



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Akli Mohand Oulhadj -BOUIRA

Faculté des Sciences et des Sciences Appliquées
Département de Génie Mécanique

PROJET DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de Master
en génie mécanique
Option Energétique

THEME

Etude hydrodynamique d'un écoulement rotatif MHD
dans les espaces annulaires

Par : **Kerfouf Massinissa** et **Kherroubi Adel**

Soutenu le 11 /07/2019

Devant le jury composé

- Président : Mr LATTARI. K
- Encadreur : Mr LAOUARI. A
- Examineur : Mr HAMIMID. S
- Examineur : Mr BOUREGBI. L

Université de Bouira
Université de Bouira
Université de Bouira
Université de Bouira

Remerciements

En préambule, nous souhaitons rendre grâce à Dieu, le clément et le miséricordieux de nous avoir donné la force et la patience de mener à bien ce modeste travail

Nous tenons évidemment à débiter ces remerciements en témoignant de notre profonde reconnaissance envers Monsieur Azzedine Laouari pour nous avoir encadré et dirigé ce travail avec patience.

Nous remercions du fond du cœur monsieur Brahim Mahfoud pour ce qu'il a fait pour nous, pour toutes les informations et pour toute l'aide qu'il nous a fournie.

Nous remercions vivement Monsieur LATTARI Kamel Maître de conférences à l'Université BOUIRA, qui nous a fait l'honneur de présider le jury, ainsi que pour sa contribution à notre formation.

Nous voulons exprimer nos remerciements aux membres de jury,
Monsieur LAOUARI AZZEDINE, MA à l'Université BOUIRA.
Monsieur LATTARI KAMEL, MA à l'Université BOUIRA.
Monsieur BOUREGBI LEKHDAR, MA à l'Université BOUIRA.
Monsieur HAMIMID SABER , MA à l'Université BOUIRA.

Nos remerciements s'adressent aussi à tous les enseignants du département de Génie Mécanique de l'Université de BOUIRA.



Dédicace

JE DÉDIE CE MODESTE TRAVAIL

A MA MÈRE QUI M'A DONNÉ LE VRAI

AMOUR ET LE VRAI SOUTIEN MORAL

A MON PÈRE POUR CES SACRIFICES PENDANT MES ANNÉES

D'ÉTUDES.

A MES CHÈRES SŒURS

A MON FRÈRE

A TOUS MES AMIES

A MES AMIS DE LA SECTION

A TOUS CEUX QUI AIMENT ADEL.

Dédicaces

Je dédie cet humble et modeste travail avec grand amour, sincérité et fierté :

À mes chers parents, sources de tendresse, de noblesse et
D'affection

À mes chers professeurs en témoignage de la fraternité avec,
Mes souhaits de bonheur de santé et de succès.

Et à tous les membres de ma famille.

À tous mes amis, le staff administratif et pédagogique de la
Faculté des sciences et des sciences appliquées.

Et à tout qui compulse ce modeste travail.

Kerfouf Massinissa

Résumé

Nous présentons une étude numérique d'un écoulement tourbillonnant dans des cylindres verticaux remplis d'un métal liquide avec des disques d'extrémité tournant en sens inverse sous un champ magnétique axial. Six espaces annulaires $R = 0.9, 0.8, 0.7, 0.6, 0.5$ et 0.4 ont été étudiés. Les équations de Navier-Stokes et potentiels qui régissent l'écoulement sont résolus en utilisant le logiciel ANSYS Fluent basé sur la méthode des volumes finis. Les résultats montrent que différents écoulements complexes apparaissent lorsque l'espace annulaire devient plus grand. La présence du champ magnétique entraîne une décélération du fluide et donc une stabilisation de l'écoulement.

Mots-clés : espace annulaire, cylindres coaxiaux, contre-rotation, champ magnétique.

Abstract

Numerical simulations are presented of swirling flow in vertical annuli filled with a liquid metal with counter-rotating end disks under an axial magnetic field. Six annular gaps $R = 0.9, 0.8, 0.7, 0.6, 0.5$ and 0.4 were studied. The governing Navier-Stokes and potential equations are solved by using the finite-volume method. The results show that different complex flow appears as the annular gap become larger. The presence of the magnetic field results to fluid deceleration and, thus, to flow stabilization.

Keywords: Annular gap, coaxial cylinders, counter-rotating, magnetic field.

المخلص

يتم تقديم المحاكاة العددية للتدفق الدوار في فضاء حلقي لاسطوانة مملوءة بمعدن سائل حيث يدور غطائي الاسطوانة في اتجاهين متعاكسين تحت مجال مغناطيسي عمودي. تمت دراسة عدة فراغات حلقيّة $R=0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$

يتم حل معادلات Navier-Stokes باستخدام طريقة الحجم المحدودة. تظهر النتائج أن وجود تدفق معقد التركيب عندما يصبح الفضاء الحلقي أكبر. يؤدي وجود المجال المغناطيسي الموجه عموديا إلى تباطؤ في سير السائل وبالتالي استقرار التدفق.

الكلمات المفتاحية : الفضاء الحلقي ، اسطوانات متحدة المحور ، دوران مضاد ، مجال

مغناطيسي

Table des matières

Remerciements.....	i
Dédicace.....	ii
Résumé	iv
Abstract.....	v
ملخص	vi
Table des matières.....	vii
Liste des figures.....	x
Liste des tableaux.....	xii
Nomenclature	xiii
Liste des abréviations.....	xv
Introduction générale.....	1
Chapitre I Revue bibliographique et Généralité	
I.1. Introduction.....	3
I.2. Revue bibliographique	3
I.3. Généralité sur l'écoulement	7
I.3.1. Définition de la MHD	8
I.3.2. Les différentes modélisations de la MHD.....	8
I.3.3. Observations et applications	9
I.3.4. Ecoulement MHD.....	10
I.4. Exemple du fluide conducteur.....	11
I.4.1. Définition	11
I.4.2. Fabrication des nanofluides.....	12

I.4.3. Les applications des nanofluides	13
I.5. Conclusion	13
Chapitre II Géométrie et modèle mathématique	
II.1.Introduction.....	14
II.2. Géométrie du problème.....	14
II.3. Les hypothèses simplificatrices.....	15
II.4. Formulation mathématique du problème.....	16
II.5. Mise sous forme adimensionnelle.....	18
II.6. Les conditions aux limites et initiales.....	20
II.6.1. Les conditions initiales.....	20
II.6.2. Les conditions aux limites.....	20
II.7. Outils d'analyse de l'écoulement.....	21
II.8. Conclusion.....	21
Chapitre III Méthode numérique et CFD	
III.1. Introduction.....	22
III.2. La méthode des volumes finis.....	22
III.2.1. Définition.....	22
III.2.2. Notions générales.....	23
III.3. Etapes du résolution par la méthode des volumes finis.....	24
III.3.1. Le maillage.....	24
III.3.2. Discrétisation implicite de l'équation de transport.....	26
III.3.3. Pression (schéma standard).....	29
III.3.4. Couplage pression-vitesse.....	29

III.3.5. Algorithme SIMPLE.....	30
III.3.6. La séquence d'algorithme SIMPLE.....	30
III.4. Présentation du logiciel ANSYS	32
III.4.1. ANSYS – Fluent.....	32
III.4.2. Les critères du convergence.....	34
III.5. Conclusion.....	34
Chapitre IV	
IV.1. Introduction.....	35
IV.2. Effet de maillage.....	35
IV.3. Validation des résultats.....	36
IV.4. Ecoulement de base.....	36
IV.5. Cas sans champ magnétique ($Ha = 0$).....	40
IV.6. Cas avec champ magnétique ($Ha \neq 0$).....	43
Conclusion Générale.....	48

Liste des figures

Figure I.1	Réacteur nucléaire de type Tokamak.....	8
Figure I.2	observation d'une injection de plasma solaire.....	8
Figure I.3	le noyau de la terre.....	9
Figure I.4	Photo de l'espace prise par télescope Hubble.....	10
Figure I.5	Observation d'une injection de plasma.....	10
Figure I.6	Réacteur nucléaire de type Tokamak.....	10
Figure I.7	Electrolyse de l'aluminium (plasma froid).....	10
Figure I.8	Nanofluides vue au microscope électronique : éthylène glycol +cuivre 0.5%, eau+ nanotubes, eau +alumine, eau + or à 2nm (4 analyse nano...)	12
Figure I.9	Procédés de synthèse de nanofluide en une seule étape (Argonne National Laboratoire, USA) [4].....	13
Figure. II. 1	Géométrie de problème considéré.....	15
Figure III.1	Schéma du volume de contrôle dans le cas bidimensionnel.....	24
Figure III.2	Volume de contrôle bidimensionnel déclaré pour u et v	25
Figure III.3	Maillage utilisé pour le cas axisymétrique avec raffinement près de paroi...	25
Figure III.4	Algorithme simple.....	31
Figure III.5	Menu principal de l' Ansys workbench.....	32
Figure III.6	Menu principal de fluent.....	33
Figure .IV.1	La comparaison avec les résultats de Kakarantzas et al.....	37
Figure IV.2	Schémas des symétries, d'après Nore et al.....	38

Figure IV.3 Etat de base pour le cas contre-rotation à $Re=300$, $R=1$. Iso-contours et iso-surfaces de vitesse (a) radiale (b) axiale et (c) azimutale, noté que u est invariant au cours de la réflexion en z tandis que v et w changent de signe. Les valeurs positives indiquées par des lignes continues et les valeurs négatives par des lignes pointillées.....	39
Figure IV.4 contours de vitesse dans le plan méridien à l'état de base d'axisymétrique dans le cas de $Re = 600$ avec $R = 0.4, 0.5$ et 0.6 (en haut) et d'écoulement asymétrique dans le cas de $Re= 600$ avec $R = 0.7, 0.8$ et 0.9 (en bas).....	41
Figure IV.5 Contours de vitesse verticale (haut de figure) à $z= 0.8$ (haut), $z=1$ (milieu), $z=0.2$ (en bas) : (a) $R= 0.7$, (b) $R=0.8$ et (c) $R=0.9$	42
Figure IV.6 Structure spatiale de la vitesse radiale, pour deux valeurs $u = -0.055$ et $u = 0.008$, (a) $R= 0.7$, (b) $R=0.8$ et (c) $R=0.9$	42
Figure IV.7 contours de vitesse verticale (axiale) à $z = 1$ pour $Ha = 0$	43
Figure IV.8 Distribution radiale de la vitesse axiale, v pour $Re = 600$ à $\theta = 0$ près du bas ($z = 0.5$), du milieu ($z = 1$) et du haut ($z = 1.5$) du cylindre pour $Ha = 0$ et 10 lorsque $R = 0.7$	44
Figure IV.9 Iso-contours de vitesse verticale (axiale) à $z = 1$ pour $Ha = 20$	46
Figure IV.10 Diagramme de stabilité dans le plan $(Re_{cr} - R)$ pour le cas de $Ha = 20$. Evolution e Re_{cr} correspondant aux modes $m = 2$ et $m = 3$, en fonction de R	47

Liste des tableaux

Tableau I.1 La conductivité thermique de quelque élément.....	12
Tableau III.1 différentes quantités transportées et leurs termes de transport.....	26
Tableau III.2 schéma de discrétisations.....	33
Tableau IV.1 Propriétés physique de l'Aluminium liquide d'après Davidson (2001.....	35
Tableau IV.2 Dimension de la maille suivant les directions (r, z, θ) utilisé dans la simulation numérique.....	36
Tableau IV.3 L'effet de maillage sur la précision du code numérique utilisé pour $R = 0.4, 0.6, 0.8$	36

Nomenclature

B_0	: Champ magnétique (Tesla).
b	: Terme source dans le système d'équations algébriques discrétisées.
D	: Terme de diffusion dans le système d'équations algébriques discrétisées.
\vec{E}	: Champ électrique local
$\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$: Les vecteurs unitaires respectivement des directions radiale, axiale et azimutale
F	: Fréquence adimensionnelle.
F_{cr}	: Fréquence critique adimensionnelle.
F	: Terme de convection dans le système d'équations algébriques discrétisées.
$f'_{Lr}, f'_{Lz}, f'_{L\theta}$: les composantes de la force électromagnétique de Lorentz radiale, axiale et azimutale (N. m ⁻³)
$F_{Lr}, F_{Lz}, F_{L\theta}$: Les forces de Lorentz adimensionnelles dans les directions radiale, axiale et azimutale
g	: Accélération de pesanteur (m. s ⁻²).
H	: Hauteur du cylindre (m)
Ha	: Nombre de Hartmann ($= BR\sqrt{\sigma/\rho\nu}$)
\vec{j}	: Densité volumétrique de courant (A. m ⁻³).
J_r, J_z, J_θ	: Les courants électriques adimensionnels dans les directions radiale, axiale et azimutale
N	: Paramètre d'interaction ($= \frac{Ha^2}{Re}$)
m	: mode azimutal
p'	: La pression (N. m ⁻²).
p	: La pression adimensionnelle.
Pr	: Nombre de Prandtl ($= \nu/\alpha$)
r'	: Direction radiale (m).
R	: Rayon du cylindre (m).
r	: Rayon adimensionnelle du cylindre
Re	: Nombre de Reynolds ($= \Omega R^2/\nu$)

Re_{cr}	: Nombre de Reynolds critique
R_m	: Nombre de Reynolds magnétique ($= \mu_0 \sigma \Omega R$)
s	: Rapport de la vitesse angulaire du disque supérieur à celle du disque de fond
S_ϕ	: Terme source.
t	: Temps (s).
u'	: Composante de la vitesse suivant la direction radiale (m. s ⁻¹).
u	: Composante de la vitesse radiale adimensionnelle.
\vec{V}	: Vecteur de la vitesse dans le plan méridien.
v'	: Composante de la vitesse suivant la direction axiale (m. s ⁻¹).
v	: Composante de la vitesse axiale adimensionnelle.
VC	: Volume de contrôle (m ³)
w'	: Composante de la vitesse suivant la direction azimutale (m. s ⁻¹).
w	: Composante de la vitesse azimutale adimensionnelle.
z'	: Direction axiale (m).
z	: Hauteur adimensionnelle.

Symboles grecs

β	: Coefficient d'expansion thermique à pression constante (K ⁻¹)
γ	: Rapport d'aspect.
$\delta r_e, \delta z_n, \delta r_w, \delta z_s, \delta r_e$: Sont respectivement les distances entre le nœud considéré P et les nœuds (E, W, N, S)
δ_t	: Epaisseur de couche limite thermique (m)
θ	: Direction azimutale (rad).
μ_m	: Perméabilité magnétique (H. m ⁻¹)
μ	: Viscosité dynamique (kg. m ⁻¹ .s ⁻¹)
μ_0	: Perméabilité magnétique du vide (H. m ⁻¹).
ν	: Viscosité cinématique (m ² .s ⁻¹)
ρ	: Masse volumique (kg. m ⁻³)
σ	: Conductivité électrique (Ω^{-1} .m ⁻¹)
τ	: Temps adimensionnel.
ϕ	: Potentiel électrique (V)

ω : Vorticité adimensionnelle
 $\Delta\tau$: Incrément adimensionnel du temps
 $\Delta r, \Delta z$: Dimensions du volume de contrôle considéré.
 ψ : Fonction de courant adimensionnelle.
 Ω : Vitesse angulaire (rad. s⁻¹).
 Φ : Potentiel électrique adimensionnel
 ϕ : Variable dépendante.
 Γ_ϕ : Coefficient de diffusion.

Indices

P : Nœud considéré du maillage
 E, W, N, S : Nœud considéré du côté Est, West, Nord, Sud, respectivement du nœud P
 e, w, n, s : Les faces Est, West, Nord, Sud, respectivement du volume de contrôle considéré.

Liste des abréviations

MHD	Magnétohydrodynamique
MVF	Méthode des volumes finis
EDP	Equations aux dérivées partielles

Introduction Générale

Chapitre I

Revue bibliographique
et Généralistes

Chapitre II

*Géométrie et modèle
mathématique*

Chapitre III

Méthode numérique et

CFD

Chapitre IV
Résultats et
discussions

Conclusion Générale

Introduction générale

La Magnétohydrodynamique (MHD) est l'étude de la dynamique des fluides électriquement conducteurs. Par exemples les plasmas, les métaux liquides, les eaux salée ou les électrolytes. Le mot magnétohydrodynamique est dérivé du magnéto signifiant le champ magnétique, hydro signifie liquide, et dynamique signifie mouvement. La magnétohydrodynamique a été initiée la première fois par Hannes Alfvén.

Le concept fondamental de la magnétohydrodynamique est que les champs magnétiques peuvent induire des courants électriques dans un fluide conducteur mobile, qui alternativement crée des forces sur le fluide et change le champ magnétique.

L'étude des écoulements rotatifs des fluides électriquement conducteurs en présence d'un champ magnétique, est appelée magnétohydrodynamique (MHD). Cette étude est très importante dans la mécanique des liquides modernes et ses diverses applications.

Dans l'industrie, on trouve l'application du MHD dans les réacteurs nucléaires, l'extraction de l'énergie géothermique, le contrôle de comportement et de la stabilité des écoulements convectifs et les pompes MHD.

Dans la nature (astrophysique et géophysique), la MHD est appliquée à l'étude des structures stellaires, des noyaux terrestres et plasma solaire.

Notre travail concerne l'étude hydrodynamique d'un écoulement confiné d'un fluide électriquement conducteur entre deux cylindres coaxiaux verticaux en mouvement (contre rotation). Les équations fondamentales régissant le comportement des deux milieux, fluide et solide, sont ensuite formulées sous forme dimensionnelle et adimensionnelle ainsi que les conditions initiales et aux limites.

