الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة أكلي محند أولحاج
- البويرة -
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Akli Mohand Oulhadj - Bouira -
Tasdawit Akli Muḥend Ulḥağ - Tubirett -
Faculté des Sciences Economiques, Commerciales et des Sciences de Gestion

جامعة البويرة

مطبوعة موجهة لطلبة السنة الثالثة الليسانس

تخصص: اقتصاد كمي

بعنوان:

بحوث العمليات 01

من إعداد الدكتور: مولاي بوعلام

السنة الجامعية: 2021 /2022

فهرس المحتويات

مقدمة

ظهرت الأساليب الكمية لمعالجة المشاكل الواقعية التي تتسم بدرجة من التعقيد بسبب الكم الكبير من المتغيرات الاقتصادية التي يتضمنها النظام الاقتصادي، وان التداخل بين هذه المتغيرات يزيد من درجة تعقيد ذلك النظام، مما تتطلب استخدام تقنيات ومداخل علمية لترشيد عملية اتخاذ قراراتها لكي تستطيع استخدام مواردها المادية والبشرية بكفاءة وفاعلية.

إن هذه الأساليب في مجموعها تعرف باسم بحوث العمليات والذي عرف من قبل المختصين في العلوم الإدارية بأنه المنهج الكمي لدراسة إدارة الأعمال، حيث نمت وتطورت أساليب بحوث العمليات جنباً إلى جنب مع نمو والتطور الذي حصل في تقنيات الحاسوب والبرمجيات العلمية، التي تسهل كثيراً في حل المشاكل المختلفة، فاستخدمت البحوث العمليات على أساس وضع نماذج لتصوير المشكلات الواقعية وتحديد الأهداف ثم حل النموذج واختبار الحلول البديلة وبعدها اختبار الحل الأفضل المثالي ثم الرجوع ثانية لتطبيقه على الواقع العملي الذي يشمل المشكلة ذاتها.

وإنجاز هذه المطبوعة رغبة منا في إغناء المكتبة الجامعية بموضوعات هذا العلم، وهي موجهة لطلبة الليسانس تخصص اقتصاد كمي في ميدان العلوم الاقتصادية وعلوم التسيير والعلوم التجارية، وتتضمن هذه المطبوعة على فصول التالية:

الفصل الأول: مدخل إلى بحوث العمليات

الفصل الثاني: برمجة الأعداد الصحيحة

الفصل الثالث: التحليل الشبكي

الفصل الرابع: البرمجة الديناميكية

الفصل الأول

مدخل إلى بحوث العمليات

إن علم بحوث العمليات من العلوم التطبيقية الحديثة التي شاع استخدامها في المجالات المتعددة، لهذا نحاول من خلال هذا الفصل إعطاء فكرة عن طبيعة ومفهوم بحوث العمليات، وتطورها ومجالات تطبيقها والعوامل التي ساعدت على تطور بحوث العمليات.

I- مفهوم بحوث العمليات:

اختلفت وجهات النظر وتباينت الآراء في إيجاد تعريف محدد لبحوث العمليات، فقد عرف دانتزيج (Dantzig) بحوث العمليات " **بأنها علم الإدارة أي علم اتخاذ القرارات وتطبيقاتها**"[1]، ويعد هذا التعريف تعريفا شاملا ولا يقدم مفهوما واضحا لبحوث العمليات يميزها من غيرها من المصطلحات، فبحوث العمليات ليست علم اتخاذ القرارات وتطبيقها وإنما هي أدوات تستعمل مع غيرها من الأدوات الأخرى للمساعدة في اتخاذ القرارات.

إن الخاصية التي يتميز بها هذا العلم هو إعداد نموذج علمي وعملي لنظام معين يتضمن تحديد العوامل المؤثرة و التنبؤ ومقارنة النتائج لمساعدة الإدارة في قياس دقة النظام المستخدم وبالتالي اتخاذ القرارات المناسبة والسليمة[2].

أما مورس وكمبال (Morse and Kimblall) فقد عرفا بحوث العمليات " **بأنها تطبيق الطريقة العلمية بتوفير الأساس الكمي الذي يمكن الإدارة من اتخاذ القرارات** "، ومن هذا التعريف يمكن تحديد العناصر الرئيسة لبحوث العمليات على النحو الآتي[3]:

- استعمال الطريقة العلمية؛
- الاعتماد على الأساس الكمي، وذلك باستعمال أدوات بحوث العمليات وأساليبها؛
- يمكن الإدارة من اتخاذ قرارات أكثر موضوعية.

وعلى هذا الأساس يمكننا وضع تعريف محدد لبحوث العمليات على أنها تطبيق الطريقة العلمية بتوفير الأساس الكمي وباستعمال أدوات بحوث العمليات وأساليبها كالبرمجة الخطية والبرمجة العددية، والبرمجة غير الخطية والتحليل الشبكي،..... وذلك لتمكين الإدارة من اتخاذ قرارات أكثر موضوعية.

وهناك بعض التعريفات الأخرى الذي قدمها كبار المتخصصين بهذا العلم لتحديد مفهومه[4]:

---

[1]. حامد سعد نور الشمرتي: " **بحوث العمليات مفهوما وتطبيقا**"، مكتبة الذاكرة، بغداد، 2010، ص 02.

[2]. فتحي خليل حمدان، رشيق رفيق مرعي، " **مقدمة في بحوث العمليات**"، دار وائل للنشر، ط 4، الأردن، 2004، ص 15.

[3] . حامد سعد نور الشمرتي: مرجع سابق، ص 02.

[4] . صالح مهدي محسن العامري، عواطف ابراهيم الحداد:" **تطبيقات بحوث العمليات في الإدارة**"، إثراء للنشر والتوزيع، الأردن، ط1، 2009. ص 14.

- تعريف (Wagner): " **بحوث العمليات هي المدخل العلمي الذي تستخدمه الإدارة التنفيذية لحل المشاكل** "؛
- تعريف جمعية بحوث العمليات البريطانية: " **تطبيق الطرق العلمية لحل مشاكل معقدة في إدارة نظم كبيرة تشتمل على أفراد والآلات ومواد ورأس مال في الصناعة والأعمال والحكومة والدفاع**"؛
- تعريف جمعية بحوث العمليات الأمريكية: " **أساليب تتعلق بكيفية اتخاذ قرار عملي لتصميم وتشغيل نظم (العاملين، الآلات) والتي عادة ما تتطلب تخصيص الموارد النادرة** "؛
- تعريف حمدي طه: " **حقل علمي جديد لصناعة القرار يتصف باستخدام المعرفة العلمية من خلال جهود فرق عمل تضم في عضويتها متخصصين بمختلف المعارف بغرض الاستخدام الأفضل للموارد المحدودة** "؛

خلاصة القول بعد استعراض هذه التعريفات المختلفة، فإننا نرى أنها جميعا تتمحور حول فكرة معينة يمكن أن تصاغ بالآتي كتعريف إجرائي لبحوث العمليات: " **أساليب كمية رياضية يعتمدها متخذو القرارات من المدراء على اختلاف مستوياتهم الإدارية لغرض حل المشاكل الإدارية المختلفة في المؤسسات والشركات بكافة أنواعها الصناعية والتجارية والزراعية والخدمات عن طريق تقييم للبدائل المختلفة بصيغة علمية وطريقة منهجية منظمة ومن ثم التوصل إلى حلول مثلى** ".

II- تذكير بالبرمجة الخطية:

تعتبر البرمجة الخطية من المواضيع الأساسية والمهمة في بحوث العمليات وتكمن أهميتها في كونها وسيلة لدارسة سلوك عدد كبير من الأنظمة، يقدم نموذج البرمجة الخطية طريقة كفؤءة لتحديد القرار الأمثل (أو الاستراتيجية المثلى) من بين عدد كبير من البدائل، التي يخضع كل منها إلى مجموعة من المحددات والقيود، وبشكل يساهم بتحقيق أهداف الإدارة. وهي أداة بيانية ورياضية تهتم ببناء النماذج الرياضية لمشكلة من المشاكل بإحدى الطرق الآتية: طريقة البيانية، الطريقة المبسطة، طريقة النقل، طريقة التعين والتخصيص ....الخ.

II-1 مفهوم البرمجة الخطية:

تعد البرمجة الخطية إحدى الوسائل المهمة في حل كثير من المشاكل الإدارية والإقتصادية والعسكرية، وقد ازداد تطبيقها في الآونة الأخيرة نظرا للتقدم التكنولوجي الذي ساعد على تطوير الحسابات الالكترونية المستخدمة في حل مشاكل البرمجة. تم تطويرها وإستخدامها بصورة فعلية في سنة 1947 على يد العالم الرياضي جورج دانتزنغ (George Dantzing)، لحل بعض مشكلات التخطيط في

السلاح الجو الأمريكي، في حين أن العالم الرياضي الفرنسي جين بابتستي فورير (Jean Baptise Fourier) قد تنبه لمساهماتها المحتملة في عام 1923. وقد كان أول استخدام أو تطبيق للبرمجة الخطية من قبل الإقتصادي جورج ستلجر (George Stigler) وذلك في بداية الأربعينات، حيث هدف إلى تحديد مكونات الغذاء اليومي (Diet) والتي ستزود الجسم بالحد الأدنى من احتياجاته من الفيتامينات والحديد والمواد الأخرى، وبأقل تكلفة ممكنة[1].

ويمكن تعريف البرمجة الخطية بأنها أسلوب رياضي لتوزيع مجموعة من الموارد والإمكانيات المحدودة على عدد من الحاجيات المتنافسة على هذه الموارد ضمن مجموعة من القيود والعوامل الثابتة بحيث يحقق هذا التوزيع أفضل نتيجة ممكنة، أي يكون توزيعها مثاليا[2].

إن تعبير **البرمجة** يعني وضع خطوات لحل مسألة أو موضوع ما لبلوغ وتحقيق هدف معين، أما تعبير **خطية** فيعني افتراض تغير الظاهرة التي نقوم بدراستها بصورة خطية (على شكل خط مستقيم) وكثيرا ما يستخدم هذا الافتراض لتقريب الواقع إلى صياغة رياضية سهلة.

ومما تجدر الإشارة إليه هو أن الغاية من تطبيق أسلوب البرمجة الخطية هي الوصول إلى حل نموذج البرمجة الخطية (ونموذج البرمجة الخطية هو عبارة عن مجموعة من المعادلات والمتباينات بالإضافة إلى دالة الهدف)[3]، ولا تنسى أن لكل مجموعة من المعادلات حلا، وعادة ما تكون للمعادلات الآنية حلول أي إيجاد قيم المتغيرات، وفي حالة حل نموذج البرمجة الخطية دائما نسعى إلى إيجاد الحل الأمثل وتكون الحلول على ثلاث أنواع[4]:

- **الحل:** وهو حل ممكن الوصول إليه في أية مجموعة من المعادلات.
- **الحل الممكن:** وهو الحل الذي يمكن إيجاده بعد التوصل إلى الحل في الحالة الأولى وهذا الحل يحقق القيود كافة بشكل عام.
- **الحل الأمثل:** وهو الحل الذي يمكن إيجاده بعد التوصل إلى الحل الممكن، وهذا الحل يحقق القيود كافة بوجود دالة الهدف.

وبهذا الصدد يجب التأكد من أن الحل الممكن لا يتحقق بعد وجود الحل، ولا يمكن تحقيق الحل الأمثل إلا بعد أن يتحقق الحل الممكن.

[1] . جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، فالح عبد القادر الحوري: " **بحوث العمليات والأساليب الكمية نظرية وتطبيق**"، دار جليس الزمان، عمان، 2008، ص 25.

[2]. عبد الرسول عبد الرزاق الموسوي: " **المدخل لبحوث العمليات**"، دار وائل للنشر، الأردن، 2001، ص 21.

[3] - Gérald Baillargeon ,"**Programmation linéaire appliquée** ", les édition SMG ,Québec , Canada,1996 .p 05 .

[4] . حامد سعد نور الشمرتي، مرجع سابق، ص 10.

II- 2 متطلبات وفروض نموذج البرمجة الخطية:

II-2 - 1 متطلبات استخدام البرمجة الخطية:

تتطلب مشكلة البرمجة الخطية خمس خصائص أساسية هي[1]:

- **تحديد الهدف:** أي ما تسعى لتحقيقه وهو إما زيادة الأرباح أو تقليل الكلفة، معبر عنه بصيغة رياضية يطلق عليها دالة الهدف وتصاغ دالة الهدف بالشكل التالي:

حالة تعظيم: $Max(Z) = 2x + 3y$

حالة تدنئة: $Min(Z) = 2x + 3y$

- **توفير عدد من البدائل:** تستخدم البرمجة الخطية عندما تكون لدينا بدائل لحل المشكلة فإذا كان هناك بديل واحد لحل المشكلة إذاً لا داعي لاستخدام البرمجة الخطية؛
- **محدودية الموارد:** نحتاج لاستخدام البرمجة الخطية عندما تكون الموارد محددة (نادرة) كالموارد البشرية، أو المواد، أو ساعات اشتغال الآلات. وهي بمثابة شروط لتحقيق الهدف، فإذا كان لدينا 300 ساعة في القسم الأول وكنا نحتاج لساعتين لإنتاج المنتوج الأول وثلاثة ساعات لإنتاج المنتوج الثاني فيعبر عن المشكلة كآلاتي:

$$2x_1 + 3x_2 \le 300$$

- **وجود علاقة خطية:** الخطية في البرمجة يجب أن تتوفر في دالة الهدف وفي القيود (الموارد)، بحيث أن أي تغير في كميات الإنتاج يؤدي إلى زيادة الأرباح أو تقليل التكليف بشكل خطي (طردي) مع زيادة كمية الإنتاج، وكذلك الموارد تستنفذ بشكل خطي مع زيادة كمية الإنتاج؛
- **القيود غير السالبة:** إن هذا الشرط يلبي إحدى فرضيات البرمجة الخطية وهو شرط عدم السلبية. ولذلك لا يمكن أن يكون أحد القيود ينتج متغيرات سالبة كما يلي:

$$2x_1 + 3x_2 \le -300$$

II-2-2 فروض نموذج البرمجة الخطية:

تمثل الافتراضات، الشروط العلمية الواجب توفرها في المشكلة حتى نستطيع حلها بواسطة البرمجة الخطية، أو هي المتطلبات الفنية لمشكلة البرمجة الخطية وهي[2]:

- يفترض النموذج إمكانية النسبة والتناسب في كل مكوناته (دالة الهدف والقيود الفنية)؛

---

[1]. محمد دباس الحميد، محمد العزاوي: " **الأساليب الكمية في العلوم الإدارية**"، دار اليازوري، الأردن، 2013. ص ص: 09-10.

[2]. مكيد علي: " **بحوث العمليات وتطبيقاتها الاقتصادية دروس ومسائل محلولة**"، الجزء الأول، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2015. ص 10.

- تحقيق خاصية الجمع التي تعني أن القيمة الكلية لأي مؤشر ما هي إلا حاصل جمع قيمه الجزئية؛
- يعالج نموذج البرمجة الخطية الحالات المتصفة بالتأكد التام، وهذا يعني أن القيم التي تأخذها مؤشرات النموذج هي كلها قيم محددة ومعروفة ولا يطرأ عليها تغيير خلال فترة الدراسة.

وهناك فروض أخرى منها ما يلي[1]:

- **الخطية:** يشترط ان تكون العلاقة في دالة الهدف والقيود علاقة خطية؛
- **المحدودية:** محدودية الموارد والأنشطة، أي أن هناك ندرة فيها وأنه لا يوجد عدد نهائي من الأنشطة البديلة والموارد المتاحة؛
- **عدم السلبية:** عدم إمكانية أن يكون حجم النشاط سالبا؛
- **الاستقلالية:** أن اختيار أي نشاط لا يستلزم بالضرورة اختيار نشاط آخر، أي استقلالية عناصر الإنتاج؛

II-2-3 صياغة النموذج الرياضي للبرمجة الخطية:

من اجل صياغة نموذج البرمجة الخطية يجب توفر ثلاث مجموعات من العناصر الأساسية وهي:

- **تحديد الهدف بصورة كمية:**

ويعبر عنه بدالة الهدف وهي عبارة عند الدالة المطلوب تعظيمها أو تدنيتها وهي عادة ما تكون في صورة نقدية أو طبيعية ويتوقف ذلك على طبيعة المشكلة المطلوبة تحليلها ويجب أن يكون بالإمكان التعبير عن الهدف كمياً كأن يكون الهدف تحقيق اكبر ما يمكن من الربح أو تأمين اصغر ما يمكن من الكلفة أو توفير أعظم ما يمكن من الوقت والجهد؛

- **تحديد القيود:**

يجب أن تكون الموارد المتاحة محددة، كما يجب أن تكون تلك الموارد قابلة للقياس ويتم التعبير عنها بصيغة رياضية على شكل متراجحات أو معادلات، أو خليط منها وتسمى بالقيود الهيكلية؛

- **شرط عدم السلبية:**

إذ يجب أن تكون المتغيرات القرارية في المشكلة قيد الدراسة متغيرات موجبة أو صفرية وغير سالبة.

ويمكن وضع الصيغة العامة للبرمجة الخطية كالآتي[2]:

---

[1] . محمد دباس الحميد، محمد العزاوي، مرجع سابق، ص ص: 08-09.

[2] . محمد عبد العال النعيمي، رفاه شهاب الحمداني، احمد شهاب الحمداني: " **بحوث العمليات**"، دار وائل للنشر، ط2، الأردن، 2011، ص 20.

$$Max\_or\_Min(z)=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$Subject\_to$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j(\leq,=,\geq)b_i \qquad (i=1,2,.........,m)$$

$$x_j\geq 0 \qquad (j=1,2,.........,n)$$

إذ أن: a_{ij},b_i,c_j ثوابت تحدد من سياق المشكلة؛

Z : تمثل دالة الهدف؛

X_j: المتغيرات المطلوب اتخاذ القرار بحقها؛

b_i: تمثل الموارد المحددة؛

a_{ij}: كمية الموارد المحددة من النوع i واللازم تخصيصها لكل وحدة واحدة من النشاط أو الفعالية j.

C_j: تمثل الربح أو الكلفة نتيجة تخصيص المورد i لإنتاج وحدة واحدة من النشاط أو الفعالية j.

مثال رقم (01): تنتج إحدى الشركات نوعين من السلع، نوع A ونوع B، تصنع كل سلعة على ثلاث مراحل كل مرحلة في احد الأقسام الثلاثة الموجودة في الشركة، فإذا كان تصنيع السلعة A يحتاج إلى ساعتين عمل في القسم الأول وساعة عمل في القسم الثاني وأربع ساعات عمل في القسم الثالث ويحتاج تصنيع السلعة B إلى ساعتين عمل في كل قسم كما أن عدد ساعات العمل المتاحة في القسم الأول هي 160 ساعة عمل أسبوعيا وفي القسم الثاني 120 ساعة عمل أسبوعيا وفي القسم الثالث 280 ساعة عمل أسبوعيا وإذا كان ربح الوحدة الواحدة من السلعة A هو 2 دينار ومن السلعة B هو 3 دينار.

المطلوب: نموذج برمجة خطية لتحديد حجم الإنتاج الأمثل من السلعتين إذا كان هدف الشركة هو الحصول على أكبر ربح ممكن.

الحل: لتسهيل فهم المشكلة نضعها على شكل جدول (هذه الخطوة في التمارين الأولى لتعلم الحل بسهولة).

ربح الوحدة بالدينار	الوقت اللازم للتصنيع			السلعة
	القسم الثالث	القسم الثاني	القسم الأول	
2	4	1	2	**A**
3	2	2	2	**B**
	280	**120**	**160**	**ساعات العمل المتاحة**

تكوين النموذج:

✓ تحديد المتغيرات المجهولة والتعبير عنها برموز جبرية، ولذلك:

نفرض عدد الوحدات المنتجة من السلعة A هو X_1.

نفرض عدد الوحدات المنتجة من السلعة B هو X_2.

✓ تحديد القيود والتعبير عنها بمعادلات أو متراجحات أو خليط منها:

والقيود هنا هي أن الوقت اللازم للتصنيع في كل قسم محدود ويجب أن نتجنب تجاوز هذا الحد، لاحظ أن الوقت اللازم للتصنيع يتوقف على الكمية المنتجة من السلعة A والسلعة B.

بالنسبة للقسم الأول: الوقت اللازم للتصنيع (المتاح) = (عدد الوحدات المنتجة من السلعة A)* (الوقت اللازم لتصنيع الوحدة الواحدة من السلعة A)+ (عدد الوحدات المنتجة من السلعةB)* (الوقت اللازم لتصنيع الوحدة الواحدة من السلعة B)، ويجب أن لا يتجاوز عدد الساعات العمل المتاحة في القسم الأول وكما في المتراجحة الآتية:

$$2x_1 + 2x_2 \leq 160$$

وبنفس الطريقة بالنسبة للقسمين الثاني والثالث أيضا وكما في المتراجحات الآتية:

بالنسبة للقسم الثاني:

$$x_1 + 2x_2 \leq 120$$

بالنسبة للقسم الثالث:

$$4x_1 + 2x_2 \leq 280$$

ولأن عدد الوحدات المنتجة لا يمكن أن يكون سالبا، وعلى النحو الآتي:

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

✓ تحديد دالة الهدف: $z = 2x_1 + 3x_2$

وتهدف إلى انتاج الكميات المثلى من x_1, x_2 التي تجعل دالة الهدف Z اكبر ما يمكن Maximize ودائما تختصر بـ Max .

البرنامج الخطي:

$$Max(z) = 2x_1 + 3x_2$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 160 \\ x_1 + 2x_2 \leq 120 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 280 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

II-3- حل نموذج البرمجة الخطية باستخدام طريقة الحل البياني:

يمكن حل النموذج الرياضي بطريقة الرسم البياني عندما يكون النموذج الرياضي متكون من متغيرتين فقط ويسمى أحياناً بالطريقة الهندسية، أما استخدام هذه الطريقة في الحياة العملية معدومة لأن عدد المتغيرات التي تؤثر في اتخاذ القرارات كثيرة جداً، ولكن استخدام هذه الطريقة تعتبر مدخلاً لفهم واستيعاب طريقة الحل، حيث تعطي تصوراً عن صورة احتمالات الحل الأمثل للنموذج الرياضي، وكما ذكرنا فإن هذه الطريقة تستخدم فقط في حالة احتواء النموذج الرياضي على متغيرتين فقط لأن مجال الرسم يعتمد أساساً على الإحداثيات المتعامدة (X_1,X_2)[1].

وتعتبر هذه الطريقة من الطرق البسيطة والتي تعطي نتائج دقيقة إلا أنها طريقة غير كفوءة في معالجة مشكلات البرمجة الخطية في الحياة العملية.

II-3-1 خطوات إيجاد الحل الأمثل:

وتتكون عملية الحل بطريقة الحل البياني من عدد من الخطوات التي لابد من مراعاة تسلسلها للوصول إلى الحل النهائي:

- ✓ تحويل كل متراجحات القيود إلى معادلات، وعملية التحويل هذه تجعل القيد في صيغة معادلة خطية يمكن تمثيلها بخط مستقيم؛
- ✓ تحديد نقاط تقاطع كل قيد مع المحورين والتوصيل بين هاتين النقطتين بخط مستقيم لكل قيد، وتسمى المنطقة التي تشترك فيها جميع القيود المتعلقة بالمشكلة بمنطقة الحلول الممكنة؛
- ✓ إذا كانت متراجحات القيود من نوع أصغر أو يساوي، وهي في الغالب مترافقة مع مسائل البرمجة الخطية التي يكون هدفها التعظيم، نشطب المناطق التي لاتحقق القيود وهي توجد إلى يمين المستقيم، فإن منطقة الحل الممكنة يجب أن تكون محدودة من اليمن وباتجاه نقطة الأصل وبالتالي فهي تأخذ شكل المضلع، والحل الأمثل يقع على أحد رؤوس المضلع الأبعد عن نقطة الأصل؛
- ✓ إذا كانت متراجحات القيود من نوع أكبر أو يساوي، وهي في الغالب مترافقة مع مسائل البرمجة الخطية التي يكون هدفها التدنئة، نشطب المناطق التي لا تحقق القيود وهي توجد إلى يسار المستقيم، فإن منطقة الحل الممكنة تكون خارج المضلع بدلاً من أن تقع داخله أي أن منطقة الحل الأمثل تكون غير محددة من اليمين ونقطة الحل الأمثل هي الأقرب عن نقطة الأصل؛
- ✓ إذا كانت متراجحات القيود في المشكلة خليط من ($\geq$ ، $\leq$) معاً، فإنها تكون مترافقة مع مسائل البرمجة الخطية بنوعيها التعظيم والتدنئة، ولهذه الحالة منطقة حل ممكنة على شكل مضلع؛

---

[1] . سهيلة عبد الله سعيد: " **الجديد في الأساليب الكمية وبحوث العمليات**"، دار الحامد، ط1، الأردن، 2007. ص 38.

- ✓ إيجاد إحداثيات كل نقطة من النقاط المضلع بمنطقة الحل الكلية، أي نجد قيم X_1 و X_2 عند كل نقطة؛
- ✓ نجد قيمة (Z) التي تمثل قيمة دالة الهدف عند كل نقطة من النقاط المضلع عن طريق تعويض إحداثيات النقطة رؤوس المضلع في دالة الهدف؛
- ✓ نحدد نقطة الحل الأمثل، وهي النقطة التي قيمة (z) عندها أكبر ما يمكن في حال كانت دالة الهدف التعظيم (Maximization)، أو النقطة التي قيم (z) عندها أقل ما يمكن في حالة كانت دالة الهدف تخفيض (Minimization).
- ✓ ويمكن إيجاد الحل الأمثل بطريقة مباشرة عندما يكون منطقة الحل عبارة عن مضلع متعدد الرؤوس، وذلك بجعل دالة الهدف معدومة، أي نساويها إلى الصفر، ونرسم مستقيمها على نفس المعلم، يمر هذا المستقيم من نقطة المبدأ، نسمي هذا المستقيم (Δ)، نحرك المستقيم (Δ) بصفة متوازية اتجاه رؤوس المضلع المحصل عليه من المستقيمات، وتكون النقطة التي تحقق أكبر قيمة للدالة الإقتصادية (دالة الهدف) هي آخر نقطة يصل إليها المستقيم (Δ) عند سحبه إلى الأعلى بشكل موازي لأصله، وهي نقطة حاصلة من التقاطع عدة مستقيمات مولدة وعكس في حالة التدنئة[1].

وفيما يلي توضيح لتطبيق هذه الخطوات على نموذج البرمجة الخطية:

مثال رقم (02): أوجد قيم X_1 و X_2 المثلى التي تجعل دالة الهدف اكبر ما يمكن للبرنامج التالي بإستخدام الطريقة البيانية:

$$Max(z) = 4x_1 + 3x_2$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \le 30 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 21 \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0; x_2 \ge 0$$

الحل: لإيجاد حل لهذا البرنامج نتبع الخطوات التالية:

- ✓ نستخرج المستقيمات وذلك بتحويل المتراجحات إلى معدلات كما يلي:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 30 \\ 2x_1 + 3x_2 = 21 \end{cases}$$

- ✓ على معلم متعامد نرسم هذه المستقيمات، ويكفي لذلك أن نجد نقطتين يمر بها كل مستقيم ثم نصل بينها.

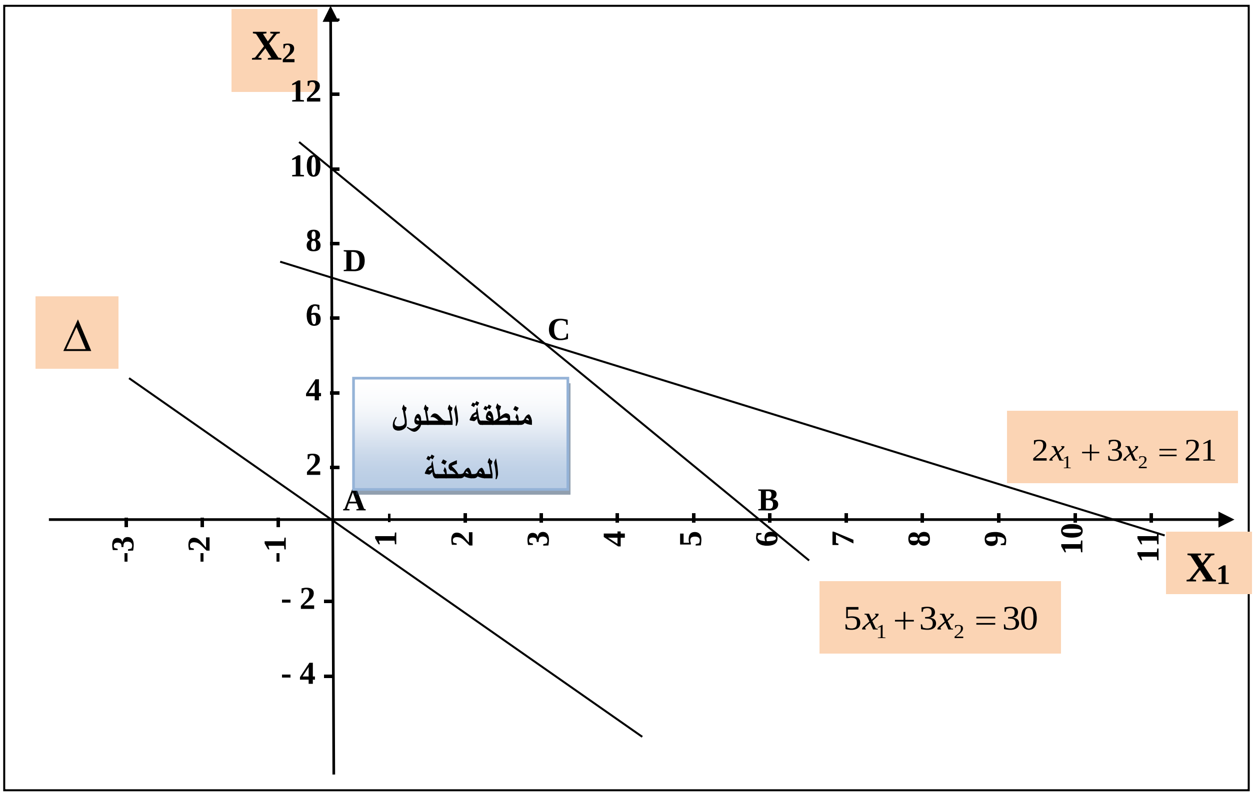
[1] . راتول محمد: " **بحوث العمليات** "، ديوان المطبوعات الجامعية، ط2، الجزائر، 2006، ص 26.

$5x_1+3x_2=30$	
x_1	x_2
0	10
6	0

$2x_1+3x_2=21$	
x_1	x_2
0	7
10,5	0

على نفس المعلم نرسم المستقيم (Δ) وهو المستقيم المحصل عليه عند وضع الدالة الإقتصادية في أدنى قيمة لها وهي: Z=0 أي: المستقيم (Δ) يمر من النقطتين:

$4x_1+3x_2=0$	
x_1	x_2
3	-4
$-2,25$	3



بعد هذا تحدد منطقة الحلول الممكنة وحسب ما هو مطلوب من القيود وهي المنطقة التي تحقق جميع القيود في وقت واحد، وهي كما مبين في الشكل المقابل (A,B,C,D).

أي نقطة توجد إلى يمين المستقيمين لا تحقق القيود، كما أن قيد عدم السلبية يجعل كل المناطق التي هي أدنى من المحور الأفقي وكل المناطق التي هي على يسار المحور العمودي مرفوضة وبالتالي فإنه لا توجد سوى منطقة واحدة هي التي تحقق جميع القيود آنيا وتشمل جميع النقاط الموجودة داخل

المنطقة (A,B,C,D) أي المنطقة غير المشطبة وتسمى هذه المنطقة بمنطقة الحلول الممكنة أو منطقة الحلول المقبولة.

عند تحريك المستقيم (Δ) إلى الأعلى نجد أن آخر نقطة يصلها في منطقة الحلول المقبولة هي النقط (C) وبالتالي تشكل لنا هذه النقطة الحل الأمثل للمسألة وهي نقطة تقاطع المستقيمين (1) و(2)، إذ نجد قيمة المتغيرتين وذلك إما هندسيا بإنزال شاقول من هذه النقطة على المحور الأفقي فنجد قيمة قيمة المتغيرتين وذلك إما هندسيا بإنزال شاقول من هذه النقطة على المحور الأفقي فنجد قيمة X_1 وإمداد مستقيم موازي للمحور الأفقي من النقطة (Δ) فنجد قيمة X_2 عند نقطة تقاطعه مع المحور العمودي، وإما أن نجد قيمة المتغيرين بحل معادلتي المستقيمين حلا مشتركا كما يلي:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 30 \ldots\ldots\ldots(1) \\ 2x_1 + 3x_2 = 21 \ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

بطرح المعادلة (1) من المعادلة (2) نجد:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 30 \\ 2x_1 + 3x_2 = 21 \end{cases}$$

$$3x_1 = 9 \Rightarrow x_1 = 3$$

بالتعويض في إحدى المعادلات نجد: $x_2 = 5$

وبالتالي فإن قيمتي المتغيرين اللذين يحققان أعلى قيمة للدالة الإقتصادية هما: $C:(x_1 = 3, x_2 = 5)$

يمكن التحقق من أن هذه النتيجة تحقق جميع القيود:

القيد الأول: قيد محقق تماما $5\times3+3\times5=30$

القيد الثاني: قيد محقق تماما $2\times3+3\times5=21$

ومنه لا توجد طاقة غير مستعملة، ولمعرفة القيمة العظمى للدالة الاقتصادية يكفي أن نعوض القيمتين المحصل عليهما في هذه الدالة فنحصل على ما يلي:

$$Z_C = 4x_1 + 3x_2 = 4\times3+3\times5 = 27$$

وهي أعلى قيمة للدالة الاقتصادية، ولا يمكن أن توجد أية قيم أخرى للمتغيرتين تعطيان أعلى من هذه القيمة وتحقق في نفس الوقت جميع القيود، والجدول يوضح ذلك:

نقاط	أحداثي نقاط	قيمة دالة الهدف
A	$A:(x_1 = 0, x_2 = 0)$	$Z_A = 0$
B	$B:(x_1 = 6, x_2 = 0)$	$Z_B = 24$
C	$C:(x_1 = 3, x_2 = 5)$	$Z_C = 27$
D	$D:(x_1 = 0, x_2 = 7)$	$Z_D = 21$

ملاحظة: إذا وجد حل أمثل لبرنامج خطي ذي متغيرتين، فإن هذا الحل يوجد عند أحد رؤوس مضلع منطقة الحل الممكن.

II-3- 2 حالات خاصة في الحل البياني:

أن مشكلات البرمجة الخطية بصورة عامة يمكن تطبيقها في مجالات واسعة وبنجاح، إلا أن هناك حالات خاصة يجب مراعاتها، ومن هذه الحالات هي:

- **تعدد الحلول المثلى:**

ونحصل على هذا النوع من الحلول عندما تكون هناك أكثر من نقطة واحدة في منطقة الحلول الممكنة تعطي القيمة نفسها لدالة الهدف التي تكون أعلى القيم في حالة كون دالة الهدف من نوع التعظيم أو تكون أقل القيم حين تكون دالة الهدف من نوع تدنئة.

- **عدم وجود حلول:**

هنا يحصل هذا النوع من الحلول عندما لا يمكن تعيين منطقة الحلول الممكنة ولا يوجد هنا حل أساسي ابتدائي مقبول، أي قيود لا تتقاطع في منطقة حل واحدة، بحيث تكون منطقة تقاطع القيود عبارة عن مجموعة خالية [1].

- **منطقة الحل الممكن غير محدودة:**

ويعني ذلك عدم إمكانية تحديد نقطة حل أمثل وهذا يعني زيادة متغير أو أكثر من متغيرات المشكلة ومن ثم الربح دون مخالفة لأي قيد من القيود المشكلة وتعتبر هذه الحالة نظرية وبعيدة عن الواقع وبالنسبة لطريقة الرسم البياني فإن هذا يعني بأن منطقة الحل مفتوحة وبدون نهاية علماً بأن هذه الحالة تنطبق فقط على نموذج البرمجة الخطية الذي دالة الهدف له تعظيم[2].

ويمكن اعتبار هذه الحالة تقع أيضا عندما تكون المشكلة بدالة هدف تعظيم ويكون هناك تناقض بين دالة الهدف والقيود فتكون هذه الأخيرة أكبر أو تساوي وتعكس الشكل القانوني (القيود أقل أو تساوي).

- **حالة حياد أحد القيود:**

وهي من المشاكل الشائعة في مشاكل البرمجة الخطية الكبيرة التي تحتوي على عدد كبير من القيود، مما ينتج عنها قيد فائض لا حاجة له وليس له أي تأثير على الحل، وهذا يعني وجود قيود لها أهمية أكثر من غيرها، لذلك فإن استخدام الأهم يغني عن استخدام الأقل أهمية.

---

1 - Gérald Baillargeon ,op-cit , P 55 .

2 . جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، فالح عبد القادر الحوري، مرجع سابق، ص 52.

II-4- البرمجة الخطية وطريقة السمبليكس (Simplex):

طريقة السمبليكس وسيلة رياضية ذات كفاءة عالية في استخراج الحلول المثلى لمشكلات البرمجة الخطية بصورة عامة، وتستخدم هذه الطريقة لحل النماذج الرياضية للبرمجة الخطية جبرياً مهما كان عدد المتغيرات وهي الأكثر استخداماً لحل النماذج الرياضية[1].

