الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة أكلي محند أولحاج
- البويرة -
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Université Akli Mohand Oulhadj - Bouira -
Tasdawit Akli Muḥend Ulḥağ - Tubirett -
Faculté des Sciences Economiques, Commerciales et des Sciences de Gestion

جامعة البويرة

مطبوعة موجهة لطلبة السنة الثالثة الليسانس

تخصص: اقتصاد كمي

بعنوان:

بحوث العمليات 02

من إعداد الدكتور: مولاي بوعلام

السنة الجامعية: 2022 /2023

فهرس المحتويات

مقدمة

إن العصر الحالي يشهد تطورات سريعة سواء على مستوى المنظمات التصنيعية أو الخدماتية، مما يتطلب العمل بمفاهيم إدارية معاصرة والعمل بأساليب علمية وطرائق متطورة، يجعل من الضروري التركيز على بحوث العمليات المحسوبة، وصولا إلى تحقيق عامل السرعة في الحصول على المعلومات الممهدة لعملية اتخاذ القرار، فضلا عن الاستخدام الأمثل للموارد المتاحة.

وفضلا عما تقدم فإن لبحوث العمليات وتطبيقاتها العديدة في المجالات الإحصائية اذ أنها لا تعد مجرد أداة من أدوات التحليل النظري فحسب بل هي أداة مهمة في رسم السياسات الإحصائية وإعداد البيانات اللازمة في اتخاذ القرارات، لذلك يمكن الاعتماد على بحوث العمليات في استخراج المعادلات اللازمة في تحديد الاحتياجات من موارد وإمكانيات ليتم تخصيصها التخصيص الأمثل.

ويهدف إنجاز هذه المطبوعة إلى تقديم أساليب متعددة والتي من الممكن أن تساعد الإدارة في عملية التنبؤ لمختلف الظواهر المستقبلية، وكذلك رغبة منا في إغناء المكتبة الجامعية بموضوعات هذا العلم، وهي موجهة لطلبة الليسانس تخصص اقتصاد كمي في ميدان العلوم الاقتصادية وعلوم التسيير والعلوم التجارية، وتتضمن هذه المطبوعة الفصول التالية:

الفصل الأول: نظرية خطوط الانتظار

الفصل الثاني: نماذج تسيير المخزون

الفصل الثالث: نظرية الألعاب

الفصل الرابع: المحاكاة

الفصل الأول

نظرية خطوط الانتظار

اصبح الانتظار سمة من سمات الحياة المعاصرة، ويمكن ملاحظته بشكل واضح في قطاع الخدمات مثل انتظار المسافرين في المطار والموانئ ومحطات القطار وانتظار الزبائن في المصارف والمستشفيات، ومن الميزات التنافسية لأي منظمة قدرتها على تقليل وقت انتظار الزبون والسرعة في تلبية حاجة المستهلك، وفي هذا الإطار تأتي نماذج الانتظار كأداة تحليلية تساهم في دعم متخذ القرار عند الموازنة بين كلفة الانتظار وكلفة تقديم الخدمة لتحقيق اقل كلفة ممكنة [1].

I– ماهية وتطبيقات نظرية خطوط الانتظار:

ظهرت نظرية خطوط الانتظار في 1900 ميلادي بواسطة عالم رياضيات يدعى (A. K. Erlang) ، والذي بدأ بدراسة مشكلة تسلسل وتداخل خطوط الهاتف، وبعدها في الحرب العالمية الثانية بدأت تطبيقات عديدة في مجال الصناعة الإنتاجية والخدمية وأصبحت أحدى الأدوات المهمة في العمليات الإدارية [2].

I–1. مفهوم نظرية خطوط الانتظار:

يعرف أسلوب خطوط الانتظار بأنه أسلوب وطريقة كمية تستخدم في معالجة مشاكل نظم الانتظار المختلفة من حيث احتمالية وصول الزبائن المستفيدين في الخدمة وطريقة تقديم الخدمة وفترة كلفة التأخير في الانتظار [3].

ويمكن تعريف نماذج صفوف الانتظار بأنها دراسة للعمليات ذات الوصول العشوائي إلى قناة الخدمة، إذ تكون الخدمة عملية عشوائية[4].

I–2. أهمية دراسة حالات صفوف الانتظار:

تبرز أهمية دراسة الحالات في صفوف الانتظار في المواقف الآتية[5]:

- عجز قنوات الخدمة في صفوف الانتظار من تلبية طلبات الزبائن لقلتها، وهنا لابد من دراسة الحالة لتحديد عدد قنوات الخدمة الملائمة لتلبية الخدمات بشكل أسرع؛
- انخفاض الطلب على الخدمة، مما يؤدي إلى إبقاء الخدمة عاطلة معظم الوقت، وهنا لابد من تقليل عدد القنوات لمنع الهدر في الموارد.

[1]. محمود العبيدي، مؤيد عبد الحسين الفضل: " **بحوث العمليات وتطبيقاتها في إدارة الأعمال**"، مؤسسة الوراق للنشر والتوزيع، ط1، الاردن، 2004، ص 447.

[2]. أبو القاسم مسعود الشيخ: " **بحوث العمليات**"، المجموعة العربية للتدريب والنشر، القاهرة، 2014، ص 341.

[3]. محمود العبيدي، مؤيد عبد الحسين الفضل، مرجع سابق، ص 447.

[4]احمد عبد إسماعيل الصفار، ماجدة عبد اللطيف التميمي: " **بحوث العمليات تطبيقات على الحاسوب**"، دار المناهج للنشر والتوزيع، الاردن، 2007، ص 494.

[5]. احمد عبد إسماعيل الصفار، ماجدة عبد اللطيف التميمي، مرجع سابق، ص 494.

تهدف نماذج صفوف الانتظار إلى تخفيض تكاليف الطاقة العاطلة فضلاً عن تكاليف الانتظار ويظهر ذلك بوضوح في متاجر البيع، إذ تلجأ الإدارة إلى تعين العدد الملائم من مندوبي المبيعات، لتقديم أفضل الخدمات وتقليل وقت الانتظار إلى أدنى حد ممكن.

I-3. العناصر الرئيسية لأنموذج صفوف الانتظار:

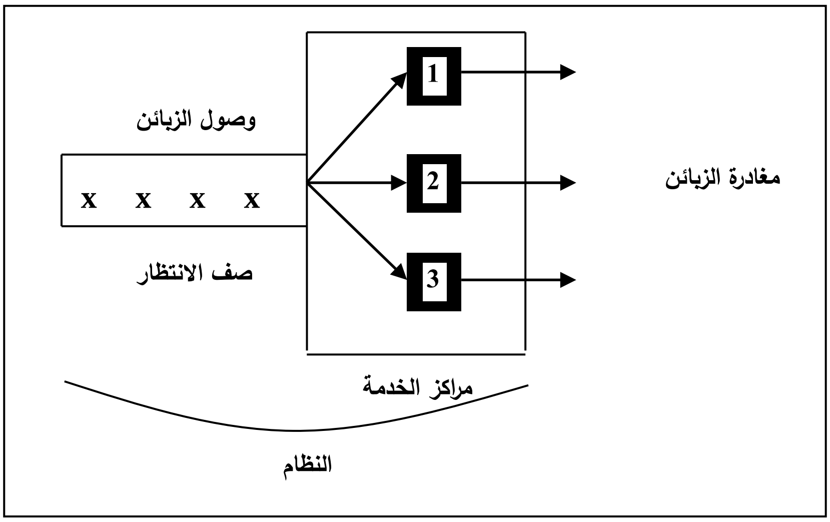
العناصر الرئيسية لظاهرة صفوف الانتظار هي[1]:

1. **وصول الوحدات:** ويكون الوصول على شكل فترات زمنية منتظمة إلى نقاط تدعى مراكز (قنوات) الخدمة كمثال على ذلك وصول الشاحنات إلى موقع التحميل، دخول الزبائن إلى مراكز تجارية، وصول الأشخاص إلى السينما، وصول السفن إلى الميناء وغيرها كل هذه الوحدات تدعى وصول الزبائن؛
2. **مراكز(قنوات) الخدمة:** هي المواقع التي تقوم بتقديم الخدمة للوحدات الطالبة للخدمة (الزبون) مثال على ذلك البائعين، الميناء وغيرها، إذا كان مركز الخدمة غير مشغولة فإن الزبون الواصل سوف يخدم مباشرة وإذا كان مركز الخدمة مشغول فإن على الزبون الانتظار في خط إلى ان يتم تقديم الخدمة له وبعد اكتمال الخدمة يغادر الزبون النظام.

مسألة صفوف الانتظار تتكون عندما يضطر الزبائن إلى الانتظار في الصف للحصول على الخدمة؛

3. **الصف:** يمثل عدد الزبائن المنتظرة للحصول على الخدمة (عدد الوحدات طالبة الخدمة)، الصف لا يتضمن الزبون الذي يتم تقديم الخدمة له.

وشكل يوضح العناصر الرئيسية لنظام صفوف الانتظار:



[1]. حامد سعد نور الشمرتي، علي خليل الزبيدي: " **مدخل إلى بحوث العمليات**"، دار مجدلاوي، عمان، 2007، ص ص: 456-457.

I-4. خصائص نماذج خطوط الانتظار:

هناك خصائص عديدة لنماذج خطوط الانتظار أهمها ما يلي[1]:

1. **طريقة تقديم الخدمة هي:** الذي يصل اولاً يحصل على الخدمة أولاً؛
2. **طاقة النظام:** أي أن النظام له القدرة على استيعاب كافة الوحدات الواصلة اليه سواءً التي دخلت إلى الانتظار أو التي تقدم لها الخدمة، مع وجود حالات استثنائية ؛
3. **معدلات الوصول:** (λ) لما كان تشكيل الانتظار يحصل بأسلوب عشوائي غالباً مع توقع حصوله احياناً فإن معدلات وصول الوحدات المكونة للانتظار تأخذ توزيعاً إحتمالياً (P) كما هو متبع لدى بواسون[*] (Poissan) في الوحدة الزمنية أو على هيئة وحدة زمنية بين مضي وصول وحدتين متتالين للنظام؛
4. **طاقة مركز تقديم الخدمة:** (μ) فقد يكون مركز تقديم الخدمة (μ) واحداً أو أكثر وقد لا يكون في نفس المراكز أما طاقته فهي لا نهائية في الحالتين.

I-5. تطبيقات نماذج صفوف الانتظار:

نظرية صفوف الانتظار لها تطبيقات واسعة في المجالات الحياتية فأحدى تطبيقات صفوف الانتظار المهمة التي نواجهها جميعاً في حياتنا اليومية هي المجالات الخدمية مثال على ذلك صالون حلاقة فالحلاقون يمتلون مراكز الخدمة والزبائن يمثلون الوحدات الطالبة للخدمة ونفس الحال ينطبق على المطاعم، دوار السينما، المصارف وغيرها[2].

تطبيق آخر لصفوف الانتظار هو مجال النقل فمن الممكن ان تكون وسائط النقل هي الوحدات الطالبة للخدمة مثال ذلك سيارات تنتظر أمام مكتب تحصيل الرسوم أو الإشارات الضوئية، شاحنة أو سفينة تنتظر للتحميل أو التفريغ، طائرات تنتظر الهبوط أو الإقلاع من مدرج (مركز الخدمة) وفي حالات اخرى تكون وسائط النقل هي المركز الخدمة مثال ذلك سيارات الأجرة وسيارات اطفاء الحريق و الرافعات أو المصاعد.

هنالك أمثلة عديدة أخرى لصفوف الانتظار مثل[3] :

- ✓ انتظار المرضى في العيادات والمستشفيات؛
- ✓ انتظار المكائن العاطلة لغرض تصليحها؛

---

1. عبد الرسول عبد الرزاق الموسوي: " **المدخل لبحوث العمليات**"، دار وائل للنشر، الأردن، 2001، ص 272.

*. إن عدد النتائج التي تقع في مدى زمني معين أو في منطقة محددة تكون مستقلة عن تلك التي تقع في أي منطقة اخرى فهي تهمل عدد الأحداث التي تقع خارج ذلك الزمن أو خارج ذلك المكان.

2. حامد سعد نور الشمرتي، علي خليل الزبيدي، ص ص: 455- 456.

3. حامد سعد نور الشمرتي: " **بحوث العمليات مفهوما وتطبيقا**"، مكتبة الذاكرة، بغداد، 2010، ص 231.

- ✓ انتظار البرامج لتنفيذها على الحاسبة؛
- ✓ انتظار الكتب الرسمية في غرفة الطباعة؛
- ✓ انتظار المياه خلف السدود؛
- ✓ انتظار المركبات في محطة الوقود للتزويد بالوقود؛

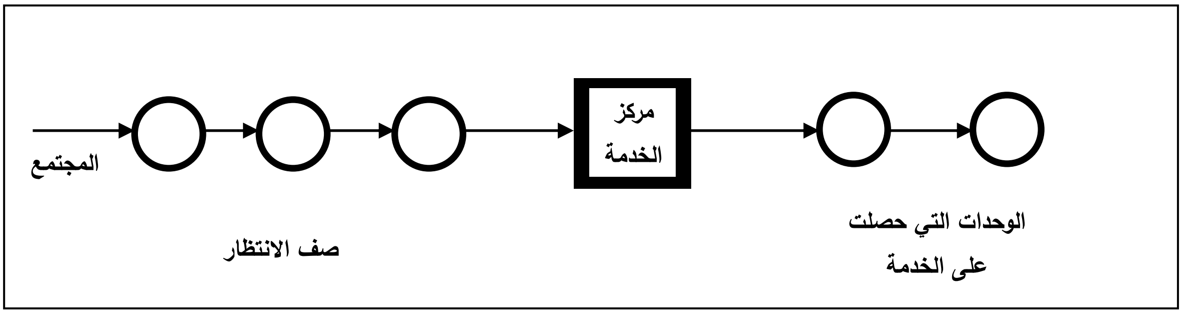
II- النماذج الرياضية لنظرية خطوط الانتظار:

II-1. مراحل أنظمة الانتظار:

يمكن تصنيف مراحل نظم الانتظار كالآتي[1]:

- ✓ **صف الانتظار الواحد ذو مركز الخدمة الواحدة:**

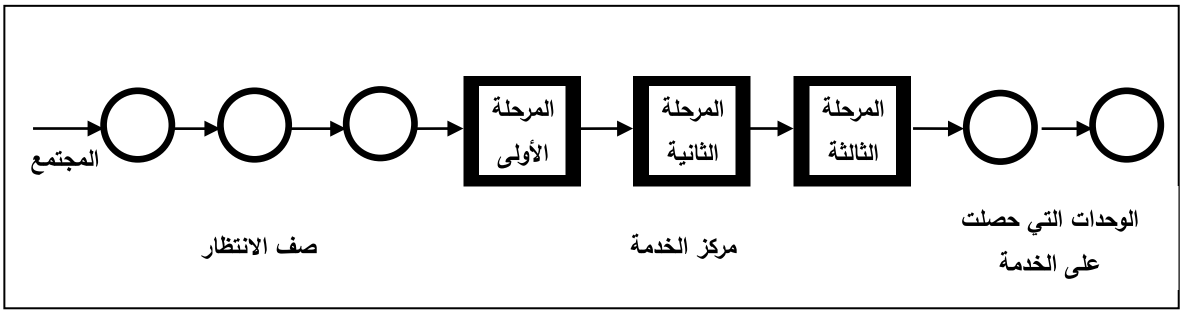
وهو أبسط المراحل حيث يتم تقديم الخدمة من مركز خدمة واحدة وبمرحلة واحدة، ويمكن توضيح النظام كما في الشكل الآتي:



وكمثال على هذا النظام انتظار الزبائن أمام شباك تذاكر واحدة في المستشفيات.

- ✓ **صف الانتظار الواحد ومركز خدمة بأكثر من مرحلة:**

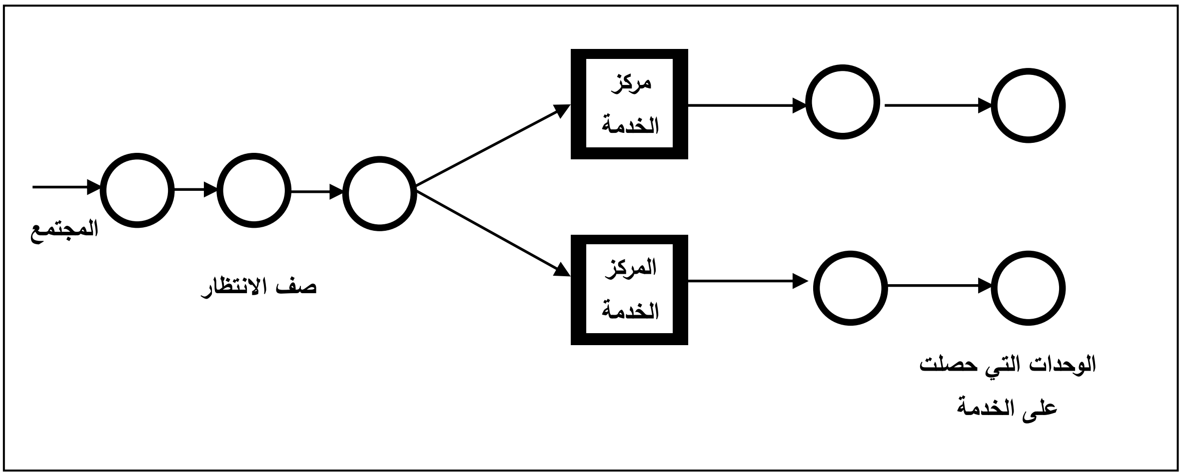
في هذا النظام يتم تقديم الخدمة من خلال مركز خدمة يتضمن عدة مراحل لإكمال الخدمة المطلوبة، مثال ذلك إنجاز المعاملة في دائرة خدمية بعد مرورها بكل الإجراءات الروتينية اللازمة لها، ويمكن توضيح النظام كما في الشكل الآتي:



[1]. محمود العبيدي، مؤيد عبد الحسين الفضل، مرجع سابق، ص ص: 449-450 .

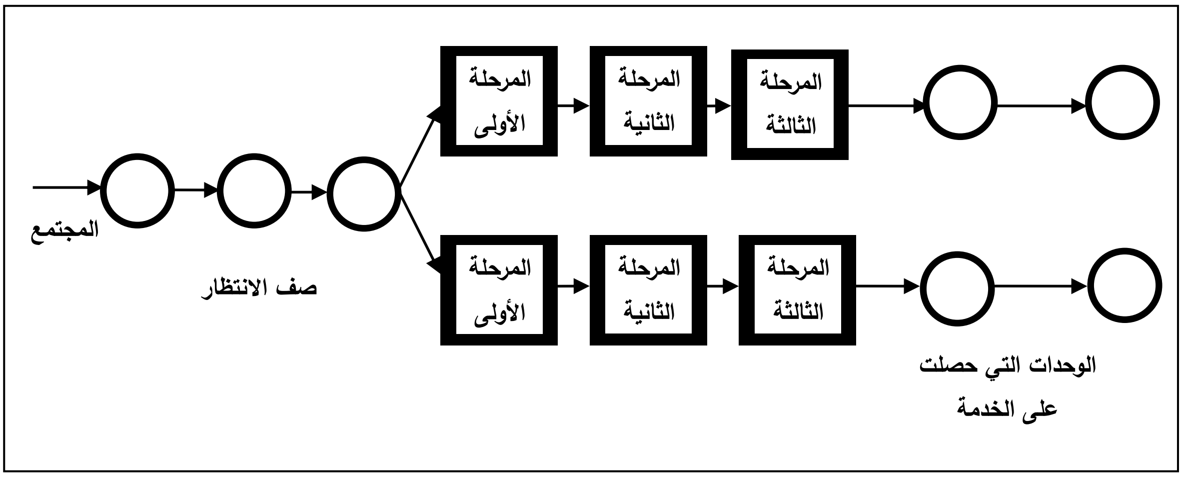
✓ **صف الانتظار ذو مركز الخدمة المتعددة:**

في هذا النظام يتم تقديم الخدمة من عدة مراكز خدمة وكل مركز يقدم الخدمة بمرحلة واحدة، ومثال ذلك بيع تذاكر الدخول للسينما أو المسرح من خلال أكثر من شباك لبيع التذاكر، ويمكن توضيح النظام كما في الشكل الآتي:



✓ **صف الانتظار وأكثر من مركز خدمة متعدد المراحل:**

بموجب هذا النظام يتم تقديم الخدمة من عدة مراكز للخدمة وعلى كل مركز خدمة يتضمن عدة مراحل لإكمال الخدمة المطلوبة ، مثال ذلك أكثر من خط إنتاجي لتقديم نفس المنتوج ويمكن توضيح هذا كما في الشكل الآتي:



II-2. النموذج الرياضي لصفوف الانتظار:

توجد نماذج رياضية متعددة لصفوف الانتظار تختلف حسب نوع نظام الانتظار والتي تم توضيحها سابقاً وسيتم التركيز على نموذجين هما:

- **نموذج صف الانتظار الواحد ذو مركز الخدمة الواحدة؛**
- **نموذج صف الانتظار ذو مركز الخدمة المتعددة.**

وقبل توضيح هذين النموذجين، نوضح الرموز المستخدمة في نماذج الانتظار[1]:

الرمز	توضيح ما يمثله الرمز
λ	العدد المتوقع من الواصلين خلال وحدة الزمن (معدل الوصول)
μ	العدد المتوقع من الزبائن الذين تؤدي إليهم الخدمة (معدل الخدمة)
L_q	معدل الزبائن المنتظرين للخدمة
L_S	معدل الزبائن في النظام (الانتظار و /أو المخدومة)
Pw	عامل الاستخدام
Wq	متوسط وقت انتظار الزبون
Ws	متوسط بقاء الزبون في النظام (الانتظار في الخط + وقت الخدمة)
$\frac{1}{\mu}$	وقت الخدمة
P_0	احتمال وجود (صفر) من الوحدات في النظام ويمثل أيضاً احتمال وجود عطل في وسيلة الخدمة
P_n	احتمال وجود (n) من الوحدات في النظام
K	عدد قنوات الخدمة
$L_{\max}$	الحد الأقصى من الزبائن المتوقع وجودهم في خط الانتظار

[1]. احمد عبد إسماعيل الصفار، ماجدة عبد اللطيف التميمي، مرجع سابق، ص 494.

II-2. 1. نموذج صف الانتظار الواحد ذو مركز الخدمة الواحدة:

في هذا النموذج تمر جميع الوحدات المخدومة على مركز خدمة واحدة فقط، ولغرض وضع نموذج لخط الانتظار يجب تحديد بعض خصائص هذا النظام وهي[1]:

- توزيع الوصول؛
- توزيع وقت الخدمة؛
- خط الانتظار.

1. **توزيع الوصول:** أي تحديد عدد الوحدات الواصلة إلى مركز الخدمة وفي وحدة زمنية معينة، وفي معظم الأحيان يكون الوصول عشوائياُ وبالتالي يصعب وضع نمط معين للوصول ولذلك فإن أفضل توزيع لاحتمالات الوصول هو توزيع بواسون حيث يكون احتمال الوصول لعدد من الوحدات هو:

$$P(X)=\frac{\lambda^{X}e^{-\lambda}}{X!},X=0,1,2,3......$$

حيث:

X : عدد الواصلين خلال وحدة الزمن؛

λ : المعدل أو العدد المتوقع للواصلين خلال وحدة الزمن.

e : 2.71828

2. **توزيع وقت الخدمة:** أي الزمن المستغرق لتأدية الخدمة، وفي هذه الحالة يستخدم التوزيع الأسي لنموذج توزيع جيد لوقت الخدمة ويتم توزيعه كالآتي:

$$f(X)=\mu e^{-\mu x},X\geq 0$$

حيث:

X : زمن الخدمة؛

μ: المعدل أو العدد المتوقع من الوحدات المخدومة خلال وحدة الزمن؛

e : 2.71828

[1]. فتحي خليل حمدان:" **بحوث العمليات مع تطبيقات باستخدام الحاسوب**"، دار وائل للنشر، ط1، الأردن، 2010، ص ص: 384-388.

ويكون احتمال تأدية الخدمة خلال فترة زمنية t حسب توزيع وقت الخدمة الأسي هو كما يلي:

$$P(X \leq t) = 1 - e^{-\mu t}$$

أما احتمال أن يستغرق وقت (فترة) الخدمة اكثر من وقت محدد [1] :

$$P(X > t) = e^{-\mu t}$$

مثال رقم 01: إذا كان معدل العناصر التي تنال الخدمة في احدى محطات تعبئة الوقود هو 30= μ في الساعة .

المطلوب:

1. احتمال تقديم خدمة لعنصر خلال دقيقة واحدة؛
2. احتمال تقديم خدمة لعنصر خلال ثانية واحدة؛
3. معدل الزمن اللازم للخدمة (وقت الخدمة).

حل المثال رقم 01:

1. احتمال تقديم خدمة لعنصر خلال دقيقة واحدة:

$$\mu \Delta t = 30 \times \frac{1}{60} = \frac{1}{2}$$

2. احتمال تقديم خدمة لعنصر خلال ثانية واحدة:

$$\mu \Delta t = 30 \times \frac{1}{3600} = \frac{1}{120}$$

3. معدل الزمن اللازم للخدمة (وقت الخدمة):

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{30}$$

3. **ترتيب وحدات الانتظار:** لا بد من تحديد الطريقة التي يتم بها ترتيب وحدات الانتظار، وبشكل عام ترتب وحدات الإنتظار وفقاً لمن يأتي أولاً فتقدم له الخدمة أولاً (FIFO) والترتيب الثاني هو من يأتي أخيراً يخدم أولاً (LIFO) وخير مثال على هذا الترتيب هو خدمة المصاعد فإن آخر شخص في الانتظار يخدم أولاً، إذ هو الشخص الأول الذي سيخرج من المصعد، سيتم التركيز على الترتيب الأول أثناء طرح الموضوع (FIFO).

من خلال مناقشة نموذج خط الانتظار الذي يطبق على خطوط الانتظار في الحالات الآتية:

- خط الانتظار ذو مركز الخدمة الواحدة؛

[1]. حامد سعد نور الشمرتي، مرجع سابق، ص 238.

- التوزيع البواسوني للوصول؛
- التوزيع الأسي لأوقات تأدية الخدمة؛
- من يدخل اولاً يخدم اولاً.

ويبين الجدول الآتي الصيغ الرياضية الخاصة بالقناة المفردة[1]:

$P_0 = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$	احتمال وجود (صفر) من الوحدات في النظام، أو احتمال وجود عطل في وسيلة الخدمة
$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$	احتمال وجود (n) من الوحدات في النظام
$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$	معدل الوحدات الموجودة في النظم
$Ws = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{L}{\lambda}$	معدل الوقت التي تستغرقه الوحدة في النظام (وقت الانتظار+ وقت الخدمة)
$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = L - \frac{\lambda}{\mu}$	معدل الوحدات الموجودة في خط الانتظار بانتظار تأدية الخدمة إليهم
$Wq = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{L_q}{\lambda} = Ws - \frac{1}{\mu}$	معدل الوقت الذي تستغرقه الوحدة في صف الانتظار بانتظار الخدمة
$Pw = \frac{\lambda}{\mu}$	احتمال انتظار الواصلين للخدمة في صف الانتظار (عامل الاستخدام)

[1]. احمد عبد إسماعيل الصفار، ماجدة عبد اللطيف التميمي، مرجع سابق، ص ص: 505- 506.

تعتبر الصيغة الرياضية الأخيرة:

$$Pw = \frac{\lambda}{\mu}$$

عن احتمال أن يكون الشخص مقدم الخدمة مشغولاً وهكذا فإن:

$\frac{\lambda}{\mu}$ تشير إلى عامل الاستخدام في لحظة الانتظار، وبما أن احتمال أن يكون مقدم الخدمة مشغول

$\frac{\lambda}{\mu}$ لا يمكن أن يكون أكثر من الواحد، وعليه لا بد من ملاحظة عدم تجاوز قيمة الواحد الصحيح.

مثال رقم 02:

لمتجر (التميز) ستة فروع موزعة في أماكن مختلفة وتعاني إدارة إحدى الفروع والذي تم إنشاءه قبل عدة سنوات من مشاكل في استلام البضائع وشحنها بسبب النمو المتزايد في حجم المبيعات، إذ صمم موقف الشاحنات المخصص لشحن وتفريغ البضائع بحيث تستوعب شاحنة واحدة فقط في وقت واحد، وبسبب التزايد في عمل المتجر ظهرت اختناقات في موقف الشاحنات، إذ لاحظت الإدارة ولمرات عديدة وقوف خمس شاحنات بالانتظار لغرض التحميل أو التفريغ. وعليه تفكر الإدارة في إمكانية تطوير عملية الشحن والتفريغ تمهيداً لتقليل وقت الانتظار.

المطلوب:

1. إذا كان معدل وصول الشاحنات 24 شاحنة كل 8 ساعات في اليوم، ما هو احتمال وصول الشاحنات:
   - عدم وصول أية شاحنة خلال الساعة؛
   - وصول شاحنة واحدة خلال ساعة؛
   - وصول شاحنتين خلال ساعة.
2. نفترض أنه بعد جمع البيانات عن أوقات شحن وتفريغ الشاحنات، يتبين أنه في حالة استمرار العمل بشكل متواصل يستطيع طاقم العمل خدمة 4 شاحنات في الساعة. ما هو احتمال أن يكون زمن الخدمة:
   - اقل من 6 دقائق،
   - اقل من 18 دقيقة؛
   - اقل من 30 دقيقة.
3. بما أن $\lambda = 3$ شاحنة لكل ساعة و $\mu = 4$ شاحنة لكل ساعة، حدد خصائص التشغيل لرصيف التحميل ما يلي:

- عامل الاستخدام؛
- احتمال وجود صفر من الوحدات في النظام؛
- معدل الوحدات الموجودة في النظام؛
- معدل الوقت الذي تستغرقه الوحدة في النظام؛
- معدل الوحدات المنتظرة للخدمة؛
- متوسط وقت الانتظار.

