République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Akli Mohand Oulhadj - Bouira -

Faculté des Sciences et des Sciences Appliquées

Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Filière : Mathématiques

Spécialité : Recherche Opérationnelle

Thème

Sur certaines propriétés des nombres et polynômes de Bernoulli

---

Présenté par : HAMLA Hayat ALIM Khadidja

Devant le jury composé de :

Président	M^r **DEMOUCHE Nacer**	**MAA**	**U. A/M/O Bouira.**
Encadreurs	M^r **KHALDI Laala**	**MAA**	**U. A/M/O Bouira.**
Examinatrices	M^{me} **RAFAA Souad**	**MAA**	**U. A/M/O Bouira.**
	M^{me} **MELOUANE Nassima**	**MAA**	**U. A/M/O Bouira.**

2020/2021

Sur certaines propriétés des nombres et des polynômes de Bernoulli

Alim Khadidja et Hamla Hayat

Résumé

Dans ce mémoire on a présenté un ensemble de résultats prinsipales dans lesquels on a étudié les propriétés des nombres et des polynômes de Bernoulli , où nous avons d'abord parlons sur les polynômes d'Appell qu'on a développé dans le deuxième chapitre,où il a découvert de nombreuses formules explicites.

Abstract

In this thesis we presented a set of main results in which we studied the properties of numbers and Bernoulli polynomials ,where we first talk about the Appell polynomials that we developed in the secovered many explicite formulas .

Remerciement

Nous remercions avant tout ALLAH qui nous a donné la santé, le courage, la force et la patience pour achever ce travail.

Nos profonds remerciements à notre encadreur Mr.Laala KHALDI ensegniant à l'université de Bouira, pour avoir accepté de diriger ce travail, pour sa confiance, sa patience et pour ses conseils tout au long de la réalisation de cette mémoire.

Sa disponibilité et ses qualités humaines ont contribué à l'achèvement de ce travail.

Nous tenons également à remerciements les membres des jury. pour l'attention et le temps consacré à la lecture et le jugement de ce mémoire.

Nous aimerons vous remercier infiniment mes chers enseignants et vous dire que votre compétence et votre sérieux m'ont toujours influencée.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail
A mes chers parents :MOHAMMED & FATIHA
Sources de mes joies, secrets de ma force
Vous serez toujours le modèl
c'est à vous que je dois cette réussite et je suis fière de vous l'offrir
A mes frères et mes soeurs
Abd Elhakim, Ali,Aboubaker,Youcef
Fatima et Samia
A mes tantes et mes oncles
A mes fils de mes frères
Bilal,Abd Eldjalil , Abd Allah, Fouad
Ritadj, Asma,Maria,Hafsa
et les jumelle Salma et Meriem
A mes chères amies Amel, Souhila, Khadidja,Fayrouz
A l'homme de ma vie, mon mari SAID.

KHADIDJA

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

A ma famille, elle qui m'a dote d'une éducation digne, son amour a fait de moi ce que je suis aujourd'hui :

Particuliérement à mon père feu HASSENE, pour le gout à l'effort qu'il a suscité en moi, de par sa rigueur.

A ma mére KHADIDJA, espérant avoir réalisé l'un de ses vœux les plus chères, celui de voir ses fils accéder à un grade important couronnant des

études avancées.

A vous mes grandes méres HOURIYA et YAMINA.

A vous mes frères BILAL, ABDELKADER, HICHAM et MARWANE et sœurs WIAME et KATRE NADA.

A vous mes chères tantes, et a vous mes amies Fatima, Hanane et Warda.

HAYAT

Table des matières

Notations

1. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$: ensemble des nombres entiers naturels.
2. $\mathbb{Z}^+$: ensemble des entiers rationnels positives.
3. $\mathbb{Z}$: l'ensemble des entiers rationnels.
4. $\mathbb{R}$: l'ensemble des nombres réels.
5. $\mathbb{C}$: ensemble des nombres complexes.
6. B_n : n-ième nombre de Bernoulli.
7. $B_n(x)$: n-ième polynôme de Bernoulli.
8. K : corps commutatif de caractéristique zéro : $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ où $\mathbb{C}$.
9. $S(z)$:la série génératrice exponentielle formelle.
10. D : opérateur de dérivation.
11. $\binom{n}{k}$: coefficient binomial.
12. $\mathbb{C}[x]$: $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}[x]$ des polynômes à coefficients complexes.
13. $\mathbb{C}[[z]]$: l'algèbre des séries formelles.
14. $\lfloor x \rfloor$: partie entière inférieure de nombre réél x.
15. $\triangle$: le premier opérateur de différence finie.

Introduction générale

Depuis les temps les plus reculés et jusqu'à nos jours, les mathématiciens se sont intéressés à la détermination et aux propriétés des sommes

$$S_m(n) = 1^m + 2^m + \cdots + n^m.$$

où m et n sont des entiers naturels non nuls.

Comme l'affirme le mathématicien danois Niels Nielsen (1865-1931) dans son ouvrage intitulé "Traité élémentaire des nombres de Bernoulli", ([13], chap XVI, p.295), les formules suivantes étaient connues des grecs, du temps d'Archimède, près de trois siècles avant J-C.

$$S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$S_3(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (S_1(n))^2.$$

Plus tard, comme le rapporte le mathématicien français Edouard Lucas (1842-1891) dans son ouvrage intitulé "Théorie des nombres", ([21], chap XIV, p 228), le médecin arabe Djamchid Ben Mas'oud donna dans un manuscrit daté de 1589 la formule suivante que le mathématicien français Pierre de Fermat (1601-1665) devait retrouver plusieurs années plus tard

$$S_4(n) = \left(\frac{S_1(n) - 1}{5} + S_1(n)\right) S_2(n).$$

Compte tenu des expressions de $S_1(n)$ et $S_2(n)$ précédentes, cette dernière formule peut s'écrire

$$S_4(n) = \frac{1}{30} n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1).$$

Durant la même période, le mathématicien allemand Johann Faulhaber $(1580-1635)$, [22] détermina des expressions pour les sommes $S_m(n)$ pour $1 \leq m \leq 17$, sans toute fois expliquer la méthode qui lui avait permis d'obtenir ces résultats Faulhaber ([22],1631), ([23],1993) et ([27], 2013) remarqua que les sommes $S_{2m+1}(n)$ des puissances impairs des n premiers entiers naturels non nuls pouvaient s'exprimer à l'aide d'un polynôme en t où $t = \frac{n(n+1)}{2} = S_1(n)$. (Ce résultat ne fut prouvé qu'en 1834 par Jacobi [25]). Ainsi Faulhaber trouva les formules suivantes que Donald E.

Knuth repris et étudia dans son article [23] :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^3 &= t^2. \\
\sum_{k=1}^{n} k^5 &= \frac{1}{3}\left(4t^3 - t^2\right). \\
\sum_{k=1}^{n} k^7 &= \frac{1}{6}\left(12t^4 - 8t^3 + 2t^2\right). \\
\sum_{k=1}^{n} k^9 &= \frac{1}{5}\left(16t^5 - 20t^4 + 12t^3 - 3t^2\right). \\
\sum_{k=1}^{n} k^{11} &= \frac{1}{6}\left(32t^6 - 64t^5 + 68t^4 - 40t^3 + 5t^2\right). \\
\sum_{k=1}^{n} k^{13} &= \frac{1}{105}\left(960t^7 - 2800t^6 + 4592t^5 - 4720t^4 + 2764t^3 - 691t^2\right). \\
\sum_{k=1}^{n} k^{15} &= \frac{1}{12}\left(192t^8 - 768t^7 + 1792t^6 - 2816t^5 + 2872t^4 - 1680t^3 + 420t^2\right). \\
\sum_{k=1}^{n} k^{17} &= \frac{1}{45}\left(\begin{array}{c} 1280t^9 - 6720t^8 + 21120t^7 - 46880t^6 + 72912t^5 \\ -74220t^4 + 43404t^3 - 10851t^2 \end{array}\right).
\end{aligned}$$

Ce mémoire consacré à l'étude de certaines propriétés des nombres et polynômes de Bernoulli, comporte trois chapitres.

Le premier chapitre de ce mémoire est consacrés à l'étude des suites de polynômes d'Appell avec quelque propiétés et application.

Le deuxième chapitre porte plus précisément sur une étude des nombres et polynômes de Bernoulli . Dans ce chapitre, nous commençons par définir les suites de polynômes d'Appell. Nous étudions des propriétés importantes et générales de ces suites de polynômes. Nous définissons ensuite de manière naturelle les suites de polynômes et de nombres de Bernoulli et prouvons que cet suite de polynômes est une suite de polynômes d'Appell. Nous retrouvons ainsi aisément plusieurs propriétés de ces polynômes et nombres de Bernoulli.

Le troisième chapitre, on a déterminé quelque formules explicites pour des polynômes et des nombres de Bernoulli.

Chapitre 1

Polynomes d'Appell

1.1 Introduction

Les polynômes d'Appell ont attiré l'attention de plusieurs chercheurs, vues leurs applications vastes dans différents domaines mathématiques et physiques . Plusieurs polynômes d'Appell sont munis d'une étude particulière, tels que les polynômes de Bernoulli.

Dans tout ce qui suit, K désigne l'un des trois corps $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Dans une note [4], Paul Emile Appell définit et étudie des suites particulières de polynômes. En son honneur, ces suites de polynômes sont appelées aujourd'hui "suites de polynômes d'Appell". Dans ce qui suit, nous allons préciser la définition d'une suite de polynôme d'Appell et étudier ensuite certaines propriétés de ces suites de polynômes.

