



Faculté des Sciences et des Sciences Appliquées
Département du Mathématiques

Mémoire de Master

Filière : Mathématiques

Spécialité : Recherche Opérationnelle

Thème

Résolution d'un problème de contrôle optimal quadratique
par la méthode adaptée

Présenté par :

- *M^{elle}* Ouaker Khadidja
- *M^{me}* Ouaad Wahiba

Sotenu devant le jury composé de :

Président	<i>M^r</i>	Demmouche Nacer	MCB	U. A/M/O Bouira.
Encadreur	<i>M^{me}</i>	Ouidja Daya	MAA	U. A/M/O Bouira.
Examinateur	<i>M^r</i>	Hamid Karim	MAA	U. A/M/O Bouira.

Promotion 2019/2020

Remerciements

*Nos remerciements vont tout premièrement à **Allah** le tout puissant pour la volonté, la santé et la patience qu'il nous a donné pour terminer ce travail.*

Nous remercions notre promoteur M.DAYA OUIDJA pour avoir accepté de diriger ce travail ainsi que pour ses conseils avec beaucoup de patience et d'encouragements.

*Nous exprimons nos remerciements aux membres du jury qui ont accepté de juger notre travail, en l'occurrence Monsieur **DEMMOUCHE NACER** de présider le jury de soutenance et Monsieur **HAMID KARIM** d'examiner ce travail.*

Nos sincères remerciements s'adressent enfin à tous ceux qui nous ont soutenu de près ou de loin.

Mecri à Tous

Dédicace

*Je dédie ce modeste travail :
A mes très chers parents qui ont toujours été là pour moi, et qui m'ont donné
un magnifique modèle de labeur et de persévérance*

*Mon frère **NABIL***

*Mes soeurs **Amel, Linda***

*Mon mari **SOUFIANE** et sa famille*

*Mon fils **LOAYE***

A tout ma famille ainsi qu'à mes amis et collègues de près ou du loin

*A mon binôme **KHADIDJA OUAKER** et sa famille*

wahiba

Dédicace

Je dédie ce modest travail :

A mes parents pour leurs amours, leurs confiance, leurs soutien et leurs sacrifices.

*A mes chères frères **Mohamed Amir** et mon petit **Oussama Youness**, ainsi qu'à mes chères soeurs jumelles **Meriem et Hanane**, pour leurs complicités et leurs présence depuis tous le temps.*

A tout ma famille ainsi qu'à mes amies, pour les instants inoubliable que j'ai passé avec elles.

*A mes chères amies **Marwa Yousef, Khadidja Laamouri, Latifa, Safia, chahira et Cherifa** :*

A tous ceux qui me sont chères.

*A mon binôme **Wahiba Ouaad** et sa famille.*

Khadidja

Table des matières

Introduction Générale	2
1 Introduction à la programmation quadratique	4
1.1 Introduction	4
1.2 Programmation quadratiques	4
1.2.1 Représentation d'une forme quadratique	4
1.2.2 Représentation matricielle d'une forme quadratique	5
1.2.3 Gradient d'une forme quadratique	6
1.3 La programmation quadratique sans contraintes	8
1.4 La Programmation quadratique avec contraintes	9
1.5 Convexité	9
1.5.1 Les ensembles convexes	10
1.5.2 Propriétés des ensembles convexes	10
1.5.3 Propriétés des fonctions convexes	11
1.5.4 Critère de Sylvester pour les formes quadratiques définies et semi-définies	12
1.6 Méthodes de résolution des problèmes quadratiques	13
1.6.1 Méthode d'activation des contraintes	13
1.6.2 Méthodes des points intérieurs	14
1.6.3 Méthode directe de support	14
2 Résolution d'un problème de programmation quadratique par la méthode adaptée	15
2.1 Introduction	15
2.2 Position de problème	15
2.3 Définitions	16
2.3.1 Solution (ou plan) réalisable	16
2.3.2 Plan optimal	16
2.3.3 Plan suboptimal	16
2.3.4 Support	17
2.3.5 Plan de support	17
2.3.6 Plan de support non dégénéré	17
2.4 Formule d'accroissement de la fonction objectif	17
2.5 Critère d'optimalité	19
2.6 Critère de suboptimalité	21
2.7 Méthode de résolution	22
2.7.1 Changement de plan	24
2.7.2 Estimation de suboptimalité	25
2.7.3 Changement de support	26
2.7.4 Algorithme de la méthode	27
2.8 Exemple Numérique	28

3	Résolution d'un problème de contrôle optimal linéaire par la méthode adaptée	32
3.1	Introduction	32
3.2	Position du problème	32
3.3	Commandabilité des systèmes linéaires autonome :	33
3.3.1	Le critère de Kalman	34
3.4	Support de contrôle	36
3.5	Accroissement de la fonctionnelle	37
3.6	La valeur de suboptimalité	38
3.7	Critère d'optimalité	39
3.7.1	Principe du Suboptimalité	40
3.7.2	Détermination d'un support-contrôle de départ	43
3.8	Méthode de résolution	43
3.8.1	Changement de contrôle	44
3.8.2	Changement du support	45
3.8.3	Procédure finale	47
3.9	Conclusion :	49
4	Résolution d'un problème de contrôle optimal quadratique par la méthode adaptée	50
4.1	Introduction	50
4.2	Position de problème	50
4.3	Support de contrôle	52
4.4	Accroissement de la fonctionnelle	53
4.5	Critère d'optimalité	55
4.5.1	Principe du maximum	55
4.5.2	Principe du Suboptimalité	56
4.6	Méthode de résolution	59
4.6.1	Changement de contrôle	59
4.6.2	Changement du support	61
4.6.3	Procédure finale	63
4.7	Shéma de l'algorithme	65
4.8	Exemple d'application	69
	Conclusion	75
	Annexe	75
	A Algorithme de la méthode adaptée d'un PPL	76
	Bibliographie	78

Résumé

Ce travail est consacré à la résolution d'un problème de contrôle optimal et ce en utilisant la méthode adaptée.

La particularité de cette méthode est qu'elle utilise un critère de suboptimalité qui nous permet d'arrêter l'algorithme avec une précision souhaitée pour trouver des solutions dites ε -optimale. Ceci nous permet de trouver les points efficaces et ε -efficace, et ce en exploitant le critère de suboptimalité de la méthode adaptée de programmation quadratique.

L'algorithme de cette méthode à été programmé et ses étapes sont présentées dans l'annexe, constituant ainsi une bibliothèque que utilisable pour résoudre d'autre programme.

Mots-clés : Systèmes dynamiques linéaires, Contrôle optimal, Méthode adaptée de programmation quadratique, Etat initial fixe.

Abstract

This work is devoted to solving an optimal control problem using the adaptive method.

The particularity of this method is that it uses a suboptimality criterion which allows us to stop the algorithm with a desired precision to find so-called ε -optimal solutions. That allows us to find the efficient and ε -efficient points, and this by exploiting the suboptimality criterion of the adapted quadratic programming method.

The algorithm for this method has been programmed and its steps are presented in the appendix, thus constituting a library that can be used to solve other programs.

Keywords : Linear Dynamic Systems, Optimal Control, Adaptive Method of Convex Quadratic Programming, Fixed Initial State.

Introduction Générale

La théorie du contrôle étudie les propriétés des systèmes commandés (ou contrôlés), c'est à dire, des systèmes dynamiques dépendant d'une variable t qui représente le plus souvent le temps, sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (ou contrôle).

Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final, en respectant éventuellement certaines critères.

La modélisation du problème du contrôle optimal est obtenue par divers outils mathématiques : équations différentielles, équations aux dérivées partielles, équations discrètes, équations intégrales, équations stochastiques, etc.

En général les problèmes du contrôle optimal n'admettent pas de solution analytique (i.e. par ce principe), car la modélisation mathématique d'un phénomène pratique conduit très souvent à un modèle non-linéaire, non-convexe.

Les méthodes numériques de résolution des problèmes d'extremum ont pris ces dernières années un très grand essor. Cet intérêt reflète le rôle de premier plan occupé par ces problèmes dans les différentes applications pratiques.

Le terme "programmation quadratique" est attribué au problème de minimisation (ou de maximisation) d'une fonction objectif quadratique assujéti qui contient en plus les termes x_j^2 et $x_j x_k (j \neq k)$. La programmation quadratique convexe est ainsi considérée comme une transition naturelle de linéaire vers la programmation non linéaire. On trouve la programmation quadratique dans plusieurs cas pratiques comme, régression, gestion de production, gestion de portefeuille, et la variance minimum.

Dans [13], les auteurs développent la méthode directe de support qui est une généralisation de la méthode de simplexe. Cette méthode démarre d'une solution réalisable initiale et d'un support initial (base initiale), elle passe d'un point intérieur ou extrême à un autre point meilleur jusqu'à ce qu'un point extrême optimal soit atteint. Plus tard, ces mêmes auteurs développent la méthode adaptée pour la résolution des problèmes de contrôle optimale, puis elle est étendue pour la résolution des problèmes linéaires et quadratiques sous forme générale.

La méthode adaptée [15] est habituellement utilisée pour résoudre des programmes linéaires ou des programmes quadratiques convexes avec des variables

bornées.

En outre la méthode intègre un critère de suboptimalité qui permet d'arrêter l'algorithme avec une précision souhaitée pour trouver des solutions ε -optimales ce critère pourrait être utile des applications pratiques.

Du point de vue Mathématique, un système de contrôle est un système dynamique dépendant d'un paramètre appelé le contrôle. Pour le modéliser, on peut avoir recours à des équations différentielles. Pour cette raison la théorie du contrôle est à l'intersection de nombreux domaines de mathématiques. Le contrôle optimal linéaire-quadratique est une branche du contrôle optimal dans le cas où le système est linéaire et le coût est quadratique. L'initiateur de cette théorie est Kalman depuis 1960. Le problème de commande linéaire-quadratique a pris de l'importance dans le cadre de filtrage, où la commande LQ possède de très bonnes propriétés de robustesse.

L'objet de notre mémoire porte sur la résolution d'un problème de contrôle optimal quadratique. Le premier chapitre sera consacré à la présentation à la forme quadratique, la programmation quadratique sans contraintes et avec contraintes, un peu de rappels sur la convexité et les méthodes de résolution

Dans le second chapitre, on s'intéresse plus particulièrement à la résolution d'un problème de PQ par la méthode adaptée; nous avons procédé à la position de problème, ainsi que la Formule d'accroissement de la fonctionnelle et la méthode de résolution.

Dans le troisième chapitre intitulé résolution d'un problème terminal de contrôle optimal d'un système dynamique linéaire, on s'est intéressé à résoudre un système par la méthode directe appelée la méthode adaptée. Elle est constituée de trois procédures le changement de support, le changement de commande et la procédure finale.

Enfin le chapitre quatre est consacré à une résolution d'un problème de contrôle optimal quadratique par la méthode adaptée.

Chapitre 1

Introduction à la programmation quadratique

1.1 Introduction

En optimisation mathématique, un problème d'optimisation quadratique est un problème d'optimisation dans lequel on minimise (ou maximise) une fonction quadratique.

Dans ce chapitre, nous parlerons sur la programmation quadratique (définitions, formules, convexité, méthodes de résolutions).

1.2 Programmation quadratiques

L'optimisation quadratique est l'une des théories de la programmation mathématique la plus utilisée pour modéliser des problèmes pratiques. Cette branche est très importante d'un point de vue pratique que théorique, de nombreux domaines d'application ont été touchés par cette théorie, notamment l'économie, les sciences de l'ingénieur, la physique, ...etc.

1.2.1 Représentation d'une forme quadratique

Définition 1.1. Une forme quadratique de dimension n est une fonction réelle de n variables x_1, x_2, \dots, x_n ayant la forme suivante :

$$F(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j. \quad (1.1)$$

Définition 1.2. (**Forme quadratique définie positive**)

$F(x)$ est dite définie positive si $x^T D x > 0, \forall x \in R^n$ et $x \neq 0$.
On dit que D est définie positive et se note $D > 0$.

Définition 1.3. (**Forme quadratique semi-définie positive**)

$F(x)$ est dite semi-définie positive si $x^T D x \geq 0, \forall x \in R^n$ et $\exists x_0 \neq 0$
tel que $x_0^T D x_0 = 0$.
On dit que D est *semi*-définie positive et se note $D \geq 0$

Définition 1.4. (**Forme quadratique définie négative**)

$F(x)$ est dite définie négative si $x^T D x < 0, \forall x \in R^n$ et $x \neq 0$.
On dit que D est définie négative et se note $D < 0$.

Définition 1.5. (**Forme quadratique semi-définie négative**)

$F(x)$ est dite *semi*- définie négative si $x^T D x \leq 0, \forall x \in R^n$ et $x \neq 0$
On dit que D est *semi*-définie négative et se note $D \leq 0$.

Définition 1.6. (**Forme quadratique non définie**)

Une forme quadratique $F(x)$ est dite non définie si elle est positive pour certaines valeurs de x et négative pour d'autres

1.2.2 Représentation matricielle d'une forme quadratique

Soient $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $A = (a_{ij}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n)$. Pour $n = 3$ et d'après la formule (1.1) on a :

$$F(x) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_i x_j$$

$$\begin{aligned}
F(x) &= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 \\
&+ a_{23}x_2x_3 + a_{31}x_3x_1 + a_{32}x_3x_2 + a_{33}x_3^2 \\
&= x_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + x_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3) \\
&+ x_3(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3) \\
&= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = x^t Ax
\end{aligned}$$

la forme (1.1) peut encore s'écrire comme suit :

$$F(x) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + x_1x_2(a_{12} + a_{21}) + x_1x_3(a_{13} + a_{31}) + x_3x_2(a_{32} + a_{23})$$

En posant $d_{ij} = d_{ji} = (a_{ij} + a_{ji}) \setminus 2, \forall i, j \in 1, \dots, n$ on remarque que pour $i \neq j$ le coefficient devant le produit $x_i x_j$ est égale à $(a_{ij} + a_{ji})$ on aura alors :

$$F(x) = x^T Ax = x^T Dx$$

où $D = d_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$ est une matrice symétrique.

1.2.3 Gradient d'une forme quadratique

Définition 1.7. Soit $F : R^n \rightarrow R$ une fonction réelle continument différentiable. Son gradient au point x est défini par :

$$\nabla F(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial F}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Soit F une forme quadratique et D sa matrice symétrique associée :

$$F(x) = x^T Dx. \quad (1.3)$$

En écrivant la matrice D sous forme de vecteurs colonnes $D = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ l'expression (1.3) peut se mettre sous la forme suivante :

$$F(x) = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n) \begin{pmatrix} d_1^T x \\ d_2^T x \\ \cdot \\ \cdot \\ d_j^T x \\ \cdot \\ \cdot \\ d_n^T x \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n x_j d_j^T x$$

La dérivée partielle de F par rapport à chaque variable x_j est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_j} &= x_1 d_{1j} + \dots + x_j d_{(j-1)(j)} + d_j^T x + x_j d_{jj} + \dots + x_n d_{nj} \\ &= x_1 d_{1j} + \dots + x_{j-1} d_{(j-1)(j)} + x_j d_{jj} + \dots + x_n d_{nj} + d_j^T x \\ &= 2d_j^T x. \end{aligned}$$

Par conséquent, le gradient de $F(x)$ est :

$$\nabla F(x) = 2Dx$$

Définition 1.8. Soit une fonction réelle de classe C_2 , $F : R^n \rightarrow R$.

Le Hessien de la fonction F est défini par :

$$\nabla^2 F(x) = \left(\nabla \frac{\partial F}{\partial x_1}, \nabla \frac{\partial F}{\partial x_2}, \dots, \nabla \frac{\partial F}{\partial x_j}, \dots, \nabla \frac{\partial F}{\partial x_n} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial^2 x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial^2 x_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial^2 F}{\partial^2 x_n} \end{pmatrix}$$

Définition 1.9. Soit $F : R^n \rightarrow R$ une fonction de classe C_1 .

La dérivée directionnelle de F dans la direction d au point x est :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial d} &= t \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(x + td) - F(x)}{t} \\ &= \frac{\partial F(x + td)}{\partial x_1} \Big|_{t=0} d_1 + \dots + \frac{\partial F(x + td)}{\partial x_n} \Big|_{t=0} d_n \\ &= \nabla F(x)^T d \end{aligned}$$

1.3 La programmation quadratique sans contraintes

Un problème de programmation quadratique sans contraintes peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\min f(x) = \frac{1}{2}x^T D x + c^T x \quad x \in R^n \quad (1.4)$$

où D est une matrice carrée symétrique d'ordre n , c est un vecteur de R^n et $x \in R^n$ est le vecteur inconnu à déterminer. Il s'agit donc de déterminer un point x^* de R^n tel que :

$$\forall x \in R^n : f(x^*) \leq f(x) \quad (1.5)$$

c'est-à-dire un minimum global de f sur R^n . Une condition suffisante pour l'existence de $x^* \in R^n$ vérifiant (1.5) est que f soit continue (ou, plus généralement semi-continue inférieurement) et possède la propriété de croissance à l'infini : $f(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $\|x\| \rightarrow +\infty$. Lorsque l'inégalité stricte : $f(x^*) < f(x)$ est vérifiée $\forall x \in R^n, x \neq x^*$, le minimum x^* est global et unique, mais éventuellement l'unicité n'est pas toujours garantie. Pour beaucoup de problèmes d'optimisation sans contraintes, en l'absence de propriétés particulières, telles que la convexité ou la quasi-convexité, les principales méthodes connues ne permettent pas la détermination d'un minimum global : il faut alors se contenter d'un optimum local, c'est-à-dire le point qui vérifie (1.5) seulement dans un voisinage de x^* . Dans ce qui suit, nous discuterons successivement les conditions d'optimalité puis les principales méthodes numériques (algorithmes) pour la résolution de problèmes d'optimisation quadratique sans contraintes.

Pour démontrer quelques propriétés nous avons besoin de la définition et quelques propriétés des matrices semi-définies et définies positives :

Définition 1.10. Une matrice $X \in S^n$ (l'espace des matrices symétriques réelles carrées d'ordre n) est dite semi-définie positive (resp. définie positive), notée $X \succcurlyeq O$ (resp. $X \succ O$), si et seulement si $u^T X u \geq 0, \forall u \in R^n$ (resp. $u^T X u > 0, \forall u \in R^n$) où O désigne la matrice nulle de type $n \times n$.

On note l'ensemble des matrices semi-définies positives (resp. définies positives) par S_n^+ (resp. S_n^{++}). Nous avons la relation d'inclusion suivante :

$$S_n^{++} \subset S_n^+ \subset S_n \subset M_n$$

où M_n est l'espace des matrices carrées réelles d'ordre n .

Proposition 1. $X \in S_n^+$ (resp S_n^{++}) si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- les valeurs propres de X sont toutes positives ou nulles (resp sont strictement positives).
- $u^T X u \geq 0, \forall u \in R^n$, (resp $u^T X u > 0, \forall u \neq 0$).
- Les déterminants de tous les mineurs symétriques de X sont positifs ou nuls (resp strictement positifs).

1.4 La Programmation quadratique avec contraintes

Un problème de programmation quadratique sous contraintes linéaires s'écrit sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min f(x) = \frac{1}{2}x^T D x + c^T x \\ s.c \\ a_i x = b_i, i \in L \\ a_i x \leq b_i, i \in I \end{array} \right. \quad (1.6)$$

où D est une matrice symétrique d'ordre n , c est un vecteur de R^n , $a_i \in R^n$ et $b_i \in R^n \quad \forall i \in L \cup I$ où $L = \{1, \dots, m\}$ et $I = \{m + 1, \dots, m + p\}$. Si D est une matrice semi-définie positive (resp. définie positive), le problème (1.6) est convexe (resp. strictement convexe), et nous montrons dans ce cas que la solution optimale, si elle existe, est globale(resp. globale et unique).

1.5 Convexité

La convexité est à la base une propriété géométrique assez intuitive d'ailleurs qui permet de caractériser certains objets. on voit assez bien ce qu'est un objet convexe dans un espace à deux ou trois dimensions nous allons maintenant montrer

comment cette propriété peut aussi s'appliquer aux fonctions de R^n dans R .

1.5.1 Les ensembles convexes

Définition 1.11. un ensemble $C \subset R^n$ est dit convexe si pour tout couple $(x, y) \in C^2$ et $\lambda \in [0, 1]$, on a[5] :

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$$

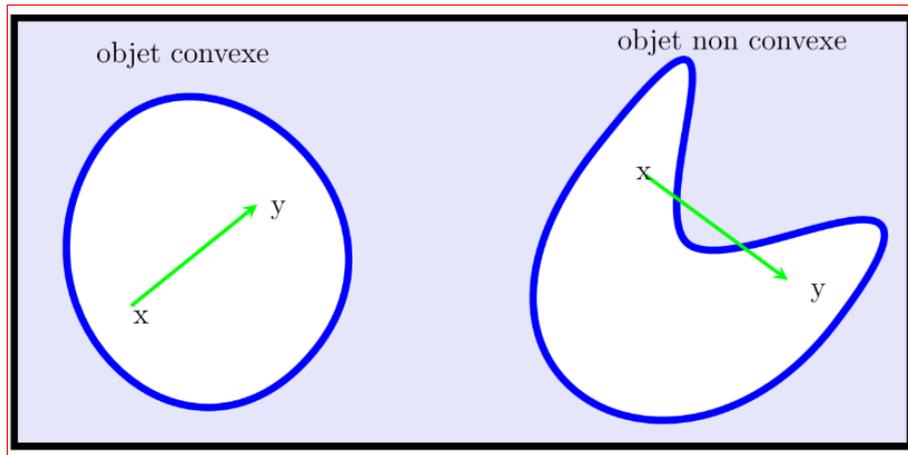


FIGURE 1.1 – Ensemble convexe et non convexe

Géométriquement Cette notion s'interprète comme suite : pour tout segment reliant deux points quelconques x et y de C , le segment $[x, y]$ doit être aussi dans C . [5]

1.5.2 Propriétés des ensembles convexes

Propriété. 1.1

Soit une famille $\{C_i\}_{i=1,\dots,k}$ d'ensembles convexes, alors on a :

- $C = \bigcap_{i=1}^k C_i$ est un ensemble convexe.
- $C = \prod_{i=1}^k C_i$ est un ensemble convexe

Propriété. 1.2

Soient C_1 et C_2 sont deux ensembles convexes de R^n , alors l'ensemble $K = C_1 \cap C_2$ est convexe.

