dit de Leibnitz-Newton, on apprend la différenciation et intégration de fonctions déterministes. Le théorème fondamental dans la différenciation est la règle du changement de variables, qui donne la différentielle de la composée de deux fonctions différentiables et d'une transformation non linéaire de fonctions différentiables.

Dans le cadre des fonctions aléatoires (ou processus stochastiques) tel que le mouvement Brownien, la règle de la chaîne pour le calcul de Leibnitz- Newton ne marche plus dans ce cadre, parce que le mouvement Brownien se déplace si rapidement et irrégulièrement que presque toutes ses trajectoires sont nulle part différentiable. Donc nous ne pouvons pas différencier des fonctions du Brownien de manière similaire que dans le calcul Leibnitz-Newton.

En 1944 *Kiyosi Itô* a publié le papier célèbre "stochastic Integrals" aux proceedings de de l'Académie Impériale de Tokyo. C'était le commencement du calcul d'Itô, l'équivalent du calcul de Leibnitz-Newton pour les fonctions aléatoires. Dans ce papier de six pages, Itô a introduit l'intégrale stochastique et une formule, connue sons le nom formule d'tô depuis lors. peut être interprété en forme intégrante seulement. De plus, il y a un terme supplémentaire dans la formule, appelé le terme de correction d'Itô, qui résulte du fait que la variation quadratique du mouvement Brownien n'est pas nulle.

Le calcul d'Itô a été motivé par la construction de processus de Markov ou diffusions par des générateurs infinitésimaux.

Cependant, Itô a construit ces processus de diffusions directement comme les solutions d'équations différentielles stochastiques. De plus, les propriétés de ces processus peuvent être dérivés de la formule d'Itô.

Pendant les six dernières décennies la théorie d'intégration stochastique d'Itô a été étudiée largement et appliquée dans une grande gamme de champs scientifiques. La plus importante est à la théorie de valorisation et couverture de Black-Scholes et sa généralisation en finance. Le calcul d'Itô a un grand spectre d'applications dans chaque discipline scientifique qui implique les processus stochastiques.

Les équations différentielles servent à décrire des phénomènes physiques très variés. Cependant, dans de nombreuses situations les phénomènes observés ne suivent que grossièrement les trajectoires des équations qui semblent devoir leur correspondre. Les causes possibles d'un tel comportement peuvent être variées : erreur de modélisation, fluctuation au cours du temps des paramètres de l'équation, présence de bruit d'observation,... Dans ces situations, les approches probabilistes trouvent naturellement leur place et il peut alors être intéressant d'incorporer des termes aléatoires dans les équations différentielles afin de prendre en compte les incertitudes précédentes. Toutefois, l'introduction de ces termes aléatoires conduit à une intégration des équations qui ne correspond pas, en général, à une adaptation immédiate de la théorie classique des équations différentielles.

Les équations que l'on rencontre en physique, sont des équations différentielles qui, soit comportent un bruit, soit ont des coefficients qui sont eux mêmes des processus aléatoires. Dans le cas où le bruit est un bruit blanc, on peut modéliser l'équation par un mouvement brownien, et la traiter comme une équation d'Itô. Dans le cas où le processus est markovien, on a ce qu'on appelle une diffusion.

A chaque équation d'Itô est associée une équation de Foker-Planck [2] qui décrit l'évolution dynamique de la densité du processus considéré.

Le concept d'une équation différentielle stochastique généralise celui de l'équation différentielle ordinaire aux processus aléatoires. La formalisation théorique de cette équation, à elle seule a posée problème aux mathématiciens et il a fallu attendre les années 1940 et les travaux du mathématicien japonais Itô Kiyoshi pour la définition de l'intégrale stochastique. Il s'agit d'étendre la notion de l'intégrale de Lebesgue aux processus stochastiques selon un mouvement brownien c'est à dire, donner un sens à cette intégrale

$$\int_s^t f(u,\omega)dW_u$$

où $f(t,.)$ est un processus stochastique muni de propriétés de régularités suffisantes, et à partir de la théorie de l'intégrale stochastique on construit la théorie des équations différentielles stochastiques.

Les équations différentielles stochastiques jouent un rôle important dans les applications mathématiques, principalement, dans la modélisation des phénomènes réels physiques, biologiques,...dont l'aspect aléatoire est un élément essentiel dirigeant. Autant de livres, d'articles et de monographies ont étudié cette option de mathématiques, i.e. la théorie des équations différentielles stochastiques connues (abréviation EDS), en faisant le lien avec les connaissances et notions connues sur les équations différentielles ordinaires qui ont été développés depuis plusieurs années.

Les équations différentielles stochastiques servent de modèles mathématique à des systèmes faisant intervenir deux types de forces, l'une déterministe et l'autre aléatoire ou stochastique.

La pensée aux équations différentielles stochastiques est due, en premier lieu, aux physiciens, étudiant les phénomènes aléatoires comme celui du mouvement d'une particule suspendue dans un liquide, étudié par Brown [6]. La formulation d'une telle équation différentielle a nécessité une construction théorique consistante et des notions qui n'existaient pas avant. La nouvelle notion, d'un mouvement brownien était parmi les fondements essentiels liés aux EDS. Cette notion est donnée au départ, par Brown puis Einstein, comme étant un processus aléatoire de moyenne nulle et de variance dépendante du temps.

La théorie des EDS et des intégrales stochastiques est donnée pour la première fois et fondée par K. Itô [8] en 1942. Cette théorie est appliquée pour la première fois aux problèmes de Kolmogorov de détermination des processus de Markov.

La formule générale d'une EDS non linéaire est donnée par [12]

$$dx = a(t,x)dt + b(t,x)dB(t) \tag{1}$$

où $B(t)$ est un mouvement brownien défini dans un espace probabilisé (Ω, F, P) adapté à la filtration F_t. L'étude de l'équation (1), comporte plusieurs questions de base, citons l'existence et l'unicité de solution, la forme générale des solutions, leur comportement, la stabilité etc.

Ce mémoire présentera une contribution à l'étude des EDS non linéaires, le but essentiel sera d'étudier la question d'existence et d'unicité de solutions des équations différentielles stochastiques sur la base de nouvelles méthodes démontrées récemment.

Le présent mémoire est organisé comme suit :

1. Le mémoire donne les notions théoriques de bases sur les équations différentielles stochastiques, elle est divisée en deux chapitre.
2. le chapitre premier, est réservé aux notions fondamentales sur les équations différentielles stochastiques et les différents théorèmes reliés aux questions d'existence et d'unicité des solutions des EDS.
3. Le deuxième chapitre esr rsérvée aux nouvelles méthodes et formules permettant de démontrer les théorèmes d'existence et d'unicité des solutions pour les EDS, cette partie sera l'objet d'un seul chapitre.

Chaque chapitre est divisé en section $(1, 2, etc.)$ et la plupart des sections sont divisées en sous-sections. On distinguera, par exemple, la troisième sous- section de la cinquième section du chapitre 1 par "1.5.3". Nous terminons par une conclusion et perspectives en partie trois.

Chapitre 1

Equations différentielles stochastiques

Le calcul différentiel donne un cadre à la notion d'équations différentielles ordinaires, qui sert de modèle pour des phénomènes variables dans le temps. Quand on a voulu ajouter à ces équations des perturbations aléatoires, on a été gêné par la non différentiabilité du mouvement brownien. Nous avons commencé par construire une intégrale par rapport au mouvement brownien, pour qu'en suite définir la notion d'équation différentielle stochastique. Et il a fallu donner un sens à l'intégrale

$$\int_0^t H_s dB_s$$

Dans ce chapitre on se propose de rappeler certaines notions de base de l'analyse stochastique qui seront utilisées dans toute la suite de cette thèse. Nous commençons par introduire les notions de mouvement brownien, d'intégrale d'Itô, puis les équations différentielles stochastiques.

1.1 Notions sur les processus aléatoires

Dans cette section, nous allons donner les définitions relatives aux processus aléatoires.

Définition 1.1.1. En règle générale, il s'agit d'un processus aléatoire lorsqu'une certaine grandeur aléatoire $x(t)$ varie dans le temps t. On appellera donc processus aléatoire $x = x(t)$ toute fonction du paramètre réel $t \in T$ dont les valeurs $x(t)$ pour chaque t sont des variables aléatoires. Les lois que suit un processus aléatoire $x(t)$, $t \in T$ (lorsque T est un ensemble dénombrable le processus est dit à temps discret), se déterminent par les distributions simultanées des probabilités de ses valeurs $x(t_1), x(t_2)...x(t_n)$ pour différents $t_1, t_2, ...t_n$ (elles sont appelées distributions finidimensionnelles du processus aléatoire envisagé).Un processus aléatoire est caractérisé par deux paramètres, le temps t et l'événement aléatoire ω, on le note dans ce cas $x(t,\omega), t \in T \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega$. Si on fixe $\omega = \omega_0$ on obtient $x(t,\omega_0)$ une trajectoire parcourue suivant les valeurs de $t \in T$, on peut l'appeler aussi réalisation. Maintenant, si on fixe d'autre part, le temps t, on obtient une variable aléatoire.

Chaque variable $x(t)$ du processus aléatoire, en tant que variable aléatoire, dépend formellement de l'issue élémentaire $\omega : x(t) = x(t,\omega)$. Considérons le processus aléatoire $x(t), t \in T$, nous avons affaire pour chacune des issues aléatoires ω à une fonction correspondante $x(\omega, .) = x(\omega, t)$ du paramètre $t \in T$, appelée trajectoire ou réalisation du processus aléatoire étudié. Observer réellement un processus aléatoire c'est observer en fait l'une de ses trajectoires éventuelles $x = x(t), t \in T$.

On peut imaginer un certain ensemble X de toutes les trajectoires possibles $x = x(t), t \in T$, et un certain "mécanisme du hasard" susceptible de choisir l'une de ces fonctions $x \in X$. Le choix aléatoire de telle ou telle trajectoire $x = x(t), t \in T$, de X peut être considéré comme une issue élémentaire. Les notions de continuité, mesurabilité et autres ne s'appliquent pas directement aux processus aléatoires au sens large. En principe il est possible de leur trouver des notions équivalentes en termes de répartitions finidimensionnelles du processus aléatoire.

1.1.1 Continuité stochastique

Définition 1.1.2. On dit qu'un processus aléatoire $X(t)$ défini sur un intervalle T est stochastiquement continu en un point $t_0 \in T$ si pour tout $\varepsilon > 0$

$$\lim_{t \to t_0} P\{|X(t) - X(t_0)| > \varepsilon\} = 0$$

Si un processus est stochastiquement continu en chaque point d'un intervalle T, on dit qu'il est stochastiquement continu sur l'intervalle T. (Cette définition est valable pour les processus aléatoires numériques et vectoriels, dans le dernier cas, le symbole $|.|$ désignera la norme du vecteur). Il est clair que la continuité stochastique d'un processus aléatoire sur l'ensemble T n'implique pas nécessairement la continuité de ses réalisations sur cet ensemble.

1.1.2 Continuité stochastique uniforme

Définition 1.1.3. Un processus aléatoire $X(t)$ est uniformément stochastiquement continu, pour $t \in T$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : P\{\omega : |X(t) - X(s)| > \varepsilon\} < \varepsilon$$

dès que

$$0 < |t - s| < \delta$$

1.1.3 Continuité en moyenne L_p

Définition 1.1.4. Un processus aléatoire $X(t)$ est dit continu en moyenne L_p si

$$\lim_{s \to t} E|X(s) - X(t)|^p = 0$$

Si $p = 1, 2$, on dit qu'on a une continuité en moyenne L_p et en moyenne quadratique (respectivement).