تعمل هذه الطريقة بشكل مشابه تماماً للطريقة البيانية في كيفية الوصول للحل الأمثل، حيث تقوم هذه الطريقة بفحص ذروات منطقة الإمكانات بشكل متسلسل وباستخدام مفاهيم رياضية بسيطة، ويتم بشكل متكرر، وهذا يعني إعادة نفس الإجراءات مرة تلو الأخرى ولحين الوصول للحل الأمثل.

II-4- 1 آلية عمل طريقة السمبليكس:

في حالة وجود أكثر من ثلاث متغيرات في مشكلة فإنه لا يمكن استخدام الطريقة البيانية وإنما علينا استخدام طرقة أخرى المسماة بالسمبليكس التي ابتكرها دانزاك (Geroge Dantzig) عام 1947 وهي عبارة عن أسلوب اختياري تكراري لتحليل مشاكل البرمجة الخطية ويعتمد هذا الأسلوب على اختيار المتغيرات ذات التأثير الأساسي على كل من دالة الهدف والقيود ويهمل المتغيرات الأخرى التي لا تؤثر على دالة الهدف والقيود[2].

أ. **تحويل نموذج البرمجة الخطية من الصيغة الأولية إلى الصيغة النموذجية (القياسية):**

قبل الحل بطريقة النموذج بطريقة السمبليكس، وتحويل نموذج البرمجة الخطية من الصيغة الأولية إلى الصيغة النموذجية، وفيها تكون كل القيود على شكل معادلات، أما دالة الهدف فتكون إما في صيغة تعظيم أو صيغة تدنئة، تعتبر الصيغة النموذجية ضرورية لإيجاد الحل الأساسي للبرنامج بطريقة السمبليكس، إذ يجري تحويل أية صيغة مهما كان شكلها إلى الصيغة النموذجية، بإعتبار ذلك أول خطوة في إتجاه الحل.

تتطلب الخطوة الأولى في الطريقة السمبليكس تحويل القيود من صيغة متراجحات إلى صيغة معادلات كالأتي [3]:

- إذا كانت إشارة القيد أقل من أو يساوي يتم إضافة متغير مكمل إلى الجانب الأيسر للقيد ويسمى " **متغير الفجوة** " أو المتغير الزائد أو المتغير الراكد ويرمز له بالرمز (S_i ;i=1,2,……m)

---

1. سهيلة عبد الله سعيد، مرجع سابق، ص 53.
2. محمد عبد العال النعيمي، رفاه شهاب الحمداني، احمد شهاب الحمداني، مرجع سابق، ص 45.
3. جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، فالح عبد القادر الحوري، مرجع سابق، ص 70.

ويظهر هذا المتغير بمعامل صفر في دالة الهدف، ويمثل المتغير الفجوة موارد غير مستخدمة مثل الوقت المستغرق على الآلة، ساعات العمل، الأموال، ساحات المحزن، أو أي من الموارد في المشكلات التي تواجهها المؤسسات. إذا كان القيد مثلا كما يلي:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ...a_{1n}x_n \leq b_1$$

يصبح القيد:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ...a_{1n}x_n + S_1 = b_1$$

- إذا كانت إشارة القيد أكبر من أو يساوي يتم طرح متغير فائض من الجانب الأيسر للقيد ويسمى " **متغير الفجوة** " ويرمز له بالرمز (S_i ;i=1,2,……m) ثم نضيف متغير وهمي أو اصطناعي (Artificielle) إلى الجانب الأيسر للقيد ويرمز له بالرمز (Ai)، ويظهر المتغير الفجوة بمعامل صفر في دالة الهدف، أما **المتغير الاصطناعي** فيظهر بمعامل (M) في دالة الهدف والتي ترمز إلى معامل رقمي كبير جداً، أما إشارتها في دالة الهدف فتكون موجبة(M+)عندما تكون دالة الهدف تخفيض أو تقليل، أما إذا كانت دالة الهدف تعظيم فإن إشارتها تكون سالبة (M−). فمثلا إذا القيد على الشكل التالي:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ...a_{1n}x_n \geq b_1$$

يصبح القيد:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ...a_{1n}x_n - S_1 + A_1 = b_1$$

تضاف المتغيرات الاصطناعية إلى المتراجحات الخطية التي تفصل بين طرفيها علامة من نوع أكبر أو يساوي أو المساواة وذلك بهدف الحصول على الحل الأساسي الممكن، وبعد أن يتم الحصول على هذا الحل (الحل الممكن) يجب أن يتم التخلص من هذه المتغيرات وأبعادها عن النموذج (كما سيأتي شرحه في حالة طريقة M الكبيرة أو Big−M)[1].

- إذا كانت إشارة القيد يساوي (=) يتم إضافة متغير وهمي أو اصطناعي إلى الجانب الأيسر للقيد ويرمز له بالرمز (Ai)، والجدول التالي يبين القواعد السابقة:

[1]. حامد سعد نور الشمرتي، مرجع سابق، ص54.

إشارة القيد	الإجراء على القيد	دالة الهدف تدنئة (Min)	دالة الهدف تعظيم (Max)
اقل من أو يساوي	$+S_i$	$+0S_i$	$+0S_i$
أكبر من أو يساوي	$-S_i+A_i$	$0S_i+MA_i$	$0S_i-MA_i$
يساوي	$+A_i$	$+MA_i$	$-MA_i$

ب. إعداد جدول الحل الأولي:

تبدأ الطريقة السمبليكس بحل الأولي ممكن حيث تكون قيم جميع المتغيرات الحقيقية (مثل) مساوية لـ(0)، ينتج عن هذا الحل الإعتيادي ربحاً مقداره (0)، وتبدأ الطريقة المبسطة عند هذه النقطة ومن ثم سنتحرك نحو بقية النقاط عند الأركان الأخرى إلى أن نصل إلى الحل الأمثل.[1]

II-4- 2 تطبيق طريقة السمبليكس على مشكلة التدنئة أو التقليل:

في حالة التدنئة تكون القيود من النوع أكبر أو تساوي فتطرح متغيرات الفجوة من الطرف الأيسر وذلك للايفاء بشرط الصيغة النموذجية، ولهذا السبب يستعان بمتغيرات أخرى تسمى بالمتغيرات الإصطناعية تضاف إلى النموذج بعد طرح المتغيرات الفجوة وذلك لإمكانية الحصول على الحل الممكن وكذلك عندما تكون القيود من نوع مساواة تضاف المتغيرات الإصطناعية لنفس السبب، ولقد سبق لنا في هذا الفصل شرح كيف يتم معاملات المتغيرات الاصطناعية لإيجاد الصيغة النموذجية.

وبعد الحصول على الحل الممكن، يجب التخلص من هذه المتغيرات (الإصطناعية) وإبعادها عن جداول السمبليكس، لأن بقاءها في مراحل حل السمبليكس هو علامة غير صحيحة للحصول على الحل الأمثل أو بصيغة أخرى عند بقائها لا يمكن الحصول على الحل الأمثل.[2]

تشبه مشكلات التقليل إلى حد بعيد مشكلات التعظيم التي تناولناها أيضا في هذا الفصل، الفرق بينهما يكمن في صف (ΔZ) طالما أن هدفنا الآن هو تقليل التكاليف، فإن المتغير الجديدة الذي سيدخل إلى جدول الحل (عمود الإرتكاز) سيكون المتغير الذي يمثل **أكبر قيمة بإشارة سالبة** في الصف (ΔZ)، وهكذا فإننا سنختار المتغير الذي يقلل التكاليف بأكبر قدر ممكن، ويتم الوصول للحل الأمثل في مشكلات التقليل عندما تكون جميع القيم في صف (ΔZ) **موجبة أو معدومة** تماماً عكس ما هو عليه في حالات التعظيم، جميع خطوات السمبليكس الأخرى كما سنراها لاحقاً ستبقى كما في حالات التعظيم.

وهناك طريقتان للتخلص من المتغيرات الاصطناعية:

[1] -P.Chrétienne, Y.Pesyuex, G.Raudjean ," **Algorithmes et pratique de programmation linéaire**", édition telmic, Paris, 1980. P 17 .

[2] . حامد سعد نور الشمرتي، مرجع سابق، ص 67 .

- ✓ طريقة (M) الكبيرة (Big–M)؛
- ✓ طريقة المرحلتين (Two–Phase).

II-4-2 -1 طريقة (M) الكبيرة (Big–M):

المثال التالي يوضح أهم الفوارق في تطبيق الطريقة السمبليكس بأسلوب (M) الكبيرة على مشكلة التقليل، والذي يهدف إلى إيجاد أقل التكاليف عند إنتاج نوعين من السلع[1].

مثال رقم (03): تنتج مؤسسة لصناعة الإلكترونيات نوعين من المنتجات هما: A و B ، يتطلب إنتاج كل منتج المرور في مرحلتين، ويوجد لدى الشركة على الأقل (6) ساعات يومياً لأعمال المرحلة الأولى، ولا يقل عن (4) ساعات في اليوم الواحد مخصصة لأعمال المرحلة الثانية، والجدول التالي يبين الوقت الذي تحتاجه الوحدة الواحدة من كلا المنتجين، بالإضافة إلى تكلفة إنتاج كل منتج.

المنتج	المرحلة الأولى	المرحلة الثانية	التكلفة
A	1	1	3
B	3	1	4

المطلوب: نفترض أن الشركة ترغب في تخفيض تكاليفها الكلية، ما هي الكميات التي تنتجها من كل نوع.

الحل: يتم أولاً بناء نموذج البرمجة الخطية لهذه المشكلة، وعلى النحو الآتي:

X_1: تمثل عدد الوحدات المنتجة من المنتج A.

X_2: تمثل عدد الوحدات المنتجة من المنتج B.

$$Min(z) = 3x_1 + 4x_2$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \end{cases}$$

$$x_1; x_2 \geq 0$$

أولاً: نحول القيود إلى الصيغة النموذجية:

القيد الأول: $x_1 + 3x_2 - S_1 + A_1 = 6$

القيد الثاني: $x_1 + x_2 - S_2 + A_2 = 4$

[1] - Gérald Baillargeon ,op-cit, P 157 .

إن المتغيرات الفجوة لا تحقق أي ربح، فإنه سيتم إضافتها إلى دالة الهدف الأصلية وبمعامل (0)، والمتغيرات الاصطناعية تضاف في حالة (Min) وبمعامل (M) وهو عدد كبير جداً، وتطرح في حالة (Max)، وعليه تصبح معادلة دالة الهدف:

$$Min(z) = 3x_1 + 4x_2 + 0S_1 + MA_1 + 0S_2 + MA_2$$

ثانياً: تكوين جدول الحل الأساسي الأول وبنفس القواعد المشار إليها سابقا:

متغيرات القرار

متغيرات الفجوة

متغيرات الاصطناعية

T_1	C_J	3	4	0	M	0	M		
CB	XB	X_1	X_2	S_1	A_1	S_2	A_2	B	$\frac{B}{X_2}$
M	A_1	1	3	-1	1	0	0	6	2
M	A_2	1	1	0	0	-1	1	4	4
Z_J		2M	4M	$-M$	M	$-M$	M		
$\Delta Z = C_J - Z_J$		3−2M	4−4M	M	0	M	0	Z=10M	

يلاحظ من جدول الحل الأولي أن المتغيرات الأساسية هي المتغيرات الإصطناعية، نختبر أمثلية الحل من خلال صف (ΔZ) في جدول الحل الأولي حيث نلاحظ وجود قيم سالبة وهذا يعني عدم تحقق الحل الأمثل، حيث أن الوصول إلى الحل الأمثل في مشاكل التدنئة مشروط بأن تكون جميع ($\Delta Z \geq 0$)، نبحث عن حل أفضل من خلال تحديد المتغير الذي سوف يدخل إلى الحل الأساسي، وتحديد المتغير الذي سيغادر الحل الأساسي، العمود الأمثل الذي يعطي المتغير الذي سيدخل إلى الحل فهو المقابل لأكبر قيمة سالبة في (ΔZ) وفي حالة وجود (M) الكبرى في معاملات فإننا نقارن بين معاملات (M) وفي حالة عدم وجود (M) الكبرى في المعاملات نقارن مقارنة عادية بين الأعداد وفي هذه الحالة المتغير (X_2) الذي قيمته في السطر الأخير المقابلة له تساوي (4−4M) وهي أعلى قيمة بإشارة سالبة في الصف (ΔZ) وبالتالي فإن (X_2) هو المتغير الداخل وعموده هو العمود الإرتكاز كما مبين في الجدول أعلاه.

ينبغي أن نحدد المتغير الذي سيغادر الحل سنقسم الكمية الموجودة في عمود (B) على القيمة المقابلة له في عمود الإرتكاز وعليه:

$$Min\left\{\frac{6}{3} = 2, \frac{4}{1} = 4\right\} = Min\{2, 4\} = 2$$

ونختار أقل نسبة موجبة وهي (2) وبذلك فإن (A_1) هو المتغير الخارج من الحل الأساسي وصفه وهو الصف الإرتكاز، وأن الرقم (3) هو العنصر الإرتكاز.

نقوم بإجراء التعديل الأول عن طريق تكوين جدول جديد نحصل بموجبه على حل أفضل من الحل الأولي وذلك بعد إجراء الحسابات الآتية:

تحتسب قيم صف المتغير الداخل إلى الحل عن طريق قسمة قيم عناصر الصف الإرتكاز على عنصر الإرتكاز، لدينا القيم الجديدة لصف الإرتكاز كما يلي:

$$X_1=\left(\frac{1}{3};\frac{3}{3};\frac{-1}{3};\frac{1}{3};\frac{0}{3};\frac{0}{3};\frac{6}{3}\right)=\left(\frac{1}{3};1;\frac{-1}{3};\frac{1}{3};0;0;2\right)$$

تكوين قيم الصف الثاني (A_2):

قيم الصف الثاني الجديدة =

$$A_2=(1;1;0;0;-1;1;4)-1\left(\frac{1}{3};1;\frac{-1}{3};\frac{1}{3};0;0;2\right)=\left(\frac{2}{3};0;\frac{1}{3};\frac{-1}{3};-1;1;2\right)$$

يتم احتساب قيم صف (Z_J) كما يلتي:

$$Z_J=CB'X_JS_JA_J$$

$$Z_J=(4\quad M)\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0\\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{3}+\frac{2M}{3} & 4 & \frac{-4}{3}+\frac{M}{3} & \frac{4}{3}-\frac{M}{3} & -M & M\end{pmatrix}$$

أما قيمة دالة الهدف هي:

$$Z\ =CB'B=(4\quad M)\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=8+2M$$

وبموجب الحسابات السابقة نحصل على الجدول التالي:

T_2	C_J	3	4	0	M	0	M		
CB	XB	X_1	X_2	S_1	A_1	S_2	A_2	B	$\frac{B}{X_1}$
4	X_2	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{-1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	2	6
M	A_2	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{3}$	−1	1	2	3
Z_J		$\frac{4}{3}+\frac{2M}{3}$	4	$\frac{-4}{3}+\frac{M}{3}$	$\frac{4}{3}-\frac{M}{3}$	−M	M		
$\Delta Z=C_J-Z_J$		$\frac{5}{3}-\frac{2M}{3}$	0	$\frac{4}{3}-\frac{M}{3}$	$\frac{-4}{3}+\frac{4M}{3}$	M	0	Z=8+2M	

نختبر أمثلية الحل في جدول الثاني فنلاحظ وجود قيم سالبة، فنختار أعلى قيمة بإشارة سالبة، وتقع تحت المتغير (X_1)، ويكون المتغير الداخل (X_1)، وعموده هو عمود الإرتكاز ثم نحدد المتغيرة الخارج من الحل الأساسي كما مر سابقاً فيكون (A_2) وصفه هو صف الإرتكاز، ويكون الرقم $\left(\frac{2}{3}\right)$ هو عنصر الإرتكاز، وبناء على هذا تتم عملية إعادة بناء الجدول الجديد ويكون على الشكل التالي:

T_3	C_J	3	4	0	M	0	M	
CB	**XB**	X_1	X_2	S_1	A_1	S_2	A_2	**B**
4	X_2	0	1	−0,5	0,5	0,5	−0,5	**1**
3	X_1	1	0	0,5	−0,5	$\frac{-3}{2}$	$\frac{3}{2}$	**3**
Z_J		3	4	−0,5	0,5	−2,5	2,5	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		**0**	**0**	**0,5**	**M−0,5**	**2,5**	**M−2,5**	**Z=13**

جدول الحل الأمثل لأن: $\Delta Z \geq 0$

نقوم بتقييم الحل من خلال (ΔZ)، حيث نلاحظ بأن جميع القيم أكبر من أو تساوي صفر وهذا يدل على أن الحل الحالي يمثل حل الأمثل، ويتلخص الحل الأمثل فيما يلي:

$$X_1 = 3; X_2 = 1; S_1 = 0; S_2 = 0; Z = 13$$

ملاحظة هامة:

- ✓ **إذا خرجت متغيرة الإصطناعية من الأساس فيمكننا الاستغناء عن حساب عناصر عمود المتغيرة الإصطناعية التي خرجت لأنها لا يمكن أن تدخل إلى أساس مرة أخرى[1]؛**
- ✓ **تعطى الأولية الخروج من الأساس في حالة الانحلال (تعدد البدائل) لمتغيرة الإصطناعية.**

II-4-2 -2 طريقة المرحلتين (Two−Phase):

بعد أن لاحظنا تعقد العمليات الحسابية بعض الشيء في طريقة (M) الكبيرة وخاصة عندما تكون العمليات الحسابية يدوية، هناك طريقة أخرى أقل صعوبة مما في الطريقة السابقة وهي طريقة المرحلتين، يستعمل هذا الطريقة عندما تستعمل المتغيرات الإصطناعية في نماذج البرمجة الخطية بغية الحصول على الحل الممكن لهذه النماذج.

[1]. جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، فالح عبد القادر الحوري، مرجع سابق، ص 85.

وتستخدم هذه الطريقة لإستبعاد أثر المتغيرات الإصطناعية في نماذج البرمجة الخطية والحصول على الحل الأمثل، وتكون هذه الطريقة على مرحلتين[1]:

- **المرحلة الأولى: (Phase I)** وهنا تظهر دالة الهدف فقط بالمتغيرات الإصطناعية وبمعامل واحد وتستبعد المتغيرات الأخرى كافة من دالة الهدف (سواء أكانت متغيرات القرار أم متغيرات الفجوة)، هذا إذا كانت دالة الهدف من نوع تدنئة، وتظهر المتغيرات الإصطناعية في دالة الهدف بمعاملات (-1) إذا كانت دالة الهدف من نوع تعظيم، وكما يأتي:

$$Min(Z) = A_1 + A_2 + ... + A_m$$
$$Max(Z) = -A_1 - A_2 - .... - A_m$$

وتنتهي المرحلة الأولى في حالة (Min) أو (Max) عندما تساوي دالة الهدف صفر أي يوجد مرحلة ثانية (يوجد حل أمثل)، أما في حالة عدم المساواة دالة الهدف للصفر في نهاية المرحلة الأولى فلا يوجد حل أمثل ولا وجد مرحلة ثانية[2].

- **المرحلة الثانية: (Phase II)** وفي هذه المرحلة نستمر في حل المسألة و وهنا تظهر دالة الهدف على حقيقتها، أي بمعاملات المتغيرات القرار كما هي في النموذج، وتظهر متغيرات الفجوة بمعاملات أصفار وكما هي في الحالة الطبيعية و على النحو الآتي:

$$Min(Z) = CX_1 + C_2X_2 + ... + C_nX_n + 0S_1 + 0S_2 + ...0S_m$$
$$Max(Z) = CX_1 + C_2X_2 + ... + C_nX_n + 0S_1 + 0S_2 + ...0S_m$$

وهنا يكمل الحل بجداول السمبلكس وكما مر بنا إلى أن نصل إلى جدول الحل الأمثل.

مثال رقم (04): حل نموذج البرمجة الخطية باستعمال طريقة المرحلتين

$$Min(z) = 2x_1 + x_2$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 3 \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 3 \end{cases}$$
$$x_1; x_2 \geq 0$$

أولاً: نحول القيود إلى الصيغة النموذجية:

القيد الأول: $3x_1 + x_2 - S_1 + A_1 = 3$

القيد الثاني: $4x_1 + 3x_2 - S_2 + A_2 = 6$

[1]. حامد سعد نور الشمرتي، مرجع سابق، ص 10.

[2] - Gérald Baillargeon ,op-cit, P 147 .

القيد الثالث: $x_1 + 2x_2 + S_3 = 3$

المرحلة الأولى:

حل بدالة الهدف التالية: $Min(z) = A_1 + A_2$

T_1	C_J	0	0	0	0	0	1	1		
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	B	$\frac{B}{X_1}$
1	A_1	3	1	-1	0	0	1	0	3	1
1	A_2	4	3	0	-1	0	0	1	6	$\frac{3}{2}$
0	S_3	1	2	0	0	1	0	0	3	3
Z_J		7	4	-1	-1	0	1	1		
$\Delta Z = C_J - Z_J$		-7	-4	1	1	0	0	0	Z=9	

نلاحظ وجود قيم سالبة وهذا يعني عدم تحقق الحل الأمثل، حيث أن الوصول إلى الحل الأمثل في مشاكل التدنئة مشروط بأن تكون جميع ($\Delta Z \geq 0$)، نبحث عن حل أفضل من خلال تحديد المتغير الذي سوف يدخل إلى الحل الأساسي، وتحديد المتغير الذي سيغادر الحل الأساسي، المتغيرة التي تدخل إلى الأساس هي:(X_1) والتي تخرج من الأساس هي: (A_1) وبإتباع نفس خطوات السمبليكس السابقة نقوم بإعداد الجدول الحل الأساسي الثاني:

T_2	C_J	0	0	0	0	0	1	1		
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	B	$\frac{B}{X_2}$
0	X_1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	0	1	3
1	A_2	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$	-1	0	$\frac{-4}{3}$	1	2	$\frac{6}{5}$
0	S_3	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{-1}{3}$	0	2	$\frac{6}{5}$
Z_J		0	$\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$	-1	0	$\frac{-4}{3}$	1		
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{4}{3}$	1	0	$\frac{7}{3}$	0	Z=2	

نلاحظ من خلال الجدول وجود قيم سالبة أي مزال هناك فرص أخرى لتقليل من التكاليف، وأكبر قيمة سالبة هي للمتغير (X_2) وهي التي تدخل إلى الأساس، كما نلاحظ أيضا أن هناك متغيرتين

مرشحتين للخروج وهما $(S_3),(A_2)$ وهنا **تعطى أولوية الخروج للمتغيرة الإصطناعية** للتقريب الأكثر للحل، أي المتغيرة التي تخرج من الأساس هي (A_2) ومنه الجدول الحل الأساسي يكون كالآتي:

T_3	C_J	0	0	0	0	0	1	1	
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	B
0	X_1	1	0	$\frac{-3}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$
0	X_2	0	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{-3}{5}$	0	$\frac{-4}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{5}$
0	S_3	0	0	-1	1	1	1	-1	0
Z_J		0	0	0	0	0	0	0	Z= 0
$\Delta Z = C_J - Z_J$		**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	

بما أن: $\Delta Z \geq 0$ **و** $Z = 0$ **توجد مرحلة ثانية**

ننتقل إلى المرحلة الثانية، ويتم ذلك بحذف أعمدة معاملات المتغيرات الإصطناعية من جدول الحل الأخير من المرحلة الأولى.

المرحلة الثانية: وفي هذه المرحلة نستمر في حل المسألة وبدالة الهدف الأصلية (متغيرات القرار، ومتغيرات الفجوة) أي حذف المتغيرات الإصطناعية، أما الجدول الأول من المرحلة الثانية يتشكل بعد بإفراغ البيانات الجدول السابق فيه واختبار الحل.

دالة الهدف تكتب بشكل التالي:

$$Min(z) = 2x_1 + x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

ويكون الجدول الحل الأساسي الأول في المرحلة الثانية كالآتي:

T_1	C_J	2	1	0	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B
2	X_1	1	0	$\frac{-3}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
1	X_2	0	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{-3}{5}$	0	$\frac{6}{5}$
0	S_3	0	0	-1	1	1	0
Z_J		2	1	$\frac{-2}{5}$	$\frac{-1}{5}$	0	$Z=\frac{12}{5}$
$\Delta Z = C_J - Z_J$		**0**	**0**	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	**0**	

بما أن: $\Delta Z \geq 0$ ومنه الجدول الأول من المرحلة الثانية هو جدول الحل الأمثل

وهنا تكون قيم الحل الأمثل كما يلي:

$$X_1 = \frac{3}{5}; X_2 = \frac{6}{5}; S_1 = S_2 = S_3 = 0; Z = \frac{12}{5}$$

II-4- 3 حالات ومشاكل خاصة عند الحل بطريقة السمبليكس:

إستعرضنا الحالات الخاصة للحل بالطريقة البيانية، سنعود لوصف هذه الحالات عند الحل بطريقة السمبليكس:

أ. حالة عدم وجود حل ممكن:

تحدث عدم إمكانية الحل عندما لا نجد حلا مرضيا لجميع القيود، ويمكن الإشارة إلى عدم إمكانية الحل بمجرد النظر إلى جدول الحل النهائي، إذ نجد فيه أن جميع القيم صف (ΔZ) نشير إلى الوصول للحل الأمثل، لكن نجد أنه لا يزال هناك متغير اصطناعي في الجدول أدناه جدول الحل النهائي لمشكلة برمجة خطية من نوع التدنئة الجدول مثالا عن مشكلة برمجة خطية لم تتم صياغتها بشكل صحيح، ربما تتضمن هذه المشكلات قيوداً متضاربة، عدم وجد حل ممكن يكون ممكناً لبقاء المتغير الاصطناعي في مزيج الحل، رغم أن جميع القيم في الصف (ΔZ) موجبة أو معدومة (وهو المعيار المعتمد في الوصول للحل الأمثل في حالة التدنئة.[1]

[1] صالح مهدي محسن العامري، عواطف ابراهيم الحداد، مرجع سابق، ص: 184.

ب. عدم محدودية الحل:

وهي الحالة التي تكون فيها جميع عناصر عمود عنصر الإرتكاز **أقل أو تساوي الصفر**، حيث يستحيل إختيار المتغيرة التي تخرج من الأساس، لأن الخوارزمية تشترط على المتغيرة التي تخرج من الأساس بأنها المقابلة لأصغر نسبة موجبة بين عناصر عمود الثوابت وعناصر عمود عنصر الإرتكاز[1].

ت. **حالة الإنحلال:**

نكون أمام حالة الإنحلالية عندما نجد متغيرتين على الأقل مرشحتين للدخول إلى الأساس (حيث تساوت النسبة الموجبة الدنيا التي على أساسها يتم اختيار المتغير الذي يدخل الأساس)، أو متغيرتين على الأقل مرشحتين للخروج من الأساس، وفي الحالتين نختار واحدة عشوائياً بسبب عدم وجود معيار محدد لتحديد المتغير الخارج أو الداخل للأساس، وعند استخدام طريقة الحل المبسطة قد تظهر حالة الإنحلال في أحد مراحل الحل، وإما تستمر لنهاية الحل أو تختفي قبل الوصول إلى الحل الأمثل، وعند استمرار حالة الانحلال إلى نهاية الحل لن تتحسن قيمة دالة الهدف وتبق على حالها[2].

ث. تعدد الحلول المثلى:

تعدد الحلول المثلى أو وجود أكثر من حل أمثل بديل يمكن معرفتها عندما نستخدم طريقة السمبليكس وذلك عن طريق إلقاء نظرة على الجدول النهائي، فإذا كانت قيم المتغيرات القرار في الصف (ΔZ) مساوي للصفر رغم عدم وجودها في مزيج الحل، فهذا يعني وجد أكثر من حل أمثل بديل[3].

III - مسائل التعين (التخصيص):

يعد أسلوب التخصيص واحد من أساليب بحوث العمليات التي تحل بموجبها الكثير من المشاكل في الحياة العملية، وتهدف إلى اختيار أفضل تخصيص يؤدي إلى الوصول إلى الأدنى من التكاليف وفي نفس الوقت تعد من الحالات الخاصة لنماذج النقل.

وان كفاءة التخصيص هي إحدى معايير الإدارة العليا لما لها من أثار على تحقيق أهداف الشركة بأقل التكاليف ولهذا تعتبر مشكلة التخصيص حالة خاصة من مشاكل البرمجة الخطية التي تتعلق بتحديد أفضل توزيع كتوزيع المدراء على المشاريع أو الباعة على المناطق الجغرافية المحلية أو العقود على المتعهدين أو الأعمال على الآلات أو تخصيص المحامين على الزبائن وغيرها.

---

1. راتول محمد، مرجع سابق، ص 78.
2. جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، فالح عبد القادر الحوري، مرجع سابق، ص ص: 93-95 .
3. صالح مهدي محسن العامري، عواطف ابراهيم الحداد، مرجع سابق، ص: 187.

III - 1 مفهوم وشروط مشكلة التخصيص:

تعرف مشكلة التخصيص بأنها وسيلة تساهم في تحقيق الاستخدام الأمثل للموارد المتاحة بهدف تحقيق أقصى العوائد أو تخفيض التكاليف إلى أدنى مستوى ممكن، وتعد مشكلة التخصيص من مشاكل التوزيع السهلة المعالجة والمقيدة في الوقت إذا تعود بساطة استخدامها إلى شروطها التي تقتضي وجود عدد من العمليات (أعمال، أفراد،...) بهدف توزيعها على التسهيلات المتاحة بحيث تخصص عملية واحدة لكل نوع من التسهيلات (الإمكانات المتاحة كالمكائن مثلاً)[1].

إن بساطة استخدامها تعود بالدرجة الرئيسة إلى شروط تطبيقها وهي[2]:

- تساوي عدد الأشخاص مع عدد العمليات أو الوظائف المطلوب إنجازها؛
- الوسيلة المتوفرة (عامل، الآلة) تؤدي عمل واحد، وعدم السماح لها بالقيام بأكثر من ذلك؛
- كلفة انجاز كل مهمة من قبل كل وسيلة من الوسائل معروفة ومحددة مسبقا؛
- تحقق شرط عم السلبية، حيث يفترض عدم وجود قيم سالبة.

إن مجالات تطبيق نموذج التخصيص في الحياة العملية كثيرة ومن أهمها[3]:

- تخصيص المدراء للمشاريع؛
- تخصيص مندوبي البيع إلى المناطق البيعية المختلفة؛
- تخصيص الأعمال للمكائن أو الخطوط الإنتاجية؛
- تخصيص المحاسبين للشركات في مكاتب التدقيق والمحاسبة؛
- توزيع العقود على المتعهدين أو المقاولين؛
- تخصيص وسائل نقل معينة لنقل السلع من مكان لأخر.

وهناك تطبيقات أخرى كثيرة لهذا الأسلوب منشورة في المجلات المتخصصة في بحوث العمليات ثم تقديم حلول لبعض المشاكل المستعصية من خلالها.

III – 2 طرق حل مشاكل التخصيص (التعيين):

هناك طريقتان رئيسيتان لحل مشاكل التخصيص وهما:

- ✓ طريقة التوافيق المختلفة (العد الكامل)؛
- ✓ طريقة الحل المباشر (المختصر) أو الطريقة الهنكارية.

---

[1] . محمد عبد العال النعيمي، رفاه شهاب الحمداني، احمد شهاب الحمداني، مرجع سابق، ص 12.

[2]. منعم زمزير الموسوي: "**بحوث العمليات مدخل علمي لإتخاذ القرارات**"، دار وائل للنشر، ط1،الأردن، 2009، ص 269.

[3]. صالح مهدي محسن العامري، عواطف ابراهيم الحداد، ص 281.

III-2- 1 طريقة التوافيق المختلفة (العد الكامل):

تعتبر هذه الطريقة من ابسط الطرق المستخدمة في حل مشاكل التخصيص وتعتمد على تعداد جميع بدائل التخصيص المحتملة ثم نختار التخصيص الذي يعطي اقل تكاليف خدمة ممكنة.

إن عدد البدائل المحتملة لكل مشكلة تخصيص تساوي العاملي (Factorial) عدد الصفوف أو عدد الأعمدة، فإذا كان عدد الصفوف يساوي 3 مثلاً فإن: $(3!= 3x2x1=6)$ أي إن هناك 6 بدائل محتملة لعملية التخصيص[1].

مثال رقم (05): يقوم معمل للخياطة بعمليتين هما التفصيل والخياطة، فإذا كانت البيانات التالية تمثل الوقت المستغرق للأداء في القسمين من قبل عاملين كالآتي :

المهام	*الوقت المستغرق / بالدقائق*	
العاملون	*تفصيل*	*خياطة*
خالد	6	5
علي	8	10

المطلوب: تخصيص كل عامل للقيام مهمة معينة، بحيث يؤدي ذلك إلى تقليل الوقت اللازم لإنجاز تلك المهام.

الحل: إن الاحتمالين الخاصين بتحقيق الهدف هما $(2!= 2x1=2)$ ويمكن تمثيل هذين الاحتمالين كالآتي:

التكلفة بالدقائق	***العاملون***		***الاحتمالات***
	خياطة	***تفصيل***	
6+10=16	علي	خالد	***الأول***
8+5=13	خالد	علي	***الثاني***

إذن يعتبر البديل الثاني هو الأفضل لإنجاز المهمتين بأقل التكاليف.

مثال رقم (06): إذا توفر لدينا ثلاثة أجهزة لإنجاز ثلاثة وظائف مختلفة وأعطيت لنا المعلومات الواردة في الجدول الآتي عن تكاليف إنجاز هذه الوظائف على هذه الأجهزة المطلوب استخدام طريقة العد الكامل لتحديد أفضل تخصيص لتقليل التكاليف:

الوظائف			**الأجهزة**
3	**2**	**1**	
17	11	19	**A**
11	7	13	**B**
13	5	11	**C**

[1].احمد عبد إسماعيل الصفار، ماجدة عبد اللطيف التميمي: " **بحوث العمليات تطبيقات على الحاسوب**"، دار المناهج للنشر والتوزيع، الاردن، 2007. ص:333- 335.

الحل: تجري عملية التخصيص على وفق طريقة التوافيق المختلفة وذلك بتسجيل جميع البدائل الممكنة مع التكاليف المقابلة لكل بديل، بما ان عدد الصفوف يساوي (3) فإن: $(3! = 3 \times 2 \times 1 = 6)$ أي إن هناك 6 بدائل محتملة لعملية التخصيص.

البدائل	الأجهزة			التكاليف الإجمالية
	A	B	C	
الأول	1	2	3	19+7+13=39
الثاني	1	3	2	19+5+11=35
الثالث	2	1	3	11+13+13=37
الرابع	2	3	1	11+11+11=33
الخامس	3	1	2	17+13+5=35
السادس	3	2	1	17+7+11=35

اقل كلفة إجمالية

يتضح من الجدول أعلاه أن جميع البدائل قد تم حسابها وأن البديل الأفضل هو الرابع أي أن يخصص الجهاز (A) لإنجاز الوظيفة الثانية و الجهاز (B) للوظيفة الثالثة والجهاز (C) للوظيفة الأولى لأن هذا الترتيب سيجعل من الكلفة الإجمالية (33 وحدة نقدية).

إن من أبرز عيوب طريقة التوافيق المختلفة أنها تستخدم فقط لإيجاد الحل الأمثل في حالة المسائل ذات المتغيرات قليلة العدد فتصبح غير كفؤة في حالة المسائل الكبيرة ذات المتغيرات الأربعة وما فوق، لهذا السبب تم تطوير أسلوب أكثر كفاءة في إيجاد الحل الأمثل على يد الرياضي المجري (د.كوينج) الذي بني نموذجها وعرفت بالطريقة الهنكارية والتي تتميز بقدرتها على التعامل مع المشاكل ذات المتغيرات الكثيرة.[1]

III-2- 2 طريقة الحل المباشر (المختصرة) أو الطريقة الهنكارية:

تعتمد إجراءات الحل وفق هذه الطريقة على ما يسمى (المصفوفة المتناقصة)، والتي تستلزم طرح وإضافة أرقام ملائمة من هذه المصفوفة، ومن خلالها نستطيع أن نحقق الحل الأمثل، وتعتمد خطوات الوصول إلى الحل الأمثل على هدف مشكلة التخصيص حيث تختلف تلك الخطوات في حالة الوصول إلى أدنى كلفة عما هي عليه في حالة الوصول إلى أقصى الإيرادات. هناك شرطين ينبغي تحقيقهما وهما[2]:

- **الشرط الأول:** تحقيق صفر واحد في كل صف وصفر وحدا على الأقل في كل عمود؛

---

[1]. اكرم محمد عرفان المهتدي: " **الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية بحوث العمليات**"، دار صفاء للنشر والتوزيع، ط1، عمان، 2004، ص 161.

[2]. احمد عبد إسماعيل الصفار، ماجدة عبد اللطيف التميمي، مرجع سابق. ص:336- 337.

- **الشرط الثاني:** سحب المستقيمات على الأصفار بمعنى تغطية الأصفار بمستقيمات، ابتداء من أكبر عدد من الأصفار ثم التدرج إلى أقل عدد من الأصفار ويجب أن يكون عدد المستقيمات المسحوبة على الأصفار مساوياً لعدد الصفوف والأعمدة.