1.2 suites de polynômes d'Appell

Définition 1. *On dit qu'une suite de polynôme $(A_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ de $K[x]$ est une suite de polynômes d'Appell si on a :*

1. $A_0(x)$ est un polynôme constant non nul.

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A'_n(x) = nA_{n-1}(x)$.

Des exemples sur les suites de polynômes d'Appell :

Exemple 2. *On a*

$$U_n(x) = x^n$$

Alors

$$U_0(x) = 1 \neq 0$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad , \qquad U'_n(x) = nx^{n-1} = nU_{n-1}(x).$$

$(U_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de polynômes d'Appell.

Exemple 3. *On a*

$$V_n(x) = \frac{(x+1)^{n+1} - x^{n+1}}{n+1}$$

Alors

$$V_0(x) = 1 \neq 0$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad V'_n(x) = (x+1)^n - x^n = nV_{n-1}(x).$$

$(V_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de polynômes d'Appell.

Exemple 4. *On a*
$$W_n(x) = \frac{1}{2}((x+1)^n + x^n)$$

Alors
$$W_0(x) = 1 \neq 0$$

et
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \qquad W'_n(x) = \frac{n}{2}((x+1)^{n-1} + x^{n-1}) = nW_{n-1}(x).$$

$(W_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de polynômes d'Appell.

Théorème 5. *Soient $(A_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes de $K[x]$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de K définie par*

$$a_n = A_n(0).$$

et
$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!}.$$

la série génératrice exponentielle formelle associée à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

$$A_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite de polynômes d'Appell.} \tag{1.1}$$

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k} x^k, \quad (n \geq 0) \text{ où } (a_n)_{n\geq 0} \text{ est donnée.} \tag{1.2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \frac{z^n}{n!} = S(z)e^{xz} \quad \text{avec} \quad S(z) \in \mathbb{C}[[z]] \quad \text{et } S(0) \neq 0. \tag{1.3}$$

Démonstration. La suite $(A_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de polynôme d'Appell alors pour tout $n \geq 1$
$$A'_n(x) = nA_{n-1}(x)$$

Ainsi il est facile de voir que

$$\frac{D^k(A_n)}{k!} = \begin{cases} \binom{n}{k} A_{n-k} & \text{si } 0 \leq k \leq n, \\ 0 & \text{si } k > n. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A_n(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k(A_n(0))}{k!} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_{n-k}(0)\ x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k} x^k \end{aligned}$$

On déduit que

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \frac{z^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!} \right)\ e^{xz}$$

Réciproquement si $\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \frac{z^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!} \right) e^{xz}$

Montrons que la suite de polynômes $(A_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de polynômes d'Appell

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k} x^k$$

$$A'_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} a_{n-k} x^{k-1}$$

$$\begin{aligned} A'_n(x) &= n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} a_{n-k} x^{k-1} \\ &= n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} a_{n-1-j} x^j = n A_{n-1}(x). \end{aligned}$$

□

1.3 Propriétés des suites d'Appell

Théorème 6. *[1]Soit* $(A_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ *, une suite de polynômes d'Appell ,alors on a :*

1. Pour tout entier naturel n*,* $A_n(x)$ *est un polynôme de degré* n *et on a dans* $\mathbb{C}[x]$

$$A_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_k(y) x^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_k(x) y^{n-k}.$$

2. Pour tout $x_0 \in \mathbb{C}$*, on a :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \frac{z^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x_0) \frac{z^n}{n!} \right)\ e^{(x-x_0)\ z}.$$

Remarque 7. *Il existe une unique suite de polynômes d'Appell* $(A_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *, on ait* $A_n(x_0) = a_n$.

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \; a_n(x-x_0)^{n-k}.$$

où encore

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)\frac{z^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!}\right) \; e^{(x-x_0)\; z}.$$

On pourra en trouver une preuve dans le journale de Carlson [2] , où dans d'Agratini [3] .

1.4 Une identité pour des polynômes d'Appell

Notre principal résultat est une identité pour des polynômes d'Appell . précisons la définition de ces polynômes. soient $(A_n(x))_{n\geq 0}$ une suite de polynômes de $\mathbb{C}[x]$, $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite de nombres complexes définie par $a_n = A_n(0)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $S(z)$ la série formelle de $\mathbb{C}[[z]]$ définis par $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!}$.

On dit que $(A_n(x))_{n\geq 0}$ est une suite de polynômes d'Appell si $A_0(x)$ est un polynôme constant non nul et si ,de plus, on a $A'_n(x) = nA_{n-1}(x)$ pour $n \geq 1$. ces conditions sont équivalentes à[4] :

$$a_0 \neq 0 \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)\frac{z^n}{n!} = S(z)e^{xz}. \tag{1.4}$$

les conditions (1.4) équivalent à

$$a_0 \neq 0 \text{ et } A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k}x^k, \qquad (n \geq 0).$$

On constate ainsi que l'on a alors deg $A_n(x) = n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. par suite, toute suite de polynômes d'Appell $(A_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une base du $\mathbb{C}-$espace vectoriel $\mathbb{C}[x]$. le théorème suivant est notre résultat principal [5] .

Théorème 8. *Soient* $S(z)$ *une série formelle de* $\mathbb{C}[[z]]$ *de terme constant égal à* 1, α *un nombre complexe et* $(A_n^{(\alpha)}(x))_{n\geq 0}$ *la suite de polynômes d'Appell de* $\mathbb{C}[x]$ *de série génératrice exponentielle*

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(\alpha)}(x)\frac{z^n}{n!} = S^{\alpha}(z)e^{xz}.$$

Alors pour touts entiers naturels m *et* n *tels que* $m \geq n$, *on a :*

$$A_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{\alpha+m}{m-k}\binom{\alpha+k-1}{k} A_n^{(-k)}(x). \tag{1.5}$$

Lemmes préparatoires

Lemme 9. *Pour tous les entiers naturels m et q,on a :*

$$\begin{aligned} 1 \quad = \quad & \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{q+m}{m-k}\binom{q+k+-1}{k}\; x^{q+k} \\ & -(-1)^m\binom{q+m}{q}\sum_{k=1}^{q}\frac{k}{k+m}\binom{q}{k}(x-1)^{m+k}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Démonstration. On montre que la dérivée du second membre de (1.6) est nulle . En effet, en remarquant que pour $0 \leq k \leq m$, on a :

$$\binom{q+m}{m-k}\binom{q+k-1}{k}(q+k)$$

$$= q\binom{q+m}{q}\binom{m}{k}$$

le second membre de (1.6) peut s'écrire comme la différence de deux polynômes ayant chacun pour dérivée $q\binom{q+m}{q}\; x^{q-1}(1-x)^m$.

Le second membre est donc un polynôme constant, qui, de plus,vaut 1 pour $x = 0$, en vertu de l'identité (5.41) p.202 de [6].

La relation (1.6) en résulte . □

Lemme 10. *[7]Soit L l'automorphisme du $\mathbb{C}-$espace vectoriel $\mathbb{C}[x]$ défini par :*

$$L(A_n^{(1)}(x)) = A_n^{(0)}(x) = x^n\;, \quad n \geq 0.$$

1. pour tous les entiers r et s, on a

$$L^r(A_n^{(s)}(x)) = A_n^{(s-r.)}(x). \tag{1.7}$$

2. pour tous les entiers naturels m et n tels que $m \geq n+1$ et pour tout polynôme de $\mathbb{C}[x]$ de degré inférieur ou égal à n, on a :

$$(L-I)^m(p(x)) = 0. \tag{1.8}$$

Démonstration. 1. posons

$$S^\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(\alpha)}\frac{z^n}{n!}.$$

On a alors, pour tout entier s,

$$A_n^{(s)}(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a_{n-j}^{(s-1)} A_j^{(1)}(x). \tag{1.9}$$

En appliquant L à chacun des deux membres de l'égalité (1.9), on preuve que la relation (1.7) est vérifiée pour $r = 1$.

un simple raisonnement par récurrence sur r permet alors de prouver (1.7) pour $r \geq 0$.

Le fait que, de plus ,L est un automorphisme permet de montrer que cette relation est aussi vérifiée pour $r \leq 0$.

2. pour tout entier n , $L(x^n) = A_n^{(-1)}(x)$ est un polynôme unitaire de degré n ,on en déduit que

$$\deg(L - I)(x^n) \leq n - 1 \text{ pour } n \geq 1 \text{ et } (L - I)(x^0) = 0,$$

la relation (1.8) en résulte. $\square$

Démonstration du Théorème 8

Soient m, n et q des entiers naturels tels que $m \geq n$. Le Lemme 9 nous permet d'écrire la relation suivante :

$$\begin{aligned} L^{-q} \quad = \quad & \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{q+m}{m-k} \binom{q+k-1}{k} L^k \\ & -(-1)^m \binom{q+m}{q} \sum_{k=1}^{q} \frac{k}{m+k} \binom{q}{k} L^{-q}(L-I)^{m+k}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

On sait, d'aprés le Lemme 10 que pour tout entier r , on a $L^r(x^n) = A_n^{(-r)}(x)$. on déduit de (1.10) que , pour tout entier naturel q , on a :

$$A_n^{(q)}(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{q+m}{m-k} \binom{q+k-1}{k} A^{(-k)}(x^n).$$

La relation (1.5) est ainsi établie pour tout $\alpha = q$ ou q est un entier naturel quelconque .