Proposition 1.1.1. *Si un processus aléatoire $X(t)$ est stochastiquement continu sur T (fermé borné), il est borné stochastiquement.*

Définition 1.1.5. On dit que le processus aléatoire $X(t) : \mathbb{R} * \Omega \to \mathbb{R}$ est borné en moyenne $L_p(p \geq 1)$ s'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\sup_{t \geq 0} E|X(t)|^p \leq M$$

1.2 Processus wienerien ou mouvement brownien

Si un mathématicien regarde de loin l'histoire du mouvement brownien au cours de ce siècle, il y verra sans doute deux périodes : entre 1900 et 1950, une évolution lente et linéaire, repérable par les pères fondateurs que furent Albert Einstein, Norbert Wiener, Paul Lévy, et depuis 1950, une efflorescence difficile à maîtriser, avec la poursuite des propriétés fines qui font du mouvement brownien l'un des prototypes de la fractalité,le mouvement brownien sur les variétés, le mouvement brownien à plusieurs paramètres, le mouvement brownien à la source ou au carrefour des études sur les processus gaussiens, les processus à accroissements indépendants, les processus de Markov avec leur lien avec la théorie du potentiel, les martingales, les équations différentielles stochastiques, les intégrales de chemins, les super processus qui décrivent des particules qui se scindent au cours du temps, etc. La littérature sur le mouvement brownien est facile à inventorier et même à lire dans la première période, et difficile à maîtriser dans la seconde ;Daniel Revuz et Marc Yor, dans leur livre *Continuous martingales and Brownian motion [16]* font état d'une littérature énorme, dont la bibliographie qu'ils donnent, avec 500 titres, ne fournit qu'une faible idée. Il y a heureusement, sur différents aspects, beaucoup de livres qui permettent d'accéder à cette forêt.
La théorie mathématique du mouvement brownien, mise en place par Norbert Wiener, est à la fois si simple au départ, si belle et si riche qu'elle a conquis une large audience

chez les mathématiciens et aussi chez les physiciens. Mais il faut préciser dès maintenant que ce n'est qu'une des idéalisations mathématiques du mouvement réel de particules en suspension dans un liquide, tel qu'il fut observé et décrit par le botaniste anglais Richard Brown en 1828, et, à sa suite, par plusieurs physiciens expérimentateurs au XIXe siècle. Ce n'est même pas la meilleure idéalisation pour l'application de la théorie d'Einstein à la détermination du nombre d'Avogadro. Wiener, d'ailleurs, fut toujours prudent à cet égard.
Le botaniste *Robert Brown* qui donna son nom au mouvement brownien en observant en 1827 les mouvements erratiques de particules de pollen en suspension dans un liquide. Des années plus tard en 1905, Albert Einstein a mis en évidence les étranges relations que le processus entretenait avec l'équation de la chaleur. Vers 1909, Jean Perrin, entreprit son étude expérimentale et Paul Langevin posa la première équation. Mais il faudra attendre 1925 et les travaux de Nobert Wiener pour que le mouvement brownien ait véritablement un sens comme un modèle mathématique d'un bruit blanc. A partir des années 1950, Kiyoschi Itô l'utilisa pour définir l'intégrale qui porte son nom et jeta les bases du calcul stochastique.
On sait que si l'on observe dans un puissant microscope une particule plongée dans un liquide, on constate qu'elle est animée d'un mouvement chaotique et qu'elle se déplace suivant une ligne polygonale de forme très compliquée par suite de chocs avec les molécules du liquide. Comme la particule est relativement plus grosse que les molécules, elle subit un nombre considérable de chocs en une seconde à telle enseigne qu'il est impossible d'en suivre la trajectoire. Le mouvement apparent de la particule est dit mouvement brownien. En première approximation on peut admettre que les déplacements de la particule sont indépendants et considérer le mouvement brownien comme processus à accroissements indépendants. Comme les déplacements sont petits, on peut admettre que leur somme obéit au théorème limite central de la théorie des probabilités et que le mouvement brownien est un processus gaussien.
Le mouvement brownien est caractérisé de la façon suivante (environs année 1900) :

1. Le mouvement brownien est très irrégulier composé de la translation et de la rotation, le trajectoire ne semble pas avoir de tangentes.
2. Deux trajectoires semblent bouger de façon indépendante même si elles sont très proches.
3. Le mouvement brownien est d'autant plus actif que les particules sont petites.
4. Les compositions de la densité des particules n'ont pas d'influence.
5. Le mouvement brownien est plus actif en température haute.
6. Le mouvement brownien est sans fin.

En 1905, Bachelier, en vue d'étudier les cours de la Bourse met en évidence le caractère markovie du mouvement brownien : la position d'une particule à l'instant

$t+s$ dépend de sa position en t, et ne dépende pas de sa position avant t. Il convient d'insister sur le caractère précurseur de Bachelier et le fait que la théorie du mouvement brownien a été développée pour la Bourse, avant de l'être pour la Physique.
En 1905, Ei nstein détermine la densité de transition du mouvement brownien par l'intermédiaire de l'équation de la chaleur et relie ainsi le mouvement brownien et les équations aux dérivées partielles de type parabolique. La même année, Smoluchowski décrit le mouvement brownien comme une limite de promenades aléatoires *[[9], page 23]*.

Définition 1.2.1. Soit $B(t), t \geq 0$, une famille de variables aléatoires, on dit que cette famille forme un mouvement brownien standard si

1. $\forall t \geq 0 : B_t \hookrightarrow N(0,t)$
2. $si 1 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n les variables B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, ...B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ sont indépendantes.
3. $P(B_0 = 0) = 1$.

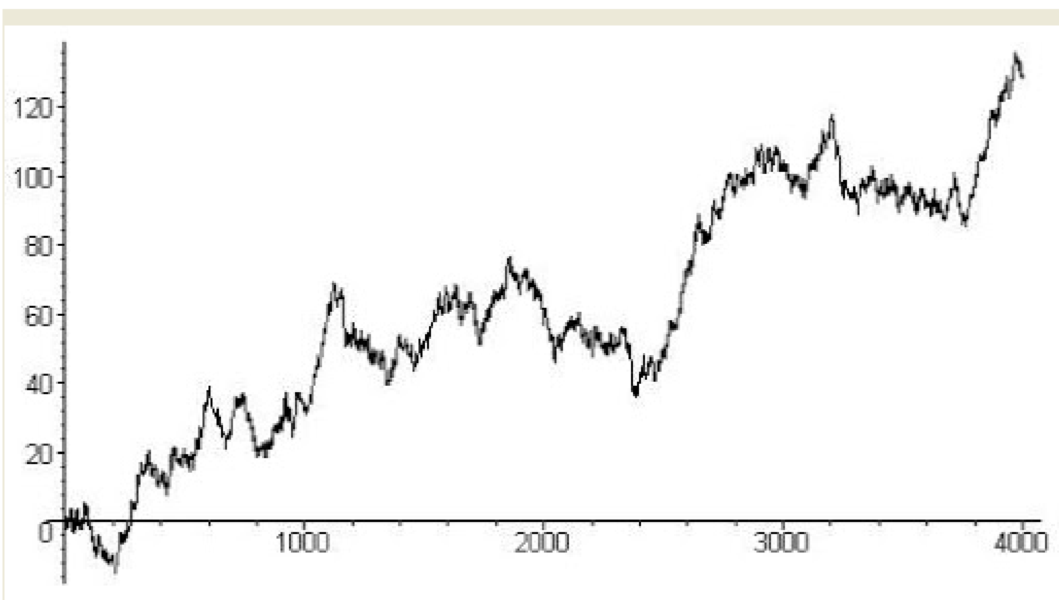

figure01 : mouvement brownien

Remarque 1.2.1. Remarquons que

$$cov(B_t, B_s) = min(t, s)$$

Proposition 1.2.1. *La fonction $t \longmapsto B(t)$ n'est différentiable en aucun point.*

Remarque 1.2.2. Il faut comprendre les conséquences de la définition du mouvement brownien, dire que $B(t) - B(s)$ suit une loi normale $N(0, t-s)$, entraîne que $\delta B = B(t+\delta t) - B(t)$ est d'ordre $\sqrt{\delta t}$ (son écart type). En fait, δB est compris entre $-3\sqrt{\delta t}$ et $3\sqrt{\delta t}$ avec une forte probabilité. On voit que $B(t)$ comme étant une fonction höldérienne d'ordre $\frac{1}{2}$, ceci implique que les trajectoires du mouvement brownien sont continues mais nulles part différentiables ($\frac{\delta B}{\delta t}$ ne converge pas). En particulier, sur tout intervalle, la fonction $B(t)$ n'est ni monotone ni à variation bornée.

Théorème 1.2.1. *Soit $B(t), t \geq 0$ un mouvement brownien, alors*

1. *$\{B_t, t \geq 0\}$, est une martingale, et est un processus de Markov.*
2. *$\{B^2(t), t \geq 0\}$ est une martingale.*
3. *$\left\{e^{\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2} t}, t \geq 0\right\}$, où σ est une constante, est une martingale.*

Proposition 1.2.2. *Un processus $(B(t))_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien, si et seulement si, il est un processus gaussien, continu, centré et de fonction de covariance $\Gamma(s,t) = \inf(s,t)$.*

1.2.1 Comportement des trajectoires d'un mouvement brownien

Proposition 1.2.3. *Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien sur R_+, les propriétés suivantes sont vraies*

1. *$\forall \varepsilon > 0$ on a presque-sûrement*

$$\sup_{t \in [0,\varepsilon]} B_t > 0, \inf_{t \in [0,\varepsilon]} B_t < 0$$

2. *$\forall \varepsilon > 0$, le mouvement brownien a un zéro presque-sûrement sur l'intervalle $(0, \varepsilon)$.*
3. *Notons T_x le premier temps de passage en $x \in \mathbb{R}_*$ i.e.*

$$T_x = \{t \geq 0, B_t = x\}$$

avec $\inf \emptyset = \infty$, alors on a pour tout $x \in \mathbb{R}_*$

$$P(T_x < \infty) = 1.$$

4. On a presque-sûrement

$$\lim_{t\to\infty} \sup B_t = +\infty$$

et

$$\lim_{t\to\infty} \inf B_t = -\infty$$

5. On a presque-sûrement

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{B_t}{t} = 0$$

1.2.2 Continuité au sens de Hölder

Définition 1.2.2. Une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est dite continue au sens de Hölder d'exposant $\alpha \in (0,1]$ (ou encore $\alpha-$höldérienne) s'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$|f(s) - f(t)| \leq c|s-t|^{\alpha}, 0 < s < t < \infty$$

Théorème 1.2.2. *Pour tout $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ les trajectoires du mouvement brownien sont presque-sûrement $\alpha-$höldériennes.*

Remarque 1.2.3. Pour plus de propriétés sur le mouvement brownien, on pourra consulter les livres suivants [[3] , [4], [6], [7], [14], [10], [13], [12], [16], [17], [?], [18]].

1.3 Intégrale stochastique

Le but essentiel de cette section est d'introduire la notion d'intégrale des processus stochastiques par rapport au mouvement brownien . En se référant à un cours sur le calcul stochastique appliqué à la finance, on peut justifier ainsi l'intégrale stochastique : étudions un instant un modèle où le prix d'une action serait donné par une martingale M_t à l'instant t . Si l'on possède $X(t)$ de ces actions au même instant et que l'on effectue des transactions aux instants t_k, la richesse se sera finalement accrue de

$$\sum_k X(t_{k-1})(M_{t_k} - M_{t_{k-1}})$$

Mais si l'on veut effectuer des transactions en temps continu, à tout instant t , il faut pouvoir définir un outil mathématique permettant de passer à la limite dans l'expression ci-dessus avec le problème que, en particulier si $M = W$, la dérivée $\frac{dW}{dt}$ n'existe pas!! cette expression est une somme qui a vocation à converger vers une intégrale de Stieltjes, mais comme la variation $V(W)$ est infinie, cela ne saurait converger dans un sens “déterministe ” : l’intégrale stochastique “naïve”est impossible [[15], page 40] .

Il faut donc trouver d’autres outils. L’idée d’Itô a été de restreindre les intégrands aux processus qui ne peuvent pas “voir”les accroissements du futur, c’est à dire les processus adaptés, en sorte que, du moins pour le brownien, $X(t_{k-1})$ et $(W_{tk} - W_{tk-1})$ soient indépendants ; ainsi, par trajectoire on ne peut rien faire, mais l’on travaille en probabilité, en espérance.

Le concept des équations différentielles stochastiques généralise celui des équations différentielles ordinaires aux processus aléatoires. La formalisation théorique de ces équations est dû à Itô Kiyoshi, pour la définition de l’intégrale stochastique. Il s’agit d’étendre la notion d’intégrale de Lebesgue aux processus stochastiques selon un mouvement brownien, (ou plus général selon un processus aléatoire quelconque).