أولا: تحقيق أدنى كلفة

وتتميز هذه الطريقة بأنها تتكون من عدد من الخطوات المتسلسلة التي تكفل الوصول إلى الحل الأمثل، وهذه الخطوات لمشاكل التخفيض هي[1]:

1. ترتيب المعلومات في مصفوفة؛
2. التأكد من موازنة المصفوفة (عدد الصفوف يساوي عدد الأسطر)؛
3. نطرح أقل قيمة في كل صف من باقي قيم ذلك الصف في المصفوفة؛
4. نطرح أقل قيمة في كل عمود من باقي قيم ذلك العمود في المصفوفة، ولابد من تحقيق صفر واحد على الأقل في كل عمود وفي كل صف وهو الشرط الأول؛
5. تغطية الأصفار بمستقيمات ابتداء من أكبر عدد من الأصفار ثم التدرج إلى الأقل، ويجب أن يكون عدد المستقيمات المسحوبة على الأصفار مساوي لعدد الصفوف أو الأعمدة وهذا يمثل الشرط الثاني؛ ونكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل؛ ونقوم بعملية التعين أو التخصيص وذلك بأن نأخذ الأصفار الواقعة على نقاط التقاء الصفوف والأعمدة ونجري التعيينات على أساس واحد إلى واحد والقصد من أخذ الأصفار في هذه الحالة، هو لأنها تمثل أصلاً اقل التكاليف؛
6. إذا كان عدد المستقيمات المغطية للأصفار أقل من عدد الصفوف أو الأعمدة، فهذا يعني عدم الوصول إلى الحل الأمثل، أي أننا لا نستطيع القيام بكافة التعيينات، ومن أجل الاستمرار بالحل فإننا نقوم بتطوير الحل أي طرح أصغر قيمة (باستثناء الصفر) من كل القيم غير المغطاة بمستقيمات من بقية القيم غير المغطاة وفي نفس الوقت إضافة هذه القيمة التي طرحتها إلى نقاط تقاطع المستقيمات، أما القيم المغطاة فتدرج كما هي في الجدول الجديد وتتم العملية باستمرار إلى أن تحقق الحل الأمثل،
7. وضع سياسة التخصيص ثم حساب مجموع التكاليف.

مثال رقم (07): ترغب إحدى الشركات بتخصيص أربعة أوامر عمل إلى أربعة مجاميع من العاملين بحيث يكون وقت الإنجاز الكلي (بالساعة) اقل ما يمكن علما أن الوقت اللازم لإنجاز كل أمر عمل من قبل كل مجموعة من المجاميع الأربعة موضحة في الجدول أدناه والمطلوب: إجراء عملية التخصيص اللازمة بطريقة الحل المباشر:

[1]. جهاد صباح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، فالح عبد القادر الحوري، ص ص: 222 – 223.

أوامر العمل / مجاميع العمل	أمر A	أمر B	أمر C	أمر D
مجموعة 1	5	7	9	10
مجموعة 2	12	8	5	6
مجموعة 3	6	9	11	9
مجموعة 4	7	13	8	6

الحل:

تحديد أصغر قيمة في كل صف وطرحها من بقية القيم الصف:

5	7	9	10
12	8	5	6
6	9	11	9
7	13	8	6

وتصبح المصفوفة كما يلي:

0	2	4	5
7	3	0	1
0	3	5	3
1	7	2	0

تحديد أصغر قيمة في كل عمود وطرحها من بقية القيم العمود:

0	2	4	5
7	3	0	1
0	3	5	3
1	7	2	0

وتصبح المصفوفة كما يلي:

0	0	4	5
7	1	0	1
0	1	5	3
1	5	2	0

الآن نجد أن هناك على الأقل صفر واحد في كل صف وكل عمود وعليه الشرط الأول محقق، يمكن اختبار الحل بتغطية هذه الأصفار بمستقيمات، هنا يمكن تغطية الاصفار جميعها بأربعة مستقيمات مبتدئين أولا بالصف الأول (صفرين) ثم العمود الأول (صفرين) ثم الصف الثاني والصف الرابع كما في الآتي:

	0	0	4	5	1
3	7	1	0	1	
2	0	1	5	3	
	1	5	2	0	4

إذن تحقق الشرط الثاني عدد المستقيمات تساوي عدد الأعمدة أو الصفوف أي تحقق الحل الأمثل ومنه يمكن الآن إجراء عملية التخصيص وكاالآتي:

مجموعة العمل	أمر				أمر العمل	زمن الانجاز
مجموعة 1	~~A~~	B			**B**	7
مجموعة 2			C		**C**	5
مجموعة 3	A				**A**	6
مجموعة 4				D	**D**	6
مجموع التكاليف						24 ساعة

إن أجراء عملية التخصيص ونبدأ بالصف أو العمود الذي فيه صفر واحد لذا نضع مربع على الموجود في الصف الثاني وهذا يعني تخصيص أمر العمل (C) إلى مجموعة العمل الثانية، وبما أنه لا يوجد صفر أخر في العمود (C) فإننا ننتقل إلى الصف الثالث ونضع مربع على الصفر الوحيد فيه ولكن هنا يجب أن نشطب الصفر الموجود في نفس العمود (بالصف الأول) دلالة على أنه لا يمكن تخصيص أمر العمل (A) إلى المجموعة الأولى لأنها قد خصصت للمجموعة الثالثة، ثم ننتقل إلى الصف الرابع ونضع مربع على الصفر الوحيد فيه أي تخصيص أمر العمل (D) إلى المجموعة الرابعة وكذا الأمر مع الصفر الباقي في الصف الأول أي أنه سوف يخصص أمر العمل (B) للمجموعة الأولى ، وإن الوقت الكلي اللازم لانجاز العمل سيكون 24 ساعة.

ثانيا: تحقيق أقصى عائد

لا تختلف خطوات الحل عندما يكون الهدف تحقيق أقصى عائد (إيراد)عن خطوات الحل حينما يكون الهدف تقليل التكاليف، إلا عند البدء بالحل، حيث يتم بموجب هذه الهدف طرح كل القيم (العوائد) في مصفوفة العوائد من أكبر قيمة في المصفوفة كلها فنحصل على مصفوفة تكاليف ومن ثم يتم إتباع نفس الخطوات السابقة التي تم تطبيقها في حالة التكاليف وصولاً إلى الحل الأمثل.[1]

مثال رقم (08): مؤسسة تجارية ترغب في تعيين عدد من العمال لإنجاز عدد من الوظائف، فإذا كان عدد العمال أربعة وكانت الأرباح الناتجة عن قيام العمال بالوظائف هي كالتالي:

العمال / الوظائف	1	2	3	4
A	6	15	4	5
B	9	7	6	1
C	5	11	1	7
D	14	18	9	10

المطلوب: إيجاد الحل بطريقة الحل المباشر لمسألة الأرباح.

الحل: لأن المسألة تعظيم الأرباح، لذا يتم طرح جميع الأرقام من أعلى رقم في الجدول وهو (18) لتصبح مسألة التكاليف وإتباع الخطوات السابقة في حالة التدنئة:

1. فتحي خليل حمدان، رشيق رفيق مرعي، مرجع سابق، ص 168.

12	3	14	13
9	11	12	17
13	7	17	11
4	0	9	8

طرح أقل قيمة في كل صف لا يوجد به صفر وطرحها من بقية القيم الصف:

12	3	14	13
9	11	12	17
13	7	17	11
4	0	9	8

وتصبح المصفوفة كما يلي:

9	0	11	10
0	2	3	8
6	0	10	4
4	0	9	8

طرح أصغر قيمة في كل عمود لا يوجد به صفر وطرحها من بقية القيم العمود:

9	0	11	10
0	2	3	8
6	0	10	4
4	0	9	8

وتصبح المصفوفة كما يلي:

9	0	8	6
0	2	0	4
6	0	7	0
4	0	6	4

نغطي كل صف وكل عمود يحتوي على صفر بأقل عدد من المستقيمات:

9	0	8	6
0	2	0	4
6	0	7	0
4	0	6	4

1 2 3

بما أن عدد المستقيمات المسحوبة أقل من عدد صفوف أو أعمدة المصفوفة، لذا الشرط الثاني غير محقق لذلك لا بد من تطوير الحل، وذلك باختيار أقل قيمة من القيم غير مغطاة وهي (4) وطرحها من باقي القيم الغير مغطاة ونظيف هذه القيمة إلى نقطة التقاطع المستقيمات، وتصبح المصفوفة كالآتي:

5	0	4	2
0	6	0	4
6	4	7	0
0	0	2	0

1 2 3 4

وهنا عدد المستقيمات المسحوبة على الأسطر والأعمدة تساوي أربعة ومنه الشرط الثاني محقق وعليه الجدول أعلاه جدول حل أمثل ومنه يمكن قيام بسياسة التخصيص كالآتي:

العمال	الوظائف				الوظيفة	الربح
A		2			2	15
B	~~1~~		3		3	6
C				4	4	7
D	1	~~2~~		~~4~~	1	14
مجموع الأرباح						42

III- 3 حالات خاصة في مشاكل التخصيص:

هناك عدد من الحالات الخاصة في مشاكل التخصيص وهي:

III-3-1 عدم تساوي الصفوف والأعمدة:

لا يتحققا أحيانا شرط أساسي من شروط التخصيص وهو ضروري تساوي الصفوف والأعمدة، لذلك يتم اللجوء في هذه الحالة إلى إضافة صف أو عمود وهمي إلى جهة النقص بقيمة الصفر سواء أكان الهدف تخفيض أدنى كلفة أو أقصى عائد.

مثال رقم (09): تنوي شركة مقاولات إنشاء أربعة مشاريع إسكانية في أربعة مناطق مختلفة، فإذا كان لدى الشركة ثلاث وسائل لحفر وتسوية هذه الأرضي، فإذا كان تقدير الشركة لتكاليف إنجاز هذه المهام بالآلاف الدنانير هي كما في الجدول التالي:

الوسائل / المشاريع	المدينة 1	المدينة 2	المدينة 3	المدينة 4
A	9	12	8	11
B	16	5	18	9
C	7	4	9	20

المطلوب: إيجاد أفضل تخصيص يحقق أقل تكاليف بطريقة الهنكارية.

الحل: نلاحظ في هذا المثال بأن عدد الوسائل أقل من المهام وهذا يعني ضرورة استحداث صف وهمي لموازنة مشكلة التخصيص كما يلي:

الوسائل / المشاريع	المدينة 1	المدينة 2	المدينة 3	المدينة 4
A	9	12	8	11
B	16	5	18	9
C	7	4	9	20
D وهمي	0	0	0	0

طرح أقل قيمة في كل صف لا يوجد به صفر وطرحها من بقية القيم الصف:

9	12	8	11
16	5	18	9
7	4	9	20
0	0	0	0

وتصبح المصفوفة كما يلي:

1	4	0	3
11	0	13	4
3	0	5	16
0	0	0	0

لا يتم طرح أقل قيمة في كل عمود لأنها تساوي صفر، إختبار مثالية الحل بتغطية جميع الأصفار بأقل عدد من الخطوط المستقيمة.

1	4	0	3
11	0	13	4
3	0	5	16
0	0	0	0

بما أن عدد المستقيمات المسحوبة أقل من عدد صفوف أو أعمدة المصفوفة، لذا الشرط الثاني غير محقق لذلك لا بد من تطوير الحل، وذلك باختيار أقل قيمة من القيم غير مغطاة وهي (3) وطرحها من باقي القيم الغير مغطاة ونظيف هذه القيمة إلى نقطة التقاطع المستقيمات، وتصبح المصفوفة كالآتي:

1	7	0	3
8	0	10	1
0	0	2	13
0	3	0	0

وهنا عدد المستقيمات المسحوبة على الأسطر والأعمدة تساوي أربعة ومنه الشرط الثاني محقق وعليه الجدول أعلاه جدول حل أمثل ومنه يمكن قيام بسياسة التخصيص كالآتي:

الوسائل	*المشاريع*				*الوظيفة*	*الكلفة*
A			م3		**م3**	8
B		م2			**م2**	5
C	م1	~~م2~~			**م1**	7
D وهمي	~~م1~~		~~م3~~	م4	**م4**	0
مجموع التكاليف						20

III-3-2 تعدد الحلول المثلى:

قد تكون هناك بعض المشاكل التي ينجم عن حلها وجد أكثر من حل أمثل واحد أي أكثر من حل بديل له نفس الكلفة الكلية وهذا يعني مرونة عالية لدى متخذ القرار للإختيار والمناورة بالموارد المتاحة، وتحصل هذه الحالة عندما يكون بالإمكان تأشير أكثر من قيمة صفرية في نفس الوقت أو بعبارة أخرى تخصيص أكثر من وسيلة لمهمة واحدة.

مثال رقم (10): حل مشكلة التخصيص التالية بحيث تكون الكلفة الكلية أقل ما يمكن (التكاليف بالآلف الوحدات النقدية) بطريقة الهنكارية.

المهمات / الوسائل	**1**	**2**	**3**	**4**
A	10	15	16	18
B	14	13	16	10
C	11	9	8	18
D	13	13	11	9

المطلوب: إيجاد أفضل تخصيص يحقق أقل تكاليف بطريقة الهنكارية.

طرح أقل قيمة في كل صف لا يوجد به صفر وطرحها من بقية القيم الصف:

10	15	16	18
14	13	16	10
11	9	8	18
13	13	11	9

وتصبح المصفوفة كما يلي:

0	5	6	8
4	3	6	0
3	1	0	10
4	4	2	0

طرح أصغر قيمة في كل عمود لا يوجد به صفر وطرحها من بقية القيم العمود:

0	5	6	8
4	3	6	0
3	1	0	10
4	4	2	0

وتصبح المصفوفة كما يلي:

0	4	6	8
4	2	6	0
3	0	0	10
4	3	2	0

نغطي كل صف و كل عمود يحتوي على صفر بأقل عدد من المستقيمات:

0	4	6	8
4	2	6	0
3	0	0	10
4	3	2	0

1 2 3

بما أن عدد المستقيمات المسحوبة أقل من عدد صفوف أو أعمدة المصفوفة، لذا الشرط الثاني غير محقق لذلك لا بد من تطوير الحل، وذلك باختيار أقل قيمة من القيم غير مغطاة وهي (2) وطرحها من باقي القيم الغير مغطاة ونظيف هذه القيمة إلى نقطة لتقاطع المستقيمات، وتصبح المصفوفة كالآتي:

~~0~~	~~4~~	~~6~~	~~10~~
~~2~~	~~0~~	~~4~~	~~0~~
~~3~~	~~0~~	~~0~~	~~12~~
~~2~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~

وهنا عدد المستقيمات المسحوبة على الأسطر والأعمدة تساوي أربعة ومنه الشرط الثاني محقق وعليه الجدول أعلاه جدول حل أمثل ومنه يمكن القيام بسياسة التخصيص كالآتي:

الوسائل	*المهمات*				*الحل الأمثل الأول*	*الكلفة*	*الحل الأمثل البديل*	*الكلفة*
A	1				**1**	10	**1**	10
B		2		4	**2**	13	**4**	10
C		2	3		**3**	8	**2**	9
D			3	4	**4**	9	**3**	11
مجموع التكاليف						40		40

يتم اختيار أحد البدائل الاثنين ، إذا أن مجموع التكاليف للبدلين متساوي وهو **(40)**.

III- 4 طرق أخرى لحل مشكلة التخصيص:

هناك طريقتان لحل مشاكل التخصيص وهما:

III-4- 1 طريقة النقل:

في هذه الطريقة تعامل مشكلة التخصيص على أنها مشكلة نقل، وتعتبر قيم العرض والطلب جميعها مساوية إلى واحد، نجد الحل الابتدائي بأحد الطرق الثلاث المعروضة في الفصل السابق ثم نجد الحل الأمثل[1].

مثال رقم (11): في جدول التخصيص الآتي استخدم طريقة النقل في إيجاد اقل التكاليف.

الآلات / *العمال*	**1**	**2**	**3**
A	9	13	7
B	14	14	6
C	10	13	8

الحل: باستخدام أقل التكاليف وهي القريبة من الحل الأمثل نجد:

[1]. دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال: " **بحوث العمليات**"، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، الأردن، 2008، ص 189.

الآلات / العمال	1	2	3	العرض
A	9 1	13	7	1
B	14	14	6 1	1
C	10	13 **1**	8	1
الطلب	**1**	**1**	**1**	**3 /3**

ومنه أفضل تخصيص هو (A) في الآلة: 1 و(B) في الآلة: 3 و(C) في الآلة: 2 ، والكلفة الإجمالية هي $28 = 1(9)+1(6)+1(13)$

III-4- 2 طريقة البرمجة الخطية:

لتوضح مشكلة التخصيص على وفق أسلوب البرمجة الخطية نعتمد التالي:

مثال رقم (12): الوقت الذي يحتاجه المهندس في صيانة محطة عمل

المحطة / *المهندس*	1	2	3	العرض
A	8	10	7	1
B	3	8	5	1
C	10	12	11	1
الطلب	1	1	1	3/3

فإذا كانت (X_{iJ}) تمثل تخصيص المهندس (i) للمحطة (j) فإن نموذج البرمجة الخطية يكون بالشكل الآتي:

$$Min(z) = 8x_{11} + 10x_{12} + 7x_{13} + 3x_{21} + 8x_{22} + 5x_{23} + 10x_{31} + 12x_{32} + 11x_{33}$$

s/c

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1 \end{cases}$$

$x_{ij} \geq 0$

ويمكن إيجاد الحل الأمثل لهذا النموذج بإستخدام طريقة السمبليكس.

5-III تمارين محلولة

التمرين الأول: ترغب إدارة شركة لخدمات الصيانة في تخصيص أربعة عمال مدربين للعمل على أربعة آلآت معينة، وأن تكاليف اشتغال العمال على الآلات المذكورة هي كما يلي:

الآلات / العمال	A	B	C	D
علاء	5	7	9	6
ماهر	14	13	10	4
محمد	15	11	12	5
أحمد	10	17	9	11

حل التمرين الأول:

تحديد أصغر قيمة في كل صف وطرحها من بقية القيم الصف:

5	7	9	6
14	13	10	4
15	11	12	5
10	17	9	11

وتصبح المصفوفة كما يلي:

0	2	4	1
10	9	6	0
10	6	7	0
1	8	0	2

تحديد أصغر قيمة في كل عمود وطرحها من بقية قيم العمود:

0	2	4	1
10	9	6	0
10	6	7	0
1	8	0	2

وتصبح المصفوفة كما يلي:

0	0	4	1
10	7	6	0
10	4	7	0
1	6	0	2

الآن نجد أن هناك على الأقل صفر واحد في كل صف وكل عمود وعليه الشرط الأول محقق، يمكن اختبار الحل بتغطية هذه الأصفار بمستقيمات.

0	0	4	1
10	7	6	0
10	4	7	0
1	6	0	2

بما أن عدد المستقيمات المسحوبة أقل من عدد صفوف أو أعمدة المصفوفة، لذا الشرط الثاني غير محقق لذلك لا بد من تطوير الحل، وذلك باختيار أقل قيمة من القيم غير مغطاة وهي (4) وطرحها من باقي القيم الغير مغطاة ونظيف هذه القيمة إلى نقطة التقاطع المستقيمات، وتصبح المصفوفة كالآتي:

0	0	4	5
6	3	2	0
6	0	3	0
1	6	0	6

إذن تحقق الشرط الثاني عدد المستقيمات تساوي عدد الأعمدة أو الصفوف أي تحقق الحل الأمثل ومنه يمكن الآن إجراء عملية التخصيص وكالآتي:

مجموعة العمل	الآلات				*الآلة*	*التكلفة*
علاء	A	~~B~~			**A**	5
ماهر				D	**D**	4
محمد		B		~~D~~	**B**	11
أحمد			C		**C**	9
مجموع التكاليف						29

التمرين الثاني: لدى أحد المؤسسات أربعة مدراء وثلاثة معامل ترغب في التوصل إلى التخصيص الأمثل للمدراء بحيث يحقق من ذلك أكبر عائد ممكن وطبق للبيانات التالية عند العائد المتحقق شهريا بالآلف الدنانير من كل حالة:

المديرين / *المعامل*	**A**	**B**	**C**
1	1	4	7
2	8	3	1
3	5	6	2
4	4	1	7

المطلوب: استخدم الطريقة الهنكارية لإيجاد أفضل تخصيص.

حل التمرين الثاني: نلاحظ أن عدد المعامل أقل من عدد المدراء، إذن نضيف معمل رابع وهمي لتحويل المصفوفة إلى مصفوفة مربعة (عوائد صفرية)، وذلك بطرح أكبر قيمة بها والبالغة (8) من باقي القيم.

المعامل / المديرين	A	B	C	D وهمي
1	1	4	7	0
2	8	3	1	0
3	5	6	2	0
4	4	1	7	0

وبطرح كل القيم من اكبر قيمة موجودة في المصفوفة وهي (8) نحصل على مصفوفة التكاليف الآتية:

المعامل / المديرين	A	B	C	D وهمي
1	7	4	1	8
2	0	5	7	8
3	3	2	6	8
4	4	7	1	8

طرح أقل قيمة في كل صف لا يوجد به صفر وطرحها من بقية القيم الصف:

7	4	1	8
0	5	7	8
3	2	6	8
4	7	1	8

وتصبح المصفوفة كما يلي:

6	3	0	7
0	5	7	8
1	0	4	6
3	6	0	7

طرح أقل قيمة في كل عمود لا يوجد به صفر وطرحها من بقية القيم العمود:

6	3	0	7
0	5	7	8
1	0	4	6
3	6	0	7

وتصبح المصفوفة كما يلي:

6	3	0	1
0	5	7	2
1	0	4	0
3	6	0	1

اختبار مثالية الحل بتغطية جميع الأصفار بأقل عدد من الخطوط المستقيمة.

	6	3	0	1	
3	0	5	7	2	
	1	0	4	0	1
	3	6	0	1	
			2		

بما أن عدد المستقيمات المسحوبة أقل من عدد صفوف أو أعمدة المصفوفة، لذا الشرط الثاني غير محقق لذلك لا بد من تطوير الحل، وذلك باختيار أقل قيمة من القيم غير مغطاة وهي (1) وطرحها من باقي القيم الغير مغطاة ونظيف هذه القيمة إلى نقطة التقاطع المستقيمات، وتصبح المصفوفة كالآتي:

3	5	2	0	0	
	0	5	8	2	4
2	1	0	5	0	
	2	5	0	0	1

وهنا عدد المستقيمات المسحوبة على الأسطر والأعمدة تساوي أربعة ومنه الشرط الثاني محقق وعليه الجدول أعلاه جدول حل أمثل ومنه يمكن قيام بسياسة التخصيص كالآتي:

العائد	البديل2	العائد	البديل1	المشاريع				الوسائل
0	D وهمي	7	C	D	C			1
8	A	8	A				A	2
6	B	6	B	D		B		3
7	C	0	D وهمي	D	C			4
21		21						مجموع العوائد

تحقق المعامل الثلاثة اكبر عائد مقداره 21000 دينار وواضح أن كلا البديلين يحقق نفس العائد فيمكن الأخذ بأي منهما.

III- 6 تمارين مقترحة:

التمرين الأول: يرأس مدير أحد الأقسام، ثلاثة موظفين، ورغب المدير في إنجاز هؤلاء الموظفين الثلاثة ثلاث مهام مختلفة. ويختلف الموظفون في درجة مهارتهم وكفاءتهم وتختلف المهام من حيث درجة صعوبتها، ويوضح الجدول الأتي، تقديرات الوقت الذي حددها المدير والخاصة إنجاز كل موظف لمهمة معينة:

المهام / الموظفون	A	B	C
عصام	8	26	17
وسام	13	28	4
قيس	38	19	18

المطلوب: تخصيص كل عامل للقيام مهمة معينة، بحيث يؤدي ذلك إلى تقليل الوقت اللازم لإنجاز تلك المهام.

التمرين الثاني: ترغب شركة الصناعات الإلكترونية في تعيين عدد من مندوبي البيع لإنجاز مهمة بيع عدد من السلع، فإذا كان عدد مندوبي البيع أربعة، وكانت تكاليف إنجاز هذه المهام (بعشرات الدنانير) كالآتي:

السلع *مندوبو البيع*	*ثلاجة*	*تلفزيون*	*مكيف*	*مجمدة*
أسامة	1	4	6	3
أكرام	9		10	9
سلام	4	5	11	7
علي	8	7	8	5

المطلوب: إيجاد أفضل تخصيص باستخدام طريقة الحل المباشر، بحيث تحقق الشركة أدنى كلفة ممكنة.

التمرين الثالث: فكرت شركة المقاولات الحديثة بإنجاز عدد من المشاريع الإنشائية، فإذا كان عدد المشاريع أربعة وعدد المقاولين المسؤولين عن إنجاز تلك المشاريع أربعة، وتمثل المصفوفة أدناه العوائد (بآلاف الدنانير) لكل مقاول:

المشاريع *المقاولون*	*A*	*B*	*C*	*D*
خليل	18	10	6	2
ماهر	10	14	8	4
محمود	16	4	14	8
سامر	12	12	4	6

المطلوب: إيجاد أفضل سياسة تخصيص، بحيث تحقق الشركة أقصى العوائد.

الفصل الثاني

برمجة الأعداد الصحيحة

تهتم البرمجة الخطية بالأعداد الصحيحة بحيث تصبح كل القيم المتغيرات عند الحل الأمثل أعداد صحيحة أو جزء منها اعداد صحيحة مع فرضية أن النتائج كلها موجبة وبالتالي يطلق عليه أحيانا البرمجة الخطية للأعداد الصحيحة الصافية النقية أو المختلطة وهذا يعتمد على الشروط الأولية لحل المسألة[1].

مسائل البرمجة الخطية الصحيحة تكون على نوعين هما[2]:

- **البرمجة بأعداد صحيحة كاملة (الصحيحة النقية):** حيث تأخذ جميع المتغيرات في نموذج البرمجة الخطية قيماً صحيحة فقط.
- **مسائل البرمجة الخطية الصحيحة المختلطة:** حيث يأخذ جزء من المتغيرات قيماً صحيحة بينما الجزء الاخر قيماً حقيقية.

I- مفهوم برمجة الأعداد الصحيحة :

البرمجة بأعداد صحيحة هي أحد النماذج الرياضية المشتقة من النموذج الرياضي العام للبرمجة الخطية، حيث ينصب اهتمام هذا النوع من النماذج الرياضية على إيجاد قيم المتغيرات بأعداد صحيحة خالية من الكسور[3].

II- طرق حل مسائل البرمجة الأعداد الصحيحة :

هناك العديد من الطرائق التي طورت لحل مسائل البرمجة الخطية الصحيحة وأغلب هذه الطرائق تقوم على أساس تجاهل قيد العدد الصحيح للوصل إلى حل المسألة ومن ثم معالجة القيم الكسرية للمتغيرات في حال وجودها والسبب يعود في كون عملية التوصل إلى الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية الصحيحة يتم من خلال الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية العامة وهو تقارب القيم المثلى للحل الأمثل للمسألتين وفي بعض الأحيان تساويها وإن هذا يؤدي إلى تقليل العمليات الحسابية للتوصل إلى الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية الصحيحة[4].

وهناك ثلاث طرائق لحل البرمجة الصحيحة وهي:

- **أسلوب التفريع والتحديد؛**

[1]. أبو القاسم مسعود الشيخ: " **بحوث العمليات** "، المجموعة العربية للتدريب والنشر، مصر، 2014، ص 235.

[2]. فتحي خليل حمدان:" **بحوث العمليات مع تطبيقات باستخدام الحاسوب**"، دار وائل للنشر والتوزيع، الاردن، ط1، 2010، ص 165.

[3]. محمود العبيدي، مؤيد عبد الحسين الفضل: " **بحوث العمليات وتطبيقاتها في إدارة الأعمال**"، مؤسسة الوراق للنشر والتوزيع، ط1، الاردن، 2004، ص85.

[4]. حامد سعد نور الشمرتي، علي خليل الزبيدي: " **مدخل إلى بحوث العمليات**"، دار مجدلاوي، عمان، 2007. ص 203.

- **أسلوب القطع المكافئ؛**
- **أسلوب الاختبارين.**

II -1. أسلوب التفريع والتحديد:

يستند هذا الأسلوب على مسألة البرمجة الخطية بدون الأخذ بنظر الاعتبار قيد الأعداد الصحيحة فإذا كان الحل الأمثل يمثل قيم عددية صحيحة فإنه يمثل حل أمثل لمسألة البرمجة الخطية الصحيحة، ونتوقف وإذا كانت قيم المتغيرات المحصل عليها في الحل الأمثل لبرنامج الأصلي ليست قيم صحيحة فحينئذ نقوم بتوليد برنامج جديد[1].

حيث يضاف إلى البرنامج الأصلي قيد أخر وفق ما يلي:

إذا كان المتغير في الحل الأمثل هو X_J حيث يأخذ قيمة غير صحيحة ولتكن b_i ، فإنه يمكن كتابته ضمن مجال كما يلي:

$$b_{i1} \leq X_J \leq b_{i2}$$

حيث: b_{i1} و b_{i2} أعداد صحيحة غير سالبة ، أي أن الحل الصحيح الأمثل يجب أن يحقق القيد:

$X_J \leq b_{i1}$ و $X_J \geq b_{i2}$ ونضيف كل قيد منهما إلى البرنامج الأصلي فنحصل على برنامجين آخرين فمثلاً:

X_1 يتم أخذ القيمة الأقل من أو أكبر من (3,5) أي أن الحل الصحيح يجب أن يحقق القيد $X_1 \leq 3$ أو يحقق القيد $X_1 \geq 4$ نقوم بحل كل واحد منها حلا مستقلا، إذا كانت متغيرات الحل الأمثل صحيحة نتوقف، وإلا نستمر في تفريع البرنامج الذي أعطى أمثل قيمة للدالة الاقتصادية وهذا لغاية الوصول إلى حل أمثل قيم متغيراته صحيحة وهذا ما يسمى بالتفريع.

ملاحظة هامة:

1. **لنفرض أن الحل الأمثل يتمثل بقيمة دالة الهدف Z_1 وقيمة غير صحيحة لـ X_J ، قيمة Z_1 تمثل الحد الأعلى للتعظيم قيمة دالة الهدف MAX ، فإنه يستمر التفريع حتى نحصل على حل أمثل متغيراته كلها أعداد صحيحة ، ويكون هذا الحل هو الحل الأسفل للمسألة ، وكل البرامج المتفرعة الأخرى تصبح ملغاة بما فيها البرامج التي أدت إلى حلول تتضمن أعداد صحيحة لكن قيمة دالة هدفها المحصلة أقل من قيمة دالة الهدف لحل الحد الأسفل. وفي حالة التدنئة فإن**

[1]. راتول محمد، مرجع سابق، ص 96.

الطريقة نفسها تتبع ماعدا أن حل البرنامج الأصلي يكون هو حل الحد الأسفل وحل البرنامج النهائي الذي يتضمن أعداد صحيحة يكون هو حل الحد الأعلى للمسألة[1]؛

2. **في حالة وجود أكثر من متغير واحد بقيمة غير صحيحة فإن اختيار قيد المتغير الذي يتم إضافته إلى المسألة الأصلية لتكوين المسائل الفرعية يتم من خلال اختيار المتغير ذو أعلى كسر أو من خلال اختيار المتغير الأفضل بين المتغيرات ويتم تحديد الأفضل من خلال قيمة معامل المتغير في دالة الهدف (أكبر في MAX، وأصغر في MIN)[2].**

مثال رقم 01: أوجد الحل الأمثل لمسألة الإنتاج باستخدام **أسلوب التفريع والتحديد**

$$Max(z) = 4x_1 + 5x_2 + 7x_3$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 20 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 \leq 25 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 25 \end{cases}$$

$$x_1; x_2; x_3 \geq 0$$

وهي صحيحة .

الحل:

1. الحل الأمثل لمسألة الإنتاج بدون الأخذ بنظر الاعتبار قيد العدد الصحيح هو:

$$X_1 = \frac{50}{9}; X_2 = \frac{5}{3}; X_3 = 0; Z = \frac{275}{9}$$

بافتراض إن أي قيمة غير صحيحة ممكن أن نعبر عنها كالأتي:

$$b_i = [b_i] + f_i \Rightarrow f_i = b_i - [b_i]$$

$[b_i]$: أعلى قيمة صحيحة أقل أو تساوي b_i.

f_i : قيمة موجبة أي: $0 < f_i < 1$.

بما أن قيم المتغيرات هي قيم غير صحيحة لذلك يتم اختيار المتغير ذو أعلى كسر:

$$f_1 = b_1 - [b_1] = \frac{50}{9} - 5 = 0,55$$

---

[1]. راتول محمد، مرجع سابق، ص 99.

[2]. حامد سعد نور الشمرتي، علي خليل الزبيدي، مرجع سابق، ص217.

$$f_2 = b_2 - [b_2] = \frac{5}{3} - 1 = 0,66$$

أعلى كسر X_2 ، تكوين قيدين هما:

$$X_2 \leq 1$$
$$X_2 \geq 2$$

يتم إضافة القيدين إلى المسألة الأصلية كل على حدة لتكوين مسألتي برمجة خطية وكالآتي:

مسألة: 01	مسألة: 02
$Max(z) = 4x_1 + 5x_2 + 7x_3$ s/c $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 20 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 \leq 25 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 25 \\ x_2 \leq 1 \end{cases}$ $x_1; x_2; x_3 \geq 0$ وهي صحيحة.	$Max(z) = 4x_1 + 5x_2 + 7x_3$ s/c $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 20 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 \leq 25 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 25 \\ x_2 \geq 2 \end{cases}$ $x_1; x_2; x_3 \geq 0$ وهي صحيحة.

الحل الأمثل لمسألة: 01 هو:

$$X_1 = \frac{11}{12}; X_2 = 1; X_3 = \frac{1}{2}; Z = \frac{61}{2}$$

بما أن قيم المتغيرين $X_1; X_3$ هي قيم غير صحيحة لذلك فإن مسألة 01 تتفرع إلى مسألتين فرعيتين ولكن قبل ذلك يتم إيجاد الحل الأمثل لمسألة 02 وهو:

$$X_1 = 5; X_2 = 2; X_3 = 0; Z = 30$$

وهذا يمثل حل أمثل لمسألة البرمجة الخطية الصحيحة لأنه لا يمكن الحصول على قيمة لدالة الهدف أفضل من القيمة الحالية أي **(30)** لأن: $Z_1 = \frac{275}{9} = 30,5$.

مثال رقم 02: أوجد الحل الأمثل لمسألة الأيدي العاملة باستخدام أسلوب التفريع والتحديد

$$Min(z) = 2x_1 + 3x_2$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \le 170 \\ \frac{2}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 \ge 25 \\ x_1 + x_2 \ge 25 \end{cases}$$
$$x_1; x_2 \ge 0$$

وهي صحيحة.

الحل:

1. الحل الأمثل لمسألة الإنتاج بدون الأخذ بنظر الاعتبار قيد العدد الصحيح هو:

$$X_1 = \frac{25}{2}; X_2 = \frac{25}{2}; Z = 62,5$$

بما أن قيم المتغيرين $X_1; X_2$ هي قيم غير صحيحة ومتساوية وأيضا من حيث الكسر، يتم الاختيار وفق قاعدة المتغير الأفضل من حيث قيمته في دالة الهدف ولذلك يتم اختيار X_1 والذي يقع قيمته بين 12 و13 وعلى هذا الأساس يتكون قيدين هما:

$$X_1 \le 12$$
$$X_1 \ge 13$$

يتم إضافة القيدين إلى المسألة الأصلية كل على حدة لتكوين مسألتي برمجة خطية وكالأتي:

مسألة: 01	مسألة: 02
$Min(z) = 2x_1 + 3x_2$ s/c $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \le 170 \\ \frac{2}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 \ge 25 \\ x_1 + x_2 \ge 25 \\ x_1 \le 12 \end{cases}$ $x_1; x_2 \ge 0$ وهي صحيحة.	$Min(z) = 2x_1 + 3x_2$ s/c $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \le 170 \\ \frac{2}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 \ge 25 \\ x_1 + x_2 \ge 25 \\ x_1 \ge 13 \end{cases}$ $x_1; x_2 \ge 0$ وهي صحيحة.

الحل الأمثل لمسألة 01 هو:

$$X_1 = 12; X_2 = 13; Z = 63$$

يمثل الحل الأمثل لمسألة البرمجة الصحيحة والسبب في ذلك يعود إلى أن قيمة $Z = 63$ هي أفضل قيمة ممكن الحصول عليها حيث أن قيمة الأصلية هي $Z_1 = 62,5$ لذلك لا يمكن الحصول على قيمة لـ Z بحيث قيم المتغيرات تكون أعداد صحيحة أفضل من (63) .

II-2. أسلوب القطع المكافئ (أسلوب البرمجة الصحيحة النقية):

يعتبر من الأساليب المهمة جداً في ايجاد الحلول المثلى لمسائل البرمجة الخطية الصحيحة فبواسطته يتم تحويل نقاط الحلول الممكنة لمسائل البرمجة الخطية إلى نقاط تمثل الحلول الممكنة لمسائل البرمجة الخطية الصحيحة.