Remarquons alors que $A_n^{(\alpha)}(x)$ est un polynôme de degré n en x aussi bien qu'un polynôme de degré n en α. Il en recherchait pour m, n et x fixé , la relation (1.5) est une égalité vérifiée pour une infinité de valeurs (entières) de α , entre les valeurs prises par deux polynômes en α dont le degré ne dépasse pas m . On en déduit que ces deux polynômes sont égaux .

la relation (1.5) est par conséquent , aussi vérifiée pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$.

Chapitre 2

Nombres et polynômes de Bernoulli

2.1 Introduction :

Il est bien connu que les nombres et les polynômes de Bernoulli jouent un role important dans les mathématiques. ils sont des objets principeaux dans la théorie des fonctions spéciales [8] . leurs définitions peuvent etre données comme suit :

2.2 Définiton des nombres et polynômes de Bernoulli

2.2.1 les nombres de Bernoulli

Définition 11. *[9]on appelle suite des nombres de Bernoulli la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des nombres rationnels définie par la relation de récurrence suivantes :*

$$B_0 = 1 \text{ et } B_n = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}B_k, \qquad \text{pour } n \geqslant 1 \tag{2.1}$$

pour tout entier naturel n, B_n est appelé n-ième nombre de Bernoulli.
la suite des nombres de Bernoulli est définie par l'égalité formelle [10] :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n = \frac{z}{e^z-1}.$$

les premières valeurs des nombres de Bernoulli de B_n pour $0 \leqslant n \leqslant 6$, sont :

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_5 = 0 \quad \text{et } B_6 = \frac{1}{42}.$$

2.2.2 Les polynômes de Bernoulli

Définition 12. *On appelle suite des polynômes de Bernoulli la suite de polynômes à coefficients rationnels $(B_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation suivante :*

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k}x^k, \ \text{pour } n \geqslant 0. \tag{2.2}$$

pour tout entier naturel n, $B_n(x)$ est appellé n-ième polynôme de Bernoulli.

la suite des polynômes de Bernoulli est l'unique suite telle qu'on ait le développement en série [11] :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} t^n = \frac{te^{tx}}{e^t - 1}$$

Voici les premières valeurs des polynômes de Bernoulli que Lehonard Euler a obtenu [12] :

$$B_0(x) = 1,$$

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2},$$

$$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6},$$

$$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x,$$

$$B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30},$$

$$B_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x,$$

$$\begin{aligned} B_6(x) &= x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42}, \\ & \vdots \end{aligned}$$

2.3 propriétés des nombres et polynômes de Bernoulli :

Théorème 13. *Pour tout $n \geqslant 2$, on a :*

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$$

Démonstration. On a :

$$b(t) = \frac{t}{e^t - 1}.$$

Alors

$$e^t b(t) - b(t) = t.$$

Ainsi

$$e^t b(t) = t + b(t).$$

Comme:
$$e^t = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!} t^n,$$
et
$$t + b(t) = 1 + \frac{1}{2}t + \sum_{n\geqslant 2} \frac{B_n}{n!} t^n.$$
Donc:
$$\left(\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!} t^n\right) \left(\sum_{n\geqslant 0} \frac{B_n}{n!} t^n\right) = 1 + \frac{1}{2}t + \sum_{n\geqslant 2} \frac{B_n}{n!} t^n.$$
D'où
$$\sum_{n\geqslant 0} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!(n-k)!}\right) t^n = 1 + \frac{1}{2}t + \sum_{n\geqslant 2} \frac{B_n}{n!} t^n,$$
$$1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) t + \sum_{n\geqslant 2} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{B_K}{k!(n-k)!}\right) t^n = 1 + \frac{1}{2}t + \sum_{n\geqslant 2} \frac{B_n}{n!} t^n.$$
Alors:
$$\sum_{n\geqslant 2} \left(\sum_{K=0}^{n} \frac{B_k}{k!(n-k)!}\right) t^n = \sum_{n\geqslant 2} \frac{B_n}{n!} t^n.$$
D'où pour $n \geqslant 2$:
$$\frac{B_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!(n-k)!}.$$
Enfin
$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n! B_k}{k!(n-k)!} = \sum_{n=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$$

□

Remarque 14. *Pour tout $n \geqslant 1$, on a : $B_{2n+1} = 0$.*

Théorème 15. *Pour tout entier naturel n, on a*

1.
$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}. \tag{2.3}$$

2.
$$B_n(1) = B_n(0), \quad \textit{pour} \qquad n \neq 1. \tag{2.4}$$

3.
$$\int_0^1 B_n(x)dx = 0, \quad \forall n \geq 1. \tag{2.5}$$

4.
$$B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x). \tag{2.6}$$
5. Dans $\mathbb{Q}[x,y]$, *on a*
$$B_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}(x) y^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}(y) x^k. \tag{2.7}$$
6.
$$B'_{n+1}(x) = (n+1)B_n(x), \qquad \textit{pour} \;\; n \in \mathbb{N}. \tag{2.8}$$

Démonstration. 1. On a
$$\frac{ze^{(x+1)z}}{e^z-1} - \frac{ze^{xz}}{e^z-1} = ze^{xz}$$
alors :
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x+1)-B_n(x)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} z^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} z^n$$
donc, pour $n \in \mathbb{Z}^+$,
$$\frac{B_n(x+1)-B_n(x)}{n!} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \Longleftrightarrow B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}. \tag{2.9}$$
2. On remplace $x=0$ dans (2.9) alors on obtient :
$$B_n(1) = B_n(0), \qquad \text{pour } n \neq 1.$$
3. On a :
$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{te^{tx}}{e^t-1} dx &= \frac{t}{e^t-1} \int_0^1 e^{tx} dx = \frac{t}{e^t-1} \left[\frac{e^{xt}}{t}\right]_0^1 \\
&= \frac{t}{e^t-1} \left(\frac{e^t-1}{t}\right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$
D'autre part :
$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{B_n(x)}{n!} t^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^1 B_n(x) dx\right) \frac{t^n}{n!}.$$
D'où :
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^1 B_n(x) dx\right) \frac{t^n}{n!} = 1.$$

Alors :
$$\int_0^1 B_0(x)dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^1 B_n(x)dx\right)\frac{t^n}{n!} = 1.$$
Ainsi :
$$1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^1 B_n(x)dx\right)\frac{t^n}{n!} = 1.$$
Alors :
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^1 B_n(x)dx\right)\frac{t^n}{n!} = 0.$$
Et enfin :
$$\int_0^1 B_n(x)dx = 0 \quad , \qquad \forall n \geq 1.$$
4.On pose
$$Q_n(x) = (-1)^n B_n(1-x).$$
Si $n = 0$ on aura
$$Q_0(x) = (-1)^0 B_0(1-x) = 1 = B_0(x).$$
De là si $n \in \mathbb{N}^*$,
$$Q_n'(x) = (-1)^n B_n'(1-x) \times (-1) = (-1)^{n+1} B_n'(1-x) \qquad \text{or} \qquad B_n'(x) = nB_{n-1}(x)$$
donc
$$B_n'(1-x) = nB_{n-1}(1-x)$$
d'où
$$\begin{aligned} Q_n'(x) &= (-1)^{n+1} nB_{n-1}(1-x) = n(-1)^{n+1}B_{n-1}(1-x) \\ &= \frac{n(-1)^{n+1}(-1)^{-2}}{(-1)^{-2}} B_{n-1}(1-x) \\ &= n(-1)^{n-1}B_{n-1}(1-x) = nQ_{n-1}(x). \end{aligned}$$
Ainsi
$$Q_n'(x) = nQ_{n-1}(x)$$
De plus
$$\int_0^1 Q_n(t)dt = \int_0^1 (-1)^n B_n(1-t)dt = (-1)^n \int_0^1 B_n(1-t)dt.$$
On pose $u = 1-t$ donc $du = -dt$. Si $t = 0$ alors $u = 1$ et si $t = 1$ alors $u = 0$ d'où
$$\int_0^1 Q_n(t)dt = (-1)^n \int_1^0 B_n(u)(-du) = (-1)^n \int_0^1 B_n(u)du = 0.$$

$(Q_n(x))$ vérifie les items de la définition de $(B_n(x))$, comme cette suite de fonctions est unique on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ Q_n(x) = B_n(x)$$

c'est-à-dire

$$Q_n(x) = (-1)^n B_n(1-x) = B_n(x)$$

où encore

$$B_n(1-x) = \frac{B_n(x)}{(-1)^n} \quad or\ (-1)^n = (-1)^{-n}$$

on obtient donc

$$B_n(1-x) = \frac{B_n(x)}{(-1)^{-n}} = (-1)^n B_n(x).$$

5.Dans $\mathbb{C}[[x,y]]$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x+y)\frac{z^n}{n!} &= \frac{z}{e^z-1}e^{(x+y)z} \\ &= \left(\frac{z}{e^z-1}e^{xz}\right)e^{yz}\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x+y)\frac{z^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} y^n\frac{z^n}{n!}\right).$$

On en déduit que :

$$[z^n]\sum_{m=0}^{\infty} B_m(x+y)\frac{z^m}{m!} = [z^n]\left(\sum_{k=0}^{\infty} B_k(x)\frac{z^k}{k!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} y^n\frac{z^n}{n!}\right).$$

C'est à dire :

$$\frac{1}{n!}B_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n}\frac{B_k(x)}{k!}\frac{y^{n-k}}{(n-k)!}$$