Propriété. 1.3

Si C est convexe, et $\lambda \in R$, alors l'ensemble $\{K = x | x = \lambda x_1, x_1 \in C\}$ est convexe.

Définition 1.12. Une fonction réelle F définie sur un ensemble convexe C de \mathbb{R}^n , est dite convexe, si pour tous les points $x, y \in C$, et pour tout nombre réel positif ou nul λ tel que $0 \leq \lambda \leq 1$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$F(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda F(x) + (1 - \lambda)F(y) \quad (1.7)$$

Définition 1.13. Une fonction convexe $F(x), x \in C$, est dite strictement convexe si l'inégalité (1.6) est stricte pour tous les points $x, y \in C$, avec $x \neq y$ et $\lambda \in [0, 1]$

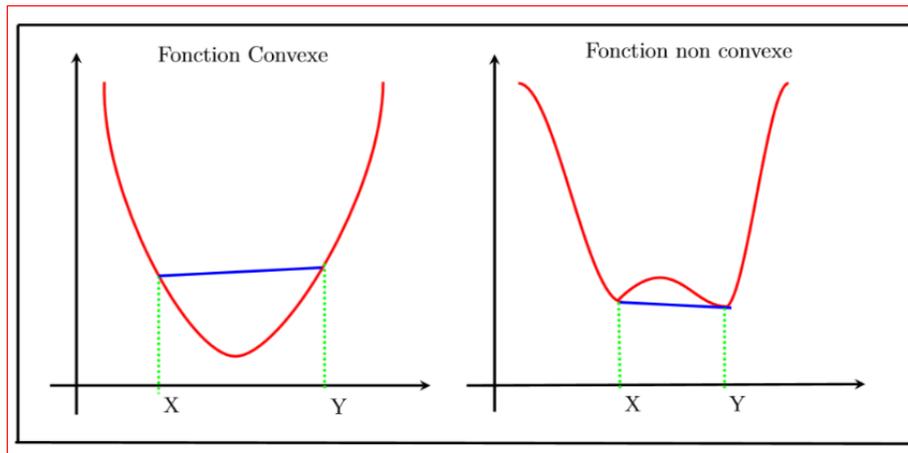


FIGURE 1.2 – Ensemble convexe et non convexe

1.5.3 Propriétés des fonctions convexes

Propriété. 1.4 Soit F une fonction réelle définie sur un ensemble convexe $C \subset \mathbb{R}^n$. Alors F est convexe si et seulement si son épigraphe : $\text{epi}(F) = \{(x, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : x \in C, F(x) \leq r\}$ est un ensemble convexe.

Propriété. 1.5 [24] Si F est continument différentiable, les conditions (a) et (b) ci-dessous sont équivalentes ; de plus, les conditions (a), (b) et (c) ci-dessous sont équivalentes si F est deux fois continument différentiable :

- a) F est convexe
- b) $\forall x \in C, \forall y \in C : F(y) - F(x) \geq [\nabla F(x)]^T(y - x)$;
- c) $\forall x \in C$, le Hessien $\nabla^2 F(x)$ est une matrice semi-définie positive.

Propriété. 1.6 Soit F une fonction réelle définie sur un ensemble convexe $C \subset \mathbb{R}^n$, alors F est convexe si et seulement si

$$F\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i s_i\right) \leq \sum_{i=1}^p \lambda_i F(s_i)$$

où $s_i \in C, i = 1 \dots p, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$.

Propriété. 1.7 [21] Soit une fonction réelle de classe C^1 , définie sur un ensemble convexe $C \in R^n$.

Alors f est convexe si et seulement si

$$f(y) - f(x) \geq (y - x)^T \nabla f(x), \forall x, y \in C.$$

Propriété. 1.8 Soit une fonction réelle de classe C^2 , définie sur un ensemble convexe $C \in R^n$. Alors f est convexe si et seulement si

$$(y - x)^T H(x)(y - x) \geq 0, \forall x, y \in C.$$

Propriété. 1.9 [21] Si $C \subset R^n$ est un ouvert convexe, alors F est convexe si et seulement si

$$H(x) \geq 0, \forall x \in C.$$

Alors d'après ce théorème, on déduit facilement qu'une fonction quadratique $F(x) = x^T D x + c^T x$ est convexe si et seulement si sa matrice associée D est semi-définie positive.

1.5.4 Critère de Sylvester pour les formes quadratiques définies et semi-définies

L'intérêt du critère du Sylvester est de caractériser une forme quadratique définie ou *semi*-définie. Pour cela, considérons la matrice symétrique suivante :

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & d_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & d_{nn} \end{pmatrix}$$

Le mineur de la matrice D , formé des lignes i_1, i_2, \dots, i_P et les colonnes j_1, j_2, \dots, j_P , sera noté comme suit :

$$D \begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots, i_P \\ j_1, j_2, \dots, j_P \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} d_{i_1 j_1} & d_{i_1 j_2} & \cdot & \cdot & \cdot & d_{i_1 j_P} \\ d_{i_2 j_1} & d_{i_2 j_2} & \cdot & \cdot & \cdot & d_{i_2 j_P} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d_{i_P j_1} & d_{i_P j_2} & \cdot & \cdot & \cdot & d_{i_P j_P} \end{vmatrix}$$

Ce mineur est dit principal si $i_1 = j_1, i_2 = j_2, \dots, i_p = j_p$, c'est-à-dire s'il est formé de lignes et de colonnes portant les mêmes numéros. Les mineurs suivants

$$D_1 = d_{11}, D_2 = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{vmatrix}, \dots, D_n = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{vmatrix}$$

sont appelés mineurs principaux successifs. Alors, le critère de Sylvester se formulé comme suit :

Théorème 1.1. (critère de Sylvester) [27]

— Pour qu'une matrice symétrique D soit définie positive ($D > 0$) il est nécessaire et suffisant que tous ses mineurs principaux successifs soient positifs :

$$D_1 > 0, D_2 > 0, \dots, D_n > 0,$$

— Pour que la matrice D soit semi-définie positive ($D \geq 0$), il est nécessaire et suffisant que tous ses mineurs principaux soient non négatifs :

$$D \begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots, i_p \\ i_1, i_2, \dots, i_p \end{pmatrix} \geq 0, 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n, p = 1, 2, \dots, n$$

1.6 Méthodes de résolution des problèmes quadratiques

Plusieurs méthodes ont été développées pour la résolution de ce type de problèmes, parmi lesquelles on peut citer : [4]

1.6.1 Méthode d'activation des contraintes

C'est une méthode classique, développée au début des années soixante-dix pour la résolution des problèmes de programmation linéaire et quadratique.

Elle s'applique pour des problèmes d'optimisation avec des contraintes linéaires de type inégalités ou mixtes (égalités et inégalités).

La première méthode est mise au point par Fletcher en 1971 [11]; par la suite d'autres auteurs ont fait des raffinements numériques à cette dernière tels que Gill et Murray en 1978 [18] ainsi que Gould en 1991 [20]. Goldfarb et Idnani en 1983 ont développé la méthode duale pour le cas des programmes quadratiques strictement convexes, tandis que Boland [8] l'a généralisée en 1997 pour le cas convexe. Le principe général de la méthode consiste à écarter temporairement un certain nombre de contraintes d'inégalités et de résoudre à chaque itération un problème avec uniquement des contraintes d'égalités, correspondant aux contraintes actives. Par la suite, l'ensemble des indices actifs est ajusté en ajoutant ou/et en supprimant une contrainte à la fois jusqu'à l'obtention de la solution optimale.

1.6.2 Méthodes des points intérieurs

Les méthodes des points intérieurs sont apparues dans les années cinquante, notamment dans le livre de Fiacco et McCormick [10]. C'est dans ce livre que le terme de points intérieurs sera introduit. Les itérés générés par ces méthodes sont strictement réalisables : ils restent à l'intérieur du domaine réalisable, d'où le nom donné à ces méthodes.

Les méthodes de points intérieurs forment une classe d'algorithmes qui permettent de résoudre des problèmes d'optimisation mathématique.

Elle sont l'intérêt d'être polynomiales lorsqu'on les applique aux problèmes d'optimisation linéaire, quadratique convexe, semi-définie positive ; et plus généralement aux problèmes d'optimisation convexe, pourvu que l'on dispose d'une barrière auto-concordante représentant l'ensemble admissible, calculable en temps polynomial (ce n'est pas toujours le cas, car certains problèmes d'optimisation convexe sont NP-difficiles). Les méthodes de points intérieurs se répartissent en plusieurs familles :

- Les méthodes ” *affine scaling* ” (optimisation sur des ellipsoïdes)
- Les méthodes de ” *réduction du potentiel* ” (notion de barrière, chemin central, relaxation).

L'intérêt pour ces méthodes principalement développées depuis les années 60[10], a connu un renouveau pour les problèmes non linéaires et a ouvert un nouveau domaine pour les problèmes linéaires. La distinction entre la programmation linéaire et non linéaire n'était plus aussi nette. Den Hertog (1994) a classé les méthodes de points intérieurs en quatre catégories :

- Méthodes de chemin central
- Méthodes affines et mise à l'échelle.
- Méthodes projectives avec potentiel
- Méthodes affines avec potentiel

1.6.3 Méthode directe de support

Cette méthode est basée sur le principe des méthodes adaptées développées par les professeurs R. Gabassov et F.M. Kirillova [16] [12], Ces méthodes sont intermédiaires entre les méthodes d'activation des contraintes et celles de points intérieurs .

Chapitre 2

Résolution d'un problème de programmation quadratique par la méthode adaptée

2.1 Introduction

La méthode de simplexe quadratique de Wolfe est la plus classique pour la résolution d'un problème quadratique convexe. Dans ce chapitre, on applique la méthode de R.Gabassov et F.M.Kirillova ([21][22]) appelée méthode adaptée, pour la construction d'un algorithme de résolution d'un problème de programmation quadratique convexe, donné sous forme standard.

Cette méthode a été développée durant les années 80 par R. Gabassov, F.M. Kirillova, O.I. Kostyukova et V.M. Raketky [14], ainsi que celui de A.Faradji [13], qui portent sur la minimisation d'un problème de programmation quadratique convexe à variables bornées.

Cette méthode tient compte des spécificités du problème et de ce fait, elle traite les contraintes telles qu'elles se présentent, c'est-à-dire, sans chercher à les modifier. Cela évite d'agrandir les dimensions du problème et permet donc d'économiser l'espace mémoire sur ordinateur. En outre, cette méthode présente l'avantage d'arrêter l'algorithme dès qu'une solution suboptimale est obtenue. Sa particularité est le fait de changer tous les indices non optimaux à la fois.

2.2 Position de problème

le problème que nous allons résoudre se présente sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \text{Min}Z(x) = \frac{1}{2}x^T D x + c^T x, \\ Ax = b, \\ d_1 \leq x \leq d_2. \end{cases} \quad (2.1)$$

où :

- D : matrice carrée d'ordre n , symétrique et semi-définie positive,
- A : matrice d'ordre $m \times n$, avec $\text{rang}(A) = m < n$,
- c, d_1, d_2, x : vecteurs de R^n ,
- b : vecteur de R^m .

Les ensembles d'indices des lignes et colonnes de A sont respectivement notés par :

$I = \{1, 2, \dots, m\}$, $J = \{1, 2, \dots, n\} = J_B \cup J_H$ avec $J_B \cap J_H = \emptyset$, $|J_B| = |I| = m$.

On peut alors écrire et fractionner les vecteurs et la matrice A de la manière suivante :

$$x = x(J) = \begin{pmatrix} x_B \\ x_H \end{pmatrix}, \quad x_B = x(J_B), \quad x_H = x(J_H),$$

$$c = c(J) = \begin{pmatrix} c_B \\ c_H \end{pmatrix}, \quad c_B = c(J_B), \quad c_H = c(J_H),$$

$$b = b(I) = (b_i, i \in I),$$

$$A = A(I, J) = (a_{ij}, i \in I, j \in J) \quad , \quad A = (a_j, j \in J),$$

$$A = A(A_B|A_H), \quad A_B = A = A(I, J_B), \quad A_H = A = A(I, J_H)$$

2.3 Définitions

2.3.1 Solution (ou plan) réalisable

Un vecteur x vérifiant les contraintes du problème (2.1) est appelé "plan" ou "solution réalisable" du problème (2.1).

2.3.2 Plan optimal

Un plan x^* est dit optimal si

$$Z(x^*) = \frac{1}{2}(x^*)^T D x^* + c^T x^* = \min \frac{1}{2} x^T D x + c^T x,$$

où x est pris parmi tous les vecteurs vérifiant les contraintes du problème (2.1)

2.3.3 Plan suboptimal

Un plan x^ε est appelé " ε - optimal" ou "suboptimal" si :

$$Z(x^\varepsilon) - Z(x^*) = \frac{1}{2}(x^\varepsilon)^T D x^\varepsilon + c^T x^\varepsilon - \frac{1}{2}(x^*)^T D x^* - c^T x^* \leq \varepsilon$$

où ε est un nombre arbitraire positif ou nul, donné à l'avance et x^* est une solution du problème (2.1)

2.3.4 Support

L'ensemble $J_B \in J$ avec $|J_B| = m$, est appelé "support des contraintes" du problème(2.1) si

$$\det A_B \neq 0$$

2.3.5 Plan de support

Le couple $\{x, J_B\}$ formé d'une solution réalisable x et du support J_B , est appelé "Plan de support" des contraintes.

2.3.6 Plan de support non dégénéré

Le plan de support est dit non dégénéré si :

$$d_{1j} < x_j < d_{2j}, \text{ pour tout } j \in J_B.$$

2.4 Formule d'accroissement de la fonction objectif

[22]

Soit $\{x, J_B\}$ un plan de support des contraintes du problème (2.1) et considérons un autre plan quelconque $\bar{x} = x + \Delta x$.

L'accroissement de la fonction objectif s'écrit alors :

$$\begin{aligned} Z(\bar{x}) - Z(x) &= \frac{1}{2}(\bar{x})^T D(\bar{x}) + c^T(\bar{x}) - \frac{1}{2}x^T Dx - c^T x \\ &= \frac{1}{2}(x + \Delta x)^T D(x + \Delta x) + c^T(x + \Delta x) - \frac{1}{2}x^T Dx - c^T x \\ &= \frac{1}{2}(\Delta x)^T D(\Delta x) + (\Delta x)^T(Dx + c) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$Z(\bar{x}) - Z(x) = g(x)^T(\Delta x) + \frac{1}{2}(\Delta x)^T D(\Delta x).$$

où $g(x) = (Dx + c)$ est le gradient de la fonction objectif Z au point x , avec : $g(x) = g(J) = (g_j, j \in J)$, il peut être fractionné de la manière suivant :

$$g = \begin{pmatrix} g_B \\ g_H \end{pmatrix}, \quad g_B = g(J_B) = (g_j, j \in J_B), \quad g_H = g(J_H) = (g_j, j \in J_H),$$

Par ailleurs on a :

$$\begin{cases} Ax = b, \\ A\bar{x} = b. \end{cases} \Leftrightarrow A\Delta x = 0.$$

En posant

$$\Delta x = \begin{pmatrix} \Delta x_B \\ \Delta x_H \end{pmatrix}, \quad \Delta x_B = \Delta x(J_B), \quad \Delta x_H = \Delta x(J_H),$$

l'égalité $A\Delta x = 0$ s'écrit $A_B\Delta x_B + A_H\Delta x_H = 0$, d'où

$$\Delta x_B = -A_B^{-1}A_H\Delta x_H. \quad (2.3)$$

la formule de l'accroissement de la fonction objectif devient alors :

$$\begin{aligned} Z(\bar{x}) - Z(x) &= g_B^T \Delta x_B + g_H^T \Delta x_H + \frac{1}{2} (\Delta x_B, \Delta x_H)^T D (\Delta x_B, \Delta x_H) \\ &= g_B^T (-A_B^{-1}A_H\Delta x_H) + g_H^T \Delta x_H \\ &\quad + \frac{1}{2} (-A_B^{-1}A_H\Delta x_H, \Delta x_H)^T D (-A_B^{-1}A_H\Delta x_H, \Delta x_H) \\ &= [g_H^T - g_B^T A_B^{-1}A_H] \Delta x_H \\ &\quad + \frac{1}{2} \Delta x_H^T \begin{pmatrix} -A_B^{-1}A_H \\ I_H \end{pmatrix}^T D \begin{pmatrix} -A_B^{-1}A_H \\ I_H \end{pmatrix} \Delta x_H, \end{aligned}$$

où $I_H = I(J_H, J_H)$ est la matrice identité d'ordre $(n - m)$. Posons

$$K = K(J, J_H) = \begin{pmatrix} -A_B^{-1}A_H \\ I_H \end{pmatrix}, \quad M = M(J_H, J_H) = K^T D K, \quad (2.4)$$

Nous définissons le vecteur des potentiels u ainsi le vecteur des estimations E comme suit :

$$\begin{aligned} y^T &= g_B^T A_B^{-1} = (DX + c)^T A_B^{-1}, \\ E^T &= g^T - y^T A = (E_B^T, E_H^T), \end{aligned}$$

où

$$E_B^T = 0, \quad E_H^T = g_H^T - y^T A_H.$$

Finalement, l'accroissement de la fonction objectif aura la forme suivante :

$$Z(\bar{x}) - Z(x) = (E_H)^T \Delta x_H + \frac{1}{2} (\Delta x_H)^T M \Delta x_H. \quad (2.5)$$

2.5 Critère d'optimalité

Théorème 2.1. [1] Soit un plan $\{x, J_B\}$ support des contraintes du problème (2.1). Alors les relations suivantes :

$$\begin{cases} E_j \geq 0, & \text{si} & x_j = d_{1j}, \\ E_j \leq 0, & \text{si} & x_j = d_{2j}, \\ E_j = 0, & \text{si} & d_{1j} < x_j < d_{2j}, \forall j \in J_H, \end{cases} \quad (2.6)$$

sont suffisantes pour l'optimalité du plan x .

Ces mêmes relations sont aussi nécessaires, si le plan de support des contraintes $\{x, x_B\}$ est non dégénéré.

Preuve.

Condition suffisante : Soit $\{x, J_B\}$ un plan support des contraintes vérifiant les relations (2.6). Pour tout plan \bar{x} du problème (2.1), la formule d'accroissement (2.5) nous permet d'écrire :

$$Z(\bar{x}) - Z(x) = E_H^T \Delta x_H + \frac{1}{2} \Delta x_H^T M \Delta x_H \geq E_H^T \Delta x_H,$$

car la matrice M est semi-définie positive.

D'où :

$$Z(\bar{x}) - Z(x) \geq \sum_{\substack{j \in J_H \\ E_j > 0}} E_j (\bar{x}_j - x_j) + \sum_{\substack{j \in J_H \\ E_j < 0}} E_j (\bar{x}_j - x_j)$$

comme $d_{1j} \leq \bar{x}_j \leq d_{2j}$, on a : $\bar{x}_j - d_{1j} \geq 0$ et $\bar{x}_j - d_{2j} \leq 0$, et en vertu des relations d'optimalité (2.6) on aura :

$$Z(\bar{x}) - Z(x) \geq \sum_{\substack{j \in J_H \\ E_j > 0}} E_j (\bar{x}_j - d_{1j}) + \sum_{\substack{j \in J_H \\ E_j < 0}} E_j (\bar{x}_j - d_{2j}) \geq 0,$$

d'où :

$$Z(\bar{x}) \geq Z(x).$$

Par conséquent, x est optimal.

Condition nécessaire :

Soit $\{x, J_B\}$ un plan de support optimal non dégénéré du problème (2.1) et supposons que les relations (2.6) ne sont pas vérifiées, c'est à dire, qu'il existe au moins un indice $j_0 \in J_H$, tel que :

$$(E_{j_0} < 0, x_{j_0} < d_{2j_0}) \quad \text{ou} \quad (E_{j_0} > 0, x_{j_0} > d_{1j_0}).$$

On construit un autre plan $\bar{x} = x + \theta l$, où θ est un nombre réel positif et $l = l(J)$ et un vecteur de direction à construire comme suit :

$$\begin{cases} l_{j_0} &= -\text{sign}E_{j_0}, \\ l_j &= 0, j \neq j_0, j \in J_H. \end{cases}$$

D'autre part, on doit avoir :

$$A\bar{x} = Ax + \theta Al = b \Leftrightarrow Al = A_B l_B + A_H l_H = 0,$$

d'où

$$l_B = -A_B^{-1} A_H l_H = -A_B^{-1} a_{j_0} \text{sign}E_{j_0}.$$

On a donc

$$\begin{cases} l_{j_0} &= -\text{sign}E_{j_0}, \\ l_j &= 0, j \neq j_0, j \in J_H, \\ l_B &= -A_B^{-1} a_{j_0} \text{sign}E_{j_0}. \end{cases}$$

En outre, le vecteur \bar{x} doit vérifier l'inégalité $d_1 \leq \bar{x} \leq d_2 \iff d_1 \leq x + \theta l \leq d_2$. Soit, en écrivant composante par composante

$$\begin{cases} d_{1j} - x_j \leq \theta l_j \leq d_{2j} - x_j, j \in J_B, \\ d_{1j_0} - x_{j_0} \leq \theta l_{j_0} \leq d_{2j_0} - x_{j_0}, \end{cases}$$

Comme le plan de support est non dégénéré, on peut toujours trouver un nombre positif θ assez petit tel que le vecteur \bar{x} sera un plan pour le problème (2.1). D'après la formule d'accroissement (2.5), on aura alors :

$$\begin{aligned} Z(\bar{x}) - Z(x) &= E_H^T \Delta x_H + \frac{1}{2} \Delta x_H^T M \Delta x_H \\ &= \theta E_H^T l_H + \frac{1}{2} \theta^2 l_H^T M l_H \\ &= \theta (-E_{j_0} \text{sign}E_{j_0} + \frac{1}{2} \theta l_H^T M l_H). \\ &= \theta (-|E_{j_0}| + \frac{1}{2} \theta l_H^T M l_H). \end{aligned}$$

Pour θ et l ainsi choisis, on aura $-|E_{j_0}| + \frac{1}{2} \theta l_H^T M l_H < 0$. D'où $Z(\bar{x}) - Z(x) < 0$, ce qui contredit l'optimalité de x . Donc les relations (2.6) forcément vérifiées si le plan de support optimal est non dégénéré. \square

2.6 Critère de suboptimalité

Définition 2.1. (Estimation de suboptimalité)

Le nombre $\beta(x, J_B)$ dit estimation de suboptimalité est une valeur qui estime l'écart entre la valeur optimale $Z(x^*)$ et une autre valeur $Z(x)$ d'un plan de support des contraintes quelconques $\{x, J_B\}$.