في هذه الفقرة سوف يتم توضيح كيفية تطبيق أسلوب القطع المكافئ على مسائل البرمجة الخطية الصحيحة في البداية لحل أي مسألة برمجة صحيحة يجب التوصل أولاً إلى الحل الأمثل للمسألة مع إهمال شرط الأعداد الصحيحة وبافتراض أن جدول الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية يكون بالصيغة الأتية[1]:

T	C_J	C_1	....	C_m	0	....	0	
CB	XB	X_1	....	X_m	w_1	....	w_n	B
C_1	x_1	1	....	0	a_{11}	....	a_{1n}	b_1
:	:	:	....	:	:	....	:	:
C_i	x_i	0	....	0	a_{i1}	....	a_{in}	b_i
:	:	:	....	:	:	....	:	:
C_m	x_m	0	....	1	a_{mn}	....	a_{mn}	b_m
Z_J		0	....	0	Z_1	....	Z_n	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		C_1	....	C_n	Δz_1	....	Δz_n	Z=

حيث أن:

x_i : المتغيرات الأساسية $(i = 1.........m)$

w_j : المتغيرات غير الأساسية $(j = 1.........n)$

بافتراض أن قيمة المتغير x_i هي قيمة غير صحييحة فإن معادلة المتغير x_i هي:

[1]. حامد سعد نور الشمرتي، علي خليل الزبيدي، مرجع سابق، ص204 .

$$x_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j = b_i$$

بافتراض أن أي قيمة غير صحيحة ممكن أن نعبر عنها كالآتي:

$$b_i = [b_i] + f_i ....(1)$$
$$a_{ij} = \lfloor a_{ij} \rfloor + f_{ii} ....(2)$$

حيث أن:

$[b_i]$: أعلى قيمة صحيحة أقل أو تساوي b_i

$\lfloor a_{ij} \rfloor$: أعلى قيمة صحيحة أقل أو تساوي a_{ij}

f_i : قيمة موجبة أي: $0 < f_i < 1$

f_{ij} : قيمة غير سالبة أي: $0 \leq f_{ij} < 1$

خطوات تحدبد قيد القطع المكافئ [1]:

يتم اختيار احد الصفوف المقابلة لأحد المتغيرات التي ظهرت في الجدول الذي يمثل الحل الأمثل والتي تحمل قيمة كسرية وليست صحيحة، لذلك يتم اختيار المتغير ذو أعلى كسر من جدول الحل الأمثل وكتابة معادلتها باستخدام المعادلة (1) و (2) وبعدها يتم تحويلها إلى الصيغة التالية:

$$-\sum_{j=1}^{n} f_{ij} w_j \leq -f_i ....(3)$$

من المعادلة (3) نحصل على ما يسمى بقيد القطع المكافئ والذي يتم إضافته إلى جدول الحل الأمثل للتخلص من القيم الكسرية ويكون بالصيغة الأتية بعد تحويله إلى الصيغة النموذجية:

$$-\sum_{j=1}^{n} f_{ij} w_j + X_{n+1} = -f_i$$

وبما أن قيمة $X_{n+1} = -f_i$ سالبة ولذلك يتم اللجوء إلى طريقة السمبليكس المقابلة (الثنائية) Dual du Simplexe للتوصل إلى الحل الأمثل وفيما يلي توضيح ذلك عن طريق المثال التالي:

---

[1]. محمد محمد كعبور: **" أساسيات بحوث العمليات نماذج وتطبيقات"**، أكاديمية الدراسات العليا، ط1، ليبيا، 2005، ص 215.

مثال رقم 03: أوجد الحل الأمثل لمسألة الأيدي العاملة **باستخدام أسلوب القطع المكافئ**

$$Min(z) = 2x_1 + 3x_2$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \leq 170 \\ \frac{2}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 \geq 25 \\ \quad x_1 + x_2 \geq 25 \end{cases}$$

$$x_1; x_2 \geq 0$$

وهي صحيحة.

الحل: الخطوة الأولى هي إيجاد الحل الأمثل للمسألة بدون الأخذ بنظر الاعتبار قيد العدد الصحيح وبعد إيجاد الصيغة النموذجية:

$$5x_1 + 6x_2 + S_1 = 170$$

$$\frac{2}{3}x_1 + \frac{4}{3}x_2 - S_2 + A_1 = 25$$

$$x_1 + x_2 - S_3 + A_2 = 25$$

$$Min(z) = 2x_1 + 3x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + MA_1 + MA_2$$

بطريقة M الكبرى الجدول الحل الأساسي الأولي هو:

T_1	C_J	2	3	0	0	0	M	M		
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	B	$\frac{B}{X_2}$
0	S_1	5	6	1	0	0	0	0	170	28,3
M	A_1	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	−1	0	1	0	25	18,7
M	A_2	1	1	0	0	−1	0	1	25	25
Z_J		$\frac{5}{3}M$	$\frac{7}{3}M$	0	−M	−M	M	M		
$\Delta Z = C_J - Z_J$		$2-\frac{5}{3}M$	$3-\frac{7}{3}M$	0	M	M	0	0	$Z = 50M$	

المتغيرة الداخلة للأساس هي (X_2)، أما المتغيرة الخارجة من الأساس (A_1) وكهذا يتم مواصلة الحل للوصول إلى جدول الحل الأمثل وهو ملخص كالآتي:

T_4	C_J	2	3	0	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B
0	S_1	0	0	1	$\frac{3}{2}$	4	$\frac{65}{2}$
3	X_2	0	1	0	$\frac{-3}{2}$	1	$\frac{25}{2}$
2	X_1	1	0	0	$\frac{3}{2}$	-2	$\frac{25}{2}$
Z_J		2	3	0	$\frac{-3}{2}$	-1	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	0	0	$\frac{3}{2}$	1	$Z = \frac{125}{2}$

الجدول T4 هو جدول حل أمثل:

$$X_1 = \frac{25}{2}; X_2 = \frac{25}{2}; S_1 = \frac{65}{2}; Z = \frac{125}{2}$$

بما أن قيم المتغيرات هي قيم غير صحيحة لذلك نستخدم أسلوب القطع المكافئ فبعد الحصول على الحل الأمثل يتم تحديد معادلة المتغير الأساسي ذو القيمة غير الصحيحة وبما أن كل المتغيرات الأساسية ذات قيم غير صحيحة لذلك يتم اختيار المتغير ذو أعلى كسر وكما مبين بالجدول الآتي:

المتغير	b_i	$[b_i]$	$f_i = b_i - [b_i]$
S_1	$\frac{65}{2}$	32	$\frac{65}{2} - 32 = \frac{1}{2}$
X_2	$\frac{25}{2}$	12	$\frac{25}{2} - 12 = \frac{1}{2}$
X_1	$\frac{25}{2}$	12	$\frac{25}{2} - 12 = \frac{1}{2}$

بما أن كل المتغيرات الأساسية متساوية من حيث قيمة الكسر لذلك يتم اختيار إحداهما وليكن المتغير X1، من معادلة المتغير X1 الموضحة في الجدول T4 نحصل على:

$$x_1 + \frac{3}{2}s_2 - 2s_3 = \frac{25}{2}$$

ويمكن كتابتها باستخدام المعادلة (1) و (2) وبعدها يتم تحويلها على الصيغة التالية:

$$(1+0)x_1 + \left(1 + \frac{1}{2}\right)s_2 + (-2+0)s_3 = 12 + \frac{1}{2}$$

تحويلها إلى المعادلة (3):

$$-\sum_{j=1}^{n} f_{ij} w_j \leq -f_i \ldots\ldots(3)$$

$$-\frac{1}{2} s_2 \leq -\frac{1}{2}$$

ومن المعادلة (3) نحصل على ما يسمى **بقيد القطع المكافئ** والذي يتم إضافته إلى جدول الحل الأمثل للتخلص من القيم الكسرية ويكون بالصيغة النموذجية:

$$-\frac{1}{2} s_2 + s_4 = -\frac{1}{2}$$

وعلى هذا الأساس فإن الجدول T4 يصبح بالصيغة المعرفة في الجدول T5 كالآتي:

T_5	C_J	2	3	0	0	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	B
0	S_1	0	0	1	$\frac{3}{2}$	4	0	$\frac{65}{2}$
3	X_2	0	1	0	$\frac{-3}{2}$	1	0	$\frac{25}{2}$
2	X_1	1	0	0	$\frac{3}{2}$	-2	0	$\frac{25}{2}$
0	S_4	0	0	0	$\frac{-1}{2}$	0	1	$\frac{-1}{2}$
Z_J		2	3	0	$\frac{-3}{2}$	-1	0	$Z = \frac{125}{2}$
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	0	0	$\frac{3}{2}$	1	0	

بما أن قيمة أحد المتغيرات سالبة لذلك نستخدم طريقة السمبليكس المقابلة (الثنائية) للوصول إلى الحل الأمثل، وفي مثالنا يكون المتغير $s_4 = \frac{-1}{2}$ هو المتغير الخارج، أما المتغير الداخل وهو المتغير من بين المتغيرات غير الأساسية:

$$Min\left\{\frac{-(C_J - Z_J)}{\mu_K} ; \mu_K < 0\right\}$$

μ_K : هي قيم السالبة في صف المتغير الخارج.

$$Min\left\{\frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}\right\}$$

وهو S_2 لأنه المتغير الوحيد ذو قيمة سالبة في صف S_4 ومنه جدول السمبليكس الجديد معرف كما يلي:

T_6	C_J	2	3	0	0	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	B
0	S_1	0	0	1	0	4	3	31
3	X_2	0	1	0	0	1	−3	14
2	X_1	1	0	0	0	−2	3	11
0	S_2	0	0	0	1	0	−2	1
Z_J		2	3	0	0	−1	−3	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	0	0	0	1	3	$Z = 64$

الجدول T6 يمثلا حلا ممكنا حيث أن قيم المتغيرات كلها صحيحة:

$$X_1 = 11; X_2 = 14; S_1 = 31; S_2 = 1; S_3 = S_4 = 0; Z = 64$$

ومن عيوب هذا الأسلوب هو عدم التوصل إلى الحل الأمثل لبعض المسائل لذلك يتم اللجوء إلى أساليب أخرى.

II- 3. أسلوب الاختبارين:

تستخدم هذه الطريقة اختبارين للتوصل إلى الحل الأمثل الاختبار الأول يتمثل باختبار دالة الهدف من حيث كون قيمة دالة الهدف لمسألة البرمجة الخطية الصحيحة اقل أو تساوي قيمة دالة الهدف في حالة التعظيم وأكبر أو تساوي في حالة التقليل لمسألة البرمجة الخطية والاختبار الثاني يتمثل باختبار تحقق القيود المؤثرة في النموذج (قيود الموارد)، خطوات هذه الطريقة موضحة من خلال الأمثلة الأتية[1]:

مثال رقم 04: أوجد الحل الأمثل لمسألة الإنتاج باستخدام طريقة الاختبارين على اعتبار أن الكمية المتوفرة من المواد الأولية للنوع الثاني هي 30 وذلك لتوضيح الطريقة بشكل أفضل:

[1]. حامد سعد نور الشمرتي، علي خليل الزبيدي، مرجع سابق، ص 225.

$$Max(z) = 4x_1 + 5x_2 + 7x_3$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 20 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 \le 30 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 25 \end{cases}$$
$$x_1; x_2; x_3 \ge 0$$

وهي صحيحة.

الحل:

خطوات الطريقة هي:

1. إيجاد الحل الأمثل للمسالة بدون الأخذ بنظر الاعتبار قيد العدد الصحيح؛
2. نختار القيود المؤثرة النموذج والتي تكون قيم أسار الظل لها عبارة عن قيم غير صفرية.

الحل الأمثل هو:

$$X_1 = 4\frac{4}{9}; X_2 = 3\frac{1}{3}; X_3 = 0; Z = 34\frac{4}{9}$$

قيم أسعار الظل هي: الحصول على المعلومات المتعلقة بأسعار الظل من قيم صف (Z_J)، فإن سعر الظل المورد الأول هو $(y_1 = \frac{5}{9})$ المقابل لـ (S_1)، وسعر الظل المورد الثاني هو $(y_2 = \frac{7}{9})$ المقابل لـ (S_2)، وسعر الظل الثالث هو $(y_3 = 0)$.

من قيم أسعار الظل نلاحظ أن القيدين الأول والثاني هما القيدين المؤثرين في النموذج.

3. في حالة كون قيم متغيرات القرار في الحل الأمثل عبارة عن قيم كسرية نختار المتغير ذو أعلى قيمة كسرية أي X_1.
4. إعطاء X_1 قيمة تمثل أصغر عدد صحيح اكبر من القيمة غير الصحيحة له (أي 5) مع إعطاء بقية المتغيرات ذات القيم غير الصحيحة قيم تمثل اكبر عدد صحيح اقل من القيم غير الصحيحة لها.

$$X_1 = 5; X_2 = 3; X_3 = 0$$

5. حساب قيمة Z_1 **للمرحلة الأولى** بتعويض القيم المختارة في 4 أعلاه بدالة الهدف.

$$Z_1 = 4(5) + 5(3) + 0 = 35$$

6. حساب $\overline{Z}_1 = Z - Z_1$ ، بحيث قيمة $\overline{Z}_1$ يجب أن تكون أكبر أو تساوي الصفر في حالة التعظيم وأقل أو تساوي الصفر في حالة التقليل وعكس ذلك نتوقف وننتقل إلى المرحلة الثانية:

$$\overline{Z}_1 = Z - Z_1 = 34\frac{4}{9} - 35 = -\frac{5}{9}$$

بما ان قيمة $\overline{Z}_1$ سالبة ننتقل إلى المرحلة الثانية.

المرحلة الثانية:

إعطاء X_1 قيمة تمثل أكبر عدد صحيح اقل من القيمة غير الصحيحة له مع إعطاء بقية المتغيرات قيمة تمثل اصغر عدد صحيح اكبر من القيم غير الصحيحة لها.

$$X_1 = 4; X_2 = 4; X_3 = 0; Z_2 = 36$$
$$\overline{Z}_2 = Z - Z_2 = 34\frac{4}{9} - 36 = -1\frac{5}{9}$$

المرحلة الثالثة:

إعطاء المتغيرات قيم تمثل اكبر عدد صحيح اقل من القيم غير الصحيحة لها.

$$X_1 = 4; X_2 = 3; X_3 = 0; Z_3 = 31$$
$$\overline{Z}_3 = Z - Z_3 = 34\frac{4}{9} - 31 = 3\frac{4}{9}$$

7. نختبر تحقيق القيود المؤثرة في النموذج:

القيد الأول: $3\left(-\left(\frac{4}{9}\right)\right) + 2\left(-\left(\frac{1}{3}\right)\right) + 0 = -2$

القيد الثاني: $3\left(-\left(\frac{4}{9}\right)\right) + 5\left(-\left(\frac{1}{3}\right)\right) + 0 = -3$

8. في حالة كون إشارة القيد أصغر أو يساوي فإن القيم المحسوبة في 7 يجب أن تكون اقل أو تساوي صفر أما في حالة كون إشارة القيد أكبر أو تساوي صفر فإن القيم المحسوبة يجب أن تكون أكبر أو تساوي صفر وعكس ذلك ننتقل إلى مرحلة أخرى؛

9. نختار القيد ذو القيمة غير الصفرية الأعلى الناتجة من 7 في حال كون إشارة القيد أصغر أو تساوي أما في حال كون إشارة القيد اكبر أو تساوي فنختار القيد ذو القيمة غير الصفرية الأقل، وعلى هذا الاساس سوف نختار القيد الأول؛

10. حساب قيمة Q للقيد الأول والتي تمثل معاملات الجانب الأيسر للقيد الأقل من أو تساوي القيمة المحسوبة في 7 بغض النظر عن الإشارة (-2) أما في حالة كون اشارة القيد اكبر أو يساوي فنختار معاملات الجانب الأيسر للقيد الأقل أو تساوي القيمة المحسوبة في7 وكذلك الاختلاف بين معاملات الجانب الأيسر التي تحقق الشرط:

$$Q_1 = (a_{12}, a_{11} - a_{12}, a_{13} - a_{12})$$

في حالة عدم وجود قيم لـــ Q فإن الحل يمثل الحل الأمثل.

11. حساب قيم والتي تمثل معاملات دالة الهدف بحيث:

إشارة القيد اصغر أو يساوي: $\overline{Q}_1 = (C_2, C_1 - C_2, C_3 - C_2)$

إشارة القيد أكبر أو يساوي: $\overline{Q}_1 = \left(-C_2, C_2 - C_1, C_2 - C_3\right)$

12. اختبار قيم $\overline{Q}_1$ الأكبر من الصفر والتي تكون اصغر أو تساوي $\overline{Z}_3$ في حالة التعظيم ومن ثم اختيار القيمة الأعلى منها، أما في حالة التقليل فيتم اختيار قيم $\overline{Q}_1$ الأصغر من الصفر والتي تكون اكبر أو تساوي $\overline{Z}_1$ وعكس ذلك فإن حل المرحلة الثالثة يمثل الحل الأمثل.

$$\overline{Q}_1 = \left(5 > \overline{Z}_3, -1{,}2 < \overline{Z}_3\right)$$

13. قيمة $\overline{Q}_1$ المختار هي 2 هذا يعني الانتقال إلى المرحلة الرابعة بزيادة قيمة المتغير X_3 نقصان قيمة المتغير X_2 وحدة واحدة مع ثابت قيم المتغيرات الأخرى.

المرحلة الرابعة:

$$X_1 = 4; X_2 = 2; X_3 = 1; Z_4 = 33$$

$$\overline{Z}_4 = Z - Z_4 = 34\frac{4}{9} - 33 = 1\frac{4}{9}$$

نختبر إمكانية تحقق القيدين الأول والثاني:

القيد الأول: $3\left(-\left(\frac{4}{9}\right)\right) + 2\left(-\left(\frac{4}{3}\right)\right) + 3(1) = -1$

القيد الثاني: $3\left(-\left(\frac{4}{9}\right)\right) + 5\left(-\left(\frac{4}{3}\right)\right) + 7(1) = -1$

بما أن القيم سالبة ومتساوية فهذا يعني تحقق القيدين وعليه نستخرج قيم Q_1 و Q_2 وكالآتي:

$$Q_1 = \left(a_{11} - a_{12}, a_{13} - a_{12}\right)$$

$$Q_2 =$$

بما ان Q_2 لا تحتوي على قيم لذلك نستنتج بأن حل المرحلة الرابعة يمثل الحل الأمثل أي:

$$X_1 = 4; X_2 = 2; X_3 = 1; Z \quad = 33$$

III- البرمجة الثنائية:

إن هذا النوع يقتصر في كونه أكثر وضوحاً بالنسبة للتمييز عن الحالات السابقة وعن البرمجة الخطية أصلاً، حيث يبنى النموذج الرياضي لهذا النوع من الحالات على اساس أن قيم المتغيرات لا يمكن أن تكون أكثر من قيمتين فقط، وهي أما صفر أو واحد وذلك يعود إلى طبيعة المشكلة أصلاً، حيث ترتبط هذه القيم بالمفاهيم التالية[1]:

$$X_j = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

[1]. محمود العبيدي، مؤيد عبد الحسين الفضل، مرجع سابق، ص 92.

إذا كان القرار j هو نعم: $x=1$ تعني إن الشيء موجود أو الاقرار بالموافقة أو أن الالة تعمل وما شابه ذلك.

إذا كان القرار j هو لا: $x=0$ تعني إن الشيء غير موجود أو تعني الرفض لشيء ما أو أن العامل غائب وما شابه ذلك.

هذه المتغيرات تمثل في مسألة البرمجة الخطية الصحيحة على شكل قيدين هما[1]:

$$X_j \leq 1$$
$$X_j \geq 0$$

بعض المسائل تحتوي على مجموعة متغيرات ذات قرارات نعم أو لا والتي يجب أن يكون أحد المتغيرات نعم والبقية لا مثال ذلك شركة تسعى لإنتاج نوع واحد من المنتوجات من بين عدة منتوجات، هذا النوع من القرار ممكن أن يمثل في مسألة البرمجة الخطية بالقيد:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$$

أما في حال عدم وجود الشرط القاضي بأن احد المتغيرات يجب أن يكون نعم فإن صيغة القيد تصبح كالآتي:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \leq 1$$

حالة أخرى تتمثل في حالة وجود قرار تابع لقرار أخر أي أن القرار x_k ممكن أن يكون نعم في حال كون القرار x_j نعم وهذه الحالة ممكن أن تمثل بالقيد:

$$X_k \leq X_j$$

فإذ كان $x_j=1$ فإن x_k يسمح له أن يكون واحد أو صفر أي نعم أو لا أما في حال كون $x_j=0$ فإن $x_k=0$ ، القيد السابق يكتب كالاتي:

$$X_k - X_j \leq 0$$

مثال رقم 05: مكتب مقاولات يخطط للقيام بثلاثة مشاريع، ربح كل مشروع هو $(1.5\ ;\ 2\ ;\ 3)$ مليون دينار على التوالي، المشروع الأول يتطلب 4 معدات إنشائية والثاني 3 معدات إنشائية والثالث 5 معدات إنشائية، مع العلم أن المكتب يمتلك 10 معدات إنشائية، المطلوب تحديد أي من المشاريع التي يمكن للمكتب أن ينجزها بحيث يحقق أعلى ربح متوقع.

الحل: المسألة تمثل مسألة برمجة ثنائية حيث أن القرار هو أما انجاز المشروع أو عدم انجازه لذلك فإن النموذج يكون بالصيغة الأتية:

---

[1]. حامد سعد نور الشمرتي، علي خليل الزبيدي، مرجع سابق، ص232.

$$Max(z) = 3x_1 + 2x_2 + 1.5x_3$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 10 \\ x_1 \leq 1 \\ x_2 \leq 1 \\ x_3 \leq 1 \end{cases}$$
$$x_1; x_2; x_3 \geq 0$$

وهي صحيحة.

حيث أن:

X_1 : المشروع الأول ، X_2 : المشروع الأول ، X_3 : المشروع الأول.

الحل الأمثل لمسألة البرمجة والذي يمثل الحل بدون الأخذ بنظر الاعتبار قيد العدد الصحيح موضح بالجدول التالي:

T_4	C_J	3	2	1.5	0	0	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	B
1.5	X_3	0	0	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{-4}{5}$	$\frac{-3}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
3	X_1	1	0	0	0	1	0	0	1
2	X_2	0	1	0	0	0	1	0	1
0	S_4	0	0	0	$\frac{-1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	1	$\frac{2}{5}$
Z_J		3	2	1.5	$\frac{3}{10}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{11}{10}$	0	$Z = \frac{59}{10}$
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	0	0	$\frac{-3}{10}$	$\frac{-9}{5}$	$\frac{-11}{10}$	0	

بما أن قيمة أحد المتغيرات الأساسية هي قيمة غير صحيحة X_3 لذلك نستخدم أسلوب الاختبارين للحصول على الحل الأمثل لمسألة البرمجة الصحيحة وكالآتي:

الحل الأمثل للمسالة بدون الأخذ بنظر الاعتبار قيد العدد الصحيح؛

$$X_1 = 1; X_2 = 1; X_3 = \frac{3}{5}; Z = \frac{59}{10}$$

قيم أسعار الظل هي: $\left(y_1 = \frac{3}{10}\right)$ ،$\left(y_2 = \frac{9}{5}\right)$ ،$\left(y_3 = \frac{11}{10}\right)$،$\left(y_4 = 0\right)$.

وهذا يدل على أن القيود الثلاث الأولى هما القيود المؤثرة في النموذج.

المرحلة لأولى: بما أن قيمة المتغيرين الأول والثاني عبارة عن أعداد صحيحة لذلك يأخذ نختار X_3 قيمة تمثل أكبر عدد صحيح اقل من القيمة غير الصحيحة له مع ثبات قيم $X_1; X_2$ أن:

$$X_1 = 1; X_2 = 1; X_3 = 0; Z_1 = 5$$

$$\bar{Z}_1 = Z - Z_1 = 5\frac{9}{10} - 5 = \frac{9}{10}$$

نختبر تحقق القيود المؤثرة في النموذج:

القيد الأول: $4(0) + 3(0) + 5\left(-\frac{3}{5}\right) = -3$

القيد الثاني: $1(0) = 0$

القيد الثالث: $1(0) = 0$

بما أن القيم أصغر أو تساوي الصفر فهذا يعني تحقق القيود ونختار القيد الأول لحساب قيم Q_1:

$$Q_1 = (a_{12}, a_{11} - a_{12}, a_{13} - a_{11}, a_{13} - a_{12})$$

$$\overline{Q}_1 = (C_2, C_1 - C_2, C_3 - C_1, C_3 - C_2)$$

$$\overline{Q}_1 = (2 > \bar{Z}_1, 1 > \bar{Z}_1, -1.5, -0.5)$$

هذا يعني أن حل المرحلة الأولى يمثل الحل الأمثل أي:

$$X_1 = 1; X_2 = 1; X_3 = 0; Z = 5$$

IV- تمارين محلولة:

التمرين الأول: أوجد الحل الأمثل لمسألة الإنتاج باستخدام **أسلوب التفريع والتحديد**

$$Max(z) = 20x_1 + 2x_2$$

$$s/c$$

$$\{4x_1 + 10x_2 \leq 22$$

$$x_1; x_2 \geq 0$$

وهي صحيحة.

حل التمرين الأول: إيجاد الحل الأمثل:

✓ الصيغة النموذجية:

$$4x_1 + 10x_2 + S_1 = 22$$

$$Max(z) = 20x_1 + 2x_2 + 0S_1$$

T_1	C_J	20	2	0	
CB	XB	X_1	X_2	S_1	B
0	S_1	4	10	1	22
Z_J		0	0	0	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		20	2	0	Z=0

المتغيرة الداخلة X1 والخارجة S1

T_2	C_J	20	2	0	
CB	XB	X_1	X_2	S_1	B
20	X_1	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{2}$
Z_J		20	50	5	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	-48	-5	Z=110

بما أن (ΔZ) في الجدول الحل سالبة أو معدومة، ذلك يعني أنه تم الوصول للحل الأمثل والحلول هي كما يلي:

$$X_1 = \frac{11}{2}; X_2 = 0; S_1 = 0; Z = 110$$

بما أن قيمة X_1 هي قيمة غير صحيحة ويمكن كتابتها كما يلي :

$$X_1 \leq 5$$

$$X_1 \geq 6$$

يتم إضافة القيدين إلى المسألة الأصلية كل على حدة لتكوين مسألتي برمجة خطية وكالأتي:

مسألة: 01

$$Max(z) = 20x_1 + 2x_2$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 10x_2 \leq 22 \\ x_1 \leq 5 \end{cases}$$

$$x_1; x_2 \geq 0$$

وهي صحيحة.

مسألة: 02

$$Max(z) = 20x_1 + 2x_2$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 10x_2 \leq 22 \\ x_1 \geq 6 \end{cases}$$

$$x_1; x_2 \geq 0$$

وهي صحيحة.

إيجاد الحل الأمثل لمسألة: 01

✓ الصيغة النموذجية:

$$4x_1 + 10x_2 + S_1 = 22$$
$$x_1 + S_2 = 5$$
$$Max(z) = 20x_1 + 2x_2 + 0S_1 + 0S_2$$

T_1	C_J	20	2	0	0		
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	B	$\frac{B}{X_1}$
0	S_1	4	10	1	0	22	$\frac{11}{2}$
0	S_2	1	0	0	1	5	5
Z_J		0	0	0	0		
$\Delta Z = C_J - Z_J$		20	2	0	0	Z=0	

المتغيرة الداخلة X1 والخارجة S2

T_2	C_J	20	2	0	0		
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	B	$\frac{B}{X_2}$
0	S_1	0	10	1	-4	2	$\frac{2}{10}$
20	X_1	1	0	0	1	5	$-$
Z_J		20	0	0	20		
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	2	0	-20	Z=100	

المتغيرة الداخلة X2 والخارجة S1

T_3	C_J	20	2	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	B
2	X_2	0	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{-2}{5}$	$\frac{1}{5}$
20	X_1	1	0	0	1	5
Z_J		20	2	$\frac{1}{5}$	$\frac{96}{5}$	Z= $\frac{502}{5}$
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{-96}{5}$	

بما أن (ΔZ) في الجدول الحل الثالث سالبة أو معدومة، ذلك يعني أنه تم الوصول للحل الأمثل والحلول هي كما يلي:

$$X_1 = 5; X_2 = \frac{1}{5}; Z = \frac{502}{5}$$

إيجاد الحل الأمثل لمسألة: 02

✓ الصيغة النموذجية:

$$4x_1 + 10x_2 + S_1 = 22$$
$$x_1 - S_2 + A_1 = 6$$

طريقة المرحلتين: المرحلة الأولى

$$Max(z) = -A_1$$

T_1	C_J	0	0	0	0	−1		
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	B	$\frac{B}{X_1}$
0	S_1	4	10	1	0	0	22	$\frac{11}{2}$
−1	A_1	1	0	0	−1	1	6	6
Z_J		−1	0	0	1	−1	Z=−6	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		1	0	0	−1	0		

المتغيرة الداخلة X1 والخارجة S1

T_2	C_J	0	0	0	0	−1	B
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	
0	X_1	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	22
−1	A_1	0	$\frac{-5}{2}$	$-\frac{1}{4}$	−1	1	6
Z_J		0	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	−1	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	$\frac{-5}{2}$	$\frac{-1}{4}$	−1	0	Z=$-\frac{1}{2}$

بما أن $(\Delta Z \leq 0)$ وهي نهاية المرحلة الأولى وبما أن $(Z \neq 0)$ وجود متغيرة اصطناعية إذن لا توجد مرحلة 2 وبالتالي لا يوجد حل أمثل. ولهذا يتم الاستغناء عنه.

ومن خلال حل المسألة 01 وجدنا أن المتغيرة X_2 لا تأخذ قيمة صحيحة ويمكن كتابتها أيضا على الشكل:

$$X_2 \geq 1$$
$$X_2 \leq 0$$

يتم إضافة القيدين إلى المسألة 01 لتكوين مسألتي برمجة خطية وكالآتي:

مسألة: 03	مسألة: 04
$Max(z) = 20x_1 + 2x_2$	$Max(z) = 20x_1 + 2x_2$
s/c	s/c
$\begin{cases} 4x_1 + 10x_2 \leq 22 \\ x_1 \leq 5 \\ x_2 \geq 1 \end{cases}$	$\begin{cases} 4x_1 + 10x_2 \leq 22 \\ x_1 \leq 5 \\ x_2 \leq 0 \end{cases}$
$x_1; x_2 \geq 0$	$x_1; x_2 \geq 0$
وهي صحيحة .	وهي صحيحة .

غير أن البرنامج الرابع (مسألة 04) يلاحظ أنه متناقض لأن القيد $X_2 \leq 0$ مرفوض ويتناقض مع شرط عدم السلبية.

إيجاد الحل الأمثل لمسألة: 03

✓ الصيغة النموذجية:

$$4x_1 + 10x_2 + S_1 = 22$$
$$x_1 + S_2 = 5$$

$$x_2 - S_3 + A_1 = 1$$

طريقة المرحلتين: المرحلة الأولى

$$Max(z) = -A_1$$

T_1	C_J	0	0	0	0	0	−1	B	$\frac{B}{X_2}$
CB	**XB**	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A_1		
0	S_1	4	10	1	0	0	0	22	$\frac{11}{5}$
0	S_2	1	0	0	1	0	0	5	−
−1	A_1	0	1	0	0	−1	1	1	1
Z_J		0	−1	0	0	1	−1		
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	1	0	0	−1	0	**Z=−1**	

المتغيرة الداخلة X2 والخارجة A1

T_2	C_J	0	0	0	0	0	−1	B
CB	**XB**	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A_1	
0	S_1	4	0	1	0	10	−10	12
0	S_2	1	0	0	1	0	0	5
0	X_2	0	1	0	0	−1	1	1
Z_J		0	0	0	0	0	0	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	0	0	0	0	−1	**Z=0**

بما أن $(\Delta Z \leq 0)$ وهي نهاية المرحلة الأولى، وبما أن $Z = 0$ توجد مرحلة 2 وبالتالي يوجد حل أمثل.

المرحلة الثانية:

$$Max(z) = 20x_1 + 2x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

T_1	C_J	20	2	0	0	0	B	$\frac{B}{X_1}$
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3		
0	S_1	4	0	1	0	10	12	3
0	S_2	1	0	0	1	0	5	5
2	X_2	0	1	0	0	−1	1	−
Z_J		0	2	0	0	−2		
$\Delta Z = C_J - Z_J$		20	0	0	0	2	Z=0	

المتغيرة الداخلة X1 والخارجة S1

T_2	C_J	20	2	0	0	0	B
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	
20	X_1	1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{10}{4}$	3
0	S_2	0	0	$\frac{-1}{4}$	1	$\frac{-10}{4}$	2
2	X_2	0	1	0	0	−1	1
Z_J		20	2	5	0	48	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	0	−5	0	−48	Z=62

بما أن (ΔZ) في الجدول الحل سالبة أو معدومة، ذلك يعني أنه تم الوصول للحل الأمثل والحلول هي كما يلي:

$$X_1 = 3; X_2 = 1; Z = 62$$

نلاحظ أن المتغيرات كلها أصبحت صحيحة وبالتالي فإن هذا الحل يسمى بحل الحد الأسفل للمسألة وتكون كل الحلول الأخرى التي تعطي قيم صحيحة للمتغيرات ملغاة، ويكون حل الحد الأسفل هذا هو الحل الأمثل للبرنامج الأعداد الصحيحة الأصلي.

التمرين الثاني: أوجد الحل الأمثل لمسألة الإنتاج **باستخدام أسلوب القطع المكافئ**

$$Max(z) = 4x_1 + 5x_2 + 7x_3$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 20 \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 \le 25 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 25 \end{cases}$$
$$x_1; x_2; x_3 \ge 0$$

وهي صحيحة.