حل المثال رقم 02:

1. بما أن عملية وصول الشاحنات هي عملية غير مجدولة وعشوائية، فعليه لا بد من الاعتماد على نموذج عشوائي للوصول مثال توزيع بواسون . وبما أن عملية وصول الشاحنات يقع بمعدل 24 شاحنة كل 8 ساعات في اليوم، أو 3 شاحنات في الساعة فإن $\lambda = 3$ ، وعليه يمكن استخدام توزيع بواسون لحساب احتمال وصول (X) من الشاحنات خلال الساعة وكالآتي:

$$P(X) = \frac{3^X e^{-3}}{X!}$$

- عدم وصول أية شاحنة خلال الساعة:

$$P(X = 0) = \frac{3^0 e^{-3}}{0!} = e^{-3} \approx 0,0498$$

عدم وصول أية شاحنة خلال ساعة (4,98%).

- وصول شاحنة واحدة خلال ساعة:

$$P(X = 1) = \frac{3^1 e^{-3}}{1!} = 3e^{-3} \approx 0,1494$$

وصول شاحنة واحدة خلال ساعة (14,94%)

- وصول شاحنتين خلال ساعة:

$$P(X = 2) = \frac{3^2 e^{-3}}{2!} = \frac{9e^{-3}}{3} \approx 0,2241$$

وصول شاحنتين خلال ساعة (22,41%) وهكذا.

وفي حالة الاستمرار في حساب الاحتمالات، يلاحظ بأن احتمال وصول 9 شاحنات أو أكثر خلال ساعة هو 0,0038 فقط.

2. وعليه فإن $\mu=4$ وأن احتمال تأدية الخدمة خلال الزمن t هو كما يلي:

$$P(X \leq t) = 1 - e^{-\mu t}$$

- احتمال أن يكون زمن الخدمة اقل من 6 دقائق:

(6= 60 دقيقة x 0,1) ، إذ أن (t=0,1)

$$P(X \leq 0,1) = 1 - e^{-4(0,1)} = 1 - e^{-0,4} \approx 0,3297$$

خدمة ما نسبته (32,97%) من الشاحنات خلال 6 دقائق أو أقل.

- احتمال أن يكون زمن الخدمة اقل من 18 دقيقة:

(18= 60 دقيقة x 0,3) ، إذ أن (t=0,3)

$$P(X \leq 0,3) = 1 - e^{-4(0,3)} = 1 - e^{-1,02} \approx 0,6988$$

خدمة ما نسبته (69,88 %) من الشاحنات خلال 18 دقائق أو أقل.

- احتمال أن يكون زمن الخدمة اقل من 30 دقيقة:

(30= 60 دقيقة x 0,5) ، إذ أن (t=0,5)

$$P(X \leq 0,5) = 1 - e^{-4(0,5)} = 1 - e^{-2} \approx 0,8647$$

خدمة ما

نسبته (32,97%) من الشاحنات خلال 30 دقائق أو أقل.

3. مع العلم أن $\lambda=3$ شاحنة لكل ساعة و $\mu=4$ شاحنة لكل ساعة، حدد خصائص التشغيل لرصيف التحميل ما يلي:

- عامل الاستخدام:

$$Pw = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{4} = 0.75$$

- احتمال وجود صفر من الوحدات في النظام:

$$P_0 = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) = \left(1 - \frac{3}{4}\right) = 0.25$$

- معدل الوحدات الموجودة في النظام:

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{3}{4-3} = 3 \quad \text{شاحنة}$$

- معدل الوقت الذي تستغرقه الوحدة في النظام:

$$Ws = \frac{L}{\lambda} = \frac{3}{3} = 1$$ ساعة لكل شاحنة

- معدل الوحدات المنتظرة للخدمة:

$$L_q = L - \frac{\lambda}{\mu} = 3 - \frac{3}{4} = 2.25$$ شاحنة

- متوسط وقت الانتظار.

$$Wq = Ws - \frac{1}{\mu} = 1 - \frac{1}{4} = 0.75$$ ساعة لكل شاحنة

يلاحظ من البيانات السابقة بأن على الشاحنة الانتظار (0,75) ساعة وهو ما يساوي 45 دقيقة قبل عملية الشحن أو التفريغ، وتمثل حالة غير مرغوب فيها مما يستدعي ضرورة تحسين كفاءة عمليات الشحن إذ أن معدل خط الانتظار هو (2,25) شاحنة وأن (75%) منها ينبغي عليها الانتظار لغرض خدمتها.

II-2. 2. نموذج صف الانتظار ذو مركز الخدمة المتعددة:

بموجب هذا النموذج توجد قناتان للخدمة أو أكثر، وفي حالة افتراض كون قنوات الخدمة المتعددة توفر أوقات خدمة أسية مع ثبات نسبة معدل الخدمة فيمكن وصف توزيع الواصلين على أنه توزيع بواسون وأن من يأتي أولاً يخدم اولاً، وعليه تم تطوير الصيغ الرياضية الآتية لتحديد خصائص التشغيل لهذه النوعية من قنوات خط الانتظار وليكن[1]:

K : عدد قنوات الخدمة؛

λ : نسبة معدل الواصلين للنظام؛

µ : نسبة معدل الخدمة لكل قناة.

1. احتمال أن تكون كل قنوات الخدمة عاطلة (أي احتمال وجود صفر من الوحدات في النظام).

$$P_0 = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{n=k-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right] + \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{k\mu}{k\mu - \lambda}}; \ for : k\mu > \lambda$$

[1] احمد عبد إسماعيل الصفار، ماجدة عبد اللطيف التميمي، مرجع سابق، ص ص: 510- 511.

2. احتمال وجود n من الوحدات في النظام.

$$P_n = \frac{1}{k!k^{n-k}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)P_0;\ for: n > k$$

$$P_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0;\ for: n \le k$$

3. معدل الوحدات في النظام.

$$L = \frac{\lambda\mu\left(\lambda/\mu\right)^k}{(K-1)!\,(K\mu-\lambda)^2}P_0 + \frac{\lambda}{\mu}$$

4. معدل الوقت المستغرق للوصول في النظام (وقت الانتظار + وقت الخدمة).

$$Ws = \frac{\mu\left(\lambda/\mu\right)^k}{(K-1)!\,(K\mu-\lambda)^2}P_0 + \frac{1}{\mu} = \frac{L}{\lambda}$$

5. معدل الوحدات في خط الانتظار بانتظار الخدمة.

$$L_q = L - \frac{\lambda}{\mu}$$

6. معدل الوقت الذي تستغرقه الوحدة في خط الانتظار بانتظار الخدمة.

$$Wq = Ws - \frac{L}{\mu} = \frac{L_q}{\lambda} = Ws - \frac{1}{\mu}$$

7. احتمال انتظار الوحدات الواصلة للخدمة في خط الانتظار.

$$Pw = \frac{1}{K!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{K\mu}{K\mu-\lambda}P_0$$

مثال رقم 03: وبالرجوع للمثال رقم 02، وبافتراض أن الادارة قد قررت توسيع الرصيف وزيادة طاقم الخدمة لتبني قنوات متعددة الخدمة نفترض في هذا المجال أن عدد قنوات الخدمة هي 2 أي أن K=2، $\lambda=3$ شاحنة لكل ساعة، $\mu=4$ شاحنة لكل ساعة لكل نقطة خدمة.

المطلوب: حدد ما يلي:

1. احتمال أن تكون كل قنوات الخدمة عاطلة (أي احتمال وجود صفر من الوحدات في النظام)؛
2. معدل الوحدات في النظام؛
3. معدل الوقت المستغرق للوصول في النظام (وقت الانتظار + وقت الخدمة)؛
4. معدل الوحدات في خط الانتظار بانتظار الخدمة؛
5. معدل الوقت الذي تستغرقه الوحدة في خط الانتظار بانتظار الخدمة؛
6. احتمال انتظار الوحدات الواصلة للخدمة في خط الانتظار.

الحل المثال رقم 03:

لدينا: K=2، λ=3 شاحنة لكل ساعة، μ=4 شاحنة لكل ساعة لكل نقطة خدمة:

1. احتمال أن تكون كل قنوات الخدمة عاطلة (أي احتمال وجود صفر من الوحدات في النظام):

$$P_0 = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{n=k-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right] + \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{k\mu}{k\mu-\lambda}} ;\ for : k\mu > \lambda$$

$$P_0 = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{1} \frac{1}{n!}\left(\frac{3}{4}\right)^n\right] + \frac{1}{2!}\left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{2(4)}{2(4)-3}}$$

$$P_0 = \frac{1}{1+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{8}{8-3}\right)} = 0.4545$$

2. معدل الوحدات في النظام:

$$L = \frac{\lambda\mu\left(\lambda/\mu\right)^k}{(K-1)!\,(K\mu-\lambda)^2} P_0 + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$L = \frac{3(4)\left(3/4\right)^2}{(1)!\,(8-3)^2}(0.4545) + \frac{3}{4} = 0.873 \quad \text{شاحنة}$$

3. معدل الوقت المستغرق للوصول في النظام (وقت الانتظار + وقت الخدمة):

$$Ws = \frac{L}{\lambda} = \frac{0.873}{3} = 0.291 \quad \text{ساعة}$$

4. معدل الوحدات في خط الانتظار بانتظار الخدمة:

$$L_q = L - \frac{\lambda}{\mu} = 0.873 - \frac{3}{4} = 0.123$$ شاحنة

5. معدل الوقت الذي تستغرقه الوحدة في خط الانتظار بانتظار الخدمة:

$$Wq = Ws - \frac{1}{\mu} = 0.192 - \frac{1}{4} = 0.041$$ ساعة

6. احتمال انتظار الوحدات الواصلة للخدمة في خط الانتظار:

$$Pw = \frac{1}{K!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{K\mu}{K\mu - \lambda} P_0 = \frac{1}{2!}\left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{2(4)}{2(4)-3}(0.4545) = 0.2045$$

نوضح في الآتي بعض الفوائد المتأتية من القناتين للشحن مقارنة بالقناة المفردة في النظام:

- انخفاض معدل وقت بقاء الشاحنة في الانتظار قبل عمليات الشحن أو التفريغ من 45 دقيقة إلى 0.041 ساعة أو 2.45 دقيقة؛
- انخفاض معدل طول خط الانتظار من 2.25 شاحنة إلى 0.123 شاحنة؛
- انخفاض النسبة المئوية للشاحنات التي تكون بانتظار الخدمة من 75% إلى 20.45%؛
- انخفاض معدل وقت بقاء الشاحنة في نقطة الشحن (وقت الانتظار + الشحن/ الوقت الذي تبقى فيه فارغة) من 1 ساعة إلى 0.291 ساعة أو 17.46 دقيقة.

III- تمارين محلولة

التمرين الأول: تتكون محطة بنزين من مضخة واحدة وكان معدل الوصول إليها 6 سيارات في الساعة ومعدل الخدمة 9 سيارة في الساعة.

المطلوب: بموجب المعطيات أعلاه حدد المؤشرات التالية:

1. عامل الاستخدام؛
2. احتمال عدم وجود سيارة في المحطة (عامل عدم الاستخدام)؛
3. احتمال وجود 3 سيارة في المحطة؛
4. معدل الوحدات الموجودة في النظام (عدد السيارات المتوقع في المحطة)؛
5. معدل الوحدات المنتظرة للخدمة (عدد السيارات المتوقع في خط الانتظار)؛
6. معدل الوقت الذي تستغرقه الوحدة في صف النظام (الزمن المتوقع الانتظار السيارة في خط الإنتظار)؛

7. معدل الوقت الذي تستغرقه الوحدة في النظام (الزمن المتوقع أن نفقة السيارة في المحطة حتى حصولها على الخدمة).

حل التمرين الأول:

قبل تحديد المؤشرات نحدد قيمة المتغيرات الداخلة في احتساب المؤشرات:

$\lambda = 6$: سيارة / ساعة

$\mu = 9$: يسارة / ساعة

1. عامل الاستخدام:

$$Pw = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{6}{9} = 0.67$$

2. احتمال عدم وجود سيارة في المحطة (عامل عدم الاستخدام):

$$P_0 = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) = \left(1 - \frac{6}{9}\right) = 0.33$$

3. احتمال وجود 3 سيارة في المحطة:

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \Rightarrow P_3 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0 = (0.67)^3(0.33) = 0.099$$

4. معدل الوحدات الموجودة في النظام (عدد السيارات المتوقع في المحطة):

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{6}{9-6} = 2$$ سيارة / ساعة

5. معدل الوحدات المنتظرة للخدمة (عدد السيارات المتوقع في خط الانتظار):

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{(6)^2}{9(9-6)} = \frac{36}{27} = 1.33$$

6. معدل الوقت الذي تستغرقه الوحدة في صف النظام (الزمن المتوقع الانتظار السيارة في خط الإنتظار):

$$Wq = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{6}{9(9-6)} = \frac{6}{27} = 0.22$$ ساعة

7. معدل الوقت الذي تستغرقه الوحدة في النظام (الزمن المتوقع أن نفقة السيارة في المحطة حتى حصولها على الخدمة)

$$Ws = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{9-6} = \frac{1}{3} = 0.33$$

التمرين الثاني: فرع لأحد البنوك التجارية في مدينة ساحلية، وجد مسؤول الفرع أن معدل وصول الزبائن إليه هو 21 زبون في الساعة في متوسط، ولديه موظف صندوق قادر على تقديم الخدمة بمعدل 30 زبون في الساعة في المتوسط.

المطلوب:

1. معامل التشغيل (الاستخدام)؛
2. احتمال أن يبقى الموظف بدون عمل (احتمال وجود صفر من الوحدات في النظام)؛
3. متوسط عدد الزبائن في النظام (معدل الوحدات الموجودة في النظام)؛
4. متوسط عدد الزبائن في الصف (معدل الوحدات المنتظرة للخدمة)؛
5. متوسط الوقت الذي قضته الوحدة في النظام (دقيقة).(معدل الوقت الذي تستغرقه الوحدة في النظام)؛
6. متوسط الوقت الذي تمضيه في الانتظار (دقيقة)؛
7. احتمال وجود أكثر من ثلاث زبائن في النظام.

حل التمرين الثاني:

لدينا: معدل الوصول: $\lambda = 21$: زبون / ساعة

معدل تقديم الخدمة: $\mu = 30$: زبون / ساعة

1. معامل التشغيل (الاستخدام):

$$Pw = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{21}{30} = 0.7$$

2. احتمال أن يبقى الموظف بدون عمل (احتمال وجود صفر من الوحدات في النظام):

$$P_0 = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) = (1 - 0.7) = 0.3$$

3. متوسط عدد الزبائن في النظام (معدل الوحدات الموجودة في النظام):

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{21}{30 - 21} = 2.3$$

4. متوسط عدد الزبائن في الصف (معدل الوحدات المنتظرة للخدمة):

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{441}{270} = 1.6$$

5. متوسط الوقت الذي قضته الوحدة في النظام (دقيقة) (معدل الوقت الذي تستغرقه الوحدة في النظام):

$$Ws = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{9} = 0.11 \times 60 = 6.7$$

6. متوسط الوقت الذي تمضيه في الانتظار (دقيقة):

$$Wq = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{21}{270} = 0.08 \times 60 = 4.8$$

7. احتمال وجود أكثر من ثلاث زبائن في النظام:

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$$

$$P_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^1 P_0 = (0.7)^1(0.3) = 0.210$$

$$P_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0 = (0.7)^2(0.3) = 0.147$$

$$P_3 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0 = (0.7)^3(0.3) = 0.103$$

احتمال وجود أكثر من ثلاث زبائن في النظام:

$$1 - (0.3 + 0.210 + 0.147 + 0.103) = 0.24$$

التمرين الثالث: يوجد طبيب اختصاص واحد في عيادة طبية لمعالجة المرضى القادمين إلى هذه العيادة، وإن وصول المرضى إلى العيادة موزع حسب توزيع بواسون وبمعدل 3 مرضى في الساعة، كما ان زمن فحص كل مريض موزع بصورة اسية وبمعدل 15 دقيقة لكل مريض.

المطلوب:

1. الاحتمال الذي يمثل غياب أي مريض في النظام؛
2. معدل عدد المرضى في صف الانتظار؛
3. معدل زمن الانتظار في صف الانتظار؛
4. معدل عدد المرضى في النظام؛

5. معدل زمن الانتظار في النظام؛
6. ما هو احتمال أن يكون زمن الخدمة اقل من ست دقائق؛
7. ما هو احتمال ان يكون زمن الخدمة اكثر من ست دقائق؛

حل التمرين الثالث:

لدينا: $\lambda = 3$: مريض / ساعة

$$\mu = \frac{60}{15} = 4$$ مريض / ساعة

1. الاحتمال الذي يمثل غياب أي مريض في النظام:

$$P_0 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} = 0.25$$

2. معدل عدد المرضى في صف الانتظار:

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{(3)^2}{4(4-3)} = \frac{9}{4} = 2.25$$ مريض

3. معدل زمن الانتظار في صف الانتظار:

$$Wq = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{3}{4(4-3)} = \frac{3}{4} = 0.75$$

4. معدل عدد المرضى في النظام:

$$L = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = \frac{3}{4-3} = 3$$ مريض

5. معدل زمن الانتظار في النظام:

$$Ws = \frac{L}{\lambda} = \frac{3}{3} = 1$$

6. ما هو احتمال أن يكون زمن الخدمة اقل من ست دقائق:

$$P(X \le 0{,}1) = 1 - e^{-4(0{,}1)} = 1 - e^{-0{,}4} \approx 0{,}33$$

7. ما هو احتمال ان يكون زمن الخدمة اكثر من ست دقائق؛

$$P(X > 0,1) = e^{-4(0,1)} = e^{-0,4} \approx 0,67$$

التمرين الرابع: إذا كان رصيف أحد الموانئ يستوعب سفينة واحدة فقط للشحن أو التفريغ، وقد لاحظ المسؤول عن الميناء في مرات عديدة وقوف خمس سفن في انتظار الشحن أو التفريغ. ولذلك يفكر هذا المسؤول في تقليل وقت الانتظار عن طريق تطوير عملية الشحن والتفريغ.

المطلوب:

1. إذا كان معدل وصول السفن 21 سفينة في الأسبوع، ما هو احتمالات الوصول:
   - عدم وصول أية سفينة في اليوم؛
   - وصول سفينة واحدة في اليوم؛
   - وصول سفينتين في اليوم.
2. نفرض أن عمال الشحن والتفريغ يستطيعون خدمة 4 سفن في اليوم. ما هو احتمال أن يكون زمن الخدمة:
   - اقل من ساعة واحدة،
   - اقل من 3 ساعات؛
   - اقل من خمس ساعات.
3. بما أن $\lambda = 3$ و $\mu = 4$ ، حدد المؤشرات التالية:
   - عامل الاستخدام؛
   - احتمال وجود صفر من الوحدات في النظام؛
   - معدل الوحدات الموجودة في النظام؛
   - معدل الوقت الذي تستغرقه الوحدة في النظام؛
   - معدل الوحدات المنتظرة للخدمة؛
   - متوسط وقت الانتظار.
4. إذا رفعنا معدل الخدمة إلى $\mu = 6$ و $\lambda = 3$ ، حدد المؤشرات السؤال الثالث؛
5. إذا رفعنا معدل الخدمة إلى $\mu = 8$ و $\lambda = 3$ ، حدد المؤشرات وماذا تستنتج.

حل التمرين الرابع:

1. بما أن عملية وصول السفن يقع بمعدل 21 سفينة في الأسبوع أي 3 سفن في اليوم وبما أن الوصول عشوائياً نستخدم توزيع بواسون حيث $\lambda = 3$. ما هو احتمالات الوصول:

- عدم وصول أية سفينة في اليوم:

$$P(X=0)=\frac{3^0 e^{-3}}{0!}=e^{-3}\approx 0{,}0498$$

- وصول سفينة واحدة في اليوم:

$$P(X=1)=\frac{3^1 e^{-3}}{1!}=3e^{-3}\approx 0{,}1494$$

- وصول سفينتين في اليوم:

$$P(X=2)=\frac{3^2 e^{-3}}{2!}=\frac{9e^{-3}}{3}\approx 0{,}2241$$

2. وعليه فإن $\mu=4$ ، احتمال أن يكون زمن الخدمة:

لدينا:

$$P(X\leq t)=1-e^{-\mu t}$$

فإذا كان عدد ساعات العمل اليومي هو 10 ساعات عمل فإن احتمال تأدية الخدمة خلال ساعة واحدة هو t=0,1:

- اقل من ساعة واحدة:

$$P(X\leq 0{,}1)=1-e^{-4(0{,}1)}=1-e^{-0{,}4}\approx 0{,}33$$

- اقل من 3 ساعات:

ثلاث ساعات أي t=0,3 هو:

$$P(X\leq 0{,}3)=1-e^{-4(0{,}3)}=1-e^{-1{,}02}\approx 0{,}6988$$

- اقل من خمس ساعات:

$$P(X\leq 0{,}5)=1-e^{-4(0{,}5)}=1-e^{-2}\approx 0{,}865$$

3. بما أن $\lambda=3$ و $\mu=4$ لدينا:

- معامل الاستخدام:

$$Pw=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{3}{4}=0.75$$

- احتمال وجود صفر من الوحدات في النظام:

$$P_0 = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) = \left(1 - \frac{3}{4}\right) = 0.25$$

- معدل الوحدات الموجودة في النظام:

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{3}{4-3} = 3$$ سفن

- معدل الوقت الذي تستغرقه الوحدة في النظام:

$$Ws = \frac{L}{\lambda} = \frac{3}{3} = 1$$ يوم

- معدل الوحدات المنتظرة للخدمة:

$$L_q = L - \frac{\lambda}{\mu} = 3 - \frac{3}{4} = 2.25$$ سفينة

- متوسط وقت الانتظار.

$$Wq = Ws - \frac{1}{\mu} = 1 - \frac{1}{4} = 0.75$$ يوم لكل سفينة

يلاحظ من خلال هذه النتائج أن كل سفينة عليها الانتظار (0,75) من اليوم لكي يتم تفريغها أو شحنها، فإذا كانت مدة العمل في اليوم 10 ساعات فإن كل سفينة ستنتظر 7,5 ساعة حتى يتم خدمتها وعدد السفن الموجودة في الصف الانتظار هو (2,25) سفينة.

4. إذا رفعنا معدل الخدمة إلى 6 =μ و 3 =λ :

- معامل الاستخدام:

$$Pw = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{6} = 0.5$$

- احتمال وجود صفر من الوحدات في النظام:

$$P_0 = (1 - 0.5) = 0.5$$

- معدل الوحدات الموجودة في النظام:

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{3}{6-3} = 1$$ سفن

- معدل الوقت الذي تستغرقه الوحدة في النظام:

$$Ws = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{3} = 0.33$$ يوم

▪ معدل الوحدات المنتظرة للخدمة:

$$L_q = L - \frac{\lambda}{\mu} = 3 - \frac{3}{6} = 0.5$$ سفينة

▪ متوسط وقت الانتظار.

$$Wq = Ws - \frac{1}{\mu} = 0.33 - \frac{1}{6} = 0.167$$ يوم لكل سفينة

وهنا نلاحظ أن كل سفينة عليها الانتظار 1,67 ساعة لكي تتم خدمتها.

5. إذا رفعنا معدل الخدمة إلى 8 =μ و 3 =λ :

▪ معامل الاستخدام:

$$Pw = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{8} = 0.375$$

▪ احتمال وجود صفر من الوحدات في النظام:

$$P_0 = (1 - 0.375) = 0.625$$

▪ معدل الوحدات الموجودة في النظام:

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{3}{8 - 3} = 0.6$$ سفن

▪ معدل الوقت الذي تستغرقه الوحدة في النظام:

$$Ws = \frac{L}{\lambda} = \frac{0.6}{3} = 0.2$$ يوم

▪ معدل الوحدات المنتظرة للخدمة:

$$L_q = L - \frac{\lambda}{\mu} = 0.6 - \frac{3}{8} = 0.225$$ سفينة

▪ متوسط وقت الانتظار.

$$Wq = Ws - \frac{1}{\mu} = 0.2 - \frac{1}{8} = 0.075$$ يوم لكل سفينة

أي أن كل سفينة ستنتظر 0.075 يوم أي 0.75 ساعة كي يتم خدمتها

ومن هنا نرى أننا كلما زدنا من سرعة تقديم الخدمة فإن وقت الانتظار يقل.

التمرين الخامس: يصل الزبائن لمحطة تعبئة الوقود في احدى مناطق بمعدل 18 شخصاً في الساعة الواحدة خلال الفترة الصباحية، ويمكن وصف توزيع العاملين من خلال توزيع بواسون بمتوسط 18 شخصاَ، يستطيع مقدم الخدمة خدمة الزبون بمعدل 4 دقائق للزبون الواحد، ويمكن وصف هذا الوقت بتوزيع أسي وبمتوسط 4 دقائق.

المطلوب: تحديد ما يلي:

1. معدلات الوصول والخدمة؛
2. متوسط عدد الزبائن الذين يمكن خدمتهم خلال أي وقت؛
3. بافتراض تحديد متوسط عدد الزبائن في خط الانتظار بـ 3.6 أشخاص، احسب:

أ. متوسط عدد الزبائن في النظام (الواقفون في خط الانتظار و الذين يتم خدمتهم)؛

ب. متوسط وقت انتظار الزبون في خط الانتظار؛

ج. متوسط وقت بقاء الزبون في النظام.

حل التمرين الخامس:

1. معدلات الوصول والخدمة:

معدل وصول الزبائن: $\lambda = 18$

معدلات الخدمة:

وقت الخدمة :

$$\frac{1}{\mu} = \frac{4}{60} = \frac{1}{15}$$

عدد المخدومين بالساعة الواحدة: $\mu = 15$

2. متوسط عدد الزبائن الذين يمكن خدمتهم خلال أي وقت:

$$Pw = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{18}{15} = 1.2$$ زبون

3. بافتراض تحديد متوسط عدد الزبائن في خط الانتظار بـ 3.6 أشخاص:

أي: $L_q = 3.6$

أ. متوسط عدد الزبائن في النظام (الواقفون في خط الانتظار و الذين يتم خدمتهم):

$$L_s = L_q + Pw = 3.6 + 1.2 = 4.8$$ زبون

ب. متوسط وقت انتظار الزبون في خط الانتظار:

$$Wq = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{3.6}{18} = 0.20$$ ساعة للزبون

ويمكن تحويلها للدقائق كالآتي:

0.20X60=12 دقيقة

ج. متوسط وقت بقاء الزبون في النظام:

$$Ws = Wq + \frac{1}{\mu} = 0.20 + \frac{1}{15} = 0.267$$ ساعة

أي ما يعدل 16 دقيقة.

التمرين السادس: وبالرجوع للتمرين الرابع، وبافتراض أن المسؤول قد قرر زيادة عدد الارصفة، توسيع الرصيف وزيادة طاقم الخدمة لتبني قنوات متعددة الخدمة نفترض في هذا المجال أن عدد قنوات الخدمة هي 2 أي أن K=2، λ=3 ، μ=4.

المطلوب: حدد ما يلي:

1. احتمال أن تكون كل قنوات الخدمة عاطلة (أي احتمال وجود صفر من الوحدات في النظام)؛
2. معدل الوحدات في النظام؛
3. معدل الوقت المستغرق للوصول في النظام (وقت الانتظار+ وقت الخدمة)؛
4. معدل الوحدات في خط الانتظار بانتظار الخدمة؛
5. معدل الوقت الذي تستغرقه الوحدة في خط الانتظار بانتظار الخدمة؛
6. احتمال انتظار الوحدات الواصلة للخدمة في خط الانتظار.

حل التمرين السادس:

لدينا: K=2، λ=3، μ=4 :

1. احتمال أن تكون كل قنوات الخدمة عاطلة (أي احتمال وجود صفر من الوحدات في النظام):

$$P_0 = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{1} \frac{1}{n!}\left(\frac{3}{4}\right)^n\right] + \frac{1}{2!}\left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{2(4)}{2(4)-3}}$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{8}{8-3}\right)} = 0.4545$$

2. معدل الوحدات في النظام:

$$L = \frac{\lambda\mu\left(\lambda/\mu\right)^k}{(K-1)!(K\mu-\lambda)^2} P_0 + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$L=\frac{3(4)\left(3/4\right)^{2}}{(1)!\,(8-3)^{2}}(0.4545)+\frac{3}{4}=0.873$$

3. معدل الوقت المستغرق للوصول في النظام (وقت الانتظار + وقت الخدمة):

$$Ws=\frac{L}{\lambda}=\frac{0.873}{3}=0.291$$

4. معدل الوحدات في خط الانتظار بانتظار الخدمة:

$$L_{q}=L-\frac{\lambda}{\mu}=0.873-\frac{3}{4}=0.123$$

5. معدل الوقت الذي تستغرقه الوحدة في خط الانتظار بانتظار الخدمة:

$$Wq=Ws-\frac{1}{\mu}=0.291-\frac{1}{4}=0.041$$

6. احتمال انتظار الوحدات الواصلة للخدمة في خط الانتظار:

$$Pw=\frac{1}{K!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k}\frac{K\mu}{K\mu-\lambda}P_{0}=\frac{1}{2!}\left(\frac{3}{4}\right)^{2}\frac{2(4)}{2(4)-3}(0.4545)=0.2045$$

نلاحظ من خلال اضافة رصيف شحن آخر إلى معدل الانتظار السفينة للتفريغ انخفض إلى 0.041 يوم أي 0.410 ساعة وايضا انخفاض نسبة السفن التي تكون بانتظار الخدمة إلى 0.2045 بدلا من 0.75.