D'où l'on déduit

$$B_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k(x)y^{n-k}.$$

En échangement le rôle de x et y, on obtient aussi

$$B_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k(y)x^{n-k}.$$

6.on a :

$$B_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} B_k x^{n+1-k},$$

alors :

$$\begin{aligned} B'_{n+1}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{k!(n-k)!} B_k x^{n-k} \\ &= (n+1) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k} \\ &= (n+1) B_n(x). \end{aligned}$$

□

2.4 La formule d'Euler Mac-laurin

Définition 16 (les fonctions de Bernoulli)**.** *pour tout nombre réel x, on désigne par $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière et on note $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. on définit les fonctions de Bernoulli b_n par*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad b_n(x) = B_n(\{x\}).$$

Exemple 17.

$$b_1(x) = x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}.$$

Théorème 18 (la formule d'Euler Mac-laurin)**.** *pour $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ si $f \in C^{n+1}$ $([a,b])$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{aligned} \sum_{k=a}^{b} f(k) &= \int_a^b f(t)\, dt + \frac{1}{2}(f(a) + f(b)) \\ &+ \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{m+1} \beta_{m+1}}{(m+1)!} \left(f^{(m)}(b) - f^{(m)}(a)\right) + \frac{(-1)^n}{(n+1)!} R_{n-1}. \end{aligned}$$

où

$$R_{n-1} = \int_a^b f^{(n-1)}(t)\, b_{n-1}(t)\, dt.$$

2.5 Sommation des puissances numériques

Proposition 19.

$$\forall m \geq 0, \forall n \geq 0 \quad \textit{on a} \quad \sum_{k=0}^{n} k^m = \frac{B_{m+1}(n+1) - B_{m+1}(0)}{m+1} = \int_0^{n+1} B_m(t)dt.$$

Remarque 20.

$$\sum_{k=0}^{n} k^m \quad \textit{se note parfois } S_m(n+1) \quad \textit{où} \quad S_m^n.$$

Démonstration. [14] nous avons démontré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_x^{x+1} B_n(t)dt = x^n,$$

ce que nous pouvons réécrire

$$\forall m \geq 0, \int_x^{x+1} B_m(t)dt = x^m$$

Si $x = k \in \mathbb{N}$ on aura donc

$$k^m = \int_k^{k+1} B_m(t)dt$$

c'est-à-dire

$$\sum_{k=0}^{n} k^m = \sum_{k=0}^{n} \int_k^{k+1} B_m(t)dt = \int_0^{n+1} B_m(t)dt$$

or $B'_m(t) = mB_{m-1}(t)$ donc $B'_{m+1}(t) = (m+1)B_m(t)$ c'est-à-dire $B_m(t) = \frac{B'_{m+1}(t)}{m+1}$ d' où :

$$\sum_{k=0}^{n} k^m = \int_0^{n+1} \frac{B'_{m+1}(t)}{m+1}dt = \left[\frac{B_{m+1}(t)}{m+1}\right]_0^{n+1} = \frac{B_{m+1}(n+1) - B_{m+1}(0)}{m+1}.$$

□

Exemple 21. *Retrouvons grâce a la Proposition 19 que* $\sum_{k=0}^{n} k^1 = \frac{n(n+1)}{2}$ *c'est un somme des premiers nombres des suites arithmitiques*

On a

$$B_{1+1}(n+1) = B_2(n+1) = (n+1)^2 - (n+1) + \frac{1}{6} \quad \textit{et} \quad B_{1+1}(0) = B_2(0) = \frac{1}{6}.$$

De là,

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{(n+1)^2-(n+1)+\frac{1}{6}-\frac{1}{6}}{2} = \frac{(n+1)(n+1-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Retrouvons maintenant le résultat

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

On a $m = 2$ *et* $B_{m+1}(n+1) = B_3(n+1) = (n+1)^3 - \frac{3}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{2}(n+1)$.*De plus* $B_3(0) = 0$.

De là ,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k^2 &= \frac{(n+1)^3-\frac{3}{2}(n+1)^2+\frac{1}{2}(n+1)-0}{3} = \frac{2(n+1)^3-3(n+1)^2+(n+1)}{6}\\ &= \frac{(n+1)(S(n+1)^2-3(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(2(n^2+2n+1)-3n-3+1)}{6}\\ &= \frac{(n+1)(2n^2+n)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.\end{aligned}$$

d'où le résultat attendu.

Proposition 22.

$$\begin{aligned}S_m(n+1) &= \sum_{k=0}^{n} k^m = \frac{1}{m+1}(n^{m+1} - \sum_{k=0}^{m-1}\binom{m+1}{k}S_k(n+1))\\ &= \frac{n^{m+1}}{m+1} - \sum_{k=0}^{m-1}\binom{m}{k}\frac{S_k(n+1)}{m+1-k}.\end{aligned}$$

Proposition 23. *(Formule de Faulhaber 1ere forme)*

$$S_m(n) = \sum_{k=0}^{n-1} k^m = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}B_k n^{m+1-k}.$$

Démonstration. D'aprés la Proposition 19 nous avons

$$\sum_{k=0}^{n} k^m = \frac{B_{m+1}(n+1) - B_{m+1}(0)}{m+1}$$

donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^m = \frac{B_{m+1}(n) - B_{m+1}(0)}{m+1}$$

on sait que $B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^{n-k}$ (dernière égalité en k au lieu de i) donc

$$B_{m+1}(n) = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} B_k n^{m+1-k}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} k^m &= \frac{1}{m+1}(B_{m+1}(n) - B_{m+1}) = \frac{1}{m+1}\left(\sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k} B_k n^{m+1-k} - B_{m+1}\right) \\
&= \frac{1}{m+1}\left(\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k} B_k n^{m+1-k} + \underbrace{\binom{m+1}{m+1} B_{m+1} n^{(m+1)-(m+1)}}_{b_{m+1}} - B_{m+1}\right) \\
&= \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k} B_k n^{m+1-k}.
\end{aligned}$$

telle que : $\binom{m+1}{m+1} B_{m+1} n^{(m+1)-(m+1)} = b_{m+1}$. □

Proposition 24. *(Formule de Faulhaber 2-ième forme)*

$$S_m(n+1) = \sum_{k=0}^{n} k^m = \frac{1}{m+1}\left[n^{m+1} + \frac{m+1}{2} n^m + \sum_{k=2}^{m}\binom{m+1}{k} B_k n^{m+1-k}\right].$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^m &= \sum_{k=0}^{n-1} k^m + n^m = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k} B_k n^{m+1-k} + n^m \\
&= \frac{1}{m+1}\left[\begin{array}{c} \binom{m+1}{0} B_0 n^{m+1-0} + \binom{m+1}{1} B_1 n^{m+1-1} \\ + \sum_{k=2}^{m} \binom{m+1}{k} B_k n^{m+1-k} + (m+1)n^m \end{array}\right] \\
&= \frac{1}{m+1}\left[n^{m+1} + (m+1)(-\frac{1}{2})n^m + (m+1)n^m + \sum_{k=2}^{m}\binom{m+1}{k} B_k n^{m+1-k}\right] \\
&= \frac{1}{m+1}\left[n^{m+1} + \frac{m+1}{2} n^m + \sum_{k=2}^{m}\binom{m+1}{k} B_k n^{m+1-k}\right].
\end{aligned}$$

□

Proposition 25. *(Formule de Faulhaber 3-ième forme)*

$$\begin{aligned}
S_m(n+1) &= \sum_{k=0}^{n} k^m = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k} B_k n^{m+1-k} \qquad \textit{pour convention ,} \\
B_1 &= \frac{1}{2} \textit{ au lieu de } B_1 = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Démonstration. D'aprés la 2-ième forme nous avons

$$\sum_{k=0}^{n} k^m = \frac{1}{m+1}\left[n^{m+1} + \frac{m+1}{2}n^m + \sum_{k=2}^{m}\binom{m+1}{k}B_k n^{m+1-k}\right].$$

Si on a $B_0 = 1$ et $B_1 = \frac{1}{2}$ nous aurons donc

$$\sum_{k=0}^{n} k^m = \frac{1}{m+1}\left[\begin{array}{c}\binom{m+1}{0}B_0 n^{m+1-0} + \binom{m+1}{1}B_1 n^{m+1-1} \\ +\sum_{k=2}^{m}\binom{m+1}{k}B_k n^{m+1-k}\end{array}\right]$$

$$= \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}B_k n^{m+1-k} \text{ avec } B_1 = \frac{1}{2} \text{ au lieu de } B_1 = -\frac{1}{2}.$$

□

Remarque 26. *Cette formule sous cette forme n'était pas connu de Faulhaber. Cette dernière a été découverte par Jaques Bernoulli.*

Proposition 27.

$$S_m(n+1) = \sum_{k=0}^{n} k^m = \sum_{k=0}^{m} \frac{B_k}{k!} \times \frac{m!}{(m+1-k)!} n^{m+1-k}.$$

Démonstration. De la 3-ième forme de Faulhaber (avec $B_1 = \frac{1}{2}$ au lieu de $B_1 = -\frac{1}{2}$) on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^m &= \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}B_k n^{m+1-k} = \sum_{k=0}^{m}\frac{(m+1)!}{k!(m+1-k)!} \times \frac{1}{m+1} \times B_k n^{m+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{m}\frac{(m+1)m!}{k!(m+1-k)!(m+1)}B_k n^{m+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{m}\frac{B_k}{k!} \times \frac{m!}{(m+1-k)!}n^{m+1-k}.
\end{aligned}$$

□

2.6 Formule de Raabe

En hommage au mathématicien suisse Joseph Ludwig Raabe (1801-1859), les formules du théorème suivant sont appelées formules de Raabe. C'est à lui qu'on doit la dénomination de "polynômes de Bernoulli" qu'il introduisit dans un article de 1851.