حل التمرين الثاني: الخطوة الأولى هي التوصل إلى حل المسألة مع إهمال قيد العدد الصحيح بعد إضافة المتغيرات الفجوة:

$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + S_1 = 20$$
$$3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + S_2 = 25$$
$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + S_3 = 25$$
$$Max(z) = 4x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

T_1	C_J	4	5	7	0	0	0		
CB	XB	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	B	$\frac{B}{X_3}$
0	S_1	3	2	3	1	0	0	20	6,66
0	S_2	3	5	7	0	1	0	25	3,57
0	S_3	2	3	4	0	0	1	25	6,25
Z_J		0	0	0	0	0	0		
$\Delta Z = C_J - Z_J$		4	5	7	0	0	0	$Z = 0$	

المتغيرة الداخلة للأساس هي: (X_3) والخارجة من الأساس هي: (S_2)

T_2	C_J	4	5	7	0	0	0		
CB	XB	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	B	$\frac{B}{X_3}$
0	S_1	$\frac{12}{7}$	$\frac{-1}{7}$	0	1	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{65}{7}$	5,41
7	X_3	$\frac{3}{7}$	$\frac{5}{7}$	1	0	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{25}{7}$	8,33
0	S_3	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	0	0	$\frac{-4}{7}$	1	$\frac{75}{7}$	37,5
Z_J		3	5	7	0	1	0	$Z=25$	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		1	0	0	0	-1	0		

المتغيرة الداخلة للأساس هي: (X_1) والخارجة من الأساس هي: (S_1)

T_3	C_J	4	5	7	0	0	0		
CB	XB	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	B	$\frac{B}{X_2}$
4	X_1	1	$\frac{-1}{12}$	0	$\frac{7}{12}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{65}{12}$	$-$
7	X_3	0	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{-1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{3}$
0	S_3	0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{-1}{6}$	$\frac{-1}{2}$	1	$\frac{55}{6}$	55
Z_J		4	$\frac{59}{12}$	7	$\frac{7}{12}$	$\frac{3}{4}$	0	$Z=\frac{205}{6}$	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{-7}{12}$	$\frac{-3}{4}$	0		

المتغيرة الداخلة للأساس هي: (X_2) والخارجة من الأساس هي: (X_3)

T_4	C_J	4	5	7	0	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	B
4	X_1	1	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{9}$	$-\frac{2}{9}$	0	$\frac{50}{9}$
5	X_2	0	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{5}{3}$
0	S_3	0	0	$\frac{-2}{9}$	$\frac{-1}{9}$	$\frac{-5}{9}$	1	$\frac{80}{9}$
Z_J		4	5	$\frac{64}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{7}{9}$	0	$Z=\frac{275}{9}$
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	0	$\frac{-1}{9}$	$\frac{-5}{9}$	$\frac{-7}{9}$	0	

ومنه الجدول T4 هو جدول حل أمثل:

$$X_1=\frac{50}{9}; X_2=\frac{5}{3}; X_3=0; S_3=\frac{80}{9}; S_1=S_2=0; Z=\frac{275}{9}$$

بما أن قيم المتغيرات هي قيم غير صحيحة لذلك نستخدم أسلوب القطع المكافئ، الخطوة الثانية هي اختبار معادلة المتغير ذو أعلى كسر كالآتي:

المتغير	b_i	$[b_i]$	$f_i = b_i - [b_i]$
X_1	$\frac{50}{9}$	5	$\frac{50}{9}-5=\frac{5}{9}$
X_2	$\frac{5}{3}$	1	$\frac{5}{3}-1=\frac{2}{3}$
S_3	$\frac{80}{9}$	8	$\frac{80}{9}-8=\frac{8}{9}$

ومن الجدول أعلاه يتضح أن الاختيار يقع على معادلة S_3 الموضحة في الجدول T4 نحصل على:

$$-\frac{2}{9}x_3-\frac{1}{9}s_1-\frac{5}{9}s_2+s_3=\frac{80}{9}$$

ويمكن كتابتها باستخدام المعادلة (1) و (2) نجد:

$$\left(-1+\frac{7}{9}\right)x_3+\left(-1+\frac{8}{9}\right)s_1+\left(-1+\frac{4}{9}\right)s_2+(1+0)s_3=8+\frac{8}{9}$$

تحويلها إلى المعادلة (3):

$$-\sum_{j=1}^{n} f_{ij}w_j \le -f_i\text{.......}(3)$$

$$-\frac{7}{9}x_3-\frac{8}{9}s_1-\frac{4}{9}s_2\leq-\frac{8}{9}$$

ومن المعادلة (3) نحصل على ما يسمى **بقيد القطع المكافئ** والذي يتم إضافته إلى جدول الحل الأمثل للتخلص من القيم الكسرية ويكون بالصيغة النموذجية:

$$-\frac{7}{9}x_3-\frac{8}{9}s_1-\frac{4}{9}s_2+s_4=-\frac{8}{9}$$

وعلى هذا الأساس فإن الجدول T4 يصبح بالصيغة المعرفة في الجدول T5 كالآتي:

T_5	C_J	4	5	7	0	0	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	B
4	X_1	1	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{9}$	$-\frac{2}{9}$	0	0	$\frac{50}{9}$
5	X_2	0	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{5}{3}$
0	S_3	0	0	$\frac{-2}{9}$	$\frac{-1}{9}$	$\frac{-5}{9}$	1	0	$\frac{80}{9}$
0	S_4	0	0	$\frac{-7}{9}$	$\frac{-8}{9}$	$\frac{-4}{9}$	0	1	$\frac{-8}{9}$
Z_J		4	5	$\frac{64}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{7}{9}$	0	0	$Z=\frac{310}{9}$
$\Delta Z=C_J-Z_J$		0	0	$\frac{-1}{9}$	$\frac{-5}{9}$	$\frac{-7}{9}$	0	0	

بما أن قيمة أحد المتغيرات سالبة لذلك نستخدم طريقة السمبليكس المقابلة (الثنائية) للوصول إلى الحل الأمثل ، يتضح أن المتغير الخارج $s_4=\frac{-8}{9}$ ، أما المتغير الداخل وهو المتغير من بين المتغيرات غير الأساسية:

$$Min\left\{\frac{(C_J-Z_J)}{\mu_K};\mu_K<0\right\}$$

μ_K : هي قيم السالبة في صف المتغير الخارج.

$$Min\left\{\frac{\frac{-1}{9}}{-\frac{7}{9}};\frac{\frac{-5}{9}}{-\frac{8}{9}};\frac{\frac{-7}{9}}{-\frac{4}{9}}\right\}=Min\left\{\frac{1}{7};\frac{5}{8};\frac{7}{4}\right\}$$

ومنه X_3 هو المتغير الداخل ذو أقل قيمة ناتجة من حاصل القسمة ولذلك فإن الجدول الجديد هو:

T_6	C_J	4	5	7	0	0	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	B
4	X_1	1	0	0	$\frac{3}{7}$	$-\frac{2}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{38}{7}$
5	X_2	0	1	0	$-\frac{13}{7}$	$\frac{-3}{7}$	0	$\frac{12}{7}$	$\frac{1}{7}$
0	S_3	0	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{-3}{7}$	1	$\frac{-2}{7}$	$\frac{64}{7}$
7	X_3	0	0	1	$\frac{8}{7}$	$\frac{4}{7}$	0	$\frac{-9}{7}$	$\frac{8}{7}$
Z_J		4	5	7	$\frac{3}{7}$	$\frac{5}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	$Z=\frac{213}{7}$
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	0	0	$\frac{-3}{7}$	$\frac{-5}{7}$	0	$\frac{-1}{7}$	

بما أن قيم المتغيرات الأساسية لازالت غير صحيحة لذلك يتم إعادة الخطوة الثانية باختيار معادلة ذو أعلى كسر وكالآتي:

$$X_1=\frac{38}{7}; X_2=\frac{1}{7}; X_3=\frac{8}{7}; S_3=\frac{64}{7}; S_1=S_2=0; Z=\frac{213}{7}$$

المتغير	b_i	$[b_i]$	$f_i=b_i-[b_i]$
X_1	$\frac{38}{7}$	5	$\frac{38}{7}-5=\frac{3}{7}$
X_2	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{1}{7}-0=\frac{1}{7}$
S_3	$\frac{64}{7}$	9	$\frac{64}{7}-9=\frac{1}{7}$
X_3	$\frac{8}{7}$	1	$\frac{8}{7}-1=\frac{1}{7}$

ومن الجدول أعلاه يتضح أن الاختيار يقع على معادلة X_1 والموضحة في الجدول T6 نحصل على:

$$x_1+\frac{3}{7}s_1-\frac{2}{7}s_2+\frac{1}{7}s_4=\frac{38}{7}$$

ويمكن كتابتها باستخدام المعادلة (1) و (2) نجد:

$$(1+0)x_1+\left(0+\frac{3}{7}\right)s_1+\left(-1+\frac{5}{7}\right)s_2+\left(0+\frac{1}{7}\right)s_4=5+\frac{3}{7}$$

تحويلها إلى المعادلة (3):

$$-\sum_{j=1}^{n} f_{ij} w_j \leq -f_i \ldots\ldots(3)$$

$$-\frac{3}{7}s_1 - \frac{5}{7}s_2 - \frac{1}{7}s_4 \leq -\frac{3}{7}$$

الصيغة النهائية لقيد القطع المكافئ:

$$-\frac{3}{7}s_1 - \frac{5}{7}s_2 - \frac{1}{7}s_4 + s_5 = -\frac{3}{7}$$

وجدول الحل الأمثل الجديد هو:

T_7	C_J	4	5	7	0	0	0	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	B
4	X_1	1	0	0	$\frac{3}{7}$	$-\frac{2}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{38}{7}$
5	X_2	0	1	0	$-\frac{13}{7}$	$\frac{-3}{7}$	0	$\frac{12}{7}$	0	$\frac{1}{7}$
0	S_3	0	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{-3}{7}$	1	$\frac{-2}{7}$	0	$\frac{64}{7}$
7	X_3	0	0	1	$\frac{8}{7}$	$\frac{4}{7}$	0	$\frac{-9}{7}$	0	$\frac{8}{7}$
0	S_5	0	0	0	$\frac{-3}{7}$	$\frac{-5}{7}$	0	$\frac{-1}{7}$	1	$\frac{-3}{7}$
Z_J		4	5	7	$\frac{3}{7}$	$\frac{5}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	0	$Z=\frac{213}{7}$
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	0	0	$\frac{-3}{7}$	$\frac{-5}{7}$	0	$\frac{-1}{7}$	0	

بما أن قيمة أحد المتغيرات سالبة لذلك نستخدم طريقة السمبليكس المقابلة، يتضح أن المتغير الخارج هو $s_5 = \frac{-3}{7}$ ، أما المتغير الداخل وهو المتغير من بين المتغيرات غير الأساسية:

$$Min\left\{\frac{(C_J - Z_J)}{\mu_K}; \mu_K < 0\right\}$$

μ_K : هي قيم السالبة في صف المتغير الخارج.

$$Min\left\{\frac{\frac{-3}{7}}{\frac{-3}{7}}; \frac{\frac{-5}{7}}{-\frac{5}{7}}; \frac{\frac{-1}{7}}{-\frac{1}{7}}\right\} = Min\{1;1;1\}$$

بما أن حاصل القسمة للمتغيرات متساوية لذلك فمن الممكن اختيار أحدهما كمتغير داخل وليكن S_1 وعلى هذا الأساس فإن الجدول الجديد هو:

T_8	C_J	4	5	7	0	0	0	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	B
4	X_1	1	0	0	0	-1	0	0	1	5
5	X_2	0	1	0	0	$\frac{8}{3}$	0	$\frac{7}{3}$	$\frac{-13}{3}$	2
0	S_3	0	0	0	0	$\frac{-2}{3}$	1	$\frac{-1}{3}$	$\frac{1}{3}$	9
7	X_3	0	0	1	0	$\frac{-4}{3}$	0	$\frac{-5}{3}$	$\frac{8}{3}$	0
0	S_1	0	0	0	1	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{-7}{3}$	1
Z_J		4	5	7	0	0	0	0	1	$Z=30$
$\Delta Z=C_J-Z_J$		0	0	0	0	0	0	0	-1	

الجدول T8 يمثل الحل الأمثل لمسألة البرمجة الصحيحة ويلاحظ أن قيمة دالة الهدف أقل من قيمة دالة الهدف لمسالة البرمجة الخطية الأصلية (30,5) وذلك لكون المسألة تمثل مسألة تعظيم.

التمرين الثالث: أوجد الحل الأمثل لمسألة الآتية **باستخدام طريقة الاختبارين**

$$Min(z)=2x_1+3x_2+4x_3$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3\geq 6 \\ x_1+4x_2+2x_3\geq 10 \\ 3x_1+x_3\geq 4 \end{cases}$$

$$x_1;x_2;x_3\geq 0$$

وهي صحيحة.

حل التمرين الثالث:

الحل الأمثل للمسالة بدون الأخذ بنظر الاعتبار قيد العدد الصحيح؛

$$X_1=1\frac{1}{3};X_2=2\frac{1}{3};X_3=0;Z=9\frac{2}{3}$$

قيم أسعار الظل هي: $(y_1=\frac{3}{2})$، $(y_2=0)$، $(y_3=\frac{1}{6})$.

وهذا يدل على أن القيدين الأول والثالث هما القيود المؤثرة في النموذج.

المرحلة لأولى: نختار X_1 أي أن:

$$X_1 = 2; X_2 = 2; X_3 = 0; Z_1 = 10$$

$$\overline{Z}_1 = Z - Z_1 = 9\frac{2}{3} - 10 = -\frac{1}{3}$$

نختبر إمكانية تحقق القيدين الأول والثالث:

القيد الأول: $1\left(\frac{2}{3}\right) + 2\left(-\left(\frac{1}{3}\right)\right) + 0 = 0$

القيد الثالث: $3\left(\frac{2}{3}\right) + 0 = 2$

بما أن القيم أكبر أو تساوي الصفر فهذا يعني تحقق القيدين ونختار القيد الثالث لاستخراج قيم Q_3:

$Q_3 = (a_{31} - a_{33})$

$\overline{Q}_3 = (C_3 - C_1) = 2$ إشارة القيد أكبر أو يساوي:

بما أن قيمة $\overline{Q}_3$ موجبة فهذا يدل على أن حل المرحلة الأولى يمثل الحل الأمثل أي:

$$X_1 = 2; X_2 = 2; X_3 = 0; Z = 10$$

التمرين الرابع: أوجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الثنائية المعرفة بالمثال رقم 05 مع اعتبار ان انجاز المشروع الأول يجب أن يرافقه انجاز المشروع الثالث أيضا.

حل التمرين الرابع: النموذج البرمجة الثنائية يصبح بالصيغة الآتية:

$$Max(z) = 3x_1 + 2x_2 + 1.5x_3$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \le 10 \\ x_1 - x_3 \le 0 \\ x_2 \le 1 \end{cases}$$

$$x_1; x_2; x_3 \ge 0$$

وهي صحيحة.

الحل الأمثل لمسألة البرمجة والذي يمثل الحل بدون الأخذ بنظر الاعتبار قيد العدد الصحيح موضح بالجدول التالي:

T_4	C_J	3	2	1.5	0	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	B
1.5	X_3	0	0	1	$\frac{1}{9}$	$\frac{-4}{9}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{7}{9}$
3	X_1	1	0	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{7}{9}$
2	X_2	0	1	0	0	0	1	1
Z_J		3	2	1.5	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$Z=\frac{11}{2}$
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	0	0	$\frac{-1}{2}$	-1	$\frac{-1}{2}$	

بما أن قيم المتغيرات الأساسية هي قيم غير صحيحة لذلك نستخدم أسلوب الاختبارين للحصول على الحل الأمثل لمسألة البرمجة الصحيحة وكالآتي:

الحل الأمثل للمسالة بدون الأخذ بنظر الاعتبار قيد العدد الصحيح؛

$$X_1 = \frac{7}{9}; X_2 = 1; X_3 = \frac{7}{9}; Z = 5\frac{1}{2}$$

قيم أسعار الظل هي: $(y_1 = \frac{1}{2})$ ،$(y_2 = 1)$ ،$(y_3 = \frac{1}{2})$.

وهذا يدل على أن جميع قيود النموذج هي قيود مؤثرة:

المرحلة الأولى: نختار X_2

$$X_1 = 0; X_2 = 1; X_3 = 1; Z_1 = 3.5$$

$$\overline{Z}_1 = Z - Z_1 = 5\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2} = 2$$

نختبر تحقق القيود:

القيد الأول: $4\left(\frac{-7}{9}\right) + 3(0) + 5\left(\frac{2}{9}\right) = -2$

القيد الثاني: $1\left(\frac{-7}{9}\right) - 1\left(-\frac{2}{9}\right) = -1$

القيد الثالث: $1(0) = 0$ ،

بما أن القيم أصغر أو تساوي الصفر فهذا يعني تحقق القيود ونختار القيد الأول لحساب قيم Q_1:

$$Q_1 = (a_{11} - a_{12}, a_{13} - a_{11}, a_{13} - a_{12})$$
$$\overline{Q}_1 = (C_1 - C_2, C_3 - C_1, C_3 - C_2)$$
$$\overline{Q}_1 = (1 < \overline{Z}_2, -1.5, -0.5)$$

هذا يعني الانتقال إلى المرحلة الثالثة بزيادة قيمة المتغير X_1 ونقصان قيمة المتغير X_2 وحدة واحدة.

المرحلة الثانية:

$$X_1 = 1; X_2 = 0; X_3 = 1; Z_2 = 4.5$$

$$\overline{Z}_2 = Z - Z_2 = 5\frac{1}{2} - 4\frac{1}{2} = 1$$

نختبر تحقق القيود:

القيد الأول: $4\left(\frac{2}{9}\right) + 3(-1) + 5\left(\frac{2}{9}\right) = -1$

القيد الثاني: $1\left(\frac{2}{9}\right) - 1\left(\frac{2}{9}\right) = 0$

القيد الثالث: $1(-1) = -1$,

بما أن القيم أصغر أو تساوي الصفر فهذا يعني تحقق القيود لذلك يتم حساب قيم Q_1 و Q_3 :

$Q_1 = (a_{11} - a_{12}, a_{13} - a_{11})$

$Q_3 = (a_{32})$

في هذه الحالة الزيادة والنقصان في قيم المتغيرات يجب أن تحقق القيدين سوية لذلك فإن $(a_{13} - a_{11})$ هو فقط الذي يحقق القيدين وبما ان المسألة هي مسألة برمجة ثنائية لذلك لا يمكن زيادة قيمة X_3 لتصبح 2 وعليه حل المرحلة الثانية يمثل حل الأمثل.

$$X_1 = 1; X_2 = 0; X_3 = 1; Z = 4.5$$

V- تمارين مقترحة:

التمرين الأول: أوجد الحل الأمثل لمسألة الإنتاج **باستخدام أسلوب التفريع والتحديد**

$$1)Max(z) = 3x_1 + 2x_2$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 9 \\ 3x_1 + 3x_2 \le 18 \end{cases}$$

$$x_1; x_2 \ge 0$$

وهي صحيحة.

التمرين الثاني: أوجد الحل الأمثل لمسألة الإنتاج **باستخدام أسلوب القطع المكافئ**

$$1)Max(z) = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 \le 4 \\ 4x_2 - 3x_3 \le 2 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 \le 3 \end{cases}$$

$$x_1; x_2; x_3 \ge 0$$

وهي صحيحة.

$$2)Max(z)=2x_1+3x_2$$
$$s/c$$
$$\begin{cases}5x_1+7x_2\le 35\\4x_1+9x_2\le 36\end{cases}$$
$$x_1;x_2\ge 0$$

وهي صحيحة.

$$3)Min(z)=5x_1+4x_2$$
$$s/c$$
$$\begin{cases}4x_1+2x_2\ge 6\\2x_1+3x_2\ge 8\end{cases}$$
$$x_1;x_2\ge 0$$

وهي صحيحة.

$$2)Max(z)=4x_1+6x_2+2x_3$$
$$s/c$$
$$\begin{cases}4x_1-4x_2\le 5\\-x_1+6x_2\le 5\\-x_1+x_2+x_3\le 5\end{cases}$$
$$x_1;x_2;x_3\ge 0$$

وهي صحيحة.

$$3)Max(z)=2x_1+x_2$$
$$s/c$$
$$\begin{cases}10x_1+10x_2\le 9\\10x_1+5x_2\ge 1\end{cases}$$
$$x_1;x_2\ge 0$$

وهي صحيحة.

التمرين الثالث: أوجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية الآتية **باستخدام أسلوب الاختبارين:**

$$1)Max(z)=5x_1+4x_2$$
$$s/c$$
$$\begin{cases}x_1+x_2\le 5\\10x_1+6x_2\le 45\end{cases}$$
$$x_1;x_2\ge 0$$

وهي صحيحة.

$$2)Min(z)=2x_1+3x_2$$
$$s/c$$
$$\begin{cases}5x_1+6x_2\le 140\\\frac{2}{3}x_1+\frac{4}{3}x_2\ge 25\\x_1+x_2\ge 25\end{cases}$$
$$x_1;x_2\ge 0$$

وهي صحيحة.

التمرين الرابع: أوجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الثنائية المعرفة بالمثال رقم 05 مع اعتبار ان مكتب المقاولات يخطط للقيام بمشروع واحد فقط من بين المشاريع الثلاثة.

الفصل الثالث

التحليل الشبكي

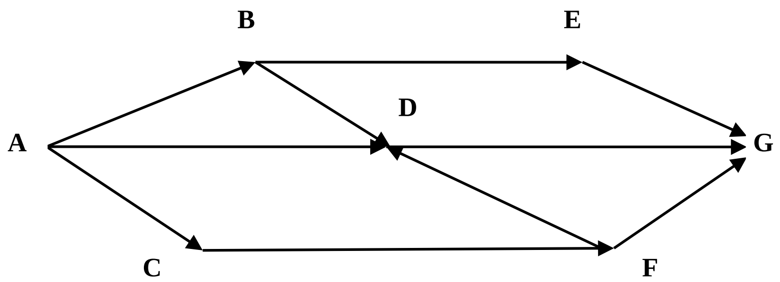
تستخدم شبكات الأعمال في برمجة المشاريع الانشائية والصناعية وكذلك في مجال الصيانة، وبرمجة المشاريع، هذه كلمة عامة وهي تتضمن في حقيقة الأمر، وظيفتي **التخطيط والرقابة**، واللتين يمكن عدهما من الوظائف الرئيسية للإدارة ، التخطيط بلورة الأهداف المراد تحقيقها إلى خطط يمكن تنفيذها، أما وظيفة الرقابة يتم معرفة ما قد يحدث من انحرافات في الاداء التنفيذي الفعلي عن الخطط الموضوعة، ومن هنا تبرز الحاجة الماسة لإتباع نماذج التحليل الشبكي فمثلا في نموذج المسار الحرج **CPM** (**Critical path method**) وكذلك نموذج **PERT** (أسلوب تقييم ومراجعة المشاريع) **(Program Evaluation And Review Technique)** بوصفها كأدوات فاعلة تساهم في اتخاذ القرارات[1].

كما استخدم نظرية البيانات في الكثير من الحياة العملية وخاصة في مجالات التسيير الأمثلي للموارد، كأعمال الطرق وإمداد الشبكات كشبكات المياه والغاز والكهرباء والطرق، وإنجاز المشاريع..إلخ.

I- نظرية البيان:

أولا: مفاهيم عامة[2]:

- ✓ **البيان:** هو عبارة عن مجموعة من الخطوط المتصلة عن طريق نقط أو دوائر تسمى بالقمم، يعبر كل خط عن اختيار معين، وعليه فالبيان يتكون من مجموعتين، المجموعة x تسمى بالقمم وهي عبارة عن نقاط أو دوائر صغيرة، المجموعة u عبارة عن خطوط أو أسطر تربط كل قمتين كما يظهر في الشكل أدناه:



إذا كانت مجموعة الخطوط او الاسطر موجهة اي في شكل اسهم من القمة إلى القمة او العكس تسمى **بالأقراس** ويسمى البيان حينئذ **بالبيان الموجهة**، أما إذا كانت مجموعة الخطوط غير موجهة فإن تلك الخطوط تسمى **بالأحرف**، ويسمى البيان حينئذ بالبيان **غير الموجه.**

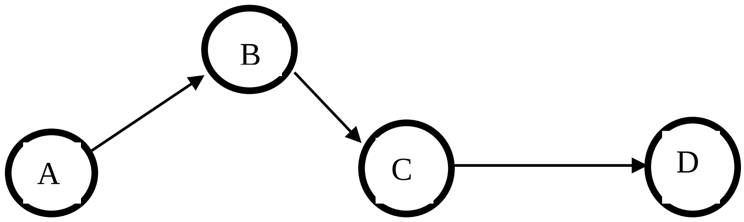
- ✓ **القمم:** هي النقاط التي تنطلق منها أو تصل إليها الخطوط الموجهة الأقواس أو غير موجهة الأحرف فالنقاط A,B,C,D,E,F,G في الشكل أعلاه عبارة عن قمم للبيان.

---

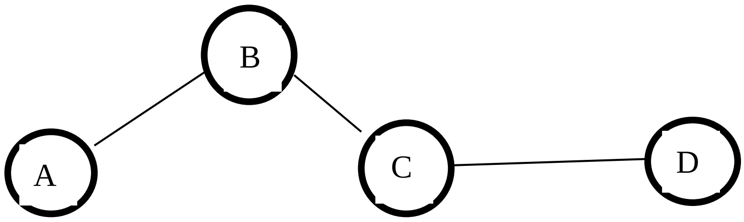
[1]. حامد سعد نور الشمرتي، مرجع سابق، ص 316.

[2]. راتول محمد، مرجع سابق، ص ص 209 –213.

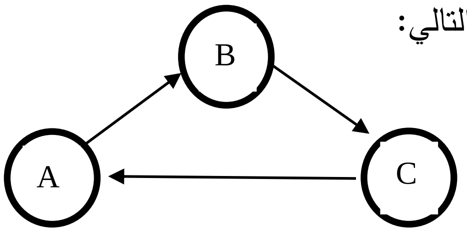
- **المسار:** مجموعة **متتابعة من الأقواس** يكون فيها الطرف النهائي لكل قوس هو الطرف الابتدائي للقوس الموالي باستثناء الطرف النهائي للقوس الأخير كما هو موضح في الشكل التالي:



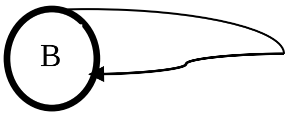
- **السلسلة:** هي مجموعة **متتابعه من الاحرف** يكون فيها الطرف النهائي لكل حرف هو الطرف الابتدائي للحرف الموالي باستثناء الطرف النهائي للحرف الأخير كما هو موضح في الشكل التالي:



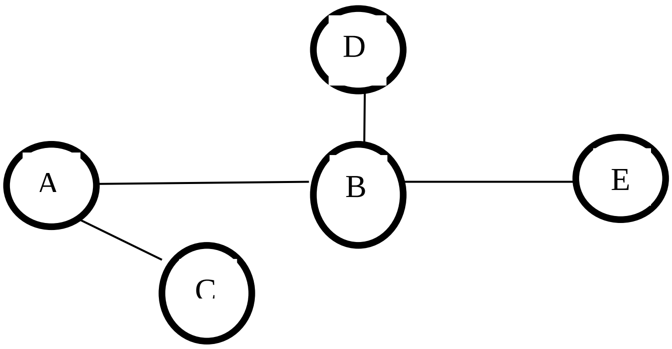
- **الدارة:** هي مسار مغلق على نفسه، يكون فيه الطرف النهائي للقوس الأخير متصل بالطرف الابتدائي للقوس الأول كما هو موضح في الشكل التالي:



- **العقدة:** هي سهم طرفه الابتدائي هو نفسه طرفه النهائي، أي يعود إلى نفس القمة التي ينطلق منها كما هو موضح في الشكل التالي:



- **الشجرة:** هي بيان مترابط بدون دارة، يحتوي على N قمة، و N−1 حرف، كما هو موضح في الشكل التالي:

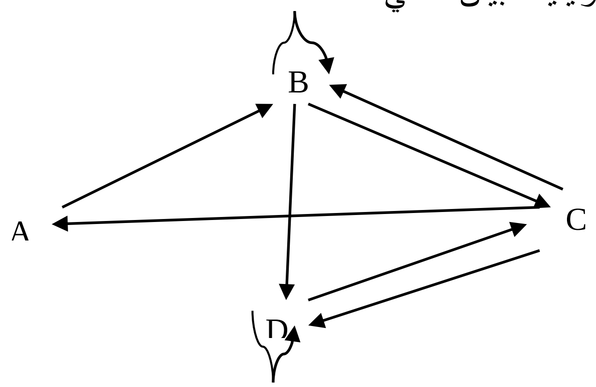


ثانيا: التقديم المصفوفي وعن طريق جداول للبيان[1]:

✓ **التقديم المصفوفي للبيان:** كل بيان يمكن تقديمه عن طريق مصفوفة مربعة من الرتبة n.

المصفوفة البولينية: فيها يكون لدينا عدد الأسطر والأعمدة يساوي عدد القمم، أما عناصر المصفوفة فتساوي 1 إذا كانت توجد علاقة أو 0 إذا لم توجد علاقة.

مثال رقم 01: أوجد المصفوفة البولينية للبيان التالي:

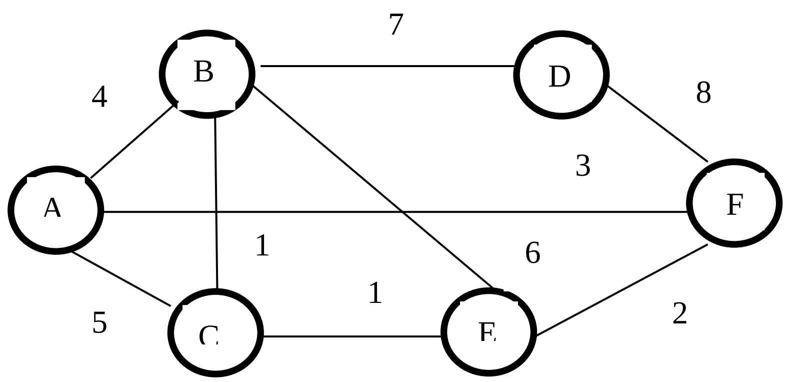


حل: يتم تقديم المصفوفة البولينية كما يلي:

	A	B	C	D
A	0	1	0	0
B	0	1	1	1
C	1	1	0	1
D	0	0	1	1

مصفوفة السعة: تكون **الشبكة مقيمة** إذا كان كل قوس أو حرف فيها يمثل كمية تعبر إما عن الطلول او الحجم أو التكلفة...الخ، وفي هذه الحالة يمكن أن نعبر عن الشبكة **بمصفوفة السعة**، حيث يمثل كل عنصر فيها حمولة القوس أو الحرف بين كل قمة وقمة أخرى، وإذا لم توجد علاقة بين قمتين فإنه يتم التعبير عن ذلك بالقيمة صفر.

مثال رقم 02: الشبكة التالية تعبر عن أطوال الخطوط للشبكة الكهربائية بين مجموعة من القرى.



[1]. راتول محمد، مرجع سابق، ص ص 214– 221.

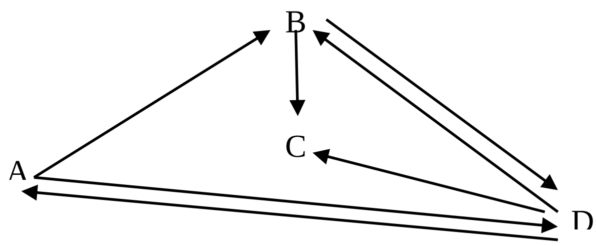
المطلوب: عبر عن الشبكة في شكل مصفوفة السعة.

الحل: تكون على النحو التالي:

القمم	A	B	C	D	E	F
A	0	4	5	0	0	3
B	4	0	1	7	6	0
C	5	1	0	0	1	0
D	0	7	0	0	0	8
E	0	6	1	0	0	2
F	3	0	0	8	2	1

مصفوفة المساقط للبيان الموجه بدون دارة: فيها يكون عنصر المصفوفة يساوي 1 إذا كان القوس ينطلق من القمة، يساوي -1 إذا كان القوس يصل إلى القمة، و0 إذا كانت لا توجد علاقة.

مثال رقم 03: أوجد مصفوفة المساقط للبيان التالي:



الحل: بتطبيق المبدأ أعلاه نحل على مصفوفة المساقط التالية:

القمم	A	B	C	D
A ;B	1	-1	0	0
A ;D	1	0	0	-1
B ;C	0	1	-1	0
B ;D	0	1	0	-1
D ;A	-1	0	0	1
D ;B	0	-1	0	1
D ;C	0	0	-1	1

مصفوفة الأقواس: عبارة عن مصفوفة البولينية معبر عنها برموز القمم، أخذا بعين الإعتبار الإتجاه من القمة i إلى القمة j وذلك كما في المثال التالي:

مثال رقم 04: عبر عن البيان المثال رقم 01 بشكل مصفوفة الأقواس.

حل: مصفوفة الأقواس هي كما يلي:

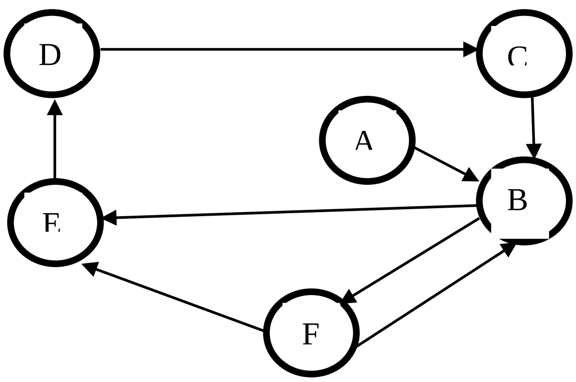
	A	B	C	D
A	AB			
B		BB	BC	BD
C	CA	CB		CD
D			DC	DD

✓ **تقديم البيان عن طريق جداول:** يمكن أن يقدم البيان عن طريق إما جداول السوابق أو جداول اللواحق:

جدول اللواحق: فيه يتم وضع جدول بعمودين، بوضع في العمود الأول القمم وفي العمود الثاني لواحقها أي الأطراف النهائية.

جدول السوابق: فيه يتم أيضا وضع جدول بعمودين، يوضع في الأول الأطراف الابتدائية وفي الثاني توضع الأقواس التي تصل إلى الطرف.

مثال رقم 05: قدم البيان التالي مرة بجدول اللواحق وأخرى بجدول السوابق.



الحل:

جدول اللواحق:

القمم	اللواحق
A	B
B	E;F
C	B
D	C
E	D
F	B;E

جدول السوابق:

القمم	السوابق
A	-
B	A;C;F
C	D
D	E
E	B;F
F	B

II – الجريان (التدفق) الأعظمي:

الهدف من هذه طريقة البحث عن أعظم تدفق عبر الشبكة، بمعنى آخر نحاول إيصال أو نقل أعظم كمية من الكميات المتوفرة في مدخل الشبكة وإيصالها إلى مخرج الشبكة، وذلك بالأخذ بعين الاعتبار قدرات الأسهم، أي سعة طرق أو قنوات النقل، البحث عن تدفق أعظم عبر شبكة ما يعني البحث عن تدفق يجعل الانسياب إلى رأسها النهائي أعظم ما يمكن. ومن أهم الطرق المستعملة في حل مثل هذا النوع من المسائل هي طريقة فورد فلكرسون (Ford –Fulkerson)[1].

أولا– عرض الطريقة: لحل المسألة نتبع خوارزمية تسمى خوارزمية فورد فلكرسون، خطواتها كما يلي[2]:

✓ **رسم البيان:** يتم ذلك باتباع الخطوات التالية:

- نحدد نقطة ما نسميها مدخل البيان ونرمز لها بـ O؛
- نحدد قمم المنابع ثم نصل بين قمة المدخل وقمم المنابع بأقواس طاقة كل منها أي حمولتها تساوي طاقة تصريف كل منبع؛
- نحدد قمم المصبات (إلى اليمين من المنابع)، ونصلها بالمنابع عن طريق أقواس ونحدد طاقة تصريف كل قوس؛
- نحدد نقطة أخرى خارج البيان إلى اليمين من المصبات ونسميها مخرج البيان ونرمز لها بـ s.
- نصل النقطة s بمختلف المصبات بأقواس طاقة تصريفها تساوي طاقة استقبال كل مصب.

✓ **البحث عن أمثل تدفق:**

1. نبدأ من الأقواس التي تخرج من قمة المدخل، ونقوم بإرسال تدفق ما مع مراعاة ضرورة التوزان عن كل قمة بحيث تكون الكميات الداخلة تساوي الكميات الخارجة، ودون تجاوز قدرة نقل كل قوس؛
2. نقوم بتحسين التدفق حتى يكون كل مسار من المدخل o حتى المخرج s يحتوي على الأقل قوس مشبع * واحد (تدفق كامل)، وهذا حسب منهجية الخطوة الموالية؛
3. ننطلق من القمة o ونجري ما يلي: نوسم القمة o بالإشارة + ، وإذا كان هناك قوس غير مشبع ينطلق من القمة i نحو القمة j نضع بجوار القمة j العلامة j^+ ، أما إذا كان قوس

---

1. مكيد علي: " **بحوث العمليات وتطبيقاتها الاقتصادية دروس ومسائل محلولة**"، الجزء الثاني، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2016. ص 185.

2. راتول محمد ، مرجع سابق، ص ص : 272– 285.

*. نقصد بالقوس المشبع أنه ينقل كمية تساوي تماما طاقة نقله القصوى.

مشبع و وغير معدوم ينطلق من قمة ما k إلى القمة i ، نضع بجوار القمة k العلامة –i ، ثم نعود العملية من جديد و في كل مرة نسوم القمة التي نصل اليها بـ + و − القوس السابق أو اللاحق حسب الحالة دون إعادة توسيم القمم التي تم توسيمها من قبل؛

4. إذا استحالت وكنا لم نصل إلى توسيم المخرج s فإن التدفق يكون أعظميا، والحل صارة أمثلا.
5. إذا وصلنا إلى توسيم القمة s فإن التدفق يكون غير أعظمي وينبغي تحسينه؛
6. إذا كنا أمام الحالة السابقة 5 نقوم بتحديد السلسلة الموسمة ونبدأ بتحسين الحل بإضافة أو انقاص أنسب كمية من الأسواق بحيث ينبغي مراعاة عدم تجاوز الطاقة القصوى للأقواس وعدم إحداث أقواس بقيمة سالبة؛
7. نعود من جديد إلى الخطوة 3؛
8. نكون أمام التدفق الأعظمي لما يستحيل توسيم القمة s وفق الخوارزمية أعلاه (نقوم حينئذ بفصل القمم الموسمة عن غير الموسمة بقاطع، وتكون قيمة التدفق الأعظمي هي مجموع الأقواس التي تربط بين القمم الموسمة والقمم غير الموسمة المفصولة بالقاطع).

ثانيا: طرح مسألة: تطرح مسائل التدفق الأعظمي على نحو المثال التالي:

مثال رقم 06: مؤسسة لديها ثلاثة خزانات رئيسية للمياه هي A ;B ;C لتموين أربع قرى هي D ;E ;F ;G ، بحيث أن الخزان A يستطيع تصريف 45 لتر/ثا، والخزان B يستطيع تصريف 25 لتر/ثا، والخزان C يستطيع تصريف 20 لتر/ثا، بينما تقدر احتياجات القرية D بـ 30 لتر/ثا، والقرية E 10 لتر/ثا، والقرية F 20 لتر/ثا.

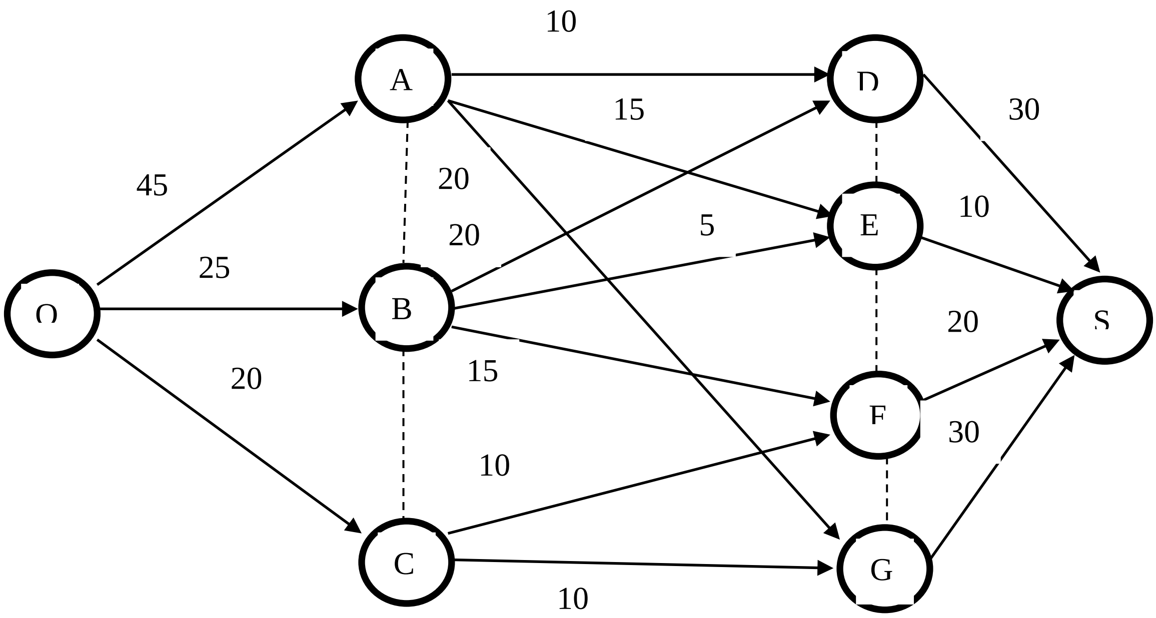
توجد عدة قنوات تصل الخزانات بالقرى طاقة تصريف كل منها محدودة وهي موضحة في الجدول التالي:

	D	E	F	G
A	10	15	−	20
B	20	5	15	−
C	−	−	10	10

المطلوب: إيجاد أعظم تدفق ممكن من الخزانات الثلاثة إلى القرى الأربعة في وجود قيود طاقة التصريف للأنابيب.