A partir de la théorie des EDO on peut construire des équations différentielles, de la forme

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + b(t, X(t))dW(t) \tag{1.1}$$

Pour donner un sens à cette équation mettons-la sous forme intégrale

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(s, X(s))ds + \int_0^t b(s, X(s))dW(s) \tag{1.2}$$

Le problème est de donner un sens à la deuxième intégrale du second membre de cette équation. Les intégrales de ce type, appelées intégrales stochastiques ou d’Itô, on remarque que le processus wienérien est presque sûrement à variation indéfinie sur tout intervalle, donc cette intégrale ne peut pas s’exprimer à l’aide de l’intégrale de Stieltjes. Définissons l’intégrale stochastique

$$\int_0^t f(u)dW(u)$$

dans le cas où $W(t)$ est un processus wienérien de dimension un. Soient donnés sur un espace probabilisé (Ω, F, P), une filtration $\{C, t \in [0, \infty]\}$ et un mouvement brownien $W(t), t \in [0, \infty]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, tel que $W(0) = 0, W(t)$ est F_t-mesurable pour $t \in [0, \infty)$ et les accroissements $W(t + s) - W(t)$ ne dépendent pas de la filtration F_s pour $s > 0$.

Appelons $H_2([0, \infty))$ l’espace des fonctions aléatoires $f(t) = f(t, \omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, définies sur $[0, \infty)$ et telles que la variable aléatoire $f(t)$ est F_t-mesurable pour tout

$t \in [0, \infty)$ et l'intégrale

$$\int_0^t f^2(u)d(u)$$

est presque sûrement finie.

Théorème 1.3.1. *[[14], pages : 442-449] A tout processus $\{f(t), t \in [0, \infty)\}$ de l'espace $H_2([0, \infty))$ on peut associer une variable aléatoire $I(f)$ définie sur l'espace (Ω, F, P) et jouissant des propriétés suivantes :*

1. *Si $f_1, f_2 \in H_2([0, \infty))$ et α_1, α_2 sont des constantes arbitraires, alors*

$$I(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 I(f_1) + \alpha_2 I(f_2)$$

(distributivité et homogénéité)

2. *Si $\chi_{[t_1,t_2]}(t)$ est l'indicateur de l'intervalle $[t_1, t_2]$, alors*

$$I(\chi_{[t_1,t_2]}(t)) = W(t_1) - W(t_2)$$

3. *Si $f \in H_2([0, \infty))$ et*

$$E\left(\int_0^t f^2(u)d(u)\right) < \infty$$

alors

$$E(I(f)) = 0, \qquad E(I(f))^2 = E\left(\int_0^t f^2(u)du\right)$$

4. *Pour tout $f \in H_2([0, \infty))$ et toutes constantes $C > 0$, et $N > 0$, on a*

$$P\{|I(f)| > C\} \leq P\left\{\int_0^t f^2(u)du > N\right\} + \frac{N}{C^2}$$

Définition 1.3.1. La variable aléatoire $I(f)$ s'appelle intégrale stochastique de la fonction $f(t)$ par rapport à un processus de Wiener et se note

$$I(f) = \int_0^t f(u)dW(u) \tag{1.3}$$

1.4 Estimation des moments

Pour estimer les moments des intégrales stochastiques, on aura besoin du théorème suivant.

Théorème 1.4.1. *Si $f \in H_2([0,\infty))$ et pour un $p > 0$*

$$E\left(\int_0^t |f(u)|^2 du\right)^{\frac{p}{2}} < \infty$$

alors

$$E\left|\int_0^t f(u)dW(u)\right|^p \geq A_p \left(\int_0^t |f(u)|^2 du\right)^{\frac{p}{2}}$$

pour $p > 1$, et

$$E\left|\int_0^t f(u)dW(u)\right|^p \leq B_p \left(\int_0^t |f(u)|^2 du\right)^{\frac{p}{2}}$$

pour $p > 0, A_p$ et B_p étant des constantes ne dépendant que de p . Pour $p = 2$, il est claire que les deux inégalités deviennent égalités, et de plus $A_p = B_p = 1$. Signalons une égalité pour les intégrales stochastiques qui découle directement de la définition : si $f_1, f_2 \in H_2([0,\infty))$ et

$$E\left(\int_0^t f_1^2(u)du\right) < \infty$$

$$E\left(\int_0^t f_2^2(u)du\right) < \infty$$

alors

$$E\left(\int_0^t f_1(u)dW(u) \int_0^t f_2(u)dW(u)\right) = E\left(\int_0^t f_1(u)f_2(u)du\right)$$

Définition 1.4.1. *(Formule d'Isométrie)* Nous avons la formule d'isométrie pour $t \in [0,\infty)$

$$E\left(\int_0^t f(s)dW_s\right)^2 = \int_0^t E\left[f(s)\right]^2 ds$$

Remarque 1.4.1. On peut généraliser cette formule, pour $t, \in [0,\infty)$ et pour $f_1(t), f_2(t) \in H_2([0,\infty))$ on a

$$E\left(\int\limits_0^t f_1(r)dW(r)\int\limits_0^s f_2(r)dW(r)\right) = E\left(\int\limits_0^{t\wedge s} f_1(r)f_2(r)dr\right)$$

où $t \wedge s = min(t,s)$.

Remarque 1.4.2. Pour le cas multidimensionnel de la formule d'Isométrie, on considère l'intégrale

$$\int\limits_0^t A(u)dW(u) \tag{1.4}$$

où $A(t)$ est une fonction matricielle $A(t) = \| a_{ij}(t) \|_{i=1,...,n}^{j=1,...,m}$ $a_{ij}(t) \in H_2([0,\infty))$ L'intégrale (1.4) est une fonction vectorielle à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ dont les composantes sont

$$\left(\int\limits_0^t A(u)dW(u)\right)_i = \sum_{j=1}^m \int\limits_0^t a_{ij}(u)dW_i(u), i = 1, ..., n$$

La formule d'Isométrie sera

$$E\left(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m\int\limits_0^t a_{ij}(u)dW_j(u)\sum_{k=1}^m\int\limits_0^t b_{ik}(u)dW_k(u)\right) = E\left(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m\int\limits_0^t a_{ij}(u)b_{ij}(u)du\right)$$

D'une façon matricielle on a

$$E\left(\int\limits_0^t A(u)dW_u\int\limits_0^t B(u)dW_u\right) = E\left(\int\limits_0^t A(u)B(u)du\right)$$

à condition que le produit matriciel $A(u)B(u)$ soit possible et justifié.

Remarque 1.4.3. (Historique) La définition de l'intégrale stochastique remonte à Itô [8] $(1942-1944)$ qui a introduit l'intégrale stochastique avec un intégrand aléatoire. Doob [3] 1953) a réalisé la relation entre l'intégrale d'Itô et la théorie des martingales. L'intégrale d'Itô représente maintenant le cadre des manuels avancés sur la théorie des probabilités et processus aléatoires. Les références types sont : Ikeda et Watanabe [14]

(1989), Karatzas et Shreve [18] (1988), ∅ksandal [12] (1985) et Protter [15] (1992) : Certains de ces livres définissent l'intégrale d'Itô par rapport à des processus plus généraux que le mouvement brownien y compris les processus avec sauts. En outre, l'hypothèse

$$\int_0^t E(f_s)^2 ds < \infty$$

pour l'existence de l'intégrale

$$\int_0^t f_s dB_s < \infty$$

peut être considérablement assouplie.

Remarque 1.4.4. On peut suivre la construction classique pour définir l'intégrale stochastique :

1. nous définissons l'intégrale pour les fonctions en escalier.
2. passons en suite aux fonctions qui sont limites de suites de fonctions en escalier.
3. nous généralisons à la fin, aux fonctions intégrables.

1.5 Formules d'Itô

Comme pour les équations différentielles ordinaires, il n'est pas possible, en général, d'obtenir une forme analytique pour les solutions d'une équation différentielle stochastique. Cependant, un certain nombre d'EDS admettent une solution analytique (i.e. une différentielle d'un processus stochastique) que l'on peut souvent obtenir grâce à **la formule d'Itô**. Cette section est consacrée à sa présentation et à sa manipulation à travers quelques exemples

La définition de l'intégrale d'Itô n'est pas maniable dans la pratique ; et comme pour l'intégrale de Lebesgue, il est crucial de faire appel à des résultats puissants, sans chercher à approximer les fonctions considérées par des fonctions élémentaires.

Définition 1.5.1. On appelle un processus d'Itô ou semi-martingale un processus stochastique $(X_t, t \geq 0)$ adapté à une filtration $\{F_t\}$ s'écrivant sous la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t K(s)ds + \int_0^t H(s)dW_s \tag{1.5}$$

où $H(t) \in H_2([0,\infty))$ et $K(t)$ adapté à la filtration $\{F_t\}$, et

$$P\left\{\int_0^t |K(u)|du < \infty\right\} = 1$$

On dira que le processus $(X_t, t \geq 0)$ admet une différentielle stochastique unique

$$dX_t = K_t dt + H_t dW_t \tag{1.6}$$

Il est évident que l'opérateur différentiel "d" est linéaire. Indiquons maintenant les formules de différentiation du produit de deux processus d'Itô et d'une fonction composée.

Théorème 1.5.1. *[formule d'intégration par partie] Si les processus $X_1(t)$ et $X_2(t)$ admettent des différentielles stochastiques*

$$\begin{array}{l} dX_1(t) = K_1(t)dt + H_1(t)dW_t \\ dX_2(t) = K_2(t)dt + H_2(t)dW_t \end{array}$$

alors le processus $X_1(t)X_2(t)$admet aussi une différentielle stochastique et

$$d(X_1(t)X_2(t)) = X_1(t)dX_2(t) + X_2(t)dX_1(t) + d < X_1(t), X_2(t) > \tag{1.7}$$

où

$$d < X_1(t), X_2(t) >= H_1(t)H_2(t)dt.$$

En particulier, pour une fonction continûment différentiable dans $[0,T]$ on a la relation suivante

$$\int_0^t f(u)dW_u = f(t)W_t - \int_0^t f'(u)W_u d_u.$$

Remarque 1.5.1. On peut avoir la table de multiplication suivante

$$\left\{\begin{array}{l} (dt)^2 = 0 \\ dW_t^i dW_t^j = \delta_{ij}dt \\ dW dt = dt dW = 0 \end{array}\right.$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker.
Donnons maintenant un théorème définissant le crochet $< .,. >$.

Théorème 1.5.2. *Si $X_1(t)$, et $X_2(t)$ sont deux processus d'Itô tels que*

$$\begin{cases} dX_1(t) = K(t)dt + H(t)dW_t \\ dX_2(t) = K'(t)dt + H'(t)dW_t \end{cases} \tag{1.8}$$

alors on définit $< X_1, X_2 >$, de la façon suivante :

1. *$< X_1, X_2 >_t$ est une forme bilinéaire symétrique.*
2. $$< \int_0^* K_s d_s, X_* >_t = 0$$
   , si $X(t)$ est un processus d'Itô, i.e $\qquad dX(t) = K_t dt + H_t dW_t.$
3. $$< \int_0^* H_s dw_s^i, \int_0^* H_s dw_s^l >_t = 0, \qquad \text{si} \quad i \neq l.$$
4. $$< \int_0^* H_s dw_s^* \int_0^*, H_s' dw_s^* >_t = \int_0^* H_s H_s' ds$$
   ($*$: signifiée que nous avons les mêmes paramètres)

1.5.1 Formules d'Itô unidimensionnelles

Théorème 1.5.3. *[Première formule d'Itô] Soit un processus d'Itô $X(t), t \geq 0$, i :e*

$$dX(t) = K_t d_t + H_t dW_t$$

et soit $f(t)$ une fonction $2-$fois continûment dérivable, alors on a la première formule d'Itô

$$df(X_t) = f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t) d < X; X >_t$$

avec $\quad d < X; X >_t = H_t^2 dt.$

On peut écrire tout simplement

$$df(Xt) = (f'(X_t)K_t + \frac{1}{2} f''(X_t)H_t^2)dt + f'(X_t)H_t dW_t.$$

Théorème 1.5.4. *[Deuxième formule d'Itô] Si un processus $X(t)$ admet une différentielle stochastique et*