Théorème 28. *Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$B_n(ax) = a^{n-1} \sum_{k=0}^{a-1} B_n(x + \frac{k}{a}), \quad \forall a \in \mathbb{N}^*. \tag{2.10}$$

Lemme 29. *On définie l'application ϕ de $K[x]$ dans $K[x]$ par*

$$\phi(P(x)) = \int_x^{x+1} P(t)\, dt$$

on a alors ϕ est un automorphisme.

Démonstration. On vérifie trivialement que ϕ est linéaire. On a alors pour tout entier $n \geq 0$

$$\begin{aligned} \phi(x^n) &= \frac{1}{n+1}\left((x+1)^{n+1} - x^{n+1}\right) \\ &= x^n + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} x^k \end{aligned}$$

On consttate ainsi que pour tout entier $n \geq 0$, $\phi(x^n)$ est de polynômes de degré n. Il enrésulte que $(\phi(x^n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de K-espace vectoriel $K[x]$. par coséqunet, pour tout polynôme $Q(x)$, il existe une unique suite de scalaire $(a_n)_{n \geq 0}$ vérifie

$$Q(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \phi(x^n)$$

avec $a_n = 0$ pour n assez grand. Comme de plus ϕ est linéaire, on en déduit que

$$Q(x) = \phi\left(\sum_{n \geq 0} a_n x^n\right)$$

Ce qui prouve que l'application linéaire ϕ est bijective. Donc cet application est un automorphisme. □

Corollaire 30. *Pour tout entier $n \geq 0$, il existe un unique polynôme $B_n(x)$ de $\mathbb{Q}[x]$, tel que*

$$\boldsymbol{\phi}(B_n(x)) = \mathbf{x}^n \tag{2.11}$$

Démonstration. [Démonstration de Théorème 28] Pour tout entier $a \in \mathbb{N}^*$, d'après Lemme 29

$$\begin{aligned}
\phi(B_n(x)) &= \int_x^{x+1} B_n(t)dt \\
&= x^n \\
&= a^n(\frac{x}{a})^n \\
&= a^n \int_{\frac{x}{a}}^{\frac{x}{a}+1} B_n(u)du \\
&= a^n \sum_{k=0}^{a-1} \int_{\frac{x+k}{a}}^{\frac{x+k+1}{a}} B_n(u)du.
\end{aligned}$$

A l'aide du changement de variable : $u = \frac{t+k}{a}$ dans chaque intégrale figurant dans la sommation précédente, on obtient :

$$\begin{aligned}
\phi(B_n(x)) &= a^n \sum_{k=0}^{a-1} \int_{\frac{x+k}{a}}^{\frac{x+k+1}{a}} B_n(u)du \\
&= a^{n-1} \sum_{k=0}^{a-1} \int_x^{x+1} B_n(\frac{t+k}{a})dt \\
&= \int_x^{x+1} (a^{n-1} \sum_{k=0}^{a-1} B_n(\frac{t+k}{a}))dt \\
&= \phi(a^{n-1} \sum_{k=0}^{a-1} B_n(\frac{x+k}{a})).
\end{aligned}$$

Ainsi on a prouvé que l'on a

$$\phi(B_n(x)) = \phi(a^{n-1} \sum_{k=0}^{a-1} B_n(\frac{x+k}{a})).$$

L'application ϕ étant injective, on en déduit que

$$B_n(x) = a^{n-1} \sum_{k=0}^{a-1} B_n(\frac{x+k}{a}).$$

Enfin, en changeant x en ax, on obtient

$$B_n(ax) = a^{n-1} \sum_{k=0}^{a-1} B_n(x + \frac{k}{a}).$$

□

2.7 Valeurs des polynômes de Bernoulli aux points $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}$

Le théorème qui suit donne explicitement ces valeurs connues de $B_n(t)$ avec t rationnel. Ces valeurs figurent explicitement dans l'article d'Emma Lehmer [26], en page 352.

Théorème 31. *Pour tout entier $n > 1$, on a*

1.

$$B_n(1) = B_n(0) = B_n, \text{ pour } n \neq 1. \tag{2.12}$$

2.

$$B_n(\frac{1}{2}) = (2^{1-n} - 1)B_n, \text{ pour tout entier } n \text{ et } B_n(\frac{1}{2}) = 0, \text{ pour } n \text{ impair.} \tag{2.13}$$

3.

$$B_n(\frac{1}{3}) = B_n(\frac{2}{3}) = \frac{1}{2}(3^{1-n} - 1)B_n, \text{pour } n \text{ pair.} \tag{2.14}$$

4.

$$B_n(\frac{1}{4}) = B_n(\frac{3}{4}) = 2^{1-2n}(1 - 2^{n-1})B_n, \text{pour } n \text{ pair.} \tag{2.15}$$

5.

$$B_n(\frac{1}{4}) = -B_n(\frac{3}{4}), \text{pour } n \text{ impair.} \tag{2.16}$$

6.

$$B_n(\frac{1}{6}) = B_n(\frac{5}{6}) = \frac{1}{2}(2^{1-n} - 1)(3^{1-n} - 1)B_n, \text{pour } n \text{ pair.} \tag{2.17}$$

Démonstration. La relation (2.6) du Théorème 15. s'écrit $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$.

1. Pour $x = 0$,

$$B_n(1) = (-1)^n B_n(0).$$

Pour $n \neq 1$, on a pour n pair $(-1)^n = 1$ et donc $B_n(1) = B_n(0) = B_n$; pour n impair on a encore $B_n(1) = B_n(0) = B_n = 0$.

2. Pour $n \geq 0$ et $a = 2$, la relation (2.10) du Théorème 28 s'écrit :

$$B_n(2x) = 2^{n-1}(B_n(x) + B_n(x + \frac{1}{2})).$$

Pour $x = 0$, cette relation devient

$$B_n = 2^{n-1}(B_n + B_n(\frac{1}{2})).$$

On en déduit que

$$B_n(\frac{1}{2}) = (2^{1-n} - 1)B_n.$$

Pour n impair, on a pour $n=1$: $B_n(\frac{1}{2})=(1-1)B_1=0$ et pour $n\geq 3$, on a aussi $B_n(\frac{1}{2})=0$ car $B_n=0$ pour $n\geq 3$ et n impair.

3. Pour $n\geq 1$ et $a=3$, la relation (2.10) du Théorème 28 s'écrit :

$$B_n(3x)=3^{n-1}(B_n(x)+B_n(x+\frac{1}{3})+B_n(x+\frac{2}{3})).$$

Pour $x=0$, cette relation devient

$$B_n=3^{n-1}(B_n+B_n(\frac{1}{3})+B_n(\frac{2}{3})).$$

D'après la relation (1.29) pour $x=\frac{1}{3}$ et n pair, on obtient

$$B_n(\frac{1}{3})=B_n(\frac{2}{3}).$$

La relation précédente peut donc s'écrire

$$B_n=3^{n-1}(B_n+2B_n(\frac{1}{3})).$$

On en déduit que

$$B_n(\frac{1}{3})=B_n(\frac{2}{3})=\frac{1}{2}(3^{1-n}-1)B_n.$$

4. Pour $n\geq 1$ et $a=4$, la relation (2.10) du Théorème 28 s'écrit :

$$B_n(4x)=4^{n-1}(B_n(x)+B_n(x+\frac{1}{4})+B_n(x+\frac{1}{2})+B_n(x+\frac{3}{4}))$$

Pour $x=0$, cette relation devient

$$B_n=3^{n-1}(B_n+B_n(\frac{1}{4})+B_n(\frac{1}{2})+B_n(\frac{3}{4}))$$

Or on sait que l'on a $B_n(\frac{1}{2})=(2^{1-n}-1)B_n$.
D'après la relation (1.29) pour $x=\frac{1}{4}$ et n pair, on obtient

$$B_n(\frac{1}{4})=B_n(\frac{3}{4}).$$

La relation précédente peut donc s'écrire

$$B_n=3^{n-1}(B_n+2B_n(\frac{1}{4})+(2^{1-n}-1)B_n).$$

On en déduit que

$$B_n(\frac{1}{4}) = B_n(\frac{3}{4}) = \frac{1}{2}(4^{1-n} - 2^{1-n})B_n.$$

5. pour n impair et $x = \frac{1}{4}$, la relation (2.6) du Théorème15 s'écrit :

$$B_n(\frac{3}{4}) = -B_n(\frac{1}{4}).$$

$$B_n(\frac{1}{4}) = -B_n(\frac{3}{4}).$$

6. Pour $n \geq 1$, n pair et $a = 6$, la relation (2.10) du Théorème 28 s'écrit :

$$B_n(6x) = 6^{n-1}(B_n(x)+B_n(x+\frac{1}{6})+B_n(x+\frac{1}{3})+B_n(x+\frac{1}{2})+B_n(x+\frac{2}{3})+B_n(x+\frac{5}{6})).$$

Pour $x = 0$, cette relation devient

$$B_n = 6^{n-1}(B_n + B_n(\frac{1}{6}) + B_n(\frac{1}{3}) + B_n(\frac{1}{2}) + B_n(\frac{2}{3}) + B_n(\frac{5}{6}))$$

Or on sait d'après ce qui précède que :

$$B_n(\frac{1}{3}) = B_n(\frac{2}{3}) = \frac{1}{2}(3^{1-n} - 1)B_n, B_n(\frac{1}{2}) = (2^{1-n} - 1)B_n$$

et que de plus $B_n(\frac{1}{6}) = B_n(\frac{5}{6})$. On en déduit que

$$B_n = 6^{n-1}(B_n + 2B_n(\frac{1}{6}) + (3^{1-n} - 1)B_n + (2^{1-n} - 1)B_n).$$

Par suite on a bien

$$B_n(\frac{1}{6}) = B_n(\frac{5}{6}) = \frac{1}{2}(2^{1-n} - 1)(3^{1-n} - 1)B_n.$$

□

Le corollaire qui suit nous sera très utile pour établir le résultat de Faulhaber affirmant que la somme $\sum_{k=1}^{n} k^{2m+1}$ peut s'exprimer à l'aide d'un polynôme en t où $t = \frac{n(n+1)}{2}$.