وايضا انخفاض معدل وقت بقاء السفينة في الانتظار والتفريغ من يوم واحد إلى 0.291 يوم أي إلى 2.905 ساعة.

التمرين السابع: يوجد في مركز الاتصالات الخارجية ثلاثة خطوط هاتفية خارجية، تصل الوحدات طالبة الخدمة (الزبائن) إلى المركز حسب توزيع بواسون وبمعدل 12 زبوناً في الساعة، وقت المكالمة الهاتفية متغيراً عشوائياً يختلف من زبون إلى اخر، ولتسهيل العمليات الرياضية يفترض أن زمن المكالمة الهاتفية موزعاً بصورة عشوائية وحسب التوزيع الأسي وبمعدل عشر دقائق لكل مكالمة هاتفية.

المطلوب: أوجد ما يلي:

1. متوسط عدد الزبائن في النظام؛

2. متوسط زمن الانتظار في النظام؛

حل التمرين السابع:

أن عدد الخطوط الهاتفية هو عبارة عن عدد القنوات الخدمية أي K=3 .

λ=12 زبون / ساعة، وهو معدل وصول الزبائن إلى مركز الاتصالات عشوائياً وحسب توزيع بواسون، وكل زبون يحتاج الخط الهاتفي مدة عشوائية وبمعدل 10 دقائق.

$$\mu = \frac{60}{10} = 6$$

1. متوسط عدد الزبائن في النظام:

$$L = \frac{\lambda\mu\left(\lambda/\mu\right)^k}{(K-1)!\,(K\mu-\lambda)^2} P_0 + \frac{\lambda}{\mu}$$

و:

$$P_0 = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{2} \frac{1}{n!}\left(\frac{12}{6}\right)^n\right] + \frac{1}{3!}\left(\frac{12}{6}\right)^3 \frac{3(6)}{3(6)-12}}$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{12}{6} + \frac{1}{2}\left(\frac{12}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{12}{6}\right)^3\left(\frac{18}{18-12}\right)} = \frac{1}{9} = 0.1111$$

$$L = \frac{\lambda\mu\left(\lambda/\mu\right)^k}{(K-1)!\,(K\mu-\lambda)^2} P_0 + \frac{\lambda}{\mu} =$$

$$= \frac{12(6)\left(12/6\right)^3}{2!\,(3(6)-12)^2}\frac{1}{9} + \frac{12}{6} = \frac{8}{9} + 2 = 2.9 \cong 3 \text{ اشخاص}$$

2. متوسط زمن الانتظار في النظام:

$$Ws = \frac{L}{\lambda} = \frac{2.9}{12} = 0.24 \text{ ساعة}$$

IV- تمارين مقترحة

التمرين الأول: في إحدى ورش تصليح السيارات كان معدل فترة تصليح السيارة الواحدة 12 دقيقة، وكان معدل وصول السيارات سيارة واحدة كل 15 دقيقة.

المطلوب:

1. ما هو متوسط عدد السيارات في الورشة (معدل الوحدات الموجودة في النظام)؛
2. ما هو الحد الأدنى للمواقف التي ينبغي توفيرها لضمان انتظار السيارات(معدل الوحدات المنتظرة للخدمة)؛
3. ما هو متوسط الوقت الذي تنفقه السيارة في الورشة (معدل الوقت الذي تستغرقه الوحدة في النظام).

التمرين الثاني: احد محلات اخدم نفسك بنفسك رغب في تعيين امين صندوق فإذا علمت أن الزبائن يصلون بمعدل تسعة زبائن كل خمس دقائق بينما أمين الصندوق يستطيع أن يخدم عشرة زبائن بنفس المدة. فإذا افترضت أن معدل الوصول يخضع لتوزيع بواسون ومعدل الخدمة وفق التوزيع الأسي.

المطلوب:

1. معدل عدد الزبائن في النظام؛
2. معدل عدد الزبائن في صف الانتظار ؛
3. معدل الزمن الذي يقضيه الزبون في النظام؛
4. معدل الزمن الذي ينتظره الزبون قبل أن يقدم له الخدمة؛
5. ما هو احتمال وجود عشرة زبائن في النظام في اي وقت.

التمرين الثالث: حددت عيادة طبيب الأطفال معدل 5 دقائق لخدمة المريض وكان معدل وصول المرضى 8 اشخاص في الساعة. يتبع الوصول توزيع بواسون.

المطلوب:

1. متوسط عدد المرضى في خط الانتظار ؛
2. معدل الوقت المستغرق في الانتظار في الخط و في الخدمة.

التمرين الرابع: في احد الموانئ كان عدد السفن التي تصل رصيف التفريغ والتحميل حسب توزيع بواسون وبمعدل 8 سفينة في الساعة، وقت الخدمة يتوزع حسب التوزيع الأسي وبمعدل 5 دقائق لكل سفينة.

المطلوب:

1. عامل الاستخدام؛
2. متوسط عدد السفن المتوقعة في النظام؛
3. متوسط الوقت المستغرق في النظام لكل سفينة؛

4. متوسط الوقت المستغرق للانتظار قبل تقديم الخدمة؛
5. احتمال أن يكون مقدم الخدمة عاطل؛
6. احتمال أن يكون هناك أكثر من 7 سفن في النظام؛
7. احتمال أن يكون هناك طابور.

التمرين الخامس: اتخذت إدارة مصنع حلويات القمة قراراً بفتح فرع جديد لها، تم تقدير الطلب بمعدل 15 زبون في الساعة، ومن خلال توزيع بواسون للطلبات والتوزيع الآسي لوقت الخدمة فضلاً عن تقدير متوسط أداء الخدمة بـ 3 دقائق لكل طلب.

المطلوب:

1. استخدام النظام؛
2. نسبة الوقت الذي يبقى فيه مقدم الخدمة عاطلاً؛
3. معدل الوقت الذي يستغرقه الزبائن في النظام؛
4. احتمال وجود 4 زبائن في النظام.

التمرين السادس: في أحد المطاعم للوجبات السريعة توجد نافذتان لخدمة الزبائن وكانت المؤشرات المتاحة عن نظام الانتظار كالآتي: $K=2$ ، $\lambda=0.75$ دقيقة / شخص، $\mu = 1$ شخص / دقيقة.

المطلوب:

1. احتمال عدم وجود زبون في المطعم؛
2. احتمال أن الشخص الواصل سينتظر حتى حصوله على الخدمة (الوحدات الواصلة للخدمة في خط الانتظار)؛
3. معدل عدد الأشخاص في خط الإنتظار؛
4. معدل عدد الأشخاص في المطعم؛
5. معدل الوقت الذي ينفقه الشخص في خط الانتظار بانتظار الخدمة؛
6. معدل الوقت الذي ينفقه الشخص في المطعم (وقت الانتظار + وقت الخدمة).

التمرين السابع: ورشة لتصليح الأجهزة الكهربائية كان معدل وصول الأجهزة 24 جهاز/ساعة ومعدل تقديم الخدمة 3 دقائق للجهاز الواحد ويعمل في هذه الورشة ثلاث عمال يقوموا بتقديم نفس الخدمة بشكل متوازي.

المطلوب:

1. حدد عدد الأجهزة المتوقع انتظارها حتى تأدية الخدمة إليهم؛
2. ما هو متوسط عدد الأجهزة في الورشة؛
3. ما هو متوسط الوقت الذي ينفقه الجهاز في الورشة(وقت الانتظار + وقت الخدمة).

الفصل الثاني

نماذج تسيير المخزون

يعرف المخزون بأنه الكميات المحتفظة بها من المواد الاولية والاجزاء والأدوات الاحتياطية وكذلك الاجزاء نصف المصنعة والسلع النهائية التي قامت المؤسسة بشرائها أو انتاجها.

إن الاحتفاظ بهذا المخزون ضروري وحيوي يؤدي في الحقيقة وظيفة أساسية هي الضمان ضد التقلبات القصيرة الأجل التي قد تؤثر على عرض المواد ذات العلاقة في السوق أو في المعمل. ومن هنا نشأت الحاجة إلى السيطرة على المخزون بحيث يكون كافيا لإستمرار عملية الإنتاجية من جهة ولا يؤدي إلى ارتفاع التكاليف المرتبطة به من جهة أخرى[1].

I- عموميات حول مشاكل تسيير المخزون:

I- 1. أهمية السيطرة على المخزون: يمكن توضيح أهمية التخزين بما يلي[2]:

- انتظام العملية الإنتاجية عندما تعتمد مرحلة إنتاجية في نشاطها على انتهاء مرحلة سابقة لها فعند تعرض المرحلة السابقة لعجز في التجهيز لعطل غير متوقع، يساهم التخزين في انسياب العملية الإنتاجية وعدم توقفها؛
- ضمان مواجهة الطلب الثابت على منتجات المنشأة مع موسمية عرض المواد الأولية مثل المنتجات الزراعية أو أن الطلب موسمي وطاقة الإنتاج ثابتة فعندها ستكون سياسة المنظمة هي الإنتاج بمعدلات ثابتة والاحتفاظ بالتخزين لمواجهة أي زيادة في الطلب مثل ذلك إنتاج الثلاجات، المدافئ؛
- مواجهة التقلبات الكبيرة في الأسعار وخصوصا للمواد الأولية مما يساعد على استقرار هيكل تكاليفها والاستفادة من خصم الكمية عند الشراء بكميات كبيرة.

I- 2. أنواع المخزون: من أنواع المخزون ما يلي[3]:

- **مخزون حجم الطلبية:** وهو الموجه لمقابلة طلبات العملاء العادية ويتحدد حجمه تبعاً لتكاليف الأوامر والنقل إضافة إلى تكلفة التخزين؛
- **مخزون الأمان:** ويسمى مخزون عدم التأكد ويتم إنشاؤه لمقابلة الطلب الطارئ غير المتوقع؛
- **المخزون الموسمي:** ينشأ لمقابلة الطلب الذي يتزايد في أوقات معينة من السنة فبعض المنتوجات يكون استهلاكها فصلي أو خلال مواسم.

I- 3. تكاليف التخزين: يمكن ان تلخص التكاليف المتعلقة بالتخزين بثلاثة أصناف من التكاليف وهي:

---

1. حامد سعد نور الشمرتي، مرجع سابق، ص 448.
2. محمود العبيدي، مؤيد عبد الحسين الفضل، مرجع سابق ، ص 478.
3. راتول محمد: " **بحوث العمليات** "، ديوان المطبوعات الجامعية، ط2، الجزائر، 2006، ص ص: 351- 352.

- **تكاليف الطلبية:** وتتضمن مجمل التكاليف المرتبطة على طلب الشراء كتكلفة: الرسوم الثابتة، اختبار المنتوجات، فحصها، إعداد الطلبيات، ترتيبات العاملين في الإعداد مباشرة وغير مباشرة، الهواتف، التخليص الجمركي، إجراءات الاعتمادات[1]؛
- **تكاليف التخزين:** وتشمل التكاليف المتعلقة بعملية التخزين في حد ذاتها للمواد، كتكلفة: الاحتفاظ بالمحزون، الفوائد الضائعة من جراء تجميد رأسمال المنشأة على هيئة مخزون، التأمين والضرائب، المدفوعة داخل المخازن: أجور العاملين، الاحتفاظ بالسجلات وغيرها...الخ[2]؛
- **تكاليف العجز:** تحدث هذه التكاليف عندما يعجز المخزون عن تلبية طلبات الزبائن مما يؤدي إلى قبول الزبون بتأجيل طلبه أو رفض الطلبية وتمثل هذه التكلفة الخاسرة الناتجة فقدان ثقة الزبون مضافاُ لها تكاليف ادارية أخرى هذا في حالة المشتريات، أما في حالة المبيعات فتمثل الربح الضائع نتيجة فقدان الطلب بالإضافة إلى الخسارة الناتجة عن فقدان ثقة الزبون[3].

إن الهدف النهائي لنماذج التخزين هو الاجابة عن سؤالين هما[4]:

السؤال الأول: ماهي الكمية التي نطلبها لتعزيز المخزون؟

السؤال الثاني: متى نطلب الكمية اللازمة لتعزيز المخزون؟

ونبدأ باستعراض نماذج التخزين وهما نوعين:

- ✓ نماذج التخزين المحددة
- ✓ نماذج التخزين الاحتمالية

II– نماذج التخزين المحددة: النماذج المحددة تستخدم في حالة وجود معلومات كاملة ودقيقة من جميع الفقرات الداخلة في النموذج الرياضي من التكاليف والاحتياجات السنوية، وتهدف هذه النماذج إلى تحديد الكمية الاقتصادية للطلبية ومستوى إعادة الطلب وعدد مرات الطلب في السنة وإجمالي التكاليف المرتبطة بالحجم الاقتصادي، ولتسهيل تحليل مثل هذه النماذج فإننا سوف نفترض الآتي[5]:

- ✓ الطلب ثابت ومستمر؛

---

1. أبو القاسم مسعود الشيخ، مرجع سابق، ص 300.
2. عبد الرسول عبد الرزاق الموسوي، مرجع سابق، ص 249.
3. فتحي خليل حمدان، مرجع سابق، ص 422.
4. حامد سعد نور الشمرتي، مرجع سابق، ص 459.
5. دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال: " **بحوث العمليات**"، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، الأردن، 2008. ص 260.

- ✓ الكمية المستلمة تكون دفعة واحدة؛
- ✓ فترة التوريد تكون ثابتة.

نستخدم الرموز التالية :

Q : حجم الطلبية (عدد الوحدات التي تطلب في كل مرة)؛

T : الفترة الزمنية بين وصول طلبية ووصول الطلبية اللاحقة؛

D : معدل الطلب في وحدة الزمن؛

L : فترة التوريد وهي الفترة منذ اصدار الطلبية لحين وصولها؛

C : عبارة تكلفة شراء الوحدة الواحدة من المادة لفترة كاملة ؛

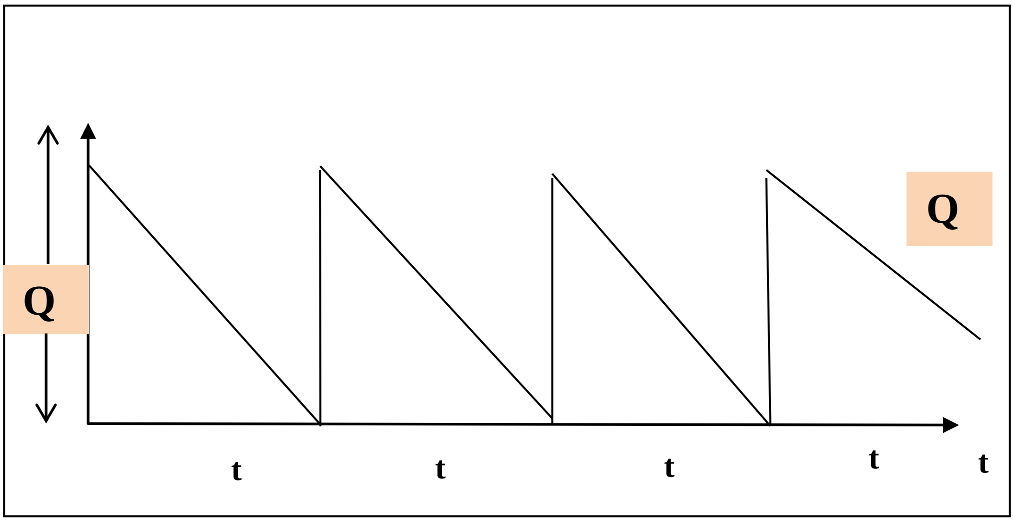
C_1 : كلفة إصدار الطلبية؛

C_2 : كلفة الاحتفاظ بوحدة واحدة من المادة لفترة معينة؛

K : الكلفة الكلية للتخزين؛

R : نقطة إعادة الطلبية.

II- 1. نموذج شراء بدون عجز: إن هذا النموذج لا يسمح لحدوث العجز أي عند وصول المخزون إلى المستوى الصفر يكون التجهيز للكمية فورياً لتعويض مستوى التخزين لكل فترة زمنية t بكمية معينة Q هذه الكمية التي تسمى بحجم الطلبية أو حجم الحصة المطلوبة ترفع المخزون من 0 إلى مستوى حجمها كما هو موضح في الشكل التالي[1]:



[1] حامد سعد نور الشمرتي، مرجع سابق، ص ص: 464- 465 .

يرتبط نموذج الشراء بدون عجز نوعين من التكاليف هما كلفة إصدار طلبية الشراء C_1 وكلفة تخزين الوحدة الواحدة C_2 . وحجم الطلبية الاقتصادية هو الكمية التي تحقق أدنى مستوى من إجمالي التكاليف، وهناك ثلاث قرارت هامة يجب إتخاذها للرقابة على المخزون هي[1]:

أ. **كم يطلب من البظاعة** :ويمكن إيجاد الكمية الاقتصادية للطلب بالصيغة التالية:

$$Q = \sqrt{\frac{2DC_1}{C_2}}$$

ويطلق على هذه المعادلة حجم الطلبية الاقتصادية كما يمكن تحديد عدد مرات الطلب خلال فترة زمنية N بالمعادلة التالية:

$$N = \frac{D}{Q}$$

كما أن الزمن بين الطلبيات T يستخرج بالمعادلة:

$$T = \frac{1}{N} = \frac{Q}{D}$$

الكلفة الكلية السنوية للتخزين K تحسب بالمعادلة:

$$K = \sqrt{2C_1DC_2}$$

أيضا:

$$K = \frac{D}{Q}C_1 + \frac{Q}{2}C_2$$

مثال رقم 01 : افترض أن مصنع يحتاج إلى 2000 جزء صغير خلال العام القادم سعر الوحدة الواحدة 5 دينار ، فإذا كانت كلفة إصدار الطلبية الواحدة 5 دينار وأن كلفة الاحتفاظ بالمحزون خلال السنة الواحدة 1.5 دينار يضاف إليها كلفة استثمار رأس المال والمقدر 10 % من سعر الشراء.

المطلوب : أوجد :

1. حجم الطلبية الاقتصادية .
2. كلفة التخزين .
3. عدد الطلبيات خلال السنة .
4. الزمن بين الطلبيات .

1. دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال، مرجع سابق، ص ص: 261 – 263.

الحل:

$$D = 2000; C = 5; C_1 = 5$$

كلفة الاحتفاظ بالتخزين : $C_2 = 1,5 + 0,1(5) = 2$ الوحد الواحدة خلال السنة.

1. حجم الطلبية الاقتصادية:

$$Q = \sqrt{\frac{2DC_1}{C_2}} = \sqrt{\frac{2(2000)5}{2}} = 100 \text{ وحدة}$$

2. كلفة التخزين:

$$K = \sqrt{2C_1DC_2} = \sqrt{2(5)(2000)(2)} = 200 \text{ دينار}$$

3. عدد الطلبيات خلال السنة:

$$N = \frac{D}{Q} = \frac{2000}{100} = 20 \text{ طلب في السنة}$$

4. الزمن بين الطلبيات :

$$T = \frac{1}{N} = \frac{1}{20}(365) \cong 19 \text{ يوم}$$

ب. نقطة إعادة الطلب: بما أن في النموذج الأولي لنظام التخزين بافتراض أن الطلبية السنوية D ثابتة وأن زمن إحضار الطلبية Q محدد، ولا يسمح بالأمان الاحتياطي، فإنه يمكن حساب الكمية التي يتم فيها إعداد الطلبية الجديدة، بالمعادلة التالية[1]:

$$R = \frac{D}{365}(L)$$

حيث: R الكمية التي يتم عندها الشروع في إعداد الطلبية الجديدة.

نفرض أن المجهز يحتاج إلى مدة 7 أيام لتسليم الطلبية أي L=7 فإن:

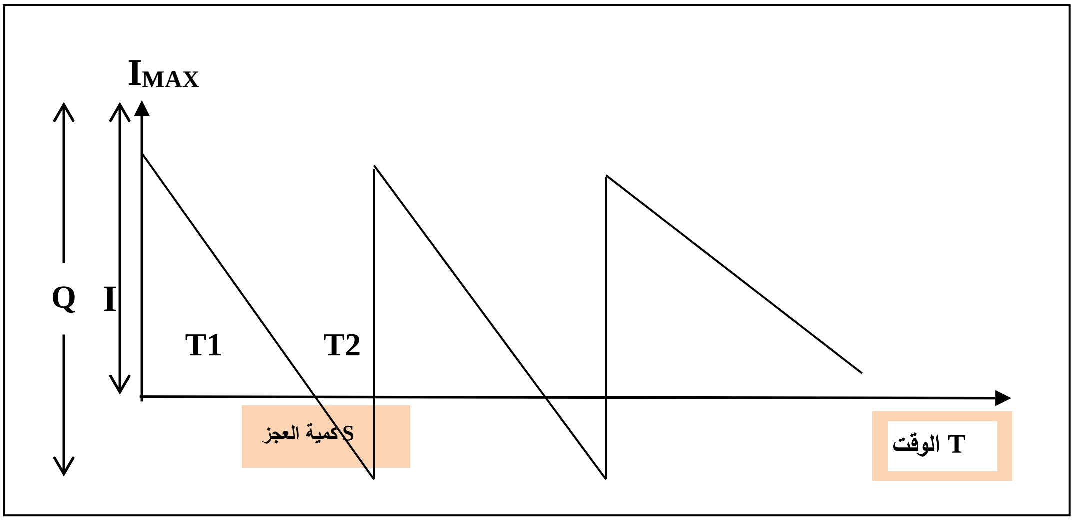
$$R = \frac{2000}{365}(7) = 39 \text{ وحدة}$$

تسمى هذه الكمية باسم طلب الوقت التمهيدي أو الطلب خلال فترة التوريد، لذلك فإن المصنع يطلب شحنة جديدة طالما يصل التخزين مستوى 39 وحدة.

ولتجنب نفاذ المخزون بسبب التأخير البسيط في الطلبية فإن مدير المصنع يوصي باعتبار نقطة إعادة الطلبية R=45 وحدة مثلاً خلال الوقت التمهيدي المتوقع 7 أيام أي طلب 39 وحدة وإبقاء 6 وحدات في المخزون وتستعمل كاحتياط أمان ضد التأخر.

[1]. أبو القاسم مسعود الشيخ، مرجع سابق، ص 305.

II- 2. نموذج الشراء مع السماح بوجود عجز: يفترض هذا النموذج وجود عجز في المواد المخزنة بمعنى أن المواد المخزونة تكون نافذة مما يؤدي إلى عدم تلبية طلبات المستهلكين والتي ستلبى عند وصول المواد إلى المجهز، وإن وجود العجز سيكلف المنشأة المعينة تكاليف تتناسب مع طول الفترة الزمنية التي لا يمكن تحقيق الطلب خلالها، هناك حالات يكون فيها من المرغوب التخطيط لوجود نقص في التخزين وكمثال على هذا النوع وهو نظام خزن السيارات لوكيل بيع السيارات الجديدة، فمن المعروف أن وكيل بيع السيارات لا يملك السيارة التي سيطلبها الزبون في المستودع لكن إذا رغب المشتري أن ينتظر لعدة أسابيع فإن الوكيل سيطلب السيارة له، وقد يؤدي النقص في المخزون إلى سحب الزبون لطلبه وخسارة فرصة البيع وتتحمل المؤسسة كلفة العجز وعادة ما تكون معلومة ومحددة لدى إدارة المؤسسة نوضح الحالة بالشكل التالي[1]:



إن دالة التكاليف في حالة السماح بوجود نقص في المخزون تتكون من ثلاثة عناصر هي كلفة إصدار طلبية الشراء وكلفة الاحتفاظ بالتخزين وكلفة العجز C_3، أما الصيغ الرياضية لهذا النموذج فهي[2]:

1. حجم الطلبية الاقتصادية:

$$Q = \sqrt{\frac{2DC_1}{C_2} \cdot \frac{C_2 + C_3}{C_3}}$$

2. اقصى كمية تخزين مسموح بها:

$$I_{MAX} = \frac{C_3}{C_2 + C_3} Q$$

[1]. محمد عبد العال النعيمي، رفاه شهاب الحمداني، احمد شهاب الحمداني: " **بحوث العمليات**"، دار وائل للنشر، ط2، الأردن، 2011. ص ص: 412 -413.

[2]. دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال، مرجع سابق، ص 267.

3. كمية العجز المسموح به:

$$S = Q - I_{MAX} = \frac{C_2}{C_2 + C_3} Q$$

4. التكلفة الكلية للتخزين:

$$K = \frac{D}{Q} C_1 + \frac{Q}{2} C_2 \left(\frac{C_3}{C_2 + C_3} \right)^2 + \frac{Q}{2} C_3 \left(\frac{C_2}{C_2 + C_3} \right)^2$$

مثال رقم 2 : شركة لبيع الأجهزة الكهربائية تتوقع أن يكون الطلب السنوي على سلعة معينة بحدود 5000 وحدة ، فإذا كان سعر شراء الوحدة 20 دينار وأن كلفة تحزين الوحدة الواحدة يساوي 25 % من سعر الشراء وكلفة إصدار طلبية الشراء 10 دينار .

المطلوب :

1. حدد حجم الطلبية الاقتصادية وكلفة التخزين السنوية في حالة إذا كان العجز غير مسموح به .
2. إذا كانت الشركة تهتم بالسماح لبعض الطلبات المتأخرة وقدرت كلفة العجز 15 دينار للوحدة الواحدة .
   أ. اوجد حجم الطلبية الكلية .
   ب. اوجد أعلى مستوى للتخزين .
   ج. حدد حجم العجز المسموح به .
   د. اوجد كلفة الكلية .
3. ماذا تلاحظ بعد حساب الكلفة الكلية في الحالتين .
4. نفترض أنه ازدادت تكاليف الطلب المتأخرة 20 بدلا من 15 دينار ، ماذا يحدث لحجم العجز المسموح به .
5. إذا ازدادت تكاليف الاحتفاظ بالتخزين من 5 إلى 8 ، ماذا يحدث لقيمة حجم العجز المسموح به.

الحل:

$$D = 5000; C_1 = 10; C = 20$$
$$C_2 = (0,25)(20) = 5$$

1. حالة العجز غير المسموح به:

$$Q = \sqrt{\frac{2DC_1}{C_2}} = \sqrt{\frac{2(5000)10}{5}} = \sqrt{20000} = 141,42 \cong 142$$

$$K = \frac{D}{Q} C_1 + \frac{Q}{2} C_2 = 10.\frac{5000}{142} + 5\frac{142}{2} = 707.11$$

2. حالة الشركة تسمح بالعجز:

✓ حجم الطلبية الاقتصادية:

$$Q=\sqrt{\frac{2DC_1}{C_2}\cdot\frac{C_2+C_3}{C_3}}=\sqrt{\frac{2(5000)(10)}{5}\cdot\frac{5+15}{15}}$$
$$=163{,}29\cong164$$

✓ أعلى مستوى التخزين:

$$I_{MAX}=\frac{C_3}{C_2+C_3}Q=\frac{15}{5+15}(164)=123$$

✓ كمية العجز المسموح به:

$$S=\frac{C_2}{C_2+C_3}Q=\frac{5}{5+15}(164)=41$$

✓ التكلفة الكلية للتخزين:

$$K=\frac{D}{Q}C_1+\frac{Q}{2}C_2\left(\frac{C_3}{C_2+C_3}\right)^2+\frac{Q}{2}C_3\left(\frac{C_2}{C_2+C_3}\right)^2$$

$$K=\frac{5000}{164}10+\frac{164}{2}5\left(\frac{15}{5+15}\right)^2+\frac{164}{2}15\left(\frac{5}{5+15}\right)^2$$
$$=612{,}37$$

3. نلاحظ أن التكاليف الكلية السنوية في حالة الثانية أقل مما هي في حالة الأولى وهذا يعني أن الشركة إذا سمحت بالطلب المتأخر فإنها سوف توفر 13,4 % من التكاليف المترتبة على استخدام النموذج الأول أي عدم السماح بالعجز.