$dX(t) = a(t)dt + b(t)dW_t$, et si une fonction $f(t,x), t \in [0,T], x \in R$, à valeurs réelles, est continue ainsi que ses dérivées partielles $f'_t(t,x), f'_x(t,x) et f''_{xx}(t,x)$, alors le processus $f(t,X(t))$ admet aussi une différentielle stochastique et

$$df(t,X(t)) = f'_t(t,X(t))dt + f'_x(t,X(t))dX_t + \frac{1}{2}f''_{xx}(t,X(t))d < X,X >_t$$

ou bien

$$df(t,X(t)) = [f'_t(t,X(t)) + f'_x(t,X(t))a(t)$$

$$+\frac{1}{2}f''_{xx}(t,X(t))b^2(t)]dt + f'_x(t,X(t))b(t)dW(t) \tag{1.9}$$

Remarque 1.5.2. *(formule d'Itô pour un mouvement brownien)* Soit un mouvement brownien $B(t)$, pour une fonction $f(x)$ deux fois différentiable

$$df(B(t)) = f'(B(t))dB(t) + \frac{1}{2}f''(B(t))d < B,B >_t$$

avec $d < B,B >_t = dt$, on aura

$$df(B(t)) = f'(B(t))dB(t) + \frac{1}{2}f''(B(t))dt \tag{1.10}$$

Théorème 1.5.5 (Troisième formule d'Itô)**.** *Soient X^1 et X^2 deux processus d'Itô issus de x_1 ,(respectivement x_2) de coefficients de dérive a1(respectivement a^2), de coefficients de diffusion b^1(respectivement b^2) et portés respectivement par deux mouvements browniensB^1 etB^2corrélés avec coefficient ρ. On suppose que a^i, b^i sont adaptés à la filtration $F_t^{B^i}, (i = 1,2)$.*

$$f(X_t^1, X_t^2) = f(x_1,x_2) + \int_0^t f'_1(X_s^1, X_s^2)dX_s^1 + \int_0^t f'_2(X_s^1, X_s^2)dX_s^2$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t \{f''_{11}(X_s^1,X_s^2)(b_s^1)^2 + 2\rho f''_{12}(X_s^1,X_s^2)b_s^1 b_s^2 + f''_{22}(X_s^1,X_s^2)(b_s^2)^2\}ds \tag{1.11}$$

où f'_i désigne la dérivée par rapport à x_i et f''_{ij} la dérivée seconde par rapport à x_j puis $x_i, (i,j = 1,2)$.

1.5.2 Formule d'Itô multidimensionnelle

Supposons maintenant que des processus $X_1(t), X_2(t), ..., X_m(t)$ possèdent des différentielles stochastiques

$$dX_i(t) = a_i(t)dt + b_i(t)dW_t, \quad (i = 1, ..., m)$$

Soit $f(t, x_1, x_2, ...x_m), t \in [0, T], x_1, x_2, ...x_m \in \mathbb{R}$ une fonction réelle continue ainsi que ses dérivées partielles

$$f'_t, f'_{x_i}, f''_{x_i x_k}, \quad (i, k = 1, ..., m)$$

Le processus $f(t, X_1(t), X_2(t), ..., X_m(t))$ admet aussi une différentielle stochastique, de plus, on a la formule d'Itô suivante

$$\begin{aligned} df(t, X_1(t), X_2(t), ..., X_m(t)) &= \Bigg[\frac{\partial f}{\partial t}(t, X_1(t), X_2(t), ..., X_m(t)) \\ &+ \sum_{i=1}^{m} f'_{x_i}(t, X_1(t), X_2(t), ..., X_m(t))a_i(t) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,i=1}^{m} f''_{x_i x_j}(t, X_1(t), X_2(t), ..., X_m(t))b_i(t)b_j(t)\Bigg] dt \\ &+ \sum_{i=1}^{m} f'_{x_i}(t, X_1(t), X_2(t), ..., X_m(t))b_i(t)dW_t. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Remarque 1.5.3. Une formule analogue à (1.12) est la suivante : si des processus $X_1(t), ..., X_n(t)$ possèdent des différentielles stochastiques dans $[0, T]$

$$dX_k(t) = a_k(t)dt + \sum_{j=1}^{m} b_{kj}(t)dW_j(t), (k = 1, ..., n)$$

et si $U(t, x_1, ..., x_n)$ est une fonction continue possédant des dérivées partielles continues

$$\frac{\partial U}{\partial t}, \frac{\partial U}{\partial x_k}, (k = 1, ..., n), \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}, (i, j = 1, ...n)$$

alors la fonction $\eta(t) = U(t, X_1(t), ..., X_n(t))$possède aussi une différentielle stochastique *(voir [[6], page 456])*

$$
\begin{aligned}
d\eta(t) &= \left[\frac{\partial U}{\partial t}(t, X_1(t), ..., X_n(t)) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_k}(t, X_1(t), ..., X_n(t)) a_k(t)\right. \\
&+ \left. \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_k}(t, X_1(t), ..., X_n(t)) \sum_{j=1}^{m} b_{ij}(t) b_{kj}(t)\right] dt \\
&+ \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_k}(t, X_1(t), ..., X_n(t)) b_{jk}(t)\right) dW_j(t)
\end{aligned}
$$

Remarque 1.5.4. La formule d'Itô permet de montrer que si B est un Brownien standard unidimensionnel et si X est un processus F_t^B-adapté, $p \in [1, \infty)$, et $T > 0$ sont tels que

$$
E\left(\int_0^T |X_s|^{2p} ds\right) < \infty
$$

alors

$$
E\left(\left|\int_0^T X_s dB_s\right|^{2p}\right) \leq [p(2p-1)]^p T^{p-1} E\left(\int_0^T \mid X_s \mid^{2p} ds\right)
$$

1.6 Intégrale de Stratonovich

Dans cette section on exposera un autre type d'intégrale stochastique, c'est celui de Stratonovich, et sa relation avec l'intégrale d'Itô. Nous avons étudié l'intégrale d'Itô de type

$$
I(t) = \int_0^t C_s dB_s, \qquad t \in \mathbb{R}_+
$$

où B_t est un mouvement brownien et $(C_t, t \in \mathbb{R}_+)$ est un processus adapté à la filtration brownienne $F_t = \sigma(B_s, s \leq t, t \in \mathbb{R}_+)$. On se limitera avec cette définition dans le cas

$$
C_t = f(B_t), \qquad t \in \mathbb{R}_+
$$

où f est une fonction différentiable dans $\mathbb{R}_+$.
Définissons la somme de Riemann-Stieltjes

$$
S_n = \sum_{k=1}^{n} f(B_{y_k}) \Delta_k B
$$

où

$$y_k = \frac{t_{k-1} + t_k}{2}, \qquad k = 1, ..., n$$

On peut montrer que la limite en moyenne quadratique de cette somme existe lorsque le pas de la subdivision tend vers 0.
L'unique limite en moyenne quadratique

$$S_T(f(B))$$

de la somme S_n existe si

$$\int_0^T Ef^2(B_t)dt < \infty.$$

La limite est dite intégrale stochastique de Stratonovich de $f(B)$, elle est notée par

$$S_T(f(B)) = \int_0^T f(B_t) \circ dB_t$$

Remarque 1.6.1. On peut définir le processus de l'intégrale de Stratonovich comme suit

$$S_t(f(B)) = \int_0^t f(B_s) \circ dB_s, \qquad t \in \mathbb{R}_+$$

Exemple 1.6.1.

$$S_t(B) = \int_0^t B_u \circ dB_u = \frac{1}{2}B_t^2.$$

Théorème 1.6.1. *[[11], pages : 154-160] Supposons que f vérifie*

$$\int_0^t E(f(B_u))^2 du < \infty \quad et \quad \int_0^t E(f'(B_u))^2 du < \infty$$

Alors on a

$$\int_0^t f(B_u) \circ dB_u = \int_0^t f(B_u) dB_u + \frac{1}{2} \int_0^t f'(B_u) du$$

Remarque 1.6.2. En vertu de cette formule, il est claire que

$$S_t(f(B)), \qquad t \in \mathbb{R}_+$$

ne constitue plus une martingale.
Supposons que l'intégrant est de la forme

$$C_t = f(t, B_t), \qquad t \in \mathbb{R}_+$$

où $f(t,x)$ est une fonction avec des dérivées partielles d'ordre deux continues. Le processus X est supposé être d'Itô, on a donc l'équation différentielle stochastique

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X_s)ds + \int_0^t b(s, X_s) \circ dB_s$$

où les fonctions continues a et b satisfont les conditions d'existence et d'unicité de la solution.
La somme $\tilde{S}$ de Riemann-Stieltjes est donnée par

$$\tilde{S}_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(t_{k-1}, \frac{1}{2}(X_{k-1} + X_k)\right) \Delta_k B$$

La limite en moyenne quadratique de $\tilde{S}$ existe, si

$$\int_0^t E(f^2(s, X_s)ds) < \infty.$$

Nous avons alors l'intégrale de Stratonovich suivante

$$\int_0^t f(u, X_u) \circ dB_u = \int_0^t f(u, X_u)dB_u + \frac{1}{2}\int_0^t b(u, X_u)\frac{\partial f}{\partial x}(u, X_u)\, du.$$

1.7 Equations différentielles stochastiques

De très nombreux phénomènes naturels, au moins en première approximation, peuvent être décrits par des équations différentielles. Cependant, ces mêmes phénomènes sont souvent sujets à d'infimes perturbations aléatoires qui peuvent avoir à plus ou moins long terme, une influence notable. On peut penser par exemple à la trajectoire d'une fusée, soumise aux aléas de la traversée de l'atmosphère terrestre. Dans la section 1.1, nous avons introduit la notion du mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}$. Comme nous l'avons déjà mentionné, le mouvement brownien est une fonction aléatoire universelle, une sorte de bruit universel, tout comme les variables gaussiennes jouent le rôle de variables aléatoires universelles via le théorème limite central.

Les équations différentielles stochastiques sont des équations différentielles dans lesquelles on fait intervenir un terme aléatoire : un"bruit"brownien. Elle permettent de prendre en compte, dans la description des phénomènes naturels, les perturbations évoquées plus haut. L'objet de cette section est d'introduire ce type d'équations. Nous donnerons en suite quelques propriétés élémentaires de leurs solutions.

Soit dans l4espace probabilisé complet (Ω, F, P) l'équation différentielle stochastique

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + b(t, X(t))dW(t)$$

dont on suppose que la solution est un processus de diffusion de coefficient de diffusion $b(t, x)$, et de coefficient de transfert $a(t, x)$. On admet que $a(t, x)$ et $b(t, x)$ sont des fonctions boréliennes.

Dans toute la suite de cet exposé, on supposera que la solution $X(t)$ est indépendante du processus $W(t)$ et que $F_t = \{F_t, t \geq 0\}$ est une famille croissante de sous tribus contenant les ensembles négligeables de F et est continue à droite, telle que $F_\infty = \sigma\{U_{t\geq 0} F_t\}$ est la plus petite tribu par rapport à laquelle sont mesurables $X(0) = x_0$ et $W(t)$, pour $s \leq t$. Il y a deux types d'équations différentielles stochastiques, les EDS linéaires et les EDS non linéaires *(voir[11])*.
Dans cette partie, on s'intéressera à l'équation différentielle stochastique non linéaire

$$\begin{cases} dX(t) = a(t, X(t))dt + b(t, X(t))dW(t) \\ X(0) = x_0 \end{cases} \tag{1.13}$$

où $a(t, x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, b(t, x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times m}$ sont deux fonctions mesurables et x_0 est une variable aléatoire quelconque. Posons

$$X(t) = x_0 + \int_0^t a(s, X_s)ds + \int_0^t b(s, X_s)dW_s \tag{1.14}$$

On peut écrire l'équation (1.13) par composantes

$$dX_t^{(i)} = a_i(t, X_t)dt + \sum_{j=1}^m b_{ij}(t, X_t)dW_t^{(j)}, (i = 1...n) \tag{1.15}$$

Définition 1.7.1. On appelle solution de l'EDS (1.13), un processus $X(t)$ continu F_t-adapté à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ tel que

$$p.s. \int_0^t [|a(s,X_s)| + |b(s,X_s)|^2]ds < \infty$$

$$p.s. \forall t \in \mathbb{R}_+ : X_t = x_0 + \int_0^t a(s,X_s)ds + \int_0^t b(s,X_s)dW(s)$$

Remarque 1.7.1. Il est bien de noter que deux processus $X1(t)$ et $X2(t)$ stochastiquement équivalents possèdent des intégrales stochastiques

$$\int_0^t X_1(r)dW_r, \qquad \int_0^t X_2(r)dW_r$$

presque sûrement égales, d'où il vient que, tout processus stochastiquement équivalent à la solution de l'EDS (1.13) est lui même solution de cette équation.