Corollaire 32. *Pour tout entier $n \geq 0$, on a*

$$B_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \left(2 - 2^{2k}\right) B_{2k} \binom{n}{2k} (2x-1)^{n-2k} . \tag{2.18}$$

Démonstration. Appliquons la propriété (2.7) du Théorème 15, on a :

$$\begin{aligned} B_n(x) &= B_n(\frac{1}{2} + \frac{2x-1}{2}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k(\frac{1}{2}) \left(\frac{2x-1}{2}\right)^{n-k}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Or on sait que d'après la propriété (2.13) du Théorème 31 que pour tout entier k, on a $B_k(\frac{1}{2}) = (2^{1-k} - 1)B_k$ et que de plus
$B_k(\frac{1}{2}) = 0$,pour k impair. Il en résulte que la relation (2.19) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} B_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2k} B_{2k}(\frac{1}{2}) \left(\frac{2x-1}{2}\right)^{n-2k} \\ &= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n}{2k} B_{2k}(2^{1-2k} - 1)\frac{(2x-1)^{n-2k}}{2^{n-2k}} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \left(2 - 2^{2k}\right) B_{2k} \binom{n}{2k} (2x-1)^{n-2k}. \end{aligned}$$

□

2.8 Relations de récurrence pour $(B_n(x))_n$

Nous allons établir des relations de récurrence qui vont nous permettre de calculer de proche en proche les premiers polynômes de Bernoulli.

Théorème 33. *Pour tout entier $n \geq 0$, $B_n(x)$ est un polynôme unitaire de degré n vérifiant la relation :*

$$B_n(x) = x^n - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k(x)\cdot$$

Démonstration. D'après la formule du binôme, nous avons pour $n \geq 0$:

$$(x+1)^{n+1} = x^{n+1} + (n+1)x^n + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} x^k\cdot$$

On en déduit, en utilisant la relation (2.11) et la linéarité de ϕ

$$\begin{aligned}
\phi(B_n(x)) &= x^n \\
&= \frac{(x+1)^{n+1}-x^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}x^k \\
&= \int_0^x t^n dt - \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}x^k \\
&= \phi(x^n) - \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}\phi(B_k(x)) \\
&= \phi\left(x^n - \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}B_k(x)\right).
\end{aligned}$$

Ainsi on a

$$\phi(B_n(x)) = \phi\left(x^n - \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}B_k(x)\right).$$

Or d'après le Lemme 29, ϕ est une application bijective. Il en résulte que l'on a bien

$$B_n(x) = x^n - \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}B_k(x).$$

□

Théorème 34. *pour $n \geq 0$, les polynômes de Bernoulli $B_n(x)$ peuvent être exprimés en termes de déterminant de Hessemberg comme*

$$B_n(x) = (-1)^n \times \tag{2.20}$$
$$\begin{vmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
x & \frac{1}{2}\binom{1}{0} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
x^2 & \frac{1}{3}\binom{2}{0} & \frac{1}{2}\binom{2}{1} & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
x^3 & \frac{1}{4}\binom{3}{0} & \frac{1}{3}\binom{3}{1} & \frac{1}{2}\binom{3}{2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
x^{n-3} & \frac{1}{n-2}\binom{n-3}{0} & \frac{1}{n-3}\binom{n-3}{1} & \frac{1}{n-4}\binom{n-3}{2} & \cdots & 1 & 0 & 0 \\
x^{n-2} & \frac{1}{n-1}\binom{n-2}{0} & \frac{1}{n-2}\binom{n-2}{1} & \frac{1}{n-3}\binom{n-2}{2} & \cdots & \frac{1}{2}\binom{n-2}{n-3} & 1 & 0 \\
x^{n-1} & \frac{1}{n}\binom{n-1}{0} & \frac{1}{n-1}\binom{n-1}{1} & \frac{1}{n-2}\binom{n-1}{2} & \cdots & \frac{1}{3}\binom{n-1}{n-3} & \frac{1}{2}\binom{n-1}{n-2} & 1 \\
x^n & \frac{1}{n+1}\binom{n}{0} & \frac{1}{n}\binom{n}{1} & \frac{1}{n-1}\binom{n}{2} & \cdots & \frac{1}{4}\binom{n}{n-3} & \frac{1}{3}\binom{n}{n-2} & \frac{1}{2}\binom{n}{n-1}
\end{vmatrix}$$

Démonstration. [20]On peut écrire la fonction génératrice des polynômes de Bernoulli $B_n(x)$ comme suit :

$$\frac{ze^{xz}}{e^z-1} = \frac{e^{xz}}{(e^z-1)/z} = \frac{e^{xz}}{\int_1^e s^{z-1}ds}.$$

Par conséquent, à l'aide de l'équation appliquée $u(x) = e^{xz}$à et $v(x) = \int_1^e s^{z-1}ds$, nous obtenons la dérivée n-ième

$$\left(\frac{e^{xz}}{\int_1^e s^{z-1}ds}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{(\int_1^e s^{z-1}ds)^{n+1}} \left|A_{n+1,1}(z,x)\right|_{(n+1)\times(n+1)}$$

où

$$A_{n+1,1}(z,x) = (a_{i,1}(z,x))_{1\le i\le n+1} \qquad \text{et} \qquad C_{n+1,n}(z,x) = (c_{i,j}(z,x))_{1\le i\le n+1, 1\le j\le n}$$

sont des matrices dont les éléments sont $a_{i,j}(z,x) = x^{i-1}e^{xz} \to x^{i-1}$ et

$$c_{i,j}(z,x) = \begin{cases} 0, & i<j \\ \binom{i-1}{j-1}\int_1^e (\ln s)^{i-j}s^{z-1}ds, & i\ge j \end{cases} \to \begin{cases} 0, & i<j \\ \frac{1}{i-j+1}\binom{i-1}{j-1}, & i\ge j \end{cases}$$

comme $z \to 0$,respectivement. Cela implique par définition de la fonction génératrice que

$$\begin{aligned} B_n(x) &= \lim_{z\to 0}\left(\frac{ze^{xz}}{e^z-1}\right)^{(n)} = \lim_{z\to 0}\left(\frac{e^{xz}}{\int_1^e s^{z-1}ds}\right)^{(n)} \\ &= (-1)^n \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ x & \frac{1}{2}\binom{1}{0} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ x^2 & \frac{1}{3}\binom{2}{0} & \frac{1}{2}\binom{2}{1} & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ x^3 & \frac{1}{4}\binom{3}{0} & \frac{1}{3}\binom{3}{1} & \frac{1}{2}\binom{3}{2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x^{n-3} & \frac{1}{n-2}\binom{n-3}{0} & \frac{1}{n-3}\binom{n-3}{1} & \frac{1}{n-4}\binom{n-3}{2} & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ x^{n-2} & \frac{1}{n-1}\binom{n-2}{0} & \frac{1}{n-2}\binom{n-2}{1} & \frac{1}{n-3}\binom{n-2}{2} & \cdots & \frac{1}{2}\binom{n-2}{n-3} & 1 & 0 \\ x^{n-1} & \frac{1}{n}\binom{n-1}{0} & \frac{1}{n-1}\binom{n-1}{1} & \frac{1}{n-2}\binom{n-1}{2} & \cdots & \frac{1}{3}\binom{n-1}{n-3} & \frac{1}{2}\binom{n-1}{n-2} & 1 \\ x^n & \frac{1}{n+1}\binom{n}{0} & \frac{1}{n}\binom{n}{1} & \frac{1}{n-1}\binom{n}{2} & \cdots & \frac{1}{4}\binom{n}{n-3} & \frac{1}{3}\binom{n}{n-2} & \frac{1}{2}\binom{n}{n-1} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

L'équation déterminante (2.20) et ainsi prouvée. □

Chapitre 3

Formules explicites pour des polynômes et nombres de Bernoulli

3.1 Introduction

Au fil des ans, les nombres de Bernoulli B_n et les polynômes $B_n(x)$ se sont avérés être des objets mathématiques importants. Depuis qu'ils sont apparus sur la scènne (17ème siècle).

ils ont été d'intérêt pour de nombreux mathématiciens et ils sont apparus dans de nombreux domaines différents des mathématique (voir [27]) .