Théorème 2.2. (condition de suboptimalité) [23]

Soit $\{x, J_B\}$ un plan de support des contraintes du problème (2.1), et ε un nombre positif ou nul arbitraire. Si le nombre

$$\beta(x, J_B) = \sum_{\substack{j \in J_H \\ E_j > 0}} E_j (x_j - d_{1j}) + \sum_{\substack{j \in J_H \\ E_j < 0}} E_j (x_j - d_{2j}) \leq \varepsilon, \quad (2.7)$$

alors x est ε -optimal

Preuve.

Soit x^* une solution optimale du problème (2.1). En remplaçant \bar{x} par x^* dans la formule d'accroissement (2.5) et en minorant l'expression, on aura :

$$\begin{cases} l_{j_0} = -\text{sign}E_{j_0}, \\ l_j = 0, j \neq j_0, j \in J_H, \\ l_B = -A_B^{-1}a_{j_0}\text{sign}E_{j_0}. \end{cases}$$

Comme le plan de support est non dégénéré, on peut toujours trouver un nombre positif θ assez petit tel que le vecteur \bar{x} sera un plan pour le problème (2.1). D'après la formule d'accroissement (2.5), on aura alors :

$$\begin{aligned} Z(x^*) - Z(x) &= E_H^T \Delta x_H + \frac{1}{2} \Delta x_H^T M \Delta x_H \\ &= \sum_{j \in J_H} E_j (x_j^* - x_j) + \frac{1}{2} \Delta x_H^T M \Delta x_H, \\ &\geq \sum_{j \in J_H} E_j (x_j^* - x_j). \end{aligned}$$

D'où

$$Z(x) - Z(x^*) \leq \sum_{j \in J_H} E_j (x_j - x_j^*) = \sum_{\substack{j \in J_H \\ E_j < 0}} E_j (x_j - x_j^*) + \sum_{\substack{j \in J_H \\ E_j > 0}} E_j (x_j - x_j^*).$$

Nous avons $d_{1j} \leq x_j^* \leq d_{2j}$, $j \in J_H$, alors on aura :

$$\begin{aligned} E_j(x_j - x_j^*) &\leq E_j(x_j - d_{1j}), \quad \text{si } E_j > 0, \\ E_j(x_j - x_j^*) &\leq E_j(x_j - d_{2j}), \quad \text{si } E_j < 0. \end{aligned}$$

D'où

$$Z(x) - Z(x^*) \leq \sum_{\substack{j \in J_H \\ E_j > 0}} E_j(x_j - d_{1j}) + \sum_{\substack{j \in J_H \\ E_j < 0}} E_j(x_j - d_{2j}) \leq \varepsilon.$$

Par conséquent x est ε -optimal.

- si $\beta(x, J_B) < \varepsilon$, alors x est optimal.

- si $\beta(x, J_B) > \varepsilon$, il faut améliorer le plan x . □

2.7 Méthode de résolution

Avant de présenter la méthode de résolution, donnons quelques définitions essentielles.[\[23\]](#)

Définition 2.2. (Support de la fonction objectif)

On appelle support de la fonction objectif du problème (2.1), l'ensemble des indices $J_S \subset J_H$ tel que :

$$\det M_S = \det M(J_S, J_S) \neq 0,$$

où M est la matrice (2.4). On posera $J_{HH} = J_H \setminus J_S$.

Définition 2.3. (Support de problème)

L'ensemble des indices $J_P = \{J_B, J_S\}$ est appelé support du problème (2.1), il est formé du support des contraintes J_B et celui de la fonction objectif J_S .

Définition 2.4. (Plan de Support)

On appelle plan de support du problème(2.1), la paire $\{x, J_P\}$ formée du plan x et du support J_P ; il est dit "accordé" si $E(J_S) = 0$.

Etant donné un nombre réel positif ou nul quelconque ε et un plan de support initial $\{x, J_P\}$ accordé, le but de l'algorithme est alors de construire un plan ε -optimal x^ε ou carrément un plan optimal x^* . L'itération de l'algorithme consiste à faire le passage de $\{x, J_P\}$ à $\{\bar{x}, J_P\}$ tel que $F(\bar{x}) \leq F(x)$. Pour cela, construisons le nouveau plan \bar{x} de la manière suivante :

$$\bar{x} = x + \theta l,$$

où l est la direction d'amélioration, et θ le pas le long de cette direction.

Construction d'une direction d'amélioration adaptée

: soit :

- l_S : direction correspondant aux indices appartenant à J_S ,
- l_{HH} : direction correspondant aux indices appartenant à J_{HH} ,
- l_B : direction correspondant aux indices appartenant à J_B ,
- l_H : direction correspondant aux indices appartenant à J_H .

Dans cet algorithme, on choisira la métrique suivante pour les composantes non basiques de la direction admissible l :

$$d_{1j} - x_j \leq l_j \leq d_{2j} - x_j, j \in J_{HH} = J_H \setminus J_S. \quad (2.8)$$

Cette métrique dépend du plan x , et de ce fait, elle est dite adaptée. Afin de calculer les composantes de la direction admissible d'amélioration l , considérons l'accroissement

$$\Delta F = F(x + \theta l) - F(x) = \sum_{\substack{j \in J_{HH} \\ E_j > 0}} E_j l_j + \sum_{\substack{j \in J_{HH} \\ E_j < 0}} E_j l_j + \frac{1}{2} l_H^T M l_H.$$

En tenant compte de la métrique (2.8), la partie linéaire de ΔF atteint son minimum pour les valeurs des composantes de l_{HH} suivantes :

$$l_j = \begin{cases} d_{1j} - x_j, & \text{si } E_j > 0, \\ d_{2j} - x_j, & \text{si } E_j < 0, \\ 0, & \text{si } E_j = 0, j \in J_{HH} \end{cases} \quad (2.9)$$

Nous calculons les composantes de l_s de manière à assurer que $\bar{E}_j E_j(x + \theta l) = 0, j \in J_S$. En vertu de (2.5), nous avons :

$$E_H^T = g_H^T - g_B^T A_B^{-1} A_H = (g_B^T, g_H^T) \begin{pmatrix} -A_B^{-1} A_H \\ I_H \end{pmatrix} = g(x)^T R.$$

avec $R = \begin{pmatrix} -A_B^{-1} A_H \\ I_H \end{pmatrix}$

Comme l doit être admissible, alors

$$A l = A_B l_B + A_H l_H = 0 \implies l_B = -A_B^{-1} A_H l_H,$$

donc

$$l = \begin{pmatrix} l_B \\ l_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_B^{-1}A_H l_H \\ l_H \end{pmatrix} l_H = R l_H,$$

on aura donc

$$\bar{E}_H^T = g(x + \theta l)^T R = g(x)^T R + \theta l^T D R = g(x)^T R + \theta l_H^T R^T D R = E_H^T + \theta l_H^T M.$$

Finalement, nous avons

$$\bar{E}_H^T = E_H + \theta M l_H.$$

Comme $E(J_S) = 0$, alors l'équation $\bar{E}(J_S) = 0$ est équivalente à :

$$M(J_S, J_H) l_H = 0 \implies M(J_S, J_S) l_S + M(J_S, J_{HH}) l_{HH} = 0,$$

donc

$$l_S = -M_S^{-1} M(J_S, J_{HH}) l_{HH}. \quad (2.10)$$

Puis, nous calculons l_B tel que $Al = 0$:

$$l_B = -A_B^{-1} (A_S l_S + A_{HH} l_{HH}). \quad (2.11)$$

2.7.1 Changement de plan

Construisons le nouveau plan \bar{x} sous la forme suivante :

$$\bar{x} = x + \theta^0 l,$$

où l est la direction d'amélioration définie par les formules (2.9)-(2.11) et le nombre l, θ_{j1} et θ_{j2} se calculent de façon à ce que les contraintes directes sur le vecteur \bar{x} soient vérifiées :

$$\begin{cases} d_{1j} - x_j \leq \theta^0 l_j \leq d_{2j} - x_j, & j \in J_{HH}, \\ d_{1j} - x_j \leq \theta^0 l_j \leq d_{2j} - x_j, & j \in J_B, \\ d_{1j} - x_j \leq \theta^0 l_j \leq d_{2j} - x_j, & j \in J_S. \end{cases}$$

Donc

$$\theta_{j1} = \min_{j \in J_B} \theta_j, \theta_{j2} = \min_{j \in J_S} \theta_j,$$

où

$$\theta_j = \begin{cases} \frac{d_{2j} - x_j}{l_j}, & \text{si } l_j > 0, \\ \frac{d_{1j} - x_j}{l_j}, & \text{si } l_j < 0, \\ \infty, & \text{si } l_j = 0. \end{cases}$$

Le nombre $\theta^0 = 1$ représente le pas correspondant aux indices de J_{HH} .
 Quand à θ_Z , il se calcule de façon que le passage de x à \bar{x} assure une relaxation maximale de la fonction objectif tout en gardant le même signe pour E_j et \bar{E}_j , où

$$\begin{aligned} E_H^T(x) &= g^T(x)Z, \quad \bar{E}_H(\bar{x}) = \bar{E}_H(x + \theta^0 l), \\ \bar{E}_H(\bar{x}) &= E_H(x) + \theta^0 M l_H = E_H(x) + \theta^0 \delta_H. \end{aligned}$$

On posera donc $\theta_F = \sigma_{j^*} = \min \sigma_j, j \in J_{HH}$, avec

$$\sigma_j = \begin{cases} \frac{-E_j}{\delta_j}, & \text{si } E_j \delta_j < 0, \\ 0, & \text{si } E_j = 0, \delta_j < 0, \\ \infty, & \text{si } E_j \delta_j \geq 0. \end{cases}$$

où $\delta_j = M(j, J_H)l_H$.

2.7.2 Estimation de suboptimalité

Calculons la nouvelle estimation de suboptimalité $\beta(\bar{x}, J_B)$ en fonction de $\beta(x, J_B)$:

$$\begin{aligned} \beta(\bar{x}, J_B) &= \sum_{\substack{j \in J_H \\ \bar{E}_j > 0}} \bar{E}_j(\bar{x}_j - d_{1j}) + \sum_{\substack{j \in J_H \\ \bar{E}_j < 0}} \bar{E}_j(\bar{x}_j - d_{2j}). \\ \beta(\bar{x}, J_B) &= \sum_{\substack{j \in J_H \\ \bar{E}_j > 0}} \bar{E}_j(x_j + \theta^0 l_j - d_{1j}) + \sum_{\substack{j \in J_H \\ \bar{E}_j < 0}} \bar{E}_j(x_j + \theta^0 l_j - d_{2j}). \\ &= \sum_{\substack{j \in J_H \\ \bar{E}_j > 0}} (E_j + \theta^0 \delta_j)(x_j + \theta^0 l_j - d_{1j}) \\ &+ \sum_{\substack{j \in J_H \\ \bar{E}_j < 0}} (E_j + \theta^0 \delta_j)(x_j + \theta^0 l_j - d_{2j}) \\ &= \sum_{\substack{j \in J_H \\ \bar{E}_j > 0}} E_j(x_j - d_{1j}) + \sum_{\substack{j \in J_H \\ \bar{E}_j > 0}} E_j \theta^0 l_j + \sum_{\substack{j \in J_H \\ \bar{E}_j > 0}} \theta^0 \delta_j(x_j - d_{1j}) \\ &+ \sum_{\substack{j \in J_H \\ \bar{E}_j > 0}} \theta^0 \delta_j \theta^0 l_j + \sum_{\substack{j \in J_H \\ \bar{E}_j < 0}} E_j(x_j - d_{2j}) + \sum_{\substack{j \in J_H \\ \bar{E}_j < 0}} E_j \theta^0 l_j \\ &+ \sum_{\substack{j \in J_H \\ \bar{E}_j < 0}} \theta^0 \delta_j(x_j - d_{2j}) + \sum_{\substack{j \in J_H \\ \bar{E}_j < 0}} \theta^0 \delta_j \theta^0 l_j. \end{aligned}$$

En vertu des relations (2.9), l'estimation deviendra alors :

$$\begin{aligned}
\beta(\bar{x}, J_B) &= \beta(x, J_B) + \theta^0 \sum_{\substack{j \in J_H \\ E_j > 0}} E_j(d_{1j} - x_j) + \theta^0 \sum_{\substack{j \in J_H \\ E_j < 0}} E_j(d_{2j} - x_j) \\
&+ \theta^0 \sum_{\substack{j \in J_H \\ E_j > 0}} \delta_j(-l_j) + \theta^0 \sum_{\substack{j \in J_H \\ E_j < 0}} \delta_j(-l_j) \\
&+ (\theta^0)^2 \sum_{\substack{j \in J_H \\ E_j > 0}} \delta_j l_j + (\theta^0)^2 \sum_{\substack{j \in J_H \\ E_j < 0}} \delta_j l_j \\
&= \beta(x, J_B) - \theta^0 \beta(x, J_B) - \theta^0 \delta_H^T l_H + (\theta^0)^2 \delta_H^T l_H.
\end{aligned}$$

Finalement, on aura la formule suivante :

$$\beta(\bar{x}, J_B) = (1 - \theta^0) \beta(x, J_B) - \theta^0 (1 - \theta^0) l^T D l$$

2.7.3 Changement de support

- Si $\theta^0 = 1$, alors le vecteur $x^0 = \bar{x} = x + l$ est une solution optimale du problème (2.1)

Le changement de support s'effectue lorsque $\theta^0 < 1$ et $\beta(\bar{x}, J_B) > \varepsilon$. Dans ce qui suit, on énumère les différents changements de support suivant la valeur que prend θ^0 .

- Si $\theta^0 = \theta_{j_1}$, dans ce cas le choix de l'indice j_0 n'est pas unique contrairement au simplexe, ce qui est particulier à cette méthode. Lorsque ce cas se réalise pour un indice $j \in J_B$, on a alors

$$l_{j_1} = - \sum_{j \in J_H} e_{j_1}^T A_B^{-1} a_j l_j = - \sum_{j \in J_H} x_{j_1 j} l_j \neq 0,$$

où e_{j_1} est un vecteur unitaire de dimension m dont la composante j_1 vaut 1.

Il existe alors $j_0 \in J_H$ tel que $x_{j_1 j_0} \neq 0$. Cette dernière condition nous assure par conséquent que $\bar{J}_B = (J_B \setminus j_1) \cup j_0$ est bien un support.

Si on peut avoir $x_{j_1 j_0} \neq 0$, avec $j_0 \in J_S$, on posera donc

$$\bar{J}_B = (J_B \setminus j_1) \cup j_0, \quad \bar{J}_S = (J_S \setminus j_0).$$

Sinon, on choisira un indice $j_0 \in J_{HH}$ tel que $l_{j_0} \neq 0$ et on posera

$$\bar{J}_B = (J_B \setminus j_1) \cup j_0, \quad \bar{J}_S = J_S;$$

- Si $\theta^0 = \theta_{j_S}$. on pose :

$$\bar{J}_B = J_B \quad \bar{J}_S = J_S \setminus j_S.$$

- si $\theta^0 = \theta_Z = \sigma_{j^*}$: dans ce cas, on aura

$$\bar{J}_B = J_B \quad \bar{J}_S = J_S \cup j^*.$$

Finalement, on pose

$$\bar{J}_P = \{\bar{J}_B, \bar{J}_S\}.$$

Une fois ces étapes exécutées, on recommence une autre itération avec le nouveau plan de support $\{\bar{x}, \bar{J}_P\}$ si $\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) > \varepsilon$, où le support \bar{J}_P satisfait les conditions algébriques

$$\det \bar{A}_B = \det A(I, \bar{J}_B) \neq 0 \quad \text{et} \quad \det M(\bar{J}_S, \bar{J}_S) \neq 0.$$

2.7.4 Algorithme de la méthode

Soit un nombre réel positif ou nul quelconque ε et un plan de support initial $\{x, J_P\}$, où $J_P = \{J_B, J_S\}$.

Pour faciliter les calculs, on commence par $J_S = 0$ et $S = 0$. Les étapes de l'algorithme sont les suivantes :

1. Soit $\{x, J_P\}$ un support plan de départ
 - * Calculer le vecteur des potentiels $y^T = g_B^T A_B^{-1}$ et le vecteur des estimations $E_H^T = g_H^T - y^T A_H$;
 - * Calculer $\beta(x, J_B)$
 - Si $\beta(x, J_B) = 0$, alors x est optimal;
 - Si $\beta(x, J_B) \leq \varepsilon$, alors x est ε -optimal;
 - Si $\beta(x, J_B) \geq \varepsilon$, aller en 2;
2. Changement du plan x par $\bar{x} = x + \theta l$
 - * Détermination de la direction d'amélioration l ;
 - * Calculer le vecteur $\bar{x} + \theta l$;
 - * Calculer l'estimation de suboptimalité $\beta(\bar{x}, J_B) = (1 - \theta^0)(\beta(x, J_B) - \theta^0 l D l)$.
 - Si $\beta(\bar{x}, J_B) = 0$, alors $\{\bar{x}, J_B\}$ est optimal;
 - Si $\beta(\bar{x}, J_B) \leq \varepsilon$, alors $\{\bar{x}, J_B\}$ est ε -optimal;
 - Sinon, aller en 3.
3. Changement du support J_B par \bar{J}_B
 - * Si $\theta^0 = 1$ alors $\bar{x} = x + \theta^0 l$; $\beta(\bar{x}) = 0$; \bar{x} est optimal.
 - * Si $\theta^0 = \theta_{j_0}$, alors
 - S'il existe $j_1 \in J_S$ tel que $x_{j_0 j_1} \neq 0$, alors on pose :

$$\bar{J}_B = (J_B) \setminus j_0 \cup j_1, \quad \bar{J}_S = J_S \setminus j_1, \quad \bar{J}_P = \{\bar{J}_B, \bar{J}_S\}.$$

— Sinon on choisit $j_1 \in J_{HH}$ tel que $l_{j_1} \neq 0$, alors on pose :

$$\bar{J}_B = (J_B) \setminus j_0 \cup j_1, \quad \bar{J}_S = J_S, \quad \bar{J}_P = \{\bar{J}_B, \bar{J}_S\}.$$

* Si $\theta^0 = \theta_{j_s}$, alors

$$\begin{aligned} \bar{J}_B &= (J_B), \\ \bar{J}_S &= (J_S) \setminus j_s, \\ \bar{J}_P &= \bar{J}_B, \bar{J}_S. \end{aligned}$$

* Si $\theta^0 = \theta_F$, alors

$$\begin{aligned} \bar{J}_B &= (J_B), \\ \bar{J}_S &= (J_S) \cup j_*, \\ \bar{J}_P &= \bar{J}_B, \bar{J}_S. \end{aligned}$$

($S = 2$), aller en 1 avec le plan de support $\{\bar{x}_B, \bar{J}_P\}$

2.8 Exemple Numérique

Soit le problème quadratique suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x) = \frac{1}{2}x^T D x + c^T x \rightarrow \min \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 5 \end{array} \right.$$

On a :

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad d_1 = A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d_1 = A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soit $x = (0, 0, 4, 5)$ un plan initial de problème. Posons $J_B = \{3, 4\}$,
 $J_H = \{1, 2\}$. Nous avons alors $A_B = (a_3, a_4) = I_2$ et $A_H = (a_1, a_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$$-A_B^{-1}A_H = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Déterminant la matrice $M = Z^T D Z$, avec

$$Z = Z(J, J_H) = \begin{pmatrix} -A_B^{-1}A_H \\ I_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

D'où

$$\begin{aligned} M = Z^T D Z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Calculant le vecteur gradient $g(x) = (J_B, J_H)$:

$$\begin{aligned} g(x) = Dx + c &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ J_B &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, J_H = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où le vecteur des estimations :

$$E_H = g_H - (g_B^T A_B^{-1} A_H)^T = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

$J_S = \emptyset$, $J_{HH} = J_H \setminus J_S = \{1, 2\}$. La paire $\{x, J_P\}$, avec $J_P = \{J_B, J_S\}$ est alors le plan de support du problème considéré.