1.7.1 Unicité trajectorielle

Définition 1.7.2. On dit qu'on a unicité trajectorielle pour l'EDS (1.13) si dans tout espace filtré (Ω, F, P) supportant un F_t-mouvement brownien W_t, deux solutions X_t et X_t^* relativement à W_t sur cet espace sont $P-$indistinguables.

1.7.2 Solutions fortes

Définition 1.7.3. Une solution forte de l'EDS (1.13) définie dans l'espace probabilisé (Ω, F, P) où F_t est une filtration complète, et avec le mouvement brownien $W(t)$ qui est fixé, et la condition initiale x_0, est un processus

$$X = \{X_t, t \in \mathbb{R}_+\}$$

jouissant des propriétés suivantes :

1. X est adapté à la filtration
$$\{F_t \vee \sigma(x_0)\}$$
.

2. $$P\left[\int_0^t \{|a_i(s,X_s)| + b_{ij}^2(s,X_s)\}ds < \infty\right] = 1$$

vraie pour tout
$$1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq mett \in \mathbb{R}_+$$

3. la forme intégrale de (1.13)

$$X_t = x_0 + \int_0^t a(s,X_s)ds + \int_0^t b(s,X_s)dW_s, t \in R+ \tag{1.16}$$

ou équivalente à

$$X_t^{(i)} = x_0^{(i)} + \int_0^t a_i(s,X_s)ds + \sum_{j=1}^{m}\int_0^t b_{ij}(s,X_s)dW_s^{(j)}, (t \in R_+, 1 \leq i \leq n) \tag{1.17}$$

est vraie presque-sûrement.

Définition 1.7.4. On dira qu'il y a unicité forte pour l'équation (1.13) si,pour toutes solutions X_t^1 ,X_t^2 on a
$$P\left(X_t^1 = X_t^2, \forall t \geq 0\right) = 1$$
On peut donner la définition suivante de la solution forte

Définition 1.7.5. On dit que la solution X_t de (1.13) est forte, si elle se trouve dans le même espace filtré avec W_t.

Remarque 1.7.2. Une solution forte X_t, se construit par les itérations de Picard. Soit $X_t^{(0)}$ un processus identiquement égal à x_0. On définit par récurrence

$$X_t^{(n+1)} = x_0 + \int_0^t a(s,X_s^{(n)})ds + \int_0^t b(s,X_s^{(n)})dW_s$$

et l'on examine sous quelles conditions cette suite converge presque-sûrement vers un processus continu. Le processus $X_t^{(n)}$ est F_t-mesurable pour tout $t \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$.

1.7.3 Existence et unicité forte

Théorème 1.7.1. *On suppose que les fonctions a et b sont localement lipschitziennes par rapport à la deuxième variable , c'est à dire, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,il existe* K_n *tel que pour tout* $t \in \mathbb{R}_+$ *et pour tout* (x, y) *vérifiant* $|x| \leq n$ *et* $|y| \leq n$*, on a :*

$$| a(t, x) - a(t, y) | + | b(t, x) - b(t, y) | \leq K_n | x - y |$$

Alors, si l'EDS (1.13) admet une solution continue par rapport à la variable t*, elle est unique.*

Donnons maintenant un résultat d'existence et d'unicité de solutions globales des EDS, il est à noter que les hypothèses ne sont pas optimales, mais la très forte analogie entre ce théorème et celui de Cauchy-Lipschitz global tant au niveau des hypothèses qu'au niveau de la démonstration est intéressante.

Théorème 1.7.2. *On suppose qu'il existe deux constantes* M_1, M_2 *telles que les fonctions a et b satisfont*

$$|a(t, x)| + |b(t, x)| \leq M_1(1 + |x|), \forall x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0 \tag{1.18}$$

et

$$|a(t, x) - a(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)| \leq M_2|x - y|, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n, t \geq 0 \tag{1.19}$$

Alors, il existe une unique solution (X_t) *continue par rapport à la variable* $t \in [0, \infty)$ *qui vérifie :*

$$E\left[\int_0^s |X_t|^2 dt\right] < \infty, \forall s \in [0, \infty)$$

Théorème 1.7.3. *[[10], pages 287-288] Supposons que les coefficients* $a(t, x)$ *et* $b(t, x)$ *sont localement lipschitziens dans un espace variable, i.e. pour tout* $n \geq 1$ *il existe une constante* $K_n > 0$ *telle que pour tout* $t \geq 0, \| x \| \leq n$ *et* $\| y \| \leq n$ *:*

$$\| a(t, x) - a(t, y) \| + \| b(t, x) - b(t, y) \| \leq K_n \| x - y \| \tag{1.20}$$

Alors l'unicité forte est assurée pour l')équation (1.13).

Remarque 1.7.3. Il est important de noter que pour les équations différentielles ordinaires, la condition locale de Lipschitz n'est pas suffisante pour garantir l'existence d'une solution globale. Par exemple l'unique solution de l'équation

$$X_t = 1 + \int_0^t X_s^2 ds,$$

et

$$X_t = \frac{1}{1-t},$$

qui "explose" lorsque $t \longrightarrow 1$.
On doit donc imposer d'autres conditions plus fortes, on obtiendra le résultat suivant.

Théorème 1.7.4. *Supposons que les coefficients $a(t,x)$ et $b(t,x)$ vérifient les conditions de Lipschitz globales et la croissance linéaire suivantes*

$$\| a(t,x) - a(t,y) \| + \| b(t,x) - b(t,y) \| \leq K \| x - y \|, \tag{1.21}$$

$$\| a(t,x) \|^2 + \| b(t,x) \|^2 \leq K^2(1 + \| x \|^2), \tag{1.22}$$

pour tout $0 \leq t < \infty, x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n$, où K est une constante positive. Dans un certain espace probabilisé (Ω, F, P), soit $\xi \in \mathbb{R}^n$ un vecteur aléatoire indépendant du mouvement brownien $n-$dimensionnel $W = \{W_t, 0 \leq t < \infty\}$, et dont le moment d'ordre deux est fini

$$E \| \xi \|^2 < \infty. \tag{1.23}$$

Soit $\{F_t\}$ une tribu complète. Alors il existe un processus continu, adapté $X = \{X_t, F_t, 0 \leq t < \infty\}$ qui est une solution forte de l'équation (1.13) relative à W dont la condition initiale est ξ. D'où il vient que, ce processus est L_2-intégrable : pour chaque $T > 0$, il existe une constante C dépendante toujours de K et T, telle que

$$E \| X_t \|^2 \leq C(1 + E \| \xi \|^2) e^{Ct}, \qquad 0 \leq t \leq T. \tag{1.24}$$

Démonstration. La démonstration repose sur une technique du point fixe. L'espace

$$\sum = \left\{ X(t), t \in [0,T], F_t - adapt \;\; continu \;\; à \;\; valeurs \;\; dans \;\; \mathbb{R}^n : E\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |X(t)|^2\right] < \infty \right\}$$

muni de la norme

$$\| X \| = \sqrt{E\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X(t)|^2\right)}$$

est un espace de Banach.

$*$Dans le cas où $E|X_0|^2 < \infty$commençons par montrer que toute solution X de (1.13), vérifiant (1.24), appartient à $\sum$
Pour

$$\nu_m = inf\{t \geq 0 : |X_t| \geq m\}$$

(convention $inf \ \ \emptyset = T$) , on a

$$\sup_{s\leq t} |X_{s\wedge\nu_m}|^2 \leq 3 \left(|X_0|^2 + \sup_{s\leq t} \left| \int_0^s 1_{\{r\leq\nu_m\}} b(r, X_r) dW_r \right|^2 + \left(\int_0^t |a(r\wedge\nu_m, X_{r\wedge\nu_m})| dr \right)^2 \right)$$

En utilisant l'inégalité de Doob pour l'intégrale stochastique, l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour l'intégrale ordinaire, puis l'hypothèse de Lipschitz, on en déduit que

$$\begin{aligned} E\left(\sup_{s\leq t} |X_{s\wedge\nu_m}|^2\right) &\leq C\left(E|X_0|^2 + \int_0^t E(|b(r\wedge\nu_m, X_{r\wedge\nu_m})|^2 + t|a(r\wedge\nu_m, X_{r\wedge\nu_m})|^2) dr\right) \\ &\leq C\left(E|X_0|^2 + \int_0^t 1 + E\left(\sup_{s\leq t} |X_{s\wedge\nu_m}|^2\right) dr\right) \end{aligned}$$

où la constante C peut être changée d'une ligne à l'autre mais ne dépend ni de t ni de m. Par le lemme de Gronwall, on en déduit que

$$E\left(\sup_{s\leq t} |X_{s\wedge\nu_m}|^2\right) \leq C\left(|X_0|^2 + T\right) e^{CT}$$

Comme par continuité des trajectoires de $X, p.s.\nu_m = T$ pour m assez grand, on a $p.s. \sup_{s\leq T} |X_{s\wedge\nu_m}| = \sup_{s\leq T\wedge\nu_m]} |X_s| \longrightarrow \sup_{s\leq T} |X_s|$ lorsque $m \longrightarrow \infty$. On déduit alors (1.24) du lemme de Fatou. On introduit ensuite ϕ qui à un processus $X(t)$ de $\sum$ associe le processus $\phi(X)_t$ défini par

$$\phi(X)_t = x_0 + \int_0^t a(s, X_s) ds + \int_0^t b(s, X_s) dW_s$$

dont on vérifie facilement qu'il appartient à $\sum$ en reprenant le calcul ci-dessus mais sans la technique de localisation. Comme nous avons vérifié que toute solution de (1.13) est dans $\sum$, un processus X est solution de (1.13) si et seulement si c'est un point fixe de ϕ.

Pour $X, X' \in \sum$ et $t \leq T$, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz puis l'inégalité de Doob et enfin l'hypothèse de Lipschitz, il vient

$$\begin{aligned}
E\left(\sup_{s\le t}|\phi(X)_s-\phi(X')_s|^2\right) &\le 2E\left(\sup_{s\le t}\left|\int_0^s(b(r,X_r)-b(r,X'_r))dW_r\right|^2\right.\\
&+\left. t\int_0^t |\ a(r,X_r)-a(r,X'_r)\ |^2\ dr\right)\\
&\le C\int_0^t E\left(|b(r,X_r)-b(r,X'_r)|^2+|a(r,X_r)-a(r,X'_r)|^2\right)dr\\
&\le C\int_0^t E\left(\sup_{s\le r}|X_s-X'_s|^2\right)dr
\end{aligned}$$

où la constante C ne dépend ni de t ni de X et X' : En itérant cette inégalité, on obtient que pour $k\in\mathbb{N}$, si ϕ^k désigne la composée $k-$ième de ϕ,

$$\begin{aligned}
\parallel \phi^k(X)-\phi^k(X')\parallel^2 &\le C^k\int_0^T\int_0^{r_1}\dots\int_0^{r_{k-1}}E\left(\sup_{r\le r_k}|X_s-X'_s|^2\right)dr_k\dots dr_1\\
&\le C^k\parallel X-X'\parallel^2\int_0^T\int_0^{r_1}\dots\int_0^{r_{k-1}}dr_k\dots dr_1\\
&= \frac{C^kT^k}{k!}\parallel X-X'\parallel^2 .
\end{aligned}$$

Donc pour $\bar{k}$ assez grand, $\phi^{\bar{k}}$ est une contraction sur $\sum$. Soit X son unique point fixe. Tout point fixe de ϕ est point fixe de $\phi^{\bar{k}}$ et donc égal à X. Par ailleurs,

$$\phi^{\bar{k}}(\phi(X))=\phi^{\bar{k}+1}(X)=\phi(\phi^{\bar{k}}(X))=\phi(X)$$

assure que $\phi(X)$ est point fixe de $\phi^{\bar{k}}$ et donc égal à X. On conclut que (1 :13) admet une solution unique.

$*$ Dans le cas où $E|X_0|^2=+\infty$, pour $m\in\mathbb{N}^*$, on note $(X_t^m)_{t\in[0,T]}$ la solution de l'EDS issue de la condition initiale $X_0\mathbf{1}_{\{|X_0|<m\}}$: On vérifie ensuite que

$$X_t=\sum_{m\in\mathbb{N}^*}\mathbf{1}_{\{m-1\le|X_0|<m\}}X_t^m$$

est solution de (1.13) et que toute autre solution lui est égale.

Remarque 1.7.4. Il y a une autre démonstration basée sur l'utilisation d'une suite d'approximations successives *[[10], page 289]*.