Les polynômes de Bernoulli sont généralement définis au moyen de la fonction génératrice

$$\frac{te^{xt}}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x)\frac{t^n}{n!}.$$

on peut aussi trouver des polynômes de Bernoulli définis par :

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_kx^{n-k}.$$

nous mentionnons la formule explicite

$$B_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i+1}\sum_{j=0}^{i}(-1)^j\binom{i}{j}(x+j)^n, \tag{3.1}$$

puisque c'est la formule connue pour les polynômes de Bernoulli qui sera utilisée dans cet article.

Un grand nombre de formules explicites pour les nombres de Bernoulli et les polynômes sont connue de nos jours nous renvoyons le lecture à l'article de Gould [17] et mentionnons, en particulier, la formule (3) de cet article, à savoir :

$$B_n=\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}(-1)^{i+j}\frac{\binom{n+1}{j}}{\binom{n}{i}}(i-j)^n. \tag{3.2}$$

3.2 Formules explicites des polynômes de Bernoulli

Lemme 35. *pour* $k \geq 0$ *on a :*

$$\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i+j}\frac{\binom{k+1}{j}}{\binom{k}{i}} = k+1. \tag{3.3}$$

Démonstration. [19]Observer que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i+j}\frac{\binom{k+1}{j}}{\binom{k}{i}} &= \sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{j}(-1)^{i}\frac{\binom{k+1}{k-j}}{\binom{k}{i+k-j}} \\
&= \sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{j}(-1)^{i}\frac{\binom{k+1}{j+1}}{\binom{k}{j-i}} \\
&= \sum_{j=0}^{k}(-1)^{j}\binom{k+1}{j+1}\sum_{i=0}^{j}(-1)^{i}\frac{1}{\binom{k}{i}}.
\end{aligned}$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i+j}\frac{\binom{k+1}{j}}{\binom{k}{i}} &= \sum_{j=0}^{k}(-1)^{j}\binom{k+1}{j+1}\frac{k+1}{k+2}\left(1+\frac{(-1)^{j}}{\binom{k+1}{j+1}}\right) \\
&= \frac{k+1}{k+2}\left(\sum_{j=0}^{k}(-1)^{j}\binom{k+1}{j+1}+k+1\right) \\
&= k+1.
\end{aligned}$$

□

Lemme 36. *pour* $2 \leq m \leq k$ *on a*

$$\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i+j}\frac{\binom{k+2}{j}}{\binom{k}{i}}(j-i-1)^{m} = 0. \tag{3.4}$$

Démonstration. [19]Nous écrivons le côté gauche de(3.4) comme :

$$\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i+j}\frac{\binom{k+2}{j}}{\binom{k}{i}}(j-i-1)^{m} = (-1)^{m}\sum_{i=0}^{k}(-1)^{i}(i+1)^{m}\sum_{j=i}^{k}\frac{\binom{k+2}{j-i}}{\binom{k}{j}}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i+j}\frac{\binom{k+2}{j}}{\binom{k}{i}}(j-i-1)^m && (3.5)\\
=\;& (-1)^m\sum_{i=0}^{k}(-1)^i(i+1)^m\frac{k+1}{i+1}\binom{k+1}{k-i}\\
=\;& (-1)^{m+k}(k+1)\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\frac{(k+1-i)^m}{k+1-i}\binom{k+1}{i}\\
=\;& (-1)^{m+k}(k+1)\sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}(-1)^i(k+1-i)^{m-1}\\
=\;& (-1)^{m+k}(k+1)\sum_{l=0}^{m-1}(-1)^l\binom{m-1}{l}(k+1)^{m-1-l}\sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}(-1)^i i^l.
\end{aligned}$$

l'identité (8) indique pour tous $0 \leq l \leq k$ on a :

$$\sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}(-1)^i i^l = 0. \tag{3.6}$$

en particulier, pour $0 \leq l \leq m-1$, l'identité (3.6) est valide, puis (3.5) est égale à 0, terminant la preuve de (3.4). □

Proposition 37. *pour $0 \leq n \leq k$ on a [19] :*

$$B_n(x) = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i+j}\frac{\binom{k+1}{j}}{\binom{k}{i}}(x-i+j-1)^n. \tag{3.7}$$

En utilisant la propriété connue des polynômes de Bernoulli

$$(-1)^n B_n(x) = B_n(1-x),$$

l'identité (3.7) peut être écrite comme suit :

$$B_n(x) = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i+j}\frac{\binom{k+1}{j}}{\binom{k}{i}}(x+i-j)^n, \tag{3.8}$$

et alors l'identité (3.2) est le cas particulier de (3.7) dans lequel $x = 0$ et $k = n$.
Dans l'esprit de l'article de Gould [17] , il est difficile revendiquer l'originalité pour (3.7) .

Cependant, selon certaines des conséquences non triviales de cette formule , qui ne sont pas largement connues, nous pensons qu'elle doit avoir un ingrédient d'originalité.

Démonstration. [19]dénotons le polynôme de droite dans (3.7) comme $B_n(x)$ C'est :

$$B_n(x) = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i+j}\frac{\binom{k+1}{j}}{\binom{k}{i}}(x-i+j-1)^n$$

La démonstration est basée sur la caractérisation suivante des polynômes de Bernoulli, le seul polynôme $B_n(x)$ tel que

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}, B_n(0) = B_n$$

est le n-ième polynôme de Bernoulli $B_n(x)$. on a $B_n(0) = B_n$. Ainsi, il faut prouver que le polynôme (3.7) satisfait à l'équation de différence

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}.$$

C'est à dire que nous devons prouver que :

$$\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i+j}\frac{\binom{k+1}{j}}{\binom{k}{i}}((x-i+j)^n-(x-i+j-1)^n) = nx^{n-1}.$$

Observer que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i+j}\frac{\binom{k+1}{j}}{\binom{k}{i}}((x-i+j)^n-(x-i+j-1)^n)\\
= &\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i+j}\frac{\binom{k+1}{j}}{\binom{k}{i}}((j-i)^{n-r}-(j-i-1)^{n-r})x^r\\
= &\; nx^{n-1} + \sum_{r=0}^{n-2}\binom{n}{r}\frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i+j}\frac{\binom{k+1}{j}}{\binom{k}{i}}((j-i)^{n-r}-(j-i-1)^{n-r})x^r
\end{aligned}$$

Ainsi, notre preuve se termine si nous montrons que pour
$0 \leq r \leq n-2$ on a :

$$\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i+j}\frac{\binom{k+1}{j}}{\binom{k}{i}}((j-i)^{n-r}-(j-i-1)^{n-r}) = 0. \tag{3.9}$$

Nous allons prouver que pour $2 \leq m \leq k$, nous avons l'identité

$$\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i+j}\frac{\binom{k+1}{j}}{\binom{k}{i}}(j-i)^m = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i+j}\frac{\binom{k+1}{j}}{\binom{k}{i}}(j-i-1)^m, \tag{3.10}$$

ce qui implique clairement que nous avons (3.9) pour $0 \leq r \leq n-2$,

et qui à son tour nous donne la fin souhaitée de la preuve nous peuvent écrire (3.10)

$$\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i+j+1}\frac{\binom{k+1}{j-1}}{\binom{k}{i}}(j-i-1)^m=\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i+j}\frac{\binom{k+1}{j}}{\binom{k}{i}}(j-i-1)^m, \tag{3.11}$$

et nous pouvons voir que (3.11) est équivalent à :

$$\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i+j}\frac{\binom{k+2}{j}}{\binom{k}{i}}(j-i-1)^m=0. \tag{3.12}$$

Mais dans Lemme 36 , nous avons prouvé que (3.12) est vrai pour $2 \leq m \leq k$, Alors notre preuve est complet. □

3.3 Formules explicites du n-ième polynômes de Bernoulli

La recherche de formules explicites exprimant les nombre de Bernoulli a intéréssé de nombreux auteurs. Ainsi , la formule suivante

$$B_n=(-1)^{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k(k+1)}\sum_{j=1}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}j^n, \qquad k\geq 1.$$

a été donnée en 1883 par Worpitzky ([15] ,formule (37)) dans lequel il donne 38 formules explicites. Cette même formule figure aussi dans l'article de Saalschutz ([16], Formule LXV,p.83) dans ce dernier article , on trouve aussi la formule suivante ([16], formule LXIII, p.82)

$$B_n=(-1)^{n+1}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k^2}\sum_{j=1}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}j^{n+1}, \quad n\geq 0.$$

Dans [17] , Gould rappelle la formule bien connue

$$B_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{k!}{k+1}S(n,k).$$

qui s'écrit aussi

$$B_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{k!}{k+1}\left(\frac{1}{k!}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}j^n\right)$$

où encore

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} j^n.$$

Théorème 38. *Avec les notations précédentes, on a :*

$$B_{n+1}(x) - B_{n+1} = (n+1) \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)!} \left(\sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-J} \binom{k}{j} j^n \right) (x(x-1)...(x-k)).$$

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)!} \left(\sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n \right) \frac{d}{dx}(x(x-1)...(x-k)).$$

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n \right) \frac{d}{dx} \left(\binom{x}{k+1} \right).$$

3.4 Formules explicites des nombres de Bernoulli

Lemme 39. *Les nombres $a_{n,k}$ satisfont à la formule de récurrence suivante :*

$$ka_{n,k} - (k+1)a_{n,k+1} = a_{n+1,k+1}. \tag{3.13}$$

Démonstration. nous calculons :

$$\begin{aligned}
ka_{n,k} - (k+1)a_{n,k+1} &= (-1)^n k \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{k-1}{j} (j+1)^n \\
&\quad -(-1)^n (k+1) \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (j+1)^n \\
&= (-1)^{n+1} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \left[(k+1)\binom{k}{j} - k\binom{k-1}{j} \right] (j+1)^n \\
&\quad +(-1)^{n+1}(k+1)(-1)^k \binom{k}{k} (k+1)^n \\
&= (-1)^{n+1} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (j+1)^{n+1} = a_{n+1,k+1}.
\end{aligned}$$