On a :

$$\begin{aligned} \beta(x, J_B) &= \sum_{\substack{j \in J_H \\ E_j > 0}} E_j(x_j - d_{1j}) + \sum_{\substack{j \in J_H \\ E_j < 0}} E_j(x_j - d_{2j}) \\ &= (5 - 0) - 2(4 - 1) \\ &= 36 > \varepsilon \end{aligned}$$

Itération 1 : Le critère d'optimalité n'étant pas vérifié pour l'indice $j_0 = 1$, Calculons alors la direction d'amélioration l :

$$l_1 = d_{21} - x_1, \quad \text{car } E_1 < 0$$

$$l_2 = d_{12} - x_2, \quad \text{car } E_2 > 0$$

$$\text{alors } l(J_{HH}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$l(J_S) = 0 \quad \text{car } J_S = \emptyset$$

$$l(J_B) = -A_B^{-1}A(I, 1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Calculons le pas θ^0 le long de cette direction :

$$\theta_{j_0} = \theta_1 = \infty, \quad \text{car } E_1 < 0,$$

$$\theta_{j_1} = \min_{j \in J_B} \theta_j = \min\{\theta_3, \theta_4\}, \quad \text{avec } \begin{cases} \theta_3 = 4 \\ \theta_4 = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\implies \theta_{j_1} = \theta_4 = 5 \setminus 2 \Rightarrow j_1 = 4$$

$$\theta_{j_S} = \infty, \text{car } J_S = \emptyset$$

$$\theta_F = \left\{ \frac{|E_1|}{\alpha}, \right\} \text{ avec } \alpha = l^T D l = 2, \Rightarrow \theta_F = 1.$$

Donc $\theta^0 = \min\{\theta_{j_0}, \theta_{j_1}, \theta_{j_S}, \theta_F\} = \theta_F = 1.$

On a alors le nouveau plan :

$$\bar{x} = x + \theta^0 l = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\bar{J}_B = J_B = \{3, 4\}; \bar{J}_S = \{1\}; \bar{J}_{HH} = \{2\}; \bar{J}_P = \{\bar{J}_B, \bar{J}_S\}$$

On recommence alors une nouvelle itération avec le plan de support $\{\bar{x}, \bar{J}_P\}$

Calculons alors le nouveau vecteur des estimations :

$$g(\bar{x}) = D\bar{x} + c = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{E}_H = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Le critère d'optimalité (2.6) étant vérifié, le vecteur $x^0 = (1, 0, 3, 3)$ est alors un plan optimal avec $F(x^0) = -1$

Chapitre 3

Résolution d'un problème de contrôle optimal linéaire par la méthode adaptée

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on résout le problème de contrôle optimal par une autre approche qui est un couplage de la méthode de discrétisation et de la procédure finale. La solution du problème discret permet de trouver un support qu'on utilisera dans la résolution du problème initial.

3.2 Position du problème

Dans l'intervalle de temps $T = [0, t_1]$, considérons un problème terminal de contrôle optimal :

$$\left\{ \begin{array}{l} Z(u(t_1)) = c^T x(t_1) \rightarrow \max_u; \\ \dot{x}(t) = Ax + bu, x(0) = x_0; \\ Hx(t_1) = g; \\ d_1 \leq u(t) \leq d_2, t \in T = [0, t_1]. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

où

- $Z(u)$ est le critère de qualité;
- $x(t)$: vecteur de dimension n représentant la position du système à l'instant t ;
- A : matrice (réelle) carrée d'ordre n qui caractérise le système;
- b : vecteur de R^n ;
- H : est une matrice d'ordre $m \times n$, avec rang $H = m \leq n$;

- g : est un vecteur de R^m ;
- c : vecteur de R^n (vecteur des coûts) ;
- $u(t)$: est une commande à l'instant t (signal d'entrée), fonction scalaire constante par morceaux, telle que $d_1 \leq u(t) \leq d_2$; $t \in T = [0, t_1]$;
- d_1 et d_2 sont des vecteurs de dimension n ;
- $I = \{1, \dots, m\}, J = \{1, \dots, n\}$ sont des ensembles d'indices.

La solution du système dynamique par la formule de Cauchy est égale à :

$$x(t) = F(t)(x_0 + \int_0^t F^{-1}(\tau)bu(\tau)d\tau), t \in T; \quad (3.2)$$

où $F(t) = e^{At}$, $t \in T = [0, t_1]$ est la solution (résolvante) du système :

$$\begin{cases} \dot{F}(t) &= AF(t); \\ F(0) &= Id, t \in T. \end{cases}$$

En utilisant la formule (3.2), Le problème (3.1) devient un problème de variable $u(t)$, $t \in T$:

$$\begin{cases} Z(u) = c^T x(t_1) = c^T F(t_1)x_0 + \int_0^{t_1} p(t)u(t)dt \rightarrow \max \\ \int_0^{t_1} \varphi(t)u(t)dt = g - HF(t_1)x_0. \\ d_1 \leq u(t) \leq d_2, t \in T. \end{cases} \quad (3.3)$$

où, $p(t) = c^T F(t_1)F^{-1}(t)b$, $\varphi(t) = HF(t_1)F^{-1}(t)b$.

Définition 3.1. La commande $u(t)$ est admissible si elle satisfait les contraintes.

$$Hx(t_1) = g \quad \text{et} \quad d_1 \leq u(t) \leq d_2, t \in T = [0, t_1].$$

Définition 3.2. Une commande admissible $u^0(t)$ est alors dite optimale si et seulement si :

$$Z(u^0) = \max_{d_1 \leq u(t) \leq d_2} Z(u).$$

Définition 3.3. Pour $\varepsilon \geq 0$, la commande $u^\varepsilon(t)$ est dite ε -optimale (solution approchée) si :

$$Z(u^0) - Z(u^\varepsilon) \leq \varepsilon.$$

3.3 Commandabilité des systèmes linéaires autonome :

Définition 3.4. un système est défini par : $\frac{dx}{dt} = Ax(t) + bu(t)$, $x_0 = x(0)$ est dit "non autonome", et il est dit "autonome" si les matrices $A(t) = A$ et $b(t) = b$ sont constantes.

Définition 3.5. le système $\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$ où l'état $x \in \mathbb{R}^n$, la commande (on dit aussi l'entrée) $u \in \mathbb{R}^m$ et les matrices A et b sont constantes et de taille $n \times n$ et $n \times m$ respectivement, est contrôlable (ou commandable) si pour tous les états $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, il existe une commande mesurable, bornée $u(t)$ telle que la trajectoire associée relie x_0 et x_1 en un temps fini T .

3.3.1 Le critère de Kalman

Il existe une caractérisation algébrique de la contrôlabilité d'un système linéaire due à Kalman, en général, facilement applicable. Soient A et b deux matrices constantes sur $[t_0, t_1]$ et on note $C = (A|b) = (b, Ab, \dots, A^{n-1}b) \in M_{n,mn}(\mathbb{R})$ la matrice dont les colonnes sont constituées par celles de $b, \dots, A^{n-1}b$.

Téorème : (Critère de Kalman)[28]

Le système autonome $\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) + r(t)$ est commandable en temps t_1 (quelconque) si et seulement si la matrice de commandabilité de Kalman C est de rang $n = \dim(x)$, on écrit :

$$\text{rang}(A|b) = n.$$

L'essentiel de la preuve est contenu dans le lemme suivant :

lemme

La matrice C est de rang n si et seulement si l'application linéaire

$$\begin{cases} \phi : L^\infty([0, t_1], \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^n \\ u \rightarrow \int_0^{t_1} e^{t_1-t} bu(t) dt \end{cases}$$

est surjective.

Preuve du lemme

Supposons tout d'abord que $\text{rang } C < n$, et montrons que Φ n'est pas surjective.

L'application C étant non surjective, il existe un vecteur $\psi \in \mathbb{R}^n$, que l'on supposera être un vecteur ligne, tel que $\psi C = 0$. Par conséquent :

$$\psi b = \psi Ab = \dots = \psi A^{n-1}b = 0.$$

Or d'après le théorème d'Hamilton-Cayley, il existe des réels a_0, a_1, \dots, a_{n-1} tels que :

$$A^n = a_0 I + a_1 A + \dots + a_{n-1} A^{n-1}.$$

On déduit par récurrence immédiate que pour tout entier K :

$$\psi A^K b = 0.$$

et donc, pour tout $t \in [0, t_1]$

$$\psi e^{tA} b = 0.$$

Par conséquent pour tout contrôle u on a :

$$\psi \int_0^{t_1} e^{(t_1-t)A} B u(t) dt = 0$$

i.e. $\psi \Phi(u) = 0$, ce qui montre que Φ n'est pas surjective.

Réciproquement : Si Φ n'est pas surjective, alors il existe un vecteur ligne

$\psi \in \mathbb{R}^n / \{0\}$ tel que pour tout contrôle u on ait :

$$\psi \int_0^{t_1} e^{(t_1-t)A} b u(t) dt = 0$$

Ceci implique, pour tout $t \in [0, t_1]$:

$$\psi e^{(t_1-t)A} b = 0$$

En $t = t_1$ on obtient $\psi b = 0$. Ensuite, en dérivant par rapport à t , puis en prenant $t = t_1$, on obtient $\psi A b = 0$. Ainsi par dérivations successives on obtient finalement :

$$\psi b = \psi A b = \dots = \psi A^{n-1} b = 0,$$

donc $\psi C = 0$, et donc $\text{rang } C < n$

Ce lemme permet maintenant de montrer facilement le théorème.

Preuve. Si la matrice C est de rang n , alors d'après le lemme précédent l'application Φ est surjective, i.e. $\phi(L^\infty) = \mathbb{R}^n$. Or pour tout contrôle u , l'extrémité au temps t_1 de la trajectoire associée à u est :

$$x(t_1) = e^{t_1 A} x_0 + \int_0^{t_1} e^{(t_1-t)A} (b u(t) + r(t)) dt$$

donc l'ensemble accessible en temps t_1 depuis un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est :

$$\text{Acc}(t_1, x_0) = e^{t_1 A} x_0 + \int_0^{t_1} e^{(t_1-t)A} r(t) dt + \Phi(L^\infty) = \mathbb{R}^n$$

et donc le système est contrôlable.

Réciproquement : Si le système est contrôlable, alors il est en particulier contrôlable en x_0 défini par :

$$x_0 = -e^{t_f A} \int_0^{t_f} e^{(t_f-t)A} r(t) dt$$

Or en ce point l'ensemble accessible en temps t_f s'écrit :

$$Acc(T_1, x_0) = \Phi(L^\infty),$$

et le système étant contrôlable cet ensemble est égal à \mathbb{R}^n , ce qui prouve que Φ est surjective, et donc d'après le lemme, la matrice C est de rang n .

La condition de *Kalman* ne dépend ni de t_f ni de x_0 . Autrement dit, si un système linéaire autonome est contrôlable en temps t_1 depuis x_0 alors il est contrôlable en tous temps depuis tout point. \square

Exemple 3.1. Considérons le système dynamique linéaire autonome suivant :

$$\begin{cases} x_1 &= x_2 \\ x_2 &= x_1 - u \end{cases}$$

où :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Pour vérifier la contrôlabilité de ce système, il suffit de calculer le déterminant de la matrice de Kalman. Par conséquent, la matrice de Kalman C est donnée par :

$$C = (A, B) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de C est égal à : $\det(C) = -1 \neq 0$, donc le rang $(C) = 2$, d'où le système est contrôlable.

3.4 Support de contrôle

Définition 3.6. Soient $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m\}$ m points isolés de T , et $\tau_B = \{\tau_i, i = 1, \dots, m\}$.

A chaque τ_i , on associe un intervalle de la forme $T_i = [\underline{\tau}_i, \bar{\tau}_i]$ tel que :

$$T_i \cap T_j = \emptyset;$$

L'ensemble T_B et son complémentaire T_c sont définis par :

$$T_B = \bigcup_{i=1}^m T_i \quad \text{et} \quad T_c = T/T_B;$$

1. Support du problème

L'ensemble τ_B est appelé support (appui) du problème si la matrice de support $\varphi(\tau_B)$ est inversible, c'est-à-dire $\det \varphi(\tau_B) \neq 0$

2. Support généralisé du problème

L'ensemble T_B est appelé support généralisé du problème (3.1) si le système

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + bu(t), \\ Hx(t_1) = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

n'admet pour $u(t) = 0, t \in T_H$ que la solution triviale $u(t) = 0, t \in T_B$, mais pour tout intervalle $T^* = [\tau_*, \tau^*], T^* \subset T_H, \tau_* \neq \tau^*$ et

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t \in T_H \setminus T^* \\ u^* & \text{pour } t \in T_B \cup T^* \end{cases}$$

le système (3.4) admet une solution non triviale, i.e : $u(t) \neq 0, t \in T_B \cup T^*$ dans la classe des contrôles constants sur $T_i, \overline{1, m}$

Remarque 3.1. La notion de support est très liée avec la notion de contrôlabilité

Définition 3.7. La paire $\{u, \tau_B\}$ formée d'une commande admissible $u = u(t), t \in T$ et d'un support τ_B est appelée "support contrôle"

Définition 3.8. Le commande support est dite non dégénérée s'il existe de tels nombres $\lambda_0 > 0, \mu_0 > 0, u_i^\lambda, i = \overline{1, m}$ telque, $\forall \lambda, 0 < \lambda < \lambda_0$, les relations suivantes sont vérifiées.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m \int_{t_{i-\lambda}}^{t_{i+\lambda}} \varphi(t)u(t)dt = \sum_{i=1}^m u_i^\lambda \int_{t_{i-\lambda}}^{t_{i+\lambda}} \varphi(t)dt \\ d_1 + \mu_0 \leq u_i^\lambda \leq d_2 + \mu_0 \end{cases} \quad i = \overline{1, m}$$

3.5 Accroissement de la fonctionnelle

Soit $\{u, \tau_B\}$ un support-contrôle non dégénérée de départ, $x(t)$ sa trajectoire correspondante. En utilisant le support, on construit le vecteur des potentiels :

$$y^T = p_B^T \varphi_B^{-1}, \quad \text{où } p_B^T = p(I_j, J = \overline{1, m})$$

et la co-commande :

$$E(t) = -\psi^T(t)b \quad t \in T, \quad (3.5)$$

où $\psi(t)$ est la solution du système conjugué :

$$\dot{\psi}(t) = -A^T \psi; \quad \psi(t_1) = c - H^T y. \quad (3.6)$$

$E(t)$ peut être écrit d'une autre manière :

$$\begin{aligned}
E(t) &= -\psi^T(t)b, \\
&= -(c - H^T y)^T F(t_1)F^{-1}(t)b, \\
&= y^T H F(t_1)F^{-1}(t)b - c^T F(t_1)F^{-1}(t)b.
\end{aligned}$$

D'où

$$E(t) = y^T \varphi(t) - p(t), t \in T.$$

On considère une autre commande admissible $\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t)$, $t \in T$ et sa trajectoire correspondante $\bar{x}(t) = x(t) + \Delta x(t)$, $t \in T$.

L'accroissement de la fonctionnelle s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
\Delta Z(u(t)) &= Z(\bar{u}) - Z(u) \\
&= \int_0^{t_1} p(t)\Delta u(t)dt, \\
&= \int_0^{t_1} (y^T \varphi(t) - E(t))\Delta u(t)dt, \\
&= \int_0^{t_1} y^T \varphi(t)\Delta u(t)dt - \int_0^{t_1} E(t)\Delta u(t)dt, \\
&= - \int_0^{t_1} E(t)\Delta u(t)dt.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

car $\int_0^{t_1} y^T \varphi(t)\Delta u(t)dt = 0$. En effet, de l'admissibilité de $u(t)$ et $\bar{u}(t)$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\int_0^{t_1} y^T \varphi(t)\Delta u(t) &= y^T (H F(t_1)F^{-1}(t_1)b(\bar{u}(t) - u(t)))dt, \\
&= y^T (H\bar{x}(t_1) - Hx(t_1)) = y^T (g - g) = 0
\end{aligned}$$

3.6 La valeur de suboptimalité

Comme $u(t)$ et $\bar{u}(t)$ sont admissibles, on a alors :

$$d_1 - u(t) \leq \Delta u(t) \leq d_2 - u(t), t \in T. \tag{3.8}$$

Le maximum de la croissante de la fonctionnelle (3.7) sous les contraintes (3.8) est atteint pour :

$$\begin{cases} \Delta u(t) = d_1 - u(t) & \text{si } E(t) \geq 0 \\ \Delta u(t) = d_2 - u(t) & \text{si } E(t) \leq 0 \\ \Delta u(t) = 0 & \text{si } E(t) = 0, t \in T \end{cases} \tag{3.9}$$

et est égal à :

$$\beta = \beta(u, \tau_B) = \int_{T^+} E(t)(u(t) - d_1)dt + \int_{T^-} E(t)(u(t) - d_2)dt, \quad (3.10)$$

où :

$$T^+ = \{t \in T, E(t) > 0\}, \quad T^- = \{t \in T, E(t) < 0\}.$$

Le nombre $\beta(u, \tau_B)$ est appelé valeur de suboptimalité du support-contrôle $\{u, \tau_B\}$.

On déduit que l'inégalité,

$$J(\bar{u}) - J(u) \leq \beta(u, \tau_B), \quad \forall \bar{u}$$

et pour $\bar{u} = u^0$, on a :

$$J(u^0) - J(u) \leq \beta(u, \tau_B).$$

de cette dernière inégalité on déduit le critère suivant

3.7 Critère d'optimalité

Théorème 3.1. [17] *Pour l'optimalité du support-contrôle $\{u, \tau_B\}$, les relations suivantes :*

$$\begin{cases} u(t) = d_1 & \text{si } E(t) > 0, \\ u(t) = d_2 & \text{si } E(t) < 0, \\ d_1 \leq u(t) \leq d_2 & \text{si } E(t) = 0, t \in T. \end{cases} \quad (3.11)$$

sont suffisantes, et dans le cas de la non dégénérescence, elles sont nécessaires pour l'optimalité du support-contrôle $\{u, \tau_B\}$.

Preuve.

1. Condition suffisante :

Si les relations (3.11) sont vérifiées, alors $\beta(u, \tau_B) = 0$. Comme $\Delta Z(u) = Z(\bar{u}) - Z(u) \leq \beta(u, \tau_B) \forall \bar{u}$, ce qui implique $Z(\bar{u}) \leq Z(u), \forall \bar{u}$. Par conséquent, $\{u, \tau_B\}$ est un support-contrôle optimal.

2. Condition nécessaire :

Soit $\{u, \tau_B\}$ un support-contrôle optimal non dégénéré et supposons que les relations (3.11) ne sont pas vérifiées, c'est-à-dire :

$$\exists(t_0) \in T, tq : E(t_0) > 0 \text{ et } u(t_0) > d_1 \text{ où } E(t_0) < 0 \text{ et } u(t_0) < d_2.$$

supposons que $E(t_0) > 0$ et $u(t_0) > d_1$
 Construisons le contrôle $\Delta u(t)$ de la manière suivante :

$$\Delta u(t) = \begin{cases} -\theta, & \text{si } t = t_0, \theta > 0, \\ 0, & \text{si } t \in T_H/t_0. \end{cases}$$

L'accroissement de la fonctionnelle devient :

$$\begin{aligned} \Delta Z(u) &= Z(\bar{u}) - Z(u), \\ &= - \int_0^{t_1} E(t) \Delta u(t) dt, \\ &= -E(t_0) \Delta u(t_0) - \int_{T/t_0} E(t) \Delta u(t) dt, \\ &= \theta E(t_0). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Par conséquent, $\Delta Z(u(t)) = \theta E(t_0) > 0$, ce qui implique : $Z(\bar{u}(t)) > Z(u(t))$
 et ceci contredit l'optimalité de $u(t)$.

□

Remarque 3.2. Le critère d'optimalité peut être écrit sous forme du principe du maximum , en utilisant la fonction Hamiltonienne

$$H(u(t), x(t), \psi(t), t) = \psi^T(t)(Ax(t) + bu(t)),$$

où $\psi(t), t \in T$ est la solution du système conjugué (3.6). La condition suivante :

$$H(u(t), x(t), \psi(t), t) = \max_{d_1 \leq u(t) \leq d_2} H(u(t), x(t), \psi(t), t), \quad t \in T.$$

est suffisante et dans le cas de non dégénérescence, elle est nécessaire pour l'optimalité du support-contrôle $\{u(t), \tau_B\}$.

3.7.1 Principe du Suboptimalité

Théorème 3.2. [26] (*Critère de Suboptimalité ou critère ε -optimalité*)
 Soit $\varepsilon > 0$, donné. Le contrôle admissible $u(t), t \in T$, est ε - optimal si et seulement s'il existe un tel support τ_B tel que $u(t)$ et sa trajectoire correspondante $x(t), t \in T$ vérifient la condition ε - optimalité :

$$\begin{cases} H(u(t), x(t), \psi(t), t) = \max_{d_1 \leq u(t) \leq d_2} H(u(t), x(t), \psi(t), t) - \varepsilon(t), t \in T, \\ \text{avec } \int_0^{t_1} \varepsilon(t) dt \leq \varepsilon. \end{cases} \tag{3.13}$$

Preuve.

1. Condition suffisante : Supposons que la condition (3.13) soit vérifiée ; de la valeur de suboptimalité (3.10) du support-contrôle $\{u, \tau_B\}$, et de la formule (3.5)

on déduit :

$$\begin{aligned}
\beta(u, \tau_B) &= \int_{T^+} E(t)(u(t) - d_1)dt + \int_{T^-} E(t)(u(t) - d_2)dt, \\
&= \int_{T^+} \psi^T(t)b(d_1 - u(t))dt + \int_{T^-} \psi^T(t)b(d_2 - u(t))dt, \\
&= \int_{T^+} (\psi^T(t)Ax + \psi^T b d_1 - \psi^T(t)Ax - \psi^T(t)bu(t))dt, \\
&+ \int_{T^-} (\psi^T(t)Ax + \psi^T b d_2 - \psi^T(t)Ax - \psi^T(t)bu(t))dt, \\
&= \int_{T^+} \psi^T(Ax + b d_1)dt + \int_{T^-} \psi^T(Ax + b d_2)dt - \int_0^{t_1} \psi^T(Ax - bu(t))dt, \\
&= \int_0^{t_1} \max_{d_1 \leq u(t) \leq d_2} H(u(t), x(t), \psi(t), t) - H(u(t), x(t), \psi(t), t)dt, \\
&= \int_0^{t_1} \varepsilon(t)dt.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

En utilisant l'équation (3.13), on obtient : $\beta(u, \tau_B) \leq \varepsilon$, et comme $Z(\bar{u}) - Z(u) < \beta(u, \tau_B) \leq \varepsilon$. Donc le contrôle $\bar{u}(t)$ est ε - optimal.