Les caractéristiques hydrodynamiques ont été déterminées numériquement dans un espace annulaire cylindrique dans le cas de différents nombre de Reynolds et de nombre de Hartmann dans un écoulement laminaire. Cet écoulement résulte de la rotation des deux disques d'extrémités d'un cylindre en présence d'un champ magnétique. Les résultats numériques ont été obtenus à l'aide du code commercial Fluent version 18.2 basé sur la méthode numérique des volumes finis.

Le mémoire présentant ce travail est organisé comme suit :

Le premier chapitre présente une revue bibliographique sur la MHD, suivie par une généralité sur la magnétohydrodynamique et les fluides conducteurs.

Le détail de la géométrie, le modèle mathématique décrivant, les hypothèses simplificatrices et les conditions aux limites adaptées à notre étude sont proposées dans le deuxième chapitre.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude numérique basée sur la méthode des volumes finis.

L'analyse, interprétations et la validation des principaux résultats numériques de cette étude ont été présentées dans le chapitre quatre.

Enfin, une conclusion générale, résume les principaux résultats obtenus.

Revue bibliographique et généralité

I.1. Introduction

Ce chapitre traite une revue bibliographique qui résume l'essentiel des travaux de recherche dans ce domaine, et des généralités sur les écoulements rotatifs soumis à un champ magnétique à savoir les nanofluides (métaux liquides), dans différents aspects.

I.2. Revue bibliographique

Bessaih, Ph, Martyet, M.Kadja. (1999) [1] ont étudié numériquement un écoulement MHD laminaire d'un métal liquide contenu dans une enceinte cylindrique, ayant un rapport d'aspect égal à 1, dont la paroi supérieure est en rotation.

L'ensemble est soumis à un champ magnétique externe vertical, les résultats asymptotiques et numériques obtenus par ces auteurs. Ces derniers ont montré qu'on peut contrôler l'écoulement primaire par un bon choix de la conductivité électrique des parois de l'enceinte en question.

Bessaih et al [2] ont dirigé une étude numérique et analytique de l'écoulement laminaire stable engendré par un disque tournant au sommet d'un cylindre ayant un rapport d'aspect $H/R=1$, rempli d'un métal liquide et soumis à un champ magnétique axial, en résolvant les équations régissant l'écoulement par la méthode de volume finis. Différentes formules analytiques de vitesse montrent qu'en présence d'un champ magnétique, les profils analytiques de vitesse proches des disques aux extrémités obtenus pour une valeur élevée du paramètre d'interaction magnétique N , présentent un excellent accord avec ceux obtenus par des simulations numériques. Ainsi, ils ont mis en évidence l'importance de la conductivité électrique des parois du conducteur (les deux disques et la paroi latérale) dans le contrôle de l'écoulement.

Kharicha et al. [3] (2004), ont utilisé le code commercial Fluent V.5 pour avoir une solution numérique de modèle de l'écoulement MHD laminaire, permanent conduit par un disque tournant au sommet d'une cavité cylindrique remplie d'un métal liquide. Les effets de champ magnétique, des conductivités électriques des parois et l'épaisseur pariétale sont examinées. Les paramètres appropriés pour ce type d'écoulement ont été variés comme $Re \geq 100$ et le nombre de Hartmann $0 \leq Ha \leq 100$, ce qui correspond à une gamme de paramètres

d'interaction $0 \leq Ha_2 / Re \leq 100$. Malgré la supposition d'un très petit nombre Reynolds magnétique R_m le champ magnétique invite par ce petit R_m a été tenu compte dans la formulation de leur problème.

Leur étude est destinée à prédire l'influence d'un champ magnétique sur le taux de corrosion d'un métal liquide sur une paroi métallique, ils ont résolu l'équation de concentration pour le produit de corrosion et on montre que le transfert de masse évolue avec Hartmann Ha , et pour une valeur de Ha fixe, le transfert de matière est plus élevée pour des parois électriquement conductrices que des parois isolantes.

Kharicha et al [4], ont effectué une autre étude expérimentale de l'écoulement MHD laminaire dans le cas permanent induit par la rotation d'un disque au sommet d'une cavité cylindrique remplie de l'eau ou de mercure. Ils ont analysé les distributions de vitesse en employant la technique de mesure par ultrasons (UVP).

Leurs mesures ont été comparées avec des résultats obtenus par un modèle numérique. Ils ont effectué ses mesures et comparaisons essentiellement pour les valeurs de Reynolds allant jusqu'à 30000 et pour $Ha \geq 260$. Alors, ils avaient un proche accord entre les résultats numériques et les résultats faits par ultrasons. Ces expériences on révèle quelque chose qui n'a pas prévu numériquement. La couche pariétale latérale est instable pour quelques valeurs spécifiques des nombres de Hartmann et de Reynolds.

M.Kaneda et al (2005) [5], ont étudié numériquement un écoulement hydromagnétique de Taylor-couette pour déterminer le couple moteur applique sur le cylindre intérieur en fonction de la vitesse de rotation et du champ magnétique vertical caractérisé par le nombre de Hartmann (Ha). Lorsque le nombre Reynolds est inférieur à sa valeur critique (R_{mc} critique ~ 70), le champ magnétique augmente le couple moteur pour une valeur de R_m donnée.

En revanche pour des valeurs de R_m plus grand que la valeur critique, ils ont constaté que le champ magnétique modéré fait diminuer le couple moteur. Ainsi quand le nombre de Reynolds est plus grand que sa valeur critique, l'effet du champ magnétique modéré est renversé. Au de la de $Re > Re_c$ et pour des valeurs de Ha , le mode de cellules diminue de 4 à 2 cellules. Ce changement dans plan d'écoulement méridien réduit le couple moteur de près de 25 % pour $Re = 300$. Pour $Re > Re_c$ et des valeurs plus élevées de Ha , le mode de cellules égal à 2 car la force de Lorentz tend à fait disparaître l'écoulement azimutal.

S Das et al (2009) [5] ont étudié l'effet de rotation et le champ magnétique sur un écoulement de couette MHD instationnaire d'un fluide visqueux incompressible électriquement conducteur entre des plaques parallèles horizontales infinies dans un système en rotation. Une

solution exacte des équations a été obtenue en utilisant une transformée de Laplace. Les solutions pour les distributions de vitesse ainsi que des contraintes de cisaillement ont été obtenues pour des intervalles de temps petits, ainsi que celles associées pour des longueurs périodes.

Il est constaté que pour des longues périodes la vitesse primaire diminue avec l'augmentation de paramètre de rotation K^2 tandis qu'elle augmente avec l'augmentation de paramètre magnétique M^2 . Il est également remarqué qu'avec l'augmentation de K^2 , la vitesse secondaire V_1 diminue à proximité de la plaque fixe alors qu'elle augmente près de la plaque mobile. D'autre part, la vitesse secondaire diminue avec l'augmentation du paramètre magnétique.

Des travaux expérimentaux et numériques soutiennent cette idée comme ce fait par : Juel et al [6] et [7], Bessaih [8] en montrant l'effet d'un champ magnétique orthogonal à la direction principale de l'écoulement du Gallium liquide en convection tridimensionnelle. Une fois le champ magnétique est appliqué, la convection sera réduite, aussi que les oscillations trouvées aux gradients élevés de température peuvent être supprimées tandis que sans application de champ magnétique, l'écoulement est amené à une structure complexe qui soutient la transition observée à la convection oscillante.

Yaqing Liu et al. [5], ont étudié analytiquement un écoulement de couette MHD instationnaire d'un fluide incompressible non Newtonien de modèle Oldroyd-B due à une accélération d'une plaque infinie. Les solutions exactes pour le champ de vitesse et la contrainte de cisaillement sont obtenues en utilisant la technique de transformation de Laplace.

Seth and Singh [9], ont étudié l'effet d'un champ magnétique uniforme et l'effet de Hall sur un écoulement de couette MHD instationnaire de classe II d'un fluide visqueux incompressible et électriquement conducteur dans un système rotatif. La solution exacte des équations régissant est obtenue par la technique de transformé de Laplace. Le comportement asymptotique de solution est analysée pour les petites et les grandes valeurs de paramètre de rotation K^2 et le paramètre magnétique M^2 lorsque le temps $t \gg 1$. L'effet de Hall tend à retarder l'écoulement primaire tandis qu'il a un effet inverse sur l'écoulement secondaire. A l'inverse le champ magnétique tend à accélérer l'écoulement primaire alors qu'il a tendance à retarder l'écoulement secondaire. La rotation a tendance à accélérer à la fois l'écoulement primaire et secondaire.

Jenn ShyangKno, Jik Chang leong (2013) [5], ont étudié un écoulement d'un fluide électriquement conducteur rempli entre deux parois cylindriques concentriques relativement proches les uns des autres. Dans ce travail une solution théorique de l'écoulement stationnaire de Taylor-Couette entre ces deux cylindres rotatifs isolés électriquement sous l'influence d'un champ magnétique radial a été réalisée. En résolvant simultanément les équations de Maxwell et de Navier-Stokes simplifiées, les profils de composante de vitesse tangentielle et du champ magnétique induit ont été obtenus grâce aux fonctions de Dessel modifiées du premier et second ordre, dont l'argument contient le nombre de Hartmann et la coordonnée radiale. Une étude numérique a été également effectuée pour valider la solution théorique actuelle. Ils ont trouvé que les résultats analytiques et numériques sont identiques quand $Ha=1$, tandis qu'elles s'écartent légèrement les uns des autres quand Ha augmente. Les résultats actuels montrent que la présence du champ magnétique externe provoque l'accélération de l'écoulement à proximité du cylindre lent alors qu'au voisinage du cylindre rapide l'écoulement ralenti. Ceci montre bien que le champ magnétique externe sert à unifier la distribution de la vitesse à l'exception des régions proches des cylindres, à savoir la couche de Hartmann. L'intensité du champ magnétique induit est directement proportionnelle à la différence de vitesse entre le cylindre intérieure et extérieure.

Mahfoud et al. [10], ont présenté une étude numérique d'un écoulement engendré par deux disques tournants en Co/contre-rotation, à l'intérieur d'une enceinte cylindrique, dont le rapport d'aspect $H/R=2$, rempli d'un fluide à faible nombre de Prandtl ($Pr=0.015$), soumise à un gradient de température et un champ magnétique orienté verticalement. L'étude est divisée en deux parties. La première partie de cette étude est consacrée à l'écoulement axisymétrique, un code de calcul basé sur la méthode des volumes finis a été utilisé pour résoudre numériquement les équations gouvernant le phénomène étudié. Cet écoulement est très instable et fait apparaître une grande richesse de structures. Ils ont présenté le cas stable, en faisant la comparaison entre l'écoulement engendré par la co-rotation des disques d'extrémités et la contre-rotation de ces derniers. Dans le cas de régime transitoire, les simulations numériques ont été présentées pour différentes valeurs du nombre de Hartmann ($Ha=0, 5, 10, 20$ et 30) et différentes valeurs du nombre de Richardson ($Ri=0, 0.5, 1, 2, 4$). Ils ont montré leurs effets sur la valeur du nombre de Reynolds critique Re_{cr} et de la fréquence d'oscillation critique, F_{cr} . Des diagrammes de stabilité ont été établis pour mettre en évidence la dépendance du nombre de Reynolds critique avec l'augmentation du nombre de Hartmann Ha , pour différentes valeurs du Richardson Ri .

La deuxième partie de cette étude présente les résultats numériques de l'écoulement tridimensionnel qui ont été obtenus par le code CFD Fluent de la même configuration. En co-rotation l'écoulement présente des instabilités de couche limite donnant lieu à des motifs axisymétriques où spirales. L'état de base axisymétrique déstabilisé par une perturbation de mode $m=1$, à cause de l'effet d'une différence de température entre les disques supérieur (chaud) et inférieur (froid). A mesure que le nombre de Reynolds est augmenté, ce mode stationnaire cède la place à une deuxième bifurcation oscillatoire périodique. En contre-rotation l'écoulement est plus instable et présente une grande richesse dans les structures engendrées, avec notamment l'apparition de mode $m=3$ pour $Ha=20$. Dans le cas de convection forcé ($Ri=0$), le mode le plus instable est le mode $m = 1$, appelé "mode mixte" (M). A mesure que le nombre de Reynolds est augmenté, ce mode stationnaire cède la place à une onde propagative modulée, puis à des quasi-cycles hétéroclines, pour aboutir enfin à une nouvelle solution stationnaire $m = 2$, appelée "mode pur" (P). En augmentant le nombre de Richardson ($Ri=0.5, 1$ et 2), l'écoulement subit une première bifurcation stationnaire avec $m=1$, enfin des diagrammes de stabilité ont été établis.

Toutefois, en présence d'un champ magnétique vertical, l'écoulement en co/contre-rotation garde sa stabilité axisymétrique jusqu'à des valeurs du nombre de Reynolds plus grande.

I.3. Généralité sur les écoulements MHD

Cette nouvelle discipline a émergé au XXème siècle grâce aux progrès en électromagnétisme de la fin de XIXème siècle, notamment dus à Maxwell (1881), la magnétohydrodynamique (MHD) étudie les mouvements de fluides en présence de champ magnétique. Lorsque un fluide conducteur électrique s'écoule en présence d'un champ magnétique, le champ de vitesse est couplé à l'induction électromagnétique à travers la force de Lorentz et la loi d'Ohm, cette discipline tente d'apporter des explications au champ magnétique solaire et planétaire, mais aussi à des problèmes relatifs à des procédés industriels.

Qui y a pour but d'éliminer la turbulence, l'instabilité dans la plupart du mouvement et micro-défauts dans le cristal. Le taux d'amortissement dépend de la force du champ magnétique appliqué ainsi que son orientation par rapport à l'écoulement [11].

I.3.1. Définition de la MHD

La magnétohydrodynamique (MHD) est l'étude des interactions entre les fluides conducteurs et les champs magnétiques dans lesquels ils sont en mouvement.

L'écoulement MHD (magnétohydrodynamique), est la résultante d'appliquer un champ magnétique sur un écoulement de fluide conducteur.

La force électromagnétique est produite par l'interaction de courant électrique avec le champ magnétique [12].

I.3.2. les différentes modélisations de la MHD

Il existe plusieurs modèles de la magnétohydrodynamique selon le degré de complexité nécessaire et le choix de l'un ou l'autre dépend de la valeur du nombre de Reynolds magnétique [13]. Parmi ces modèles, les plus utilisés et les plus simples sont :

- 1- La MHD idéale**, dite aussi à fort nombre de Reynolds magnétique ($R_m \gg 1$), est la forme la plus simple de la MHD. Le fluide fortement magnétisé est traité comme ayant peu ou pas de résistance électrique et on l'assimile à un conducteur parfait. La loi de Lorentz s'applique de telle sorte que fluide et lignes de champ magnétique sont liés : on dit que les lignes de champ sont gelées dans le plasma (on peut également dire que le plasma est gelé dans le champ magnétique). On dit que le théorème d'Alfvén est satisfait.

Une analogie consiste à comparer le fluide à un peigne et les lignes de champ aux cheveux : le mouvement des cheveux suit exactement ceux du peigne.

Cette MHD est étudiée dans les plasmas chauds, tels les plasmas astrophysiques et thermonucléaires d'origine naturelle (étoiles) ou artificielle (tokamaks).



Figure I.1 Réacteur nucléaire de type Tokamak

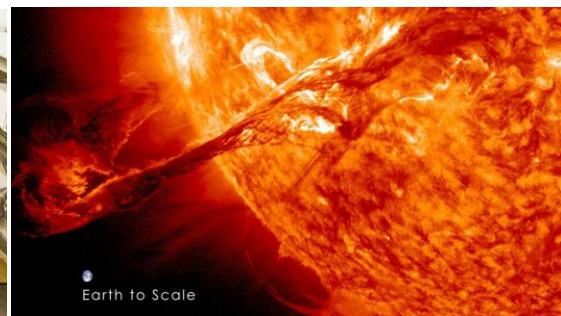


Figure I.2 observation d'une injection de plasma solaire

Les équations de la MHD idéale sont les lois de la quantité de mouvement, l'équation de continuité, le théorème d'ampère et les équations de conservation de l'énergie.

- 2- **La MHD résistive**, dite à faible nombre de Reynolds magnétique ($R_m \leq 1$) décrit les fluides magnétisés et non parfaitement conducteurs. On parle en général d'une résistivité engendrée par les collisions entre les constituants du plasma, qui transforment l'énergie magnétique en chaleur. Lorsque la résistivité est non négligeable, (nombre de Reynolds petit), le théorème d'Alfvén n'est plus satisfait et la topologie magnétique peut être brisée.
- 3- **La MHD-gaz industrielle**, utilisant des plasmas froids (gaz bi-température, hors d'équilibre, où seul le gaz d'électrons est chauffé à 10 000 K, alors que le reste du gaz (ions et neutres) est froid aux alentours de 4 000 K) entre dans cette catégorie de MHD à faible nombre de Reynolds magnétique.

Et il existe d'autres modèles de la MHD comme celui de MHD-HALL et MHD bi-fluides...

I.3.3. Observations et applications

Il existe dans la nature plusieurs formes de la MHD qui se présentent comme suit [14] :

1- Géophysique

Le noyau fluide de la terre et des autres planètes est selon la théorie en vigueur une gigantesque dynamo MHD qui génère le champ magnétique terrestre (géomagnétisme).