4. $C_3=20$

$$Q=\sqrt{\frac{2DC_1}{C_2}\cdot\frac{C_2+C_3}{C_3}}=\sqrt{\frac{2(5000)(10)}{5}\cdot\frac{5+20}{20}}=158.11\cong159$$

$$S=\frac{C_2}{C_2+C_3}Q=\frac{5}{5+20}(159)=31{,}8\cong32$$

أي نلاحظ أن عندما تزداد تكاليف الطلب المتأخر C_3 فإن حجم العجز المسموح به سيكون صغيراً

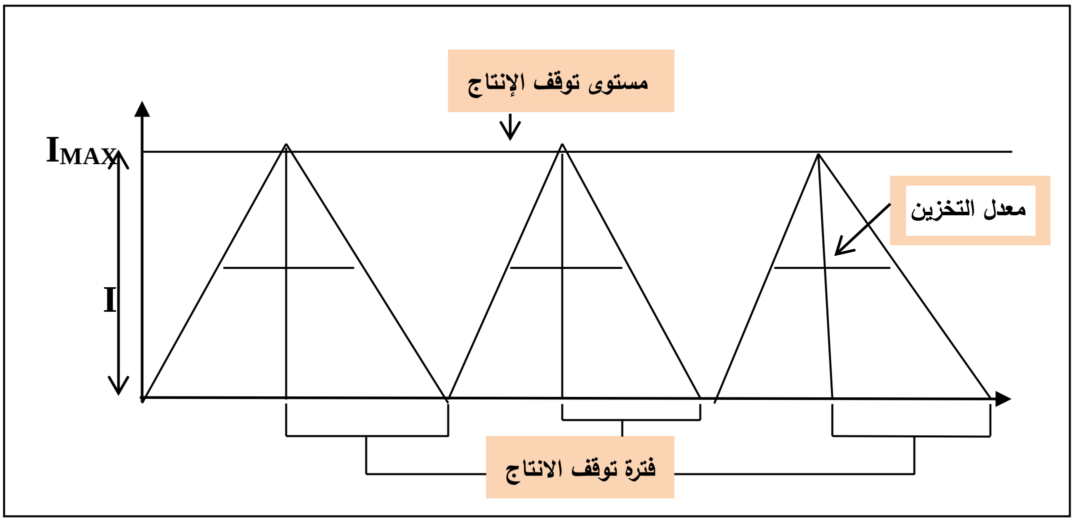
5. $C_2=8$

$$Q = \sqrt{\frac{2(5000)(10)}{8} \cdot \frac{8+15}{15}} = 175.11 \cong 176$$

$$S = \frac{8}{8+15}(176) = 61{,}21 \cong 61$$

على العكس نلاحظ أنه عندما تزداد تكاليف الاحتفاظ بالتخزين فإن قيمة S سوف تزداد.

II-3. نموذج الإنتاج بدون عجز: يختلف هذا النموذج عن نموذج كميات الطلب الاقتصادي في أن هذا النموذج يكون الهدف فيه هو تحديد الحجم الأمثل الذي يجب إنتاجه عند كل تشغيلة للورشات، والذي يجعل مجموع التكاليف أقل ما يمكن، ويتم استخدام هذا النموذج خاصة في خطوط الإنتاج التي لا تشتغل باستمرار، أي أن الإنتاج فيها يتم بناء على طلب التوريد، إن هذا النموذج يمثل حالة الفعاليات الانتاجية التي فيها تكون عملية الإنتاج مستمرة خلال فترة زمنية معينة وبمعدل إنتاجي P وحدة خلال وحدة زمن، في هذا النموذج نفترض أن معدل الإنتاج P أكبر من معدل طلب الاستهلاك D لأن إذا كانت D=P فإن كل ما ينتج يستهلك ولا يوجد فائض يودع في المخزون و يمكن توضح ذلك بالشكل التالي[1]:



الصياغة الرياضية لتحديد الحجم الإنتاجي الأمثل للدورة الإنتاجية التي تؤدي إلى تقليل التكاليف يمكن عرضها كالاتي[2]:

$$Q = \sqrt{\frac{2DC_1}{C_2} \cdot \frac{P}{P-D}}$$

$$K = \frac{D}{Q}C_1 + \frac{Q}{2}C_2\left(\frac{P-D}{P}\right)$$

[1]. راتول محمد، مرجع سابق، ص 361.

[2]. دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال، مرجع سابق، ص 270 .

$$N = \frac{D}{Q}$$

$$T_P = \frac{Q}{P}$$

$$I_{MAX} = (P - D)T_P$$

مثال رقم 3 : تقوم إحدى المنشأت بإنتاج 20000 وحدة سنويا من منتوج معين فإذا علمت أن كلفة تهيأة وجبة الصنع الواحدة تساوي 250 دينار وأن كلفة تخزين الوحدة الواحدة تساوي 0.36 وأن مقدار الطلب المتوقع على هذا المنتوج يساوي 9000 وحدة خلال السنة .

المطلوب :

1. الحجم الاقتصادي لوجبة الصنع.
2. عدد الطلبيات خلال السنة والزمن بين الطلبيات.
3. إجمالي التكاليف السنوية.

الحل:

$$P = 20000; D = 9000$$

$$C_1 = 250$$

$$C_2 = 0,36$$

$$Q = \sqrt{\frac{2DC_1}{C_2} \cdot \frac{P}{P-D}} = \sqrt{\frac{2(250)9000}{0,36} \cdot \frac{20000}{20000-9000}}$$

$$= 3016$$

$$N = \frac{D}{Q} = \frac{9000}{3016} = 2,98$$

$$T = \frac{1}{2,984} = 0,335$$

$$K = \frac{D}{Q}C_1 + \frac{Q}{2}C_2\left(\frac{P-D}{P}\right)$$

$$K = 250\left(\frac{9000}{3016}\right) + 0,36\left(\frac{3016}{2}\right)\left(\frac{20000-9000}{20000}\right)$$

$$= 1044,6$$

$$T_P = \frac{Q}{P} = \frac{3016}{20000} = 0,15$$ سنة

$$I_{MAX} = (P - D)T_P = (20000 - 9000)(0,15) = 1650$$ وحدة

II-4. نموذج الشراء مع الخصم: بعض الشركات تعطي خصم للكميات على الطلب أي عند طلب كمية معينة من المادة يعطي نسبة خصم وهذه النسبة تزيد حسب زيادة الكمية المطلوبة، ويكون الخصم عادة على سعر الشراء[1].

ربما تكون كلفة الاحتفاظ بالمخزون الإضافي هي أكثر بكثير من التخفيض الناتج من سعر الشراء لتلك الكمية وهنا لا نحتاج إلى صيغ جديدة بل نطبق نفس الصيغ السابقة كما يلي[2]:

- ✓ نجد الحجم الاقتصادي بالإعتماد على سعر الشراء الأصلي Q فإذا كان الحجم الاقتصادي أكبر من الكمية اللازمة للخصم فإنه لا توجد مشكلة ويمكن إصدار الطلبية بالحجم الاقتصادي وبسعر الخصم أما إذا كان العكس نذهب للخطوة 2؛
- ✓ نحسب كلفة التخزين وكلفة الشراء اعتمادا على سعر الشراء قبل الخصم؛
- ✓ نحسب مقدار التخفيض بسعر الشراء باستعمال سعر الخصم؛
- ✓ نفرض أن حجم الطلبية هو الحد الأدنى للكمية اللازمة للحصول على الخصم ونحسب الزيادة بكلفة التخزين إعتماداً على هذا الحجم ثم نقارن هذه الزيادة مع مقدار التخفيض بسعر الشراء فإذا كان الفرق في سعر الشراء أكبر من الزيادة الحاصلة بكلفة التخزين فإننا نطلب الحد الأدنى لكمية الخصم، أما إذا كان العكس فإننا نطلب الحجم الاقتصادي اعتماداً على سعر الشراء قبل الخصم، إذا تبين بأن الحد الأدنى لكمية الخصم أفضل، فهنا يجب إعادة حساب الحجم الإقتصادي اعتماداً على سعر الخصم لنرى فيما إذا كان الحجم الاقتصادي أكبر من الحد الأدنى وإلا فإننا نكتفي بالحد الأدنى لكمية الخصم .

مثال رقم 4 : إضافة للبيانات المتوفرة في مثال 1 ، نفترض أن المورد عرض على المصنع تخفيض قدره 5 % من سعر الوحدة الواحدة ، إذا كان حجم الطلبية 200 وحدة أو أكثر .

المطلوب : هل يمكن الإستفادة من هذا العرض و ما هو حجم الطلبية الجديدة.

كلفة الشراء بالسعر الأساسي قبل الخصم:

$$2000 \times 5 = 10000$$

كلفة الشراء بسعر الخصم:

$$2000 \times 5 \times 0,95 = 9500$$

---

1. فتحي خليل حمدان، مرجع سابق، ص 431.
2. دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال، مرجع سابق، ص ص: 272 – 273.

إن سعر الخصم سوف يخفض كلفة الشراء بمقدار 500 دينار

والأن نقارن مع كلفة التخزين:

أولاً: حساب حجم الطلبية اعتماداً على السعر الأساسي:

$$Q=\sqrt{\frac{2DC_1}{C_2}}=\sqrt{\frac{2(2000)5}{2}}=100$$

$$K=\frac{D}{Q}C_1+\frac{Q}{2}C_2=\frac{2000}{100}(5)+\frac{100}{2}(2)=200$$

إذا قبلنا بعرض المجهز فإن حجم الطلبية Q يجب أن تكون على الأقل 200 وحدة وكلفة الاحتفاظ بالتخزين خلال السنة للوحدة الواحدة C_2 سوف تتأثر بسعر الخصم وتكون قيمتها الجديدة كما يلي:

$$C_2=1{,}5+(0{,}1)(5)(0{,}95)=1{,}5+0{,}475=1{,}975$$

وعليه فإن كلفة التخزين لحجم الطلبية الجديدة هو:

$$K=\frac{2000}{200}(5)+\frac{200}{2}(1{,}97)=247{,}75$$

نلاحظ أن كلفة إصدار الطلبيات خلال السنة قد انخفضت في حين أن كلفة الاحتفاظ بالتخزين قد ارتفع أما الزيادة الصافية في كلفة التخزين فتكون:

247,75−200=47,75

وهذه الزيادة هي أقل بكثير من قيمة التخفيض في كلفة الشراء والبالغة 500 دينار لذلك فأننا نقبل بعرض المجهز وسوف نطلب كل الطلبية 200 وحدة.

هناك خطوة أخيرة يمكن تنفيذها وهي ، هل بإمكان أن يكون حجم الطلبية أكبر من 200 وحدة فيما لو استخدمنا سعر الخصم :

$$Q=\sqrt{\frac{2DC_1}{C_2}}=\sqrt{\frac{2(2000)5}{1{,}975}}=100$$

وهذا الحجم لازال اقل من الحد الأدنى لحجم الخصم لذلك سوف لن تكون هناك فائدة من زيادة حجم الطلبية عن 200 وحدة.

III- نماذج المخزون الاحتمالية (نموذج الطلب الاحتمالي): سبق وأن اشرنا إلى أن نماذج المخزون قد تقسم إلى محددة أو احتمالية تبعاً لنوع الطلب ففي كون الطلب محدداً ومعروفاً بصورة اكيدة فإن النماذج تكون محددة أما اذا كان الطلب عشوائياً وغير محدد فضلاً عن أن وقت استلام المواد الأولية أو السلع التامة الصنع المستوردة غير معروفة لهذا فأنه متغير عشوائي لذلك تعد هذه النماذج نماذج احتمالية [1].

لغرض حساب نقطة إعادة الطلب مع وجود مخزون أمان وبمستوى خدمة معينة نفترض أن الطلب خلال فترة الانتظار (غير مؤكد مستقل) ويمكن وصفه من خلال التوزيع الطبيعي ويعطى بالعلاقة التالية[2]:

$$R = \mu + Z\delta$$

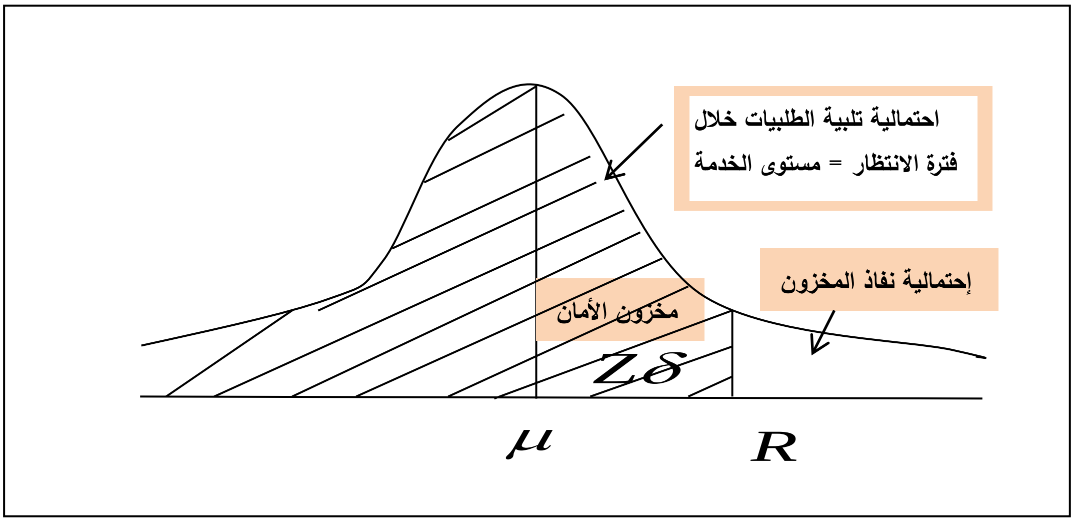
μ : مستوى الطلب.

Z : عدد الانحرافات المعيارية للإحتمال تقديم مستوى معين للخدمة.

δ : الانحراف المعياري للطلب.

أي الجزء الثاني في معادلة نقطة إعادة الطلب $Z\delta$ مخزون أمان.

والشكل يبين نقطة إعادة الطلب بمستوى خدمة معينة وتؤشر المساحة المضللة إلى اليسار نقطة إعادة الطلب إلى مستوى الخدمة أو احتمالية تلبية الطلب خلال فترة الانتظار.



مثال رقم 5 : لو فرضنا أن الشركة العامة لتوزيع الكهرباء ، تشتري مصابيح كهربائية ذات كثافة عليا لنظم الإضاءة الصناعية من مصنع مشهور لصناعة المصابيح الكهربائية ، تحتاج الشركة إلى توصية

[1]. محمد عبد العال النعيمي، رفاه شهاب الحمداني، احمد شهاب الحمداني، مرجع سابق، ص 425 .

[2]. احمد عبد إسماعيل الصفار، ماجدة عبد اللطيف التميمي، مرجع سابق، ص ص: 453 - 454 .

بشأن حجم الكمية المطلوبة ويجب أن يودع الطلب بحيث يتحقق هدف إنفاق أقل التكاليف لأغراض التخزين ، وكانت تكاليف إصدار الطلبية الواحدة 15 دينار ويكلف المصباح الواحد 3 دينار وقدرت الشركة تكاليف التخزين السنوية بنسبة 18 % من كلفة الشراء ، و D=10000.

المطلوب :

1. أوجد كمية الطلب وعدد الطلبيات خلال الفترة الزمنية والزمن بين الطلبيات.
2. نفرض أن الشركة العامة لتوزيع الكهرباء تحتاج إلى مدة أسبوع لاستلام كمية جديدة من مصابيح الإضاءة الكهربائية ، أوجد نقطة إعادة الطلب .
3. نفرض أن طلب الوقت التمهيدي لمصابيح الشركة يشكل توزيعا طبيعيا وبمعدل 192 =μ وانحراف معياري يساوي 30= δ و إذا علمت أن الإدارة ترغب بتقديم مستوى الخدمة بنسبة 92 % وباحتمال نفاذ 8 %.

أوجد نقطة إعادة الطلب باستخدام توزيع طبيعي لطلب الوقت التمهيدي واستنتج كمية المخزون الاحتياطي (مخزون الأمان).

الحل:

$$D = 10000; C_1 = 15$$
$$C_2 = 3(0,18)$$

1. قرار كمية الطلب:

$$Q = \sqrt{\frac{2DC_1}{C_2}} = \sqrt{\frac{2(10000)15}{0,54}} = 745$$

عدد مرات الطلب:

$$N = \frac{D}{Q} = \frac{10000}{745} = 13$$

الزمن بين الطلبيات:

$$T = \frac{1}{N} = \frac{1}{3}(365) = 28$$

2. إيجاد نقطة إعادة الطلب:

$$R = D.L$$

$L = 1$ أسبوع

$$R = \frac{10000(1)}{52}$$

أي نقطة إعادة الطلب تساوي 192 وحدة.

نقطة إعادة الطلب بإسخدام توزيع طبيع كمايلي:

$\alpha \overset{.3}{=} 8\%$: نفاذ مخزون. وتبلغ قيمة **(Z)** لمستوى خدمة **(92%)** من خلال جدول التوزيع الطبيعي (انظر الملحق) هو:

$$Z = 1{,}41$$

ويتم حساب نقطة إعادة الطلب كالآتي:

$$R = \mu + Z\delta = 192 + (1{,}41)(30) = 234$$

لهذا يكون قرار رقابة التخزين هو طلب 745 وحدة كلما وصل مستوى التخزين إلى نقطة إعادة الطلب 234 وبما أن مستوى الطلب المتوقع خلال الفترة $\mu = 192$ فإن 234−192=42 تستعمل كتخزين احتياطي ومخزون أمان أي الجزء الثاني من العلاقة:

$$Z\delta = (1{,}41)(30) = 42$$

IV- تمارين محلولة :

التمرين الأول: الطلب اليومي لسلعة معينة يحدد تقريبا بـ 100 وحدة ، وتحدد الكلفة لكل طلبية عندما تأتي إلى المحزون بـ 100 دينار ، هذا وتكون كلفة الاحتفاظ بالتخزين لكل وحدة لكل يوم هي 0.02 ، وإذا كان الوقت المسموح به للطلب هو 12 يوم .

المطلوب : أوجد :

1. حجم الطلبية الاقتصادية .
2. كلفة التخزين .
3. الزمن بين الطلبيات .

حل التمرين الأول:

$$D = 100; C_1 = 100; C_2 = 0{,}02$$

1. إيجاد الكمية الاقتصادية:

$$Q = \sqrt{\frac{2DC_1}{C_2}} = \sqrt{\frac{2(100)100}{0{,}02}} = 1000 \text{ وحدة}$$

2. إيجاد الكلفة الكلية للتخزين:

$$K = \sqrt{2C_1DC_2} = \sqrt{2(100)(100)(0{,}02)} = 20 \text{ دينار}$$

3. الفترة الزمنية بين الطلبيات T:

$$T = \frac{Q}{D} = \frac{1000}{100} = 10 \text{ يوم طول الدورة التخزنية}$$

4. نقطة إعادة الطلبية :

الفترة الزمنية المحصورة بين تقديم الطلبية والحصول عليها:

12−10=2

وتمثل نقطة إعادة الطلب:

$$R = D.L = 2(100) = 200$$

ومعنى هذا انه عند وصول مستوى التخزين إلى 200 وحدة سيعاد الطلب بجلب طلبية وتحصل عندما يصل مستوى التخزين إلى صفراً.

التمرين الثاني: المعامل الخاصة بصنع الأدوات الاحتياطية للمركبات تستعمل 2400 وحدة من السلع نصف المصنعة خلال السنة ، كلفة إعداد الطلبية هي 400 دينار لكل طلبية ، ولكل طلبية كلفة التخزين هي 1.2 دينار لكل وحدة بالسنة ، على افتراض أن تراكم المخزون غير مسموح به ، وإذا قدرت تكلفة العجز 1.2 لكل وحدة بالسنة .

المطلوب :

1. اوجد حجم الطلبية الكلية .
2. اوجد أعلى مستوى للتخزين .
3. حدد حجم العجز المسموح به .
4. اوجد كلفة الكلية للتخزين .

حل التمرين الثاني:

الحل:

$$D = 2400; C_1 = 400$$
$$C_2 = 1,2; C_3 = 1,2$$

✓ حجم الطلبية الاقتصادية:

$$Q = \sqrt{\frac{2DC_1}{C_2} . \frac{C_2 + C_3}{C_3}} = \sqrt{\frac{2(2400)(400)}{1,2} . \frac{1,2 + 1,2}{1,2}}$$
$$= 1788,85 \cong 1789$$

✓ أعلى مستوى للتخزين:

$$I_{MAX} = \frac{C_3}{C_2 + C_3} Q = \frac{1,2}{1,2 + 1,2}(1789) = 894,5 \cong 895$$

✓ كمية العجز المسموح به:

$$S = \frac{C_2}{C_2 + C_3} Q = \frac{1,2}{1,2 + 1,2}(1789) = 894,5 \cong 895$$

✓ التكلفة الكلية للتخزين:

$$K = \frac{D}{Q} C_1 + \frac{Q}{2} C_2 \left(\frac{C_3}{C_2 + C_3} \right)^2 + \frac{Q}{2} C_3 \left(\frac{C_2}{C_2 + C_3} \right)^2$$

$$K = \frac{2400}{1789} 400 + \frac{1789}{2} 1,2 \left(\frac{1,2}{1,2 + 1,2} \right)^2 + \frac{1789}{2} 1,2 \left(\frac{1,2}{1,2 + 1,2} \right)^2$$
$$= 1073,31$$

التمرين الثالث: في مؤسسة انتاجية كلفة الوحدة الواحدة هو دينار واحد لسعلة ما ، وبالإمكان إنتاج هذه السلعة بمعدل إنتاج مقداره 1000 وحدة بالأسبوع ، وبالإمكان بيع هذه السلعة بمعدل مقدره 100 وحدة بالأسبوع، كلفة التخزين هو 10 دينار لكل وحدة في الأسبوع ، بينما كانت كلفة الطلبية الواحدة 300 دينار .

المطلوب : أوجد :

1. حجم الطلبية الاقتصادية .
2. عدد الطلبيات خلال السنة .
3. الزمن بين الطلبيات .
4. كلفة التخزين.

حل التمرين الثالث:

$$P = 1000; D = 100$$
$$C_1 = 300; C_2 = 10$$

1. ايجاد حجم الطلبية الاقتصادية:

$$Q = \sqrt{\frac{2DC_1}{C_2} \cdot \frac{P}{P - D}} = \sqrt{\frac{2(300)100}{10} \cdot \frac{1000}{1000 - 100}}$$
$$= 81,6 \cong 82$$

2. عدد الطلبيات:

$$N = \frac{D}{Q} = \frac{100}{82} = 1,25 \cong 2$$

3. الزمن بين الطلبيات:

$$T=\frac{Q}{D}=\frac{82}{100}=0,82\cong 1$$

أسبوع طول الدورة المخزونية المثلى.

الكلفة الكلية للتخزين:

.4

$$K=\frac{D}{Q}C_1+\frac{Q}{2}C_2\left(\frac{P-D}{P}\right)$$

$$K=300\left(\frac{100}{82}\right)+10\left(\frac{82}{2}\right)\left(\frac{1000-100}{1000}\right)$$

$$=734,85$$

التمرين الرابع: أوجد السياسة المثلى للشركة إذا توفرت لديك المعلومات الآتية :

السياسة	D	C1	C2	q
1	20000	100	0 .20	4000
2	25000	150	0 .25	6500

حيث أن : **q تمثل نقطة خصم السعر وأن خصم السعر هو 2 %.**

مع سعر الشراء في الحالة الثانية هو **C=150**

حل التمرين الرابع:

السياسة الأولى:

$$Q=\sqrt{\frac{2DC_1}{C_2}}=\sqrt{\frac{2(20000)100}{0,20}}=4472$$

بما أن الكمية المثلى المطلوب شراؤها اكبر من نقطة خصم السعر التي اعلنتها الشركة فإن الحجم الأمثل للطلبية هو 4472 وحدة

السياسة الثانية:

$$Q=\sqrt{\frac{2DC_1}{C_2}}=\sqrt{\frac{2(25000)150}{0,25}}=5477$$

إن الكمية المطلوب شراؤها اقل من نقطة خصم السعر التي اعلنتها الشركة (لدينا في هذا المثال (C=150

كلفة الشراء بالسعر الأساسي قبل الخصم:

25000x150=3750000

كلفة الشراء بسعر الخصم :

25000x150x0,98=3675000

إن سعر الخصم سوف يخفض كلفة الشراء بمقدار 75000 دينار

والأن نقارن مع كلفة التخزين:

$$K_{Q^*} = \frac{D}{Q}C_1 + \frac{Q}{2}C_2 = \frac{25000}{5477}(150) + \frac{5477}{2}(0,25) = 1369,32$$

$$K_Q = \frac{25000}{6500}(150) + \frac{6500}{2}(0,25) = 1389,42$$

أما الزيادة الصافية في كلفة التخزين فتكون:

$$1389,42 - 1369,32 = 20,1$$

وهذه الزيادة هي أقل بكثير من قيمة التخفيض في كلفة الشراء والبالغة 75000 دينار لذلك فأننا نقبل بعرض المجهز وسوف نطلب كل الطلبية 6500 وحدة.

هناك خطوة أخيرة يمكن تنفيذها وهي ، هل بإمكان أن يكون حجم الطلبية أكبر من 6500 وحدة فيما لو استخدمنا سعر الخصم يبقى نفس الحجم 5477 لأن C1 و C2 لا تتأثر بسعر الخصم، لذلك سوف لن تكون هناك فائدة من زيادة حجم الطلبية عن 6500 وحدة.

V- *تمارين مقترحة:*

التمرين الأول: يتوقع بائع لمادة معينة أن يكون الطلب الشهري على المادة التي يبيعها 250 وحدة وأنه يدفع مبلغ قدره 20 دينار أجور نقل للحصول على المادة وأن كلفة خزن الوحدة لمدة شهر 2.75 دينار وفي حالة بيع جميع الوحدات قبل وصول الطلبية الثانية يفقد أرباحا تعادل 4 دينار لكل وحدة يقع عليها الطلب وتكون غير متوفرة .

المطلوب : ما الحجم الاقتصادي للطلبية ، الكلفة الكلية للتخزين ، وكمية العجز المسموح به .

التمرين الثاني: من المثال السابق إذا كان العجز غير مسموح به فأوجد:

1. حجم الطلبية الاقتصادية .
2. كلفة التخزين.
3. عدد الطلبيات خلال السنة .
4. الزمن بين الطلبيات .

التمرين الثالث: شركة معدل استهلاكها السنوي 18000 وحدة من مادة معينة ، الشركة تنتج هذه المادة بمعدل 3000 وحدة شهريا فإذا علمت أن كلفة إعداد الطلبية الواحدة 500 دينار وكلفة خزن الوحدة الواحدة لمدة شهر تساوي 0.15 دينار .

المطلوب : أوجد :

1. الحجم الاقتصادي لوجبة الصنع .
2. عدد الطلبيات خلال السنة والزمن بين الطلبيات .
3. إجمالي التكاليف السنوية.

الفصل الثالث

نظرية الألعاب

تمثل نظرية الألعاب أحد الأساليب الكمية التي تساعد المدير في اتخاذ القرار في المواقف التي تتضمن التنافس على موارد مشتركة وذلك بافتراض الشفافية الكاملة أي توافر معلومات كاملة عن سير الألعاب وقواعدها والأطراف المشتركة فيها[1].

هنالك ارتباط وثيق بين نظرية الألعاب والبرمجة الخطية حيث أن كلاهما يمثل اسلوب رياضي حيث أن عامل القرار يسعى في استخدام البرمجة الخطية إلى تحقيق التخصيص الأمثل للموارد المحدودة بحيث يحقق اعلى ربح ممكن أو اقل كلفة ممكنة لكنه لا يأخذ بنظر الاعتبار المنافسة له من قبل جهات اخرى في الإنتاج أو التسويق أو الاستثمار وغيرها من المجالات الأخرى بينما نظرية الألعاب تسعى لتحديد الستراتيجيات المثلى التي تحقق اعلى ربح متوقع أو اقل خسارة متوقعة أخذة بنظر الاعتبار المنافسة من قبل جهات أخرى[2].

يرجع الفضل في تكوين نظرية الألعاب إلى العالم جون فون نيومان الذي أرسى قواعد نظرية الألعاب في العام 1928 إلى العام 1933 وبدأ بتطبيقها في النواحي الاقتصادية والحربية عام 1944 ثم بدأت بالتطور إلى بومنا هذا[3].

I- عموميات حل نظرية الألعاب:

I- 1. مفهوم نظرية الألعاب:

يمكن تعريف نظرية الألعاب على : " أنها استخدام تكتيك معين في موقف ما يتطلب اتخاذ قرار، آخذين بنظر الاهتمام استراتيجيات الأطراف المتنافسة"[4].

نظرية الألعاب تقدم لنا تكتيكا يقوم على اجراءات منتظمة يتم اتباعها لاتخاذ افضل القرارات لكل طرف من الالعاب وفي حقيقة الأمر فإن الألعاب أو حالة التنافس تتواجد في الحياة العملية في مختلف ميادين الحياة، ومن امثلتها الحملات السياسية والعسكرية، السياسات السعرية، حالة المفاوضات، حالة الحصول على اكبر حصة في السوق، ومما تجدر الاشارة اليه أن نموذج نظرية الألعاب يقوم على عدة افتراضات حتى تتصف البيئة القرارية بانها بيئة تعارض ومنها[5]:

- اتصاف كل اللاعبين أو المتنافسين بالذكاء والمعقولية والرشاد بكل المعرفة العميقة بأمور اللعبة؛
- يهدف كل طرف إلى تعظيم العائد أو تقليل الخسارة الخاصة به؛

[1]. محمد إسماعيل بلال: "**بحوث العمليات**"، دار الجامعة الجديدة، الاسكندرية، 2008، ص 259.

[2]. حامد سعد نور الشمرتي، علي خليل الزبيدي، مرجع سابق، ص 417.

[3]. فتحي خليل حمدان، مرجع سابق، ص 343.

[4]. احمد عبد إسماعيل الصفار، ماجدة عبد اللطيف التميمي، مرجع سابق، ص 527.

[5]. حامد سعد نور الشمرتي، مرجع سابق، ص ص: 377- 378.