2. Condition nécessaire :

Soit $u(t), t \in T$ une commande ε - optimal de la formule (3.10) pour un certain support τ_B , on calcule la valeur de suboptimalité $\beta(u, \tau_B)$ écrite sous la forme :

$$\beta = \beta(u, \tau_B) = \int_0^{t_1} E(t)u(t)dt - \int_{T^+} E(t)d_1dt - \int_{T^-} E(t)d_2dt. \tag{3.15}$$

Introduisons le problème dual du problème (3.1) :

$$\begin{cases} L(z, v(t), w(t) = c^T F(t_1)x_0 + \bar{g}^T z + \int_0^{t_1} v(t)d_1dt + \int_0^{t_1} w(t)d_2dt \rightarrow \min \\ z^T \varphi(t) - v(t) + w(t) = c(t) \\ v(t) \geq 0, w(t) \geq 0, t \in T \end{cases} \tag{3.16}$$

où

$$\bar{g} = g - HF(t_1)x_0$$

Ici les fonctions $v(t), w(t), t \in T$, pour $z(I) = y(I)$, définies de la manière suivante :

$$\begin{cases} v(t) = E(t), w(t) = 0 & \text{si } E(t) > 0; \\ v(t) = 0, w(t) = -E(t) & \text{si } E(t) < 0. \end{cases}$$

Forment un plan dual du problème (3.15)

Désignons par $(z^0, v^0(t), w^0(t), t \in T)$ une solution optimale.

De la valeur de suboptimalité (3.10) et en vertu des relation (3.7) et (3.15) on obtient :

$$\beta = \beta(u, \tau_B) = \int_{t_0}^{t_1} y^T \varphi(t) u(t) dt - \int_{t_0}^{t_1} p(t) u(t) dt - \int_{t_0}^{t_1} v(t) d_1 dt + \int_{t_0}^{t_1} w(t) d_2 dt.$$

Or, on a :

$$\int_0^{t_1} y^T \varphi(t) u(t) dt = \bar{g}^T y$$

et de la relation de dualité, on obtient :

$$Z(u^0) = L(y^0, v^0, w^0).$$

Donc :

$$\int_0^{t_1} p(t) u^0(t) dt = \bar{g}^T y^0 - \int_0^{t_1} v^0(t) d_1 dt + \int_0^{t_1} w^0(t) d_2 dt.$$

De cette égalité, la valeur de la suboptimalité prend la forme :

$$\begin{aligned} \beta &= \int_0^{t_1} p(t) u^0(t) dt - \int_0^{t_1} p(t) u(t) dt \\ &+ \bar{g}^T y - \int_0^{t_1} v(t) d_1 dt + \int_0^{t_1} w(t) d_2 dt + \bar{g}^T y^0 \\ &+ \int_0^{t_1} v^0(t) d_1 dt - \int_0^{t_1} w^0(t) d_2 dt, \end{aligned}$$

$$\beta = \beta(u, \tau_B) = \beta_u + \beta_B.$$

où

$$\beta_u = \int_0^{t_1} p(t) u^0(t) dt - \int_0^{t_1} p(t) u(t) dt$$

est appelée la mesure de la non optimalité de la commande $u(t), t \in T$, et

$$\beta_B = \bar{g}^T y - \int_0^{t_1} v(t) d_1 dt + \int_0^{t_1} w(t) d_2 dt - \bar{g}^T y^0 + \int_0^{t_1} v^0(t) d_1 dt - \int_0^{t_1} w^0(t) d_2 dt$$

est la mesure de la non optimalité de support τ_B . Si à la commande $u(t), t \in T$, on associe un support τ_B^0 optimal, c'est-à-dire $\beta(\tau_B^0) = \beta_B = 0$, alors :

$$\beta(u, \tau_B^0) = \beta_u \leq \varepsilon, \quad (3.17)$$

car u est ε -optiamle. Posons :

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} E(t)(u(t) - d_1) & \text{si } t \in T^+, \\ E(t)(u(t) - d_2) & \text{si } t \in T^-, \\ 0, & \text{si } E(t) = 0, t \in T. \end{cases} \quad (3.18)$$

En utilisant la co-commande, on obtient :

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \psi^T(t)(Ax(t) + bd_1) - \psi^T(t)(Ax(t) + bu(t)) & \text{si } \psi^T(t)b < 0, \\ \psi^T(t)(Ax(t) + bd_2) - \psi^T(t)(Ax(t) + bu(t)) & \text{si } \psi^T(t)b > 0, \\ 0. & \text{si } \psi^T(t)b = 0. \end{cases}$$

En utilisant la fonction Hamiltonienne, $\varepsilon(t)$ sera égal à :

$$\varepsilon(t) = \max_{d_1 \leq u(t) \leq d_2} H(x(t), \psi(t), u(t)) - H(x(t), \psi(t), u(t)), \quad t \in T \quad (3.19)$$

Des conditions (3.18) et (3.19) découle alors la condition ε -maximum. \square

3.7.2 Détermination d'un support-contrôle de départ

La construction d'un contrôle de départ admissible doit respecter deux conditions. En ce qui concerne le support, une seule condition est à vérifier. Tout d'abord, on choisit un contrôle qui vérifie la contrainte $d_1 \leq u(t) \leq d_2$, et on calcule la trajectoire correspondante $x(t)$. Après, on utilise cette solution pour tester la quantité $Hx(t_1) = g$:

1. Si $Hx(t_1) = g$, alors le contrôle $u(t)$ est admissible.
2. Si $Hx(t_1) \neq g$, alors le contrôle n'est pas admissible et pour atteindre g , on ajoute des variables des écarts pour transformer la contrainte inégalité en égalité. Après la vérification des deux conditions, on choisit un support $\tau_B = \{\tau_j; j = 1, \dots, m\}$, tel que $\det(\varphi_B) \neq 0$.

3.8 Méthode de résolution

Soit $\{u(t), \tau_B\}$ un support-contrôle admissible de départ ne vérifiant pas la condition du principe du ε -maximum. La transformmmation $\{u(t), \tau_B\}$ vers $\{\bar{u}(t), \bar{\tau}_B\}$ est constituée de trois procédures :

1. Changement de contrôle $u(t) \rightarrow \bar{u}(t)$
2. Changement du support $\tau_B \rightarrow \bar{\tau}_B$
3. La procédure finale.

3.8.1 Changement de contrôle

On construit un nouveau contrôle admissible sous la forme :
 $\bar{u}(t) = u(t) + \theta l(t)$, $t \in T$, où $l(t)$ est la direction d'amélioration du contrôle $u(t)$, $t \in T$ et θ est le pas maximal admissible le long de cette direction.

Détermination de la direction admissible $l(t)$

Sur T_H , on pose $\theta = 1$

La direction est définie de sorte à maximiser l'accroissement de la fonctionnelle :

$$l(t) = \begin{cases} d_1 - u(t), & \text{si } E(t) > 0, \\ d_2 - u(t), & \text{si } E(t) < 0, \\ 0, & \text{si } E(t) = 0, \end{cases}$$

Comme $u(t)$ et $\bar{u}(t)$, sont admissible, on obtient :

$$\theta \int_0^{t_1} \varphi(t)l(t)dt = 0, \quad \text{avec } \theta \neq 0.$$

Alors :

$$\int_{T_B} \varphi(t)l(t)dt + \int_{T_H} \varphi(t)l(t)dt = 0,$$

Ce qui implique :

$$\int_{T_B} \varphi(t)l(t)dt = - \int_{T_H} \varphi(t)l(t)dt,$$

Comme $l(T_B)$ est constante et $\varphi(T_B)$ est inversible, donc :

$$l(T_B) = -\varphi^{-1}(T_B) \int_{T_H} \varphi(t)l(t)dt.$$

Détermination du pas maximal :

Nous avons $d_1 \leq \bar{u}(t) \leq d_2$, ce qui implique :

$$d_1 \leq u(t) + \theta l(t) \leq d_2, t \in T.$$

D'où :

$$d_1 - u(t) \leq \theta l(t) \leq d_2 - u(t), t \in T. \quad (3.20)$$

Pour que la condition (3.20) soit vérifiée, il faut chercher un pas $\theta = \theta(t_0)$:
avec $\theta(t_0) = \min \theta(t)$ et tel que :

$$\theta(t) = \begin{cases} \frac{d_1 - u(t)}{l(t)}, & \text{si } l(t) < 0, \\ \frac{d_2 - u(t)}{l(t)}, & \text{si } l(t) > 0, \\ \infty, & \text{si } l(t) = 0, t \in T_B. \end{cases} \quad (3.21)$$

Par conséquent, le pas maximal est donné par :

$$\theta^0 = \min(1, \theta(t_0)).$$

Calculons le nouveau contrôle : La direction et le pas maximal calculés précédemment, nous permettent d'aboutir au nouveau contrôle :

$$\bar{u}(t) = u(t) + \theta^0 l(t), t \in T.$$

Calculons la nouvelle valeur du suboptimalité :

$$\begin{aligned} \beta(\bar{u}(t), \tau_B) &= \int_{T^+} E(t)(\bar{u}(t) - d_1)dt + \int_{T^-} E(t)(\bar{u}(t) - d_2)dt, \\ &= \int_{T^+} E(t)(u(t) + \theta^0 l(t) - d_1)dt + \int_{T^-} E(t)(u(t) + \theta^0 l(t) - d_2)dt, \\ &= \int_{T^+} E(t)(u(t) - d_1)dt + \int_{T^-} E(t)(u(t) - d_2)dt \\ &\quad + \int_{T^+} E(t)\theta^0 l(t)dt + \int_{T^-} E(t)\theta^0 l(t)dt, \\ &= \beta(u(t), \tau_B) - \theta^0 \int_{T^+} E(t)(u(t) - d_1)dt - \theta^0 \int_{T^-} E(t)(u(t) - d_2)dt, \\ &= \beta(u(t), \tau_B) - \theta^0 \beta(u(t), \tau_B). \end{aligned} \tag{3.22}$$

Par conséquent :

$$\beta(\bar{u}(t), \tau_B) = (1 - \theta^0)(\beta(u(t), \tau_B)).$$

Test :

A partir de la valeur de suboptimalité, on peut réaliser le test d'optimalité suivant :

1. Si $\beta(\bar{u}(t), \tau_B) = 0$, alors le support-contrôle $\{\bar{u}(t), \tau_B\}$ est optimal.
2. Si $\beta(\bar{u}(t), \tau_B) \leq \varepsilon$ alors le support-contrôle $\{\bar{u}(t), \tau_B\}$ est ε -optimal.
3. Si $\beta(\bar{u}(t), \tau_B) > \varepsilon$ alors le support-contrôle $\{\bar{u}(t), \tau_B\}$ n'est pas optimal, alors on passe au changement de support.

3.8.2 Changement du support

Le changement du support consiste à remplacer le $t_0 \in T_B$ par un autre $t_1 \in T_H$. Le passage de τ_B vers $\bar{\tau}_B$ entraîne le changement du vecteur des potentiels et des estimations (co-contrôle) :

$$\bar{y} = y + \sigma q(I) \quad \text{et} \quad \bar{E}(t) = E(t) + \sigma q(t), t \in T, \tag{3.23}$$

où $q(t)$ est la direction admissible du changement de le co-contrôle et σ est le pas maximal dual .

Construction de la direction admissible $q(t)$:

Posons

$$q(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } \bar{u}(t) = d_1, \quad t = t_0 \\ -1, & \text{si } \bar{u}(t) = d_2, \quad t = t_0 \\ 0, & \text{si } t \in T_B/t_0. \end{cases} \quad (3.24)$$

Nous avons :

$$\bar{E}(t) = \bar{y}^T \varphi(t) - p(t) = y^T \varphi(t) + \sigma q(I) \varphi(t) - p(t)$$

et ainsi

$$\bar{E}(t) = E(t) + \sigma q(t) = y^T \varphi(t) - p(t) + \sigma q(t).$$

De là, on obtient : $\sigma q(I) \varphi(t) = \sigma q(t)$, puisque $\sigma \neq 0$ alors $q(I) \varphi(t) = q(t)$.
Sur T_B , on a :

$$q(I) = q(T_B) \phi_B^{-1},$$

Par conséquent :

$$q^T(t) = q(T_B) \phi_B^{-1} \varphi(t), \quad t \in T.$$

Construction du pas dual maximal σ

Le pas maximal $\sigma(t_1) = \sigma^0$ est donné par :

$$\sigma^0 = \min_{t \in T_H} \sigma(t)$$

où :

$$\sigma(t) = \begin{cases} -\frac{E(t)}{q(t)} & \text{si } E(t)q(t) < 0, t \in T_H \\ 0, & \text{si } E(t) = 0, \text{ et } q(t) > 0, \text{ et } u = d_1, \\ & \text{ou } E(t) = 0, \text{ et } q(t) < 0, \text{ et } u = d_2. \\ \infty, & \text{sinon } t \in T_H \end{cases} \quad (3.25)$$

Donc, t_0 sera remplacé par t_1 dans l'ensemble T_B . Par conséquent, le nouveau support est :

$$\bar{\tau}_B = (\tau_B / \{t_0\}) \cup t_1$$

Calculons la nouvelle valeur de la suboptimalité du support-contrôle $\{\bar{u}, \bar{\tau}_B\}$.

$$\begin{aligned}
\beta(\bar{u}, \bar{\tau}_B) &= \int_{T^+} \bar{E}(t)(\bar{u}(t) - d_1)dt + \int_{T^-} \bar{E}(t)(\bar{u}(t) - d_2)dt, \\
&= \int_{T^+} (E(t) + \sigma^0 q(t))(\bar{u}(t) - d_1)dt + \int_{T^-} (E(t) + \sigma^0 q(t))(\bar{u}(t) - d_2)dt, \\
&= \int_{T^+} E(t)(\bar{u}(t) - d_1)dt + \int_{T^-} E(t)(\bar{u}(t) - d_2)dt, \\
&+ \sigma^0 \left(\int_{T^+} q(t)(\bar{u}(t) - d_1)dt + \int_{T^-} q(t)(\bar{u}(t) - d_2)dt \right), \\
&= \beta(\bar{u}, \tau_B) + \sigma^0 \left(\int_{T^+} q(t)(\bar{u}(t) - d_1)dt + \int_{T^-} q(t)(\bar{u}(t) - d_2)dt \right).
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$\beta(\bar{u}, \bar{\tau}_B) = (1 - \theta^0)\beta(u(t), \tau_B) - \sigma^0 k_\circ,$$

$$\text{où : } k_\circ = -(1 - \theta_0) \left(\int_{T^+} q(t)(\bar{u}(t) - d_1)dt + \int_{T^-} q(t)(\bar{u}(t) - d_2)dt \right).$$

Test :

1. Si $\beta(\bar{u}, \bar{\tau}_B) = 0$, alors le support-contrôle $\{\bar{u}, \bar{\tau}_B\}$ est optimal.
2. Si $\beta(\bar{u}, \bar{\tau}_B) \leq \varepsilon$, alors le support-contrôle $\{\bar{u}, \bar{\tau}_B\}$ est ε -optimal.
3. Si $\beta(\bar{u}, \bar{\tau}_B) > \varepsilon$, alors le support-contrôle $\{\bar{u}, \bar{\tau}_B\}$ n'est pas optimal, et on passe à la procédure finale.

3.8.3 Procédure finale

A partir du support τ_B obtenu à l'étape d'avant, on construit le co-contrôle $E(t) = -\psi^T b, t \in T$, et construisons le quasi-contrôle $w(t), t \in T$

$$w(t) = \begin{cases} d_1, & \text{si } E(t) > 0, \\ d_2, & \text{si } E(t) < 0, \\ \in [d_1, d_2] & \text{si } E(t) = 0, t \in T \end{cases} \quad (3.26)$$

et sa quasi-trajectoire correspondante $\mathcal{X} = \mathcal{X}(t), t \in T$ tq :

$$\dot{\mathcal{X}} = A\mathcal{X}(t) + bw, \quad \mathcal{X}(0) = x_0.$$

où $E(t)$ est calculé avec τ_B .

Si $H\mathcal{X}(t_1) = g$, alors le quasi-contrôle $w(t), t \in T$ est optimal.

Si $H\mathcal{X}(t_1) \neq g$, alors on construit le vecteur :

$$\lambda(\tau_B) = \varphi^{-1}(\tau_B)(g - H\mathcal{X}(t_1)), \quad \lambda \in R^m$$

A partir de ce vecteur, un test est effectué en comparant la norme pondérée de $g - H\mathcal{X}(t_1)$, i.e. $\|\lambda(\tau_B)\|$ avec une valeur seuil μ , où $\mu > 0$, donnée et qui représente le paramètre de la méthode :

1. Si $\|\lambda(\tau_B)\| > \mu$, alors on change τ_B en $\bar{\tau}_B$ par **la méthode duale**.
2. si $\|\lambda(\tau_B)\| < \mu$, On passe à la **l'étape finale**.

Méthode duale

La méthode duale consiste à modifier le support τ_B , de telle sorte que la quantité $\lambda(t^0)$ diminue jusqu'au point où le test sera négatif. soit $t^0 \in \tau_B$, tel que :

$$|\lambda(t^0)| = \max_{t \in \tau_B} |\lambda(t)| > \mu.$$

Le changement du support τ_B à $\bar{\tau}_B$ consiste à changer le co-contrôle $E(t)$ par le co-contrôle $\bar{E}(t) = E(t) + \gamma\delta(t)$, $t \in T$, où γ le pas dual le long de cette direction. Pour cela cherchons la fonction

$$\gamma(t) = \begin{cases} -\frac{E(t)}{\delta(t)} & \text{si } E(t)\delta(t) < 0, \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.27)$$

avec $\delta(t) = -\text{sing}(\lambda)(\phi(t_B))^{-1}\varphi(t)$.

Construisons l'ensemble $T_g(\gamma) = \{t \in T, \gamma(t) < \gamma\}$. De là, la vitesse de décroissance de la fonctionnelle du dual est égale à :

$$\lambda(\gamma) = -|\lambda(t^0)| + (d_2 - d_1) + \int_{T_g(\gamma)} |\delta(t)| dt.$$

Par construction $\lambda(0) < 0$, et $\lambda(\gamma) \leq \lambda(\bar{\gamma})$ si $\gamma < \bar{\gamma}$. Si $\gamma > 0$, alors le problème (3.1) ne possède pas de contrôle admissible, dans le cas contraire cherchons $\gamma_0 \geq 0$ tel que

$$\lambda(\gamma_0 - \gamma) < 0, \lambda(\gamma_0 + 0) \geq 0$$

pour tout γ tq : $0 < \gamma < \gamma_0$ Cherchons $t^* \in T \setminus \tau_B$ tel que :

$$E(t^*) + \gamma_0\delta(t^*) = 0, \quad \delta(t^*) \neq 0.$$

On obtient alors le nouveau support $\bar{\tau} = (\tau_B \setminus t^0) \cup t^*$.

Étape finale

L'étape finale consiste à modifier le support τ_B obtenu à l'étape précédente avec $\|\lambda(\tau_B) < \mu$, jusqu'à la réalisation du test $H\mathcal{X}(t_1) = g$. Elle est basée sur la méthode de Newton.

Désignons par $T^\circ = \{t \in T : E(t) = 0\}$ l'ensemble des points isolés t_j et supposons que $\dot{E}(t_j) \neq 0, j = \{1, \dots, m\}$. Cette étape consiste à déterminer

$\tau_B^\circ = \{\tau_j^\circ, j = 1, \dots, m\}$ à partir des équations :

$$(d_2 - d_1) \sum_{j=1}^m \text{signe} \left(\dot{E}(t_j) \right) \int_{\tau_j^\circ}^{t_j} \varphi(t) dt = g - H\mathcal{X}(t_1). \quad (3.28)$$

C'est-à-dire, trouver un τ_B° de sorte que $H\mathcal{X}(t_1) = g$. En effet, l'équation (3.28) est obtenue à partir de la formule du Cauchy (3.2). Nous avons :

$$\begin{aligned} g - H\mathcal{X}(t_1) &= g - H \left[F(t_1)x_0 + \int_0^{t_1} F(t_1)F^{-1}(t)bw(t)dt \right], \\ &= g - HF(t_1)x_0 - \int_{T_H} \varphi(t)w(t)dt - \int_{T_B} \varphi(t)w(t)dt. \end{aligned} \quad (3.29)$$

En identifiant la partie $g - HF(t_1)x_0 - \int_{T_H} \varphi(t)w(t)dt$ à zéro, ce qui implique :

$$H\mathcal{X}(t_1) - g = \int_{T_B} \varphi(t)w(t)dt$$

Subdivisons l'ensemble T_B en deux sous-ensembles :

$$T_B^+ = \{t_j \in T_B, \dot{E}(t_j) > 0\} \quad T_B^- = \{t_j \in T_B, \dot{E}(t_j) < 0\}.$$

Notons par $T_B = \{[t_j - \eta, T_j + \eta], j = 1, \dots, m\}$, on aura ainsi :

$$H\mathcal{X}(t_1) - g = \begin{cases} \sum_{j=1}^m (d_2 - d_1) \int_{\tau_j}^{t_j} \varphi(t) dt, & \text{si } \dot{E}(t_j) < 0, \\ \sum_{j=1}^m -(d_2 - d_1) \int_{\tau_j}^{t_j} \varphi(t) dt, & \text{si } \dot{E}(t_j) > 0. \end{cases} \quad (3.30)$$

Pour la résolution des équations (3.28), on prend comme approximation initiale de $\tau_B^\circ = \{\tau_j^{(0)}, j = 1, \dots, m\}$, avec $\tau_B^\circ = \tau_B$. Supposons connue la k -ème approximation $\tau_B^{(k)} = \{\tau_j^{(k)}, j = 1, \dots, m\}$. On a alors la relation de récurrence suivante :

$$\tau_B^{(k+1)} = \tau_B^{(k)} + \frac{1}{d_2 - d_1} \{ \text{signe} \left(\dot{E}(t_j) \right) \left(\alpha(\tau_B^{(k)})_j \right), j = 1, \dots, m \},$$

où $\alpha_j(\tau_B^{(k)})$ est un vecteur calculé par la relation (3.27). Alors, la fonction $w^\circ(t) = w(t), t \in T$ est calculée par le support τ_B° qui est un contrôle optimal pour le problème (3.1)

3.9 Conclusion :

Dacs ce chapitre nous avons rapellé la méthode directe dite "adaptée de simplexe" pour la résolution d'un problème de contrôle optimal. L'algorithme de cette méthode est d'un critère d'arrêt qui peut donner une solution approchée avec une précision choisie à l'avance.