Remarque 1.7.5. La notion de solution forte est parfois trop restrictive Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} dX_t=sign(X_t)dW_t\\ X_0=0\end{cases}\tag{1.25}$$

Cette équation n'admet pas de solution forte. Cependant, il est possible de trouver un espace de probabilité, un mouvement brownien W sur cet espace et une filtration F tels qu'il y ait une solution au problème. Cela correspond à la filtration de solution faible.

1.7.4 Solutions faibles

Quant à l'unicité faible, ou "en loi", cela semble a priori bien difficile à obtenir puisque s'il existe une solution, il en existe en général une infinité, chacune étant définie sur un espace arbitraire. Il existe toutefois plusieurs critères d'unicité faible, le plus utile est sans doute le suivant

Théorème 1.7.5. *(Yamada-Watanabe) [14] Supposons que les coefficients a et b soient boréliens et localement bornées. L'unicité trajectorielle implique l'unicité faible, et aussi que toute solution Xt sur un espace probabilisé quelconque (Ω, F, P) relativement à un mouvement brownien W_t , F_t-mesurable, est en fait adaptée à la filtration F_t engendrée par ce mouvement brownien W_t (solution " forte").*

Définition 1.7.6. Une solution faible de l'équation différentielle stochastique (1.13) est un triplet $(X, W), (\Omega, F, P)$ et $\{F_t\}$ telles que

1. (Ω, F, P) est un espace probabilisé, et $\{F_t\}$ est une filtration des sous-tribus de F satisfaisant les conditions usuelles.
2. $X = \{X_t, F_t, 0 \leq t < \infty\}$ est un processus continu adapté à valeurs dans $\mathbb{R}^n, \{W_t, F_t, 0 \leq t < \infty\}$. st un mouvement brownien de dimension m :
3. $$P\left[\int_0^t \{|a_i(s, X_s)| + b_{ij}^2(s, X_s)ds < \infty\}\right] = 1$$

   vraie pour tout $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$ et $0 \leq t < \infty$, et
4. la forme intégrale de (1.13)

   $$X_t = x_0 + \int_0^t a(s, X_s)ds + \int_0^t b(s, X_s)dW_s, 0 \leq t < \infty$$

   ou équivalente à

   $$X_t^{(i)} = x_0^{(i)} + \int_0^t a_i(s, X_s)ds + \sum_{j=1}^m \int_0^t b_{ij}(s, X_s)dW_s^{(j)}, (0 \leq t < \infty, 1 \leq i \leq n)$$

est vraie presque sûrement.

Définition 1.7.7. On dit qu'il y a unicité faible en loi pour l'équation (1.13) si deux solutions faibles ont toujours la même loi.

Remarque 1.7.6. Il existe une autre forme d'unicité faible dite "pathwise" en anglais, qui consiste à comparer les solutions définies sur un même espace de probabilités et à voir si elles se correspondent presque sûrement.

Remarque 1.7.7. Une solution $\tilde{X}_t$ est dite faible, si on peut construire un espace probabilisé $(\tilde{\Omega}, \tilde{F}, \tilde{P})$ et un mouvement brownien $\tilde{W}$ tels que $\tilde{X}_t$ satisfait l'équation (1.13).

Remarque 1.7.8. Il est possible d'avoir plusieurs solutions fortes de (1.13), si la solution forte est unique, alors la solution faible l'est aussi, par contre, si la solution faible est unique il se peut qu'il y ait plusieurs solutions fortes.

1.7.5 Equations différentielles d'ordres supérieurs à un

La relation entre les EDS vectorielles et scalaires est analogue à celle entre les différentielles stochastiques vectorielles et scalaires. Dans ce qui suit, on interprète un vecteur comme un vecteur colonne et son transposé comme un vecteur ligne. On considère un mouvement brownien $W = \{W_t, t \geq 0\} m-$dimensionnel, où les composantes $W_t^1, W_t^2, ..., W_t^m$ sont des mouvement brownien scalaires indépendants (c'est à dire $Cov(W^i, W^j) = 0, i \neq j$). Il est claire que les composantes W_t^i sont F_t-adaptées. On prend une fonction vectorielle de dimension

$$a(t, x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

et une fonction matricielle $(n \times m)-$dimensionnelle

$$b(t, x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$$

et on construit l'équation différentielle stochastique de dimension n

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t \tag{1.26}$$

ou sous forme intégrale

$$X_t = x_0 + \int_0^t a(s, X_s)ds + \int_0^t b(s, X_s)dW_s \tag{1.27}$$

où les intégrales de Lebesgue et d'Itô sont données composante par composante comme suit

$$X_t^i = x_0^i + \int_0^t a^i(s, X_s)ds + \sum_{j=1}^{m} \int_0^t b^{i,j}(s, X_s)dW_s^j \tag{1.28}$$

pour $i = 1, ..., n$.
On peut donner la forme matricielle de cette équation comme suit

$$d\begin{pmatrix} X_t^1 \\ X_t^2 \\ . \\ . \\ X_t^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1(t, X_t) \\ a^2(t, X_t) \\ . \\ . \\ a^n(t, X_t) \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} b^{1,1}(t, x_t) & .. & b^{1,m}(t, X_t) \\ b^{2,1}(t, x_t) & .. & b^{2,m}(t, X_t) \\ .. & & \\ .. & & \\ b^{n,1}(t, x_t) & .. & b^{n,m}(t, X_t) \end{pmatrix} d\begin{pmatrix} W_t^1 \\ W_t^2 \\ . \\ . \\ W_t^m \end{pmatrix} \tag{1.29}$$

Toutes les définitions introduites avant pour les solutions faibles et fortes sont vraies pour ce cas vectoriel. Le théorème d'existence et d'unicité de la solution forte s'applique sans aucune difficulté, pourvu que les valeurs absolues dans les hypothèses des théorèmes précédents soient remplacées par des normes de vecteurs.

1.7.6 Equation différentielle stochastique de type Stratonovich

Dans certaines applications il est crucial de formuler l'équation différentielle stochastique où le terme intégrale d'Itô est remplacé par celui de Stratonovich. On appelle ainsi, cette équation par équation différentielle stochastique de Stratonovich. On a la forme suivante

$$dX_t = \underline{a}(t, X_t)dt + b(t, X_t) \circ dW_t \tag{1.30}$$

ou sous forme intégrale

$$X_t = x_0 + \int_0^t \underline{a}(s, X_s)ds + \int_0^t b(s, X_s) \circ dW_s \tag{1.31}$$

Le symbole "$\circ$" désigne le calcul de Stratonovich. La solution X_t satisfaisant l'équation (1.30), satisfait aussi l'équation d'Itô (1.26), puisque nous avons

$$a(t, x) = \underline{a}(t, x) + \frac{1}{2}b(t, x)\frac{\partial b}{\partial x}(t, x)$$

Exemple 1.7.1. *Soit l'EDS de Stratonovich*

$$dX_t = 2X_t \circ dW_t$$

et l'EDS d'Itô

$$dX_t = 2X_t dt + 2X_t dW_t$$

elles ont la même solution

$$X_t = X_0 e^{t(W_t - W_0)}$$

Chapitre 2

Nouvelles formes de l'inégalité de Gronwall et applications

Dans ce chapitre nous exposons (voir [5]) quelques nouvelles formes de l'inégalité de Gronwall qu'on utilisera pour démontrer les théorèmes d'existence et d'unicité de solutions pour les équations différentielles stochastiques.

2.1 Formule de Gronwall

La première forme de l'inégalité de Gronwall est donnée par le lemme suivant

Lemme 2.1.1. *(Inégalité de Gronwall) Soient$\alpha, \beta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ intégrables, et β est non négative, telles que*

$$0 \leq \alpha(t) \leq \beta(t) + L \int_0^t \alpha(s) ds$$

pour $t \in \mathbb{R}_+$ où $L > 0$. Alors

$$0 \leq \alpha(t) \leq \beta(t) + L \int_0^t e^{L(t-s)} \beta(s) ds$$

pour $t \in \mathbb{R}_+$.

Corollaire 2.1.1. *[[4], pages : 188-198] Supposons que*

$$\varphi(t) \leq A + B \int_0^t \varphi(s) ds$$

pour tout $t \geq 0$, *pour* $\varphi(t)$ *continue on a*

$$\varphi(t) \leq Ae^{Bt}.$$

Ce lemme de Gronwall est généralisé par plusieurs auteurs, citons par exemple le résultat suivant [1].

Théorème 2.1.1. *(A. Abdeldaim and M. Yakout's inequality) [1] Soient* $x(t), f(t)$ *et* $h(t)$ *des fonctions positives à valeurs réelles, continues, définies dans* $[0, \infty)$ *et vérifiant l'inégalité*

$$x^p(t) \leq x_0 + \int_0^t f(s)x^p(s)ds + \int_0^s h(s)x^q(s)ds$$

lorsque $x_0 \geq 0$, *où* $0 \leq q < p$ *sont des constantes. Alors*

$$x(t) \leq e^{\frac{1}{p}\int_0^t f(s)ds} kt$$

où

$$k_t = \left[x_0^{p_1} + p_1 \left(\int_0^t h(s) e^{-p_1 \int_0^s f(u)du} \right) ds \right]^{\frac{1}{p-q}}$$

avec $p_1 = \dfrac{p-q}{p}$.

Soit (Ω, F, P) *un espace probabilisé complet avec une filtration naturelle* F_t. *Notons par*
$H_\omega^2[0, L], (L > 0)$ *l'espace de toutes les fonctions* $f(t)$ *séparables, non anticipatives par rapport à la filtration* F_t *définies dans* $[0, L]$ *telle que*

$$E\left(\int_0^L f^2(t)dt \right) < \infty$$

2.2 Généralisation de la formule de Gronwall

On considère l'EDS linéaire

$$dx = \alpha(t)dt + \beta(t)dW_t \tag{2.1}$$

où $\alpha(t), \beta(t) \in H_W^2[0, L]$. Supposons que la solution $x_t \in H_w^2[0, L]$ telle que

$$| x_t | \leq \left| \int_0^t \alpha(r)dr + \int_0^t \beta(r)dW_r \right|$$

Théorème 2.2.1. *[5] Supposons que les coefficients $\alpha(t), \beta(t)$ vérifient la condition suivante*

$$\begin{cases} |\alpha(t)| \leq a_1 t + b_1\sqrt{|x_t|} \\ |\beta(t)| \leq a_2 t + b_2\sqrt{|x_t|} \end{cases} \tag{2.2}$$

pour tout $t \in [0, L]$, et pour toutes les constantes a_1, a_2, b_1 et b_2. Alors pour $p > 1$ et$0 \leq t \leq L$ on a

$$E|x_t| \leq \frac{2^{\frac{3p-1}{2p}}}{\sqrt{3}}\sqrt{(a_1^2 + 4a_2^2)L^3}\left[1 + \frac{2^{\frac{p-1}{p}}(b_1^2 + 4b_2^2)}{3^{\frac{p}{2}}(a_1^2 + 4a_2^2)^{\frac{p}{2}}}\frac{t}{L^{\frac{3p}{2}}}\right]^{\frac{1}{p}}$$

et pour $p = 1$, on aura

$$E|x_t| \leq \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{(a_1^2 + 4a_2^2)L^3}\left[1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{(b_1^2 + 4b_2^2)}{\sqrt{(a_1^2 + 4a_2^2)}}\frac{t}{L^{\frac{3}{2}}}\right]$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} E|x_t|^2 &\leq E\left|\int_0^t \alpha(r)dr + \int_0^t \beta(r)dW_r\right|^2 \\ &\leq 2E\left|\int_0^t \alpha(r)dr\right|^2 + 2E\left|\int_0^t \beta(r)dW_r\right|^2 \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Doob, on aura

$$|x_t|^2 \leq 2\int_0^t E|\alpha(r)|^2 dr + 8\int_0^t E|\beta(r)|^2 dr$$

Sous la condition (2.2) et $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$

$$E|x_t|^2 \leq (4a_1^2 + 16a_2^2) \int\limits_0^t r^2 dr + (4b_1^2 + 16b_2^2) \int\limits_0^t E|x_r| dr,$$

alors

$$E|x_t|^2 \leq (4a_1^2 + 16a_2^2)\frac{t^3}{3} + (4b_1^2 + 16b_2^2) \int\limits_0^t E|x_r| dr$$