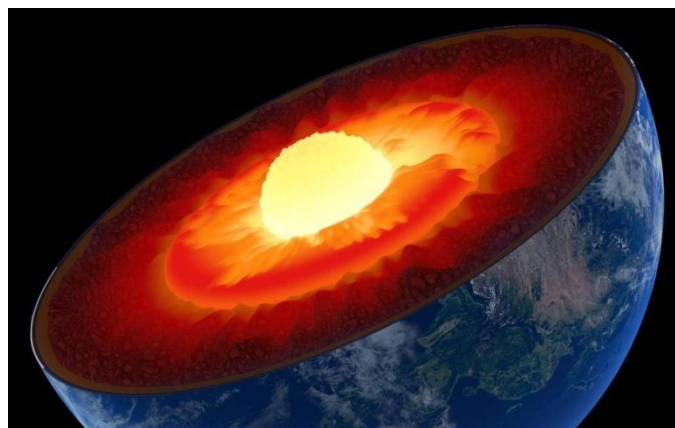


Figure I.3 Le noyau de la terre

2- Astrophysique

Fut le premier domaine que décrit la MHD. En effet, la matière observable de l'univers est composée de plasma à plus de 99 %, dont les étoiles, le milieu interplanétaire.



Figure I.4 Photo de l'espace prise par télescope Hubble



Figure I.5 Observation d'une injection de plasma

3- Ingénierie

La MHD intervient dans la conception et la gestion des cuves d'électrolyse pour l'aluminium. Elle est utilisée de manière théorique dans le confinement des plasmas (stabilisation, expulsion ou compression), notamment les plasmas chauds thermonucléaires dans les machines à fusion par confinement magnétique (comme les tokamaks) et aussi elle est utilisée sous forme des machines électromagnétique sans pièce mobile (convertisseurs MHD).

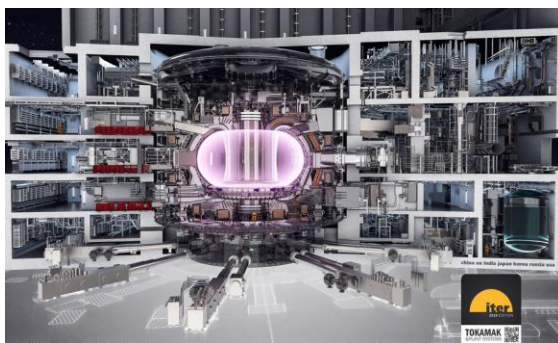


Figure I.6 Réacteur nucléaire de type Tokamak

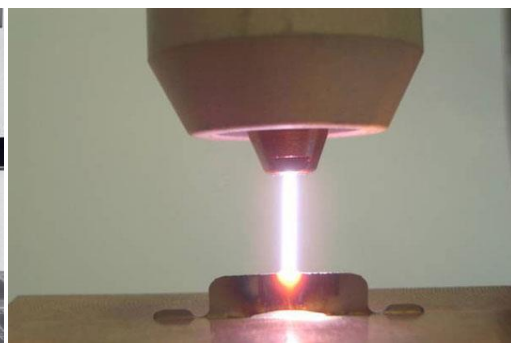


Figure I.7 Electrolyse de l'aluminium (plasma froid)

I.3.4. Ecoulement MHD

Les écoulements des fluides conducteurs en présence d'un champ magnétique sont nommés des écoulements magnétohydrodynamiques (MHD en abrégé). Un écoulement MHD

peut différer significativement d'un écoulement hydrodynamique ordinaire équivalent. Le mouvement du métal fondu à travers des lignes de champ magnétique produit un courant électrique qui agit réciproquement avec le champ magnétique pour produire une force motrice électromagnétique (EM), qui s'oppose au mouvement du liquide. Même un champ magnétique faible fournit assez de force EM d'amortissement pour éliminer la turbulence et l'instabilité dans la plupart du mouvement concerné, éliminant ainsi beaucoup de micro-défauts dans le cristal. Le taux d'amortissement dépendra en vertu de la force du champ magnétique appliqué aussi bien que son orientation en ce qui concerne la circulation convective [1].

I.4. Cas d'un fluide conducteur

Ce domaine de la MHD a besoin des fluides conducteurs alors on les a présenté d'une façon générale tel que les nanofluides.

I.4.1. Définition

Les nanofluides sont des solutions colloïdales composées des particules de taille nanométrique (nanoparticules) en suspension dans un liquide qui s'appelle un liquide de base afin d'améliorer certaines propriétés.

Dans le cas des fluides Dans le cas des fluides caloporteurs, un des premiers paramètres à prendre en compte afin d'évaluer le potentiel d'échange de chaleur est la conductivité thermique. Or les fluides les plus employés tels que l'eau, l'huile ou l'éthylène glycol(EG) ne disposent que d'une conductivité thermique faible par rapport à celle des solides cristallins, avec les nanofluides l'idée est alors d'insérer au sien du fluide de base des nanoparticules afin d'augmenter la conductivité thermique effective du mélange [15].

Eléments	Conductivité thermique λ (W/m.K)
L'eau	0.599
Ethylène glycol	0.25
50% eau + 50% éthylène glycol	0.41
Huile de moteur	0.14
Nanotubes de carbone	3000-6000
Diamant	1000-2600
Cuivre (métal pur)	401

Nickel (métal pur)	237
Silicone	148
Alumine	40

Tableau I.1 La conductivité thermique de quelque élément.

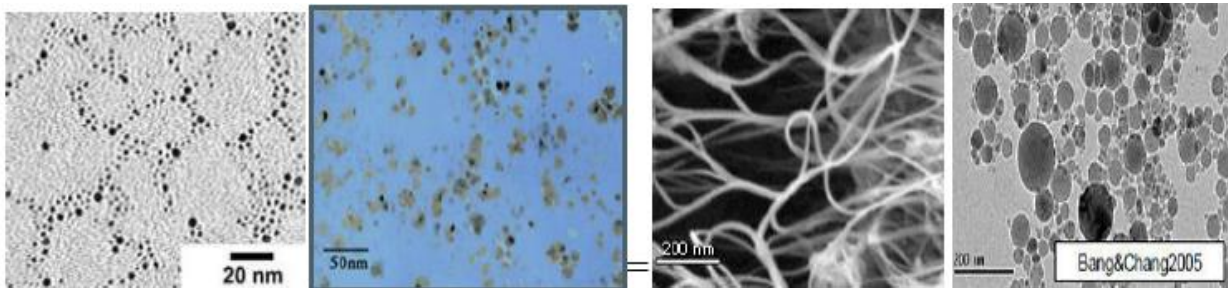


Figure I.8 Nanofluides vue au microscope électronique : éthylène glycol +cuivre 0.5% , eau+ nanotubes , eau +alumine , eau + or à 2nm (4 analyse nano...)

I.4.2. Fabrication des nanofluides

Il existe plusieurs procédés de fabrication de nanoparticule, on peut les classer en deux classes :

- **Les procédés physiques** comme le broyage mécanique.
- **Les procédés chimique** comme la précipitation chimique.

Par contre pour la préparation des nanofluides il existe deux méthodes différentes :

- **La méthode à deux étapes** : consiste à produire dans un premier temps les nanoparticules puis à les disperser dans le fluide de base.
- **La méthode à une seule étape** : consiste à la dispersion des nanoparticules directement dans un fluide de base (6/analyse nano.....)

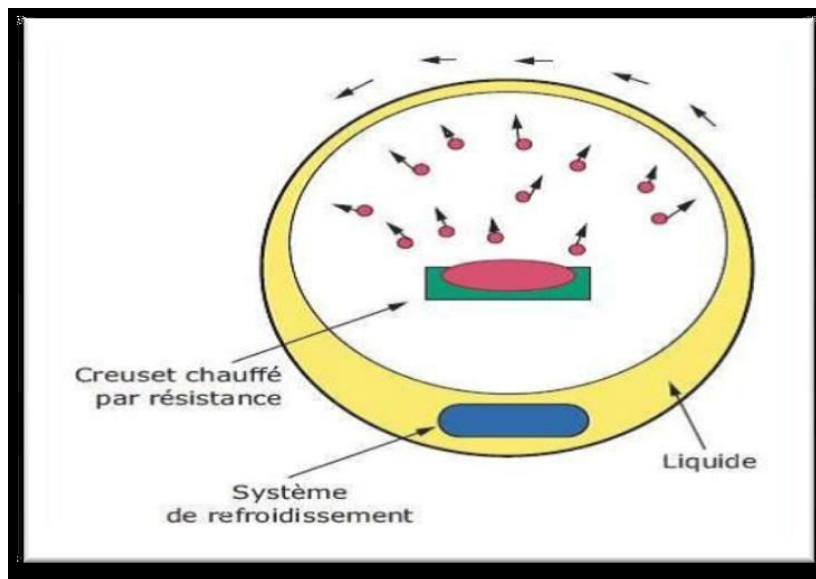


Figure I.9 Procédés de synthèse de nanofluides en une seule étape (Argonne National Laboratoire, USA).

I.4.3. Les applications des nanofluides

- L'échangeur de chaleur.
- Le refroidissement d'éléments électroniques.
- Nanoparticules pour l'efficacité des réfrigérateurs.
- Aéronautique et spatial.
- Refroidissement des systèmes nucléaires.
- Transport (gestion de refroidissement / véhicule moteur thermique).

I.5. Conclusion

Dans ce premier chapitre, nous avons présenté une revue bibliographique et des généralités sur la MHD et les nanofluides telle que les définitions, les domaines d'utilisation et d'autres choses concernant l'étude.

Géométrie et modèle mathématique

II.1. Introduction

Nous présentons dans ce chapitre, les équations modélisant le problème traité dans ce mémoire. Ces équations mettent en évidence le comportement des fluides conducteurs (tel le cas des métaux liquides). Elles sont fondées sur les lois physiques : de conservation de masse (continuité), de quantité de mouvement (Navier-stokes).en présence d'un champ magnétique, l'apparition d'une nouvelle force (force de Lorentz) au sein de liquide (écoulement MHD), ajoute une autre équation pour compléter le système. Les démonstrations nécessaires à l'obtention des équations susmentionnés décrivant la dynamique de l'écoulement de fluide laminaire, sont illustrées dans beaucoup d'ouvrages de mécanique des fluides par exemple la référence [16].

II.2. Géométrie du problème

Le système physique considéré (Figure. II.1) est composé de deux cylindres coaxiaux verticaux de hauteur H , de rayons intérieur et extérieur respectif R_i et R_o , dont le rapport d'aspect fixe ($\gamma = \frac{H}{R_o} = 2$). L'espace annulaire qui contient le fluide conducteur (aluminium liquide caractériser par un faible nombre de Prandtl $Pr=0.015$) est $R=R_o - R_i$, avec $R_o=1$. Le disque inférieur tourne à une vitesse angulaire constante Ω , tandis que le disque supérieur tourne dans le sens inverse (écoulement contre rotation). Les parois du cylindre coaxial sont adiabatiques (pas d'échange de chaleur). L'ensemble soumis à un champ magnétique de magnitude constante, orienté verticalement vers le haut et uniforme. Les parois sont électriquement isolées.

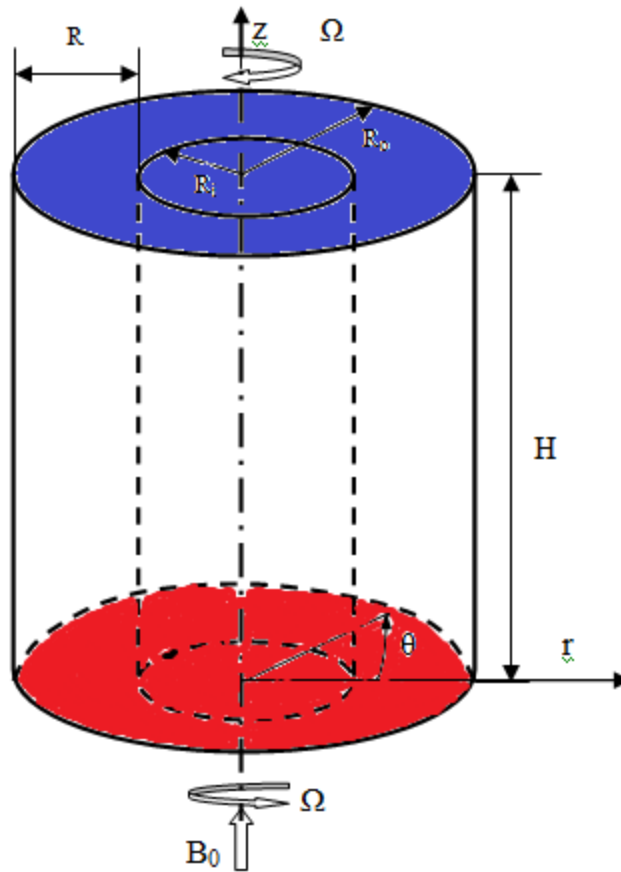


Figure II.1 Géométrie du problème considéré

II.3. Les hypothèses simplificatrices

Afin d'aborder la résolution des équations régissant l'étude hydrodynamique d'un écoulement rotatif MHD dans un espace annulaire, relatif à la géométrie déjà montrée, on va adopter les hypothèses de simplifications suivantes :

- ✓ L'écoulement qui sera étudié est soumis à un champ magnétique axial constant
- ✓ l'écoulement laminaire
- ✓ le fluide est incompressible ($\rho = \text{Cste}$) et newtonien
- ✓ l'effet de joule est négligeable
- ✓ la dissipation visqueuse est négligeable
- ✓ le métal liquide est non-magnétisé puisque la perméabilité magnétique $\mu_m = 1$.
- ✓ les propriétés physiques de fluide (σ , λ , α , et ν) sont supposées constantes.

- ✓ Une faible valeur de nombre de Reynolds magnétique $R_m = \mu_0 \sigma \Omega R^2$. Dans ce cas l'hydrodynamique est découplée de l'équation de l'induction. Par conséquent la résolution concernera uniquement le champ de vitesse hydrodynamique \vec{V} et la distribution du courant induit \vec{J} . [4]

II.4. Formulation mathématique du problème

Après les hypothèses simplificatrices susmentionnées, nous allons établir les équations de base régissant notre problème dans le plan méridien.

Ces équations rapportées à un système de coordonnées cylindrique (r', z', θ) sont données selon les descriptions Eulérienne par :

- **équation de continuité**

Le principe de la conservation de masse permet d'établir l'équation de continuité suivante pour un fluide incompressible (métal liquide) :

$$\frac{1}{r'} \frac{\partial(r' u')}{\partial r'} + \frac{\partial v'}{\partial z'} = 0 \quad (\text{II.1})$$

- **Equation de quantité de mouvement radiale**

$$\rho \left(\frac{\partial u'}{\partial t} + u' \frac{\partial u'}{\partial r'} + v' \frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{w'^2}{r'} \right) = - \frac{\partial p'}{\partial r'} + \mu \left(\frac{1}{r'} \frac{\partial(r' \frac{\partial u'}{\partial r'})}{\partial r'} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2} - \frac{u'}{r'^2} \right) + f'_{Lr'} \quad (\text{II.2})$$

- **Equation de quantité de mouvement axiale**

$$\rho \left(\frac{\partial v'}{\partial t} + u' \frac{\partial v'}{\partial r'} + v' \frac{\partial v'}{\partial z'} \right) = - \frac{\partial p'}{\partial z'} + \mu \left(\frac{1}{r'} \frac{\partial(r' \frac{\partial v'}{\partial r'})}{\partial r'} + \frac{\partial^2 v'}{\partial z'^2} \right) + f'_{Lz'} \quad (\text{II.3})$$

- **Equation de quantité de mouvement azimuthale (Equation de Swirl)**

$$\rho \left(\frac{\partial w'}{\partial t} + u' \frac{\partial w'}{\partial r'} + v' \frac{\partial w'}{\partial z'} + \frac{u' w'}{r'} \right) = - \frac{\partial p'}{\partial r'} + \mu \left(\frac{1}{r'} \frac{\partial(r' \frac{\partial w'}{\partial r'})}{\partial r'} + \frac{\partial^2 w'}{\partial z'^2} - \frac{w'}{r'^2} \right) + f'_{L\theta} \quad (\text{II.4})$$

Ou u', v' et w' sont respectivement les composantes dimensionnelles de vitesse radiale, axiale et azimuthale, ρ et la masse volumique du fluide et $f'_{Lr'}, f'_{Lz'}, f'_{L\theta}$ représentent respectivement les composante de la force électromagnétique de Lorentz radiale, axiale et azimuthale donnée par la formule [2] :

$$f'_L = \vec{J} \wedge \vec{B}$$

La force de Lorentz est la base de générateur MHD et indique que la particule chargée subit une force lorsqu'elle se déplace dans le champ magnétique.

On note que pour l'écoulement secondaire, la situation est purement bidimensionnelle (conséquence de l'axisymétrie), par la suite la composante azimutale w' de la vitesse est une grandeur scalaire, introduite dans ce système, et pour le calcul du potentiel électrique.

- **Equation du potentiel électrique**

Cette équation est introduite aux systèmes d'équation gouvernant, lors de la présence du champ magnétique axial pour compléter ce système vis-à-vis l'apparition, d'une nouvelle force de volume (force de Lorentz), dont les composantes sont les termes, $f'_{Lr'}, f'_{Lz'}, f'_{L\theta}$ ajouter aux systèmes d'équation de Navier-stokes.

En supposant que la conductivité σ de fluide est isotrope, la loi d'Ohm sera :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (\text{II.6})$$

Où \vec{j} est la densité volumétrique du courant et \vec{E} le champ électrique local. Suivons dans un son mouvement un élément fluide ; dans un repère absolu, la dernière équation s'écrit :

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}) \quad (\text{II.7})$$

$\vec{V} = u' \vec{e}_{r'} + v' \vec{e}_{z'} + w' \vec{e}_{\theta}$: désigne le vecteur de la vitesse dans le plan méridien

$\vec{B} = B \vec{e}_{z'}$: Le vecteur du champ magnétique

$\vec{e}_{r'}, \vec{e}_{z'}, \vec{e}_{\theta}$: sont les vecteurs unitaires respectivement des directions radiale, axiale et azimutale dans le repère absolu.