Chapitre 4

Résolution d'un problème de contrôle optimal quadratique par la méthode adaptée

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à un problème de contrôle optimal d'un système dynamique linéaire avec un coût quadratique et un état initial et état final sont fixé.

On se propose de développer une méthode de résolution pour minimiser un critère quadratique terminal, et ce, en appliquant la méthode adaptée, conçue déjà pour résoudre des problèmes de programmation quadratique convexe (voir le chapitre 02).

4.2 Position de problème

Sur un intervalle de temps $T = [0, t_1]$, considérons le problème de minimisation de la fonctionnelle :

$$Z(u) = \frac{1}{2}x^T(t_1)Dx(t_1) + c^T x(t_1) \rightarrow \min_u \quad (4.1)$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), x(0) = x_0 \quad (4.2)$$

$$Hx(t_1) = g \quad (4.3)$$

$$d_1 \leq u(t) \leq d_2, \quad t \in T = [0, t_1], \quad (4.4)$$

— D : matrice symétrique semi-définie positive de dimension m

- c : vecteur de dimension n ;
- $x(t)$: vecteur de dimension n représentant l'état du système à l'instant t ;
- $u(t)$: commande à l'instant t (signal d'entrée), fonction scalaire constante par morceaux, telle que $d_1 \leq u(t) \leq d_2; t \in T = [0, t_1]$;
- $x(0) = x_0$: position initiale du système fixé ;
- A : matrice (réelle) carrée d'ordre n qui caractérise le système (pour plus de simplicité on la suppose constante, c'est -à-dire ne dépendant pas de la variable t) ;
- b : vecteur de R^n ;
- d_1 et d_2 sont des vecteurs de dimension n .

— H : est une matrice d'ordre $m \times n$, avec rang $H = m \leq n$
 $I = \{1, \dots, m\}, J = \{1, \dots, n\}$ l'ensemble des indices lignes et des colonnes de la matrice A .

La solution du système différentiel (4.2) est donnée par la formule de Cauchy

$$x(t) = F(t)[x_0 + \int_0^{t_1} F^{-1}(\tau)bu(\tau)d\tau] \quad t \in T \quad (4.5)$$

où $F(t) = \exp(At)$ est une matrice carrée d'ordre n , solution du système différentiel homogène

$$\begin{cases} \dot{F}(t) = AF(t) \\ F(0) = I_n \end{cases} \quad (4.6)$$

I_n étant la matrice identité d'ordre n .

En remplaçant la valeur de $x(t_1)$ dans le problème (4.1) (4.4) on obtient la formulation équivalente suivante :

$$\begin{cases} Z(u) = \frac{1}{2}x^T(t_1)Dx(t_1) + c^T x(t_1) \rightarrow \min \\ \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), x(0) = x_0 \\ HF(t_1)x_0 + \int_0^{t_1} HF^{-1}(\tau)bu(\tau)d\tau = g, \\ d_1 \leq u(t) \leq d_2, \quad t \in T = [0, t_1], \end{cases} \quad (4.7)$$

$$\text{où : } \bar{g} = g - HF(t_1)x_0, \quad \varphi(t) = HF(t_1)F^{-1}(t)b.$$

Définition 4.1. La commande $u(t)$ est dite admissible si elle satisfait les contraintes (4.3)-(4.4).

Définition 4.2. Une commande admissible $u(t)$ est dite optimale si elle minimise la fonctionnelle $Z(u)$, i.e : $Z(u^0) = \min_{d_1 \leq u(t) \leq d_2} Z(u)$.

et la trajectoire correspondante $x^0(t)$ est dite "trajectoire optimal".

Définition 4.3. Une commande admissible $u^\varepsilon(t)$ est dite ε -optimale si et seulement si

$$Z(u^\varepsilon) - Z(u^0) \leq \varepsilon,$$

avec ε un nombre positif donné .

4.3 Support de contrôle

Définition 4.4. Soient $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m\}$ m points isolés de T , et $\tau_B = \{\tau_i, i = 1, \dots, m\}$.

A chaque τ_i , on associe un intervalle de la forme $T_i = [\underline{\tau}_i, \bar{\tau}_i]$ tel que :

$$T_i \cap T_j = \emptyset.$$

L'ensemble T_B et son complémentaire T_H sont définis par :

$$T_B = \bigcup_{i=1}^m T_i \quad \text{et} \quad T_H = T/T_B.$$

1. Support du problème

L'ensemble τ_B est appelé support (appui) du problème si la matrice de support $\varphi(\tau_B)$ est inversible, c'est-à-dire $\det \varphi(\tau_B) \neq 0$.

2. Support généralisé du problème

L'ensemble T_B est appelé support généralisé du problème (4.1)(4.3) si le système

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + bu(t), \\ Hx(t_1) = 0. \end{cases} \quad (4.8)$$

n'admet pour $u(t) = 0, t \in T_H$ que la solution triviale $u(t) = 0, t \in T_B$, mais pour tout intervalle $T^* = [\tau_*, \tau^*], T^* \subset T_H, \tau_* \neq \tau^*$ et

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t \in T_H/T^* \\ u^* & \text{pour } t \in T_B \cup T^* \end{cases}$$

le système (4.8) admet une solution non triviale, i.e : $u(t) \neq 0, t \in T_B \cup T^*$ dans la classe des contrôles constants sur $T_i, i = \overline{1, m}$.

Définition 4.5. La paire $\{u, \tau_B\}$ formée d'une commande admissible $u = u(t), t \in T$ et d'un support τ_B est appelée support contrôle.

Définition 4.6. Le commande support est dite non dégénérée s'il existe de tels nombres $\lambda_0 > 0, \mu_0 > 0, u_i^\lambda, i = \overline{1, m}$ telque, $\forall \lambda, 0 < \lambda < \lambda_0$, les relations suivantes sont vérifiées.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^m \int_{t_i-\lambda}^{t_i+\lambda} \varphi(t)u(t)dt = \sum_{i=1}^m u_i^\lambda \int_{t_i-\lambda}^{t_i+\lambda} \varphi(t)dt. \\ d_1 + \mu_0 \leq u_i^\lambda \leq d_2 + \mu_0 \end{array} \right. \quad i = \overline{1, m}.$$

4.4 Accroissement de la fonctionnelle

Soit $\{u, \tau_B\}$ un support-contrôle non dégénéré, et $x(t), t \in T$ est la trajectoire (4.2) correspondante, on considère une autre commande admissible $\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t), t \in T$ et sa trajectoire correspondante $\bar{x}(t) = x(t) + \Delta x(t), t \in T$ L'accroissement de la fonctionnelle s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \Delta Z(u(t)) &= Z(\bar{u}) - Z(u) \\ &= (Dx(t_1) + c)^T \Delta x(t_1) + \frac{1}{2} \Delta x(t_1)^T D \Delta x(t_1), \\ &= (Dx(t_1) + c)^T \int_0^{t_1} F(t) F^{-1}(t) b \Delta u(t) dt + \frac{1}{2} \Delta x(t_1)^T D \Delta x(t_1), \\ &= \int_0^{t_1} (Dx(t_1) + c)^T F(t) F^{-1}(t) \Delta u(t) b dt + \frac{1}{2} \Delta x(t_1)^T D \Delta x(t_1), \\ &= \int_0^{t_1} p(t) \Delta u(t) dt + \frac{1}{2} \Delta x(t_1)^T D \Delta x(t_1). \end{aligned} \tag{4.9}$$

où $p(t) = (Dx(t_1) + c)^T F(t) F^{-1}(t) b$.

Construisons le vecteur des potentiels $y : y^T = p_B \varphi_B^{-1}$ et le vecteur des estimations

$$E(t) = -\psi(t)b, t \in T \tag{4.10}$$

$\psi(t)$: est la solution du système conjuguée :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\psi} = -A^T \psi, \\ \psi(t_1) = (Dx(t_1) + c) - H^T y. \end{array} \right. \tag{4.11}$$

La solution $\psi(t)$ est donnée par :

$\psi(t) = (K^T - H^T y) F(t) F^{-1}(t)$ où : $K(x) = (Dx(t_1) + c)$. Donc le vecteur des estimations peut être écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} E(t) &= -\psi(t)b \\ &= -(K^T - H^T y) F(t_1) F^{-1}(t) b \\ &= -K^T F(t_1) F^{-1}(t) b + H^T y F(t_1) F^{-1}(t) b \\ &= -p(t) + y^T \varphi(t), t \in T \end{aligned}$$

Donc l'accroissement de la fonctionnelle prend la forme suivante :

$$\begin{aligned}
\Delta Z(u(t)) &= Z(\bar{u}) - Z(u) = \int_0^{t_1} p(t)\Delta u(t)dt + \frac{1}{2}\Delta x(t_1)^T D\Delta x(t_1), \\
&= \int_0^{t_1} (y^T \varphi(t) - E(t))\Delta u(t)dt + \frac{1}{2}\Delta x(t_1)^T D\Delta x(t_1), \\
&= \int_0^{t_1} y^T \varphi(t)\Delta u(t)dt - \int_0^{t_1} E(t)\Delta u(t)dt + \frac{1}{2}\Delta x(t_1)^T D\Delta x(t_1), \\
&= - \int_0^{t_1} E(t)\Delta u(t)dt + \frac{1}{2}\Delta x(t_1)^T D\Delta x(t_1).
\end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\text{car } \int_0^{t_1} y^T \varphi(t)\Delta u(t)dt = 0.$$

En effet, de l'admissibilité de $u(t)$ et $\bar{u}(t)$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\int_0^{t_1} y^T \varphi(t)\Delta u(t)dt &= \int_0^{t_1} y^T (HF(t)F^{-1}(t)b(\bar{u}(t) - u(t)))dt \\
&= \int_0^{t_1} y^T (H\bar{x}(t_1) - Hx(t_1)) = \int_0^{t_1} y^T (g - g) = 0
\end{aligned}$$

Calcul de la Valeur de suboptimalité :

Le contrôle $\bar{u}(t), t \in T$ est admissible, alors :

$$d_1 - u(t) \leq \Delta u(t) \leq d_2 - u(t). \tag{4.13}$$

Le maximum de l'accroissement de la fonctionnelle (4.12) sous les contraintes (4.13) est atteint pour :

$$\Delta u(t) = \begin{cases} d_2 - u(t), & \text{si } E(t) < 0, \\ d_1 - u(t), & \text{si } E(t) > 0, \\ 0, & \text{si } E(t) = 0, t \in T \end{cases} \tag{4.14}$$

et est égal à :

$$\beta(u, \tau_B) = \int_{T^+} E(t)(u(t) - d_1) + \int_{T^-} E(t)(u(t) - d_2) + \frac{1}{2}\Delta x(t_1)^T D\Delta x(t_1) \tag{4.15}$$

appelée valeur de suboptimalité de support-contrôle $\{u, \tau_B\}$, où :

$$T^+ = \{t \in T, E(t) > 0\} \quad T^- = \{t \in T, E(t) < 0\}.$$

De là,

$$\Delta Z(u) = Z(\bar{u}) - Z(u) = - \int_0^{t_1} E(t)\Delta u(t)dt + \frac{1}{2}\Delta x(t_1)^T D\Delta x(t_1) \leq \beta(u, \tau_B), \forall u$$

4.5 Critère d'optimalité

Théorème 4.1. *Les relations suivantes*

$$\begin{cases} u(t) = d_2, & \text{si } E(t) < 0, \\ u(t) = d_1, & \text{si } E(t) > 0, \\ d_1 \leq u(t) \leq d_2, & \text{si } E(t) = 0, t \in T \end{cases} \quad (4.16)$$

sont suffisantes et dans le cas de la non dégénérescence, elles sont nécessaires pour l'optimalité du support-contrôle $\{u, \tau_B\}$.

Preuve.

1. Condition suffisante : Si les relations (4.16) sont vérifiées, alors $\beta(u, \tau_B) = 0$. Comme $\Delta Z(u) = Z(\bar{u}) - Z(u) \leq \beta(u, \tau_B), \forall \bar{u}$, ce qui implique $Z(\bar{u}) \leq Z(u), \forall \bar{u}$. Par conséquent, la paire $\{u, \tau_B\}$ est un support-contrôle optimal.

2. Condition nécessaire : Soit $\{u, \tau_B\}$ un support-contrôle optimal non dégénéré et supposons que les relations (4.16) ne sont pas vérifiées, c'est-à-dire :

$$\exists(t_0) \in T, tq : E(t_0) > 0 \text{ et } u(t_0) > d_1 \text{ où } E(t_0) < 0 \text{ et } u(t_0) < d_2.$$

supposons que $\exists(t_0) \in T_H, tq : E(t_0) > 0 \text{ et } u(t_0) > d_1$
Construisons le contrôle $\Delta u(t)$ de la manière suivante :

$$\Delta u(t) = \begin{cases} -\theta, & \text{si } t = t_0, \theta > 0, \\ 0, & \text{si } t \in T_H/t_0. \end{cases}$$

L'accroissement de la fonctionnelle devient :

$$\begin{aligned} \Delta Z(u) &= Z(\bar{u}) - Z(u), \\ &= - \int_0^{t_1} E(t) \Delta u(t) dt + \frac{1}{2} \Delta x(t_1)^T D \Delta x(t_1), \\ &= -E(t_0) \Delta u(t_0) - \int_{T/t_0} E(t) \Delta u(t) dt + \frac{1}{2} \Delta x(t_1)^T D \Delta x(t_1), \\ &= \theta E(t_0) dt + \frac{1}{2} \Delta x(t_1)^T D \Delta x(t_1) \end{aligned} \quad (4.17)$$

Par conséquent, $\Delta Z(u(t)) = \theta E(t_0) dt + \frac{1}{2} \Delta x(t_1)^T D \Delta x(t_1) > 0$, ce qui implique :

$Z(\bar{u}(t)) > Z(u(t))$ et ceci contredit l'optimalité de $u(t)$.

□

4.5.1 Principe du maximum

Le critère d'optimalité peut être écrit sous forme du principe du minimum, en utilisant la fonction Hamiltonienne

$$H(u(t), x(t), \psi(t), t) = \psi^T(t)(Ax(t) + bu(t)),$$

où $\psi(t), t \in T$ est la solution du système conjugué (4.11). La condition suivante :

$$H(u(t), x(t), \psi(t), t) = \max_{d_1 \leq u(t) \leq d_2} H(u(t), x(t), \psi(t), t), t \in T$$

est suffisante et dans le cas de non dégénérescence, elle est nécessaire pour l'optimalité du support-contrôle $\{u(t), \tau_B\}$.

4.5.2 Principe du Suboptimalité

Théorème 4.2. (Critère de Suboptimalité ou critère ε -optimalité)

Soit $\varepsilon > 0$, donné. Le contrôle admissible $u(t), t \in T$, est ε -optimal si et seulement s'il existe un tel support τ_B tel que $u(t)$ et sa trajectoire correspondante $x(t), t \in T$ vérifient la condition ε -maximum :

$$\begin{cases} H(u(t), x(t), \psi(t), t) = \max_{d_1 \leq u(t) \leq d_2} H(u(t), x(t), \psi(t), t) - \varepsilon(t), t \in T, \\ \text{avec } \int_0^{t_1} \varepsilon(t) dt \leq \varepsilon. \end{cases} \quad (4.18)$$

Preuve.

1. Condition suffisante : Supposons que la condition (4.18) soit vérifiée ; de la valeur de suboptimalité (4.15) du support-contrôle $\{u, \tau_B\}$, et de la formule (4.10) on déduit :

$$\begin{aligned}
\beta(u, \tau_B) &= \int_{T^-} E(t)(u(t) - d_1)dt + \int_{T^+} E(t)(u(t) - d_2)dt + \frac{1}{2}(\Delta x(t_1))^T D(\Delta x(t_1)), \\
&= \int_{T^-} E(t)(u(t) - d_1)dt + \int_{T^+} E(t)(u(t) - d_2)dt + \frac{1}{2}(\Delta x(t_1))^T D(\Delta x(t_1)), \\
&= \int_{T^-} \psi^T(t)b(d_1 - u(t))dt + \frac{1}{2}(\Delta x(t_1))^T D(\Delta x(t_1)) \\
&\quad + \frac{1}{2}(\Delta u(t))^T D(\Delta u(t)), \\
&= \int_{T^-} (\psi^T(t)Ax + \psi^T b d_1 - \psi^T(t)Ax - \psi^T(t)bu(t))dt \\
&\quad + \int_{T^+} (\psi^T(t)Ax + \psi^T b d_2 - \psi^T(t)Ax - \psi^T(t)bu(t))dt \\
&\quad + \frac{1}{2}(\Delta x(t_1))^T D(\Delta x(t_1)), \\
&= \int_{T_1^+} \psi^T(Ax + b d_1)dt + \int_{T^-} \psi^T(Ax + b d_2)dt \\
&\quad - \int_0^{t_1} \psi^T(Ax - bu(t))dt + \frac{1}{2}(\Delta x(t_1))^T D(\Delta x(t_1)), \\
&= \int_0^{t_1} \max_{d_1 \leq u(t) \leq d_2} H(u(t), x(t), \psi(t), t)dt - \int_0^{t_1} H(u(t), x(t), \psi(t), t)dt \\
&\quad + \frac{1}{2}(\Delta x(t_1))^T D(\Delta x(t_1)), \\
&= \int_0^{t_1} \varepsilon(t)dt.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

En utilisant l'équation (4.18), on obtient : $\beta(u, \tau_B) \leq \varepsilon$, et comme $Z(\bar{u}) - Z(u) < \beta(u, \tau_B) \leq \varepsilon$. Donc le commande $\bar{u}(t)$ est ε -optimal.

2. Condition nécessaire :

Soit $u(t), t \in T$ une commande ε -optimal de la formule (4.15) pour un certain support τ_B , on calcule la valeur de suboptimalité $\beta(u, \tau_B)$ écrite sous la forme :

$$\begin{aligned}
\beta &= \beta(u, \tau_B) = \int_0^{t_1} E(t)u(t)dt - \int_{T^-} E(t)d_2dt - \int_{T^+} E(t)d_1dt, \\
&\quad + \frac{1}{2}(\Delta(x(t_1)))^T D(\Delta(x(t_1)))
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Introduisons le problème dual du problème(4.1)-(4.4) :

$$\begin{cases} L(z(t), v(t), w(t)) = \frac{1}{2}z^T D z + \bar{g}^T z + \int_0^{t_1} v(t) d_1 dt + \int_0^{t_1} w(t) d_2 dt \rightarrow \min \\ z^T \varphi(t) - v(t) + w(t) = c(t) \\ v(t) \geq 0, w(t) \geq 0, t \in T \end{cases} \quad (4.21)$$

De la valeur de suboptimalité (4.18) et en vertu des relations (4.12) et (4.20) on obtient :

$$\begin{aligned} \beta &= \beta(u, \tau_B) = \int_0^{t_1} y^T \varphi(t) u(t) dt - \int_0^{t_1} p(t) u(t) dt - \int_0^{t_1} v(t) d_1 dt + \int_0^{t_1} w(t) d_2 dt, \\ &+ \frac{1}{2} (\Delta(x(t_1)))^T D (\Delta(x(t_1))) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Or, on a :

$$\int_0^{t_1} y^T \varphi(t) u(t) dt = \bar{g}^T y$$

et de la relation de dualité, on obtient :

$$Z(u^0) = L(y^0, v^0, w^0).$$

Donc :

$$\int_0^{t_1} p(t) u^0(t) dt = \bar{b}^T y^0 - \int_0^{t_1} v^0(t) d_1 u(t) dt + \int_0^{t_1} w^0(t) d_2 dt.$$

De cette égalité, la valeur de la suboptimalité prend la forme :

$$\begin{aligned} \beta &= \int_0^{t_1} p(t) u^0(t) dt - \int_0^{t_1} p(t) u(t) dt \\ &+ \bar{b}^T y - \int_0^{t_1} v(t) d_1 u(t) dt + \int_0^{t_1} w(t) d_2 dt + \bar{b}^T y^0 \\ &+ \int_0^{t_1} v^0(t) d_1 u(t) dt - \int_0^{t_1} w^0(t) d_2 dt \\ &+ \frac{1}{2} (\Delta(x(t_1)))^T D (\Delta(x(t_1))). \\ \beta &= \beta(u, \tau_B) = \beta_u + \beta_B. \end{aligned}$$

où

$$\beta_u = \int_0^{t_1} p(t) u^0(t) dt - \int_0^{t_1} p(t) u(t) dt$$

est appelée la mesure de la non optimalité de la commande $u(t), t \in T$, et

$$\begin{aligned} \beta_B &= \bar{g}^T y - \int_0^{t_1} v(t) d_1 u(t) dt + \int_0^{t_1} w(t) d_2 dt - \bar{g}^T y^0 + \int_0^{t_1} v^0(t) d_1 dt - \int_0^{t_1} w^0(t) d_2 dt, \\ &- \frac{1}{2} (\Delta(x(t_1)))^T D (\Delta(x(t_1))) \end{aligned}$$

est appelée la mesure de la non optimalité de support τ_B .
Si à la commande $u(t), t \in T$, on associe un support τ_B^0 optimal, c'est-à-dire $\beta(\tau_B^0) = \beta_B = 0$, alors :

$$\beta(u, \tau_B^0) = \beta_u \leq \varepsilon, \quad (4.23)$$

car u est ε optimale. Posons :

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} E(t)(u(t) - d_1) & \text{si } t \in T^+ \\ E(t)(u(t) - d_2) & \text{si } t \in T^- \\ 0, & \text{si } E(t) = 0, t \in T. \end{cases} \quad (4.24)$$

En utilisant la co-commande, on obtient :

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \psi^T(t)(Ax(t) + bd_1) - \psi^T(t)(Ax(t) + bu(t)) & \psi^T(t)b < 0, \\ \psi^T(t)(Ax(t) + bd_2) - \psi^T(t)(Ax(t) + bu(t)) & \psi^T(t)b > 0, \\ 0. & \psi^T(t)b = 0. \end{cases}$$

En utilisant la fonction Hamiltonienne, $\varepsilon(t)$ sera égal à :

$$\varepsilon(t) = \max_{d_1 \leq u(t) \leq d_2} H(x(t), \psi(t), u(t)) - H(x(t), \psi(t), u(t)), \quad t \in T \quad (4.25)$$

Des condition (4.23) et (4.25) découle alors la condition ε -maximum. \square

4.6 Méthode de résolution

Soit $\{u(t), \tau_B\}$ un support-contrôle admissible de départ ne vérifiant pas la condition du principe du ε -maximum. La transformation $\{u(t), \tau_B\}$ vers $\{\bar{u}(t), \bar{\tau}_B\}$ est constituée de trois procédures :

1. Changement de contrôle $u(t) \longrightarrow \bar{u}(t)$
2. Changement du support $\tau_B \longrightarrow \bar{\tau}_B$
3. La procédure finale.