On sait que pour une fonction convexe φ, on a

$$E(\varphi[f(t)]) \geq \varphi(E[f(t)])$$

donc, pour $y = x^2$ et $x > 0$ on pourra avoir

$$Ex^2 \geq (Ex)^2,$$

donc

$$E|x_t|^2 \geq (E|x_t|)^2$$

alors

$$(E|x_t|)^2 \leq (4a_1^2 + 16a_2^2)\frac{t^3}{3} + (4b_1^2 + 16b_2^2) \int\limits_0^t E|x_r| dr.$$

Maintenant pour $p > 1$ on obtient

$$(E|x_t|)^{2p} \leq \left((4a_1^2 + 16a_2^2)\frac{t^3}{3} + (4b_1^2 + 16b_2^2) \int\limits_0^t E|x_r| dr \right)^p$$

tenant compte du fait que

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p),$$

alors

$$(E|x_t|)^{2p} \leq 2^{3p-1} \left((a_1^2 + 4a_2^2)\frac{t^3}{3} \right)^p + 2^{3p-1} \left(b_1^2 + 4b_2^2 \right)^p \left(\int\limits_0^t E|x_r| dr \right)^p$$

ce qui donne

$$(E|x_t|)^{2p} \leq 2^{3_{p-1}} \left((a_1^2 + 4a_2^2)\frac{t^3}{3} \right)^p + 2^{3_{p-1}} \left(b_1^2 + 4b_2^2 \right)^p \int\limits_0^t (E|x_r|)^p dr$$

Si on pose

$$\sqrt{2^{3-\frac{1}{p}}(a_1^2+4a_2^2)\frac{t^3}{3}}=\eta(t)$$

$$2^{3-\frac{1}{p}}(b_1^2+4b_2^2)=\nu(t)$$

alors

$$(E|x_t|)^{2p}\leq \eta^{2p}(t)+\int_0^t \nu(r)(E|x_r|)^p dr$$

d'autre part, si $E|x_t|=z_t$, et puisque $\eta(t)\leq\eta(L)$, car $t\leq L$, donc

$$z_t^{2p}\leq\eta^{2p}(L)+\int_0^t\nu(r)z_r^p dr \tag{2.3}$$

où $\eta(t)$ est une fonction positive croissante, continue, et $\nu(t)$ est une fonction positive continue. On observe de (2.3) que

$$\left[\frac{zt}{\eta L}\right]^{2p}\leq 1+\int_0^t \nu(r)\eta^{-(2p-p)}(L)\left[\frac{zr}{\eta L}\right]^p dr$$

Soit

$$m(t)=\frac{zt}{\eta_L}$$

alors

$$m^{2p}(t)\leq 1+\int_0^t\nu(r)\eta^{-(2p-p)}(L)m^p(r)dr$$

Utilisant le théorème 2.1.1 on aura

$$m(t)\leq\left[1+\left(\frac{2p-p}{2p}\right)\int_0^t\nu(r)\eta^{-(2p-p)}(L)dr\right]^{\frac{1}{2p-p}}$$

ceci donne

$$m(t)\leq\left[1+\frac{1}{2}\int_0^t\nu(r)\eta^{-p}(L)dr\right]^{\frac{1}{p}}$$

alors

$$z_t \leq \eta_L \left[1 + \frac{1}{2} \int\limits_0^t \nu(r) \eta^{-p}(L) dr \right]^{\dfrac{1}{p}}$$

c'est à dire

$$E|x_t| \leq \frac{2^{\frac{3p-1}{2p}}}{\sqrt{3}} \sqrt{(a_1^2 + 4a_2^2)L^3} \left[1 + \frac{2^{3-\frac{1}{p}}(b_1^2 + 4b_2^2)}{2} \int\limits_0^t \frac{dr}{\left(2^{3-\frac{1}{p}}(a_1^2+4a_2^2)\frac{L^3}{3}\right)^{\frac{p}{2}}} \right]^{\frac{1}{p}}$$

$$E|x_t| \leq \frac{2^{\frac{3p-1}{2p}}}{\sqrt{3}} \sqrt{(a_1^2 + 4a_2^2)L^3} \left[1 + \frac{2^{\frac{p-1}{p}}(b_1^2 + 4b_2^2)}{3^{\frac{p}{2}}(a_1^2+4a_2^2)^{\frac{p}{2}}} \frac{t}{L^{\frac{3p}{2}}} \right]^{\frac{1}{p}}$$

Il est facile de voir que pour $p = 1$

$$E|x_t| \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(a_1^2 + 4a_2^2)L^3} \left[1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{b_1^2 + 4b_2^2}{\sqrt{(a_1^2+4a_2^2)}} \frac{t}{L^{\frac{3}{2}}} \right]$$

Théorème 2.2.2. *[5] Supposons que les coefficients $\alpha(t), \beta(t)$ vérifient*

$$\begin{cases} |\alpha(t)| \leq a_1|r(t)| + b_1\sqrt{|x_t|} \\ |\beta(t)| \leq a_2|r(t)| + b_2\sqrt{|x_t|} \end{cases} \tag{2.4}$$

où $r(t) \in H^2_\omega[0, L]$ et $E|r(t)|^2$ est une fonction positive non décroissante définie aussi dans $[0, L]$, pour des constantes positives a_1, a_2, b_1 et b_2. Alors pour $p > 1$ et $0 \leq t \leq L$, on aura

$$E|x_t| \leq 2^{\frac{3p-1}{2p}} \sqrt{(a_1^2 + 4a_2^2) \int\limits_0^L E|r(s)|^2 ds} \left[1 + 2^{\frac{3p-3}{2}} \frac{(b_1^2 + 4b_2^2)^p}{(a_1^2+4a_2^2)^{\frac{p}{2}}} \int\limits_0^t \frac{ds}{(\int\limits_0^L E|r(u)|^2 du)^{\frac{p}{2}}} \right]^{\frac{1}{p}}$$

Pour $p = 1$ on obtient

$$E|x_t| \leq 2 \sqrt{(a_1^2 + 4a_2^2) \int\limits_0^L E|r(s)|^2 ds} \left[1 + \frac{b_1^2 + 4b_2^2}{\sqrt{a_1^2+4a_2^2}} \int\limits_0^t \frac{ds}{\sqrt{\int\limits_0^L E|r(u)|^2 du}} \right]$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
E|x_t|^2 &\leq E\left|\int\limits_0^t \alpha(r)dr + \int\limits_0^t \beta(r)dWr\right|^2 \\
&\leq 2E\left|\int\limits_0^t \alpha(r)dr\right|^2 + 2E\left|\int\limits_0^t \beta(r)dWr\right|^2
\end{aligned}$$

L'inégalité de Doob nous donne

$$E|x_t|^2 \leq 2\int\limits_0^t E|\alpha(r)|^2dr + 8\int\limits_0^t E|\beta(r)|^2dr$$

Utilisant la condition (2.4) et $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$

$$E|x_t|^2 \leq 4(a_1^2+4a_2^2)\int\limits_0^t E|r(r)|^2dr + 4(b_1^2+4b_2^2)\int\limits_0^t E|x_r|dr$$

On sait que pour une fonction convexe φ on a

$$E(\varphi[f(t)]) \geq \varphi(E[f(t)])$$

donc pour $y = x^2$ et $x > 0$ on aura

$$Ex^2 \geq (Ex)^2,$$

alors

$$E|x_t|^2 \geq (E|x_t|)^2$$

donc

$$(E|x_t|)^2 \leq 4(a_1^2+4a_2^2)\int\limits_0^t E|r(r)|^2dr + 4(b_1^2+4b_2^2)\int\limits_0^t E|xr|dr$$

Maintenant pour $p > 1$ on aura

$$(E|x_t|)^{2p} \leq \left(4(a_1^2+4a_2^2)\int\limits_0^t E|r(r)|^2dr + 4(b_1^2+4b_2^2)\int\limits_0^t E|x_r|dr\right)^p$$

En utilisant $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p+b^p)$, on obtient

$$(E|x_t|)^{2p} \leq 2^{3p-1}(a_1^2+4a_2^2)^p\left(\int\limits_0^t E|r(r)|^2dr\right)^p + 2^{3p-1}(b_1^2+4b_2^2)^p\int\limits_0^t (E|x_r|)^pdr$$

Si on pose

$$\begin{cases} \sqrt{2^{3-\frac{1}{p}}(a_1^2+4a_2^2)\int\limits_0^t E|r(s)|^2 ds} = \eta(t) \\ 2^{3p-1}(b_1^2+4b_2^2)^p = \nu(t) \end{cases}$$

alors

$$(E|x_t|)^{2p} \leq \eta^{2p}(t) + \int\limits_0^t \nu(r)(E|x_r|)^p dr$$

D'autre part, si $E|x_t| = z_t$, et puisque $\eta(t)$ et croissante dans $[0, L]$ donc

$$(E|x_t|)^{2p} \leq \eta^{2p}(L) + \int\limits_0^t \nu(r)(E|x_r|)^p dr$$

D'une façon analogue au théorème 2.2.1 on aura

$$E|x_t| \leq 2^{\frac{3p-1}{2p}} \sqrt{(a_1^2+4a_2^2)\int\limits_0^L E|r(s)|^2 ds} \left[1 + 2^{\frac{3p-3}{2}} \frac{(b_1^2+4b_2^2)^p}{(a_1^2+4a_2^2)^{\frac{p}{2}}} \int\limits_0^t \frac{ds}{\left(\int\limits_0^L E|r(u)|^2 du\right)^{\frac{p}{2}}}\right]^{\frac{1}{p}}$$

Pour $p = 1$ on obtient

$$E|x_t| \leq 2\sqrt{(a_1^2+4a_2^2)\int\limits_0^L E|r(s)|^2 ds} \left[1 + \frac{b_1^2+4b_2^2}{\sqrt{a_1^2+4a_2^2}} \int\limits_0^t \frac{ds}{\sqrt{\int\limits_0^L E|r(u)|^2 du}}\right]$$

Théorème 2.2.3. *[5] Supposons que les coefficients $\alpha(t), \beta(t)$ vérifient*

$$\begin{cases} |\alpha(t)| \leq a_1|r(t)| + b_1\sqrt{|x_t|} \\ |\beta(t)| \leq a_2|r(t)| + b_2|x_t| \end{cases} \tag{2.5}$$

où $r(t) \in H_\omega^2[0, L]$ et $E|r(t)|^2$ est une fonction positive non décroissante définie aussi dans $[0, L]$, pour des constantes positives a_1, a_2, b_1 et b_2. Alors pour $p > 1$ et $0 \leq t \leq L$, on aura

$$E|x_t|^2 \leq \left[\left(3^{1-\frac{1}{p}}\right) 4(a_1^2+4a_2^2)\int\limits_0^L E|r(s)|^2 ds\right] k_t^1$$

où

$$k_t^1 = e^{\frac{3^{p-1}(4b_2)^{2p}}{p}t}\left[1 + \frac{3^{\frac{p-1}{2}}2^{p-1}b_1^{2p}}{(a_1^2+4a_2^2)^{\frac{p}{2}}}\int\limits_0^t \left\{\frac{e^{-\frac{3^{p-1}}{2}(4b_2)^{2p}s}}{\left[\int\limits_0^L E|r(u)|^2du\right]^{\frac{p}{2}}}\right\} ds\right]^{\frac{2}{p}}$$

Pour $p = 1$, *on obtient*

$$E|x_t|^2 \leq 4e^{16b_2^2t}\left((a_1^2+4a_2^2)\int\limits_0^L E|r(s)|^2ds\right)\left[1 + \frac{b_1^2}{\sqrt{a_1^2+4a_2^2}}\int\limits_0^t \left\{\frac{e^{-8b_2^2s}}{\sqrt{\int\limits_0^L E|r(u)|^2du}}\right\} ds\right]^2$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} E|x_t|^2 &\leq E\left|\int\limits_0^t \alpha(r)dr + \int\limits_0^t \beta(r)dWr\right|^2 \\ &\leq 2E\left|\int\limits_0^t \alpha(r)dr\right|^2 + 2E\left|\int\limits_0^t \beta(r)dWr\right|^2 \end{aligned}$$

Utilisant l'inégalité de Doob, on obtient

$$E|x_t|^2 \leq 2\int\limits_0^t E|\alpha(r)|^2dr + 8\int\limits_0^t E|\beta(r)|^2dr$$