Le courant électrique est conservé donc :

$$\overline{\text{Rot}} \vec{E} = 0 \Leftrightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi \quad (\text{II.8})$$

Et

$$\text{div} \vec{J} = 0 \quad (\text{II.9})$$

C.-à-d. : le courant électrique dérive d'un potentiel électrique φ

En substituant les équations (II.7) et (II.9) dans l'équation (II.8), on obtient :

$$\vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} \varphi + \vec{V} \wedge \vec{B}) = 0 \Leftrightarrow \Delta \varphi = \text{div}(\vec{V} \wedge \vec{B}) \quad (\text{II.10})$$

Et en coordonnées cylindriques, l'équation du potentiel électrique φ s'écrit :

$$\frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial \varphi}{\partial r'} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z'^2} = B \left(\frac{w'}{r'} + \frac{\partial w'}{\partial r'} \right) \quad (\text{II.11})$$

Mais dans les équations de quantité de mouvement, en sachant que les composantes de la vectrice densité électrique soient, d'après les équations (II-8) et (II-9)

$$j_{r'} = \sigma \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial r'} + w' B \right) \quad (\text{II.12a})$$

$$j_{z'} = \sigma \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial z'} \right) \quad (\text{II.12b})$$

$$j_{\theta} = \sigma (-u' B) \quad (\text{II.12c})$$

Les composantes de la force $EM f'_{Lr'}, f'_{Lz'}, f'_{L\theta}$ peuvent être exprimées comme suit :

$$f'_{Lr'} = -\sigma u' B^2 \quad (\text{II.13a})$$

$$f'_{Lz'} = 0 \quad (\text{II.13b})$$

$$f'_{L\theta} = \sigma B \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r'} - w' B \right) \quad (\text{II.13c})$$

Ces formules sont exprimées en termes de quantités dimensionnelles.

II.5. Mise sous forme adimensionnelle

Les équations gouvernant peuvent être transformées à la forme adimensionnelle en utilisant la normalisation appropriée.

Les variables adimensionnelles suivantes ont été utilisées :

$$\tau = \frac{t}{\left(\frac{1}{\Omega}\right)}, \quad r = \frac{r'}{R}$$

$$u = \frac{u'}{(\Omega R)}, \quad v = \frac{v'}{(\Omega R)}$$

$$P = \frac{P'}{\rho (\Omega R)^2}, \quad \Phi = \frac{\varphi}{(\Omega R^2 B)}$$

$$w = \frac{w'}{(\Omega R)}, \quad z = \frac{z'}{R}$$

Avec :

- $Pr = \frac{v}{a}$
- $Re = \frac{\Omega R^2}{v}$
- $N = \frac{Ha^2}{Re} = \frac{\sigma B^2}{\rho \Omega}$: paramètre d'interaction qui représente le ratio entre les forces électromagnétique et celles d'inertie [1]

- $Ha = BR\sqrt{\sigma/\rho\nu}$: le nombre de Hartmann qui définit le rapport des forces électromagnétiques aux forces de viscosité [1]

Les équations adimensionnelles gouvernant le système s'écrivent alors :

- **Equation de continuité**

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.14})$$

- **Equation de quantité de mouvement radiale**

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{w'^2}{r} \right) = -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{R_m} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} \right) + NF_{Lr} \quad (\text{II.15})$$

- **Equation de quantité de mouvement axiale**

$$\left(\frac{\partial v}{\partial \tau} + u \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{R_m} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + NF_{Lz} \quad (\text{II.16})$$

- **Equation de quantité de mouvement azimutale (équation de Swirl)**

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \tau} + u \frac{\partial w}{\partial r} + v \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{uw}{r} \right) = \frac{1}{R_m} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{w}{r^2} \right) + NF_{L\theta} \quad (\text{II.17})$$

- **Equation de potentiel électrique**

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \left(\frac{w}{r} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad (\text{II.18})$$

Dans les équations de quantité de mouvement, $F_{Lr}, F_{Lz}, F_{L\theta}$ sont respectivement les forces de Lorentz adimensionnelles dans les directions radiale, axiale et azimutale dont les expressions sont obtenues après la normalisation des composantes dimensionnelles $f'_{Lr'}, f'_{Lz'}, f'_{L\theta}$

$$F_{Lr} = -u$$

$$F_{Lz} = 0$$

$$F_{L\theta} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} - w$$

Les courants électriques adimensionnels dans les directions r , z et θ sont respectivement :

$$J_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} + w$$

$$J_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

$$J_{\theta} = -u$$

II.6. Les conditions aux limites et initiales

II.6.1. Les conditions initiales

En physique ou en mathématique, on définit comme conditions initiales les éléments nécessaires à la détermination de la solution complète, dans notre cas ce sont les répartitions de u, v, w, p et Φ dans le fluide.

On suppose que le liquide soit au repos et le champ de potentiel électrique partout nul dans le volume de contrôle. Alors à $\tau=0$ on aura :

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \Phi = 0, \quad (0 < r < 1, 0 < z < \gamma) \quad (\text{II.21})$$

II.6.2. Les conditions aux limites

Les conditions aux limites des quantités adimensionnelles pour l'écoulement de Swirl avec un champ magnétique, ainsi que les parois de notre géométrie sont électriquement isolantes.

Pour un instant de $\tau > 0$, sur l'axe de symétrie :

$$u = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0, \quad (r = 0, 0 \leq z \leq \gamma)$$

A la paroi latérale adiabatique et électriquement isolée :

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0, \quad (r = 1, 0 \leq z \leq \gamma)$$

Au disque inférieur :

- **En rotation**

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = r, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad (z = 0, 0 \leq r \leq 1)$$

Au disque supérieur :

- **Contre -rotation**

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = -r, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad (z = \gamma, 0 \leq r \leq 1)$$

II.7. Outils d'analyse de l'écoulement

Après la résolution des équations régissant l'étude des espaces annulaire remplie du métal liquide considéré, les inconnues u , v , w , p , Φ donnent quantitativement une vue sur le phénomène étudié mais, ils existent d'autres paramètres qui peuvent attribuer aux solutions plus claire et substantialité quantitativement et qualitativement, et facilitent l'analyse du phénomène étudié. Quelques paramètres dont la nature peut différer (critère adimensionnel, fonction mathématique,...etc.), sont utilisés dans ce travail pour éclaircir la vision physique du problème.

- **La fonction de courant**

Nous utilisons cet intelligent dispositif seulement pour identifier les lignes de courant hydrodynamique, et les débits d'écoulement. La fonction de courant ψ (dite de stokes) est définie en coordonnées cylindriques pour un écoulement incompressible :

$$u = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

La fonction ψ reste constante le long d'une ligne du courant.

II.8. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le modèle physique considéré et les équations qui régissent les phénomènes étudiés. Ensuite, nous avons spécifié les conditions initiales et aux limites de toutes les frontières de ce domaine.

Méthode numérique et CFD

III.1. Introduction

Dans le domaine de la mécanique des fluides les phénomènes physiques sont décrits par des formules et des équations aux dérivées partielles (EDP) qui sont compliquées et non linéaires.

En général ces équations n'admettent pas des solutions analytiques sauf dans des cas très simplifiés. Mais une solution numérique peut être possible en transformant ces équations différentielles en système d'équations algébriques linéaires par une méthode de discrétisation avant de résoudre ce système par des méthodes directes ou par itérations. Il existe plusieurs méthodes de discrétisation qui sont utilisées actuellement on peut citer quelques méthodes :

- la méthode des différences finies.
- la méthode des éléments finis.
- la méthode de volume fini.

Pour résoudre ce système, nous avons choisi la procédure de volumes finis qui a été développée par Patankar [17] et modifiée par Versteeg et Malalasekera [18]. Cette technique a été utilisée avec succès par plusieurs chercheurs. Elle est basée sur une approche de type de volumes contrôle qui reste simple à comprendre.

III.2. La méthodes des volumes finis

III.2.1. Définition

La méthode des volumes finis (MVF) s'appuie sur un maillage curviligne orthogonal du domaine de calcul. La discrétisation de l'équation aux dérivées partielles (EDP) s'opère à partir d'une forme conservative pour chaque volume de contrôle par une technique qui s'apparente à la méthode des différences finies. De cette façon, le respect d'un principe de conservation (par exemple : conservation de la masse) est imposé au niveau de chaque volume fini. Ce point constitue le caractère le plus attrayant de cette méthode. La structure du maillage en liaison avec la technique de discrétisation, conduit à une matrice de type bande qui se prête facilement à un stockage par blocs. Des méthodes itératives bien adaptées (Gauss Seidel) permettent la résolution de ce système linéaire pour des problèmes non-linéaire. [19]

III.2.2. Notion générale

L'application de la méthode des volumes finis pour la résolution d'un problème suit les étapes suivantes :

1- bien définir le domaine d'études et diviser ce domaine de calcul en nombre fini et discret de volume de contrôle dont la somme soit égale exactement au volume du domaine de calcul.

On dit qu'on génère un maillage.

2- Discrétisation des différentes équations régissant le phénomène. A la fin on obtient un système d'équations algébriques.

2- Résoudre le système algébrique final par une méthode de résolution (méthode itérative ou directe).

L'avantage de cette méthode par rapport aux autres méthodes numériques est qu'elle est conservative, bref, tout ce qui sort d'un volume de contrôle entre dans un autre.

Pour expliciter l'application de cette méthode, on considère l'équation générale de transport qui s'écrit pour une propriété Φ , comme suit :

$$\frac{\partial \rho \Phi}{\partial t} + \text{div}(\rho \Phi \mathbf{u}) = \text{div}(\Gamma_{\Phi} \text{grad} \Phi) + S_{\Phi} \quad (\text{III.1})$$

En d'autres termes :

$$\left(\begin{array}{c} \text{variation de } \Phi \text{ dans un} \\ \text{élément de fluide} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{flux net de} \\ \text{élément de fluide} \\ \text{terme convectif} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{variation de } \Phi \text{ due} \\ \text{à la diffusion} \\ \text{terme diffusif} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{variation de } \Phi \text{ due} \\ \text{aux sources} \\ \text{terme source} \end{array} \right)$$

Tel que :

Γ_{Φ} : le coefficient de diffusion.

S_{Φ} : le terme source.

La résolution de l'équation par la méthode des volumes finis, réside essentiellement dans l'intégration de celle-ci sur un volume de contrôle :

$$\int_{cv} \frac{\partial(\rho \Phi)}{t \partial} dv + \int_{cv} \text{div}(\rho \Phi \mathbf{u}) dv = \int_{cv} \text{div}(\Gamma_{\Phi} \text{grad} \Phi) dv + \int_{cv} S_{\Phi} dv \quad (\text{III.2})$$

III.3. Etapes de résolution par la méthode des volumes finis

III.3.1. Maillage

Le domaine de calcul est divisé en une série de sous domaines appelés volume de control, ces volumes enveloppent tout le domaine de calcul, de telle façon que la somme de leurs volumes soit égale exactement au volume du domaine de calcul.

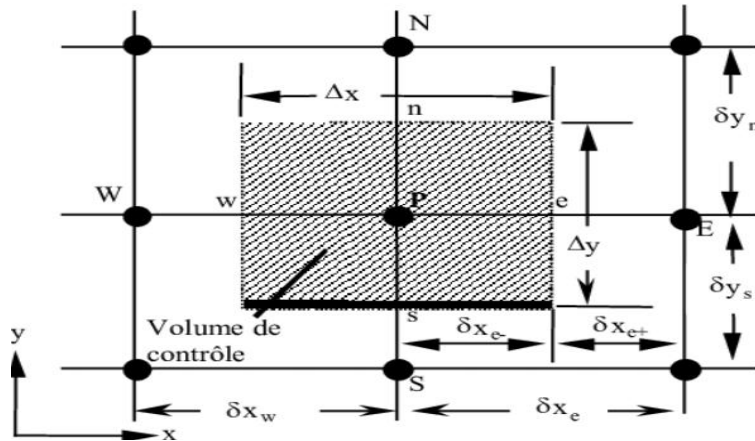


Figure III.1 Schéma du volume de contrôle dans le cas bidimensionnel.

Les variables dépendantes sont stockées dans des points discrets appelés nœuds (points d'interaction des lignes du maillage) voir la figure (III.1). Les nœuds sont numérotés de 1 à N_i , suivant x le nœud (i, j) est appelé P, il est entouré par les nœuds E(Est), N(Nord), W(West) et S (sud). Chaque nœud est associé un volume fini (Figure III.1), les faces du volume sont situées au milieu entre les nœuds, la surface de volume de contrôle consiste en quatre plans, notés par des lettres minuscules correspondant à leur direction E, W, N et S. (exemple : la face w est au milieu entre les nœuds W et P). Les incréments de distance Δx , Δy , Δx_e , Δy_n , Δx_w , Δy_s sont définis sur la (Figure III.2). Les scalaires ϕ (pression P , température T) sont stockés au nœud central. Les composantes de vitesse u et v sont stockées dans des nœuds décalés.

L'emploi de tels maillages entrelacés permet le calcul des gradients de pression dans les équations de quantité de mouvement, sans interpolation des pressions et le calcul des flux convectifs dans les équations sans interpolations des vitesses.

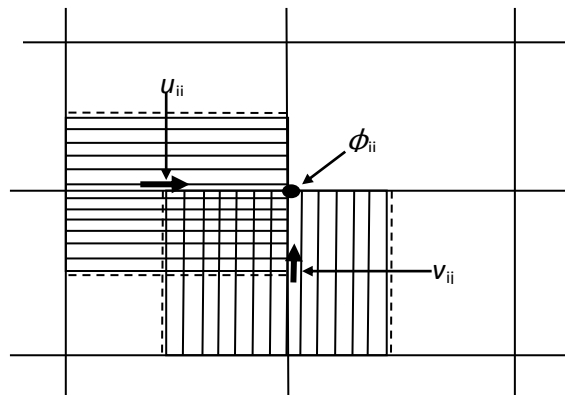


Figure III.2 Volume de contrôle bidimensionnel décalé pour u et v .

Dans les écoulements MHD, les couches limites de Hartmann se développent et elles ne sont pas les mêmes, que celles ordinaires présentent en situation purement hydrodynamique. Aux parois perpendiculaires au champ magnétique, les couches limites de Hartmann sont caractérisées par une décroissance épontille de la vitesse vers la paroi. Pour étudier l'influence du maillage sur les résultats numériques, on a procédé aux choix de la maille indépendante qui a été obtenu en utilisant trois mailles de taille différentes tel que : (60 x 60 x 120) ; (70x70x140) ; (80x80x160) ; suivant les directions r , z et θ .

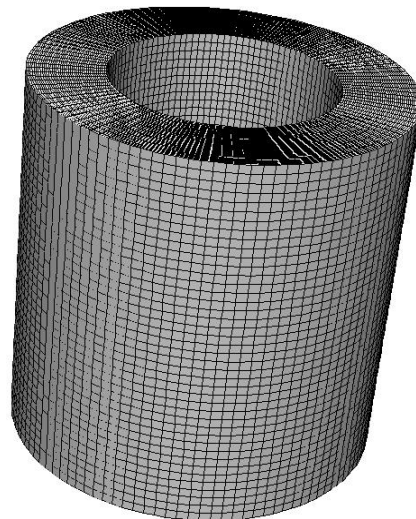


Figure III.3 Maillage utilisé pour la géométrie avec raffinement près des parois.

III.3.2. Discrétisation implicite de l'équation de transport

Les équations locales instantanées régissant l'écoulement en question peuvent s'écrire selon la suivante forme, de l'équation généralisée de transport d'une variable dépendante Φ .

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{\partial(u\Phi)}{\partial r} + \frac{\partial(v\Phi)}{\partial z} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \Gamma_{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma_{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \right) + S_{\Phi} \quad (\text{III.1})$$

Où :

$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau}$: représente le terme transitoire.

$\frac{\partial(u\Phi)}{\partial r} + \frac{\partial(v\Phi)}{\partial z}$: représente le transport par convection Φ .

$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \Gamma_{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma_{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) \right)$: représente la diffusion de Φ .

S_{Φ} : représente le terme source.

Le tableau suivant rassemble les expressions de la variable Φ , de coefficient de diffusion Γ_{Φ} et de terme source S_{Φ} concernant les équations adimensionnelles citées dans le deuxième chapitre.