- معرفة كل طرف من اطراف المباراة بكل المعلومات ذات العلاقة بالمباراة وهذا يعني معرفة كل طرف بالاستراتيجات المتاحة للطرف الآخر، ومعرفته بالمخرجات المصاحبة لأي توليفة من الاستراتيجيات؛
- قيام كل طرف باتخاذ قراراته بصورة مستقلة، وبدون اتصال مباشر مع الطرف الآخر؛
- قيام الطرفين باتخاذ قراراتهما في وقت واحد، وبالتالي لا يعرف كل طرف الاستراتيجية المعينة التي اختارها الطرف الآخر.

فقد يكون المقصود باللاعبين شركتين متنافستين يطلق على كل شركة لاعب، كما قد يقصد باللاعبين دولتين لهما مصالح متعارضة وهكذا بالنسبة لبقية الحالات ذات المصالح المتعارضة لطرفين مختلفين ويحاول كل طرف ايجاد الاستراتيجية التي من شانها أن تحسن وضعه، فإنه يشار إلى كل طرف من هذه الاطراف بكلمة (لاعب).

I- 2. عناصر نظرية الألعاب:

وتتكون أي مباراة من مجموعة من العناصر أهما ما يلي[1]:

- القوانين والإجراءات التي تحكم المباراة؛
- اللاعبون أو متخذي القرارات (المتنافسون)؛
- إستراتيجية (أو استراتيجيات) كل طرف من أطرف المباراة؛
- المعلومات والعوامل والإمكانيات المتاحة لكل طرف قبل وأثناء المباراة.

هذا ويمكن تقسيم المباراة من حيث عدد أطرافها إلى مباريات ثنائية ومباريات غير ثنائية (متعددة الأطراف) مما يمكن تقسيمها من حيث نتيجة المباراة إلى مباريات صفرية وأخرى غير صفرية.

I- 3. تعريف بعض المصطلحات المستخدمة في نظرية الألعاب:

يمكن تعريف بعض للمصطلحات المستخدمة كما يلي[2]:

- **المباراة:** وهي سلسلة من الخيارات التي تقود إلى نهاية المباراة؛
- **اللاعبون:** وهم الأطراف المشتركة في المباراة، أي متخذي القرارات؛
- **الاستراتيجية:** هي الخطة (أو الخطط) التي يختارها اللاعب في حركته واتخاذ قراره؛
- **الاستراتيجية الخالصة (النقية):** وتعني أن اللاعب يختار استراتيجية معينة من استراتيجياته ويلعبها طول فترة المباراة؛

---

[1]. أبو القاسم مسعود الشيخ، مرجع سابق، ص 385.

[2]. دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال، مرجع سابق، ص ص: 323- 324.

- **الاستراتيجية المختلطة:** وتعني أن اللاعب يوزع اهتمامه بين جميع ما متاح امامه من استراتيجيات ولن يركز على استراتيجية واحدة وسيتم استخدامها لهذه الاستراتيجيات بنسب مختلفة طوال فترة المباراة.
- **مصفوفة العائد:** وهي الجدول الذي يبين المدفوعات التي يجب على اللاعب الخاسر دفعها إلى اللاعب الرابح في نهاية المباراة؛
- **نقطة الاستقرار:** وهي أصغر قيمة من عوائد استراتيجيات اللاعب A تساوي أكبر قيمة من عوائد استراتيجيات اللاعب B.
- **قيمة المباراة:** وهي القيمة الناتجة من تقاطع الصف الذي يحتوي على قيمة أقصى الأدنى والعمود الذي يحتوي على قيمة أدنى الاقصى، وهذه تنطبق في حالة المباراة التي تحتوي على نقطة استقرار.

I- 4. تصنيف الألعاب:

هنا يمكن تصنيف الالعاب إلى عدة اصناف استنادا إلى المعايير الأتية[1]:

- **عدد المتنافسين:** إذا كان عدد المتنافسين يساوي 2 عندها تسمى المباراة بمباراة بين شخصين ، أما اذا كان عدد اللاعبين أكثر من 2 عندئذ تسمى المباراة N من اللاعبين؛
- **مجموع الارباح والخسائر:** اذا كان مجموع الارباح والخسائر بين اللاعبين (المتنافسين) يساوي صفراً عندئذ تسمى المباراة (مباراة ذات المجموع الصفري) وفيما عدا ذلك تسمى مباراة ذات المجموع غير الصفري؛
- **عدد الاستراتيجيات (أو الخطط) التي تشتمل عليها المباراة:** استراتيجيات كل لاعب في نظرية الألعاب هي خطة توضح سلوك هذا اللاعب مقابل كل سلوك محتمل من اللاعب الاخر، فمن الممكن ان يكون لكل لاعب استراتيجيتان (هناك لاعبان فقط) فيرمز إلى هذه الحالة من المباراة بالرمز (2X2)، أما اذا كان هناك لاعبين واحدهم لديه استراتيجيتين اثنين والأخر أكثر من استراتيجيتين فيرمز للمباراة في هذه الحالة أما (2*N) أو (2*M). أما إذا كان عدد استراتيجيات اللاعب الأول هو M وعدد الاستراتيجيات اللاعب الثاني هو N، فيقال للمباراة أنها ذات استراتيجيات (M*N) واذا كان (N,M) عددا منتهيا يقال ان المباراة منتهية، واذا كانت (N,M) أعداد غير منتهية فيقال أن المباراة غير منتهية؛
- **مصفوفة العائد (مصفوفة الدفع):** في المباراة الثنائية (أي التي يوجد فيها لاعبين متنافسين) ترتب العوائد بشكل مصفوفة يطلق عليها مصفوفة العائد أو مصفوفة المباراة وتمثل صفوف هذه المصفوفة استراتيجيات احد اللاعبين، والذي سنطلق عليه اللاعب الأول، وتمثل الأعمدة (في

[1]. حامد سعد نور الشمرتي، مرجع سابق، ص ص: 378- 379.

الوقت نفسه) استراتيجيات للاعب الأخر الذي سنطلق عليه اللاعب الثاني، وتكون عناصر المصفوفة هي مقدار المردود لأحد اللاعبين.

II – خوارزمية حل الألعاب: شخصين ذات المجموع الصفري:

وهي المباراة بين شخصين، إذ يوجد اختلاف كلي في المصالح بين الطرفين المتنافسين، مما يعني أن كل ما يخسره الطرف الأول يربحه الطرف الثاني، أي أن قيمة المباراة مساوية إلى الصفر[1].

وعلى هذا الأساس يطلق على المباراة بالمباراة ذات المجموع الصفري، أن كل متنافس يمتلك مجموعة من الستراتيجيات بحيث أن ناتج كل ستراتيجية يكون معلوم مسبقاً لدى المتنافسين ويعبر عنه بقيم رقمية.

II –1. صياغة مصفوفة الألعاب:

إن حالة المنافسة والصراع بين أثنين من اللاعبين يؤدي إلى تشكيل وتكوين ما يسمى بمصفوفة الألعاب أو بمصفوفة الدفع ، وهي عبارة عن صفوف واعمدة تشتمل على نتائج الجهتين حيث يفترض ان الجهة الأولى تسمى A والجهة الثانية تسمى B وأن الارقام الموجبة داخل المصفوفة تمثل ربحا للجهة A والارقام السالبة تمثل ربحا إلى B وأن ما يربحه A يخسره B وليس هناك أي طرف ثالث يربحان منه. والموضحة بالجدول التالي[2]:

		B					
		1	2	3	J	………	N
	1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{1j}		a_{1n}
	2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{2j}		a_{2n}
A	3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{3j}		a_{3n}
	i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{ij}		a_{in}
	:						
	:						
	m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	a_{mj}		a_{mn}

فالعنصر الذي يقع في الصف i والعمود j والذي نرمز له (a_{ij}) هو العائد عندما يستخدم اللاعب الاول الاستراتيجية i واللاعب الثاني الاستراتيجية j ، فإذا كان (a_{ij}) موجب فإن اللاعب الأول يربح (a_{ij}) من اللاعب الثاني، أما اذا كان سالب فإن اللاعب الأول سيخسر (a_{ij}) يدفعها إلى اللاعب الثاني.

[1]. احمد عبد إسماعيل الصفار، ماجدة عبد اللطيف التميمي، مرجع سابق، ص 528.

[2]. حامد سعد نور الشمرتي، مرجع سابق، ص ص: 379- 380.

مثال رقم 01: كمثال عددي حول ذلك نورد المثال الاتي:

		B			
		1	**2**	**3**	**4**
	1	4	−10	−15	20
	2	−3	−18	7	−4
A	**3**	5	−8	3	8
	4	6	−20	−6	−8
	5	−8	−12	−15	−10

وتوضيحاً إلى مصفوفة الدفع فإنها مكونة من عائد لاعبين هما A وB وكذلك للاعب A توجد لديه m=5 سياسات وللاعب B لديه n=4 سياسات وعند اتباع اللاعب A السياسة رقم واحد فإنه يعلم جيدا أنه سيربح 4 اذا استخدم اللاعب B السياسة رقم واحد وسيخسر 10 يدفعها إلى اللاعب B اذا استخدم الاخير السياسة رقم اثنين ويعلم اللاعب أنه سيخسر 15 اذا استخدم اللاعب B السياسة رقم 4 وما يقال عن السياسة الأولى يقال عن كل سياسات اللاعب A فضلا عن انه يعلم بها سلفا ويعلم أن لدى اللاعب B أربع سياسات,

أما بالنسبة للاعب B فإنه يعلم سلفا أنه اذا استخدم السياسة رقم واحد فإنه سيخسر 4 يدفعها إلى اللاعب A اذا استخدم اللاعب A السياسة رقم واحد وسيربح 3 يدفعها إليه اللاعب A اذا استخدم اللاعب A السياسة رقم 2 وسيخسر 5 اذا استخدم اللاعب A السياسة رقم 3 وسيخسر 6 اذا استخدم اللاعب A السياسة رقم 4 وسيربح 8 يدفعها اليه اللاعب A اذا استخدم الاخير السياسة الخامسة.

II –2. الستراتيجيات (الوحيدة) البحتة ونقطة الاستمرار:

إن تشعب وزيادة قرارات اللاعب الأول والثاني سوف يؤدي إلى توسع حجم المصفوفة وينسحب على ذلك تعقد عملية تحليلها وتفسيرها، لذلك إتجهت جهود الباحثين نحو البحث عن سبل الكفيلة باختزال مصفوفة الدفع إلى اصغر حجم ممكن بما يساعد على تسهيل عمليات التحليل وبالتالي حسم النتيجة لصالح أحد اللاعبين، حيث ترتب هذه القواعد بخطوات معينة يمكن ان تنصب على الصفوف والأعمدة على حد السواء، فإذا كانت جميع عناصر أحد الصفوف في مصفوفة الدفع أكبر أو مساوية إلى عناصر صف آخر في مصفوفة، فإن في هذه الحالة يمكن استبعاد عناصر الصف لآخر ويسمى بالصف المستبعد والإبقاء على عناصر الصف الأول ويسمى بالصف المسيطر، نفس الشيء بالنسبة للأعمدة[1].

ومن أجل توضيح هذه الفكرة نأخذ المثال التالي:

[1]. محمود العبيدي، مؤيد عبد الحسين الفضل، مرجع سابق، ص 318.

مثال رقم 02: نفترض مصفوفة الدفع تمثل مباراة بين متنافسين كل متنافس يمتلك ثلاثة إستراتيجيات:

A \ B	B_1	B_2	B_3
A_1	2	4	5
A_2	1	−2	6
A_3	−4	3	−1

الأرقام الموجبة تمثل مقدار الربح للمتنافس A والأرقام السالبة تمثل مقدار الربح للمتنافس B، على افتراض أن المتنافس A اختار الستراتيجية A_1 فإن أقصى ربح ممكن ان يحصل عليه هو 5 في حال اختار المتنافس B للستراتيجية B_3 ، في المقابل فإن B سوف يختار B_1 ليقلل خسائره إلى أقل ما يمكن عندما A يختار A_1 ، عندما يختار المتنافس B الستراتيجية B_1 فإن المتنافس A سوف لا يغير ستراتيجيته لأن 2 هي أقصى عائد ممكن أن يحصل عليه لذلك عندما A و B يختاران A_1 و B_1 على التوالي فإن كلا المتنافسين A و B سوف لا يغيران إستراتيجيتهما.

إن المتنافس A سوف لا يختار الستراتيجية A_3 ابداً لأي ستراتيجية ممكن أن يختارها B والسبب في ذلك يعود إلى أن اختيار B لأي إستراتيجية فإن A_1 هي أفضل من A_3 بالنسبة لـ A ولذلك يتم استبعاد A_3 من مصفوفة الدفع وهنا A_1 تدعى الستراتيجية المفضلة (المسيطرة) ولذلك فإن مصفوفة الدفع تصبح بالصيغة الآتية:

A \ B	B_1	B_2	B_3
A_1	2	4	5
A_2	1	−2	6

وبالمثل يتم استبعاد B_3 بالنسبة للمتنافس B ولذلك فإن مصفوفة الدفع تصبح بالصيغة الآتية:

A \ B	B_1	B_2
A_1	2	4
A_2	1	−2

لأي إستراتيجية يختارها B فإن A_1 هي أفضل من A_2 بالنسبة لـ A لذلك يتم استبعاد A_2 ومن ثم يتم استبعاد B_2 بالنسبة لـ B ولذلك تبقى في **النهاية A_1، B_1 وأن 2 تمثل ناتج المباراة** وتمثل كذلك ربح المتنافس A وخسارة المتنافس B وهي تمثل نقطة الاستقرار أي هنالك ستراتيجية وحيدة لكل من المتنافس A و B وهي ما **تسمى بالستراتيجية البحتة.**

II –2. 1. أسلوب أدنى الأقصى – أقصى الأدنى:

في هذا النوع من المباراة يكون كسب الأول بمقدار خسارة الثاني ويمكن أن يلعب كل لاعب بأكثر من استراتيجية وتسمى الاستراتيجية في هذه الحالة استراتيجية التوازن أو الاستقرار.

ويمكن تلخيص خطوات تحديد نقطة الإستقرار كالآتي[1]:

1. تعين أقل قيمة من كل صف، ثم نضعها في عمود (Min) ثم نختار من هذا العمود أكبر قيمة أي (Max)؛
2. تعين أكبر قيمة في كل عمود، ثم نضعها في صف (Max) ثم نختار من هذا الصف أصغر قيمة أي (Min)؛
3. في حالة تساوي القيمتين، فإن القيمة الناتجة من تقاطع الصف مع العمود تمثل قيمة المباراة وهي نقطة التوازن أو الاستقرار، ويطلق على هذه الاستراتيجية بالاستراتيجية المثالية؛
4. أما في حالة عدم تساوي القيمتين، فهذا يعني عدم وجود نقطة الاستقرار وتقع قيمة المباراة عندها بين هاتين القيمتين؛
5. في حالة وجود أكثر من نقطة توازن أو الاستقرار، يعني هذا أن هناك أكثر من حل واحد، إذ يوجد حل لكل نقطة توزان.

مثال رقم 03: إذا كان لديك مصفوفة الدفع التالي:

الاستراتيجية	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
X_1	8	−2	9	−3
X_2	6	5	6	8
X_3	−2	4	−9	−1

المطلوب: أوجد قيمة المباراة ونقطة الاستقرار.

حل مثال رقم 03:

باستخدام معياري أدنى الأقصى وأقصى الأدنى فإن مصفوفة الدفع تصبح بالصيغة الآتية:

[1]. احمد عبد إسماعيل الصفار، ماجدة عبد اللطيف التميمي، مرجع سابق، ص ص: 534-535.

الاستراتيجية	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Min
X_1	8	−2	9	−3	−3
X_2	6	5	6	8	5
X_3	−2	4	−9	−1	−9
Max	8	5	9	8	

Max

Min

بما أن قيمة معيار اقصى الأدنى تساوي قيمة معيار ادنى الأقصى فهذا يعني أن كل متنافس سوف يختار ستراتيجية باحتمال 1 أي وجود ستراتيجية وحيدة لكل متنافس لأن اختيار اية ستراتيجية اخرى سوف تؤدي إلى نتائج سلبية للمتنافس وهذا يعني وجود نقطة استقرار والتي تمثل قيمة المباراة وهي 5 أي ان المتنافس X سوف يربح ما مقداره 5 عند اختياره للستراتيجية X_2 وأن المتنافس Y سوف يخسر ما مقداره 5 عند إختياره للستريتجية Y_2 .

إن معياري ادنى الأقصى واقصى الأدنى هي معياري امان في عملية اتخاذ القرار بالنسبة للمتنافسين حيث أنها تمثل تقليل اعظم خسارة متوقعة أو تعظيم اقل ربح متوقع.

II –3. الستراتيجيات المختلطة:

في بعض المباريات قد تكون هناك نقطة تلاقي وبالتالي لا تكون هناك استراتيجية مطلقة وتعتبر الاستراتيجية في هذه الحالة استراتيجية مختلطة، أي كل متنافس سوف يختار صف من صفوفه.[1]

مثال رقم 04: نفترض مصفوفة الدفع الآتية:

		B			
		1	**2**	**3**	**4**
A	**1**	5	−10	9	0
	2	6	7	8	1
	3	8	7	15	2
	4	3	4	−1	4

باستخدام معياري أدنى الأقصى وأقصى الأدنى فإن مصفوفة الدفع تصبح بالصيغة الآتية:

[1]. أبو القاسم مسعود الشيخ، مرجع سابق، ص 389.

		B				
		1	2	3	4	Min
A	1	5	−10	9	0	−10
	2	6	7	8	1	1
	3	8	7	15	2	2
	4	3	4	−1	4	−1
	Max	8	7	15	4	

نلاحظ عدم تساوي قيمة معياري ادن الأقصى واقصى الأدنى وهذا يعني عدم وجود نقطة استقرار وعدم وجود ستراتيجية بحتة للمتنافسين أي انعدام وجود اختيار ستراتيجية معينة يساوي 1 وهذا ما يدعى بالستراتيجيات المختلطة، وفي هذه الحالة فإن قيمة المباراة سوف تكون أكبر من قيمة معيار اقصى الأدنى واقل من قيمة معيار ادنى الأقصى أي أن:

4 > قيمة المباراة > 2

من الممكن حل المباراة في حالة الاستراتيجيات المختلطة باستخدام إحدى الطرق الآتية:

- الطريقة الجبرية؛
- الطريقة الرياضية؛
- الطريقة البيانية؛
- طريقة جبر المصفوفات.

II –3. 1. الطريقة الجبرية:

تستخدم هذه الطريقة عندما تكون المباراة بين لاعبين فقط وكل لاعب له ستراتيجيتين أي عندما تكون مصفوفة المباراة بحجم (2X2) فقط[1]. ولغرض توضيح هذه الطريقة نأخذ المثال الآتي:

مثال رقم 05: لوفرضنا أن مصفوفة العوائد هي :

		B	
		1	2
A	1	4	10
	2	5	2

نفرض أن اختبار اللاعب A للاستراتيجية الأولى هو باحتمال P_1 والاستراتيجية الثانية باحتمال P_2 حيث:

P_1 : هي نسبة عدد المرات التي سيلعب بها اللاعب A الاستراتيجية الأولى.

---

[1]. دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال، مرجع سابق، ص 331.

P_2 : هي نسبة عدد المرات التي سيلعب بها اللاعب A الاستراتيجية الثانية.

لدينا:

$$P_1+P_2=1$$

وأن:

$$P_2=(1-P_1)$$

نفرض أن اللاعب B سيلعب الاستراتيجية الأولى باحتمال Q_1 والاستراتيجية الثانية باحتمال Q_2 حيث:

Q_1 : هي نسبة عدد المرات التي سيلعب بها اللاعب B الاستراتيجية الأولى.

Q_2 : هي نسبة عدد المرات التي سيلعب بها اللاعب B الاستراتيجية الثانية.

لدينا:

$$Q_1+Q_2=1$$

وأن:

$$Q_2=(1-Q_1)$$

إذن:

			B	
			Q_1	$1-Q_1$
			1	**2**
A	P_1	**1**	4	10
	$1-P_1$	**2**	5	2

يتم إيجاد الاستراتيجيات للاعب A من الصيغ الرياضية الآتية:

$$E(A/B=1)=4P_1+5P_2$$
$$E(A/B=2)=10P_1+2P_2$$

$$E(A/B=1)=E(A/B=2)$$
$$4P_1+5P_2=10P_1+2P_2$$

بالتعويض عن P_2:

$$4P_1+5(1-P_1)=10P_1+2(1-P_1)$$
$$4P_1+5-5P_1=10P_1+2-2P_1$$

$$\mathbf{P_1=1/3}$$
$$\mathbf{P_2=2/3}$$

أي ان اللاعب A سيلعب الاستراتيجية الأولى 1/3 من الوقت المخصص للعب وأنه سيلعب الاستراتيجية الثانية 2/3 من الوقت.

يتم إيجاد الاستراتيجيات للاعب B من الصيغ الرياضية الآتية:

$$E(B/A=1)=4Q_1+10Q_2$$
$$E(B/A=2)=5Q_1+2Q_2$$

$$E(B/A=1)=E(B/A=2)$$

$$4Q_1+10Q_2=5Q_1+2Q_2$$

بالتعويض عن Q_2:

$$4Q_1+10(1-Q_1)=5Q_1+2(1-Q_1)$$
$$4Q_1+10-10Q_1)=5Q_1+2-2Q_1)$$

Q_1= 8/9
Q_2= 1/9

أي أن اللاعب B سيلعب الاستراتيجية الاولى بنسبة 9/ 8 من الوقت المخصص للعب وأنه سيلعب الاستراتيجية الثانية بنسبة 9/ 1 من الوقت.

أما قيمة المباراة V فيتم استخراجها بتعويض قيم P_1 أو Q_1 في إحدى الصيغ الأربعة وكالآتي:

$$\mathbf{V=4P_1+5P_2= 4(1/3) + 5(2/3) = 14/3}$$

II –3. 2. الطريقة الرياضية:

يمكن إيجاد الاستراتيجية المثالية لكل لاعب في مباراة (2X2) من خلال اتباع الخطوات الآتية[1]:

1. طرح الرقمين في العمود 1 وكتابة الناتج تحت العمود 2 بغض النظر عن الاشارة؛
2. طرح الرقمين في العمود 2 وكتابة الناتج تحت العمود 1 بعض النظر عن الإشارة؛
3. تكرار نفس الخطوات أعلاه بالنسبة للصفين 1 و 2؛
4. تقسيم كل عدد على مجموع العددين لنحصل على احتمالات الاستراتيجيات لكلا اللاعبين؛
5. ولغرض الحصول على قيمة المباراة، نطبق القانون الاتي:

$$V=\frac{r_{11}(r_{22})-r_{12}(r_{21})}{r_{22}+r_{11}-r_{12}-r_{21}}$$

مثال رقم 06: لدينا مصفوفة العوائد أو المكاسب كالآتي:

		B	
		H	**T**
A	**H**	2	−1
	T	−1	0

المطلوب: تحديد أفضل استراتيجية لكل لاعب فضلاً عن قيمة المباراة .

1. احمد عبد إسماعيل الصفار، ماجدة عبد اللطيف التميمي، مرجع سابق، ص 551.

حل المثال رقم 06:

بما أنه لا وجود لنقطة توازن، عليه ستكون الاستراتيجية المثالية مزيج من الاستراتيجيات، ومن خلال استخدام الخطوات السابقة نحصل على:

		B			
		H	T	الفرق	
A	H	2	-1	1	¼=0.25
	T	-1	0	3	¾=0.75
	الفرق	1	3		
		¼=0.25	¾=0.75		

على اللاعب A ولغرض الحصول على أرباح مثالية، استخدام الاستراتيجية H بمقدار 25% من الوقت و الاستراتيجية الثانية T بمقدار 75% من الوقت، بينما على اللاعب B استخدام الاستراتيجية H بمقدار 25% من الوقت والاستراتيجية T بمقدار 75% من الوقت.

ولغرض الحصول على قيمة المباراة، نطبق القانون الاتي:

$$V = \frac{r_{11}(r_{22}) - r_{12}(r_{21})}{r_{22} + r_{11} - r_{12} - r_{21}}$$

$$V = \frac{2(0) - (-1)(-1)}{0 + 2 - (-1) - (-1)}$$

$$= \frac{-1}{4}$$

$$A\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}, B\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}, V = -\frac{1}{4}$$

يتميز الأسلوب الرياضي بالسهولة، وهو أسهل من الأسلوب الجبري، ولكن لا يمكن تطبيقه على مباريات أكبر.

II –3. 3. طريقة جبر المصفوفات:

تشترط هذه الطريقة لحل المباراة أن تكون المباراة ذات مصفوفة مربعة ولتوضيح هذه الطريقة نفرض مصفوفة G(2X2) للمتنافسين A و B ، ممكن التوصل إلى الحل باستخدام الصيغ الأتية[1]:

استراتيجيات A المثلى:

$$= \frac{(1 \quad 1)AdjG}{(1 \quad 1)AdjG\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}$$

استراتيجيات B المثلى:

$$= \frac{(1 \quad 1)CofG}{(1 \quad 1)AdjG\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}$$

قيمة المباراة = (ستراتيجيات A المثلى)* G *(ستراتيجيات B المثلى)

Adj G: المصفوفة المرافقة (Adjoint Matrix)

Cof G: مصفوفة عوامل الضرب (Cofactor Matrix)

إستراتيجيات A المثلى تكون على شكل متجه صفي واستراتيجيات B المثلى تكون على شكل متجه عمودي.

مثال رقم 07: باستخدام طريقة جبر المصفوفات أوجد الحل الأمثل للمباراة الموضحة كالاتي:

استراتيجيات	B1	B2	B3
A1	2	3	4
A2	4	1	5

حل المثال رقم 07:

باستبعاد الستراتيجية B3 فإن مصفوفة الدفع تصبح مربعة وحسب الصيغة الآتية:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} B1 & B2 \end{array} \\ \begin{array}{c} A1 \\ A2 \end{array} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \end{array}$$

1. حامد سعد نور الشمرتي، علي خليل الزبيدي، مرجع سابق، ص ص: 428 – 429.

حل المصفوفة G ممكن التوصل إليه كالآتي:

$$CofG = Cof\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

إذ أن:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

وأن M_{ij} يمثل محدد مصفوفة الدفع بعد حذف الصف i و العمود j ولذلك فإن :

$$CofG = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

وبما أن مصفوفة عوامل الضرب تساوي مبدلة المصفوفة المرافقة فإن:

$$AdjG = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

استراتيجيات A المثلى:

$$= \frac{(1 \quad 1)\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}}{(1 \quad 1)\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \frac{(-3 \quad -1)}{-4}$$

$$X = (x_1 \quad x_2) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

استراتيجيات B المثلى:

$$= \frac{(1 \quad 1)\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}}{(1 \quad 1)\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \frac{(-2 \quad -2)}{-4}$$

$$Y = (y_1 \quad y_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

قيمة المباراة:

$$=\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{5}{2}$$

طريقة جبر المصفوفات تتصف بعدم قدرتها على التوصل إلى الحل الأمثل لبعض المباريات اذا نحصل في بعض الأحيان على قيم احتمالية سالبة لـ X أو Y وهذا غير ممكن، لذلك يتم اللجوء إلى البرمجة الخطية.

II –3. 4. الطريقة البيانية:

تستخدم هذه الطريقة فقط اذا كان لأحد اللاعبين ستراتيجيتين فقط أي عندما تكون مصفوفة المباراة من النوع (2XN) أو (NX2) وعند عدم وجود حالة الاستقرار وعدم إمكانية تقليص المباراة إلى درجة أدنى حتى نتمكن من حلها بالطريقة الجبرية أو الحسابية، لذلك نقوم بحلها بالطريقة البيانية[1].

مثال رقم 08:

نفرض أن لدينا المباراة الأتية (2X3) بين شركتين A و B الشركة A لديها استراتيجيتين أما الشركة B لديها ثلاثة استراتيجيات، اذا علمت أن مصفوفة العائد هي الآتي:

استراتيجيات	B1	B2	B3
A1	3	5	12
A2	10	7	4

المطلوب: أوجد قيمة مصفوفة المباراة بطريقة البيانية.

حل المثال رقم 08:

خطوة الحل الأولى هي إيجاد نقطة الاستقرار من خلال استخدام معياري أدنى الأقصى وأقصى الأدنى بحيث:

Min =7
Max =4

بما أن قيمة المعيارين غير متساوية فهذا يدل على أن المباراة لا تمتلك نقطة الاستقرار وبالتالي عدم وجود ستراتيجيات بحتة أي أن المباراة ذات ستراتيجيات مختلطة.

[1]. دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال، مرجع سابق، ص ص: 335 -336.

