



TRANSFORMATIONS et ÉQUATIONS INTÉGRALES

Rappels de cours et exercices corrigés

$2A=gh$
 $a/b=\text{tg } x$ 30°
 $a/c=\sin y$
4
 $S=2\pi r^2$ 90°

Dr. BOUDREF Mohamed Ahmed

A Notre chère mère
Dr. Ahmed M.
Avec le Respect
MMA

02/02/2021

Transformations et Equations Intégrales

(Rappels de cours-Exercices corrigés)

BOUDREF Mohamed-Ahmed Maître de Conférences

Université de Bouira, Département des Mathématiques
Janvier 2021

Table des matières

Préface	viii
I Transformations intégrales	1
1 Rappels sur la théorie de la mesure et de l'intégration	2
1.1 Quelques résultats d'intégration	2
1.1.1 Intégrale de Lebesgue	2
1.1.2 Intégration des fonctions mesurables	4
1.1.3 Théorème de la convergence dominée	5
1.2 Quelques rappels sur les espaces L^p	5
1.2.1 Semi-norms N_p et espaces $\mathcal{L}^p, p \in [1, +\infty)$	5
1.2.2 Norme $\ \cdot\ _p$ et espaces $L^p, p \in [1, +\infty)$	6
1.2.3 Espaces \mathcal{L}^∞ et L^∞	8
1.2.4 Dualité dans les espaces L^p . Réflexibilité	9
1.3 Convolution et régularisation	9
1.3.1 Translation dans $L^p(\mathbb{R}^d)$	10
1.3.2 Produit de convolution	10
1.3.3 Supports et convolution	12
1.3.4 Convolution dans $L^1(\mathbb{R}^d)$	14
1.3.5 Convolution dans $L^p(\mathbb{R}^d)$	15
1.3.6 Convolution dans l'espace $(L^p(\mathbb{R}^d), L^q(\mathbb{R}^d))$	18
1.4 Régularisation	22
1.4.1 Convolution et dérivation	22
1.4.2 Suites régularisantes	24

TABLE DES MATIÈRES

1.5	Exercices	25
1.6	Indications sur les réponses aux exercices	27
1.7	Corrigés détaillés de certains exercices	29
1.8	Exercices supplémentaires	34
2	Transformation de Fourier et applications	35
2.1	Intégrale de Fourier comme un cas limite de la série de Fourier	35
2.2	Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$	39
2.3	Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$	41
2.3.1	Position de problème	41
2.3.2	Résultat important	42
2.3.3	Lien avec la translation, la modulation et l'homotétie	45
2.3.4	Convolution et transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$	48
2.3.5	Relation avec l'opérateur de dérivation	54
2.4	Transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^d)$	54
2.4.1	Convolution et transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^d)$	59
2.5	Quelques applications de la transformation de Fourier	62
2.5.1	L'équation de Laplace [3]	63
2.5.2	L'équation de la chaleur [2]	64
2.5.3	Le problème de Dirichlet dans le demi-plan supérieur [6]	65
2.5.4	L'équation des cordes vibrantes [14]	66
2.5.5	Application à l'astrophysique	67
2.5.6	Application à la compression de signaux	68
2.6	Exercices	69
2.7	Indications sur les réponses aux exercices	73
2.8	Corrigés détaillés de certains exercices	75
2.9	Exercices supplémentaires	83
3	Transformation de Laplace	85
3.1	Transformation de Laplace	85
3.2	Propriétés de la transformation de Laplace	88
3.3	Table de transformation de Laplace	94
3.4	Transformation de Laplace inverse	94
3.5	Comportement asymptotique des intégrales de Laplace	96

TABLE DES MATIÈRES

3.6	Applications	97
3.6.1	Equations différentielles ordinaires	97
3.6.2	Résolution des systèmes d'équations différentielles linéaires	99
3.6.3	Résolution des problèmes de la physique mathématique	100
3.7	Exercices	102
3.8	Indications sur les réponses aux exercices	106
3.9	Corrigés détaillés de certains exercices	108
3.10	Exercices supplémentaires	119
4	Autres transformations intégrales	122
4.1	Transformation de Mellin	122
4.1.1	Quelques propriétés de la transformée de Mellin	124
4.1.2	Applications	126
4.2	Transformation de Bessel	128
4.2.1	Transformation de Hankel	128
4.3	Autres transformations intégrales	131
4.3.1	Transformation de Meijer :	132
4.3.2	Transformation de Kontorovitch-Lébédev :	132
4.3.3	Transformation de Mehler-Fock :	133
II	Equations intégrales	134
5	Equations intégrales de Volterra	135
5.1	Classification des équations intégrales	136
5.2	Equations intégrales de Volterra de deuxième espèce	138
5.2.1	Exemple de base	138
5.2.2	Lien entre les équation différentielles linéaires et le équation intégrales de Volterra	139
5.2.3	Résolvante de l'équation intégrale de Volterra. Résolution des équations intégrales à l'aide des résolvantes	141
5.2.4	Applications du principe des contractions aux équations intégrales de Volterra	146
5.2.5	Equation intégrale d'Abel et sa généralisation	147

TABLE DES MATIÈRES

5.2.6	Résolution de l'équation intégrale linéaire de Volterra par la transformation de Laplace	150
5.2.7	Equation intégrale de Volterra sur l'intervalle $(x, +\infty)$	152
5.2.8	Systèmes d'équations intégrales de Volterra du type convolution	153
5.2.9	Equations intégro-différentielles	154
5.3	Equations intégrales de Volterra de première espèce	156
5.3.1	Equation intégrale de première espèce comme équation intégrale de deuxième espèce transformée	156
5.3.2	Equation intégrale de Volterra de première espèce de type convolution	157
5.4	Enoncé des Exercices	158
5.5	Réponses aux exercices du chapitre V	167
5.6	Corrigés détaillés de certains exercices	173
5.7	Exercices supplémentaires	197
6	Equations intégrales de Fredholm	201
6.1	Notions fondamentales	202
6.2	Méthode de Fredholm. Dénominateur de Fredholm	205
6.3	Applications du principe des contractions aux équations intégrales de Fredholm	209
6.4	Noyaux itérés. Construction de la résolvante à l'aide des noyaux itérés	211
6.5	Relations intégrales pour les résolvantes. Théorèmes d'existence et d'unicité.	217
6.6	Equations intégrales à noyau dégénéré	218
6.7	Nombres caractéristiques et fonctions propres	223
6.7.1	Développement du noyau suivant les fonctions propres	232
6.8	Equations intégrales de Fredholm à noyau dépendant de la différence des arguments	233
6.9	Propriétés extrémales des nombres caractéristiques et des fonctions propres	234
6.10	Résolution des équations intégrales homogènes à noyau dégénéré	236

TABLE DES MATIÈRES

6.11	Résolution de l'équation intégrale symétrique non homogène en fonction des valeurs caractéristiques et des fonctions propres	237
6.12	Alternative de Fredholm	242
6.13	Equations intégrales qui ne sont pas de Fredholm	247
6.14	Utilisation des transformations intégrales pour résoudre les équations intégrales	247
6.14.1	Utilisation de la transformation de Fourier	248
6.14.2	Théorème généralisé du produit	251
6.14.3	Utilisation de la transformation de Mellin	253
6.15	Equations intégrales de Fredholm de première espèce	255
6.16	Enoncé des exercices	257
6.17	Réponses aux exercices du chapitre VI	273
6.18	Corrigés détaillés de certains exercices	285
6.19	Exercices supplémentaires	312