Equation	Φ	Γ_{Φ}	S_{Φ}
Continuité	1	0	$-\frac{u}{r}$
Quantité de mouvement radiale	u	$\frac{1}{Re}$	$-\frac{\partial P}{\partial r} - \frac{1}{Re} \cdot \frac{u}{r^2} - \frac{Ha^2}{Re} u + \frac{w^2}{r}$
Quantité de mouvement axiale	v	$\frac{1}{Re}$	$-\frac{\partial P}{\partial z}$
Quantité de mouvement azimuthale	w	$\frac{1}{Re}$	$-\frac{1}{Re} \cdot \frac{w}{r^2} + \frac{Ha^2}{Re} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} - w \right) - \frac{uw}{r}$
Potentiel électrique	Φ	1	$-\frac{w}{r} - \frac{\partial w}{\partial r}$

Tableau III.1 différentes quantités transportées et leurs termes de transport

Pour obtenir l'équation de discrétisation de la variable dépendante Φ , on intègre l'équation générale de transport (III.1), suivant r et z après multiplication par r sur un volume fini de contrôle typique de dimensions $\Delta r \times \Delta z$ par unité de profondeur on obtient la forme algébrique finale suivante :

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \quad (\text{III.2})$$

Les coefficients multiplicatifs (a_P, a_E, a_W, a_N, a_S) de la variable dépendante ϕ ainsi que le terme b de l'équation (III.2) sont décrits en détail dans **Patankar** (1980) [17] et sont rappelés ci-dessous:

$$a_E = D_e A(|P_e|) + \max[-F_e, 0] \quad (\text{III.3a})$$

$$a_W = D_w A(|P_w|) + \max[F_w, 0] \quad (\text{III.3b})$$

$$a_N = D_n A(|P_n|) + \max[-F_n, 0] \quad (\text{III.3c})$$

$$a_S = D_s A(|P_s|) + \max[F_s, 0] \quad (\text{III.3d})$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_{P^o} \quad (\text{III.3e})$$

$$b = \left(\overline{S_\phi} + \frac{\phi^0}{\Delta \tau} \right) r_P \cdot \Delta r \cdot \Delta z \quad (\text{III.3f})$$

Avec a_P, a_E, a_W, a_N et a_S sont respectivement les coefficients correspondants aux nœuds central (point P), Est, Ouest, Nord et Sud du volume fini de contrôle et a_{P^o} est le coefficient de la variable générale ϕ à calculer au point P en un instant précédent par :

$$a_{P^o} = \frac{r_P \cdot \Delta r \cdot \Delta z}{\Delta \tau} \quad (\text{III.3g})$$

Et b : appelé terme source, qui englobe tous les termes supposés être constants dans le volume de contrôle. D_e, D_w, D_n, D_s et F_e, F_w, F_n, F_s sont respectivement les termes diffusifs et convectifs aux faces Est, Ouest, Nord et Sud. Leurs expressions sont :

$$D_e = \frac{\Gamma_e}{\delta r_e} r_e \cdot \Delta z \quad (\text{III.4a})$$

$$D_w = \frac{\Gamma_w}{\delta r_w} r_w \cdot \Delta z \quad (\text{III.4b})$$

$$D_n = \frac{\Gamma_n}{\delta z_n} r_n \cdot \Delta r \quad (\text{III.4c})$$

$$D_s = \frac{\Gamma_s}{\delta z_s} r_s \cdot \Delta r \quad (\text{III.4d})$$

$$F_e = u_e \cdot r_e \cdot \Delta z \quad (\text{III.4e})$$

$$F_w = u_w \cdot r_w \cdot \Delta z \quad (\text{III.4f})$$

$$F_n = v_n \cdot r_p \cdot \Delta r \quad (\text{III.4g})$$

$$F_s = v_s \cdot r_p \cdot \Delta r \quad (\text{III.4h})$$

Et P_e, P_w, P_n, P_s sont :

$$P_i = F_i / D_i \quad ; i = e, w, n, s \quad (\text{III.5})$$

Ces nombres appelés nombres du Peclet, désignent les rapports des flux convectifs aux flux diffusifs aux différentes faces du volume fini de contrôle. Les coefficients a_p, a_E, a_W, a_N et a_S dépendent du schéma numérique choisi et du nombre de Peclet.

Dans tous nos calculs, on a utilisé le schéma numérique de différences centrées (**Patankar, 1980**) [17]. Ce choix est motivé par le fait que ce schéma soit le plus usuellement utilisé dans la littérature pour découvrir les instabilités physiques. Ce schéma est donné par la fonction suivante :

$$A(|P_i|) = 1 - 0.5|P_i| \quad ; i = e, w, n, s \quad (\text{III.6})$$

Cependant la résolution de l'équation (III.2), fait apparaître deux difficultés :

- Les coefficients des équations discrètes dépendent des valeurs des variables, le système n'est donc pas linéaire.
- Les termes source des équations de quantité de mouvement font intervenir le gradient de pression.

III.3.3. Pression (Schéma standard) [20]

Les valeurs de la pression sont stockées aux centres des cellules. Pour les valeurs des pressions aux faces, nécessaires pour la résolution de l'équation de continuité, FLUENT propose plusieurs schémas d'interpolations tel que le schéma standard.

L'interpolation s'effectue en utilisant les coefficients de l'équation de la quantité de mouvement, cette procédure fonctionne bien pour des petites variations de la pression entre les centres des cellules.

Devant les problèmes de diffusion numériques, des schémas numériques plus précis ont été testés comme celui-ci qui s'appuie sur les deux mailles amont.

Le principal problème que nous rencontrons dans la discrétisation des termes de convection, est le calcul des valeurs de la propriété transportée Φ sur les faces du volume de contrôle et son flux convectif à travers ces limites.

Afin d'obtenir les équations discrétisées pour la diffusion et le terme source nous avons introduit la différentiation centrée. Il semble évident d'essayer d'utiliser cette technique pour les termes convectifs.

Malheureusement, le phénomène de diffusion la distribution de la propagation de la propriété et de ces gradients dans toutes les directions, alors que la convection ne montre son influence que dans le sens de l'écoulement.

III.3.4. Couplage pression-vitesse [21]

Les équations de transport pour les composantes de la vitesse ont comme terme source principale le gradient du champ de pression, de sorte que si le champ de pression serait connu le processus de discrétisation des équations de mouvement serait identique à n'importe quelle autre variable scalaire.

Malheureusement, le champ de pression devrait être aussi obtenu généralement comme part de la solution du problème. Si l'écoulement est compressible, l'équation de continuité peut être utilisée comme équation de transport pour la masse volumique, et l'équation d'énergie fournit une équation de transport pour la température, de sorte que la pression peut être obtenue à partir de l'équation d'état correspondante. En échange, si l'écoulement est incompressible la masse volumique est constante, et n'est pas reliée à la pression. De ce fait les équations de quantité de mouvement sont fortement couplées et on ne dispose pas d'équation de transport pour la pression. Si le champ de pression appliqué est correct, le champ de vitesse déduit des équations de quantité de mouvement satisfera l'équation de continuité. Comme le champ de pression est inconnu, il est nécessaire d'utiliser un algorithme itératif qui permet de le calculer, et de résoudre la non linéarité des équations de quantité de mouvement. Ainsi, trois méthodes principales sont utilisées et qui sont connues

comme algorithmes *SIMPLE*, *SIMPLEC*, et *PISO*. L'algorithme dans notre étude est l'algorithme *SIMPLE*.

III.3.5. Algorithme *SIMPLE* [21]

Normalement, si le champ de pression est connu, la résolution de l'équation de quantité de mouvement donne un champ de vitesse qui vérifie automatiquement l'équation de continuité. Mais comme aucune information sur la pression ne peut être obtenue de l'équation de continuité on est amené à résoudre ce programme par un algorithme itératif, c'est-à-dire on utilise une distribution quelconque de la pression pour résoudre l'équation de mouvement, le champ de vitesse obtenu ne vérifie pas l'équation de continuité, puisqu'il a été réduit d'un champ de pression quelconque. L'idée est de déduire de l'équation de continuité une équation pour corriger la pression, alors cette nouvelle pression est réutilisée pour calculer un nouveau champ de vitesse et ainsi de suite jusqu'à convergence de toutes les variables du problème.

L'algorithme original est écrit par Patanker et Spadling et essentiellement une procédure d'estimation et correction pour calculer la pression dans le maillage décalé. L'algorithme " *SIMPLE* "acronyme pour (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equation) permet de résoudre le système d'équations discrétisées (Ansys Fluent). Cet algorithme stipule l'expérience d'une relation entre les vitesses corrigées et les pressions corrigées, en vue de vérifier l'équation de conservation de la masse.

III.3.6. La séquence d'algorithme *SIMPLE*

La séquence des opérations de calculs de la méthode *SIMPLE* est la suivante :

1. Estimer un champ de pression P^* .
2. Résoudre les équations de quantités de mouvements pour obtenir les champs de vitesses u^* , v^* et w^* .
3. Résoudre l'équation de correction de pression P' .
4. Corriger la pression $P = P' + P^*$.
5. Corriger les champs de vitesses u , v et w en utilisant les formules de corrections.
6. Prendre le champ P comme une nouvelle estimation et recommencer la séquence à partir de l'étape 2, jusqu'à la convergence.

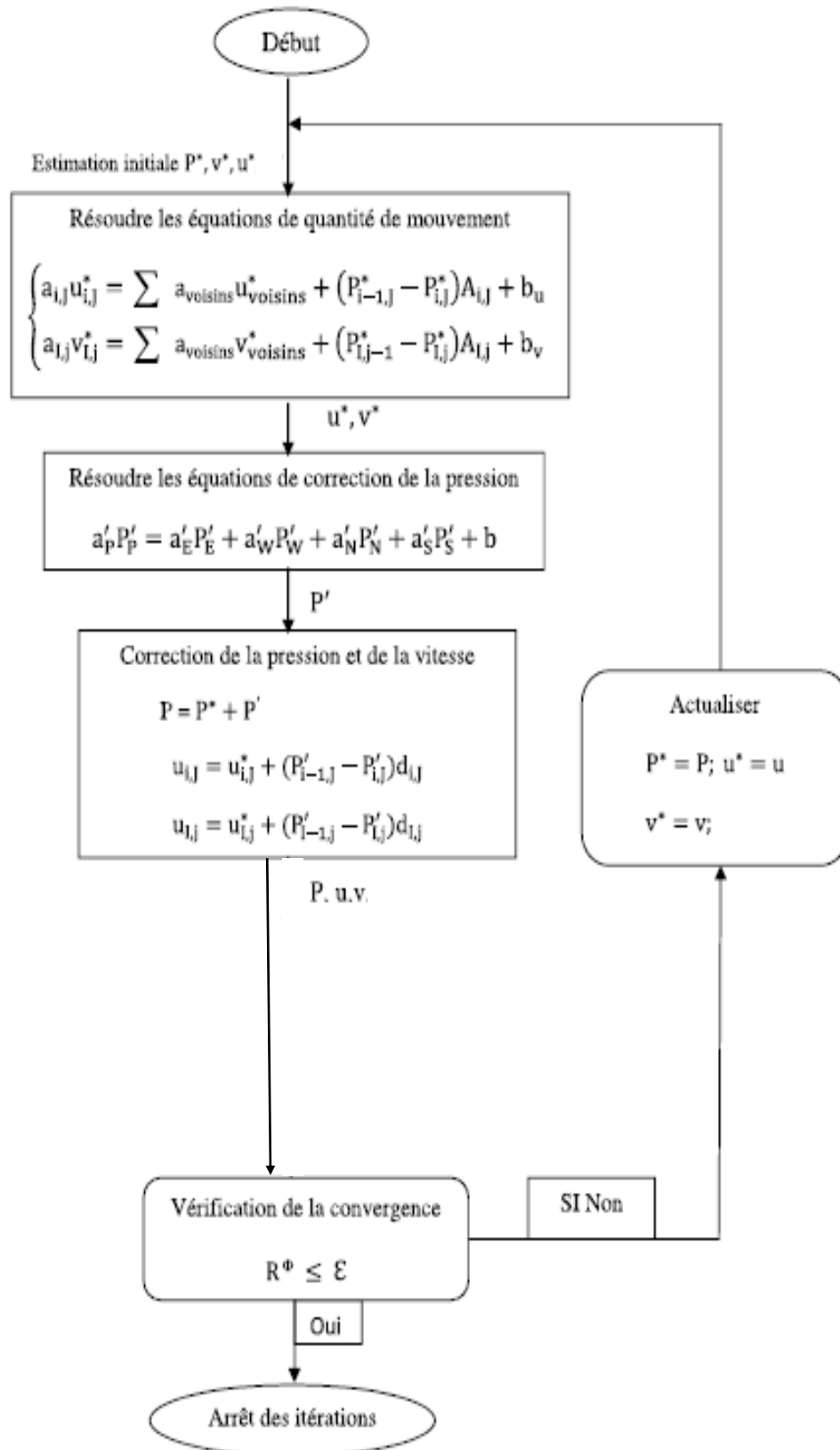


Figure III.4 Algorithme SIMPLE

III.4. Présentation du logiciel ANSYS

Ansys Workbench est un outil de gestion de projet, il permet de créer les fichiers, le lancement des différents logiciels et gérer les interactions entre les différents logiciels utilisés pour la géométrie, le maillage, la simulation proprement dite et le post-traitement à partir d'une fenêtre unique.

L'ouverture du logiciel fait apparaître le menu principal présenté ci-dessous :

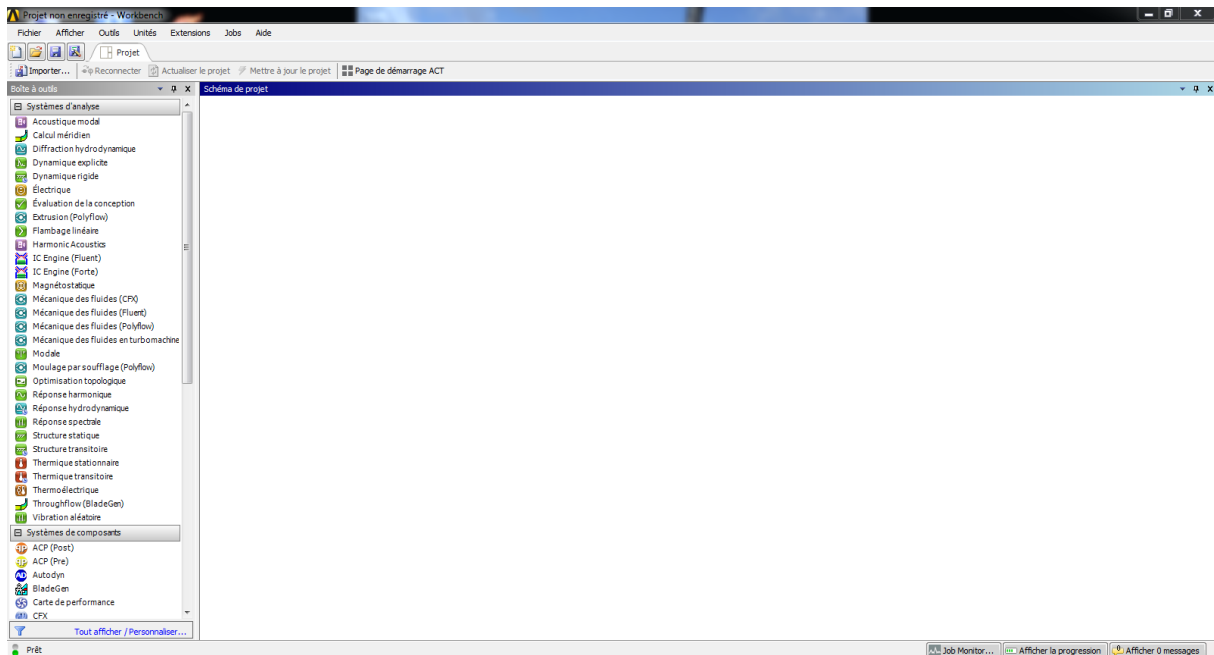


Figure III.5 Menu principal de l'Ansys workbench.

III.4.1. ANSYS –FLEUNT

ANSYS –FLEUNT est un code de calcul utilisé pour la modélisation des écoulements des fluides dans des géométries complexes et tout forme de transferts de chaleur (naturel, force, mixte) à l'intérieur. Il est capable de résoudre des problèmes d'écoulements avec des maillages non structurés, qui peuvent être produits par des géomètres complexes, avec une facilité relative. Les types des mailles supportées sont :

- Des mailles en 2D, triangulaire ou quadrilatérales.
- Des mailles en 3D, tétraédriques, hexaédriques, pyramidales.
- Des mailles mixtes (hybrides).

Il utilise une architecture qui lui permet d'exécuter plusieurs processus simultanément sur le même poste de travail ou sur des postes séparés pour une exécution plus efficace, ce logiciel a été écrit en langage de programmation C.

Fluent emploie la méthode des volumes finis comme procédé de discrétisation des équations qui gouvernent l'écoulement, tel que l'équation de continuité en quantité de mouvement et de l'énergie. On utilise cette technique basée sur l'intégration des équations sur un volume de contrôle.

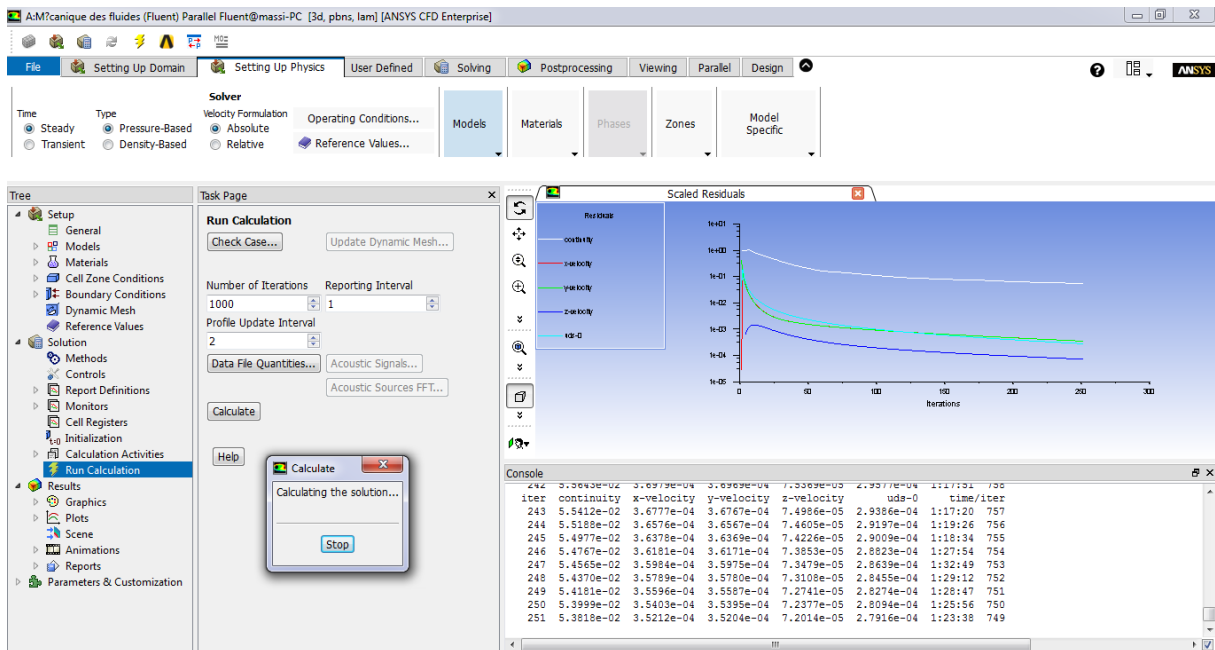


Figure III.6 Menu principal de fluent.