La condition (2.5) et $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ donnent

$$E|x_t|^2 \leq 4(a_1^2+4a_2^2)\int\limits_0^t E|r(r)|^2dr + 4b_1^2\int\limits_0 E|x_r|dr + 16b_2^2\int\limits_0^t E|x_r|^2dr$$

Pour $p > 1$ et tenant compte de

$$(a+b+c)^p \leq 3^{p-1}(a^p+b^p+c^p),$$

on aura

$$\begin{aligned} (E|x_t|^2)^p &\leq 4^p3^{p-1}(a_1^2+4a_2^2)^p\left(\int\limits_0^t E|r(r)|^2dr\right)^p + 4^p3^{p-1}b_1^{2p}\left(\int\limits_0^t E|x_r|dr\right)^p \\ &+ 3^{p-1}(16b_2^2)^p\left(\int\limits_0^t E|x_r|^2dr\right)^p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(E|x_t|^2)^p &\le 4^p 3^{p-1}(a_1^2+4a_2^2)^p\left(\int_0^t E|r(r)|^2dr\right)^p + 3^{p-1}(4b_1^2)^p\int_0^t (E|x_r|)^p dr \\ &+ 3^{p-1}(16b_2^2)^p\int_0^t (E|x_r|^2)^p dr\end{aligned}$$

On sait que pour $X, Y \in H_\omega^2[0,L]$, l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski donne

$$E|XY| \le \sqrt{E|X|^2}\sqrt{E|Y|^2}$$

alors

$$\begin{aligned}(E|x_t|^2)^p &\le 4^p 3^{p-1}(a_1^2+4a_2^2)^p\left(\int_0^t E|r(r)|^2dr\right)^p + 3^{p-1}(4b_1^2)^p\int_0^t (E|x_r|^2)^{\frac{p}{2}} dr \\ &+ 3^{P-1}(16b_2^2)^p\int_0^t (E|x_r|^2)^p dr\end{aligned}$$

Si on pose

$$\begin{cases} E|x_t|^2 = z_t \\ \left(3^{1-\frac{1}{p}}\right)4(a_1^2+4a_2^2)\int_0^t E|r(s)|^2ds = \eta_t \\ 3^{p-1}(4b_1^2)^p = f(t) \\ 3^{p-1}(16b_2^2)^p = g(t) \end{cases}$$

Alors on obtient

$$z_t^p \le \eta_t^p + \int_0^t g(s)z_s^p ds + \int_0^t f(s)z_s^{\frac{p}{2}} ds \tag{2.6}$$

donc

$$z_t \le \eta_t k_t^1 \tag{2.7}$$

avec

$$k_t^1 = e^{\frac{1}{p}\int_0^t g(s)ds}\left[1+\frac{1}{2}\int_0^t \left\{\frac{f(s)}{\eta_t^{\frac{p}{2}}}e^{-\frac{1}{2}(\int_0^t g(u)du)}\right\}ds\right]^{\frac{2}{p}} \tag{2.8}$$

pour tout $t \in [0, L]$.

Puisque r(s) est une fonction positive croissante, alors il en est de même pour η_t dans $[0, L]$ on aura

$$z_t \le \eta_L k_t^1$$

avec

$$k_t^1 = e^{\frac{1}{p}\int\limits_0^t g(s)ds} \left[1 + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \left\{ f(s)\eta_L^{\frac{p}{2}} e^{-\frac{1}{2}(\int\limits_0^s g(u)du)} \right\} ds\right]^{\frac{2}{p}}$$

Montrons (2.7), on remarque de (2.6) que

$$\left[\frac{z_t}{\eta_L}\right]^p \leq 1 + \int\limits_0^t g(s)\left[\frac{z_s}{\eta_L}\right]^p ds + \int\limits_0^t \frac{f(s)}{\eta_L^{\frac{p}{2}}}\left[\frac{z_s}{\eta_L}\right]^{\frac{p}{2}} ds$$

Posons

$$m_t = \frac{z_t}{\eta_L}, \qquad m_0 \leq 1, \tag{2.9}$$

alors

$$m_t^p \leq 1 + \int\limits_0^t g(s) m_s^p ds + \int\limits_0^t \frac{f(s)}{\eta_L^{\frac{p}{2}}} m_s^{\frac{p}{2}} ds$$

En utilisant le théorème 2.1.1 on obtient

$$m_t \leq k_t^1, \forall t \in [0, L], \tag{2.10}$$

où k_t^1 est définie dans (2.8). On obtient l'inégalité (2.7) par combinaison de (2.9) et (2.10).

Donc

$$E|x_t|^2 \leq \left[\left(3^{1-\frac{1}{p}}\right) 4(a_1^2 + 4a_2^2)\int\limits_0^t E|r(s)|^2 ds\right] k_t^1$$

où

$$k_t^1 = e^{\frac{1}{p}\int\limits_0^t g(s)ds} \left[1 + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \left\{ \frac{f(s)}{\eta_L^{\frac{p}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\int\limits_0^s g(u)du)} \right\} ds\right]^{\frac{2}{p}}$$

c'est à dire

$$k_t^1 = e^{\frac{1}{p}\int\limits_0^t 3^{p-1}(4b_2)^{2p}ds} \left[1 + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \left\{ \frac{3^{p-1}(4b_1^2)^p e - \frac{3p-1}{2}(4b_2)^{2p_s}}{[(3^{1-\frac{1}{2}})4(a_1^2 + 4a_2^2)E|r(u)|^2 du]^{\frac{p}{2}}} \right\} ds\right]^{\frac{2}{p}}$$

ceci donne

$$k_t^1 = e^{\frac{3^{p-1}(4b_2)^{2p}}{p}t} \left[1 + \frac{3^{\frac{p-1}{2}} 2^{p-1} b_1^{2p}}{(a_1^2 + 4a_2^2)^{\frac{p}{2}}}\int\limits_0^t \left\{ \frac{e^{-\frac{3p-1}{2}(4b_2)^{2ps}}}{[\int\limits_0^L E|r(u)|^2 du]^{\frac{p}{2}}} \right\}\right]^{\frac{2}{p}}$$

pour $p > 1$

2.3 Applications

2.3.1 Théorème d'existence et l'unicité

Revenons au théorème d'existence et d'unicité des solutions pour les équations différentielles stochastiques, on donne une simple démonstration à ce théorème en utilisant les différentes formes de l'inégalité de Gronwall vues dans les théorèmes précédents. On considère tout d'abord, dans l'espace probabilisé (Ω, F, P) le processus $x_t \in H^2_\omega[0, L]$ satisfaisant l'équation différentielle

$$\begin{cases} dx = a(t,x)dt + b(t,x)dW_t \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{2.11}$$

Les fonctions $a(t,x) : [0,L] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $b(t,x) : [0,L] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont mesurables. On suppose que F_t est la complétion de $\sigma W_t, t \in [0,L]$ pour tout $t \in [0,L]$ et la condition initiale x_0 est indépendante de W_t pour $t \in [0,L]$, et que $E|x_0|^2 < \infty$. Supposons que les fonctions $a(t,x)$ et $b(t,x)$ vérifient les conditions de Lipschitz (1.21) et de la croissance linéaire (1.22) vues avant, notons par k_1, k_2 les constantes de Lipschitz et de la croissance linéaire respectivement.

On utilise la méthode de Picard, soit la suite suivante $x_n(t)_{n\geq 0}$ définie par $x_0(t) = x_0$ et pour tout $n \geq 1$

$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_0^t a(s, x_n(s))ds + \int_0^t b(s, x_n(s))dW_s$$

Alors, on aura

$$x_{n+1}(t) - x_n(t) = \int_0^t [a(s, x_n(s)) - a(s, x_{n-1}(s))]ds + \int_0^t [b(s, x_n(s)) - b(s, x_{n-1}(s))]dW_s$$

donc, en utilisant la condition de Lipschitz, nous obtenons

$$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leq \left| \int_0^t [a(s, x_n(s)) - a(s, x_{n-1}(s))]ds \right| + \left| \int_0^t [b(s, x_n(s)) - b(s, x_{n-1}(s))]dW_s \right|$$

D'où il vient, grâce au théorème 2.2.1, avec $a_1 = a_2 = k_1, b_1 = b_2 = 0$

$$E|x_{n+1}(t)-x_n(t)| \leq 2^{\frac{3p-1}{2p}} \sqrt{5k_1^2} \sqrt{\int_0^t E|x_n(s)-x_{n-1}(s)|^2 ds}$$

pour $p \geq 1$. Par récurrence on a l'estimation suivante

$$E|x_{n+1}(t)-x_n(t)| \leq \frac{2^{n\frac{3p-1}{2p}}(5k_1^2)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n!}} \sqrt{\sup_{s\in[0,L]} E|x_1(s)-x_0(s)|^2}$$

c'est une L_1-estimation pour chaque p. Concernant l'unicité, la convergence de la suite $x_n(t)_{n\geq 0}$ nous conduit facilement à conclure le résultat.

Remarque 2.3.1. Pour le cas de l'estimation en moyenne quadratique, on pourra de la même manière utiliser le théorème 2.2.3, on aura pour $p \geq 1$, avec $a_1 = a_2 = k_1, b_1 = b_2 = 0$,

$$E|x_{n+1}(t)-x_n(t)j|^2 \leq 20\left(3^{1-\frac{1}{p}}\right) k_1^2 \int_0^t E|x_n(s)-x_{n-1}(s)|^2 ds$$

et en utilisant la récurrence, on obtiendra

$$E|x_{n+1}(t)-x_n(t)|^2 \leq \frac{20^n 3^{n(1-\frac{1}{p})} k_1^{2n}}{n!} \sup_{s\in[0,L]} E|x_1(s)-x_0(s)|^2$$

Remarque 2.3.2. On pourra généraliser les différentes formes de l'inégalité de Gronwall vues avant dans le cas d'EDS de Stratonovich.

Conclusion Générale

Ce mémoire de master a étudié quelques contributions dans l'étude des équations différentielles stochastiques, particulièrement les questions relatives à l'existence et l'unicité des solutions.
La démonstration des théorèmes d'existence et d'unicité des solutions relatives au EDS nécessite, en général, l'utilisation d'un résultat classique connu sous le nom "lemme de Gronwall" qui a connu autant de version de généralisations.
La contribution principale de ce mémoire portant sur la généralisation du lemme de Gronwall-Bellman à d'autres formes utilisées aux équations différentielles stochastiques.
Après avoir démontré ces nouvelles formes de l'inégalité de Gronwall, nous les avons utilisés afin de donner une autre démonstration du fameux théorème d'existence et d'unicité des solutions des EDS.
Comme perspective de ce travail, nous souhaiterons utiliser les nouvelles formes de Gronwall démontres dans ce mémoire pour rétablir les schémas numériques utilises pour les équations différentielles stochastiques à savoir le schéma d'Euler, et celui de Milstein.

Bibliographie

[1] A. Abdeldaim and M. Yakout. On some new integral inequalities of Gronwall-Bellman-Pachpatte type. 217 (2011).

[2] Robert Dautray. Méthodes probabilistes pour les équations de la phy- sique. 1989.

[3] J.L. Doob. Stochastic Process. 1953.

[4] Richard Durrett. Stochastic Calculus. 1996.

[5] M.A. Boudref et A. Berboucha. New inequalities of Gronwall type for the stochastic differential equations. pages 151–159, Issue 3 (2015).

[6] I. Gikhman and A. Skorokhod. Introduction à la théorie des processus aléa- toires. 1980.

[7] Nadine Guillotin-Plantard. Introduction au calcul stochastique. 13 Septembre 2009.

[8] K. Itô. Stochastic Integral. pages 32–35., 22 (1944).

[9] M. Jeanblanc. Thomas Simon, Eléments de calcul stochastique. Septembre 2005.

[10] I. Karatzas and S. Shreve. Brownian Motion and Stochastic Calculus. 1988.

[11] P.E. Kloeden and E. Platen. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. 1999.

[12] B. K. Øksandal. Stochastic Differential Equations. 2000.

[13] X. Mao. Stochastic Differential Equations and Applications. 1997.

[14] S. Watanabe N. Ikeda. Stochastic differential equations and diffusion process. 1981.

[15] Ph. E. Protter. Stochastic Integration And Differential Equations. 2003.

[16] D. Revuz and M. Yor. Continuous martingales and borwnian motion. 1998.

[17] Y. Rozanov. , Processus aléatoires. 1975.

[18] S. Shreve. Stochastic Calculus and Finance, Polycopié. 1996.