حل المثال رقم 06:

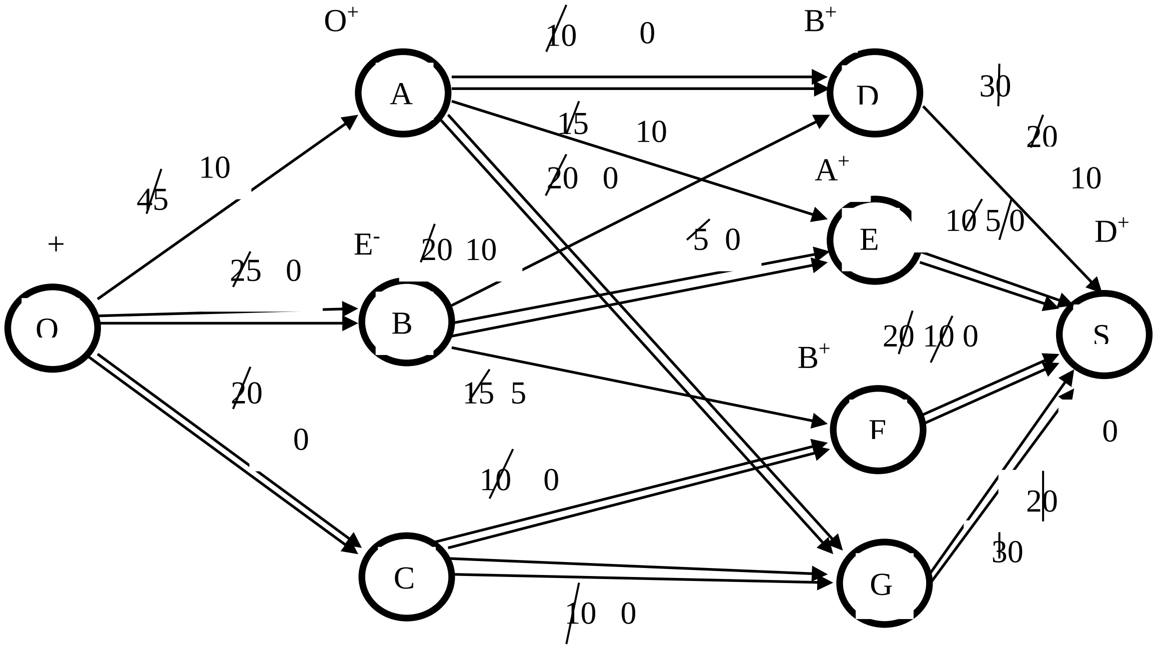
✓ **رسم بيان التدفق الأعظمي:** بإضافة القمتين المساعدتين، قمة الدخول وقمة الخروج نحصل على بيان المطلوب في الخوارزمية وهو:



✓ **البحث عن أمثل تدفق:**

- نبدأ من القمةO، نرسل أية كمية نشاء. مع مراعاة قدرات تصريف الأقواس التي تخرج من القمة الموالية، فلو نرسل عبر القوس OC الكمية 20 ل/ثا، فإنه يمكن تصريفها كلية عبر الأقواس CG و CF كليهما بمقدار 10 ل/ثا، وكذلك يمكن للكمية التي تمر عبر القوس CG وكذلك الكمية التي تمر عبر القوس CF يمكن لها أن تصل كلية إلى S عبر القوس FS، نمرر الكمية 20 ل/ثا عبر القوس OC وبذلك يشبع كلية نميز القوس المشبع بخط مزدوج، يمكن امرار الكمية التي وصلت إلى القمة C وهي 20 ل/ثا كما يلي: نمرر10 ل/ثا عبر القوس CG وبذلك يشبع هذا القوس، ثم نمرر الكمية التي وصلت إلى G وهي بمقدار 10 ل/ثا إلى S عبر القوس GS، لكن يلاحظ أن الطاقة القصوى لم يشبع في هذه المرحلة إذ يبقى قادرا على تصريف 20 ل/ثا أي 30−10 = 20، لذلك نشطب القيمة 30 ونضع أمامها 20 وهي طاقة التصريف المتبقية. نفس شيء بالنسبة CF. لحد الأن تم تصريف كل الكمية التي عبرت من خلال القوس OC و وصلت إلى القمة S؛
- نفس الشيء نعود للقمة O نمرر الكمية 25 ل/ثا عبر القوس OB؛
- بالنسبة لبقية الأقواس التي تنطلق من A لا يطرح أي مشكل، إذن لا يمكن إمرار عبر OA سوى الكمية 35 ل/ثا، ولا يشبع هذا القوس إذ تبقى طاقة زائدة مقدارها 10 ل/ثا، فالكمية التي تصل A هي إذن 35 ل/ثا تصرف كما يلي: عبر AE 5 ل/ثا كما أشرنا أعلاه ولا يشبع هذا القوس، تمر هذه الكمية من E عبر القوس ES ويشبع هذا القوس، نمرر 20ل/ثا عبر القوس AG و يشبع تماما، وتصرف الكمية التي وصلت إلى G عبر

GS حيث كانت هناك طاقة غير مستغلة متبقية تساوي 20 ل/ثا يتم إستغلالها ويشبع بذلك هذا القوس تماما، نمرر الكمية المتبقية وهي 10 ل/ثا عبر AD حيث يشبع هذا القوس تماما، ثم نصرف هذه الكمية من D عبر DS حيث لا يشبع هذا القوس وتبقى طاقة غير مستغلة فيه تساوي 10 ل/ثا. وتكون بذلك كل الكميات التي خرجت من O والمقدرة بـ 80 ل/ثا قد وصلت إلى القمة S.



ملاحظة: في كل قمة يجب أن تكون الكميات الداخلة تساوي الكميات الخارجة.

إن التدفق الذي حصلنا عليه حتى الآن والذي يظهره البيان أعلاه هو تدفق يظهر حلا أساسيا أولي المعبر عليه في الجدول التالي:

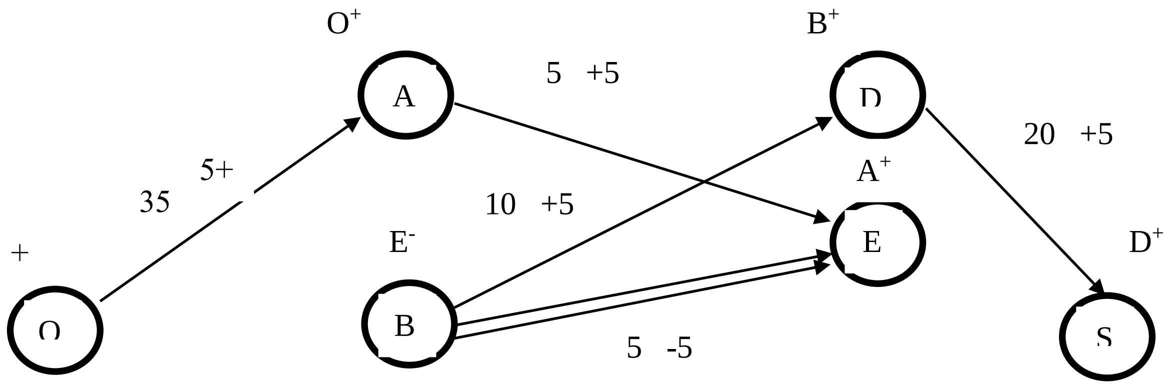
	D	E	F	G	المصرفة
A	10	5	–	20	35
B	10	5	10	–	25
C	–	–	10	10	20
المستقبلة	20	10	20	30	80

✓ **إختبار الحل وتحسينه:** بعد الحصول على الحل الأساسي الأول يتم إختيار هذا الحل إذا كان امثلا أم لا، ويتم ذلك بتطبيق المرحلة الثانية من خوارزمية فورد– فلكرسون، كما يلي:

- نوسم القمة O بالإشارة +، ونطرح السؤال : هل يوجد قوس واحد غير مشبع ينطلق من القمةO والاجابة نعم وهو القوس OA نضع بجوار القمة A الإشارة O^+ .

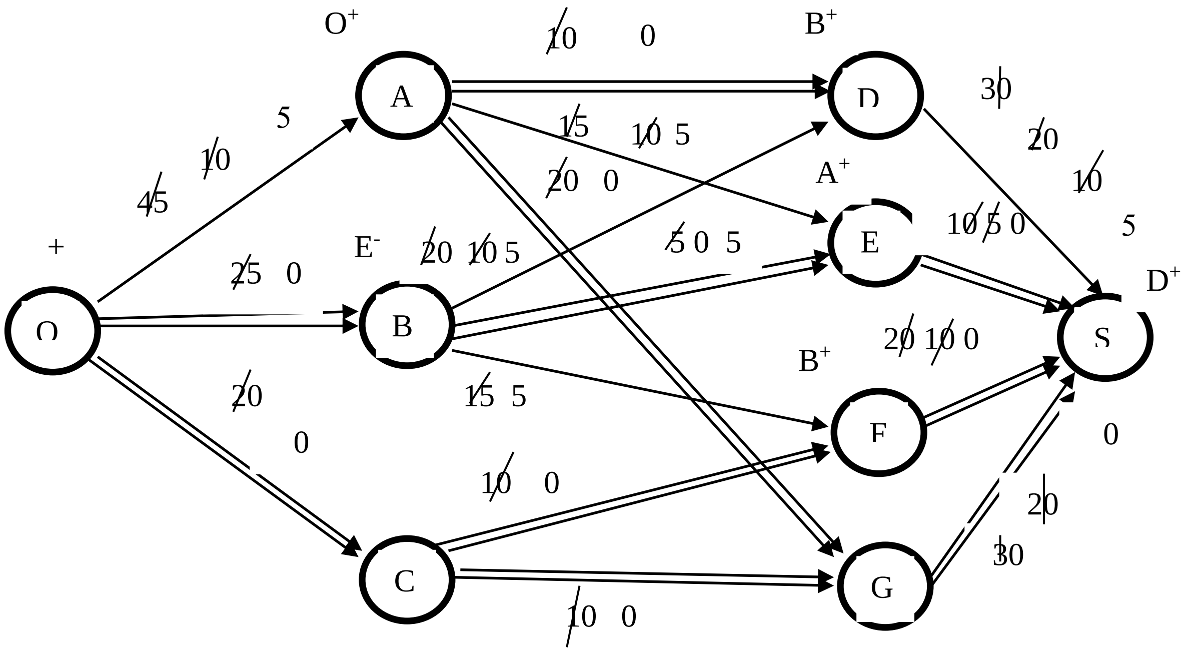
- في القمة A هل يوجد قوس واحد غير مشبع ينطلق من القمة A والإجابة نعم هو القوس AE نضع بجوار E الإشارة A^+ ؛
- في القمة E هل يوجد قوس واحد غير مشبع ينطلق من القمة E الإجابة لا يوجد قوس غير مشبع ينطلق من E، نطرح السؤال الآخر وهو: هل يوجد قوس غير معدوم يصل إلى E الإجابة نعم وهو BE، نضع بجوار B الإشارة E^- ؛
- في القمة B هل يوجد قوس واحد غير مشبع ينطلق من القمة B الإجابة نعم هو القوس BD نضع بجوار D الإشارة B^+ ؛
- في القمة D هل يوجد قوس واحد غير مشبع ينطلق من القمة D الإجابة نعم هو القوس DS نضع بجوار S الإشارة D^+ .

حسب الخوارزمية ما دمنا وصلنا إلى توسيم القمة S فالتدفق غير أمثلي ولازال قابلا للتحسين، خلال عملية التوسيم مررنا على سلسلة الأقواس كما هي في الشكل التالي:



وهي سلسلة تبين لنا مسار تحسين الحل.

- ولتحسين الحل ينبغي الزيادة في الأقواس OA ;AE ;BD ;DS والإنقاص في القوس BE بحيث يسمح ذلك بتحقيق قاعدة التوازن في كل قمة، ونلاحظ أنه لا يمكن تخفيض BE بأكثر من 5 ل/ثا لأن ذلك يؤدي إلى قيمة سالبة، لذلك نضيف القيمة 5 إلى كل أقواس السلسلة ما عدا القوس BE فإننا نطرح منه القيمة 5 ويصبح قوس صفري أي معدوم لا ينقل عبره شيء، وبصبح البيان الجديد كما يلي:



ونعيد التوسيم من جديد تماما كما فعلنا في المرحلة السابقة، هل يوجد قوس غير مشبع من القمة O الإجابة نعم هو OA لذلك نوسم A بالإشارة O^+ ، هل بوجد قوس غير مشبع ينطلق من القمةَ Aالإجابة نعم وهو AE نوسم E بالإشارة A^+ ، هل يوجد قوس غير مشبع ينطلق من القمة E الإجابة لا يوجد، لذلك نطرح السؤال البديل وهو هل يوجد قوس غير معدوم يصل إلى E ، الإجابة لا يوجد، وبالتالي فإنه استحال علينا الوصول إلى توسيم قمة الخروج S وعليه فالحل المتوصل إليه هو حل أمثل . أي أننا وصلنا إلى أعظم تدفق وهو ما يوضحه الجدول التالي:

	D	E	F	G	المصرفة
A	**10**	**10**	–	**20**	**40**
B	**15**	**0**	**10**	–	**25**
C	–	–	**10**	**10**	**20**
المستقبلة	**25**	**10**	**20**	**30**	**85**

III – اسلوب المسار الحرج (CPM /GANT):

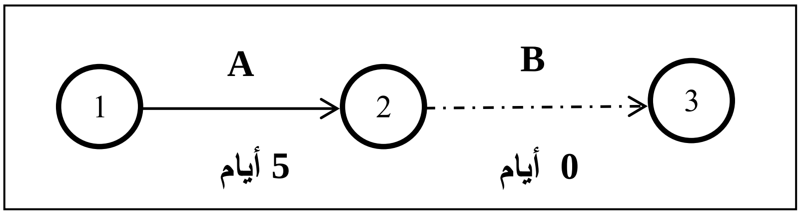
ظهر هذا الأسلوب عام 1956 فيّ (و، م ،أ) وينظر لأسلوب المسار الحرج كونه أحد الأساليب الإدارية المساهمة في نشاطات التخطيط والجدولة والرقابة على مختلف المشاريع، ويهدف هذا الأسلوب إلى مراقبة تنفيذ مشروع ما، والذي يتكون من عدة مراحل أو (فعاليات) ولابد من تحديد المسار الحرج والذي يعتبر أطول مسار في شبكة العمل مع ضرورة البدء بإنجاز الفعاليات التي تقع ضمن هذا المسار أولا بأول، ويطلق على الأنشطة التي تقع على المسار الحرج بالأنشطة الحرجة أو الحساسة)، أما التي تقع خارج نطاق المسار الحرج فيطلق عليها بالأنشطة غير الحرجة (غير الحساسة)، ويمكن تعريف طريقة المسار الحرج بأنها مجموعة من الفعاليات المتعاقبة والتي تكون السلسلة الحرجة للأحداث والأنشطة والتي تشكل مجموع المشروع المراد إنجازه والوقت اللازم لإنجازه[1].

إن السمات الأساسية لهذا الأسلوب تتبلور في جانبين هما:

اولاً: شبكة العمل: هو تمثيل بياني للربط المنطقي والتتابع للأسهم والعقد التي تمثل الأنشطة والأحداث في المشروع وقد تسمى شبكة العمل بالمخطط السهمي[2].

أ. **الحدث**: وهو عبارة عن لحظة من الزمن لا يحتاج لوقت أو جهد أو موارد معينة، يشير الحدث إلى بداية أو نهاية مهمة معينة أو نشاط معين، إذن يمكن تعبير ذلك الحدث بدائرة، وقد يكون الحدث بداية لنشاط لاحق ونهاية لنشاط سابق في الوقت نفسه[3].

ب. **النشاط:** هو جزء من المشروع الذي يتطلب لتنفيذه الامكانيات المادية والبشرية وهو يمثل القيام بالإنجاز الفعلي، ويستغرق وقتاً محدداً. ويقع بين حدثين ويعبر عنه بسهم لكون الحدث الأول بداية النشاط والحدث الثاني نهايته ويمكن التعبير عنه بالمخطط التالي[4]:



يعتبر الحدث (1) بداية للنشاط A والحدث (2) نهاية له وفي نفس الوقت بداية للنشاط B ويمكن تصنيف الأنشطة إلى نوعين هما:

---

1. احمد عبد إسماعيل الصفار، ماجدة عبد اللطيف التميمي، مرجع سابق، ص ص 363– 364.
2. دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال، مرجع سابق، ص209.
3. جلال ابراهيم العبد: " **استخدام الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الادارية**"، دار الجامعة الجديدة للنشر، 2004. ص 228.
4. عبد الرسول عبد الرزاق الموسوي، مرجع سابق، ص ص169– 170.

✓ الأنشطة الوهمية؛
✓ الأنشطة الحقيقية.

الأنشطة الوهمية: يتمثل هذا النشاط على المخطط الشبكي السهمي بسهم متقطع يربط بين فعالية وأخرى، ولا يحتاج إلى وقت أو موارد بل تكون هذه القيم صفراً.

تمثل **الأنشطة الحقيقية** إنجازات محددة وتأخذ وقتاً معيناً لتنفيذها وتتطلب مواردا ضرورية (مادية وبشرية) لأغراض التنفيذ ويعبر عنها في شبكة العمل بخطوط متصلة تربط بين أحداث الأنشطة المختلفة.

ثانياً: حساب الوقت: تعتمد طريقة المسار الحرج في حساب الزمن اللازم لإنجاز المشروع على حساب الأوقات التالية[1]:

✓ **البداية المبكرة للنشاط:** وهي عبارة عن اقرب وقت يمكن البدء فيه لتنفيذ نشاط معين، وان البداية المبكرة لأي نشاط تساوي النهاية المبكرة للنشاط السابق وعادة ما يكون الوقت المبكر لأول نشاط في شبكات الأعمال يساوي صفراً، إذ لا يوجد نشاط سابق له؛

✓ **النهاية المبكرة للنشاط:** وهي عبارة عن اقرب وقت يمكن أن ينتهي فيه تنفيذ نشاط معين والنهاية المبكرة لأي نشاط = البداية المبكرة للناشط نفسه + الفترة الزمنية التي يستغرقها تنفيد ذلك الناشط؛

✓ **البداية المتأخرة للنشاط:** وهي عبارة عن أخر وقت يمكن أن يبدأ فيه النشاط دون ان يؤثر على انجاز المشروع في الوقت المحدد لإنجازه.

البداية المتأخرة لأي نشاط= النهاية المتأخرة للنشاط نفسه – الفترة الزمنية التي يستغرقها تنفيذ ذلك النشاط.

✓ **النهاية المتأخرة للنشاط:** وهي عبارة عن اخر وقت يكمن أن ينتهي فيه النشاط دون أن يؤثر على إنجاز المشروع في الوقت المحدد له.

النهاية المتأخرة لأي نشاط= البداية المتأخرة للنشاط السابق بموجب أسلوب المرور التراجعي، أي البدء من النشاط النهائي ثم التراجع على المسارات المختلفة مروراً بجميع الأنشطة.

✓ **الزمن الفائض:** يعرف الزمن الفائض بأنه الفرق بين الزمن المبكر والزمن المتأخر لنهاية النشاط او الفرق بين الزمن المبكر والزمن المتأخر لبداية النشاط [2].

الزمن الفائض لأي نشاط= البداية المتأخرة – البداية المبكرة

= النهاية المتأخرة – النهاية المبكرة

---

1. احمد عبد إسماعيل الصفار، ماجدة عبد اللطيف التميمي، مرجع سابق، ص ص 368– 369.
2. محمد عبد العال النعيمي، رفاه شهاب الحمداني، احمد شهاب الحمداني، مرجع سابق. ص 296.

زمن الفائض يساوي (0) وأن أي تأخير في أي نشاط من الأنشطة الحساسة والواقعة على المسار الحرج يؤدي إلى تأخير إنجاز المشروع بأكمله، لذلك من الممكن الاستفادة من الزمن الفائض بهدف الاسراع في تنفيذ المشروع.

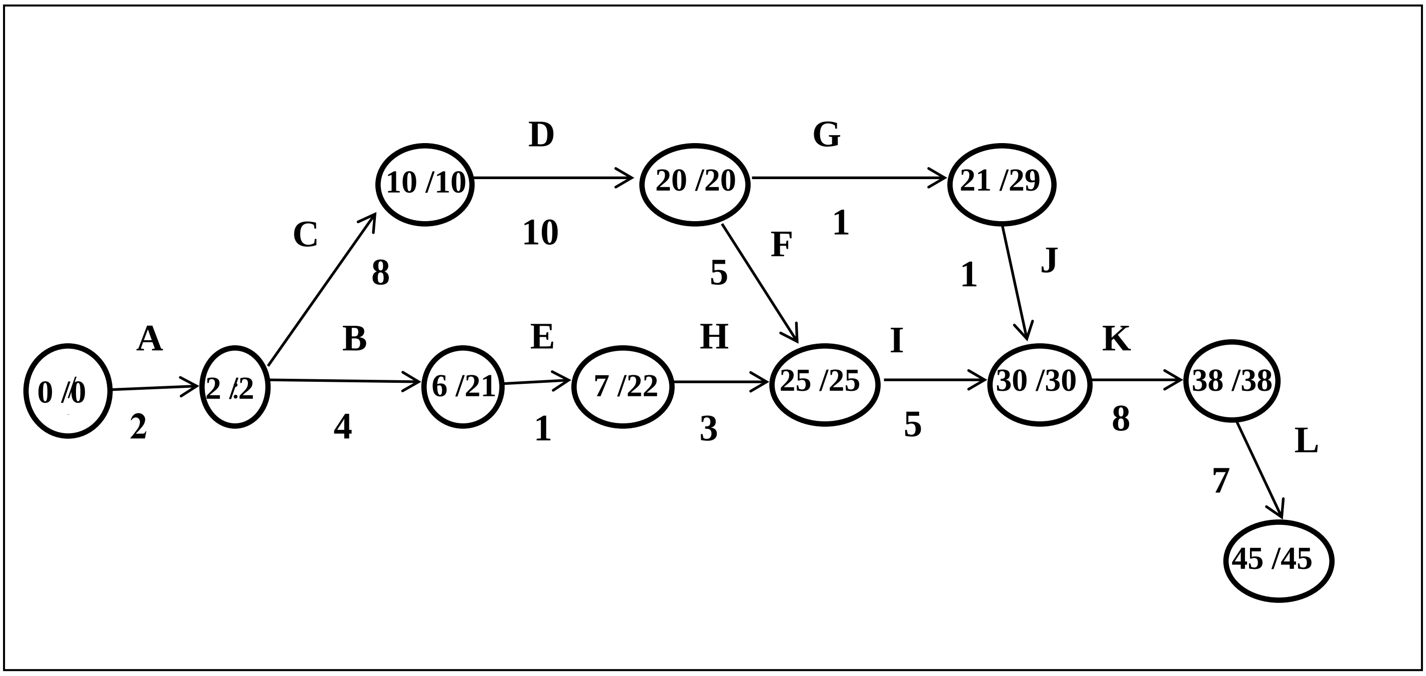
مثال رقم 07: توفرت لديك البيانات التالية والتي تخص إنجاز أحد المشاريع الصناعية:

النشاط	النشاط السابق	الزمن / بالأشهر
A	–	2
B	A	4
C	A	8
D	C	10
E	B	1
F	D	5
G	D	1
H	E	3
I	F ; H	5
J	G	1
K	I ; J	8
L	K	7

المطلوب:

1. رسم شبكة العمل الخاصة بالمشروع؛
2. تحديد عدد المسارات والمسار الحرج؛
3. حساب البدايات والنهايات المبكرة؛
4. حساب البدايات والنهايات المتأخرة؛
5. حساب الزمن الفائض.

الحل: 1. رسم شبكة العمل الخاصة بالمشروع؛



2. تحديد عدد المسارات والمسار الحرج؛

المسار الأول: A ;C ;D ;G ; J ; K ;L= 37

المسار الثاني: A ;C ;D ;F ;I ;K ;L=45

المسار الثالث: A ;B ;E ;H ;I ;K ;L=30

إذن يعتبر المسار الثاني والبالغ 45 شهراً المسار الحرج، أذ يستغرق اطول فترة زمنية لإنجازه.

3. حساب البدايات والنهايات المبكرة؛

النشاط A هو أول نشاط.

النهاية المبكرة للنشاط A = بداية المبكرة A + الزمن الذي يستغرقه،

تنفيذ النشاط = 0 + 2 = 2 شهر

النشاط B = 2+4= 6 أشهر

النشاط C = 2 + 8 = 10 أشهر

عند النشاط I فإن هذا النشاط ناتج عن التقاء النشاطين (H ;F) لذلك لابد من حساب النهاية المبكرة لـ H و F

الناشط H = 10 أشهر = 7 +3

الناشط F = 20 + 5= 25 أشهر

ولابد من اعتبار البداية المبكرة للنشاط I هي 25 شهراً، وأن التأخير في انجاز هذا النشاط سيؤدي إلى تأخير انجاز المشروع بأكمله باعتباره نشاطا حرج يقع على المسار الحرج، الوقت الفائض فيه يساوي صفر.

4. حساب البدايات والنهايات المتأخرة؛

تحسب البدايات والنهايات المتأخرة عن المرور التراجعي، إذ يتم البدء من النشاط الأخير ثم نبدأ بالتراجع على المسارات المختلفة مورا بجميع الانشطة.

أخر نشاط هو L الزمن اللازم لإنجاز المشروع بأكمله هو 45 ومنه النهاية المتأخرة للنشاط L = 45 شهرا

أما البداية المتأخرة للنشاط L = ن م لـ L – زمن هذا النشاط = 45 – 7= 38 شهراً.

وهكذا نستمر بنفس الطريقة إلى أن نصل إلى النشاط D إذ يؤدي هذا النشاط في المرور التراجعي إلى مسارين هما:

المسار الأول هو البداية المتأخرة للنشاط G = 28 شهر

المسار الثاني هو البداية المتأخرة للنشاط F = 20 شهر

وفي المرور التراجعي عند حساب الأوقات المتأخرة نختار المسار الأقصر أي أننا سوف نختار البداية المتأخرة للنشاط F باعتباره النهاية المتأخرة للنشاط D والبالغ 20 شهراً.

ويمكن حساب كل ما سبق مع الزمن الفائض من خلال الجدول الآتي:

النشاط	الأوقات المبكرة		الأوقات المتأخرة		الوقت الفائض
	بداية	نهاية	بداية	نهاية	
A*	0	2	0	2	0
B	2	6	17	21	15
C*	2	10	2	10	0
D*	10	20	10	20	0
E	6	7	21	22	15
F*	20	25	20	25	0
G	20	21	28	29	8
H	7	10	22	25	15
I*	25	30	25	30	0
J	21	22	29	30	8
K*	30	38	30	38	0
L*	38	45	38	45	0

لقد تم وضع اللون على الانشطة الحرجة والتي تقع على المسار الحرج ويلاحظ أن الزمن الفائض لهذه الأنشطة يساوي صفراً لعدم وجود أي وقت فائض في تلك الأنشطة فلا بد من تنفيذ الأنشطة الحرجة في الزمن المحدد لها، اذ إن أي تأخير في تنفيذ هذه الانشطة سيؤدي إلى تأخير إنجاز المشروع بأكمله.

IV- أسلوب بيرت: تقييم ومراجعة البرامج والمشروعات (PERT/MPM)

لقد تم التوصل إلى طريقة بيرت في عام 1958 ومن خلال البحوث التي قام بها فريق العمل لجدولة الفعاليات المختلفة، وإن هذا الأسلوب مكرس لأغراض الرقابة على تخطيط ومتابعة تنفيذ البرامج أو المشاريع، ويرتبط بشكل وثيق بأسلوب المسار الحرج، إن أهم خاصية في أسلوب PERT هو اعتماده على ثلاث أزمنة مقدرة للنشاط وهي[1]:

1. **الوقت التفاؤلي:** وهو ذلك الزمن الذي يتم اعتماده إذا كانت كافة الظروف البيئية تسير في مصلحة تنفيذ المشروع، لذلك يكون عادة قليل ومحدد، ويرمز له بالرمز (O).

---

[1] جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، فالح عبد القادر الحوري، مرجع سابق، ص ص 257- 258.

2. **الوقت الأكثر احتمالاً:** هو ذلك الزمن الذي يتم اعتماده إذا كان لدى إدارة المشروع الخبرات الكافية بحيث تكون الأوقات المحسوبة هي أقرب إلى الواقع الفعلي، اذ يمثل الوسط بين التفاؤل والتشاؤم، أي العمل وفق الظروف الاعتيادية ويرمز به بالرمز (M).
3. **الزمن التشاؤمي:** وهو ذلك الزمن الذي يتم اعتماده إذا كانت كافة الظروف البيئية لا تسير في مصلحة تنفيذ المشروع، لذلك يكون عادة أكبر من الأزمنة السابقة، ويرمز له بـ (P).

بناء على ما تقدم، يفترض حساب متوسط الوقت المتوقع لأجل أخذ الأزمنة الثلاثة باهتمام، ويمكن أن تأخذ الازمنة السابقة أوزان معينة نسبة لتكرار حدوث كل منها.

مثلا:

- اعطاء 4 أوزان للزمن الأكثر احتمالاً = 4M
- إعطاء وزن واحد للزمن التفاؤلي = O
- إعطاء وزن واحد للزمن التشاؤمي = P

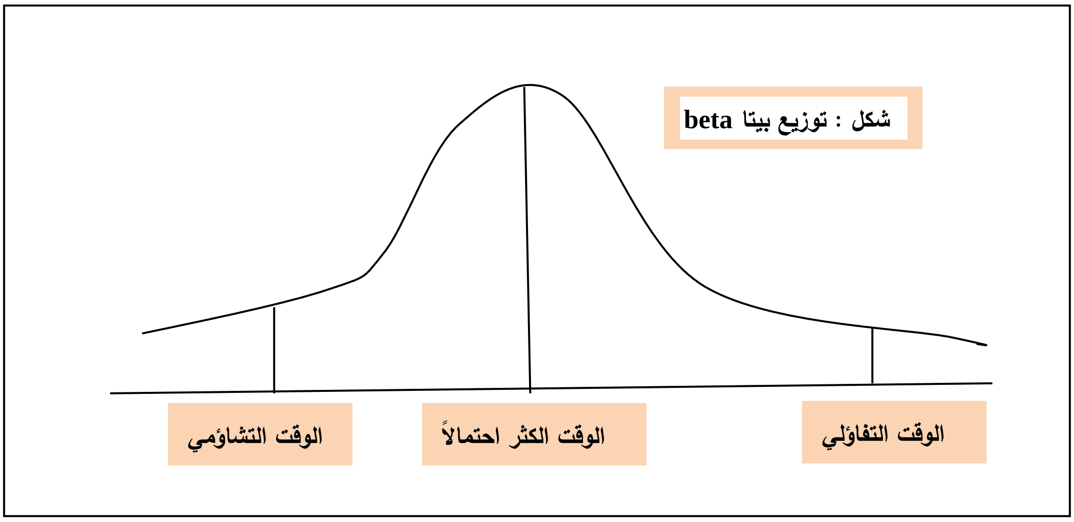
يصبح بذلك مجموع الأوزان للأوقات الثلاثة انفة الذكر = 6 أوزان عليه، يحسب متوسط الزمن المتوقع لنشاط معين كالآتي[1]:

متوسط الوقت المتوقع = الوقت التفاؤلي + 4 (الوقت الأكثر احتمالاً) + الوقت التشاؤمي / 6

أي بصيغة الرياضية:

$$\mu = \frac{O + 4M + P}{6}$$

يحسب متوسط الزمن المتوقع بموجب المعادلة السابقة من خلال توزيع بيتا (Beta)، إذ يظهر هذا التوزيع بأشكال مختلفة إلا أنه يمكن التعبير عنه بشكل عام كالآتي:



[1]. احمد عبد إسماعيل الصفار، ماجدة عبد اللطيف التميمي، مرجع سابق، ص ص 384- 386.

- تحديد عدد المسارات والمسار الحرج؛
- حساب الأزمنة المبكرة والمتأخرة والزمن الفائض لكل نشاط من أنشطة المشروع؛
- يتميز أسلوب PERT عن أسلوب المسار الحرج CPM بحسابه للانحراف المعياري للأنشطة الواقعة على المسار الحرج وذلك بعد حساب التباين لكل نشاط حرج كالآتي:

التباين لكل نشاط حرج = (الزمن التشاؤمي – الزمن التفاؤلي /6)^2

أي:

$$\delta^2 = \left(\frac{P - O}{6}\right)^2$$

وتجدر الإشارة إلى تضاؤل احتمال إنجاز النشاط كلما كبر الانحراف المعياري له والعكس صحيح، ويحسب الانحراف المعياري لمتوسط المدة الزمنية المتوقعة لإنجاز المشروع كالآتي:

الانحراف المعياري للمسار الحرج = δ = جذر(مجموع التباين لأزمنة الأنشطة الواقعة على المسار الحرج)

تبرز أهمية أسلوب بيرت من خلال مساعدة الإدارة في حساب الاحتمالات المختلفة لإنجاز المشروع وفق الوقت المستهدف ويتراوح إحتمال إنجاز المشروع وفق الوقت المستهدف بين (0، 1) وتعبر القيمة (0,99) عن أكبر احتمال ممكن، في حين القيمة (0,1) عن اقل احتمال ممكن لإنجاز المشروع.

يحسب احتمال إنجاز المشروع من خلال العلاقة الآتية:

إحتمال إنجاز المشروع = الوقت المستهدف – وقت المسار الحرج / الانحراف المعياري

أو بصيغة رياضية:

$$Z = \frac{X - \mu}{\delta}$$

X : احتمال إنجاز المشروع ضمن الفترة المحددة (الوقت المستهدف لإنجاز المشروع)؛

Z : احتمال إنجاز المشروع؛

µ : وقت المسار الحرج؛

δ : الانحراف المعياري.

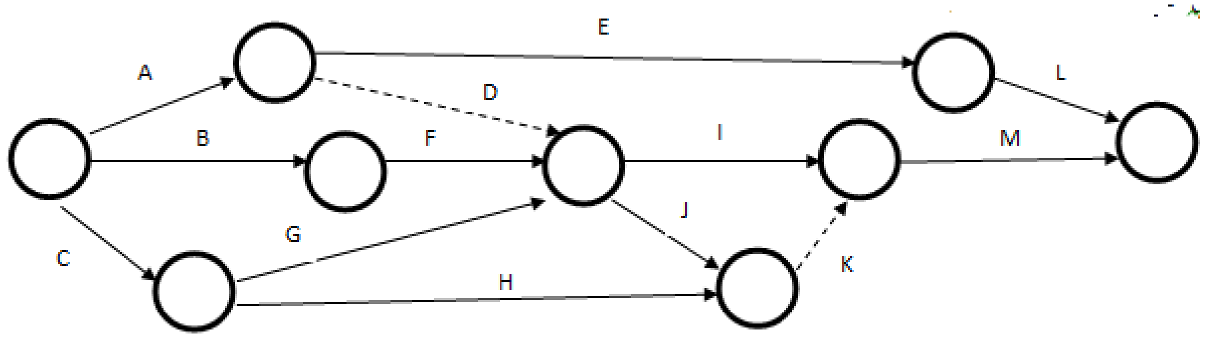
الاختلاف بين أسلوب المسار الحرج CPM وأسلوب PERT [1] :

إن الاختلاف الجوهري بين الأسلوبين هو أنه في طريقة المسار الحرج فإن وقت تنفيذ الأنشطة يكون معروفاً سلفا وبشكل مؤكد، أما في أسلوب PERT فإن هذا الوقت يتم تحديده بشكل احتمالي، وليس على وجه التأكيد.

وعلى ذلك فإن الأسلوب الأول يصلح في إدارة المشاريع، مثل: تدريب الأيدي العاملة، تصميم البرامج الأكاديمية، تشيد المشروعات، تخطيط عمليات الصيانة....الخ، أما الأسلوب الثاني فيصلح في إدارة مشاريع مثل مشاريع البحث والتطوير، واستحداث إنتاج سلع جديدة، والعمليات الجراحية، وتطوير وتطبيق برامج الحاسب الآلي...الخ.