الخطوة الثانية للحل هي محاولة تصغير حجم المصفوفة لتسهيل عملية الحل خلال ايجاد الستراتيجيات المفضلة ويلاحظ أن الستراتيجيتان B2 و B3 هما مفضلتان بالنسبة للستراتيجية B لذلك يتم استبعاد الستراتيجية B1 الربح المتوقع للمتنافس A المناظر لستراتيجيات المنافس B هو :

بما أنه عدم وجود نقطة استقرار فإن المتنافس A يمتلك ستراتيجيتين A1 و A2 باحتمال X1 و X2=1−X1 على التوالي بحيث X1 محصورة ما بين 0 و 1 فإن :

استراتيجيات B	الربح المتوقع لـ A
B2	$a_{12}X_1 + a_{22}X_2 = (a_{12} - a_{22})X_1 + a_{22}$ $\Rightarrow -2X_1 + 7$
B3	$a_{13}X_1 + a_{23}X_2 = (a_{13} - a_{23})X_1 + a_{23}$ $\Rightarrow 8X_1 + 4$

قيمة المباراة سوف تكون وحيدة عندما يكون الربح المتوقع لـ A هو نفسه في حالة اختيار B لـ B2 أو B3 وهذا يتحقق عبر المعادلة الآتية:

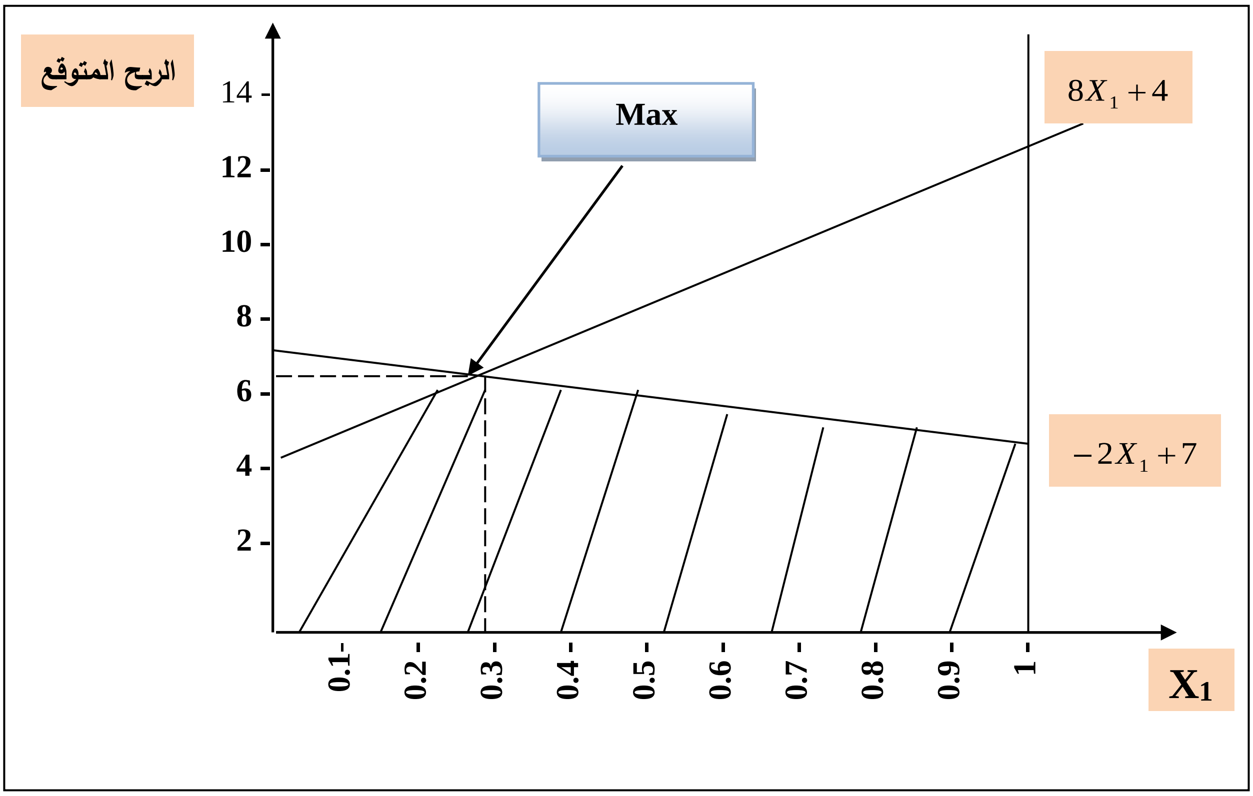
$$-2X_1 + 7 = 8X_1 + 4$$

من المعادلة أعلاه:

$$X_1 = \frac{3}{10} \Rightarrow X_2 = 1 - X_1 = \frac{7}{10}$$

$$\Rightarrow -2X_1 + 7 = 8X_1 + 4 = \frac{32}{5} = 6.4$$

وهو يمثل قيمة المباراة وهو أكبر من 4 واصغر من 7 الحل البياني موضح بالشكل التالي:



المحور الأفقي يمثل قيم X_1 الاحتمالية والتي يجب أن لا تتجاوز 1 والمحور العمودي يمثل الربح المتوقع للمتنافس A، في حالة اختيار المتنافس B للستراتيجية B2 فإن الربح المتوقع للمتنافس A هو $-2X_1+7$ والذي يتم تمثيله بمستقيم على النحو الآتي: إذا كان: $X_1=0$ فإن الربح المتوقع لـ A هو 7 أما $X_1=1$ فإن الربح المتوقع لـ A هو 5.

أما إذا اختيار المتنافس B للستراتيجية B3 فإن الربح المتوقع للمتنافس A هو $8X_1+4$ والذي يتم تمثيله بمستقيم على النحو الآتي: إذا كان: $X_1=0$ فإن الربح المتوقع لـ A هو 4 أما $X_1=1$ فإن الربح المتوقع لـ A هو 12.

وعلى هذا الأساس يتم تحديد منطقة الحلول الممكنة بحيث أن نقطة تقاطع المستقيمين تمثل نقطة الحل الأمثل أي قيمة المباراة لأنها أعلى نقطة في منطقة الحلول الممكنة وهذا يعني أن اختبار المتنافس A للستراتيجية A1 باحتمال 30% وللستراتيجية A2 باحتمال 70% سوف يؤدي إلى حصوله على ربح مقداره (6.4) في كل مباراة.

وبنفس الأسلوب يتم التوصل إلى الستراتيجيات المختلطة المثلى للمتنافس B بحيث أن احتمالات اختيار المتنافس B للستراتيجيات ,B2,B3 هي Y_2,Y_3 على التوالي: $Y_3 = 1-Y_2$.

ولذلك فإن الخسارة المتوقعة للمتنافس B المناظرة لستراتيجيات المتنافس A هي :

استراتيجيات A	الخسارة المتوقع لـ B
A1	$-7Y_2+12$
A2	$3Y_2+4$

ومن خلال المعادلة:

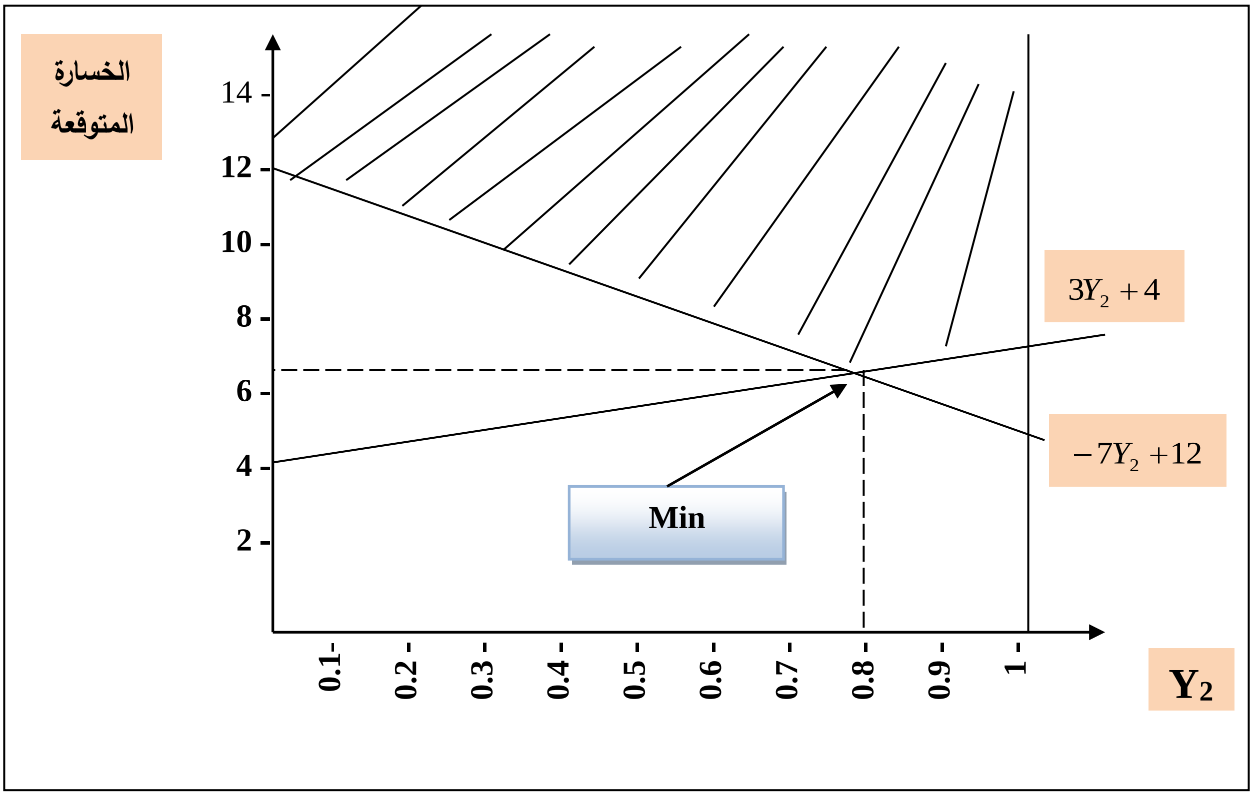
$$-7Y_2+12=3Y_2+4$$

نجد:

$$Y_2=\frac{4}{5}\Rightarrow Y_3=1-Y_2=\frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow -7Y_2+12=3Y_2+4=\frac{32}{5}=6.4$$

وهذا يعني أن اختيار المتنافس B للستراتيجية B2 باحتمال 80% وللستراتيجية B2 باحتمال 20% سوف يؤدي إلى تقليل خسائره بمقدار (6.4) في كل مباراة. كما هو موضح بيانياً بالشكل التالي:



في حالة وجود أكثر من مستقيمين يتم اختيار المستقيمين الذين يمثلان أدنى نقطة في منطقة الحل الممكن.

III – نظرية الألعاب والبرمجة الخطية:

توجد علاقة قوية ما بين نظرية الألعاب والبرمجة الخطية منذ صياغة مسألة: شخصين ذات المجموع الصفري في صورة مسألة برمجة خطية، وأن أي مسألة برمجة خطية يمكن اعتبارها كمسألة مباريات، سوف نوضح كيف يتم تحويل مسألة الألعاب إلى مسألة برمجة خطية كالآتي[1]:

يمكن افتراض مصفوفة الدفع لأي مباراة كما يلي:

		B					
		Y1	Y2	Y3	Xj	....	Yn
	X1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{1j}		a_{1n}
	X2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{2j}		a_{2n}
A	X3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{3j}		a_{3n}
	Xi	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{ij}		a_{in}
	:						
	:						
	Xm	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	a_{mj}		a_{mn}

فإذا تم حل اللعبة بالنسبة للاعب A الذي يملك m من السياسات، يمكن صياغة نموذج البرمجة الخطية للاعب A كما يلي:

$$Max\left\{\min\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_i, \sum_{i=1}^{m} a_{i2}x_i, \ldots\ldots\sum_{i=1}^{m} a_{in}x_i\right)\right\}$$

تحت الشروط التالية:

$$x_1 + x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_m = 1$$
$$x_i \geq 0; i = 1,2,\ldots\ldots\ldots m$$

هذه المسألة يمكن وضعها وإعادة صياغتها في صورة مسألة برمجة خطية وذلك على النحو الآتي:

$$V = \min\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_i, \sum_{i=1}^{m} a_{i2}, \ldots\ldots\sum_{i=1}^{m} a_{in}x\right)$$

[1]. أبو القاسم مسعود الشيخ، مرجع سابق، ص ص: 397 – 400.

فتصبح المسألة:

$$Max(Z)=V$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{21}x_2+...............+a_{m1}x_m \geq V \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+...............+a_{mn}x_m \geq V \\ x_1+x_2+...............+x_m=1 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0; i=1,2,.........m$$

وحتى يتم اتباع نموذج البرمجة الخطية، فإنه يجب التخلص من قيمة V وذلك عن طريق قسمة كل أطرف المعادلات على V وكما يلي:

$$\begin{cases} a_{11}\frac{x_1}{V}+a_{21}\frac{x_2}{V}+...............+a_{m1}\frac{x_m}{V} \geq 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{1n}\frac{x_1}{V}+a_{2n}\frac{x_2}{V}+...............+a_{mn}\frac{x_m}{V} \geq 1 \\ \frac{x_1}{V}+\frac{x_2}{V}+...............+\frac{x_m}{V}=\frac{1}{V} \end{cases}$$

ولتسهيل العمل في نموذج البرمجة الخطية أعلاه نفرض كما يلي:

$$X_i=\frac{x_i}{V}$$

وعند التعويض يكون نموذج البرمجة الخطية وبالنسبة للاعب A كما يلي:

$$MaxV=Min\frac{1}{V}=Min(X_1+X_2+X_3+.....+X_m)$$

أي:

$$Min(Z) = X_1 + X_2 + X_3 + \ldots\ldots + X_m$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{21}X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{m1}X_m \geq 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{1n}X_1 + a_{2n}X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{mn}X_m \geq 1 \end{cases}$$

$$X_i \geq 0; i = 1,2,\ldots\ldots\ldots\ldots m$$

فإذا تم حل اللعبة بالنسبة للاعب B الذي يملك n من السياسات، يمكن صياغة نموذج البرمجة الخطية للاعب B كما يلي:

$$Min\left\{Max\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}y_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2j}y_j, \ldots\ldots\ldots \sum_{j=1}^{n} a_{mj}y_j\right)\right\}$$

تحت الشروط التالية:

$$y_1 + y_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + y_n = 1$$

$$y_j \geq 0; j = 1,2,\ldots\ldots\ldots\ldots n$$

هذه المسألة يمكن وضعها وإعادة صياغتها في صورة مسألة برمجة خطية وذلك على النحو الآتي:

$$Min(Z) = V$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{1n}y_n \leq V \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_{mn}y_n \leq V \\ y_1 + y_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + y_n = 1 \end{cases}$$

$$y_j \geq 0; j = 1,2,\ldots\ldots\ldots\ldots n$$

نفس الملاحظة السابقة يجب التخلص من قيمة V وذلك عن طريق قسمة كل أطرف المعادلات على V وكما يلي:

$$\begin{cases} a_{11}\dfrac{y_1}{v} + a_{12}\dfrac{y_2}{v} + \dots\dots\dots\dots\dots + a_{1n}\dfrac{y_n}{v} \le 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{m1}\dfrac{y_1}{V} + a_{m2}\dfrac{y_2}{V} + \dots\dots\dots\dots\dots + a_{mn}\dfrac{y_n}{V} \le 1 \\ \dfrac{y_1}{V} + \dfrac{y_2}{V} + \dots\dots\dots\dots\dots + \dfrac{y_n}{V} = \dfrac{1}{V} \end{cases}$$

وعلى افتراض:

$$Y_j = \frac{y_j}{V}; W = \frac{1}{V}$$

وعند التعويض يكون نموذج البرمجة الخطية وبالنسبة للاعب B كما يلي:

$$Max(W) = Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots\dots + Y_n$$

$$\begin{cases} a_{11}Y_1 + a_{12}Y_2 + \dots\dots\dots\dots\dots + a_{1n}Y_n \le 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{m1}Y_1 + a_{m2}Y_2 + \dots\dots\dots\dots\dots + a_{mn}Y_n \le 1 \end{cases}$$

$$Y_j \ge 0; j = 1,2,3\dots\dots n$$

نلاحظ أن اللاعب B يعتبر ثنائي للاعب A وهذا يعني أن الحصول على الحل الأمثل للاعب A يعطى أوتوماتيكيا حل أمثل للاعب B.

مثال رقم 09: أوجد قيمة المباراة والاستراتيجيات المثلى لمصفوفة الدفع الأتية بواسطة البرمجة الخطية:

استراتيجيات	B1	B2	B3
A1	2	3	2
A2	4	1	5

حل المثال رقم 09:

نموذج البرمجة الخطية بالنسبة للاعب A :

$$Min(z) = X_1 + X_2$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} 2X_1 + 4X_2 \geq 1 \\ 3X_1 + X_2 \geq 1 \\ 2X_1 + 5X_2 \geq 1 \end{cases}$$
$$X_1; X_2 \geq 0$$

أما نموذج البرمجة الخطية بالنسبة للاعب B فيكون:

$$Max(W) = Y_1 + Y_2 + Y_3$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} 2Y_1 + 3Y_2 + 2Y_3 \leq 1 \\ 4Y_1 + Y_2 + 5Y_3 \leq 1 \end{cases}$$
$$Y_1; Y_2; Y_3 \geq 0$$

ولسهولة نستخدم طريقة السمبليكس لحل نموذج البرمجة الخطية للمتنافس B وباعتباره النموذج المقابل لنموذج البرمجة الخطية للمتنافس A فإنه بالإمكان استخراج الحل الأمثل للمتنافس A من جدول الحل الأمثل للمتنافس B .

إيجاد الصيغة النموذجية:

$$2Y_1 + 3Y_2 + 2Y_3 + S_1 = 1$$
$$4Y_1 + Y_2 + 5Y_3 + S_2 = 1$$
$$Max(W) = Y_1 + Y_2 + Y_3 + 0S_1 + 0S_2$$

T_1	C_J	1	1	1	0	0		
CB	**YB**	Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	**B**	$\frac{B}{Y_1}$
0	S_1	2	3	2	1	0	1	0.5
0	S_2	4	1	5	0	1	1	0.25
W_J		0	0	0	0	0		
$\Delta W = C_J - W_J$		**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**W=0**	

المتغيرة الداخلة للأساس هي: (Y_1) والخارجة من الأساس هي: (S_2)

T_2	C_J	1	1	1	0	0		
CB	YB	Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	B	$\frac{B}{Y_2}$
0	S_1	0	5/2	−1/2	1	−1/2	1/2	0.2
1	Y_1	1	1/4	5/4	0	1/4	1/4	1
W_J		0	1/4	5/4	0	1/4		
$\Delta W = C_J - W_J$		**1**	**3/4**	**−1/4**	**0**	**−1/4**	**W=1/4**	

المتغيرة الداخلة للأساس هي: (Y_2) والخارجة من الأساس هي: (S_1)

T_3	C_J	1	1	1	0	0	
CB	YB	Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	B
1	Y_2	0	1	−1/5	2/5	−1/5	1/5
1	Y_1	1	0	13/10	−1/10	3/10	1/5
W_J		0	0	11/10	3/10	1/10	
$\Delta W = C_J - W_J$		**0**	**0**	**−1/10**	**−3/10**	**−1/10**	**W=2/5**

نلاحظ من خلال الجدول الأخير أن: $\Delta Z \le 0$ ومنه الجدول الثالث هو جدول الحل أمثل، والنتائج بالنسبة للاعب B هي كالآتي:

$$Y_1 = \frac{1}{5}; Y_2 = \frac{1}{5}; Y_3 = 0; S_1 = 0; S_2 = 0; W = \frac{2}{5}$$

أما بالنسبة للاعب A :

$$X_1 = \frac{3}{10}; X_2 = \frac{1}{10}; Z = \frac{2}{5}$$

وللإيجاد القيم الحقيقية للقيم الاحتمالية وقيم اللعبة يكون كالآتي:

$$V = \frac{1}{Z} = \frac{5}{2}$$

$$X_i = \frac{x_i}{v}; x_i = X_i V$$

$$x_1 = \frac{3}{10} \times \frac{5}{2} = \frac{3}{4}$$
$$x_2 = \frac{1}{10} \times \frac{5}{2} = \frac{1}{4}$$

أما قيمة اللعبة بالنسبة للطرف B :

$$V = \frac{1}{W} = \frac{5}{2}$$
$$Y_j = \frac{y_j}{v} ; y_j = Y_j V$$
$$Y_1 = \frac{1}{5} \times \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$$
$$Y_2 = \frac{1}{5} \times \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$$
$$Y_3 = 0$$

IV- مباريات ذات المجموع غير الصفري:

عندما تلعب المباراة بواسطة متنافسين أو أكثر ومجموع أرباح وخسائر المتنافسين في المباراة لا تساوي صفر فإن المباراة يطلق عليها مباراة ذات المجموع غير الصفري، أسلوب حل المباراة ذات المجموع غير الصفري أكثر تعقيداً من أساليب حل المباراة ذات المجموع الصفري بحيث ان المتنافسين ممكن ان يتفاوضوا أو يتساوموا فيما بينهم من أجل تعظيم الربح أو تقليل الخسارة[1].

وهنا لا يكون من الضروري أن ما سيخسره الطرف الأول يربحه الطرف الثاني، إذا يمكن أن يخسر الطرفان معاً. لهذا تم التركيز في هذا الفصل على المباراة ذات المجموع الصفري.

[1]. حامد سعد نور الشمرتي، علي خليل الزبيدي، مرجع سابق، ص 447 .

V- تمارين محلولة:

التمرين الأول: في ظل المصفوفة الآتية:

الاستراتيجية	B_1	B_2
A_1	−2	4
A_2	−1	5
A_3	3	4

المطلوب: أوجد قيمة المباراة ونقطة الاستقرار.

حل التمرين الأول: باستخدام معياري أدنى الأقصى وأقصى الأدنى فإن مصفوفة تصبح بالصيغة الآتية:

الاستراتيجية	B_1	B_2	Min
A_1	−2	4	−2
A_2	−1	5	−1
A_3	3	4	3
Max	3	5	

بما أن قيمة معيار اقصى الأدنى تساوي قيمة معيار ادنى الأقصى فهذا يعني أن كل متنافس سوف يختار ستراتيجية باحتمال 1 أي وجود ستراتيجية وحيدة لكل متنافس لأن اختيار اية ستراتيجية اخرى سوف تؤدي إلى نتائج سلبية للمتنافس وهذا يعني وجود نقطة استقرار والتي تمثل قيمة المباراة وهي 3 أي ان المتنافس A سوف يربح ما مقداره 3 عند اختياره للستراتيجية A_3 وأن المتنافس B سوف يخسر ما مقداره 3 عند إختياره للسترتيجية B_1.

التمرين الثاني: نفترض مصفوفة الدفع الآتية:

		B		
		1	2	3
A	1	15	17	8
	2	18	12	14
	3	22	7	11

المطلوب: استخدام معياري أدنى الأقصى وأقصى الأدنى للاعبين A و B.

حل التمرين الثاني : فإن مصفوفة الدفع تصبح بالصيغة الآتية:

		B			
		1	2	3	Min
A	1	15	17	8	8
	2	18	12	14	12
	3	22	7	11	7
	Max	22	17	14	

نلاحظ عدم تساوي قيمة معياري ادن الأقصى واقصى الأدنى وهذا يعني عدم وجود نقطة استقرار وعدم وجود ستراتيجية بحتة للمتنافسين أي انعدام وجود اختيار ستراتيجية معينة يساوي 1 وهذا ما يدعى بالستراتيجيات المختلطة، وفي هذه الحالة فإن قيمة المباراة سوف تكون أكبر من قيمة معيار اقصى الأدنى واقل من قيمة معيار ادنى الأقصى أي أن:

14 < قيمة المباراة < 12

التمرين الثالث: في ظل المصفوفة الأتية، أمام اللاعبين A و B ثلاث استراتيجيات والمطلوب إختزال المصفوفة إلى أقل حجم ممكن:

الاستراتيجية	B_1	B_2	B_3
A_1	1	−1	8
A_2	3	6	7
A_3	4	−2	9

حل التمرين الثالث:

لا تحتوي هذه المصفوفة على نقطة توازن أو الاستقرار بالنسبة للاعب B، فهو لا يختار الاستراتيجية الثالثة لأنها تتضمن أعظم خسارة وأعلى ربح لـ A .

ويمكن أن يحسن من وضعه في حالة اختياره الأعمدة 1 أو 2 وعليه يمكن إهمال العمود الثالث، ويطلق على الاستراتيجية الثالثة المسيطر عليها أو المستبعدة.

إذن قاعدة السيطرة للأعمدة ، هي كل قيمة في الأعمدة لابد أن تكون أقل من أو مساوية إلى قيم العمود المسيطر عليه، وبعد حذف الاستراتيجية الثالثة نحصل على المصفوفة الآتية:

الاستراتيجية	B_1	B_2
A_1	1	−1
A_2	3	6
A_3	4	−2

من الملاحظ أن اللاعب A سوف لا يقوم باختيار الاستراتيجية A_1 ، إذ تتضمن مكاسب أقل مقارنة بالاستراتيجية A_2 ، عليه فإن الصف 1 هو المسيطر عليه المستبعد من قبل الصف 2 ولابد من إهماله، إذ أن قاعدة السيطرة للصفوف هي كون كل قيمة في صف المسيطر أكبر أو مساوي إلى قيمة الصف المسيطر عليه، وبعد حذف الصف الأول، ننتج المصفوفة الآتية والتي من الممكن حلها بسهولة.

الاستراتيجية	B_1	B_2
A_2	3	6
A_3	4	−2

التمرين الرابع: حل المصفوفة الآتية بالطريقة الجبرية والرياضية، ثم احسب قيمة المباراة:

الاستراتيجية	B_1	B_2
A_1	10	4
A_2	6	8

حل التمرين الرابع:

1. الطريقة الجبرية:

نفرض أن اختيار اللاعب A للاستراتيجية الأولى هو باحتمال P_1 والاستراتيجية الثانية باحتمال P_2 حيث:

P_1 : هي نسبة عدد المرات التي سيلعب بها اللاعب A الاسترتيجية الأولى.

P_2 : هي نسبة عدد المرات التي سيلعب بها اللاعب A الاسترتيجية الثانية.

لدينا: $P_1+P_2=1$

وأن: $P_2=(1-P_1)$

نفرض أن اللاعب B سيلعب الاستراتيجية الأولى باحتمال Q_1 والاستراتيجية الثانية باحتمال Q_2 حيث:

Q_1 : هي نسبة عدد المرات التي سيلعب بها اللاعب B الاسترتيجية الأولى.

Q_2 : هي نسبة عدد المرات التي سيلعب بها اللاعب B الاسترتيجية الثانية.

لدينا: $Q_1+Q_2=1$

وأن: $Q_2=(1-Q_1)$ إذن:

			B	
			Q_1	$1-Q_1$
			B_1	B_2
A	P_1	A_1	10	4
	$1-P_1$	A_2	6	8

يتم إيجاد الاستراتيجيات للاعب A من الصيغ الرياضية الآتية:

$E(A/B=1)= 10P_1+6P_2$
$E(A/B=2)= 4P_1+8P_2$

$$E(A/B=1)= E(A/B=2)$$
$$10P_1+6P_2 =4P_1+8P_2$$

بالتعويض عن P_2:

$$10P_1+6(1-P_1) =4P_1+8(1-P_1)$$
$$10P_1+6-6P_1=4P_1+8-8P_1$$

$\mathbf{P_1= 1/4}$
$\mathbf{P_2= 3/4}$

أي ان اللاعب A سيلعب الاستراتيجية الأولى 1/4 من الوقت المخصص للعب وأنه سيلعب الاستراتيجية الثانية 3/4 من الوقت.

يتم إيجاد الاستراتيجيات للاعب B من الصيغ الرياضية الآتية:

$E(B/A=1)= 10Q_1+4Q_2$
$E(B/A=2)= 6Q_1+8Q_2$

$$E(B/A=1)= E(B/A=2)$$
$$10Q_1+4Q_2=6Q_1+8Q_2$$

بالتعويض عن Q_2:

$$10Q_1+4(1-Q_1)=6Q_1+8(1-Q_1)$$
$$10Q_1+4-4Q_1)=6Q_1+8-8Q_1)$$

$\mathbf{Q_1= 1/2}$
$\mathbf{Q_2= 1/2}$

أي أن اللاعب B سيلعب الاستراتيجية الاولى بنسبة 1/2 من الوقت المخصص للعب وأنه سيلعب الاستراتيجية الثانية بنسبة 1/2 من الوقت.

أما قيمة المباراة V فيتم استخراجها بتعويض قيم P_1 أو Q_1 في إحدى الصيغ الأربعة وكالآتي:

$$\mathbf{V=10P_1+6P_2= 10(1/4) + 6(3/4) = 7}$$

2. الطريقة الرياضية:

تكون الاستراتيجية المثالية مزيج من الاستراتيجيات، ومن خلال استخدام الخطوات الطريقة نحصل على:

		B			
		B_1	**B_2**	**الفرق**	
A	**A_1**	10	4	2	¼=0.25
	A_2	6	8	6	¾=0.75
	الفرق	4	4		
		1/2=0.5	1/2=0.5		

على اللاعب A ولغرض الحصول على أرباح مثالية، استخدام الاستراتيجية A_1 بمقدار 25% من الوقت و الاستراتيجية الثانية A_2 بمقدار 75% من الوقت، بينما على اللاعب B استخدام الاستراتيجية B_1 بمقدار 25% من الوقت والاستراتيجية B_2 بمقدار 75% من الوقت.