Les schémas de discrétisation des différentes variables sont résumés dans le tableau

Variable	Schéma
Pression	Standard
Quantité de mouvement	Décentré amont 2 ^{ème} ordre
Energie	Décentré amont 2 ^{ème} order
Couplage pression-vitesse	Simple

Tableau III.2 Schéma de discrétisations.

III.4.2. Les critères de convergences

Une procédure est convergente si toute erreur tend à décroître au cours des itérations à une valeur ε . Elle a convergé lorsque les itérations ne produisent plus de changements significatifs sur les variables selon un critère qui doit être défini par l'utilisateur. Le critère de convergence est fixé pour l'ensemble de notre travail à un résidu normalisé inférieur ou égal à 10^{-4} .

III.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons discuté la méthode numérique utilisée dans cette étude qui est la méthode des volumes finis qui discrétise les équations gouvernant l'écoulement. Ensuite, nous avons présenté l'algorithme simple. Suivi d'une présentation de code de calcul Ansys Fluent.

Résultats et discussions

IV.1. Introduction

Ce chapitre consacré à l'analyse des résultats obtenus numériquement, sur l'influence d'un champ magnétique externe sur un fluide visqueux incompressible, électriquement conducteur, dans un espace annulaire verticale, soumis à des conditions initial et aux limites.

L'écoulement est généré par la contre-rotation des disques supérieur et inférieur. Les effets des paramètres de contrôle du problème, à savoir le nombre de Hartmann (Ha) et l'influence de différents espaces annulaires sur la structure de l'écoulement ont été aussi discutés. L'objectif principal est d'identifier l'amplitude la plus efficace du champ magnétique sur la stabilité de l'écoulement.

Dans ce cas nous avons utilisé les propriétés physiques de l'Aluminium liquide indiqué sur le tableau (IV.1) selon Davidson (2001).

Propriété	Symbole	Valeur	Unité
Conductivité thermique	λ	95	$w. m^{-1}. C^{-1}$
Viscosité cinématique	ν	0.6×10^{-6}	$m^2.s^{-1}$
Masse volumique	ρ	2400	$kg. m^{-3}$
Conductivité électrique	Σ	4.1×10^6	$\Omega^{-1}.m^{-1}$
Chaleur spécifique à pression constante	C_p	989.6	$J.kg^{-1}.K^{-1}$
Diffusivité	α	0.4×10^{-4}	$m^2.s^{-1}$

Tableau IV.1 Propriétés physique de l'Aluminium liquide d'après Davidson (2001)

IV.2. Effet de maillage

La convergence est déclarée lorsque le changement relatif maximal entre deux niveaux d'itération consécutif est en dessous de 10^{-4} , pour les vitesses u , v et w .

Pour assurer des résultats numériques plus fiables, on commence par examiner l'effet du maillage sur la solution numérique, et déduire la qualité d'approximation de la solution.

Plusieurs maillages uniformes resserrés près des parois de l'enceinte où de forts gradients de vitesse et de température existent ont été utilisés.

Pour étudier l'influence du maillage sur les résultats numériques, on a procédé aux choix de la maille indépendante qui a été obtenu en utilisant trois mailles de taille différentes tel que : (60 x 60 x 120) ; (70x70x140) ; (80x80x160) ; suivant les directions r , z et θ . Le tableau (IV.2) montre les mailles appropriées qui ont été utilisées dans les simulations.

L'espace annulaire R	0.4	0.6	0.8
La maille sélectionnée suivant les directions (r , z et θ)	(60x60x120)	(70x70x140)	(80x80x160)

Tableau IV.2 Dimension de la maille suivant les directions (r , z , θ) utilisé dans la simulation numérique.

Le tableau (IV.3) montre l'effet du maillage sur la précision des résultats pour les conditions suivantes, $Re = 600$, $Ha = 10$ et l'espaces annulaires (0.4, 0.6 et 0.8), en utilisant un paramètre pour comparer la vitesse axiale en point fixe (0.7, 0, 1.8) dans les directions r , z , θ . Les résultats des essais confirment clairement l'adéquation des mailles sélectionnées.

R	0.4	V	0.6	V	0.8	V
La maille	55x55x110	0.0682	60x60x120	0.0417	70x70x140	0.0269
Suivants	60x60x120	0.0684	70x70x140	0.0419	80x80x160	0.0271
les	65x65x130	0.0684	80x80x160	0.0419	90x90x180	0.0272
directions (r , z et θ)						

Tableau IV.3 L'effet de maillage sur la précision du code numérique utilisé pour

$$R = 0.4, 0.6, 0.8$$

IV.3. Validation des résultats

Nous procédons à la validation des résultats de la simulation obtenue à l'aide du logiciel FLUENT en comparant avec ceux obtenus par Kakarantzas et al [22] qui ont effectué une étude numérique de l'écoulement d'un fluide conducteur MHD et le transfert de chaleur dans les trois espaces annulaires et quatre rapports.

Sur la Figure IV.1 nous représentons le reproduit de la distribution radiale et de la vitesse axiale à $\theta = 0^\circ$ et 90° , au milieu de domaine pour $Ha = 100$ et le rapport d'aspect égale à 2 lorsque $R = 0,4$.

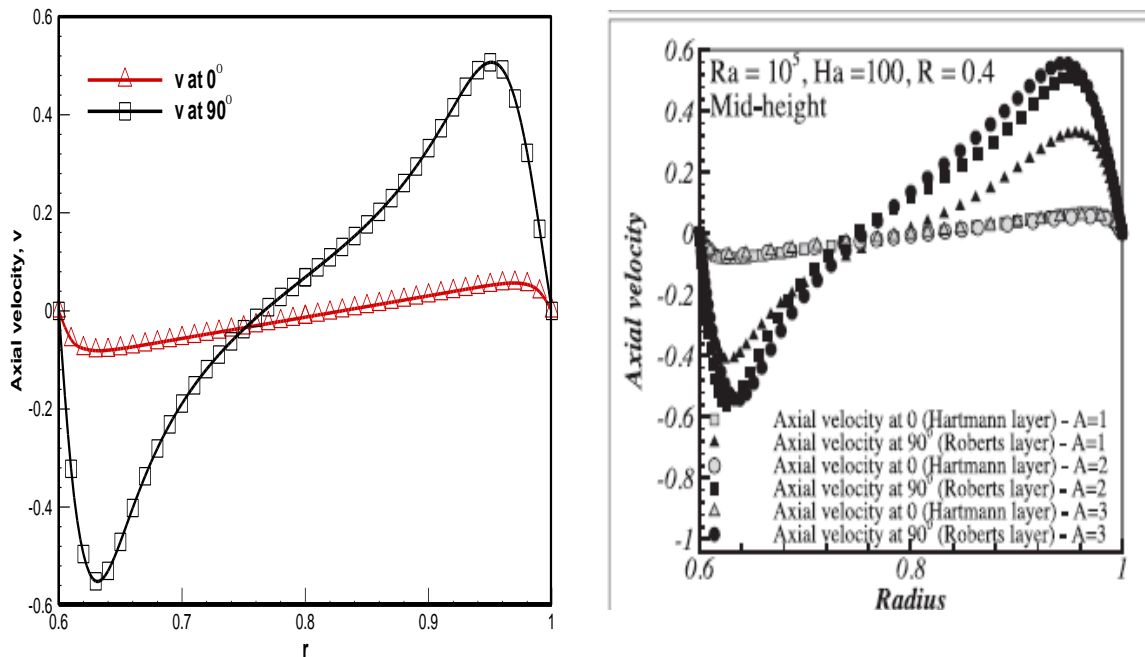


Figure IV.1 La comparaison avec les résultats de Kakarantzas et al. [22]

La comparaison des résultats montre une parfaite concordance, ce qui permet de valider la méthodologie suivie.

IV.4. Écoulement de base

L'écoulement de base consiste en une couche de cisaillement azimuthal dominante produite par la contre rotation de deux disques. Les disques en rotation entraînent dans leur mouvement les couches de fluide immédiatement adjacentes du fait de viscosité. Cela crée une couche de cisaillement de vitesse azimuthale prédit par [28], sous l'effet de la force centrifuge, les particules sont rejetées vers le centre à une hauteur. Ces mouvements créent deux zones de recirculation d'amplitude plus faible selon un schéma appelé pompage d'Ekman. Les deux zones de l'écoulement méridien se rejoignent dans le plan médian et convergent pour former un jet radial dirigé vers l'intérieur. La configuration étudiée est invariante par rotation autour de l'axe vertical désignée par S_θ et par rotation d'angle π autour

d'un axe horizontal arbitraire $R_\pi(\theta_0)$. La figure (IV.2) présente les symétries, qui montrent les courbes des contours de vitesse verticale à un nombre de Reynolds $Re = 300$.

La contre-rotation des deux disques crée une couche de mélange azimuthale équatoriale. Chaque disque tournant donne lieu à une couche d'Ekman. L'écoulement de Von Kármán présente une symétrie de réflexion combinée en z et en θ , la notée $R_\pi(\theta_0)$ de 180° par rapport à un axe horizontale passant à mi-hauteur du cylindre laisse l'écoulement invariant. (Figure. IV.2). L'état est de réflexion-symétrique, il est invariable sous l'opérateur de réflexion défini dans la formule suivante :

$$S_{\theta_0} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} (r, z, \theta) \cong \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} (r, z, \theta + \theta_0)$$

$$R_\pi \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} (r, z, \theta) \cong \begin{pmatrix} u \\ -v \\ -w \end{pmatrix} (r, -z, -\theta)$$

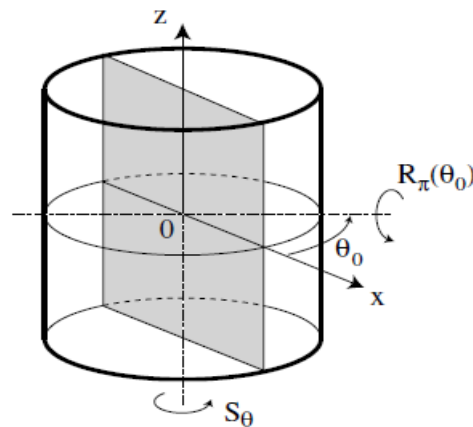
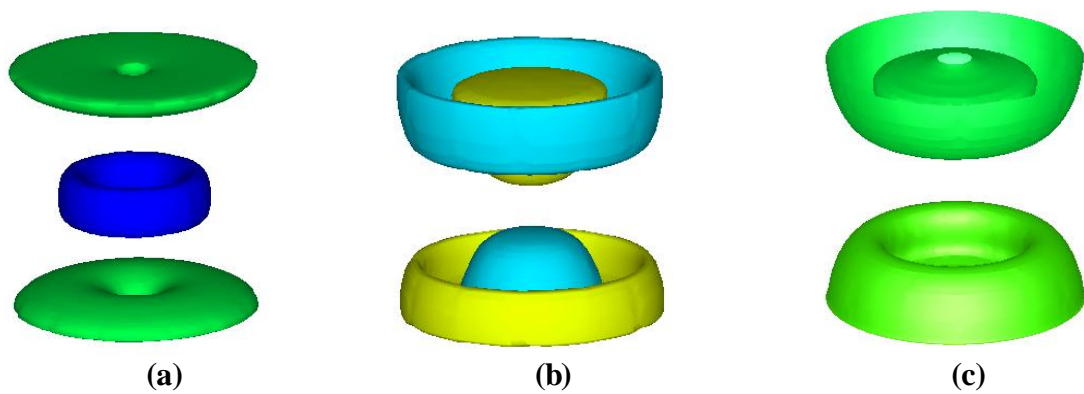
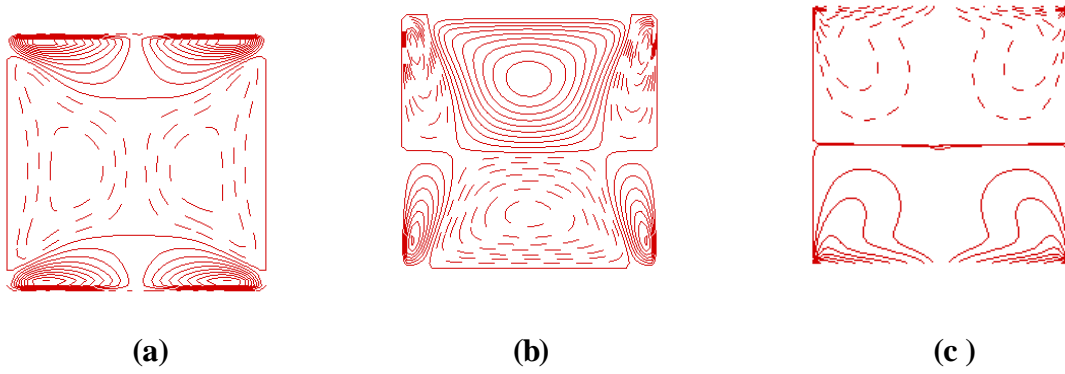


Figure IV.2 Schémas des symétries, d'après Nore et al.

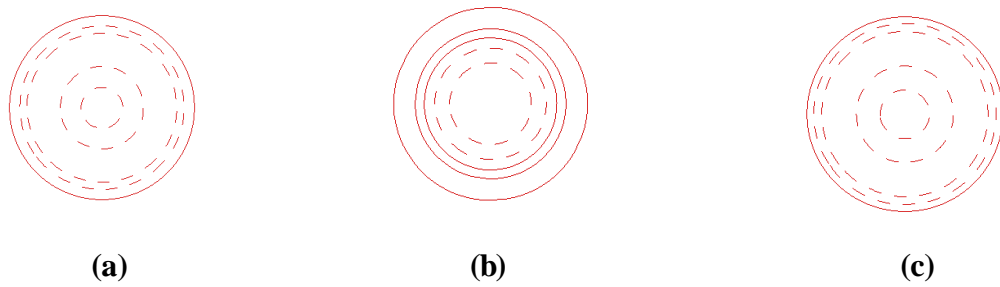
Pour le cas de contre rotation u est invariant au cours de la réflexion en z tandis que v et w changent de signe. (Figure. IV.3). Noté que les valeurs positives indiquées par des lignes continues et les valeurs négatives par des lignes pointillées



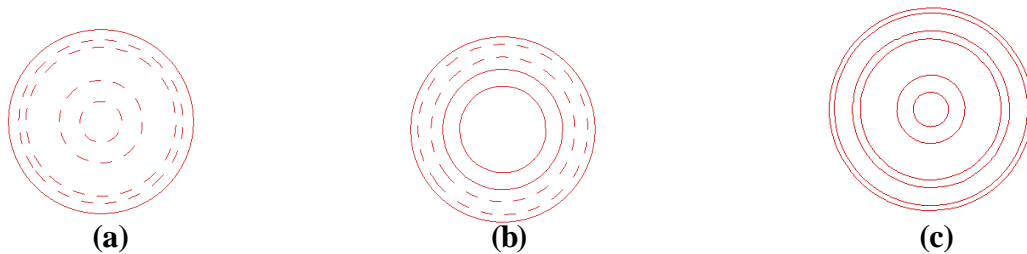
Iso-surfaces



Iso-contours au plan méridien, $r=0$



Iso-contours, vue du dessus à $z=0.5$



Iso-contours, vue du dessus à $z=1.5$

Figure IV.3 Etat de base pour le cas contre-rotation à $Re=300$, $R=1$. Iso-contours et iso-surfaces de vitesse (a) radiale (b) axiale et (c) azimuthale, noté que u est invariant au cours de

la réflexion en z tandis que v et w changent de signe. Les valeurs positives indiquées par des lignes continues et les valeurs négatives par des lignes pointillées.

IV.5. Cas sans champ magnétique ($Ha=0$)

L'écoulement de base est dominé par une couche de cisaillement azimutale produite par les disques d'extrémité contre-rotatif. Il y a également les ondes de recirculation de second ordre due au pompage d'Ekman dans la proximité de chaque disque. La configuration dans l'état de base est invariante sous des rotations R_θ autour de l'axe axisymétrique z , les configurations contre rotatives possédant une symétrie additionnelle de rotation de π autour de tous les axes horizontales passant par le centre de cavité, en particulier l'axe r , que nous désignons par R_π (Mahfoud et al. [24]). Cette rotation est équivalente à l'action combinée des réflexions dans $\theta = 0$ et dans $z = 1$. Pour déterminer les nombres de Reynolds critiques pour la transition d'un écoulement axisymétrique vers le non axisymétrique, nous avons augmenté le nombre de Reynolds graduellement jusqu'à ce que la première solution asymétrique soit observée.