Notez que nous avons utilisé l'identité élémentaire (valide lorsque $0 \leq j \leq k-1$)

$$(k+1)\binom{k}{j} - k\binom{k-1}{j} = (j+1)\binom{k}{j}.$$

qui découle immédiatement de

$$(k-j)\binom{k}{j} = k\binom{k-1}{j}.$$

□

Remarque 40. *Il est facile de voir que* $a_{0,1} = 1$ *(plus généralement* $a_{n,1} = (-1)^n$ *pour* $n = 0, 1, 2, ...$*), et* $a_{0,k} = 0$ *pour* $k \geq 2$*. par induction par rapport à* n*, il s'ensuit en utilisant (*3.13)

$$a_{n,k} = 0 \quad lorsque \quad k \geq n+2.$$

Remarque 41. *par (*3.13) *et la Remarque 40 , nous avons* $a_{n,n+1} = na_{n-1,n}$ *, qui par induction donne* $a_{n,n+1} = n!$*.*

Les nombres $a_{n,k}$ *peuvent être utilisés dans la formule de la* n*-ième dérivée de la fonction* $f(x) = \frac{1}{(1+e^x)}$*.*

Théorème 42. *La* n*-ième dérivée de la fonction* $f(x) = \frac{1}{(1+e^x)}$ *peut être exprimée par la formule*

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} a_{n,k} \frac{1}{(1+e^x)^k}. \tag{3.14}$$

Démonstration. Nous procédons par induction en ce qui concerne n . pour $n = 1$, la formule est évidemment vraie puisque

$$f'(x) = -\frac{1}{1+e^x} + \frac{1}{(1+e^x)^2}.$$

Supposons que (3.14) soit valable pour un entier n. alors :

$$\begin{aligned} f^{n+1}(x) &= \sum_{k=1}^{n+1} a_{n,k} \left(\frac{1}{(1+e^x)^k}\right)' = \sum_{k=1}^{n+1} a_{n,k} \left(\frac{k}{(1+e^x)^{k+1}} - \frac{k}{(1+e^x)^k}\right) \\ &= a_{n,1}\frac{-1}{1+e^x} + \sum_{k=2}^{n+1}((k-1)a_{n,k-1} - ka_{n,k})\frac{1}{(1+e^x)^k} \\ &\quad +(n+1)a_{n,n+1}\frac{1}{(1+e^x)^{n+2}} \\ &= \sum_{k=1}^{n+2} a_{n+1,k}\frac{1}{(1+e^x)^k}. \end{aligned}$$

La dernière égalité est valable en raison de l'identité,
$a_{n+1,1} = (-1)^{n+1} = -a_{n,1}$,(3.13), et de la Remarque 41 .

Le nombre de Bernoulli B_n est le coefficient de de $\frac{x^n}{n!}$ dans le développement de Taylor de la fonction génératrice

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}. \tag{3.15}$$

puisque

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{e^x+1} = \frac{e^x+1-2}{e^{2x}-1} = \frac{1}{e^x-1} - \frac{2}{e^{2x}-1} \\ &= \frac{1}{x}\left(\frac{x}{e^x-1}\right) - \frac{1}{x}\left(\frac{2x}{e^{2x}-1}\right). \end{aligned}$$

nous déduisons de (3.15) que

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{e^x+1} = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!} - \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{2^n x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(B_n \frac{x^{n-1}}{n!} - B_n \frac{2^n x^{n-1}}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{n+1}(1-2^{n+1})}{(n+1)!} x^n. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Afin d'obtenir la formule (1) [18] , nous calculons de deux manières. il résulte du (3.16) :

$$f^{(n)}(0) = \frac{B_{n+1}(1-2^{n+1})}{n+1}. \tag{3.17}$$

alors que par (3.14) nous avons :

$$f^{(n)}(0) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_{n,k}}{2^k} = (-1)^n \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{k-1}{j} (j+1)^n. \tag{3.18}$$

En comparant les cotés droits de (3.17) et (3.18), nous arrivons immédiatement à la formule (1) , qui en termes de différences finie peut être écrit comme :

$$B_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{2^{n+1}-1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{2^k} \triangle^{k-1} g(x).$$

pour $g(x) = x^n$ et $x = 1$. $\square$

Conclusion

Dans ce travail, nous avons d'abord étudié les suites de polynômes d'Appell et quelques propriétés, et on a présenté quelques résultats théoriques sur les nombres de Bernoulli $B_n = B_n(0)$ et les polynômes de Bernoulli $(B_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, leurs utilités ,leurs propriétés et leur importance en mathématiques. En fin, nous avons étudié quelques formules explicites pour des polynômes, par exemple :

$$B_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1} \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{i}{j} (x+j)^n,$$

et nombres de Bernoulli, par exemple

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} j^n.$$

Bibliographie

[1] Abdelmoumène ZEKIRI, Propriétés Combinatoires de Suites polynomials Classiques, thèse de doctorat , (2015).

[2] B.C.CARLSON , Polynomials Satisfying a Binomial Theorem, Journal of Mathematics Analisis and Applications(1970), p.543-558.

[3] O.AGRATINI, Binomial polynomials and thier applications in approximation theory Babes-Bolyaï University.FMCS.Romania (2000).

[4] P.Appell, Sur une Classe de Polynômes , Ann.Sci.Ec.Norme.Super, 9(2)(1880), p.119-144.

[5] F.BENCHRIF, B.BENZAGHO, S.ZERROUKHAT, Une identité pour des polynômes d'Appell , Comptes Rendus MathématiqueDécembre 2017,p.1201-1204.

[6] RL.GRAHAM, DE.KNUTH, O.PATASHNIK, Mathématiques concrètes,Fondations pour l'Informatiques, International Thomson Publishing France (1998).

[7] F.Qi, RJ Chapman, Deux formes fermées pour les polynômes de Bernoulli, J.Théorie des nombres, 159(2016), p.89-100.

[8] Zh.-X. Wang and D.-R.Guo, Introduction to Special Function , the Series of Advanced phisics of peking University , peking University press, Beijing, Chinese (2000).

[9] André JOUYAL,Les nombres de Bernoulli,2003.

[10] Mustapha.CHELLALI, Accélération de calcul de nombres de Bernoulli,Université de Limoges, Département de Maths,87060 Limoges France Communicated by M.Waldschmidt, Received May 21,1987, p.347.

[11] Tom M.Apostol, Introduction to Analytic Number Theory, Springer-Verlag, New York (1976), p.264.

[12] Leonhard EULER. Methodus generalis summandi progressionnes . Commentarii academic scientiarum Petropolitanae, 1738 , p.68-97.

[13] Niels NIELSEN, Traité Elémentaire des nombres de Bernoulli, Gauthier-Villars, PARIS(1923), p.40-44.

[14] Gérand Sarrebourse de la Guillonniére, polynômes et nombres de Bernoulli (2014).

[15] Worpitzky J. Studien Uberdie Bernoullischen und Eulerschen Zahlen, J.Reine Angew. Math (1883),p.203-232.

[16] L.SAALSCHÜTZ, Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen, ihren zusammenhang mit den secanten-coefficienten und ihre wichtigeren anwendungen, Springer-Verlag Berlin (1893).

[17] H.W.GOULD, Explicit formulas for Bernoulli numbers, Amer.Monthy,79(1972),p. 44-51.

[18] Grzegorz.Rzadkowski, Ashort proof of the Explicit Formulas for Bernoulli Numbers, the American Mathematical Monthly (2004), p.432-434.

[19] T. KOMATSU and C. De J. PITA RUIZ V, *Several explicit formulae for Bernoulli polynomials*, Math. Cmmun. 21(2016), 127-140.

[20] Qi.Feng and Bai-Ni.Guo,Some Determinantal Expressions and Recurrence Relations of the Bernoulli Polynomials, Academic Editor. Hari M.Srivastara (2016).

[21] E. Lucas, Théorie des nombres, nouveau tirage, Librairie Scientifique et technique Albert Blanchard, Paris, 1958.

[22] Faulhaber, Johannes (1631). Academia Algebrae, darinnen die miraculosische Inventiones, zu den höchsten Cossen weiters continuirt und profitiert werden. Ulm,1631.

[23] Knuth, D. E. (1993), "Johann Faulhaber and the Sums of Powers", Mathematics of Computation (American Mathematical Society) 61 (203) : 277–294, arXiv :math/9207222).

[24] Askar Dzhumadil'daev and Damir Yeliussizov, "Power Sums of Binomial Coe¢ cients", Journal of Integer Sequences, Vol. 16 (2013), Article 13.1.4

[25] C. G. J. Jacobi, "De usu legitimo formulae summatoriae Maclaurinianae," Journal für die reine und angewandte Mathematik 12 (1834), 263–272.

[26] Emma Lehmer, On congruences involving Bernoulli numbers and the quotients of format and Wilson , Ann. of math. 39(1938), no.2,350-360.

[27] B.MAZUR, Bernoulli numbers and the unity of mathematics, manuscritpt, http :// people.math.harvard.edu /˜mazur / papers / slides.Bartlett.pdf.