4.6.1 Changement de contrôle

On construit un nouveau contrôle admissible sous la forme :

$\bar{u}(t) = u(t) + \theta l(t), t \in T$, où $l(t)$ est la direction d'amélioration du contrôle $u(t), t \in T$ et θ est le pas maximal admissible le long de cette direction.

Détermination de la direction admissible $l(t)$

Sur T_H , on pose $\theta = 1$

La direction est définie de sorte à maximiser l'accroissement de la fonctionnelle :

$$l(t) = \begin{cases} d_1 - u(t), & \text{si } E(t) > 0, \\ d_2 - u(t), & \text{si } E(t) < 0, \\ 0, & \text{si } E(t) = 0, \end{cases}$$

Comme $u(t)$ et $\bar{u}(t)$, sont admissible, on obtient :

$$\theta \int_0^{t_1} \varphi(t)l(t)dt = 0, \quad \text{avec } \theta \neq 0.$$

Alors :

$$\int_{T_B} \varphi(t)l(t)dt + \int_{T_H} \varphi(t)l(t)dt = 0$$

Ce qui implique :

$$\int_{T_B} \varphi(t)l(t)dt = - \int_{T_H} \varphi(t)l(t)dt$$

Comme $l(T_B)$ est constante et $\varphi(T_B)$ est inversible, donc :

$$l(T_B) = -\varphi^{-1}(T_B) \int_{T_H} \varphi(t)l(t)dt.$$

Détermination du pas maximal :

Nous avons $d_1 \leq \bar{u}(t) \leq d_2$, ce qui implique :

$$d_1 \leq u(t) + \theta l(t) \leq d_2, t \in T.$$

D'où :

$$d_1 - u(t) \leq \theta l(t) \leq d_2 - u(t), t \in T \quad (4.26)$$

Pour que la condition (4.26) soit vérifiée, il faut chercher un pas $\theta = \theta_{t_0}$ avec : $\theta(t_0) = \min \theta(t)$ et tel que :

$$\theta(t) = \begin{cases} \frac{d_1 - u(t)}{l(t)}, & \text{si } l(t) < 0, \\ \frac{d_2 - u(t)}{l(t)}, & \text{si } l(t) > 0, \\ \infty, & \text{si } l(t) = 0, t \in T_B. \end{cases} \quad (4.27)$$

Par conséquent, le pas maximal est donné par :

$$\theta^0 = \min(1, \theta(t_0)).$$

Calculons le nouveau contrôle : La direction et le pas maximal calculés précédemment, nous permettent d'aboutir au nouveau contrôle :

$$\bar{u}(t) = u(t) + \theta^0 l(t), t \in T$$

Calculons la nouvelle valeur du suboptimalité :

$$\begin{aligned}
\beta(\bar{u}(t), \tau_B) &= \int_{T^+} E(t)(\bar{u}(t) - d_1)dt + \int_{T^-} E(t)(\bar{u}(t) - d_2)dt + \frac{1}{2}(\Delta x(t_1))^T D(\Delta x(t_1)), \\
&= \int_{T^+} E(t)(u(t) + \theta^0 l(t) - d_1)dt + \int_{T^-} E(t)(u(t) + \theta^0 l(t) - d_2)dt \\
&\quad + \frac{1}{2}(\Delta x(t_1))^T D(\Delta x(t_1)), \\
&= \int_{T^+} E(t)(u(t) - d_1)dt + \int_{T^-} E(t)(u(t) - d_2)dt + \frac{1}{2}(\Delta x(t_1))^T D(\Delta x(t_1)), \\
&\quad + \int_{T^+} E(t)\theta^0 l(t)dt + \int_{T^-} E(t)\theta^0 l(t)dt, \\
&= \beta(u(t), \tau_B) - \theta^0 \int_{T^+} E(t)(u(t) - d_1)dt - \theta^0 \int_{T^-} E(t)(u(t) - d_2)dt, \\
&= \beta(u(t), \tau_B) - \theta^0 \left(\beta(u(t), \tau_B) - \frac{1}{2}(\Delta x(t_1))^T D(\Delta x(t_1)) \right)
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Par conséquent :

$$\beta(\bar{u}(t), \tau_B) = (1 - \theta^0)(\beta(u(t), \tau_B) + \theta^0 \frac{1}{2}(\Delta x(t_1))^T D(\Delta x(t_1))).$$

Test :

A partir de la valeur de suboptimalité, on peut réaliser le test d'optimalité suivant :

1. Si $\beta(\bar{u}(t), \tau_B) = 0$, alors le support-contrôle $\{\bar{u}(t), \tau_B\}$ est optimal.
2. Si $\beta(\bar{u}(t), \tau_B) \leq, \varepsilon$ alors le support-contrôle $\{\bar{u}(t), \tau_B\}$ est ε -optimal.
3. Si $\beta(\bar{u}(t), \tau_B) >, \varepsilon$ alors le support-contrôle $\{\bar{u}(t), \tau_B\}$ n'est pas optimal, alors on passe au changement de support.

4.6.2 Changement du support

Le changement du support consiste à remplacer le $t_0 \in T_B$ par un autre $t_1 \in T_H$. Le passage de τ_B vers $\bar{\tau}_B$ entraîne le changement du vecteur des potentiels et des

estimations (co-contrôle) :

$$\bar{y} = y + \sigma q(I) \quad \text{et} \quad \bar{E}(t) = E(t) + \sigma q(t), t \in T, \quad (4.29)$$

où $q(t)$ est la direction admissible du changement du co-contrôle et σ est le pas dual maximal.

Construction de la direction admissible $q(t)$:

Posons

$$q(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } \bar{u}(t) = d_1, \quad t = t_0, \\ -1, & \text{si } \bar{u}(t) = d_2, \quad t = t_0, \\ 0, & \text{si } t \in T_B/t_0. \end{cases} \quad (4.30)$$

Nous avons :

$$\bar{E}(t) = \bar{y}^T \varphi(t) - p(t) = y^T \varphi(t) + \sigma q(I) \varphi(t) - p(t),$$

et ainsi

$$\bar{E}(t) = E(t) + \sigma q(t) = y^T \varphi(t) - p(t) + \sigma q(t).$$

De là, on obtient : $\sigma q(I) \varphi(t) = \sigma q(t)$, puisque $\sigma \neq 0$ alors $q(I) \varphi(t) = q(t)$.
Sur T_B , on a :

$$q(I) = q(T_B) \phi_B^{-1}.$$

Par conséquent :

$$q^T(t) = q(T_B) \phi_B^{-1} \varphi(t), \quad t \in T.$$

Construction du pas dual maximal σ

Le pas maximal $\sigma(t_1) = \sigma^0$ est donné par :

$$\sigma^0 = \min_{t \in T_H} \sigma(t)$$

où :

$$\sigma(t) = \begin{cases} -\frac{E(t)}{q(t)} & \text{si } E(t)q(t) < 0, t \in T \\ 0, & \text{si } E(t) = 0, \text{ et } q(t) > 0, \text{ et } u = d_1, \\ & \text{ou } E(t) = 0, \text{ et } q(t) < 0, \text{ et } u = d_2, t \in T_H. \\ \infty, & \text{si non} \end{cases} \quad (4.31)$$

Donc, t_0 sera remplacé par t_1 dans l'ensemble T_B . Par conséquent, le nouveau support est :

$$\bar{\tau}_B = (\tau_B / \{t_0\}) \cup t_1$$

Calculons la nouvelle valeur de la suboptimalité du support-contrôle $\{\bar{u}, \bar{\tau}_B\}$.

$$\begin{aligned}
\beta(\bar{u}, \bar{\tau}_B) &= \int_{T^+} \bar{E}(t)(\bar{u}(t) - d_1)dt + \int_{T^-} \bar{E}(t)(\bar{u}(t) - d_2)dt + \frac{1}{2}(\Delta x(t_1))^T D(\Delta x(t_1)), \\
&= \int_{T^+} (E(t) + \sigma^0 q(t))(\bar{u}(t) - d_1)dt + \int_{T^-} (E(t) + \sigma^0 q(t))(\bar{u}(t) - d_2)dt \\
&\quad + \frac{1}{2}(\Delta x(t_1))^T D(\Delta x(t_1)), \\
&= \int_{T^+} E(t)(\bar{u}(t) - d_1)dt + \int_{T^-} E(t)(\bar{u}(t) - d_2)dt + \frac{1}{2}(\Delta x(t_1))^T D(\Delta x(t_1)), \\
&\quad + \sigma^0 \left(\int_{T^+} q(t)(t)(\bar{u}(t) - d_1)dt + \int_{T^-} q(t)(t)(\bar{u}(t) - d_2)dt \right), \\
&= \beta(\bar{u}, \tau_B) + \sigma^0 \left(\int_{T^+} q(t)(t)(\bar{u}(t) - d_1)dt + \int_{T^-} q(t)(t)(\bar{u}(t) - d_2)dt \right).
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$\beta(\bar{u}, \bar{\tau}_B) = (1 - \theta^0)(\beta(u(t), \tau_B) + \theta_0 \frac{1}{2}(\Delta x(t_1))^T D(\Delta x(t_1)) - \sigma^0 k_\circ), \quad (4.32)$$

où : $k_\circ = -(1 - \theta_0) \left(\int_{T^+} q(t)(t)(u(t) - d_1)dt + \int_{T^-} q(t)(t)(u(t) - d_2)dt \right)$.

Test :

1. Si $\beta(\bar{u}, \bar{\tau}_B) = 0$, alors le support-contrôle $\{\bar{u}, \bar{\tau}_B\}$ est optimal.
2. Si $\beta(\bar{u}, \bar{\tau}_B) \leq \varepsilon$, alors le support-contrôle $\{\bar{u}, \bar{\tau}_B\}$ est ε -optimal.
3. Si $\beta(\bar{u}, \bar{\tau}_B) > \varepsilon$, alors le support-contrôle $\{\bar{u}, \bar{\tau}_B\}$ n'est pas optimal, et on passe à la procédure finale.

4.6.3 Procédure finale

A partir du support τ_B obtenu à l'étape d'avant, on construit le co-contrôle $E(t) = -\psi^T b, t \in T$, et construisons le quasi-contrôle $w(t), t \in T$

$$w(t) = \begin{cases} d_2, & \text{si } E(t) > 0, \\ d_1, & \text{si } E(t) < 0, \\ \in [d_1, d_2] & \text{si } E(t) = 0, t \in T \end{cases} \quad (4.33)$$

et sa quasi-trajectoire correspondante $\mathcal{X} = \mathcal{X}(t), t \in T$ tq :

$$\dot{\mathcal{X}} = A\mathcal{X}(t) + bw(t), \quad \mathcal{X}(0) = x_0$$

où $E(t)$ est calculé avec τ_B .

Si $H\mathcal{X}(t_1) = g$, alors le quasi-contrôle $w(t), t \in T$ est optimal.

Si $H\mathcal{X}(t_1) \neq g$, alors on construit le vecteur :

$$\lambda(\tau_B) = \varphi^{-1}(\tau_B)(g - H\mathcal{X}(t_1)), \quad \lambda \in R^m$$

A partir de ce vecteur, un test est effectué en comparant la norme pondérée de $g - H\mathcal{X}(t_1)$, i.e. $\|\lambda(\tau_B)\|$ avec une valeur seuil μ , où $\mu > 0$, donnée et qui représente le paramètre de la méthode :

1. Si $\|\lambda(\tau_B)\| > \mu$, alors on change τ_B en $\bar{\tau}_B$ par **la méthode duale**.
2. Si $\|\lambda(\tau_B)\| < \mu$, On passe à la **l'étape finale**.

Méthode duale

La méthode duale consiste à modifier le support τ_B , de telle sorte que la quantité $\lambda(t^0)$ diminue jusqu'au point où le test sera négatif. soit $t^0 \in \tau_B$, tel que :

$$|\lambda(t^0)| = \max_{t \in \tau_B} |\lambda(t)| > \mu.$$

Le changement du support τ_B à $\bar{\tau}_B$ consiste à changer le co-contrôle $\Delta(t)$ par le co-contrôle $\bar{E}(t) = E(t) + \gamma\delta(t)$, $t \in T$, où γ le pas dual le long de cette direction. Pour cela cherchons la fonction

$$\gamma(t) = \begin{cases} -\frac{E(t)}{\delta(t)} & \text{si } E(t)\delta(t) < 0, \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.34)$$

avec $\delta(t) = -\text{sing}(\lambda)(\varphi_B(t))^{-1}\varphi(t)$.

Construisons l'ensemble $T_g(\gamma) = \{t \in T, \gamma(t) < \gamma\}$. De là la vitesse de décroissance de la fonctionnelle du dual est égale à :

$$\lambda(\gamma) = -|\lambda(t^0)| + (d_2 - d_1) + \int_{T_g(\gamma)} |\delta(t)| dt.$$

Par construction $\lambda(0) < 0$, et $\lambda(\gamma) \leq \lambda(\bar{\gamma})$ si $\gamma < \bar{\gamma}$. Si $\gamma > 0$, alors le problème (4.1)-(4.4) ne possède pas de contrôle admissible, dans le cas contraire cherchons $\gamma_0 \geq 0$ tel que

$$\lambda(\gamma_0 - \gamma) < 0, \lambda(\gamma_0 + 0) \geq 0$$

pour tout γ tq : $0 < \gamma < \gamma_0$ Cherchons $t^* \in T \setminus \tau_B$ tel que :

$$E(t^0) + \gamma_0\delta(t^*) = 0, \quad \delta(t^*) \neq 0.$$

On obtient alors le nouveau support $\bar{\tau} = (\tau_B \setminus t^0) \cup t^*$.

Étape finale

L'étape finale consiste à modifier le support τ_B obtenu à l'étape précédente avec $\|\lambda(\tau_B)\| < \mu$, jusqu'à la réalisation du test $H\mathcal{X}(t_1) = g$. Elle est basée sur la méthode de Newton.

Désignons par $T^\circ = \{t \in T : E(t) = 0\}$ l'ensemble des points isolés t_j et supposons que $\dot{E}(t_j) \neq 0, j = \{1, \dots, m\}$. Cette étape consiste à déterminer

$\tau_B^\circ = \{\tau_j^\circ, j = 1, \dots, m\}$ à partir des équations :

$$(d_2 - d_1) \sum_{j=1}^m \text{signe} \left(\dot{E}(t_j) \right) \int_{\tau_j^\circ}^{t_j} \varphi(t) dt = g - H\mathcal{X}(t_1). \quad (4.35)$$

C'est-à-dire, trouver un τ_B° de sorte que $H\mathcal{X}(t_1) = g$. En effet, l'équation (4.35) est obtenue à partir de la formule du Cauchy (4.5). Nous avons :

$$\begin{aligned} g - H\mathcal{X}(t_1) &= g - H \left[F(t_1)x_0 + \int_0^{t_1} F(t_1)F^{-1}(t)bw(t)dt \right], \\ &= g - HF(t_1)x_0 - \int_{T_H} \varphi(t)w(t)dt - \int_{T_B} \varphi(t)w(t)dt. \end{aligned} \quad (4.36)$$

En identifiant la partie $g - HF(t_1)x_0 - \int_{T_H} \varphi(t)w(t)dt$ à zéro, ce qui implique :

$$H\mathcal{X}(t_1) - g = \int_{T_B} \varphi(t)w(t)dt.$$

Subdivisons l'ensemble T_B en deux sous-ensembles :

$$T_B^+ = \{t_j \in T_B, \dot{E}(t_j) > 0\} \quad T_B^- = \{t_j \in T_B, \dot{E}(t_j) < 0\}.$$

Notons par $T_B = \{[t_j - \eta, T_j + \eta], j = 1, \dots, m\}$, on aura ainsi :

$$H\mathcal{X}(t_1) - g = \begin{cases} \sum_{j=1}^m (d_2 - d_1) \int_{\tau_j}^{t_j} \varphi(t) dt, & \text{si } \dot{E}(t_j) < 0, \\ \sum_{j=1}^m -(d_2 - d_1) \int_{\tau_j}^{t_j} \varphi(t) dt, & \text{si } \dot{E}(t_j) > 0. \end{cases} \quad (4.37)$$

Pour la résolution des équations (4.35), on prend comme approximation initiale de $\tau_B^\circ = \{\tau_j^{(0)}, j = 1, \dots, m\}$, avec $\tau_B^\circ = \tau_B$. Supposons connue la k -ème approximation $\tau_B^{(k)} = \{\tau_j^{(k)}, j = 1, \dots, m\}$. On a alors la relation de récurrence suivante :

$$\tau_B^{(k+1)} = \tau_B^{(k)} + \frac{1}{d_2 - d_1} \{ \text{signe} \left(\dot{E}(t_j) \right) \left(\alpha(\tau_B^{(k)})_j \right), j = 1, \dots, m \},$$

où $\alpha_j(\tau_B^{(k)})$ est un vecteur calculé par la relation (4.34).

Alors, la fonction $w^\circ(t) = w(t), t \in T$ est calculée par le support τ_B° qui est un contrôle optimal pour le problème (4.1)-(4.4).

4.7 Shéma de l'algorithme

1. Test de commandabilité du système :
Calculer le rang $[b, Ab, \dots, A^{n-1}b]$ alors

- Si $rg[b, Ab, \dots, A^{n-1}b] = n$ alors le système est commandable, aller en 2
- sinon arrêter le processus de résolution et le problème n'admet pas de solution optimale.

2. Prendre un support contrôle de départ admissible $\{u, \tau_B\}$, avec la trajectoire admissible correspondante $x(t), t \in T$

Calculer la valeur de la fonctionnelle en u .

Déterminer la co-commande : $E(t) = y^T \varphi(t) - p(t), t \in T$

3. Test d'optimalité du support contrôle de départ $\{u, \tau_B\}$

* Calculer la valeur de suboptimalité $\beta(u, \tau_B) = \beta$.

— Si $\beta = 0$ alors arrêter le processus de résolution avec $\{u, \tau_B\}$ un support contrôle optimal du problème (P).

— Si $\beta \leq 0$ alors arrêter le processus de résolution avec $\{u, \tau_B\}$ un support contrôle ε -optimal du problème (P).

— Sinon aller en 4.

4. Changement de commande u en \bar{u} où :

$$\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t), t \in T$$

(a) Détermination de direction $l(t), t \in T$ avec

$$l(t) = \begin{cases} d_2 - u(t) & \text{si } t \in T_H^- = T_H \cap T^-, \\ d_1 - u(t) & \text{si } t \in T_H^+ = T_H \cap T^+ \end{cases}$$

et

$$l(T_B) = -\varphi^{-1}(t)(T_B) \int_{T_H} \Phi(t) l(t) dt$$

(b) Détermination du pas maximal $\theta^0 = \min(1, \theta(t_0))$ avec $\theta(t_0) = \min \theta(t)$, $t \in T$ où

$$\theta(t) = \begin{cases} \frac{d_2 - u(t)}{l(t)} & \text{si } l(t) < 0 \\ \frac{d_1 - u(t)}{l(t)} & \text{si } l(t) > 0 \\ \infty & \text{si } l(t) = 0, t \in T_B \end{cases} \quad (4.38)$$

(c) Calculer la nouvelle commande $\bar{u}(t)$ où $\bar{u}(t) = u(t) + \theta l(t)$, $t \in T$

5. Test d'optimalité du nouveau plan \bar{u}

Calculer la nouvelle valeur de suboptimalité correspondante $\bar{\beta} = \beta(\bar{u}, \tau_B)$, on peut réaliser le test d'optimalité suivant :

- Si $\bar{\beta} = 0$ alors arrêter le processus de résolution avec $\{\bar{u}, \tau_B\}$ la commande optimale.
- si $\bar{\beta} \leq \varepsilon$, alors arrêter le processus de résolution avec $\{\bar{u}, \tau_B\}$ commande ε -optimale.
- Si on, aller en 6

6. Changement de support $\tau_B \longrightarrow \bar{\tau}_B$: construire la quasi-commande $w(t)$, $t \in T$

$$w(t) = \begin{cases} d_2, & \text{si } E(t) < 0, \\ d_1, & \text{si } E(t) > 0, \\ \in [d_1, d_2] & \text{si } E(t) = 0, t \in T \end{cases} \quad (4.39)$$

et sa quasi trajectoire $\mathcal{X} = (\mathcal{X}(t), t \in T)$

$$\dot{\mathcal{X}} = A\mathcal{X} + bw, \quad \mathcal{X}(0) = x_0$$

- Si $H\mathcal{X}(t_1) = g$, alors arrêter le processus de résolution et la quasi-commande $w(t)$, $t \in T$ est optimale pour le problème (P)
- Si non aller en 6-(a)

(a) Calculer

$$\lambda(T_B) = \varphi^{-1}(T_B)(g - H(X)(t_1))$$

- Si $\|\lambda(T_B)\| > \mu$ aller en 6-(b)
- Sinon aller en 7

(b) Déterminer t_0

$$|\lambda(t_0)| = \max_{t \in \tau_B} |\lambda(t)|, \quad t \in T_B$$

Calculer

$$\bar{E}(t) = E(t) + \sigma_0 \delta(t)$$

Déterminer $t_* \in T/T_B$ tel que

$$E(t_*) = 0, \quad \delta(t_0) \neq 0.$$

Aller en 6-(a).