Les résultats des simulations numériques sont présentés pour six (06) espaces annulaires différents qui sont $R = 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8$ et 0.9 . On remarque, dans tous les cas, que l'augmentation de la vitesse de rotation et de l'espace annulaire accélère le fluide et brise la symétrie azimutale de l'écoulement. La figure (IV.4) (a-c) montre l'écoulement de base axisymétrique dans le cas de $Re = 600$ et d'espaces annulaires (0.4, 0.5, 0.6), ils sont représentés schématiquement par des iso-valeurs de la vitesse axiale dans le plan méridien ($\theta = 0$). Lorsque l'espace annulaire est augmenté ($R = 0.7, 0.8$ et 0.9), l'état de base axisymétrique perd sa stabilité et différents écoulement asymétriques apparaissent, ceci est montré dans la Figure (IV.4) (d-f). L'écoulement est axisymétrique tandis qu'en dehors d'une valeur critique des espaces annulaires, l'écoulement n'est pas axisymétrique. Pour le cas de $Re = 600$, la valeur critique d'espace annulaire est $R_{cr} = 0.65$.

Lorsque le nombre Reynolds augmente, le mode axisymétrique ($m=0$) disparaît. Ce mode est transformé en un nouveau mode orienté constitué de deux cellules contre rotatif. Au-delà d'un nombre de Reynolds critique, l'écoulement subit une bifurcation en solution tridimensionnels. La bifurcation du mode azimutal $m = 0$ (axisymétrique) à l'état d'équilibre du mode $m = 2$ (non axisymétrique), se produit pour tous les espaces annulaires. Le mode $m = 2$ peut être considéré comme le résultat de la première instabilité de la couche de cisaillement équatoriale produite par les disques en contre rotation.

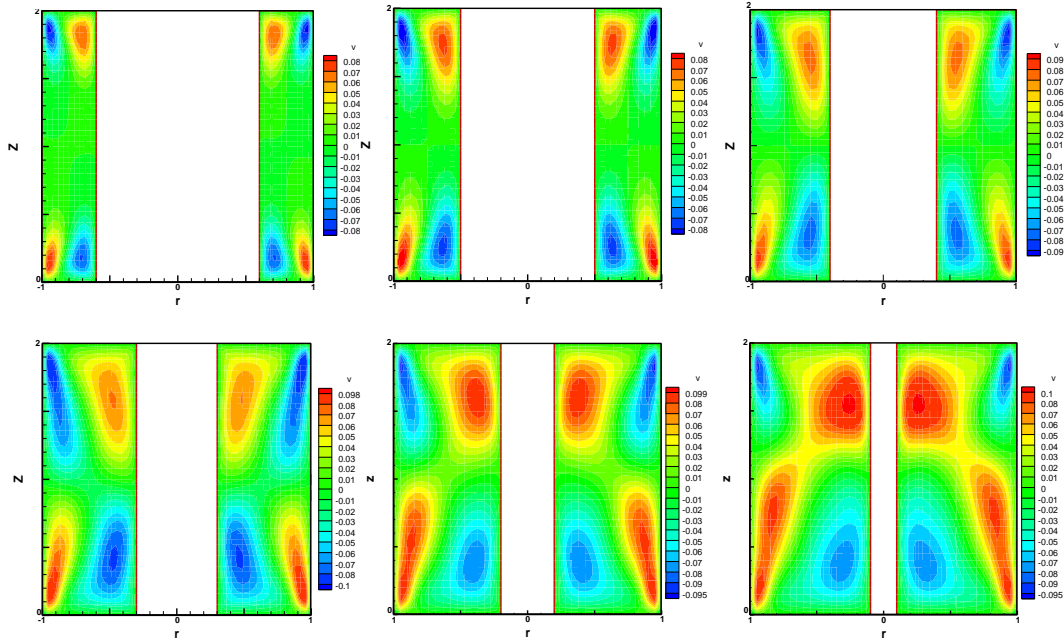


Figure IV.4 contours de vitesse dans le plan méridien à l'état de base d'axisymétrique dans le cas de $Re = 600$ avec $R = 0.4, 0.5$ et 0.6 (en haut) et d'écoulement asymétrique dans le cas de $Re = 600$ avec $R = 0.7, 0.8$ et 0.9 (en bas).

Les symétries des modes $m = 2$ peuvent être observées dans la Figure IV.5, montrant les contours de vitesse verticale v à $z = 0.2, 1$ et $z = 1.8$ à $Re = 600$ pour trois espaces annulaires $R = 0.7, 0.8$ et 0.9 respectivement.

La structure spatiale du mode $m = 2$ est clairement visible sur la Figure (IV.6). Cette figure montre l'iso-surface de la composante vitesse radiale pour deux (02) valeurs, $u = 0.0083$ (vert) et $u = -0.055$ (bleu). Il est symétrique par réflexion (invariant sous $R\pi$), la structure consiste en l'enroulement de la couche de cisaillement équatorial sous la forme de deux vortex Co-rotatifs, comme indiqué dans la Figure (IV.6). Par conséquent, le long du cercle équatorial, le roulis que fait tourner l'écoulement diminue avec l'augmentation de l'espace annulaire. Dans le cas hydrodynamique ($Ha = 0$) le mode $m = 2$ apparaît pour les valeurs du nombre de Reynolds critiques $Re_{cr} = 1850, 1110, 750, 590, 505$ et 430 correspondant respectivement aux valeurs de l'espace annulaire $R = 0.4, 0.5, 0.7, 0.8$ et 0.9 . Figure (IV.7). Montre des contours d'une vitesse verticale de $m = 2$ à ($Re = 1860, R = 0.4$) ; ($Re = 1120, R = 0.5$) ; ($Re = 760, R = 0.6$) ; ($Re = 600, R = 0.7$) ; ($Re = 510, R = 0.8$) ; ($Re = 440, R = 0.9$), étroit des seuils de bifurcation. Tous les deux (02) modes sont invariable sous la symétrie $R\pi$ de réflexion. Ceci peut être facilement vérifié à $z = 1$ où les contours négatifs pour $0 < \Theta < \pi$ correspondant aux contours positifs pour le $\pi < \Theta < 2\pi$.

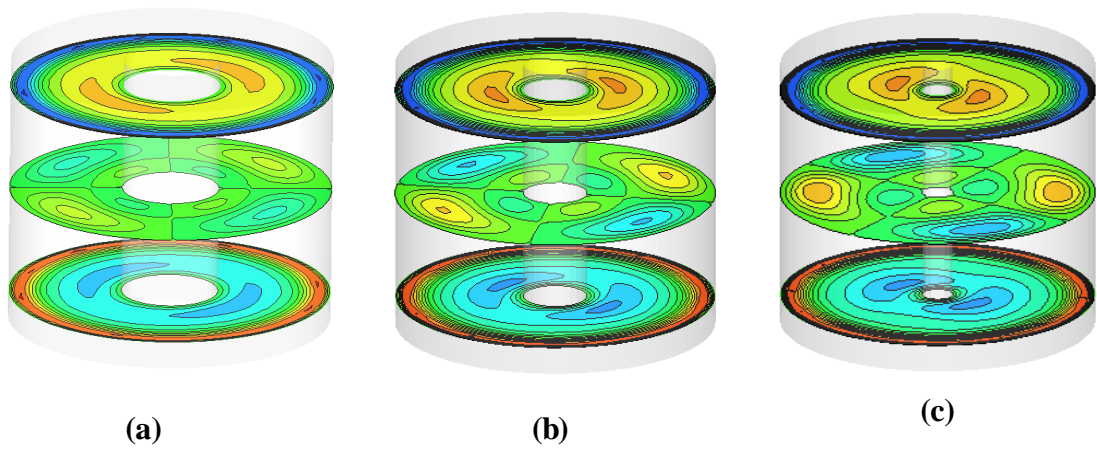


Figure IV.5 Contours de vitesse verticale à $z=1.8$ (haut), $z=1$ (milieu), $z=0.2$ (en bas) : (a) $R=0.7$, (b) $R=0.8$ et (c) $R=0.9$.

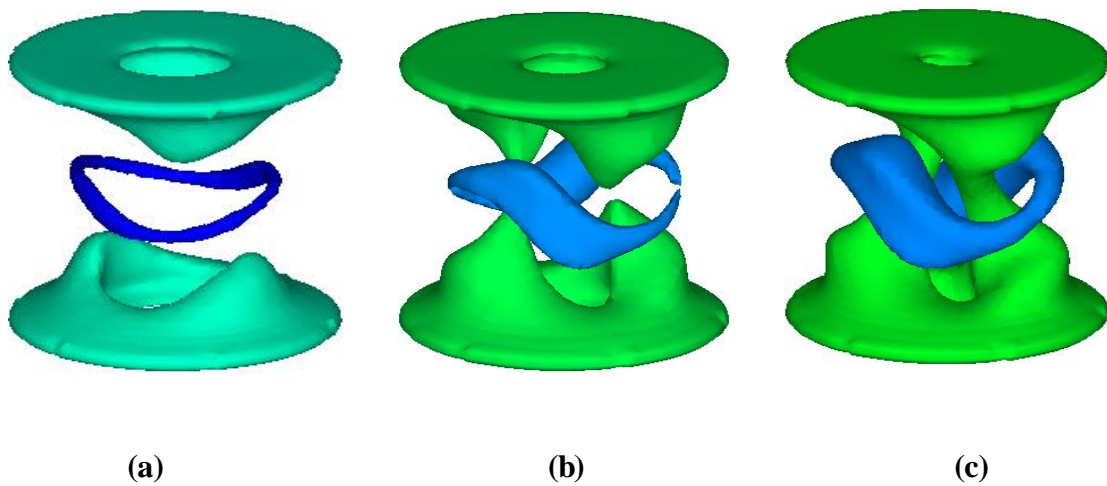


Figure IV.6 Structure spatiale de la vitesse radiale, pour deux valeurs $u = -0.055$ et $u = 0.008$, (a) $R=0.7$, (b) $R=0.8$ et (c) $R=0.9$.

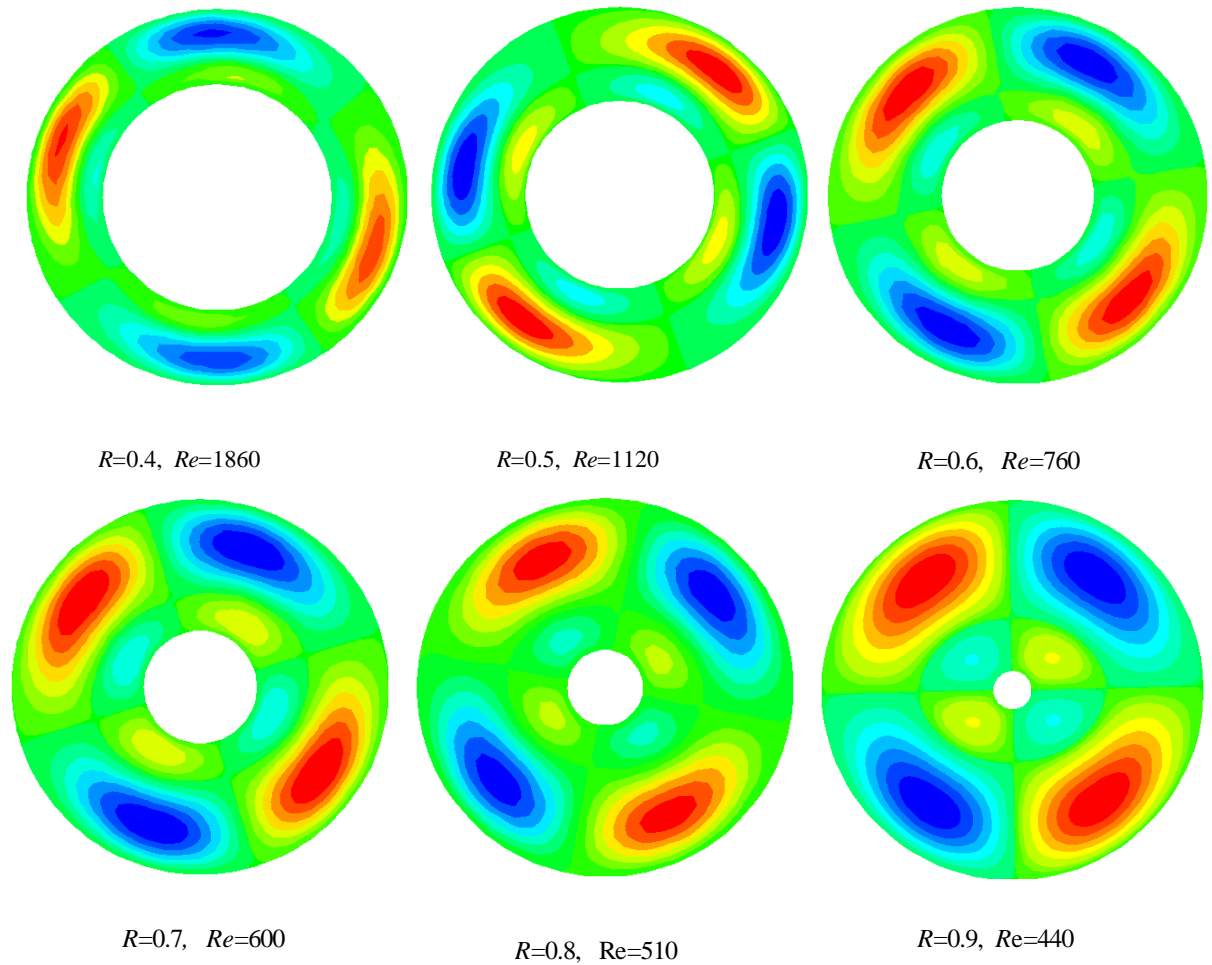


Figure IV.7 contours de vitesse verticale (axiale) à $z = 1$ pour $Ha = 0$.

IV.4.2. Cas avec champ magnétique $Ha \neq 0$

Lorsqu'un champ magnétique axial est imposé, certains changements intéressants sont observés dans le mouvement de fluide. La présence du champ magnétique verticale a pour conséquence la stabilité d'écoulement en le transformant en écoulement laminaire et axisymétrique [29]. Le champ magnétique vertical peut agir efficacement sur les différents modes car les axes de roulis sont perpendiculaires au champ appliqué pour chaque mode [23]. Les régions situées juste sous le disque rotatif et juste au-dessus du disque contre rotatif en bas correspondent à une concentration des lignes de courants électrique perpendiculaires au champ magnétique B_0 [23]. Par conséquent, la force de Lorentz est importante dans ces endroits. Lorsque le nombre de Hartmann augmente, la couche d'Ekman caractérisée par l'équilibre entre les forces centrifuge et visqueuse est progressivement remplacée par la

couche de Hartmann caractérisée par l'équilibre entre les forces électromagnétiques et visqueuse [23].

Pour illustré l'état axisymétrique induit par le champ magnétique, La figure (IV.8) montre également les distributions radiales de la vitesse axiale tracée pour $Re = 600$ correspondant respectivement aux espaces annulaires $R = 0.7$ dans le plan $\theta = 0^\circ$ près du bas ($z = 0.5$), le milieu ($z = 1$) et le haut ($z = 1.5$) du cylindre. Lorsqu'un champ magnétique est appliqué et que la valeur de nombre de Hartmann (Ha) augmente de 0 à 10, l'écoulement asymétrique devient axisymétrique. Nous pouvons voir une diminution de la vitesse axiale lorsque le nombre de Hartmann augmente. De plus, le cas de $Ha = 0$ conduit à une distribution asymétrique des vitesses axiales et conserve la symétrie $R\pi$. On observe que pour le cas $Ha = 10$ l'écoulement est symétrique azimutalement et caractérisé par $v = 0$ dans $z = 1$.

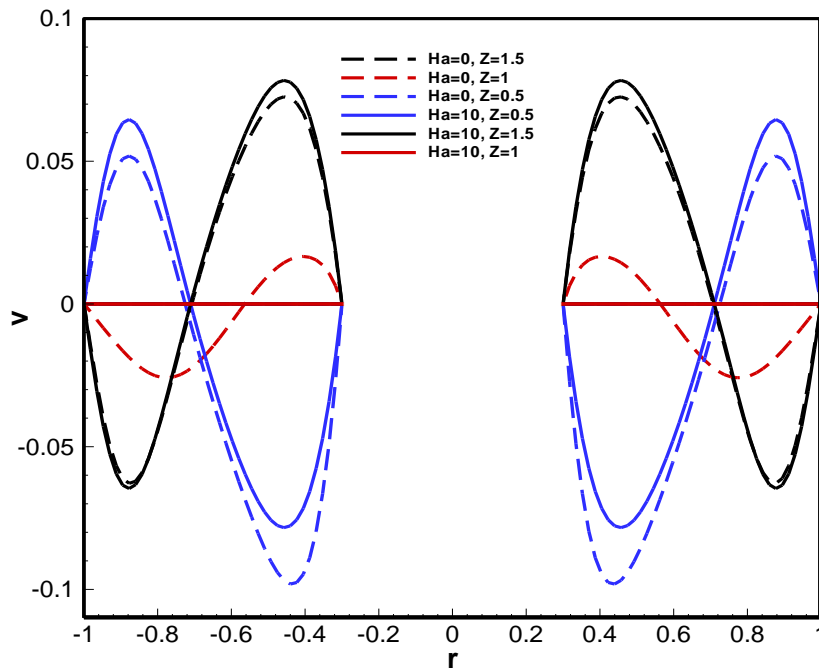


Figure IV.8 Distribution radiale de la vitesse axiale, v pour $Re = 600$ à $\theta = 0$ près du bas ($z = 0.5$), du milieu ($z = 1$) et du haut ($z = 1.5$) du cylindre pour $Ha = 0$ et 10 lorsque $R = 0.7$.