مثال رقم 07 :

في ظل شبكة الأعمال الآتية حدد ما يلي:



1. الوقت المتوقع؛
2. الأوقات المبكرة والمتأخرة والزمن الفائض؛
3. التباين؛
4. احتمال إنجاز المشروع خلال:
   - 30 أسبوعاً
   - 22 أسبوعاً

علماً بأن تسلسل الأنشطة وأزمنتها كالآتي:

[1]. محمد محمد كعبور، مرجع سابق، ص333.

النشاط	الأوقات المتعددة		
	المتفائل (O)	الأكثر احتمالاً (m)	المتشائم (P)
A	6	8	10
B	3	6	9
C	1	3	5
D	0	0	0
E	2	4	12
F	2	3	4
G	3	4	5
H	2	2	2
I	3	7	11
J	2	4	6
K	0	0	0
L	1	4	7
M	1	10	13

الحل:

1. الوقت المتوقع:

$$\mu = \frac{O + 4M + P}{6} \Rightarrow \mu_A = \frac{6 + 4(8) + 10}{6} = 8$$

وهو نفسه وقت كل الأنشطة في الشكل وتم تلخيص النتائج في الجدول أسفله.

2. الأوقات المبكرة والمتأخرة والزمن الفائض؛

وتم تلخيص النتائج في الجدول أسفله.

3. التباين؛

$$\delta^2 = \left(\frac{P - O}{6}\right)^2 \Rightarrow \delta_B^2 = \left(\frac{9 - 3}{6}\right)^2 = 1$$

وتم تلخيص النتائج في الجدول الأسفل.

النشاط	الوقت المتوقع μ	الأوقات المبكرة		الأوقات المتأخرة		الوقت الفائض	التباين δ^2
		بداية	نهاية	بداية	نهاية		
A	8	0	8	1	9	1	
B	6	0	6	0	6	0	1
C	3	0	3	2	5	2	
D	0	8	8	9	9	1	
E	5	8	13	16	21	8	
F	3	6	9	6	9	0	0,11
G	4	3	7	5	9	2	
H	2	3	5	14	16	11	
I	7	9	16	9	16	0	1,78
J	4	9	13	12	16	3	
K	0	13	13	16	16	3	
L	4	13	17	21	25	8	
M	9	16	25	16	25	0	4
مجموع							6,89

4. احتمال إنجاز المشروع خلال:

أ. 30 أسبوعاً:

لدينا النشاط الحرج هو الذي يكون فيه زمن الفائض مساوياً لصفر:

B ;F ;I ;M = 6+3+7+9= 25

مجموع التباين للأنشطة الحرجة = 1 + 0,11 + 1,78 + 4 = 6,89

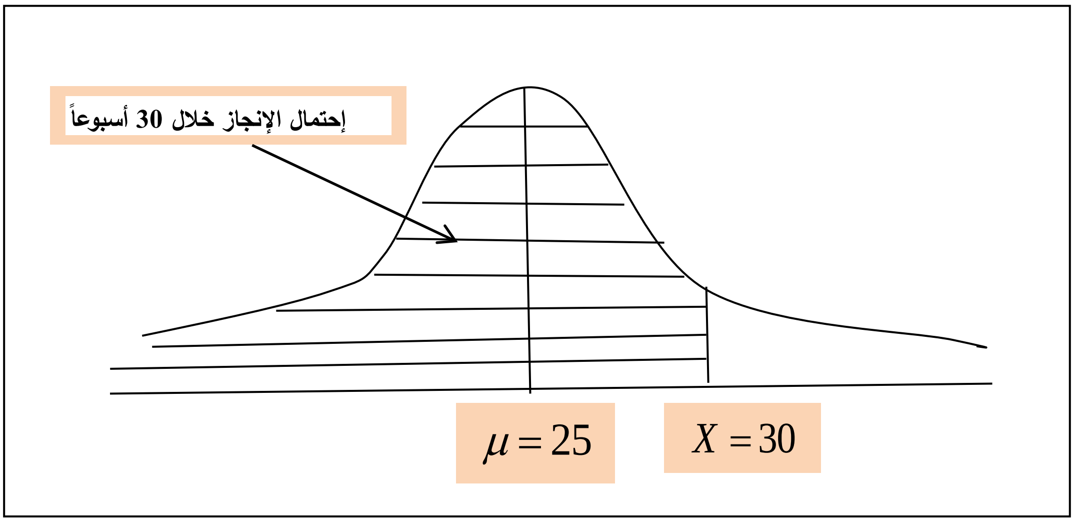
$$\delta = \sqrt{6{,}89}$$
$$= 2{,}62$$

احتمال إنجاز المشروع خلال (30) أسبوعاً

$$Z = \frac{X-\mu}{\delta} = \frac{30-25}{2{,}62} \cong 1{,}91$$

وبالرجوع إلى الجدول الإحصائي للتوزيع الطبيعي (انظر في الملحق رقم: 01) نجد أن قيمة (Z) تساوي 1,91 تحت 0,01 هو 0,4719 وهذا يعني أن احتمال إنجاز المشروع خلال 30 أسبوعاً أو أقل هو:

$$P(Z \leq 30) = 0{,}4719 + 0{,}5 = 0{,}9719$$

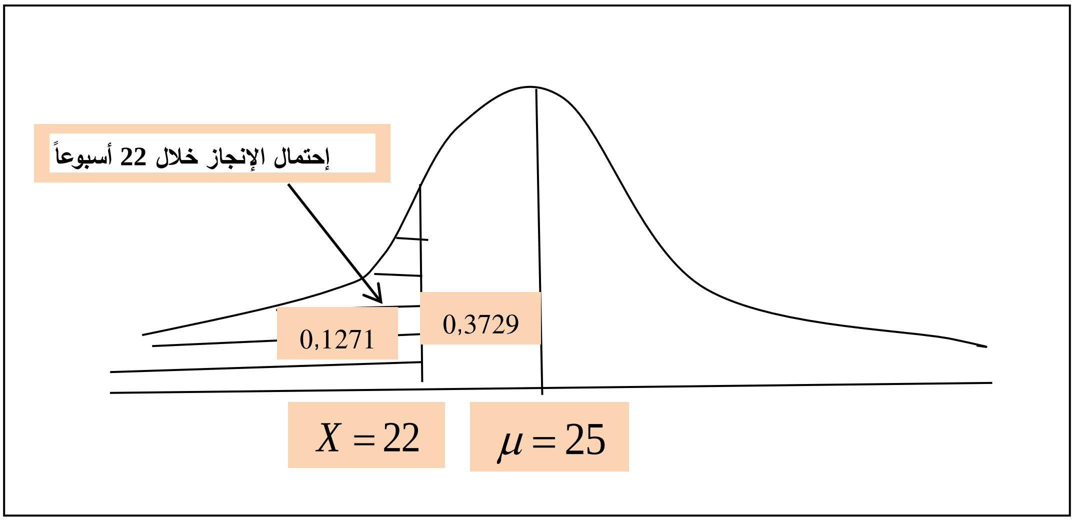


ب. احتمال إنجاز المشروع خلال (22) أسبوعاً

$$Z = \frac{X - \mu}{\delta} = \frac{22 - 25}{2{,}62} = -1{,}14$$

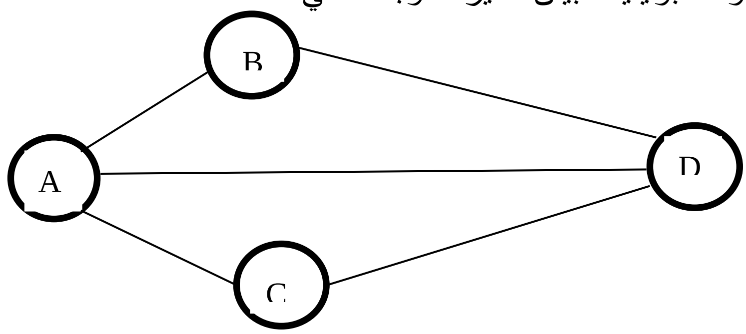
وبالرجوع إلى الجدول الإحصائي للتوزيع الطبيعي (انظر في الملحق رقم: 01) نجد أن قيمة (Z) تساوي $-1{,}14$ تحت عمود $0{,}04$ هو $0{,}3729$ وهذا يعني أن احتمال إنجاز المشروع خلال 22 أسبوعاُ هو :

$$P(Z \leq 22) = 0{,}5 - 0{,}3729 = 0{,}1271$$



V- تمارين محلولة:

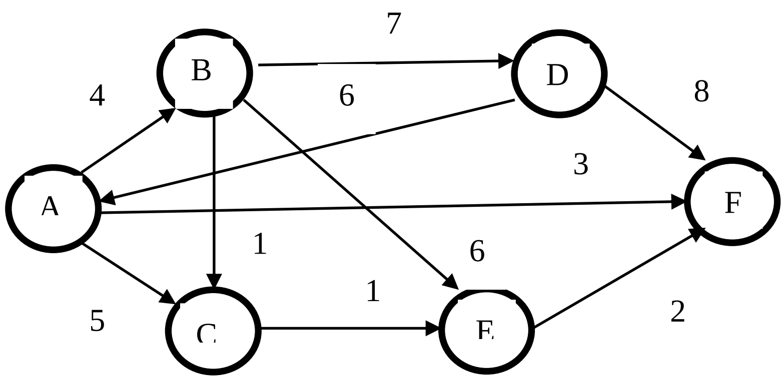
التمرين الأول: أكتب المصفوفة البولينية للبيان الغير الموجه التالي:



حل التمرين الأول: المصفوفة البولينية كما يلي:

	A	B	C	D
A	0	1	1	1
B	1	0	0	1
C	1	0	0	1
D	1	1	1	0

التمرين الثاني: الشبكة التالية تعبر عن أطوال الطرق بين مجموعة من القرى بالكيلومتر:



حل التمرين الثاني: تكون على النحو التالي:

القمم	A	B	C	D	E	F
A	0	4	5	0	0	3
B	0	0	1	7	6	0
C	0	0	0	0	1	0
D	6	0	0	0	0	8
E	0	0	0	0	0	2
F	0	0	0	0	0	0

التمرين الثالث: يوضح الجدول الآتي البيانات عن الأنشطة والأنشطة السابقة والخاصة بإنجاز أحد المشاريع:

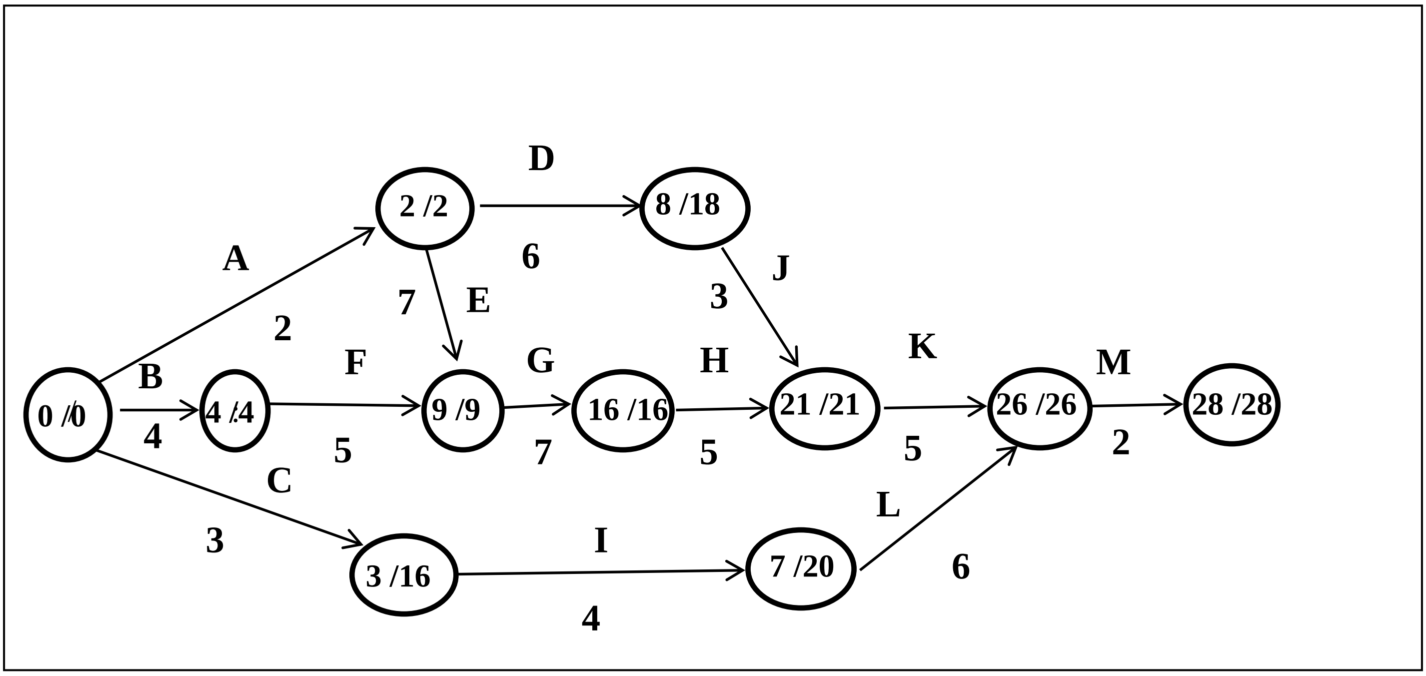
المطلوب:

1. رسم شبكة العمل الخاصة بالمشروع؛
2. تحديد عدد المسارات والمسار الحرج .

النشاط	النشاط السابق	الزمن / أسبوع
A	–	2
B	–	4
C	–	3
D	A	6
E	A	7
F	B	5
G	E ;F	7
H	G	5
I	C	4
J	D	3
K	H ; J	5
L	I	6
M	L ; K	2

حل التمرين الثالث:

1. رسم شبكة العمل الخاصة بالمشروع:



2. تحديد عدد المسارات والمسار الحرج:

المسار الأول: A ;D ;J ;K ;M=18

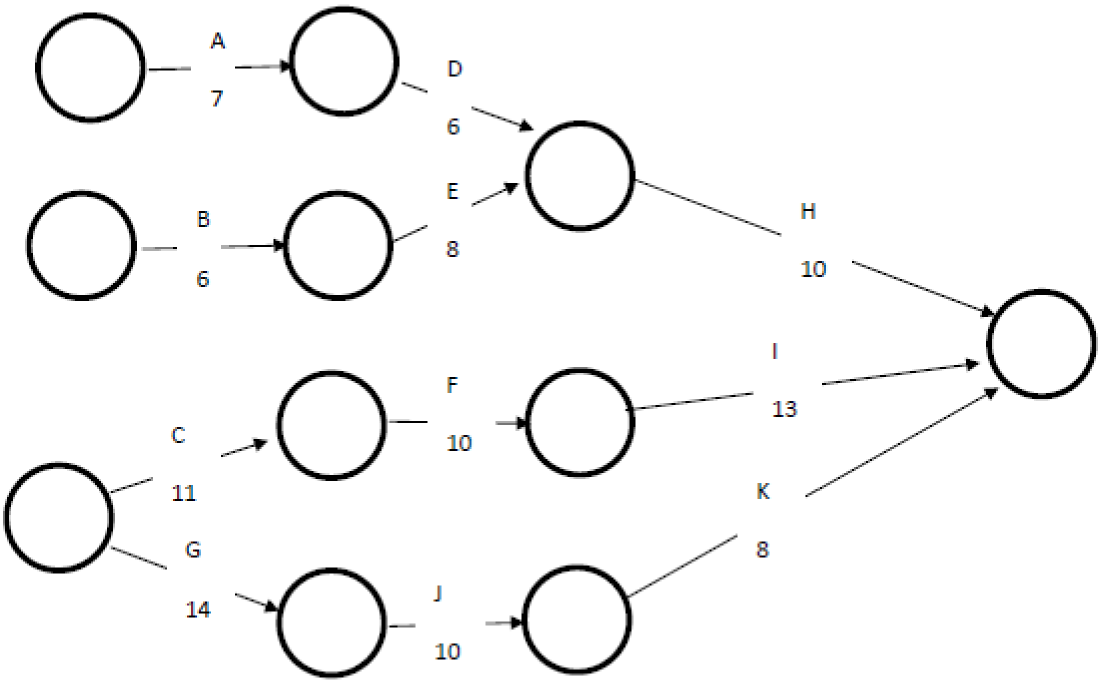
المسار الثاني: A ;E ;G ;H ;K ;M=28

المسار الثالث: B ;F ;G ;H ;K ;M=28

المسار الرابع: C ;I ;L ;M= 15

يوجد مساران حرجان هما: المسار الأول والمسار الثاني.

التمرين الرابع: في ضوء شبكة العمل التالية حدد ما يلي:



علما بأن تسلسل الأنشطة كالآتي: (A –B – C – D – E – F – G – H – I – J – K)

المطلوب:

1. تحديد عدد المسارات والمسار الحرج؛
2. حساب الأوقات المبكرة والمتأخرة والزمن الفائض.

حل التمرين الرابع:

1. تحديد عدد المسارات والمسار الحرج:

المسار الأول: A ;D ;H= 23

المسار الثاني: B ;E ;H=24

المسار الثالث: C ;F ;I =34

المسار الرابع: G ;J ;K=32

المسار الثالث هو المسار الحرج ويبلغ زمن إنجازه 34 يوماً.

2. حساب الأوقات المبكرة والمتأخرة والزمن الفائض:

النشاط	**الأوقات المبكرة**		**الأوقات المتأخرة**		**الوقت الفائض**
	بداية	**نهاية**	**بداية**	**نهاية**	
A	0	7	11	18	11
B	0	6	10	16	10
C	0	11	0	11	0
D	7	13	18	24	11
E	6	14	16	24	10
F	11	21	11	21	0
G	0	14	2	16	2
H	14	24	24	34	10
I	21	34	21	34	0
J	14	24	16	26	2
K	24	32	26	34	2

التمرين الخامس: يوضح الجدول الآتي البيانات الخاصة بإنجاز أحد المشاريع الصناعية:

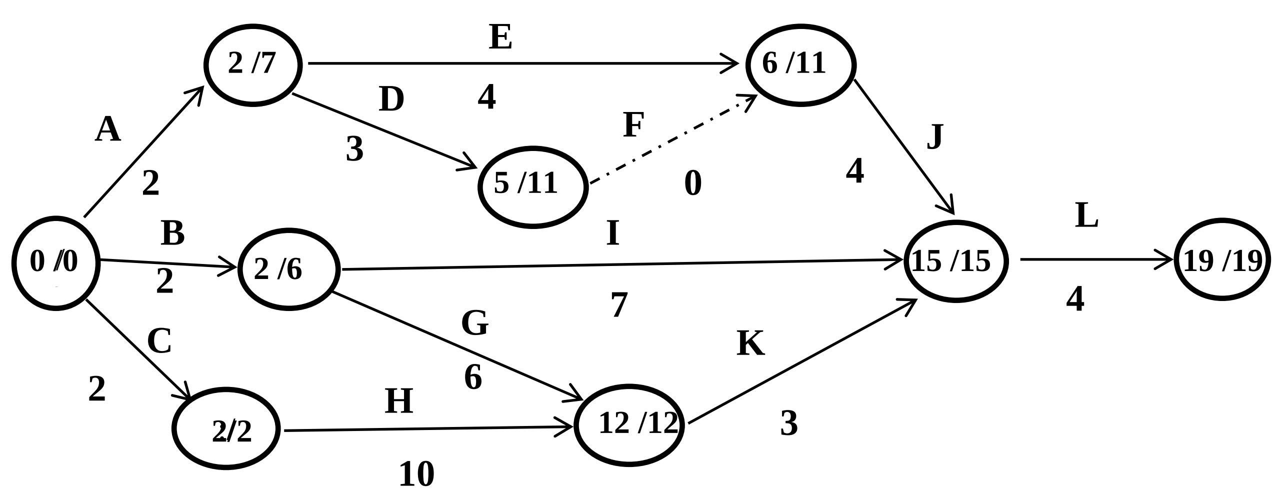
النشاط	النشاط السابق	الأوقات المتعددة		
		المتفائل (**O**)	الأكثر احتمالاً (**m**)	المتشائم (**P**)
A	–	1	2	3
B	–	1	2	3
C	–	1	2	3
D	A	1	2	9
E	A	2	3	10
F	D	0	0	0
G	B	2	5	14
H	C	4	9	20
I	B	3	6	15
J	E, F	1	4	7
K	G, H	1	2	9
L	I, J, K	2	4	6

المطلوب:

1. رسم شبكة العمل الخاصة بالمشروع؛
2. حساب الوقت المتوقع؛
3. تحديد المسار الحرج؛
4. حساب الأوقات المبكرة والمتأخرة والزمن الفائض؛
5. استخراج احتمال إنجاز المشروع خلال 25 أسبوعاً.

حل التمرين الخامس:

1. رسم شبكة العمل الخاصة بالمشروع:



2. حساب الوقت المتوقع:

$$\mu = \frac{O + 4M + P}{6}$$

$$\mu_A = \frac{1 + 4(2) + 3}{6} = 2$$

وهو نفسه وقت كل الأنشطة في الشكل وتم تلخيص النتائج في الجدول أسفله.

3. تحديد المسار الحرج:

المسار الأول: A ;E ;J ;L= 2+4+4+4=14

المسار الثاني: A ;D ;F ;J ;L=2+3+0+4+4=13

المسار الثالث: B ;I ;L=2+7+4=13

المسار الرابع: B ;G ;K ;L=2+6+3+4=15

المسار الخامس: C ;H ;K ;L=2+10+3+4=19

المسار الحرج هو الخامس.

4. حساب الأوقات المبكرة والمتأخرة والزمن الفائض:

النشاط	الوقت المتوقع μ	الأوقات المبكرة		الأوقات المتأخرة		الوقت الفائض	التباين δ^2
		بداية	نهاية	بداية	نهاية		
A	2	0	2	5	7	5	
B	2	0	2	4	6	4	
C	2	0	2	0	2	0	0,11
D	3	2	5	8	11	6	
E	4	2	6	7	11	5	
F	0	5	5	11	11	6	
G	6	2	8	6	12	4	
H	10	2	12	2	12	0	0,17
I	7	2	9	8	15	6	
J	4	6	10	11	15	5	
K	3	12	15	12	15	0	1,77
L	4	15	19	15	19	0	0,44
مجموع							9,43

5. استخراج احتمال إنجاز المشروع خلال 25 أسبوعاً:

مجموع التباين للأنشطة الحرجة = 0,11+7,11+1,77+0,44= 9,43

$$\delta = \sqrt{9{,}43}$$

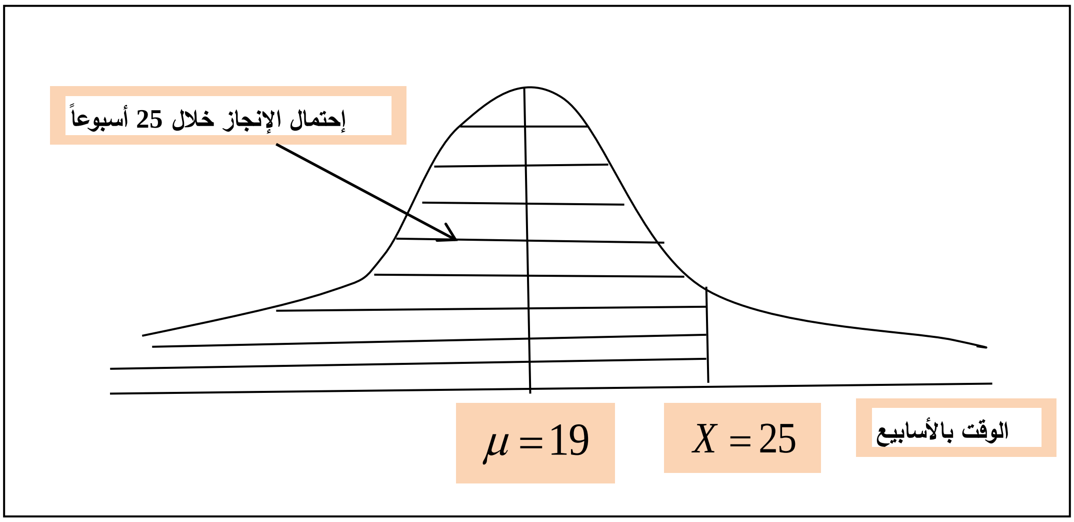
$$\cong 3{,}1$$

احتمال إنجاز المشروع خلال (25) أسبوعاً

$$Z = \frac{X-\mu}{\delta} = \frac{25-19}{3{,}1} \cong 1{,}94$$

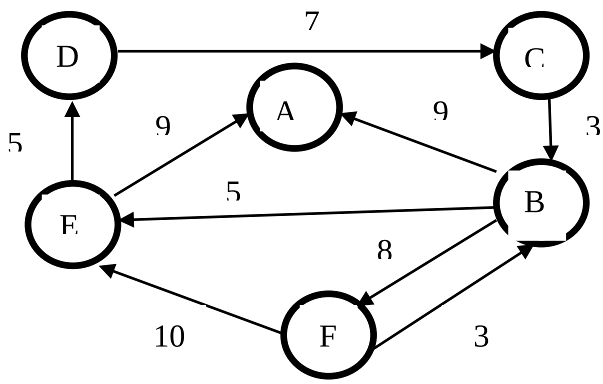
وبالرجوع إلى الجدول الإحصائي للتوزيع الطبيعي (انظر في الملحق رقم: 01) نجد أن قيمة (Z) تساوي 1,94 تحت 0,04 هو 0,4738 وهذا يعني أن احتمال إنجاز المشروع خلال 25 أسبوعاً أو أقل هو:

$$P(Z \leq 25) = 0,4738 + 0,5 = 0,9738$$



VI- تمارين مقترحة:

التمرين الأول: من البيان التالي:



المطلوب:

1. أوجد مصفوفة المساقط؛
2. أوجد المصفوفة البولونية؛
3. أوجد مصفوفة الأقواس؛
4. أوجد مصفوفة السعة.

التمرين الثاني: أوجد أعظم تدفق بين الخزانات A ;B ;C والقرى W ; X ;Y ;Z إذا علمت أن طاقة تصريف الأساليب الرابطة بين الخزانات والقرى وطاقة تصريف كل خزان وطاقة استقبال كل قرية موضحة في الجدول التالي:

	W	X	Y	Z	التصريف
A	20	30	10	–	100
B	10	70	50	30	120
C	–	–	30	70	80
الاستقبال	30	40	70	60	

التمرين الثالث: توفرت لديك البيانات التالية حول تصميم منتج معين:

النشاط	الوصف	النشاط السابق	زمن / يوم
A	البحث والتطوير	–	6
B	نشاط بحوث التسويق	–	2
C	نشاط الهندسة الصناعية	A	3
D	اقتراح نموذج لتصميم المنتج	A	5
E	الإعداد للأنشطة التسويقية	A	3
F	الأنشطة الخاصة بتقدير التكاليف	C	2
G	الأنشطة الخاصة باختبار المنتج	D	3
H	مسح السوق	B ; E	4
I	التقديرات الخاصة بتنبؤات الأسعار	H	2
J	التقرير النهائي	F ; G ; I	2

المطلوب:

1. رسم شبكة العمل المعبرة عن المشروع؛
2. تحديد عدد المسارات والمسار الحرج.

التمرين الرابع:

يوضح الجدول التالي البيانات حول الأنشطة والأنشطة السابقة والخاصة بإنجاز أحد المشاريع الصناعية:

النشاط	النشاط السابق	الزمن / يوم
A	–	2
B	–	2
C	A	1
D	B ; C	3
E	A	3
F	A	3
G	E	0
H	D ; G	3
I	D ; G	4
J	F	4
K	H ; J	7
L	H ; J	3
M	I	0
N	K	8
O	L ; M	4
P	N ; O	3

المطلوب:

1. رسم شبكة العمل للمشروع؛
2. تحديد عدد المسارات والمسار الحرج؛
3. تحديد الأوقات المبكرة والمتأخرة؛
4. حساب الزمن الفائض.

التمرين الخامس: مشروع يتكون من ثمانية أنشطة من A إلى H، وقد كانت المعلومات المتعلقة بترتيب الأنشطة، والوقت المطلوب لتنفيذها بالأشهر، معطى كالآتي:

النشاط	النشاط السابق	مدة تنفيذ النشاط بالأشهر		
		المتفائل (O)	الأكثر احتمالاً (m)	المتشائم (P)
A	–	4	5	6
B	–	8	12	16
C	A	4	5	12
D	B	1	3	5
E	A	2	2	2
F	D,E	4	5	6
G	C,F	10	14	18
H	D,E	18	20	34

المطلوب:

1. رسم شبكة العمل الخاصة بالمشروع؛
2. حساب الوقت المتوقع؛
3. تحديد المسار الحرج؛
4. حساب الأوقات المبكرة والمتأخرة والزمن الفائض؛
5. احتمال إنجاز المشروع خلال:
   أ. 40 شهراً
   ب. 45 شهراً

الفصل الرابع

البرمجة الديناميكية

تستخدم البرمجة الديناميكية لحل مشكلات اتخاذ القرارات المتداخلة ذات المراحل المتتالية حيث يؤثر كل قرار على نتائج القرارات التالية، ويتم البحث عن حل أمثل في خط مستقيم يتضمن المراحل المتتالية حتى الوصول إلى المثالية الكاملة عن طريق مبدأ اقترحه عالم بحوث العمليات ريتشارد بلمان R.Bellman [1]، والذي ابتكر هذا الأسلوب من البرمجة الديناميكية خلال الخمسينات من القرن العشرين، عندما كان يقوم بالبحث العلمي في شركة راندة Rand Company حيث قام في هذه الفترة بنشر الكثير من البحوث والتي لخصها في كتابه Dynamic Programming [2].

وتتكفل البرمجة الديناميكية بتحديد الحلول المثلى للمشكلات، وهي لذلك مناسبة لتحليل السلوك الرشيد، سواء اكان في مجالات الانتاج أم الاستهلاك أم غير ذلك من مجالات الانشطة الاقتصادية على هذا الأساس **يمكن تعريفها انها اسلوب يساعد على تحديد الخطة المثلى من بين عدد من الخطط البديلة**[3].

تختلف البرمجة الديناميكية عن البرمجة الخطية في الآتي[4]:

- ✓ لا يوجد حل جبري (مثل السمبليكس) يمكن الاعتماد عليه لحل كل المشاكل وعلى الرغم من ذلك فإن أسلوب البرمجة الديناميكية يسمح لنا بتجزئة المشاكل الصعبة إلى مجموعة متتابعة من مشاكل جزئية اقل صعوبة والتي يتم تقييمها مرحلياً؛
- ✓ يقيم أسلوب البرمجة الديناميكية حل لكل مرحلة زمنية على حدة Signal Stage Solutions حيث يساعد على تحديد الحل الأمثل بالنسبة لكل شهر من شهور السنة على حدة من خلال تقسيم المشكلة السنوية إلى مشاكل شهرية ويقدم الحل الأمثل لكل مشكلة على حدة ومن ثم فهو أسلوب متعدد.

هناك بعض المفاهيم المرتبطة بالبرمجة الديناميكية نذكر منها[5]:

بغض النظر عن طبيعة أو حجم مشكلة البرمجة الديناميكية توجد بعض المصطلحات الهامة في المجال:

- ✓ **المرحلة:** هي نبذة أو مشكلة فرعية تمثل جزء أو مرحلة أو منطقة من المشكلة الأصلية؛
- ✓ **متغيرات الحالة:** الظروف الموقفية الممكن حدوثها للمواقف المختلفة؛
- ✓ **متغيرات القرار:** البدائل او القرارات المتاحة الممكنة في كل مرحلة؛

---

1. فريد راغب النجار: "**بحوث العمليات في الادارة**"، الدار الجامعية، الاسكندرية، 2009، ص 263.
2. حسين محمود الجنابي: " **الأحدث في بحوث العمليات**"، دار الحامد، الأردن، 2010. ص 306.
3. محمد عبد العال النعيمي، رفاه شهاب الحمداني، احمد شهاب الحمداني، مرجع سابق، ص 369.
4. محمد إسماعيل بلال: " **بحوث العمليات**"، دار الجامعة الجديدة، الاسكندرية، 2008. ص 273.
5. محمد إسماعيل بلال، مرجع سابق، ص 275.

✓ **معايير القرار:** العوامل التي تحكم وتراعى الوصول إلى الحل الأمثل للمشكلة؛

✓ **السياسة المثلى:** مجموعة من قواعد القرار يتم تنميتها كنتيجة للمعايير التي يتم اتخاذ القرار على أساسها والتي تحدد القرار الأفضل في كل مرحلة حسب ظروف هذه المرحلة؛

✓ **التحول:** طبيعة العلاقة بين المراحل المختلفة.

I- حالة اليقين(الأكادة):

تكون عملية القرارات المتعددة المراحل مؤكدة إذا كان الناتج من كل قرار معروفا تماما، أما اذا كان العائد المرتبط بقرار واحد على الأقل في العملية عشوائيا فتعد البرمجة الديناميكية احتمالية أو تصادفية Stochastic.

ويمكن عد البرمجة الديناميكية انها في ظل اللايقين اذا تحقق الشرطان الآتيان[1]:

اولهما: اذا كان العائد المرتبط بحالة أو أكثر غير مؤكد؛

وثانيهما: اذا كانت الحالات الناتجة من واحد أو اكثر من القرارات غير مؤكدة.

وقد يستخدم أسلوب البرمجة الديناميكية المؤكدة في جعل عملية القرار التصادفية المتعددة المراحل مثلى متى ما توفر شرطان أساسيان هما: ان التوزيع الاحتمالي الذي يحكم الاحداث العشوائية يكون معروفا والآخر يشير إلى ان عدد الحالات والمراحل محددتان.

ان الحالة الشائعة في البرمجة الاحتمالية هي أمثلية العائد المتوقع لذلك فإن العشوائية تحدث في العائد المرتبط بالحالات وليس في الحالات الناتجة من القرارات.

أما اذا كانت الحالة الناتجة من القرارات عشوائية فيمكن ان نتصور شكلا تخطيطيا لها كما في الشكل الآتي : الهيكل الأساسي للبرمجة الاحتمالية وفق عشوائية الحالة

المرحلة n+1

المرحلة n

الحالة S_n ⟶ dn ⟶

$fn(S_n , dn)$

$$\left[\begin{array}{l} P_1 \to C_1 \to (1) \\ \quad f^*_{n+1}(1) \\ P_2 \to C_2 \to (2) \\ \quad f^*_{n+1}(2) \\ P_n \to C_n \to (N) \\ \quad f^*_{n+1}(N) \end{array}\right.$$

اذ ان: (n) تمثل عدد الحالات الممكنة في المرحلة n+1 .

$(P_1,P_2,.....P_n)$: تمثيل التوزيع الاحتمالي للحالة.

S_n : تمثل الحالة في المرحلة n.

d_n: تمثل القرار في المرحلة n.

[1]. محمد عبد العال النعيمي، رفاه شهاب الحمداني، احمد شهاب الحمداني، مرجع سابق، ص ص 374 –376.

C_i : تمثل عائد مساهمة الناتج في دالة الهدف للمرحلة n، عندما تتبدل الحالة لتكون حالة i واستنادا إلى الهيكل الاحتمالي الموضح في الشكل السابق يمكن صياغة العلاقة ما بين $f^*_{n\,(S_n;d_n)}$ و $f^*_{n+1(S_{n+1})}$ اعتمادا على صيغة دالة الهدف وفق الحسابات الأمامية وكالآتي:

ان دالة العائد للمرحلة (n) هي:

$$f^*_{n\,(S_n;d_n)} = \sum_{i=1}^{n} P_i\left[C_i + f^*_{N+1}(i)\right]$$

$$and$$

$$f^*_{n+1(S_{n+1})} = \underset{d_{n+1}}{opt} f_{n+1}\left(S_{n+1}, d_{n+1}\right)$$

اما اذا توسع الشكل السابق ليشمل الحالات و القرارات الممكنة جميعا في كل المراحل فعندئذ يسمى بشجرة القرار.

وفي حالة كون العمليات تتسم بالعشوائية، فإن السياسة المثلى تعرض في صورة " جدول السياسة"، وكما موضح بالشكل التالي، وعلى فرض أن: j=1 ;2 ;.....n و i=1 ;2 ;.....n و dj(ai) تدل على القرار عند المرحلة j اذا وجدت العملية نفسها عند الحالة ai.