ولغرض الحصول على قيمة المباراة، نطبق القانون الاتي:

$$V = \frac{r_{11}(r_{22}) - r_{12}(r_{21})}{r_{22} + r_{11} - r_{12} - r_{21}}$$

$$V = \frac{10(8) - (4)(6)}{8 + 10 - (4) - (6)}$$

$$= \frac{56}{8} = 7$$

$$A\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}, B\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, V = 7$$

التمرين الخامس: باستخدام طريقة جبر المصفوفات أوجد قيمة المباراة الآتية:

استراتيجيات	B1	B2	B3
A1	−2	5	−4
A2	1	−4	3
A3	3	2	−1

حل التمرين الخامس:

$$G = \begin{vmatrix} -2 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

حل المصفوفة G ممكن التوصل إليه كالآتي:

$$CofG = \begin{pmatrix} -2 & 10 & 14 \\ -3 & 14 & 19 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

وبما أن مصفوفة عوامل الضرب تساوي مبدلة المصفوفة المرافقة فإن:

$$AdjG = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 10 & 14 & 2 \\ 14 & 19 & 3 \end{pmatrix}$$

استراتيجيات A المثلى:

$$X = (x_1 \quad x_2 \quad x_3) = \frac{(1 \quad 1 \quad 1)\begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 10 & 14 & 2 \\ 14 & 19 & 3 \end{pmatrix}}{(1 \quad 1 \quad 1)\begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 10 & 14 & 2 \\ 14 & 19 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \frac{(22 \quad 30 \quad 4)}{56}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{11}{28} & \frac{15}{28} & \frac{2}{28} \end{pmatrix}$$

استراتيجيات B المثلى:

$$Y = (y_1 \quad y_2 \quad y_3) = \frac{(1 \quad 1 \quad 1)\begin{pmatrix} -2 & 10 & 14 \\ -3 & 14 & 19 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}{(1 \quad 1 \quad 1)\begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 10 & 14 & 2 \\ 14 & 19 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \frac{(-6 \quad 26 \quad 36)}{56}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-3}{28} & \frac{13}{28} & \frac{18}{28} \end{pmatrix}$$

يلاحظ أن قيمة $y_1 = -3/28$ وهذا غير ممكن لأن قيم الاحتمال تكون محصورة بين الواحد والصفر وهذه هي احدى عيوب هذه الطريقة والتي يتم التغلب عليها باستخدام البرمجة الخطية.

التمرين السادس: أوجد قيمة مصفوفة المباراة بطريقة البيانية.

استراتيجيات	B1	B2	B3
A1	2	3	4
A2	4	1	5

حل التمرين السادس:

خطوة الحل الأولى هي إيجاد نقطة الاستقرار من خلال استخدام معياري أدنى الأقصى وأقصى الأدنى بحيث:

Min = 3
Max = 2

بما أن قيمة المعيارين غير متساوية فهذا يدل على أن المباراة لا تمتلك نقطة الاستقرار وبالتالي عدم وجود ستراتيجيات بحتة أي أن المباراة ذات ستراتيجيات مختلطة.

الخطوة الثانية للحل هي محاولة تصغير حجم المصفوفة لتسهيل عملية الحل خلال ايجاد الستراتيجيات المفضلة ويلاحظ أن الستراتيجيتان B1 و B2 هما مفضلتان بالنسبة للستراتيجية B3 لذلك يتم استبعاد الستراتيجية B3 الربح المتوقع للمتنافس A المناظر لستراتيجيات المنافس B هو:

بما أنه عدم وجود نقطة استقرار فإن المتنافس A يمتلك ستراتيجيتين A1 و A2 باحتمال X1 و X2=1−X1 على التوالي بحيث X1 محصورة ما بين 0 و 1 فإن:

استراتيجيات B	الربح المتوقع لـ A
B1	$a_{11}X_1 + a_{21}X_2 = (a_{11} - a_{21})X_1 + a_{21}$ $\Rightarrow -2X_1 + 4$
B2	$a_{12}X_1 + a_{22}X_2 = (a_{12} - a_{22})X_1 + a_{22}$ $\Rightarrow 2X_1 + 1$

قيمة المباراة سوف تكون وحيدة عندما يكون الربح المتوقع لـ A هو نفسه في حالة اختيار B لـ B1 أو B2 وهذا يتحقق عبر المعادلة الآتية:

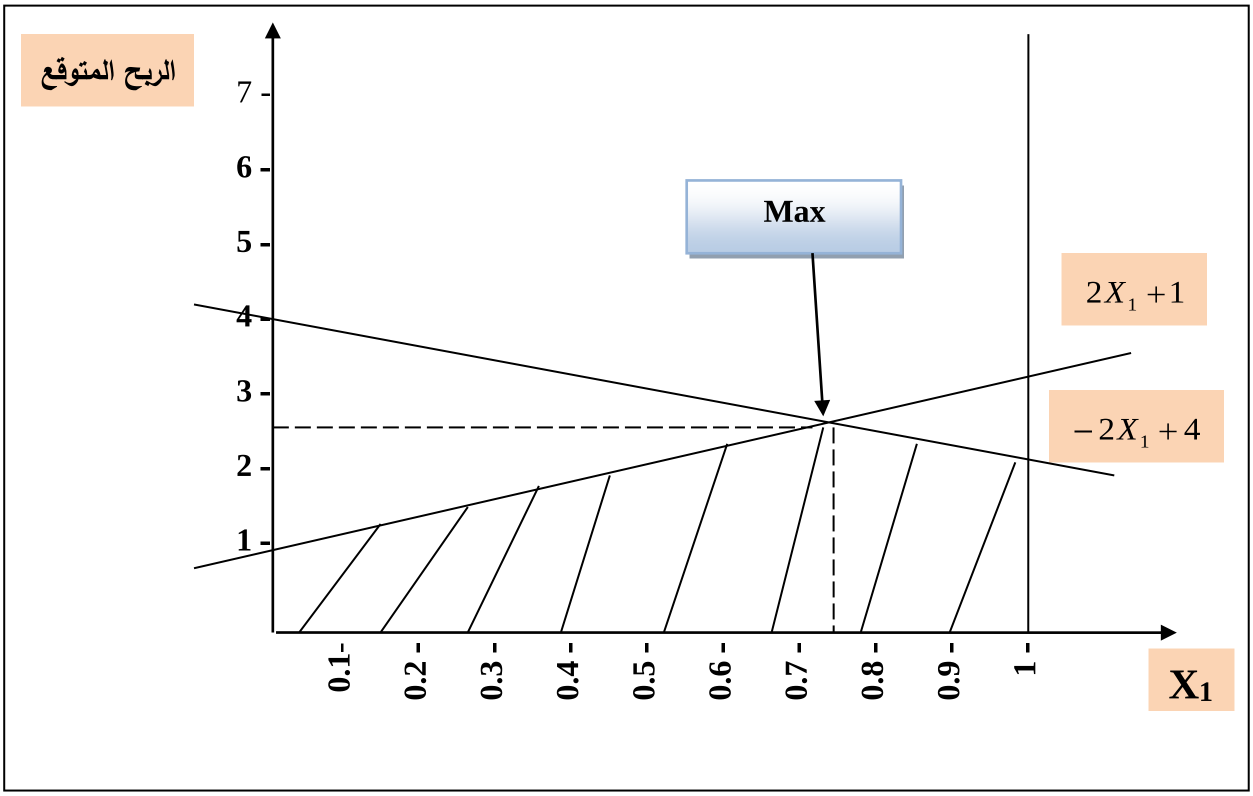
$$-2X_1 + 4 = 2X_1 + 1$$

من المعادلة أعلاه:

$$X_1 = \frac{3}{4} \Rightarrow X_2 = 1 - X_1 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow -2X_1 + 4 = 2X_1 + 1 = \frac{5}{2} = 2.5$$

وهو يمثل قيمة المباراة وهو أكبر من 2 واصغر من 3 الحل البياني موضح بالشكل التالي:



المحور الأفقي يمثل قيم X_1 الاحتمالية والتي يجب أن لا تتجاوز 1 والمحور العمودي يمثل الربح المتوقع للمتنافس A، في حالة اختيار المتنافس B للستراتيجية B1 فإن الربح المتوقع للمتنافس A هو $-2X_1+4$ والذي يتم تمثيله بمستقيم على النحو الآتي: إذا كان: $X_1=0$ فإن الربح المتوقع لـ A هو 4 أما $X_1=1$ فإن الربح المتوقع لـ A هو 2.

أما إذا اختيار المتنافس B للستراتيجية B2 فإن الربح المتوقع للمتنافس A هو $2X_1+1$ والذي يتم تمثيله بمستقيم على النحو الآتي: إذا كان: $X_1=0$ فإن الربح المتوقع لـ A هو 1 أما $X_1=1$ فإن الربح المتوقع لـ A هو 3.

وعلى هذا الأساس يتم تحديد منطقة الحلول الممكنة بحيث أن نقطة تقاطع المستقيمين تمثل نقطة الحل الأمثل أي قيمة المباراة لأنها أعلى نقطة في منطقة الحلول الممكنة وهذا يعني أن اختبار المتنافس A للستراتيجية A1 باحتمال 75% وللستراتيجية A2 باحتمال 25% سوف يؤدي إلى حصوله على ربح مقداره (2.5) في كل مباراة.

وبنفس الأسلوب يتم التوصل إلى الستراتيجيات المختلطة المثلى للمتنافس B بحيث أن احتمالات اختيار المتنافس B للستراتيجيات B1, B2,B3, هي Y_1 , Y_2 ,Y_3 على التوالي: $Y_2 = 1-Y_1$. $Y_3=0$ ولذلك فإن الخسارة المتوقعة للمتنافس B المناظرة لستراتيجيات المتنافس A هي :

استراتيجيات A	**الخسارة المتوقع لـ B**
A1	$-Y_1+3$
A2	$3Y_1+1$

ومن خلال المعادلة:

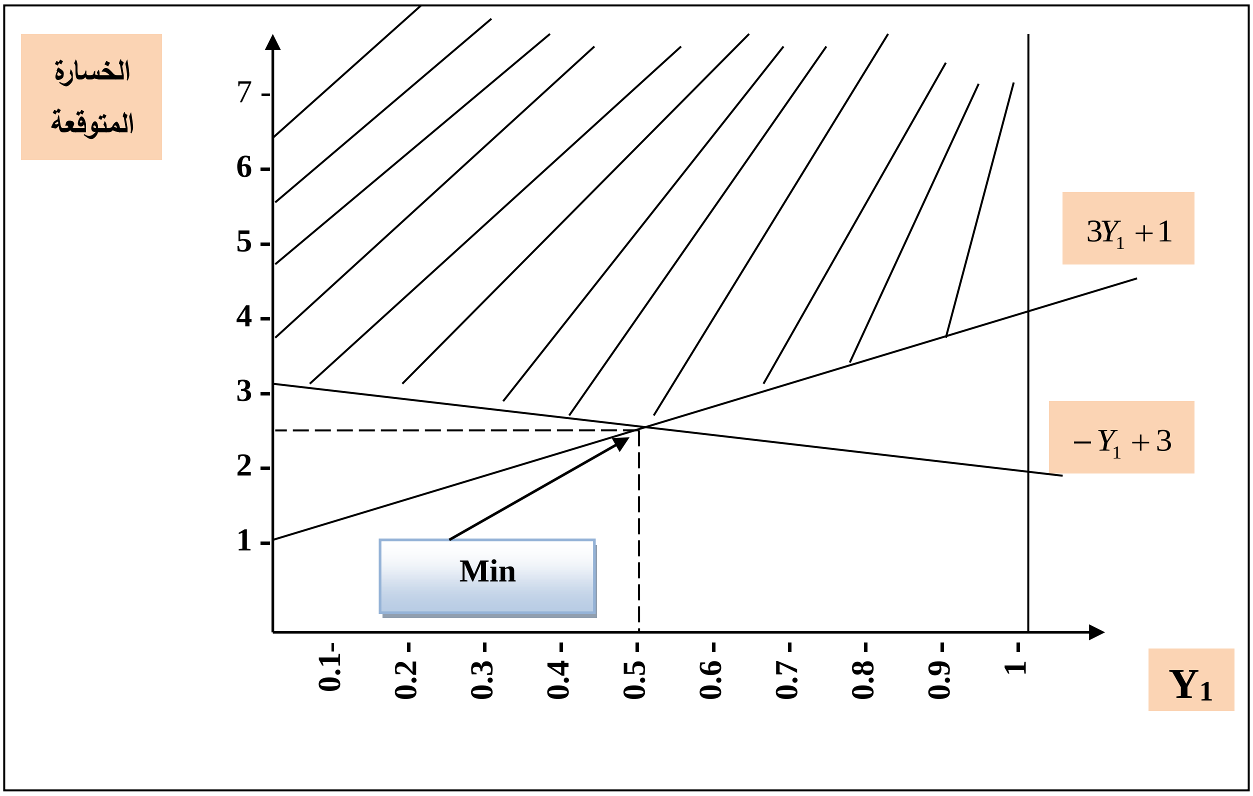
$$-Y_1+3=3Y_1+1$$

نجد:

$$Y_1=\frac{1}{2}\Rightarrow Y_2=1-Y_1=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -Y_1+3=3Y_1+1=\frac{5}{2}=2.5$$

وهذا يعني أن اختيار المتنافس B للستراتيجية B1 باحتمال 50% وللستراتيجية B2 باحتمال 50% سوف يؤدي إلى تقليل خسائره بمقدار (2.5) في كل مباراة. كما هو موضح بيانياً بالشكل التالي:



في حالة وجود أكثر من مستقيمين يتم اختيار المستقيمين الذين يمثلان أدنى نقطة في منطقة الحل الممكن.

التمرين السابع: أوجد قيمة المباراة والاستراتيجيات المثلى لمصفوفة الدفع الأتية بواسطة البرمجة الخطية:

استراتيجيات	B1	B2	B3
A1	-1	1	1
A2	2	-2	2
A3	3	3	-3

حل التمرين السابع:

نموذج البرمجة الخطية بالنسبة للاعب A :

$$Min(z) = X_1 + X_2 + X_3$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} -X_1 + 2X_2 + 3X_3 \geq 1 \\ X_1 - 2X_2 + 3X_3 \geq 1 \\ X_1 + 2X_2 - 3X_3 \geq 1 \end{cases}$$

$$X_1; X_2; X_3 \geq 0$$

أما نموذج البرمجة الخطية بالنسبة للاعب B فيكون:

$$Max(W) = Y_1 + Y_2 + Y_3$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} -Y_1 + Y_2 + Y_3 \leq 1 \\ 2Y_1 - 2Y_2 + 2Y_3 \leq 1 \\ 3Y_1 + 3Y_2 - 3Y_3 \leq 1 \end{cases}$$

$$Y_1; Y_2; Y_3 \geq 0$$

ولسهولة نستخدم طريقة السمبليكس لحل نموذج البرمجة الخطية للمتنافس B وباعتباره النموذج المقابل لنموذج البرمجة الخطية للمتنافس A فإنه بالإمكان استخراج الحل الأمثل للمتنافس A من جدول الحل الأمثل للمتنافس B .

إيجاد الصيغة النموذجية:

$$-Y_1 + Y_2 + Y_3 + S_1 = 1$$

$$2Y_1 - 2Y_2 + 2Y_3 + S_2 = 1$$

$$3Y_1 + 3Y_2 - 3Y_3 + S_3 = 1$$

$$Max(W) = Y_1 + Y_2 + Y_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

T_1	C_J	1	1	1	0	0	0	B	$\frac{B}{Y_1}$
CB	**YB**	Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	S_3		
0	S_1	−1	1	2	1	0	0	1	−
0	S_2	2	−2	5	0	1	0	1	½
0	S_3	3	3	−3	0	0	1	1	1/3
W_J		0	0	0	0	0	0		
$\Delta W = C_J - W_J$		1	1	1	0	0	0	**W=0**	

المتغيرة الداخلة للأساس هي: (Y_1) والخارجة من الأساس هي: (S_3)

T_2	C_J	1	1	1	0	0	0		
CB	YB	Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	S_3	B	$\frac{B}{Y_3}$
0	S_1	0	2	0	1	0	1/3	4/3	–
0	S_2	0	4	4	0	1	−2/3	1/3	1/12
1	Y_1	1	1	−1	0	0	1/3	1/3	–
W_J		1	1	−1	0	0	1/3		
$\Delta W = C_J - W_J$		0	0	2	0	0	−1/3	W=1/3	

المتغيرة الداخلة للأساس هي: (Y_3) والخارجة من الأساس هي: (S_2)

T_3	C_J	1	1	1	0	0	0		
CB	YB	Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	S_3	B	$\frac{B}{Y_2}$
0	S_1	0	2	0	1	0	1/3	4/3	2/3
1	Y_3	0	−1	1	0	1/4	−1/6	1/12	–
1	Y_1	1	0	0	0	1/4	1/6	5/12	–
W_J		1	−1	1	0	1/2	0		
$\Delta W = C_J - W_J$		0	2	0	0	−1/2	0	W=1/2	

المتغيرة الداخلة للأساس هي: (Y_2) والخارجة من الأساس هي: (S_1)

T_4	C_J	1	1	1	0	0	0	
CB	YB	Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	S_3	B
1	Y_2	0	1	0	1/2	0	1/6	2/3
1	Y_3	0	0	1	1/2	1/4	0	¾
1	Y_1	1	0	0	0	1/4	1/6	5/12
W_J		1	1	1	1	1/2	1/3	
$\Delta W = C_J - W_J$		0	0	0	−1	−1/2	−1/3	W=11/6

نلاحظ من خلال الجدول الأخير أن: $\Delta Z \leq 0$ ومنه الجدول الثالث هو جدول الحل أمثل، والنتائج بالنسبة للاعب B هي كالآتي:

$$Y_1=\frac{5}{12};Y_2=\frac{2}{3};Y_3=\frac{3}{4};S_1=S_2=S_3=0;W=\frac{11}{6}$$

أما بالنسبة للاعب A :

$$X_1=1;X_2=\frac{1}{2};X_3=\frac{1}{3};Z=\frac{11}{6}$$

وللإيجاد القيم الحقيقية للقيم الاحتمالية وقيم اللعبة يكون كالآتي:

$$V=\frac{1}{Z}=\frac{6}{11}$$

$$X_i=\frac{x_i}{v};x_i=X_iV$$

$$x_1=1\times\frac{6}{11}=\frac{6}{11}$$

$$x_2=\frac{1}{2}\times\frac{6}{11}=\frac{3}{11}$$

$$x_3=\frac{1}{3}\times\frac{6}{11}=\frac{2}{11}$$

أما قيمة اللعبة بالنسبة للطرف B :

$$V=\frac{1}{W}=\frac{6}{11}$$

$$Y_j=\frac{y_j}{v};y_j=Y_jV$$

$$Y_1=\frac{5}{12}\times\frac{6}{11}=\frac{15}{66}$$

$$Y_2=\frac{2}{3}\times\frac{6}{11}=\frac{4}{11}$$

$$Y_3=\frac{3}{4}\times\frac{6}{11}=\frac{9}{22}$$

VI- تمارين مقترحة:

التمرين الأول: نفترض مصفوفة الدفع الآتية:

		B			
		1	**2**	**3**	**4**
A	**1**	8	2	9	5
	2	6	5	7	18
	3	7	3	−4	10

المطلوب: أوجد قيمة المباراة ونقطة الاستقرار.

التمرين الثاني: لديك مصفوفة الدفع التالي:

الاستراتيجية	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
X_1	4	−4	−5	6
X_2	−5	−4	−9	−2
X_3	6	7	−8	−9
X_4	7	7	−5	6

المطلوب: أوجد قيمة المباراة ونقطة الاستقرار.

التمرين الثالث: نفترض مصفوفة الدفع الآتية:

		B		
		1	**2**	**3**
A	**1**	3	−4	2
	2	1	−3	−7
	3	−2	4	7

المطلوب: استخدام معياري أدنى الأقصى وأقصى الأدنى للاعبين A و B.

التمرين الرابع: في ظل المصفوفة الأتية، أمام اللاعبين X و Y ثلاث استراتيجيات والمطلوب إختزال المصفوفة إلى أقل حجم ممكن:

الاستراتيجية	Y_1	Y_2	Y_3
X_1	6	2	8
X_2	3	4	5
X_3	2	3	4

التمرين الخامس: حل المصفوفة الآتية بالطريقة الجبرية والرياضية، ثم احسب قيمة المباراة:

الاستراتيجية	B_1	B_2
A_1	8	0
A_2	0	16

التمرين السادس: باستخدام طريقة جبر المصفوفات أوجد الستراتيجيات المختلطة المثلى للمباراة الآتية:

استراتيجيات	B1	B2	B3
A1	5	1	3
A2	4	7	2
A3	3	4	6

التمرين السابع: أوجد قيمة مصفوفة المباراة بطريقة البيانية.

استراتيجيات	B1	B2
A1	3	10
A2	5	7
A3	12	4

التمرين الثامن: أوجد قيمة المباراة والاستراتيجيات المثلى لمصفوفة الدفع الأتية بواسطة البرمجة الخطية:

الاستراتيجية	Y_1	Y_2	Y_3
X_1	1	4	6
X_2	8	2	6
X_3	4	8	2

الفصل الرابع

المحاكاة

نحن جميعناً نهتم إلى حدما لأهمية نماذج المحاكاة في عالمنا، مثلاً شركات إنتاج طائرات Airbus و Boeing طورنا نماذج محاكاة لطائراتهما ومن ثم اختبار خصائص الديناميكا الهوائية للنماذج، كذلك تقوم القوات العسكرية بمحاكاة مهاجمة الأعداء وإعداد استراتيجيات دفاعية في العاب الحرب التي يتم اللعب بها على الكومبيوتر، والألف منظمات الأعمال ، والمنظمات الحكومية، ومنظمات الخدمة تقوم بتطوير نماذج محاكاة لتساعدها في صنع قرارات قد تتعلق بضبط المخزن، جداول الصيانة، التصميم الداخلي للمصنع والتنبؤ بالمبيعات. وفي الواقع تعد نماذج المحاكاة واحدة من اساليب التحليل الكمية الأكثر استخداماً، قد بينت الدراسات بأن أكثر من نصف الشركات الأمريكية الكبرى تستخدم نماذج المحاكاة في التخطيط على المستوى الكلي للشركة، وعليه فإن أسلوب المحاكاة أحد أقدم أساليب التحليل الكمية، إذ أنه لم يكن موجوداً قبل ظهور الكومبيوتر في منتصف الأربعينات وبداية الخمسينات والذي أصبح من الوسائل العملية المستخدمة في حل المشكلات الإدارية والعسكرية[1].

I- عموميات حول المحاكاة:

I-1. مفهوم المحاكاة:

المحاكاة هي محاولة لتطبيق خصائص ومظاهر النظم الواقعية في شكل نماذج تقترب بشدة منها وتعطى تصوراً دقيقاً للواقع ومشكلة، ومن ثم يمكن تصميم ودارسة ووضع حلول للمشاكل المرتبطة بالنظم في الواقع العملي[2].

ويمكن التعبير عن المنظومات الفعلية ودراسة التغيرات التي تحدث فيها بواسطة نماذج وأنماط وقوانين رياضية والتي تعكس نتائج المنظومات الفعلية. والمحاكاة هي أيضا عبارة عن تجربة إحصائية تخضع للتحليل الإحصائي والاختبارات الاحتمالية[3].

I-2. خطوات عملية المحاكاة:

إن خطوات عملية المحاكاة هي مشابهة لأية عملية اتخاذ قرار والتي تشمل على[4]:

- تعريف المشكلة أو النظام الذي نرغب أن نجري عليه عملية المحاكاة؛
- تصميم النموذج الذي يراد استخدامه؛
- اختبار النموذج ومقارنة سلوكه مع السلوك الحقيقي للمشكلة؛
- جمع الملاحظات التي يتطلبها النموذج لاختبار النموذج؛

---

1. صالح مهدي محسن العامري، عواطف ابراهيم الحداد،" **تطبيقات بحوث العمليات في الإدارة**"، إثراء للنشر والتوزيع، الأردن، ط 1، 2009، ص 435.

2. جلال ابراهيم العبد: " **استخدام الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الادارية**"، دار الجامعة الجديدة للنشر، 2004، ص 455.

3. أبو القاسم مسعود الشيخ، مرجع سابق ، ص 367.

4. حسين محمود الجنابي: " **الأحدث في بحوث العمليات**" ، دار الحامد ،الأردن ، 2010، ص 362.

- القيام بعملية المحاكاة؛
- تحليل نتائج المحاكاة؛
- القيام بعملية المحاكاة مرة أخرى لاختبار الحل الجديد؛
- استبعاد العوامل غير المرغوب فيها لغرض جعل المحاكاة أكثر دقة.

I-3. مزايا وعيوب المحاكاة:

من المزايا التي يحققها استخدام المحاكاة هي كالآتي[1]:

- المحاكاة أسلوب يتصف بأنه مباشر ومرن؛
- تستخدم المحاكاة لتحليل كثيراً من الحالات المعقدة في الواقع العملي، والتي يصعب حلها باستخدام النماذج الرياضية؛
- يمكن من خلال المحاكاة استخدام أي توزيعات احتمالية يمكن للمستخدم تحديدها وليس من الضروري الاقتصار على توزيعات محددة؛
- اختصار الوقت فمن خلال الكومبيوتر يمكن إجراء المحاكاة واختصار السنين إلى أيام وأسابيع؛
- تسمح المحاكاة بإثارة التساؤلات من النوع ماذا يحدث لو ؟ مما يساعد المدير في الاختبارات الأكثر جاذبية وقبولاً؛
- تسمح المحاكاة بتحديد ودراسة الآثار المتبادلة للمكونات أو المتغيرات بالشكل الذي يسمح بتحديد أكثرها أهمية للنظام.

من عيوب الرئيسة لاستخدام المحاكاة هو الآتي[2]:

- نماذج المحاكاة الجيدة يمكن أن تكون مكلفة جداً ، كما أن عملية تطوير نموذج تعد عملية طويلة ومعقدة؛
- لا يقدم اسلوب المحاكاة حلولاً مثلى للمشكلات كما هو الحال بالنسبة لأساليب التحليل الكمية الأخرى مثل البرمجة الخطية ، أسلوب بPERT . هو مدخل لاعتماد اسلوب التجربة الخطأ والتي قد ينتج عنها حلولاً مختلفة من خلال تكرار المحاولات؛
- ينبغي أن يقدم المدراء كافة الحالات والقيود للحلول التي يرغبون باختبارها وفحصها. إذ أن أسلوب المحاكاة لا يقدم إجابات عنها؛
- كل نموذج محاكاة يكون فريداً من نوعه. إذ أن الحلول التي يقدمها لمشكلة ما والاستنتاجات غير ممكنة التطبيق على المشكلات الأخرى.

[1]. جلال ابراهيم العبد، مرجع سابق، ص ص: 457-458 .

[2]. صالح مهدي محسن العامري، عواطف ابراهيم الحداد، مرجع سابق، 439.

I-4. مجالات تطبيق المحاكاة:

تستخدم نماذج المحاكاة من أجل[1]:

- دراسة النظام المعمول به؛
- تحليل بعض الأنظمة المقترحة ؛
- تخطيط وتنظيم أنظمة مثالية متطورة.

تم تطبيق المحاكاة على عدد كبير من المشاكل، وفيما يلي شرح لبعض تطبيقاته[2]:

- **خطوط الانتظار:**

بينا في الفصل الخاص بخطوط الانتظار المعادلات الرياضية، التي يمكن استخدامها في المشاكل الخاصة الخاصة بخطوط الانتظار ولكن في حالة المشاكل المعقدة، لا يمكن التوصل إلى حل للمشكلة من خلال المعادلات الرياضية، عليه يكون مدخل المحاكاة الوسيلة الوحيدة للتحليل، فمن خلال تطبيق المحاكاة يمكن للإدارة تحديد عدد القائمين بالتسجيل ومقدمي الخدمات لتلبية طلبات الزبائن؛

- **إدارة المخزون:**

إن تحديد كمية الطلب على المنتج يعتبر أساسياً لتحديد كمية المخزون في المنظمة . ومن المعروف بأن معظم المعادلات الرياضية التقليدية المستخدمة في تحليل أنظمة المخزون تفترض عنصر التأكد في الطلب، ولكن في الواقع العملي نادراً ما يحدث ذلك، تعتبر المحاكاة من افضل الأساليب في تحليل انظمة المخزون، بافتراض أن الطلب عبارة عن متغير عشوائي، فمن خلال تطبيق المحاكاة تستطيع المنظمة معرفة مدى فاعلية وكلفة نظام في البيئة التصنيعية التي تعمل فيها قبل شروعها في تطبيق النظام؛

- **الإنتاج والأنظمة التصنيعية:**

تستخدم المحاكاة لحل المشاكل الإنتاجية الخاصة بتصميم المنتج واختباره، جدولة الإنتاج، تتابع العمليات الانتاجية، موازنة خط التجميع (للمخزون تحت الصنع)، ترتيب المصنع، تحليل موقع المصنع، التخطيط الكلي وإدارة المشروع، ويمكن أيضاً تحليل مشاكل الصيانة باستخدام المحاكاة، إذ غالباً ما تقع عطلات المكائن بموجب التوزيع الاحتمالي.

- **استثمار رأس المال والموزانة:**

تتطلب مشاكل الموازنة الرأسمالية تقديرات للتدفقات النقدية والتي غالباً ما ينتج عنها متغيرات عشوائية كثيرة، تم استخدام المحاكاة في توليد القيم لمختلف العوامل المساهمة في تقدير التدفقات النقدية

---

1. فتحي خليل حمدان، مرجع سابق، ص 440 .
2. احمد عبد إسماعيل الصفار، ماجدة عبد اللطيف التميمي، مرجع سابق، ص ص: 569 – 572 .

وفي تحديد مدخلات حساب معدل العائد، إذ ان المدخلات عبارة عن متغيرات عشوائية مثل حجم السوق، سعر البيع، ومعدل النمو والحصة السوقية.