Pour un nombre de Hartmann modéré ($Ha = 20$), la bifurcation du mode azimutal $m = 0$ (axisymétrique) à la branche d'état d'équilibre du mode $m = 2$ (non axisymétrique) apparaît pour $R \in [0.4, 0.5]$. Le nouveau mode $m = 3$ est clairement visible est apparaît pour $R \in [0.6, 0.9]$. Par exemple, les deux cas ($Re = 2875$, $R = 0.4$) et ($Re = 2460$, $R = 0.5$) correspondaient au mode $m = 2$. Le mode asymétrique $m = 2$ est représenté à la Figure (IV.9). Alors, le long du cercle équatorial, il y a deux points elliptiques auteurs desquels l'écoulement

tourne, séparés par deux points hyperboliques. Pour les cas d'espaces annulaires $R = 0.6, 0.7, 0.8$ et $R = 0.9$ correspondant respectivement aux valeurs de nombre de Reynolds $Re = 2410, 2380, 2320$ et 2195 , la nouvelle solution stable tridimensionnel est identifiée comme un mode azimutal $m = 3$. Comme indiqué sur la Figure IV.9, ce mode ($m=3$) est constitué de trois vortex Co-rotatifs. L'écoulement est dominé par le mode $m=3$ plus Re large quand $Ha \geq 20$ et l'espace annulaire $R > 0.6$.

Les états d'équilibre avec un mode azimutal $m = 2$, se composant de deux cellules contrarotatifs, apparaissent pour $Re_{cr} = 2735, 2450$, correspondant respectivement aux valeurs de l'espace annulaire $R = 0.4$ et 0.5 . Le mode azimutal $m=3$ correspondent aux solutions asymétriques à trois vortex co-rotatif, apparaissent pour $Re_{cr} = 2400, 2365, 2310$, et 2175 correspondant respectivement aux valeurs de l'espace annulaire $R = 0.6, 0.7, 0.8$ et 0.9 . Nous avons vu que l'augmentation des espaces annulaires provoque la diminution du nombre de Reynolds critique, ainsi le mode axisymétrique ($m=0$) disparaît, provoquant un nouveau mode asymétrique ($m=2$ et $m=3$). Les contours de la vitesse verticale v dans le mi-plan horizontal, correspondent aux solutions asymétriques, sont présentées dans Figure (IV.9). Les coupes (r, θ) de la structure de la vitesse verticale dans $z=1$ sont présentées pour $m = 2$ à ($Re = 2750, R=0.4$) ; ($Re=2460, R=0.5$), et $m=3$ à ($Re=2410, R=0.6$) ; ($Re= 2380, R=0.7$) ; ($Re=2320, R=0.8$) et ($Re= 2195, R=0.9$).

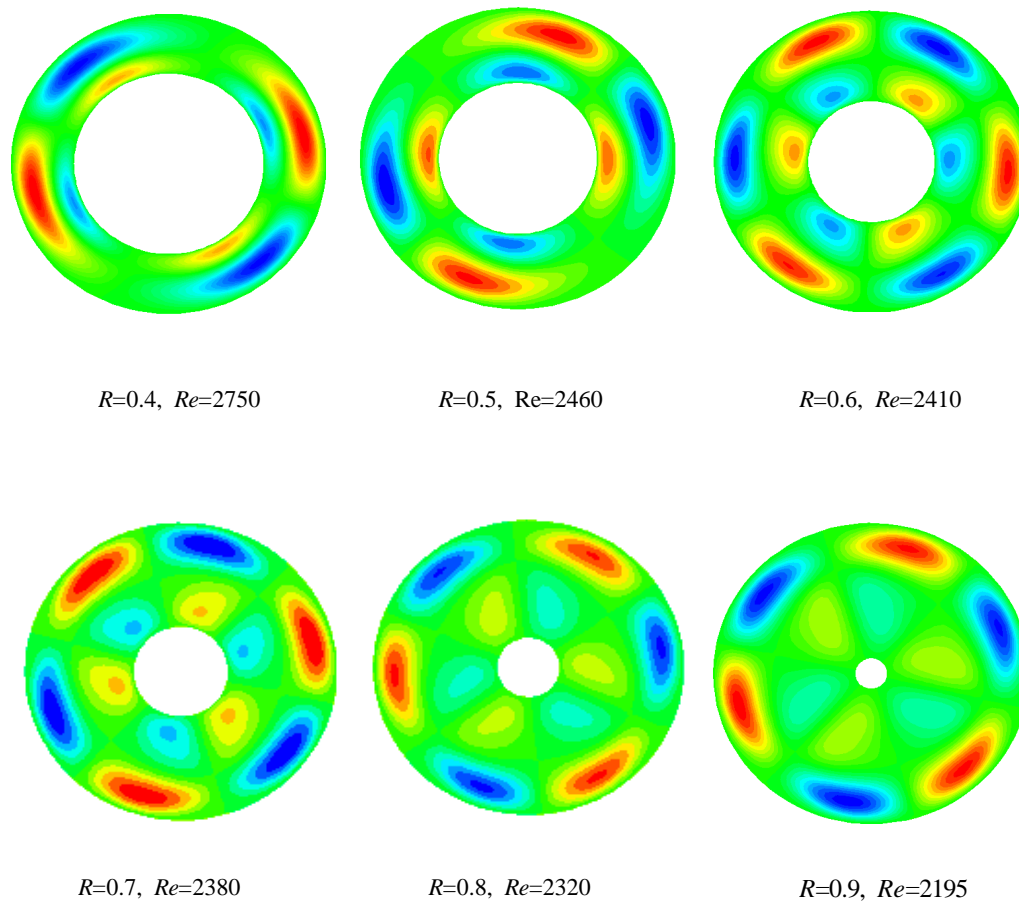


Figure IV.9 Iso-contours de vitesse verticale (axiale) à $z = 1$ pour $Ha = 20$.

L'effet d'un champ magnétique axial externe sur la rupture axisymétrique de l'écoulement comme montré par l'évolution du seuil primaire Re_{cr} en fonction des espaces annulaires R , pour $Ha = 20$ (Figure IV.10). On observe, que l'augmentation des espaces annulaires provoque la diminution de nombre de Reynolds critique. Nous notons également que l'augmentation de nombre de Reynolds critique avec l'augmentation de nombre de Hartmann Ha , indiquant que le champ magnétique vertical est favorable à l'écoulement axisymétrique. C'est en accord avec l'action connue d'un champ magnétique constant que cela mène à stabiliser les perturbations dans l'écoulement [23].

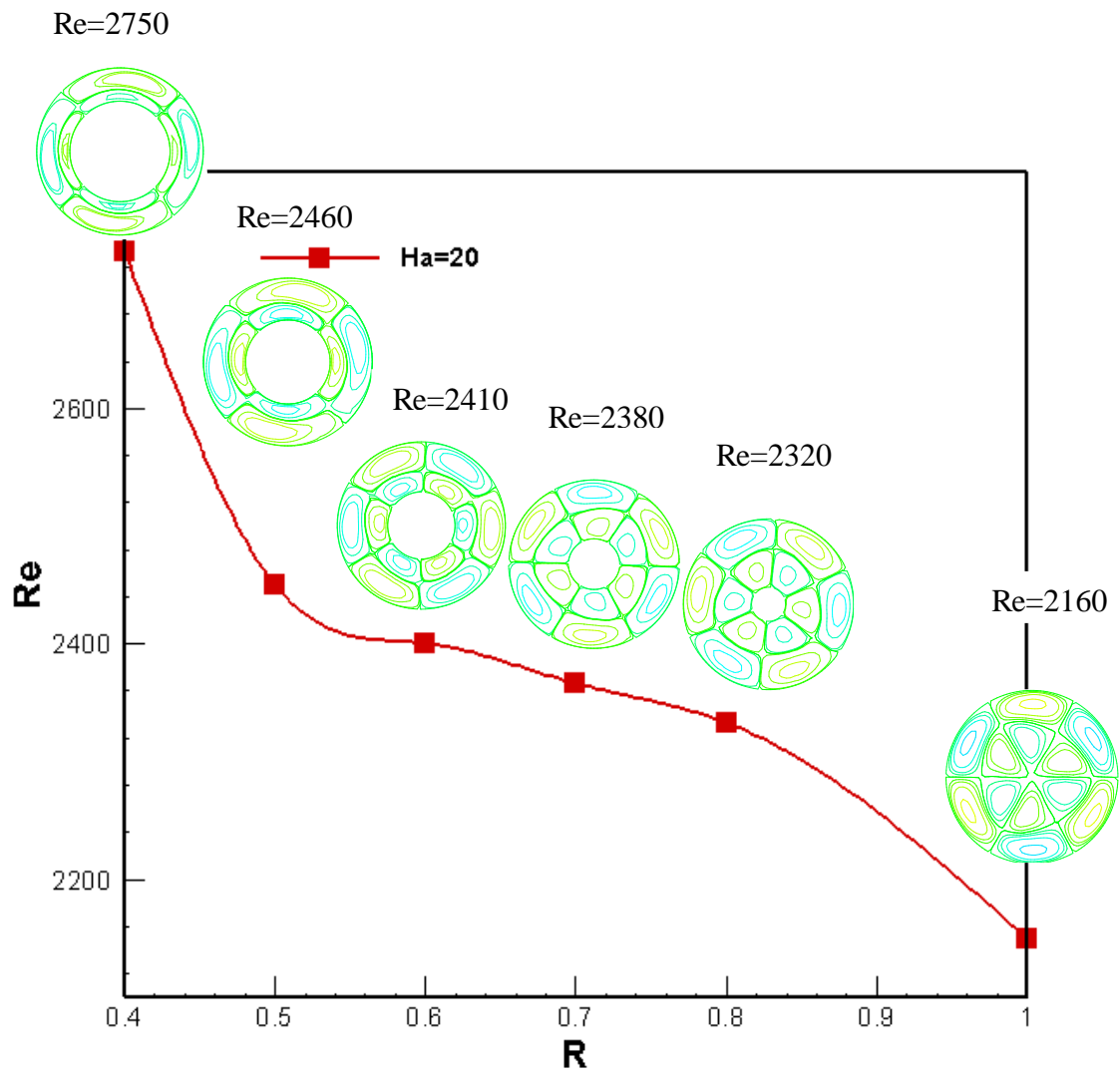


Figure IV.10 Diagramme de stabilité dans le plan $(Re_{cr} - R)$ pour le cas de $Ha = 20$. Evolution e Re_{cr} correspondant aux modes $m = 2$ et $m = 3$, en fonction de R .

Conclusion Générale

On a étudié numériquement l'écoulement d'un fluide conducteur (métal liquide) remplis dans des espaces annulaires verticaux d'une cavité cylindrique avec des disques d'extrémité contre-rotatif sous un champ magnétique axial.

La méthode du volume fini a été utilisée pour résoudre numériquement les équations de transport. Les effets du champ magnétique et des espaces annulaires ont été étudiés. La modélisation du problème, en 3D, a été menée en utilisant le code FLUENT.

Les principaux résultats obtenus dans cette étude sont les suivants :

- Dans le cas sans champ magnétique ($Ha = 0$), la structure d'écoulement est dominée par le mode $m = 2$, ce dernier peut être considéré comme le résultat de la première instabilité de la couche de cisaillement équatoriale produite par les disques contre-rotatifs.
- Dans le cas avec un champ magnétique, l'augmentation des valeurs des espaces annulaires, R à une valeur constante de Ha , déstabilise l'écoulement.
- Dans tous les cas, l'augmentation du nombre de Reynolds accélère le fluide, tandis que le champ magnétique le décèle.
- En présence du champ magnétique et après que l'amplitude du champ magnétique dépasse une certaine valeur, le débit asymétrique constant tend à être un écoulement axisymétrique.

Bibliographie

- [1] R.Bessaih, Ph .marty et M.Kadja, ” Numerical study of disk driven rotating MHD flow of a liquid metal in a cylindrical enclosure “,Acta mechanica,vol 135,pp.153-167,1999.
- [2] R.Bessaih ,M.kajda,K.Eckert et marty , ’numerical and analytical study of rotating flow in an enclosed cylinder under an axial magnetic field”, Acta Mechanica,vol.164,pp.175-188,2003.
- [3] A.Kharicha ,A.Alemanly and D.Bornas, ”Influence of the magnetic field and the conductance ratio on the mass transfer rotating lid driven flow ”, International journal of heat and mass transfer ,vol.47,pp.1997-2014,2004.
- [4] A.Kharicha ,A.Alemanly and D.Bornas, ”Hydrodynamic study of a rotating MHD flow in a cylindrical cavity by ultrasound doppler shift method ”, International journal of engineering science ;vol.43,pp.589-615,2005.
- [5] S.Aberkane .”Etude de l’influence du champ magnetique sur le transfert de chaleur et de masse dans les ecoulements rotatifs”,these de Doctorat,M’hamed bougaraboumerdes,2014/2015.
- [6] A.Juel, T.Mullin ,H.Ben Hdid et D.Henry .”magnetohydrodynamic cinvection in molten gallium”, Journal of fluid mechanics, vol.378,pp.97-118,1999.
- [7] A.Juel, T.Mullin ,H.Ben Hdid et D.Henry .”three-dimensionel free convection in molten gallium”, Journal of Fluid Mechanics, vol. 436, pp. 267-281, 2001.
- [8] R. Bessaih, “Etude de la convection naturelle laminaire et turbulente dans des enceintes , Thèse de doctorat d’état, Université Mentouri – Constantine, 2000.
- [9] Seth and Singh (2013) .effects of hall current of unsteady MHD couette flow of class –II in a rotating system .J.appl.fluide mech. Available online at www.jafmonline.net.
- [10] Mahfoud.B (2013) Stabilité des Ecoulements Tournants de Convection Mixte sous Champ Magnétique. Thèse de doctorat
- [11] Ahlers, G. 1989 Experiments on bifurcations and one-dimensional patterns in nonlinear systems far from equilibrium. Lectures in Sciences of Complexity pp. 175{224, addison-Wesley (NY).

- [12] H.Alfvén,Existence ofelectromagnetic-hydrodynamic waves [archive],Nature, vol. 150, p. 405.
- [13] M.J.Lighrhill,Studies on MHD Waves and other anisotropic wave motion ,Philosophical Transactions of the Royal Society,vol.252,pp.397-430,1960.
- [14] E.A.Witalis, "Hall Magnetohydrodynamics and Its Applications to Laboratory and Cosmic plasma [archive], IEEE Transactions on Plasma science(ISSN 0093-3813),vol.PS-14,p.842-848,Dec.1986.
- [15] Ribiero joao-pouli.dossier de l'ingenieur, nm(5115), nanofluides pour les application thermiques ,2009.
- [16] J.H.Lienhard IV et J.H.Lienhard V,"A Heat transfer texbook ",3 Ed.,cambridge MA :phlogisn press ,c2005
- [17] Patankar.S.V (1980): Numerical heat transfer and fluid flow McGraw- hill Book Company.
- [18] Versteeg.H et Malalasekra.W (1995): An introduction to computational fluid dynamics essex:Longman scientific & technical 257p (ISBN 0582218845).
- [19] Christophe Trophim (1995),"modelisation numerique du couplage magnetohydrodynamique fort .Application à la propulsion MHD navale".laboratoire MADYLAM.
- [20] Mmoire master Aliouane.C et Mataoui .S, "Transfert de chaleur par convection naturelle dans les nanofluides ",soutenue le 8/6/2016.
- [21] Thèse de doctorat en mécanique du thème étude numérique de l'application des nanofluides dans l'amélioration de transfert thermique dans les capteurs solaires par BENABDERRAHMN AMINA.
- [22] S.C. Kakarantzas, L.Th. Benos, I.E. Sarris, B. Knaepen, A.P.Grecos, N.S. Vlachos, MHD liquid metal flow and heat transfer between vertical coaxial cylinders under horizontal magnetic field, Int. J. Heat and Fluid Flow 65 (2017) 342-351.
- [23] C. Nore, L. S. Tuckerman, O.Daube, S. Xin, The 1:2 mode interaction in exactly counter-rotating von Kármán swirling flow, J. Fluid Mech. 477(2003) 51–88.
- [24] B. Mahfoud, R. Bessaih, Magnetohydrodynamic counter-rotating flow in a cylindrical cavity, Int. J. Heat Mass Transfer 93 (2016), 175–185.

- [25] R. Touihri, H. Ben Hadid, D. Henry, On the onset of convective instabilities in cylindrical cavities heated from below. II. Effect of a magnetic field, *Phys. Fluids* 11 (8) (1999) 2089–2100.
- [26] A. Bendjaghlouli, D. E. Ameziani, B. Mahfoud, L. Bouragbi, Magneto-hydrodynamic Counter Rotating Flow and Heat Transfer in a Truncated Conical Container, *J. Thermophysics and Heat Transfer*, Article in Advance, <https://doi.org/10.2514/1.T5529>
- [27] A. Bendjaghlouli, B. Mahfoud, D.E. Ameziani, Magneto-hydrodynamic flow in a truncated conical enclosure, *Journal of Thermal Engineering*, 5(2019) 77-83.
- [28] B. Mahfoud, A. Bendjagholi, R. Bessaïh, “Magneto-hydrodynamic co-rotating flow in a vertical cylindrical container, ” *Numer. Heat Transfer, Part A*, vol. 69, pp.1051-106, 2016.
- [29] Davidson P.A, (2001) , "An Introduction to Magneto-hydrodynamics," *Cambridge University Press*