جدول السياسة:

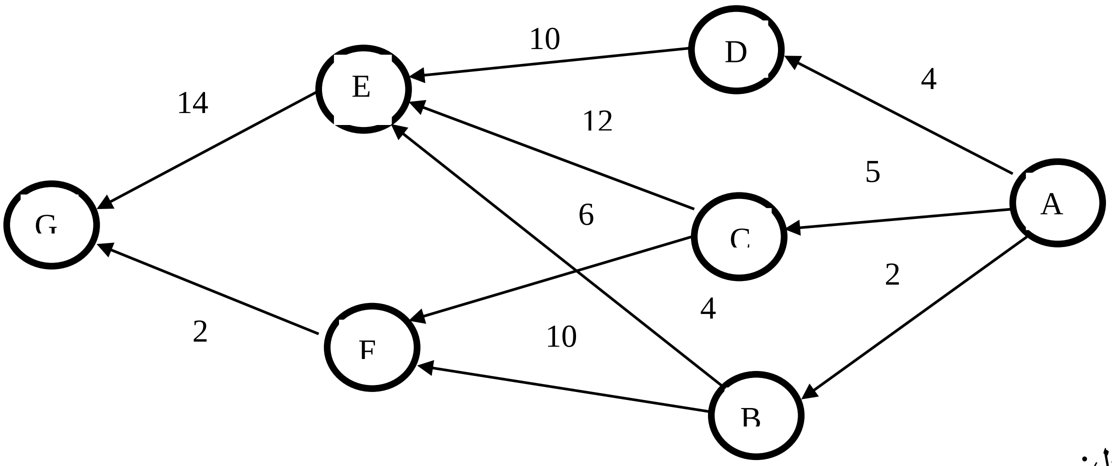
		الحالة			
	J / I	a_1	a_2	……….	a_r
	1	$d_1(a_1)$	$d_1(a_2)$	……….	$d_1(a_r)$
الحالة	2	$d_2(a_1)$	$d_2(a_2)$	……….	$d_2(a_r)$
	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
	N	$d_n(a_1)$	$d_n(a_2)$	……….	$d_n(a_r)$

II- استخدام البرمجة الديناميكية في مجال الشبكات:

يحتاج حل المشكلة باستخدام البرمجة الديناميكية إلى اتباع الخطوات التالية[1]:

- ✓ تجزئة المشكلة الأصلية إلى مشاكل جزئية تسمى مراحل؛
- ✓ نبدأ بحل أخر مرحلة في ضوء كل الظروف والحالات الممكنة؛
- ✓ نسير من الخلف إلى الأمام أي نبدأ من المرحلة الأخيرة ونحل مشاكل المراحل الوسيطة من خلال تقرير السياسات المثلى لكل مرحلة إلى أن نصل إلى نهاية المشكلة وهي المرحلة الأخيرة؛
- ✓ إيجاد الحل الأمثل للمشكلة الأصلية بحل كل المراحل المتتابعة.

مثال رقم 01: يرغب أحد الأفراد في تحديد أقصر طريق للسفر من النقطة A مركز التحرك إلى المنطقة G مركز التجميع، إذا كان هذا المسار يمر عبر عدة نقاط أخرى وسيطية. على الرسم هذه النقاط ممثلة بدوائر صغيرة والطرق الموصلة بينها معبر عنها بأسهم وعليها طول المسافة بين هذه النقاط.

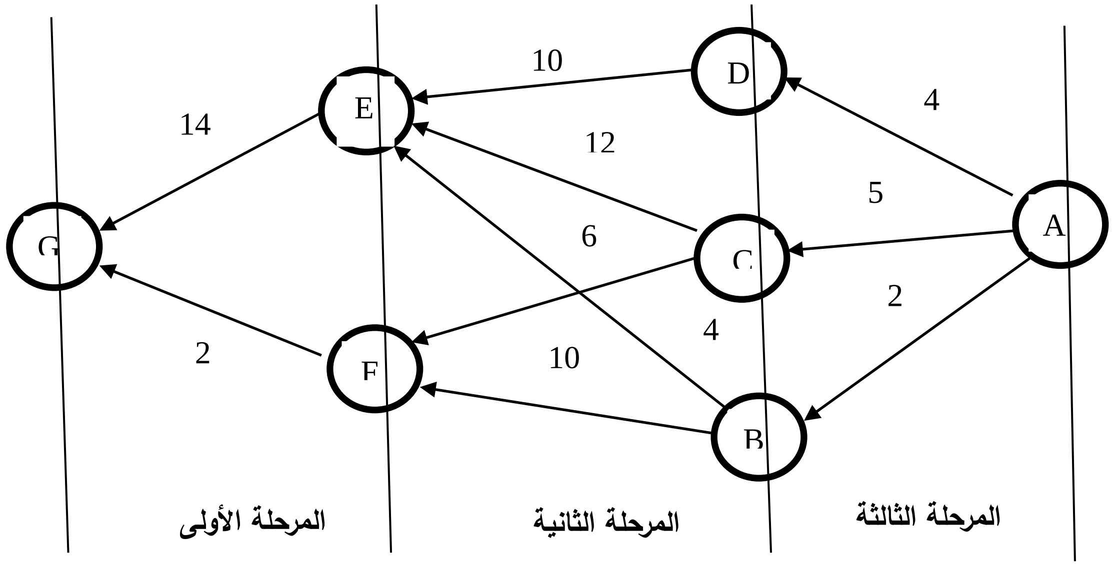


الحل:

خطوات الحل:

1. محمد إسماعيل بلال، مرجع سابق، ص 274.

أولا: تقسيم المشكلة إلى مراحل فرعية على النحو التالي:



بذلك تصبح المسافات في كل مرحلة على النحو التالي:

المرحلة	السهم	مسافة السهم
الأولى	G–E	14
	G–F	2
الثانية	E–D	10
	E–C	12
	F–C	6
	E–B	4
	F–B	10
الثالثة	D–A	4
	C–A	5
	B–A	2

الخطوة الثانية:

نبدأ بحل المرحلة الأولى أي الجزء الأخير من شبكة التدفق عادة حيث يتم تحديد الطريق الأقصر إلى نهاية الشبكة وكما هو موضح في الشكل التالي يوجد طريقين:

دوائر بدايات المرحلة	نهاية الشبكة اقصر الطرق إلى الدائرة G	المسارات (الأسهم)
E	14	G–E
F	2	G–F

الخطوة الثالثة:

التحرك إلى الخلف وحل المراحل الوسيطة وبالتطبيق على المثال الحالي يتم حل المرحلة الثانية ويتم إعداد البيانات المطلوبة على النحو التالي:

دوائر بدايات المرحلة	اقصر الطرق من كل دائرة على نهاية الشبكة	اسهم اقصر المسافات
D	24	E–D G–E
C	8	F–C G–F
B	12	F–B G–F

الخطوة الرابعة:

دوائر بدايات	اقصر الطرق من دائرة البداية إلى نهاية الشبكة	أسهم المسارات
A	13	C–A
		F–C
		G–F

ومنه المسار: A; C; F; G

III- حل المشاكل البرمجة الديناميكية التي لا تنطوي على وجود الشبكات:

من بين التطبيقات الكثيرة لنموذج البرمجة الديناميكية نشير إلى:

III-1. مشكلة التحميل:

استخدم هذا التطبيق لتحديد الأسلوب النقلي الأمثل وذلك بتعظيم العائد من نقل وحدات معينة، في ظل القيود المفروضة عليها سواء أكانت نقل أو طاقات نقلية محددة.

تفترض هذه المشكلة هناك n من المواد المرغوب بتحميلها وأن كل وحدة من هذه المواد i لها وزن W_i، وسعر الوحدة الواحدة r_i . فإذا كانت الطاقة القصوى المسموح بها لتلك المركبة W فإن تحديد أعظم عائد من تحميل تلك المركبة بشرط عدم تجاوز الحد المسموح وفي ظل فرضية أن عدد الوحدات هو K ، يكون كالآتي[1]:

$$MAX(Z) = r_1K_1 + r_2K_2 + r_3K_3 + ... + r_nK_n$$
$$sc\{w_1K_1 + w_2K_2 + ... + w_nK_n \leq W$$
$$K_n \geq 0$$

أما صياغة المعادلة التكرارية وفق الحسابات الخلفية فستكون كالآتي:

- ✓ المراحل = المواد i ؛
- ✓ البدائل:

$$K_j = \frac{W}{W_j} \Rightarrow \frac{W}{W_1} = K_1; \frac{W}{W_2} = K_2; .... \frac{W}{W_n} = K_n$$

حيث تتضمن هذه الكسور عدد صحيح.

- ✓ حالة النظام:

$$Y_j = 0;1;.......W,\ j = 2,3,........n \Rightarrow Y_1 = W$$

لتكن $f_j(X_j)$ المثلى للمرحلة $(j, j+1, ...n)$ وحالة النظام المعطى Y_j، كذلك ستكون المعادلة التكرارية الخلفية ، كالآتي:

[1]. محمد عبد العال النعيمي، رفاه شهاب الحمداني، احمد شهاب الحمداني، مرجع سابق، ص 380.

$$f_N(Y_n) = Max\{r_n K_n\}$$
$$K_N = 0,1,.......[Y_n / W_n]$$
$$Y_N = 0,1,.........W$$
$$F_j(Y_j) = Max\{r_j K_j + f_{j-1}(Y_j - W_j K_j)\}$$
$$K_j = 0,1,........(Y_j / W_j)$$
$$Y_j = 0,1,...........W$$

مثال رقم 02: المطلوب تحديد أعظم عائد من تحميل مركبة بشرط عدم تجاوز الحد المسموح لطاقة التحميل لتلك المركبة واذا علمت أن الحد المسموح به للنقل في تلك المركبة W=5 طن، الجدول التالي يمثل وزن الحمولة مع سعر النقل حيث r_i يمثل سعر الطن الواحد و w_i وزن الحمولة.

I	w_i	r_i
1	1	30
2	3	80
3	2	65

الحل:

إذا فرضنا أن:

r: تمثل سعر الوحدة؛

k : تمثل عدد الوحدات؛

w: وزن الوحدة الواحدة.

فإن دالة الهدف لمشكلتنا هي:

$$MAX(Z) = r_1 K_1 + r_2 K_2 + r_3 K_3$$
$$sc\{w_1 K_1 + w_2 K_2 + w_3 K_3 \le W = 5$$
$$K_i \ge 0$$

- ✓ المراحل تمثل i=1,2, 3 ؛
- ✓ البدائل: للحصول على الخيارات فإننا نطبق القانون التالي:

$$K_j = \frac{W}{W_j} \Rightarrow \frac{W}{W_1} = \frac{5}{1} = 5; \frac{W}{W_2} = \frac{5}{3} = 1; \frac{W}{W_3} = \frac{5}{2} = 2$$

✓ حالة النظام: أن الصيغة العامة للمعادلة التكرارية الخلفية لهذه المشكلة هي كالآتي:

$$f_1(X_1)=Max\{r_1K_1\}$$
$$K_1=0,1,.......[W/W_1]$$
$$f_i(X_i)=Max\{r_iK_i+f_{i-1}(X_i-W_iK_i)\}$$
$$K_i=0,1,........(W/W_i)$$

المرحلة الأولى: $MaxK_1=\frac{W}{W_1}=\frac{5}{1}=5$

حالة X_1	$F_1(k_1/x_1)=30k_1$						الحل الأمثل	
	$K_1=0$ $r_1k_1=0$	**$K_1=1$ 30**	**$K_1=2$ 60**	**$K_1=3$ 90**	**$K_1=4$ 120**	**$K_1=5$ 150**	$F_1(x_1)$	K_1^*
0	0	–	–	–	–	–	0	0
1	0	30	–	–	–	–	30	1
2	0	30	60	–	–	–	60	2
3	0	30	60	90	–	–	90	3
4	0	30	60	90	120	–	120	4
5	0	30	60	90	120	150	150	5

المرحلة الثانية: $MaxK_2=\frac{W}{W_2}=\frac{5}{3}=1$

حالة X_2	$F_2(k_2/x_2)=80k_2+f_1(x_1=x_2-w_2k_2)$		الحل الأمثل	
	$K_2=0$ $r_2k_2=0$	**$K_2=1$ 80**	$F_2(x_2)$	K_2^*
0	0	–	0	0
1	0+30=30	–	30	0
2	0+60=60	–	60	0
3	0+90=90	80+0=80	90	0
4	0+120=120	80+30=110	120	0
5	0+150=150	80+60=140	150	0

المرحلة الثالثة: $MaxK_3 = \frac{W}{W_3} = \frac{5}{2} = 2$

حالة	$F_3(k_3/x_3) = 65k_3 + f_2(x_2 = x_3 - w_3k_3)$				**الحل الأمثل**	
X_3	**K_3=0** **r_3k_3=0**	**K_3=1** **65**	**K_3=2** **130**		$F_3(x_3)$	K_3^*
0	0+0=0	–	–		0	0
1	0+30=30	–	–		30	0
2	0+60=60	65+0=65	–		65	1
3	0+90=90	65+30=95	–		95	1
4	0+120=120	65+60=125	130+0=130		130	2
5	0+150=150	65+90=155	130+30=160		160	2

القرار: ان الحل الأمثل لتخصيص الحمولة على المركبة هو $K_1^* = 1$ ، $K_2^* = 0$ ، $K_3^* = 2$ ، **وبقيمة إجمالية قدرها 160.**

III-2. مشكل تخصيص رأس المال:

تتلخص هذه المشكلة باختيار التوليفة المثلى من البدائل المتاحة التي تحقق أعظم عائد كلي، ويمكن توضيح صياغة هذه المشكلة بافتراض أن هناك شركة تمتلك N من المعامل، وكل معمل يدرس إمكانية التوسع، وأن رأس المال المخصص لكل المعامل هو C، عدد الاختبارات للمعمل i حيث ان (i=1,2, ….N) هو M_i، وعائد الربح أو الريع R_i أما الكلفة الإضافية المتوقعة من البديل M_i للمعمل i هو $C_{i,mi}$ ، أن هدف الشركة هو اختيار الخطة المجدية المناسبة لكل معمل بحيث أن العائد للمعمل جميعا هو اعظم ما يمكن.[1]

كما يمكن توضيح الكلفة لكل معمل وفقا للخطة الموضوعة والربح الناتج عن تنفيذها لمشكلة رأس تخصيص رأس المال بالشكل الآتي:

[1]. محمد عبد العال النعيمي، رفاه شهاب الحمداني، احمد شهاب الحمداني، مرجع سابق، ص ص: 385 – 387 .

المرحلة

البدائل	i=1		I=2			i=N	
M_i	C_1	R_1	C_2	R_2		C_N	R_N
1	C_{11}	R_{11}	C_{12}	R_{12}	………	C_{1N}	R_{1N}
2	C_{21}	R_{21}	C_{22}	R_{22}	………	C_{2N}	R_{2N}
. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .
N	C_{N1}	R_{N1}	C_{N2}	R_{N2}	………	C_{NN}	R_{NN}

لذلك ستكون صياغة المشكلة كالآتي:

$$MAX(R)=\sum_{i=1}^{N} R_{i,mi}$$

$$sc\left\{\sum_{i=1}^{N} C_{i,mi} \leq C\right.$$

$$C_{i,mi} \geq 0$$

أما المعادلة التكرارية وفق الحسابات الأمامية فستكون:

$$f_1(X_1)=Max\{R_{1,mi}\}$$

$$m_1$$

$$C_{1,m1} \leq X_1$$

$$f_i(X_i)=Max\{R_{i,mi}+f_{i-1}(X_i-C_{i,mi})\}$$

$$m_i$$

$$C_{i,mi} \leq X_i$$

$$(i=1,2,3,\ldots\ldots\ldots,N)$$

على فرض أن:

$R_{i,mi}$: تمثل عائد البديل mi عند المرحلة i حيث : i=1,2,….,N

$F_i(x_i)$: تمثل العائد الأمثل للمراحل i=1,2,….,N

X_i : تمثل متغير الحالة

$C_{i,mi}$: تمثل كلفة البديل، mi عند المرحلة i

مثال رقم 03: شركة لديها ثلاث مصانع فرعية أرادت تطوير هذه المصانع فكانت البدائل المتاحة لديها هي كما مبين في الجدول ادناه فاذا علمت ان راس المال المخصص للتطوير هو C=5 خمسة مليون دينار اوجد أفضل خيار للشركة وأفضل عائد ممكن ان تحصل عليه من تطوير تلك المصانع.

M_i	i=1		I=2		i=3	
	C	R	C	R	C	R
1	0	0	0	0	0	0
2	1	6	2	9	1	4
3	2	7	3	10	–	–
4	–	–	4	13	–	–

الحل: يتضح من السؤال أن i1 تمثل بيانات المصنع الأول و i2 هي المصنع الثاني و i3 هو المصنع الثالث، لذلك فلأجل التوصل إلى الحل امثل للمشكلة باستخدام البرمجة الديناميكية فإننا نقسم المشكلة إلى ثلاث أجزاء صغيرة (أي ثلاثة مراحل) حيث ان المرحلة الأولى تمثل المصنع الأول والمرحلة الثانية تمثل المصنع الثاني والمرحلة الثالثة تمثل المصنع الثالث.

ونستطيع أن نرتب البيانات في السؤال في جدول المرحلة الأولى كما يلي:

المرحلة الأولى:

حالة X_1	$f_1(X_1)=Max\{R_{1,mi}\}$ **تقييم البدائل**					
	$C_{11}=0$ $R_{11}=0$	**$C_{12}=1$ $R_{12}=6$**	**$C_{13}=2$ $R_{13}=7$**		$F_1(x_1)$	**رقم القرار**
0	0	–	–		0	1
1	0	6	–		6	2
2	0	6	7		7	3
3	0	6	7		7	3
4	0	6	7		7	3
5	0	6	7		7	3

المرحلة الثانية:

في هذه المرحلة تتوفر أربعة بدائل ولكن رأسمال المخصص X_2 سيكون عبارة عن رأسمال المخصص للمرحلة الثانية وبالمقابل فإن الايراد المناظر لها سيكون عبارة عن مجموعة الايراد للمرحلة الثانية والأولى.

حالة X_2	تقييم البدائل $f_2(X_2)=Max\{R_{2,mi}+f_1(X_2-C_{2,mi})\}$						
	$C_{21}=0$ $R_{21}=0$	$C_{22}=2$ $R_{22}=9$	$C_{23}=3$ $R_{23}=10$	$C_{24}=4$ $R_{24}=13$		$F_2(x_2)$	رقم القرار
0	0+0=0	–	–	–		0	1
1	0+6=6	–	–	–		6	1
2	0+7=7	9+0=9	–	–		9	2
3	0+7=7	9+6=15	10+0=10	–		15	2
4	0+7=7	9+7=16	10+6=16	13+0=13		16	2,3
5	0+7=7	9+7=16	10+7=17	13+6=19		19	4

المرحلة الثالثة:

حالة X_3	تقييم البدائل $f_3(X_3)=Max\{R_{3,mi}+f_2(X_3-C_{3,mi})\}$				
	$C_{31}=0$ $R_{31}=0$	$C_{32}=1$ $R_{32}=4$		$F_3(x_3)$	رقم القرار
0	0+0=0	–		0	1
1	0+6=6	4+0=4		6	1
2	0+9=9	4+6=10		10	2
3	0+15=15	4+9=13		15	1
4	0+16=16	4+15=19		19	2
5	0+19=19	4+16=20		20	2

الاستنتاج: نلاحظ عندما يكون رأسمال المخصص لتطوير المصانع الثلاثة (خمسة مليون دينار) فإن القرارات المثلى للمصانع الثلاثة هي القرار الثاني للمصنع الأول والثالث للمصنع الثاني والقرار الثاني للمصنع الثالث وبذلك تكون النتيجة النهائية للعائد الأمثل تساوي 20 مليون دينار.

III-3. تخصيص الموارد:

يستهدف تطبيق هذه المشكلة حصول المنتج على أعظم دخل ممكن من تخصيص الموارد المتاحة على عدد من الأنشطة الاقتصادية، ويمكن توضيح هذه المشكلة بافتراض الآتي، اذ أن $R(X_1, \ldots X_n)$: تمثل مجموع العائد من تخصيص X_i من وحدات الموارد من الأنشطة اذا ($i=1,2,\ldots n$).[1]

$g_i(x_i)$: تمثل العائد من الأنشطة، عندما X_i من الموارد مخصصة إلى ذلك النشاط.

X^* : أعظم مقدار من وحدات الموارد المتاحة للتخصيص لـ n من الأنشطة لذلك فإن صياغة المشكلة ستكون كما يلي:

$$Max\{r(X_1,\ldots\ldots.X_n)\} = Max\left[\sum_{k=1}^{n} g_k(X_k)\right]$$
$$(xk)$$
$$sc$$
$$\sum_{k=1}^{n} X^* \geq 0; X_k \geq 0$$

أما المعادلات دوال العائد المتعاقبة $F_i(x)$ فيمكن أن تعرف كالآتي:

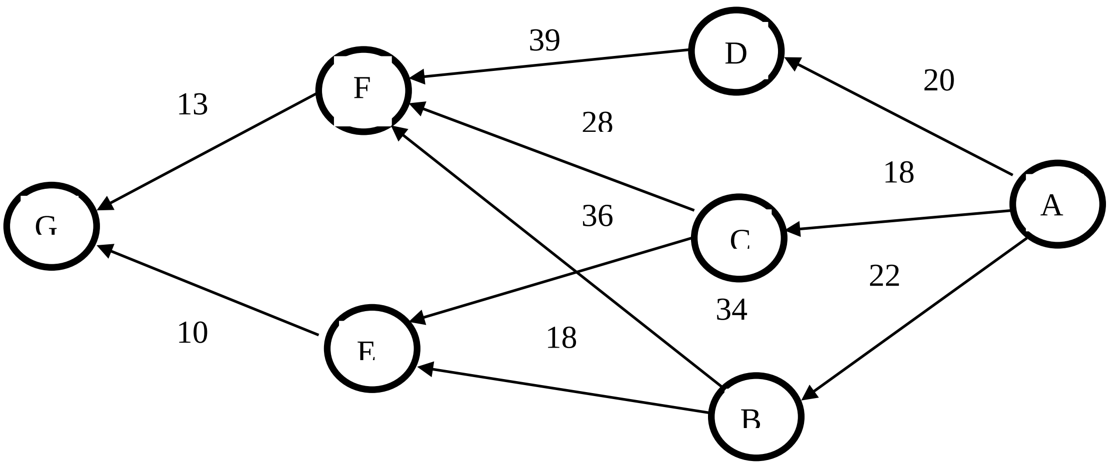
$$f_i(X) = Max\left[\sum_{k=1}^{n} g_k(X_k)\right] forX = 0, \Delta, 2\Delta, \ldots\ldots n\Delta$$
$$(i = n, n-1, \ldots\ldots\ldots.1), \Delta > 0$$
$$sc$$
$$\sum_{k=1}^{n} X_k = X^*$$
$$X_k > 0$$

حيث تم استخدام Δ لتمثل مقدار الإضافة من X_i على فرض أن قيم X_i مستمرة continuons variable.

[1] . محمد عبد العال النعيمي، رفاه شهاب الحمداني، احمد شهاب الحمداني، مرجع سابق، ص: 384.

IV- تمارين محلولة

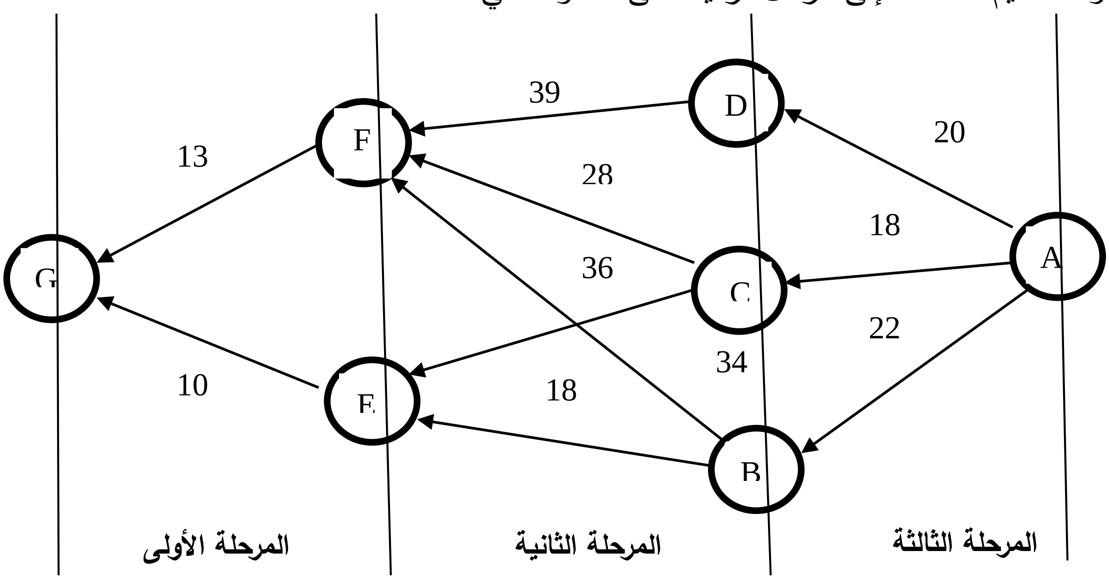
التمرين الأول: تحديد أفضل طريق يؤدي إلى تخفيض مسافة السفر من مركز التحرك إلى مركز الوصول.



حل التمرين الأول:

خطوات الحل:

أولا: تقسيم المشكلة إلى مراحل فرعية على النحو التالي:



بذلك تصبح المسافات في كل مرحلة على النحو التالي:

المرحلة	السهم	مسافة السهم
الأولى	G–F	13
	G–E	10
الثانية	F–D	39
	F–C	28
	E–C	36
	F–B	34
	E–B	18
الثالثة	D–A	20
	C–A	18
	B–A	12

الخطوة الثانية:

نبدأ بحل المرحلة الأولى أي الجزء الأخير من شبكة التدفق عادة حيث يتم تحديد الطريق الأقصر إلى نهاية الشبكة وكما هو موضح في الشكل التالي يوجد طريقين:

دوائر بدايات المرحلة	نهاية الشبكة اقصر الطرق إلى الدائرة G	المسارات (الأسهم)
F	13	G–F
E	10	G–E

الخطوة الثالثة:

التحرك إلى الخلف وحل المراحل الوسيطة وبالتطبيق على المثال الحالي يتم حل المرحلة الثانية ويتم إعداد البيانات المطلوبة على النحو التالي:

دوائر بدايات المرحلة	اقصر الطرق من كل دائرة على نهاية الشبكة	اسهم اقصر المسافات
D	52	F–D G–F
C	41	F–C G–F
B	28	E–B G–E

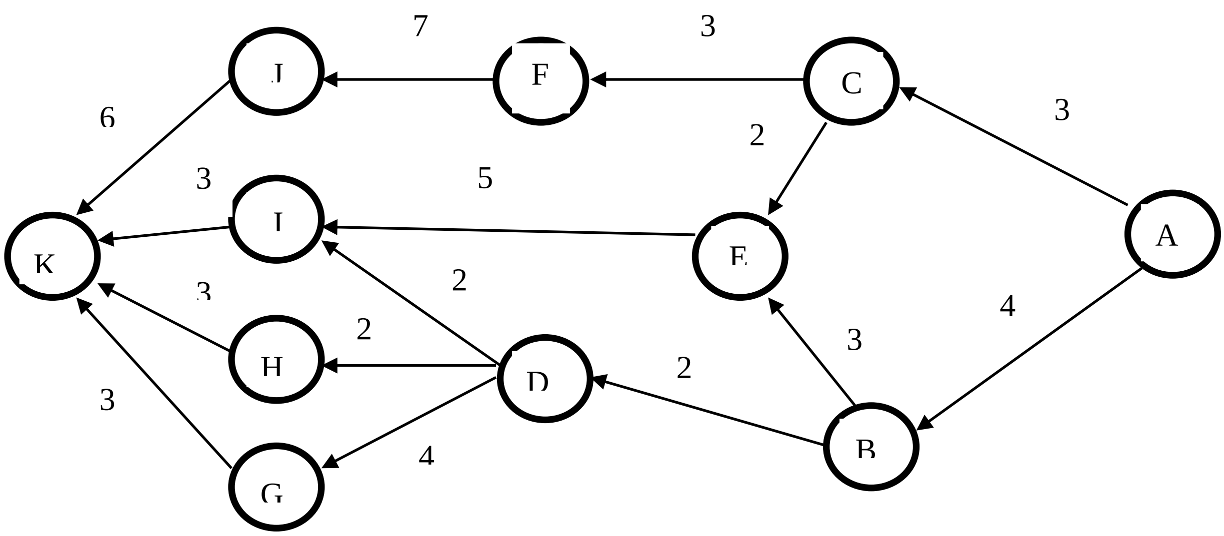
الخطوة الرابعة:

دوائر بدايات	اقصر الطرق من دائرة البداية إلى نهاية الشبكة	أسهم المسارات
A	50	B–A
		E–B
		G–E

ومنه المسار: **A; B; E; G**

V- تمارين مقترحة

التمرين الأول: حل مشكلة الطريق الأقصر باستخدام أسلوب البرمجة الديناميكية



التمرين الثاني: تستطيع عربة نقل عشرة طن، ولكن توجد 3 منتجات للشحن مسجلة في الجدول التالي، افترض أنه يمكن شحن نوع واحد على الأقل، حدد الحمولة التي تحقق أعلى قيمة ممكنة.

النوع	الوزن بالطن	القيمة
1 البرتقال	1	20
2 موز	2	50
3 تفاح	2	60

التمرين الثالث: مؤسسة اقتصادية لتقييم المشاريع تم الاتفاق معها على تقييم ثلاثة مشاريع توسعية لإحدى الشركات وكانت المعلومات المتوفرة عن كل مشروع كما موضح أدناه، حدد البرنامج الأفضل للتوسع للشركة بما يحقق تعظيم العائد الكلي علما بأن رأس المال المحدد للتوسع يقدر بعشرة ملايين دولار.

البدائل	اقسام الشركة					
	i=1		I=2		i=3	
	C	R	C	R	C	R
1	2	4	1	3	–	–
2	4	8	2	8	8	12
3	6	10	–	–	12	16

المراجع

❖ **الكتب باللّغة العربية:**

1. أبو القاسم مسعود الشيخ: " **بحوث العمليات**"، المجموعة العربية للتدريب والنشر، القاهرة، 2014.
2. احمد عبد إسماعيل الصفار، ماجدة عبد اللطيف التميمي: " **بحوث العمليات تطبيقات على الحاسوب**"، دار المناهج للنشر والتوزيع، الاردن، 2007.
3. أكرم محمد عرفان المهتدي: " **الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية بحوث العمليات**"، دار صفاء للنشر والتوزيع، ط1، عمان، 2004.
4. جلال ابراهيم العبد: " **استخدام الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الادارية**"، دار الجامعة الجديدة للنشر، 2004.
5. جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، فالح عبد القادر الحوري: " **بحوث العمليات والأساليب الكمية نظرية وتطبيق**"، دار جليس الزمان، عمان، 2008.
6. حامد سعد نور الشمرتي: " **بحوث العمليات مفهوما وتطبيقا**"، مكتبة الذاكرة، بغداد، 2010.
7. حامد سعد نور الشمرتي، علي خليل الزبيدي: " **مدخل إلى بحوث العمليات**"، دار مجدلاوي، عمان، 2007.
8. حسين محمود الجنابي: " **الأحدث في بحوث العمليات**" ، دار الحامد ،الأردن ، 2010.
9. دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال: " **بحوث العمليات**"، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، الأردن، 2008.
10. راتول محمد: " **بحوث العمليات** "، ديوان المطبوعات الجامعية، ط2، الجزائر، 2006.
11. سليمان محمد مرجان: " **بحوث العمليات** "، دار الكتب الوطنية بن غازي، ليبيا،ط1، 2002.
12. سهيلة عبد الله سعيد: " **الجديد في الأساليب الكمية وبحوث العمليات**"، دار الحامد، ط1، الأردن، 2007.
13. صالح مهدي محسن العامري، عواطف ابراهيم الحداد،" **تطبيقات بحوث العمليات في الإدارة**"، إثراء للنشر والتوزيع، الأردن، ط 1، 2009.
14. عبد الرسول عبد الرزاق الموسوي: " **المدخل لبحوث العمليات**"، دار وائل للنشر، الأردن، 2001.
15. عيس حيرش: " **الأساليب الكمية في الإدارة** "، دار الهدى، الجزائر، 2012.
16. فتحي خليل حمدان:" **بحوث العمليات مع تطبيقات باستخدام الحاسوب**"، دار وائل للنشر، ط1، الأردن، 2010.
17. فتحي خليل حمدان، رشيق رفيق مرعي، " **مقدمة في بحوث العمليات**"، دار وائل للنشر، ط 4، الأردن، 2004.

18. فريد راغب النجار: " **بحوث العمليات في الادارة**"، الدار الجامعية، الاسكندرية، 2009.
19. محمد إسماعيل بلال: " **بحوث العمليات**"، دار الجامعة الجديدة، الاسكندرية، 2008.
20. محمد دباس الحميد، محمد العزاوي: " **الأساليب الكمية في العلوم الإدارية**"، دار اليازوري، الأردن، 2013.
21. محمد سالم الصفدي: " **بحوث العمليات تطبيق وخوارزميات**"، دار وائل للنشر، الاردن،1999.
22. محمد عبد العال النعيمي، رفاه شهاب الحمداني، احمد شهاب الحمداني: " **بحوث العمليات**"، دار وائل للنشر، ط2، الأردن، 2011.
23. محمد محمد كعبور: "**أساسيات بحوث العمليات نماذج وتطبيقات**"، منشورات أكاديمية الدراسات العليا، طربلس، ليبيا، 2005.
24. محمود العبيدي، مؤيد عبد الحسين الفضل: " **بحوث العمليات وتطبيقاتها في إدارة الأعمال**"، مؤسسة الوراق للنشر والتوزيع، ط1، الاردن، 2004.
25. مكيد علي: " **بحوث العمليات وتطبيقاتها الاقتصادية دروس ومسائل محلولة**"، الجزء الأول، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2015.
26. مكيد علي: " **بحوث العمليات وتطبيقاتها الاقتصادية دروس ومسائل محلولة**"، الجزء الثاني، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2016.
27. منعم زمزير المساوي:" **بحوث العمليات مدخل علمي لإتخاذ القرارات**"، دار وائل للنشر، ط1،الأردن، 2009.
28. يزن ابراهيم مقبل: "**مقدمة في بحوث العمليات**"، مكتبة المجتمع العربي للشر والتوزيع، ط1، الأردن، 2005.

❖ **الكتب باللّغة الأجنبية:**

1) Gérald Baillargeon ,"**Programmation linéaire appliquée** ", les édition SMG ,Québec , Canada,1996 .
2) GH .OPRIS , "**Programmation linéaire** " , O PU , Algérie , 1983 .
3) J.M.Boussard, J. J.Daudin ," **la programmation linéaire dans les modèles de production**",Masson , Paris, 1998 .
4) Mustapha Nabil ," **recherche opérationnelle et *Mathématiques appliqués* a la gestion des entreprises**",Dunod, France,1985.
5) P.Chrétienne, Y.Pesyuex, G.Raudjean ," **Algorithmes et pratique de programmation linéaire**", édition telmic, Paris, 1980.

الملاحق

الملحق رقم : **01**

جدول التوزيع الطبيعي

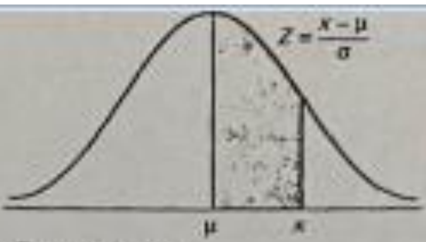


TABLE (1) **Normal Curve Areas**

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4977	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

	00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.50000	.50399	.50798	.51197	.51595	.51994	.52392	.52790	.53188	53586
0.1	.53983	.54380	.54776	.55172	.55567	.55962	.56356	.56749	.57142	.57535
0.2	.57926	.58317	.58706	.59095	.59483	.59871	.60257	.60642	.61026	61409
0.3	.61791	.62172	.62552	.62930	.63307	.63683	.64058	64431	.64803	.65173
0.4	.65542	.65910	.66276	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68439	.68793
0.5	.69146	.69497	.698-17	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	71904	72240
0.6	.72575	.72907	.73237	.73536	.73891	.74215	.74537	.74857	.75175	.75490
0.7	.75804	.76115	.76424	.76730	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78534
0.8	.78814	.79103	.79389	.79673	.79955	.80234	.80511	.80785	.81057	.81327
0.9	.81594	81859	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83398	.83646	.83891
1.0	.84134	84375	.84614	.84849	.85083	.85314	.85543	.85769	.85993	.86214
1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87286	.87493	.87698	.87900	.88100	.88298
1.2	.88493	.88686	88877	.89065	.89251	89435	.89617	.89796	.89973	.90147
1.3	.90320	90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91309	.91466	.91621	.91774
1.4	.91934	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92785	.92922	.93056	.93189
1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
1.6	.94520	94630	.94738	.948-15	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.954-19
1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96080	.96164	.962-46	.96327
1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
1.9	.97128	.97193	.97237	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670
2.0	.97725	.97784	.97831	.97882	.97932	97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98610	.986.15	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
2.5	.99379	.99896	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
2.6	.99534	.99517	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
2.7	99653	.99664	.99674	.99683	.99693	99702	.99711	.99720	99728	.99736
2.8	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	99846	.99851	.99856	.99861
3.0	.99865	.99869	.99874	.99878	.99882	.99886	.99889	.99893	.99896	.99900
3.1	.99903	.99906	.99910	.99913	.99916	.99918	.99921	99924	.99926	.99929
3.2	99931	.99934	.99936	.99938	.99940	.99942	.99949	.99946	.99948	.99950
3.3	.99952	.99953	99955	.99957	99958	.99960	.99961	.99962	.99964	.99965
3.4	.99966	.99968	99969	.99970	99971	.99972	.99973	.99974	.99975	.99976
3.5	.99977	.99978	.99978	.99979	.99980	.99981	.99981	.99982	.99983	.99983
3.6	.99984	.99985	99985	.99986	99986	.99987	.99987	.99998	.99988	.99989
3.7	.99989	.99990	99990	.99990	.99991	.99991	.99992	.99992	.99992	.99992
3.8	.99993	.99993	99993	.99994	.99994	.99994	.99994	.99995	.99995	.99995
3.9	.99995	.99995	99996	.99996	99996	.99996	.99996	.99996	.99997	.99997