7. Procédure finale : Déterminer le support optimal τ_B° à partir de récurrence

$$\tau_B^{(K+1)} = \tau_B^{(K)} + \frac{1}{d_2 - d_1} \text{sing} \dot{E}(t_j) \lambda_j \tau_B^{(K)}, j = \overline{1, m}$$

En prenant comme approximation initial $\bar{\tau}_B$.

Arrêter le processus de résolution avec $\{w^0(t), t \in T, \bar{\tau}_B^0\}$ un support-contrôle optimal du problème (P).

4.8 Exemple d'application

soit le problème de contrôle optimal suivant :

$$\begin{cases} Z(u) &= \frac{1}{2}x^T(2)Dx(2) + c^T x(2) \longrightarrow \min, \\ \dot{x}(t_1) &= x_2 \\ \dot{x}(t_2) &= u \\ Hx(2) &= g \\ |u(t)| \leq 1 &, \quad t \in [0, 2], x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\text{où } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad g = 6$$

$$c^T = \begin{pmatrix} -3 & 1 \end{pmatrix} \quad D = I_2$$

Le système est commandable car $\text{rang}(b, Ab) = 2$

La solution est donnée par

$$x(t) = F(t)[x_0 + \int_0^t F^{-1}(\tau)bu(\tau)d\tau] \quad t \in T$$

avec

$$F(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies F^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et } F(2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit la commande constante par morceau suivante

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{sur } [0, 1] \\ -1 & \text{sur } [1, 2] \end{cases}$$

Vérifions que la commande $u(t)$ est admissible

Sur $[0, 1]$

$$\begin{aligned} x(t) &= F(t)[x_0 + \int_0^t F^{-1}(\tau)bu(\tau)d\tau] \\ &= \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} d\tau \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 + 1 \\ t \end{pmatrix} \\ \implies x(1) &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sur $[1, 2]$

$$\begin{aligned}
x(t) &= F(t)[x_1 + \int_0^t F^{-1}(\tau)bu(\tau)d\tau] \\
&= \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} d\tau \\
&= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + t \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 - t + \frac{1}{2} \\ t - 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t^2 + 2t + 1 \\ -t + 2 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow x(2) &= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

D'où

$$Hx(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 6 \text{ et } Z(u) = -\frac{9}{2}$$

• calculons

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= HF(2)F^{-1}(t)b \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= -2t + 5 \\
p(t) &= (Dx(2) + c)^T F(2)F^{-1}(t)b \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= 1
\end{aligned}$$

La méthode de résolution

On prend comme une support de généralisé $T_B = [\frac{1}{2}, 1]$ à qui correspondant le moment d'appui $\tau_B = \{t_j = \frac{1}{2}\}$ d'où

$$\begin{aligned}
\varphi_B = \varphi\left(\frac{1}{2}\right) &= 4 \quad \Rightarrow \quad \varphi_B^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \quad c_B = 1 \\
y^T = c_B \varphi_B^{-1} &= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$\text{Donc } E(t) = y^T \varphi(t) - p(t) = \frac{1}{4}(-2t + 5) - 1 = \frac{1}{4}(1 - 2t)$$

$$\Rightarrow E(t) \begin{cases} = 0 & \text{si } t = \frac{1}{2} \\ > 0 & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ < 0 & \text{si } t \in [1, 2] \end{cases}$$

Calculons la valeur de suboptimalité correspondante à ce plan d'appui

$$\begin{aligned}
\beta(u, \tau_B) &= \int_{T^+} E(t)(u(t) - d_1)dt + \int_{T^-} E(t)(u(t) - d_2)dt + \frac{1}{2}(\Delta x(t_1))^T D(\Delta x(t_1)) \\
&= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{2}} 2(2t - 1)dt + \frac{1}{4} \int_1^2 -2(2t - 1)dt + \frac{1}{2}(\Delta x(t_1))^T D(\Delta x(t_1)) \\
&> \int_{T^+} E(t)(u(t) - d_1)dt + \int_{T^-} E(t)(u(t) - d_2)dt \\
&> \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{2}} 2(2t - 1)dt + \frac{1}{4} \int_1^2 -2(2t - 1)dt \\
&> \frac{9}{8} > \epsilon
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \{u, \tau_B\}$ n'est pas optimal donc on passe à changement de commande.

Changement de commande

Soit $\bar{u}(t) = u(t) + \theta^0(t)$

Déterminons la direction $l(t)$

$$\begin{aligned}
l(t) &= \begin{cases} d_1 - u(t) & \text{si } E(t) > 0 \\ d_2 - u(t) & \text{si } E(t) < 0, t \in T_H \end{cases} \\
\Rightarrow l(t) &= \begin{cases} 2 & \text{si } t \in [1, 2] \\ -2 & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}[\end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l(T_B) &= -\varphi_B^{-1} \int_{T_H} \varphi(t)l(t)dt \\
&= -\frac{1}{4} \left[\int_0^{\frac{1}{2}} -2(-2t + 5) + \int_1^2 2(-2t + 5) \right] \\
&= \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

Déterminons le pas maximale $\theta^0(t)$

$$\theta(t) = \begin{cases} \frac{d_1 - u(t)}{l(t)} & \text{si } l(t) < 0 \\ \frac{d_2 - u(t)}{l(t)} & \text{si } l(t) > 0 \\ \infty & \text{si } l(t) = 0, t \in T_B \end{cases}$$

Comme $l(T_B) > 0$ donc $\theta(t) = 0$ on a

$$\theta^0(t) = \min(1, \theta(t)) \Rightarrow \theta^0 = 0$$

D'où

$$\bar{u}(t) = u(t) \quad \text{et} \quad \beta(\bar{u}, \tau_B) = \beta(u, \tau_B) \Rightarrow \{\bar{u}, \tau_B\}$$

n'est pas optimal alors passons à changement de support

Changement de support Soit $\bar{E}(t) = E(t) + \sigma^0(t)q(t), t \in T$ Déterminons la direction $q(t)$

$$q(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq t^0 \\ 1 & \text{si } \bar{u}(\frac{1}{2}) = d_1 \\ -1 & \text{si } \bar{u}(\frac{1}{2}) = d_2, \quad t \in T \end{cases} \Rightarrow q(t) = 1$$

$$q(t_H) = q(t_B)\varphi_B^{-1}\varphi(t) = \frac{1}{4}(2t - 5)$$

Déterminons le pas maximal $\sigma^0 = \min \sigma(t)$

$$\sigma(t) = \begin{cases} \frac{E(t)}{q(t)} & \text{si } E(t)q(t) < 0 \\ 0 & \text{si } E(t) = 0, \text{ et } u \neq d_1, q(t) > 0 \text{ ou} \\ & E(t) = 0, \text{ et } u \neq d_2, q(t) < 0 \\ \infty & \text{si non} \end{cases}$$

On a $E(t)q(t) = \frac{1}{16}(-2t+1)(2t-5) < 0$ si $t < \frac{1}{2}$ donc $\sigma(t) = \frac{(2t-5)}{-t+5}$
si on pose $f(t) = \frac{(2t-1)}{2t-5}$ cherchons le min de $f(t)$ sur $[0, \frac{1}{2}[$

la fonction $f(t)$ est décroissante donc $\min f(t) = f(\frac{1}{2}) = 0$

Donc $\sigma^0 = 0$ d'où $\bar{E}(t) = E(t)$ ainsi $\bar{\tau} = \frac{1}{2}$

et $\bar{\beta}(\bar{u}, \bar{\tau}_B) = \beta(u, \tau_B)$

Donc on passe à la procédure finale

Procédure finale

Soit

$$w(t) = \begin{cases} d_1 & \text{si } E(t) > 0 \\ d_2 & \text{si } E(t) < 0 \\ \in [d_1, d_2] & \text{si } E(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow w(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}[\\ 1 & \text{si } t \in [1, 2] \\ \in [d_1, d_2] & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1[\end{cases}$$

et sa trajectoire \mathcal{X} vérifier

$$\dot{\mathcal{X}} = A\mathcal{X} + bw, \quad \mathcal{X}(0) = x_0$$

Sur $[0, \frac{1}{2}[$

$$\begin{aligned}
x(t) &= F(t)[\mathcal{X}(0) - \int_0^t F^{-1}(\tau)bw(\tau)d\tau] \\
&= \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} d\tau \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t^2 + 1 \\ -t \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \mathcal{X}(1) &= \begin{pmatrix} \frac{7}{8} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Sur $[\frac{1}{2}, 1[$

$$\begin{aligned}
x(t) &= F(t)[\mathcal{X}(1) + \int_0^t F^{-1}(\tau)bw(\tau)d\tau] \\
&= \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{7}{8} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} d\tau \\
&= \begin{pmatrix} \frac{7}{8} - \frac{1}{2}t \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{8} \\ t - \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 - t + 1 \\ t - 1 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \mathcal{X}(2) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On a $H\mathcal{X}(2) = 3$ donc $H\mathcal{X}(2) \neq g$

La valeur de $\alpha(T_B) = \varphi^{-1}(T_B)(g - H\mathcal{X}(2)) = \frac{3}{4}$

Déterminisant $\tau_B^0 = \{\tau_j^0, j = \overline{1, m}\}$ à partir la résolution du système suivant

$$\begin{aligned}
g - H\mathcal{X}(t_1) &= (d_2 - d_1) \sum_{j=1}^m \text{sing}\dot{E}(t_j) \int_{t_j}^{\tau_j} \varphi(t)dt \\
(d_2 - d_1) \sum_{j=1}^m \text{sing}\dot{E}(t_j) \int_{t_j}^{\tau_j} \varphi(t)dt + g - H\mathcal{X}(2) &= 0 \\
\Rightarrow -2 \int_{\frac{1}{2}}^{\tau_0} (-2t + 5)dt + 3 &= 0 \\
\Rightarrow 2\tau^{02} - 10\tau^0 + \frac{15}{2} &= 0 \Rightarrow \tau^0 = 0.9
\end{aligned}$$

$$w^0(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [1, 2] \\ -1 & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}[\\ \in [-1, 1] & \text{si } [\frac{1}{2}, 1[\end{cases}$$

qui est calculée par le support $\tau_B^0 = 0.9$ et le support généralisé $T_B =]\frac{1}{2}, 0.9]$ est une commande appui optimale pour le problème original avec $Z(w) = -1 > Z(u)$

Conclusion Générale

Dans ce mémoire, nous sommes arrivées à appliquer une nouvelle méthode qui permet de résoudre un problème quadratique. Pour cela nous avons commencé par présenter des définitions, des théorèmes et des méthodes de résolutions de la programmation quadratique dans les quatre chapitres respectivement.

En s'inspirant des méthodes de supports pour la résolution des problèmes quadratiques, développées par R. Gabassov et F. M. Kirillova, O.I. Kostyukova, V.M. Raketky, nous avons développé une méthode de résolution d'un problème de contrôle optimal linéaire en utilisant la méthode adaptée, pour cela on a commencé par une introduction aux systèmes linéaires et à la commande optimale, et quelques notions classiques importantes sur la programmation quadratique convexe, on a considéré le critère d'optimalité, de suboptimalité et la méthode de résolution.

Dans le dernière chapitre, nous avons adaptée cette méthode, à la résolution d'un problème de contrôle optimal d'un système quadratique, le problème a été transformé, tout d'abord un problème de programmation quadratique, nous avons constaté que la méthode adaptée est très efficace. Et ce résultat a été confirmé par un exemple d'application.

* En théorie, il est intéressant d'appliquer ces algorithmes à des problèmes de contrôle optimal linéaire, stochastique, feedback ,... etc.

* En pratique, différents problèmes que soit en économie, en agriculture, en automatique,...etc, peuvent être modélisés par des problèmes de contrôle optimal et résolus par les méthodes proposées.

Annexe A

Algorithme de la méthode adaptée d'un PPL

Position du problème de programmation linéaire

Considérons le problème classique de programmation linéaire suivant :

$$\begin{cases} \text{Max} Z(x) = c^T x \\ \text{s.c.} \quad Ax = b \\ d_1 \leq x \leq d_2. \end{cases}$$

où :

- $Z(x)$ est le critère de qualité, ou bien le coût,
- x, c, d_1, d_2 sont des n -vecteurs réels,
- b est m - vecteurs réels,
- A est une $m \times n$ matrice,
- $I = \{1, \dots, m\}$ l'ensemble des indices des lignes de la matrice A et $J = \{1, \dots, n\}$ l'ensemble des indices des colonnes de la matrice A , avec le $\text{rang} A = m < n$,
- c^T est le transposé du vecteur c

Notons par M la région réalisable (admissible) :

$$M = \{x \in R^n, Ax = b, d_1 \leq x \leq d_2\}.$$

Algorithme de la méthode

La méthode adaptée de la programmation linéaire est décrite de la manière suivante :

1. Prendre un plan d'appui de départ $\{x, J_B\}$
 - Calculer le vecteur des potentiels $y^T = c_B^T A_B^{-1}$
 - Calculer le vecteur des estimations $E^T = y^T A - c^T$.
 - Subdiviser l'ensemble J_H en deux parties

$$J_H^+ = \{j \in J_H : E_j \geq 0\}, J_H^- = \{j \in J_H : E_j < 0\}$$

$$J_H^+ \cup J_H^- = J_H, J_H^+ \cap J_H^- = \emptyset$$

— Déterminer les composantes non support du pseudo plan X_H :

$$X_H = \begin{cases} d_{1j}, & \text{pour } j \in J_H^+ \\ d_{2j}, & \text{pour } j \in J_H^- \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

2. Test d'optimalité du plan d'appui $\{x, J_B\}$

— Calculer la valeur de suboptimalité $\beta(x, J_B)$

$$\beta(x, J_B) = \sum_{j \in J_H} E_j(x_j - X_j).$$

— Si $\beta(x, J_B) = 0$, alors arrêter le processus avec x solution optimale.

— Si $\beta(x, J_B) \leq \varepsilon$, alors arrêter le processus avec x solution ε -optimale.

— Si $\beta(x, J_B) > \varepsilon$, alors aller à 3

3. Changement du plan $x \rightarrow \bar{x} = x + \theta^0 l$ avec $\beta(\bar{x}, J_B) \leq \beta(x, J_B)$

— Calculer le vecteur $l(J)$

— Calculer le pas $\theta^0 = \theta_{j_0} = \min_{j \in J} \theta_j$ où

$$\theta_j = \begin{cases} \frac{d_{2j} - x_j}{l_j}, & \text{pour } l_j > 0, \\ \frac{d_{1j} - x_j}{l_j}, & \text{pour } l_j < 0, \\ \infty & \text{pour } l_j = 0, j \in J_B. \end{cases}$$

— Calculer $\bar{x} = x + \theta^0 l$.

— Calculer $\beta(\bar{x}, J_B) = (1 - \theta^0) \beta(x, J_B)$.

4. Test d'optimalité du nouveau plan \bar{x}

— Si $\beta(\bar{x}, J_B) = 0$, alors arrêter le processus avec \bar{x} solution optimale.

— Si $\beta(\bar{x}, J_B) \leq \varepsilon$, alors arrêter le processus avec \bar{x} solution ε -optimale.

— Sinon, aller à 5

5. Changement de support (appui) $J_B \rightarrow \bar{J}_B$

— Calculer $\sigma_{j_1} = \min_{j \in J_H} \sigma_j$;

— Calculer le nouveau support $\bar{J}_B = (J_B \setminus j_0) \cup j_1$

$$\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) = \beta(\bar{x}, J_B) + \alpha \sigma^*.$$

* Si $\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) = 0$, alors arrêter le processus avec $\{\bar{x}, \bar{J}_B\}$ support plan optimal.

* Si $\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) \leq \varepsilon$, alors arrêter le processus avec $\{\bar{x}, \bar{J}_B\}$ support plan ε -optimal.

* Si $\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) > 0$, aller à 3 avec le nouveau plan d'appui $\{\bar{x}, \bar{J}_B\}$.

Bibliographie

- [1] Abassi N, Méthode de Support pour la Minimisation d'une Fonctionnelle Quadratique Convexe. Mémoire de Magister en Mathématiques Appliquées, Université de Béjaia, 2004.
- [2] Adams w.P , Sherali H.D., A tight linearization and an algorithm for 0 – 1 quadratic programming problems. *Manag. Sci* 32(10), pp. 1274 – 1290, (1986).
- [3] Atteia M , Elqortobi A., Quasi-convex duality. In A. Auslender et al. (ed.), *Optimization and Optimal Control*, Proc. Conference Oberwolfach March 1980, Lecture notes in Control and Inform. Sci. 30, pp. 3-8, SpringerVerlag, Berlin, (1981)
- [4] Bardai,N, et Rebai S.*Programmation quadratique bi.objectif en variables mixtes*, Mémoire de master en Recherche opérationnelle ,Univérsite de boumerdes.2016
- [5] Bezoui. M , *Méthode adaptée de programmation quadratique convexe*.
- [6] Bienstock. D, *Computational study of a family of mixed-integer quadratic programming problems*. *Mathematical programming* 74, 2 (1996),121 – 140.
- [7] Billionnet A,*Optimisation quadratique en 0 – 1. Optimisation combinatoire, concepts fondamentaux*, pp. 191-234, Chapitre de livre Levoisier, (2005)
- [8] Boland N. L. A , *dual-active-set algorithm for positive semi-definite quadratic programming*. *Mathematical Programming* 78, 1 (1996),1 – 27.
- [9] delhom z s,*la minimisation des polynomes et la méthode adaptée du suport*. thèse de Doctorat en Mathématiques et Applications, Université d'oran, 2018.
- [10] Fiacco, A. V., and McCormick, G. P. *Nonlinear programming : sequential unconstrained minimization techniques*, vol.4 . Siam,1990 .
- [11] Fletcher, R. *A general quadratic programming algorithm*. *IMA Journal of Applied Mathematics* 7, 1(1971).

- [12] Fletcher, R. Practical methods of optimization. John Wiley Sons,2013
- [13] Gabassov R, and Kirillova F.M. Constructive Theory of Extremal Problems.- University Press, Minsk, 1980.
- [14] Gabasov R., Kirillova F.M. and Balashevich N.V. Open-Loop and Closed-Loop Optimization of Linear Control Systems.-Asian Journal of Control, 2000, 2(3) :155-168.
- [15] Gabassov R, *Adaptive method of linear programming*. Preprint of the University of Karlsruhe. Institute of Statistics and Mathematics. Karsruhe, Germany. 1993.
- [16] Gabasov, R., Kirillova, F. M., and Tyatyushkin, A. I. *Constructive methods of optimization*. PI-University Press, Minsk (1984).
- [17] Gabasov.R and F.M. Kirillova. Adaptive method of solving linear programming problems. Preprints Series of University of Karlsruhe, Institute for Statistics and Mathematics, 1994.
- [18] Gill, P. E., and Murray, W. Numerically stable methods for quadratic programming. *Mathematical programming* 14, 1(1978), 349 – 372.
- [19] Goldfarb, D., and Idnani, A. A numerically stable dual method for solving strictly convex quadratic programs. *Mathematical programming* 27, 1(1983), 1 – 33.
- [20] Gould, N. I. An algorithm for large-scale quadratic programming. *IMA Journal of Numerical Analysis* 11, 3(1991), 299 – 324.
- [21] Hiriart-Urruty, J.-B. *Optimisation et analyse convexe*. EDP sciences, 2012.
- [22] Lounaci Y et Louni R , Méthode adaptée pour la résolution d un problem quadratique convexe à variables bornées,mémoire de master en recherche opérationnelle,Université Mouloud Mammeri de Tizi-ouzou,2011-2012,Optimisation et analyse convexe EDP science,2012
- [23] Medjdoub S, Contrôle Optimal d'un Système Dynamique Linéaire avec Coût Quadratique et Etat Initial Libre.Mémoire de Magister en Mathématiques Appliquées, Université de Béjaia, 2012.
- [24] Minoux, M, and Balas, E. *Programmation mathématique : theorie et algorithmes*. Tome 1.

- [25] Oukacha O, *Résolution de problème de contrôle optimal*. These de Doctorat en recherche opérationnelle, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, 2006.

- [26] Nait Abdesselam A, *Résolution d'un problème de contrôle optimal des systèmes dynamiques hybrides*. Memoire de Magister en automatique, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou,

- [27] Radjef S, et Hamga, M. *Etude comparative entre deux méthodes de résolution d'un programme quadratique convexe*.

- [28] Trélat E, *Contrôle optimal Théorie et application* Vuibert, Collection "Mathématique Concrètes", 2005.