- **العمليات الخدمية:**

يمكن وصف العمليات الخدمية بالتعقيد، لاحتوائها على متغيرات عشوائية كثيرة وبالرغم من ذلك تم تطبيق المحاكاة في هذا المجال ومن الأمثلة على ذلك، استخدام المحاكاة في عمليات إطفاء الحرائق، مكاتب البريد، المستشفيات، أنظمة المحاكم، المطارات والأنظمة الخدمة الأخرى؛

- **التحليل البيئي والموارد:**

يعتبر تطبيق المحاكاة على المشاكل البيئية، من التطبيقات الحديثة، إذ تم تطوير نماذج المحاكاة لبيان تأثير مخلفات المصانع والمصانع النووية على البيئة. وقد طورت نماذج أخرى لمحاكاة أنظمة الطاقة والمتطلبات المالية، لإيجاد مصادر بديلة للطاقة تحتوي تلك النماذج على مقاييس لتحليل المتطلبات المالية لهذه المشاريع.

II–المحاكاة وأسلوب مونت كارلو:

عندما يتضمن النظام عناصر تظهر الفرصة في سلوكها، فإنه قد يكون بالإمكان تطبيق طريقة مونت كارلو في المحاكاة . الأساس في نموذج المحاكاة مونت كارلو هو التجريب على الفرص (أو الاحتمالات) من خلال استخدام عينات عشوائية, يتكون هذا الأسلوب من خمسة خطوات بسيطة هي[1]:

1. وضع توزيع إحتمالي للمتغيرات المهمة؛
2. بناء توزيع إحتمالي تراكمي لكل متغير من المتغيرات؛
3. وضع مدى زمني للأرقام العشوائية لكل متغير ؛
4. خلق أرقام عشوائية؛
5. محاكاة سلسلة من المحاولات فعلياً.

وسوف نتناول الخطوات السابقة بشيء من التفصيل فيما يلي:

أولاً: تحديد التوزيع الاحتمالي:

تقوم الفكرة الأساسية لأسلوب " مونت كارلو " على توليد قيم لمتغيرات النموذج الي سيتم دراستها، ويوجد العديد من المتغيرات التي تأخذ الصفة الاحتمالية في الواقع العملي مثل:

- الطلب اليومي أو الأسبوعي من المخزون؛
- الزمن المنقضي بين الأعطال التي تتعرض لها آلة معينة؛
- الأزمنة المنقضية بين الوحدات التي تصل لتلقى خدمة معينة؛

[1]. صالح مهدي محسن العامري، عواطف ابراهيم الحداد، مرجع سابق، ص 439.

- أوقات أداء الخدمة؛
- الأوقات اللازمة لإنجاز أنشطة مشروع معين.

والأسلوب الأمثل لتحديد التوزيع الاحتمالي لمتغير معين، يتمثل في اختبار سلسلة القيم التاريخية لهذا المتغير، حيث يتم تحديد الاحتمال أو التكرار النسبي، وذلك بقسمة عدد التكرارات أو الملاحظات على إجمالي عدد المشاهدات أو التكرارات. نوضح فكرة المحاكاة من خلال مثال مبسط للتنبؤ بالطلب لأحد الشركات.

مثال رقم 01: ظهرت بيانات الطلب الفعلي خلال الأيام العشرة الماضية لشركة المنسوجات الحديثة كما يوضح ذلك الجدول التالي:

اليوم	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
الطلب	3	3	4	4	5	5	2	3	5	5

من خلال البيانات السابقة يمكن القول بأن الطلب المتوقع يعادل 3,9 وحدة (39/10=3,9).

ويمكن استخدام أسلوب المحاكاة في شكله البسيط للتنبؤ بحجم الطلب المتوقع أيضا، وذلك بتحديد مجموعة الأرقام العشوائية- ويتم اختيار 10 أرقام عشوائيا من جداول الأرقام العشوائية– ثم يتم بعد ذلك تحويلها إلى احتمالات أو أوزان نسبية حيث يتم استخدامها في تحديد الطلب المتوقع، ويلاحظ أنه يجب استخدام عدد كبير من المحاولات لتقدير الطلب المتوقع، إذ أنه كلما زاد عدد المحاولات زادت دقة النتائج التي نتوصل إليها، نوضح الآن كيفية إجراء عمليات محاكاة بسيطة للتنبؤ بحجم الطلب المتوقع في هذا المثال.

المحاولة الأولى:

اليوم	الطلب الفعلي	الأرقام العشوائية	الاحتمال	الطلب المتوقع
1	3	86	0,1861	0,5583
2	3	76	0,1645	0,4935
3	4	20	0,0433	0,1732
4	4	6	0,013	0,052
5	5	42	0,091	0,455
6	5	50	0,1082	0,541
7	2	31	0,0671	0,1342
8	3	77	0,1667	0,5001
9	5	33	0,0714	0,357
10	5	41	0,0887	0,4435
المجموع	**39**	**462**	**1**	**3,71**

المحاولة الثانية:

اليوم	الطلب الفعلي	الأرقام العشوائية	الاحتمال	الطلب المتوقع
1	3	81	0,1354	0,4062
2	3	57	0,0953	0,2859
3	4	19	0,0318	0,1272
4	4	91	0,1522	0,6088
5	5	90	0,1505	0,7525
6	5	40	0,0669	0,3345
7	2	7	0,0117	0,0234
8	3	77	0,1288	0,3864
9	5	74	0,1237	0,6185
10	5	62	0,1037	0,5185
المجموع	**39**	**598**	**1**	**4,06**

المحاولة الثالثة:

اليوم	الطلب الفعلي	الأرقام العشوائية	الاحتمال	الطلب المتوقع
1	3	14	0,0271	0,0813
2	3	86	0,1664	0,4992
3	4	88	0,1702	0,6808
4	4	30	0,058	0,232
5	5	50	0,0967	0,4835
6	5	32	0,0619	0,3095
7	2	83	0,1605	0,321
8	3	50	0,0967	0,2901
9	5	72	0,1393	0,6965
10	5	12	0,0232	0,116
المجموع	**39**	**517**	**1**	**3,71**

من خلال المحاولات الثلاث السابقة، فإن متوسط الطلب المتوقع يبلغ 3,83 وحدة لأن (3,83 =(3,71+4,06+3,71)/3))، ولا شك أن هذا الرقم يقترب من متوسط الطلب والبالغ 9 ,3 وحدة ولاشك أيضا أن زيادة عدد المحاولات للمحاكاة ستؤدي إلى دقة أعلى في رقم الطلب المتوقع.

مثال رقم 02: يوضح الجدول الطلب اليومي على إطارات السيارات لأحد الشركات خلال المائتي يوم الماضية، ومن خلال هذه المعلومات يمكن تحديد احتمالات حدوث كل مستوى من مستويات الطلب و مجموع التراكمي للاحتمالات كما يوضح ذلك الأعمدة 3 للجدول:

الطلب على الإطارات	تكرار الطلب (الأيام)	احتمالات الحدوث	مجموع التراكمي للاحتمالات
0	10	10/200=0,05	0,05
1	20	20/200=0,10	0,15
2	40	40/200=0,20	0,35
3	60	60/200=0,30	0,65
4	40	40/200=0,20	0,85
5	30	30/200=0,15	1,00
المجموع	**200**	**1,00**	

ثانياً: تحديد التوزيع الاحتمالي لكل متغير:

يتم تحديد مجموع التراكمي للاحتمالات كما هو موضح أعلاه عن طريق إضافة الاحتمالات الحالية للاحتمالات السابقة باستمرار.

ثالثا: تحديد مدى زمني للأرقام العشوائية لكل متغير:

بمجرد تحديد مجموع التراكمي للاحتمالات لكل متغير، فإنه يجب تخصيص مجموعة من الأرقام لتمثل كل قيمة من القيم الممكنة للمتغير، والتي يشار إليها بالمدى من الأرقام العشوائية، والأرقام العشوائية هي مجموعة من الأرقام مثل (00,15,09,02,01) يتم اختيارها بشكل عشوائي,

ولتوضيح فكرة تحديد مدى من الأرقام العشوائية، دعنا نفترض أن هناك فرصة 5% لأن يكون الطلب صفر في عدد ما من الأيام، كما يوضح الجدول السابق.

فمعنى ذلك أننا نرغب في تحديد 5% من الأرقام العشوائية المتاحة لتكون مناظرة لطلب مقداره صفراً، فإذا ما كان مجموع 100 رقم مكون من عددين هو المستخدم في توليد الأرقام العشوائية، فإنه يمكن اختبار أول خمسة أرقام عشوائية لتناظر احتمال أن يبلغ الطلب صفراً في أحد الأيام وهكذا. ويظهر الجدول الموالي المدى بين الأرقام العشوائية المناظر لكل مستوى من مجموع التراكمي للاحتمالات.

الطلب اليومي	احتمالات الحدوث	مجموع التراكمي للاحتمالات	المدى من الأرقام العشوائية
0	10/200=0,05	0,05	05-01
1	20/200=0,10	0,15	15-06
2	40/200=0,20	0,35	35-16
3	60/200=0,30	0,65	65-36
4	40/200=0,20	0,85	85-66
5	30/200=0,15	1,00	00-86

رابعاً: توليد الأرقام العشوائية:

خلق أرقام عشوائيا ربما يتم اشتقاق أو خلق أرقام عشوائية لمشكلات المحاكاة بطرق مختلفة. ربما عن طريق تدوير عجلة لعبة الروليت والتي تضم 100 شق، من خلال أخذ شرائح رقمية كيفما اتفق (عشوائياً) أو بأي طريقة تسمح بأجراء خيارات عشوائية, من الوسائل الأكثر استخداماً يتم اختبار أرقام من جدول المراتب العشوائية*.

خامساً : محاكاة التجربة:

يمكن القيام بمحاكاة نواتج التجربة عن طريق أرقام عشوائية من جدول الأرقام العشوائية، وذلك بالبدء من أي موقع في جدول الأرقام العشوائية فمثلاً إذا كان الرقم العشوائي المختار هو 81 وأن المدى هو (65-85) تمثل الطلب اليومي على 4 وحدات من منتج الشركة، فإننا سنختار الطلب على 4 إطارات.

نفترض أننا نرغب في محاكاة الطلب عدة أيام لشركة إطارات السيارات، وقد قمنا باختيار الأرقام العشوائية من جدول الأرقام العشوائية، سنبدأ من الزاوية العليا في أقصى الشمال ونكمل نزولاً بدءاً بالعمود الأول. ونحصل على الجدول الآتي:

محاكاة الطلب على المنتوج لمدة (10)		
الأيام	**محاكاة الطلب اليومي**	**الأرقام العشوائية**
1	3	52
2	3	37
3	4	82
4	4	69
5	5	98
6	5	96
7	2	33
8	3	50
9	5	88
10	5	90
	الطلب الإجمالي لعشرة أيام =39 معدل الطلب اليومي =3,9	

*. أنظر ملحق جدول الأرقام العشوائية في الملاحق.

من المهم أن نلاحظ متوسط الطلب هو (3,9) وحدة خلال الأيام العشرة للمحاكاة وهي تختلف كلياً عن الطلب اليومي المتوقع والذي يمكن أن نحصل عليه عن طريق حساب البينات في الجدول السابق.

الطلب اليومي المتوقع = مجموع ضرب عمود احتمالات الحدوث X عمود الطلب اليومي.

$=0,05(0)+0,10(1)+0,20(2)+0,30(3)+0,20(4)+0,05(5)$

وحدة $=2,95$

إذا تم تكرار هذه المحاكاة مئات أو آلاف المرات، فإنه من المحتمل جداً أن يكون متوسط طلب المحاكاة قريباً من الطلب المتوقع. ويمكن أن يكون الحاسب الآلي وسيلة مساعدة مهمة جداً للاضطلاع بالعمل الضخم الذي تتطلبه عملية المحاكاة الضخمة.

III- تمارين محلولة:

التمرين الأول: يرغب مدير محلات (النور) لتجارة المواد الغذائية بتحديد عدد صناديق عصير البرتقال الذي من المفروض أن يطلبه لفترة 15 أسبوعاً، بوصفه متغيراً عشوائياً وتم تعريفه بـ X وتتراوح قيمته من 14 إلى 18 صندوقاً أسبوعياً.

يبين الجدول الآتي تكرار الطلب والمستخرج من واقع السجلات التاريخية والذي يشمل 100 أسبوع.

الصناديق المطلوب أسبوعياً	تكرار الطلب
14	20
15	40
16	20
17	10
18	10
المجموع	100

حل التمرين الأول: لغرض محاكاة صناديق عصير البرتقال الذي من المفروض أن يطلبه لفترة 15 أسبوعاً، نستخرج التكرارات المتجمعة للصناديق المطلوبة كالآتي:

الصناديق المطلوب أسبوعياً	تكرار الطلب	احتمالات الحدوث	مجموع التراكمي للاحتمالات
14	20	0.20	0.20
15	40	0.40	0.60
16	20	0.20	0.80
17	10	0.10	0.90
18	10	0.10	1.00
المجموع	100	1.00	

بمجرد تحديد مجموع التراكمي للاحتمالات لكل متغير، فإنه يجب تخصيص مجموعة من الأرقام لتمثل كل قيمة من القيم الممكنة للمتغير، والتي يشار إليها بالمدى من الأرقام العشوائية، والأرقام العشوائية هي مجموعة من الأرقام مثل (00,15,09,02,01) يتم اختيارها بشكل عشوائي,

ولتوضيح فكرة تحديد مدى من الأرقام العشوائية، دعنا نفترض أن هناك فرصة 20% لأن يكون الطلب 14 صندوق من العصير، كما يوضح الجدول السابق.

فمعنى ذلك أننا نرغب في تحديد 20% من الأرقام العشوائية المتاحة لتكون مناظرة لطلب مقداره 14، فإذا ما كان مجموع 100 رقم مكون من عددين هو المستخدم في توليد الأرقام العشوائية، ويظهر الجدول الموالي المدى بين الأرقام العشوائية المناظر لكل مستوى من مجموع التراكمي للاحتمالات.

الطلب اليومي	احتمالات الحدوث	مجموع التراكمي للاحتمالات	المدى من الأرقام العشوائية
14	20	0.20	19-01
15	40	0.40	59 -20
16	20	0.20	79-60
17	10	0.10	89-80
18	10	0.10	00-90

خلق أرقام عشوائيا ربما يتم اشتقاق أو خلق أرقام عشوائية لمشكلات المحاكاة بطرق مختلفة. ربما عن طريق تدوير عجلة لعبة الروليت والتي تضم 100 شق، من الوسائل الأكثر استخداماً يتم اختبار أرقام من جدول المراتب العشوائية.

يمكن القيام بمحاكاة نواتج التجربة عن طريق أرقام عشوائية من جدول الأرقام العشوائية ونحصل على الجدول الآتي:

محاكاة الطلب لفترة (15) أسبوعاً على صناديق العصير		
أسبوع	محاكاة الصناديق المطلوب أسبوعياً	الأرقام العشوائية
1	15	39
2	16	73
3	16	72
4	16	75
5	15	37
6	14	02
7	17	87
8	18	98
9	14	10
10	15	47
11	18	93
12	15	21
13	18	95
14	18	97
15	16	69
	الطلب الإجمالي لفترة (15) أسبوعاً =241 معدل الطلب الأسبوعي= 16.1	

من المهم أن نلاحظ متوسط الطلب الأسبوعي المتنبأ به هو (16.1) صندوق من العصير أسبوعياً ، وهي تختلف كلياً عن الطلب اليومي المتوقع والذي يمكن أن نحصل عليه عن طريق حساب البينات في الجدول السابق.

الطلب الأسبوعي المتوقع = مجموع ضرب عمود احتمالات الحدوث X عمود الطلب الأسبوعي.

$$=0,20(14)+0,40(15)+0,20(16)+0,10(17)+0,10(18)$$

=15.5 صندوق أسبوعياً

إذا تم تكرار هذه المحاكاة مئات أو آلاف المرات، فإنه من المحتمل جداً أن يكون متوسط طلب المحاكاة قريباً من الطلب المتوقع. ويمكن أن يكون الحاسب الآلي وسيلة مساعدة مهمة جداً للاضطلاع بالعمل الضخم الذي تتطلبه عملية المحاكاة الضخمة.

التمرين الثاني: تحتفظ إحدى الشركات بخزين من سخانات الماء والتي تباع لأغراض الاستخدام المنزلي وتقوم بتنصيب هذه السخانات. وقد أحب صاحب الشركة فكرة الاحتفاظ بكمية كبيرة من السخانات لتلبية

طلب الزبائن إلا إنه أدرك بأن ذلك سيكلفه الكثير. وقد تفحص مبيعات السخانات لديه خلال الـ 50 أسبوع الماضية ولاحظ ألآتي:

مبيعات سخانات الماء اسبوعياً	عدد الأسابيع التي بيعت بها هذه الكمية
4	6
5	5
6	9
7	12
8	8
9	7
10	3
الإجمالي	50 أسبوع

المطلوب:

1. إذا استمرت الشركة بتجهيز عدد ثابت من السخانات كأن يكون 8 سخانات في أسبوع، كم مرة ستتعرض الشركة لنفاذ المخزون خلال فترة محاكاة 20 أسبوع؟ استخدم الأرقام العشوائية في العمود رقم 7 من جدول الأرقام العشوائية، ابدأ بالرقم العشوائي 10؛
2. ما هو متوسط حجم المبيعات أسبوعياً (يضمنها النفاذ) خلال الـ 20 أسبوع؛
3. ما هو حجم المبيعات المتوقع اسبوعياً؟ وكيف تقارن الناتج مع الناتج السؤال الثاني؟

حل التمرين الثاني:

.1

مبيعات السخانات	الاحتمال	الاحتمال التراكمي	مدى الرقم العشوائي
4	0.12	0.12	12-01
5	0.10	0.22	22-13
6	0.18	0.40	40-23
7	0.24	0.64	64-41
8	0.16	0.80	80-65
9	0.14	0.94	94-81
10	0.06	1.00	00-95
	1.00		

يمكن القيام بمحاكاة نواتج التجربة عن طريق أرقام عشوائية من جدول الأرقام العشوائية ونحصل على الجدول الآتي:

الأسبوع	الرقم العشوائي	المبيعات التي تمت محاكاتها	الأسبوع	الرقم العشوائي	المبيعات التي تمت محاكاتها
1	10	4	11	08	4
2	24	6	12	48	7
3	03	4	13	66	8
4	32	6	14	97	10
5	23	6	15	03	4
6	59	7	16	96	10
7	95	10	17	46	7
8	34	6	18	74	8
9	34	6	19	77	8
10	51	7	20	44	7

عند الاحتفاظ بـ 8 سخانات ستتعرض الشركة ثلاث مرات لنفاذ المخزون خلال 20 أسبوع في الأسبوع السابع والرابع عشر و السادس عشر.

2. متوسط المبيعات باستخدام المحاكاة (135/20=6,75)، 6,75 أسبوعياً .

3. باستخدام القيمة المتوقعة نجد:

$$=0,12(4)+0,10(5)+0,18(6)+0,24(7)+0,16(8)$$
$$+0,14(9)+0,06(10)$$

= 6,88 أسبوعياً

في ظل المحاكاة الأطول، فإنه من المحتمل جداً أن يكون متوسط المبيعات بالمحاكاة قريباً من الطلب المتوقع.

IV- تمارين مقترحة:

التمرين الأول: يرغب موزع للمواد الغذائية بتحديد عدد صناديق العصير البرتقال التي يجب طلبها لفترة 10 أسابيع، إذا كان عدد الصناديق يتراوح بين 14 إلى 18 صندوقاً أسبوعياً. فإذا كان الطلب على الصناديق للمئة أسبوع السابقة هي كما في الجدول التالي:

الصناديق المطلوب أسبوعياً	تكرار الطلب
14	15
15	40
16	10
17	20
18	15
المجموع	100

التمرين الثاني: الشركة " س" لإنتاج الحلويات تبيع الحلويات حسب الطلب فإذا كان الطلب اليومي على انتاج الشركة واحتمالاتها موضح في الجدول التالي:

الطلب	الاحتمال
0	0,01
10	0,20
20	0,15
30	0,50
40	0,12
50	0,02

المطلوب: استخدم أسلوب مونت كارلو لإيجاد حجم الطلب للعشرة أيام التالية عن طريق الأرقام العشوائية.

المراجع

❖ **الكتب باللّغة العربية:**

1. أبو القاسم مسعود الشيخ: " **بحوث العمليات**"، المجموعة العربية للتدريب والنشر، القاهرة، 2014.
2. احمد عبد إسماعيل الصفار، ماجدة عبد اللطيف التميمي: " **بحوث العمليات تطبيقات على الحاسوب**"، دار المناهج للنشر والتوزيع، الاردن، 2007.
3. بخايا، ماجد عبد الله، فاروق رسام: " **بحوث العمليات** "، المكتبة الوطنية، بغداد، 2000.
4. جلال ابراهيم العبد: " **استخدام الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الادارية**"، دار الجامعة الجديدة للنشر، 2004.
5. حامد سعد نور الشمرتي: " **بحوث العمليات مفهوما وتطبيقا**"، مكتبة الذاكرة، بغداد، 2010.
6. حامد سعد نور الشمرتي، علي خليل الزبيدي: " **مدخل إلى بحوث العمليات**"، دار مجدلاوي، عمان، 2007.
7. حسين محمود الجنابي: " **الأحدث في بحوث العمليات**" ، دار الحامد ،الأردن ، 2010.
8. دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال: " **بحوث العمليات**"، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، الأردن، 2008.
9. راتول محمد: " **بحوث العمليات** "، ديوان المطبوعات الجامعية، ط2، الجزائر، 2006.
10. رشيق مرعي، فتحي حمدان: " **مقدمة في بحوث العمليات**"، دار وائل للنشر، الأردن، عمان، 1996.
11. السامرائي، حسين الطيف: " **الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية**"، دار الهلال، عمان، 1997.
12. صالح مهدي محسن العامري، عواطف ابراهيم الحداد،" **تطبيقات بحوث العمليات في الإدارة**"، إثراء للنشر والتوزيع، الأردن، ط 1، 2009.
13. عاصم عبد الرحمان الشيخ: " **بحوث العمليات**"، دار المناهج، عمان، 1999.
14. عبد الرسول عبد الرزاق الموسوي: " **المدخل لبحوث العمليات**"، دار وائل للنشر، الأردن، 2001.
15. عبد ذياب جزاع: " **بحوث العمليات**"، منشورات جامعة بغداد، العراق، 1986.
16. فتحي خليل حمدان:" **بحوث العمليات مع تطبيقات باستخدام الحاسوب**"، دار وائل للنشر، ط1، الأردن، 2010.
17. القاضي زياد عبد الكريم، عاطف جابر، عمر أبو الحسن:" **بحوث العمليات**"، دار المستقبل للنشر، عمان، 1990.
18. محمد إسماعيل بلال: " **بحوث العمليات**"، دار الجامعة الجديدة، الاسكندرية، 2008.

19. محمد عبد العال النعيمي، رفاه شهاب الحمداني، احمد شهاب الحمداني: " **بحوث العمليات**"، دار وائل للنشر، ط2، الأردن، 2011.
20. محمود العبيدي، مؤيد عبد الحسين الفضل: " **بحوث العمليات وتطبيقاتها في إدارة الأعمال**"، مؤسسة الوراق للنشر والتوزيع، ط1، الاردن، 2004.
21. نعيم نصير: " **أساليب التحليل الكمي في الإدارة**"، دار الوثيقة، دمشق، 1985.

❖ الكتب باللّغة الأجنبية:

1) Lawrence, L.Lapin, « **Quantitive Methods for Business Decisions** », Wth Cases, 5th ed, U.S.A, Harcourt Brace Jovanovich Inc, 1991.
2) Phillips, D.T, Ravidran Solberg, « **Operation Research : Principles and Practice** », 2nd ed, John Wiley Sons, New York,1987.
3) Render,B,Stair R. M, « **Quantitative Analysis for Manangement** » , 7th ed , Prentice Hall, New York, 2000 .
4) Thomas, Richard , « **Quantitative Methods for Business Studies** », Harlow, Prentice Hall.1997.
5) Wagner, H, « **Principle of Operations Research with Application to Management Science** », 2nd ed, Printice Hall,1975.

الملاحق

الملحق رقم 01: جدول التوزيع الطبيعي

جدول التوزيع الطبيعي

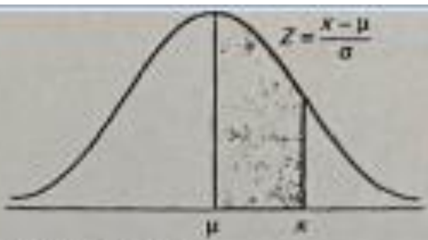


TABLE (1) **Normal Curve Areas**

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
05	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803 -	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4977	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

	00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.50000	.50399	.50798	.51197	.51595	.51994	.52392	.52790	.53188	.53586
0.1	.53983	.54380	.54776	.55172	.55567	.55962	.56356	.56749	.57142	.57535
0.2	.57926	.58317	.58706	.59095	.59483	.59871	.60257	.60642	.61026	.61409
0.3	.61791	.62172	.62552	.62930	.63307	.63683	.64058	.64431	.64803	.65173
0.4	.65542	.65910	.66276	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68439	.68793
0.5	.69146	.69497	.698-17	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
0.6	.72575	.72907	.73237	.73536	.73891	.74215	.74537	.74857	.75175	.75490
0.7	.75804	.76115	.76424	.76730	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78534
0.8	.78814	.79103	.79389	.79673	.79955	.80234	.80511	.80785	.81057	.81327
0.9	.81594	.81859	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83398	.83646	.83891
1.0	.84134	.84375	.84614	.84849	.85083	.85314	.85543	.85769	.85993	.86214
1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87286	.87493	.87698	.87900	.88100	.88298
1.2	.88493	.88686	.88877	.89065	.89251	.89435	.89617	.89796	.89973	.90147
1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91309	.91466	.91621	.91774
1.4	.91934	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92785	.92922	.93056	.93189
1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
1.6	.94520	.94630	.94738	.948-15	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.954-19
1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96080	.96164	.962-46	.96327
1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
1.9	.97128	.97193	.97237	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670
2.0	.97725	.97784	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98610	.986.15	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
2.5	.99379	.99896	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
2.6	.99534	.99517	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
2.8	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861
3.0	.99865	.99869	.99874	.99878	.99882	.99886	.99889	.99893	.99896	.99900
3.1	.99903	.99906	.99910	.99913	.99916	.99918	.99921	.99924	.99926	.99929
3.2	.99931	.99934	.99936	.99938	.99940	.99942	.99949	.99946	.99948	.99950
3.3	.99952	.99953	.99955	.99957	.99958	.99960	.99961	.99962	.99964	.99965
3.4	.99966	.99968	.99969	.99970	.99971	.99972	.99973	.99974	.99975	.99976
3.5	.99977	.99978	.99978	.99979	.99980	.99981	.99981	.99982	.99983	.99983
3.6	.99984	.99985	.99985	.99986	.99986	.99987	.99987	.99998	.99988	.99989
3.7	.99989	.99990	.99990	.99990	.99991	.99991	.99992	.99992	.99992	.99992
3.8	.99993	.99993	.99993	.99994	.99994	.99994	.99994	.99995	.99995	.99995
3.9	.99995	.99995	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99997	.99997

الملحق رقم 02: جدول الأرقام العشوائية

52	06	50	88	53	30	10	47	99	37	66	91	35	32	00	84	57	07
37	63	28	02	74	35	24	05	79	60	74	85	90	73	59	55	17	60
82	57	68	78	05	94	03	11	27	79	90	87	92	41	09	25	36	77
69	07	36	49	71	99	32	10	75	21	95	90	94	38	97	71	72	10
98	94	90	36	06	78	23	67	89	85	29	21	25	73	69	34	85	76
96	52	62	87	49	56	59	23	78	71	72	50	57	01	98	57	31	95
33	69	27	21	11	60	95	89	68	48	17	89	34	09	93	50	44	51
50	33	50	95	13	44	34	62	64	39	55	29	30	64	49	44	30	16
88	32	18	50	62	57	34	56	62	31	15	40	90	34	51	95	26	14
90	30	56	24	69	82	51	74	30	35	36	85	01	55	92	64	09	85
50	48	61	18	85	23	08	54	17	12	80	69	24	84	92	16	49	59
27	88	21	62	69	64	48	31	12	73	02	68	00	16	16	46	13	85
45	14	46	32	13	49	66	67	74	41	86	98	92	98	84	54	33	40
81	02	01	78	82	74	97	37	45	31	94	99	42	49	27	64	89	42
65	83	14	74	27	76	03	33	11	97	59	81	72	00	64	61	13	52
74	05	81	82	93	09	96	33	52	78	13	06	28	30	94	23	37	39
30	34	87	01	74	11	46	82	59	94	25	34	32	23	17	01	58	73
59	55	72	33	62	13	74	68	22	44	47	09	32	46	71	79	45	89
67	09	80	98	49	25	77	50	03	32	36	63	65	75	94	19	95	88
60	77	46	63	71	69	44	22	03	85	14	48	69	13	30	50	33	24
60	08	19	29	36	72	30	27	50	64	85	72	75	25	87	05	75	01
80	45	86	99	02	34	87	08	86	81	49	76	24	08	01	86	29	11
53	84	49	63	26	65	73	84	85	63	26	02	75	26	92	62	40	67
69	84	12	94	51	36	17	02	15	29	16	52	56	43	26	22	08	62
37	77	13	10	02	18	33	19	32	85	31	94	81	45	31	58	33	51