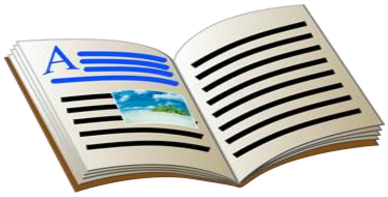
الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Université Akli Mohand Oulhadj - Bouira -
ⵜⴰⵙⴷⴰⵡⵉⵜ ⴰⴽⵍⵉ ⵎⵓⵃⴰⵏⴷ ⵓⵍⵃⴰⵊ - ⵜⵓⴱⵉⵔⴰⵜ -

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة أكلي محند أولحاج
- البويرة -

Faculté des Sciences et des Sciences Appliquées
كلية العلوم والعلوم التطبيقية

Département de de Génie Electrique



Polycopié de cours

En : Electronique

Spécialité :Electronique des Systèmes Embarquées

Niveau : Master

Systèmes Asservis Numériques

Par Dr. BENSAFIA Yassine

Année :2021-2022

Semestre: 1 Unité d'enseignement:
UEF 1.1.2 Matière 4: Systèmes asservis numériques
VHS: 45h00 (Cours: 1h30, TD: 1h30) , Crédits: 4 Coefficient: 2

Objectifs de l'enseignement:

Introduire les propriétés et les représentations des systèmes dynamiques linéaires à temps discret. Donner les éléments fondamentaux de la commande des systèmes linéaires représentés sous forme de fonction de transfert en *Z*. Présenter les différentes méthodes de synthèse de correcteurs à temps discrets.

Connaissances préalables recommandées:

L'étudiant doit comprendre à l'avance la théorie des Systèmes asservis continus (analyse temporelle et fréquentielle de système, représentation graphique et d'état des systèmes continus, et synthèse de correcteur).

Contenu de la matière:

Chapitre 1. Etude de l'échantillonnage d'un signal (5 Semaines)

- Transformée en Z et transformée en Z modifiée.
- Transferts échantillonnés, et équation aux récurrentes.
- Transformation bilinéaire d'un transfert échantillonné.

Chapitre 2. Analyse des systèmes échantillonnés dans l'espace d'état (5 Semaines).

- Discrétisation de l'équation d'état d'un système continu.
- Représentation et résolution de l'équation d'état d'un système discret.
- Stabilité et précision d'un système discret.
- Notions de gouvernabilité et d'observabilité.

Chapitre 3. Synthèse des systèmes échantillonnés dans l'espace d'état (5 Semaines)

-Placement des pôles par retour d'état et par retour de sortie
- Estimateur d'état et de sortie

Mode d'évaluation:

Contrôle continu: 40% ; Examen: 60%.

Références bibliographiques :

1. L. Maret, Régulation Automatique, 1987.
2. Dorf & Bishop, Modern Control Systems, Addison-Wesley, 1995
3. J. L Abatut, Systèmes et Asservissement Linéaires Echantillonnés, Edition Dunod
4. J. Ragot, M. Roesch, Exercices et Problèmes d'Automatique, Edition Masson.
5. J. Mainguenaud, Cours d'automatique Tome3, Edition Masson.
6. T.J. Katsuhiko, Modern Control Engineering, 5th Edition, Prentice Hall.
7. H. Buhler, Réglages Echantillonnés Tome 1, Edition Dunod.
8. M. Rivoire, Cours d'Automatique Tome 2, Edition Chihab.
9. Th. Kailath, Linear Systems, Prentice-Hall, 1980.

Avant-propos

Un système asservis est un système qui prend en compte l'évolution de ses sorties pour les maintenir ou les modifier conformément à une consigne durant son fonctionnement.

Le principe de base d'un asservissement est de mesurer ,à chaque instant, la différence entre la valeur réelle et la valeur ciblée de la grandeur asservie, et d'activer les actionneurs agissant sur cette grandeur pour l'objectif de réduire cet écart.

L'objectif principal de ce manuel de cours, intitulé « Systèmes Asservis Numériques », est de présenter les notions de base des systèmes asservis linaires dans le domaine discret, il est destiné aux étudiants en Master Electronique des Systèmes Embarqués. Les informations contenues dans ce cours ont été organisées de la meilleure façon possible afin d'être exhaustives tout en étant également assimilable par l'ensemble des étudiants. Une organisation particulière a été mise sur la forme de ce manuel en respectant le canevas officiel de notre tutelle, ce qui permet ,aux étudiants, d'en faciliter la compréhension.

Ce cours est organisé en Trois chapitres, dans le premier, on présente une étude sur l'échantillonnage d'un signal. Dans le deuxième chapitre, on traite l'Analyse des systèmes échantillonnés dans l'espace d'état en se basant sur l'étude de la stabilité et la précision des systèmes échantillonnés asservis ainsi que l'étude de la commandabilité et l'observabilité des systèmes dans l'espace d'état. Dans le dernier chapitre on va présenter la synthèse des systèmes échantillonnes dans l'espace d'état

SOMMAIRE

Chapitre 1

Etude de l'échantillonnage d'un signal

Chapitre 2

Analyse des systèmes échantillonnés dans l'espace d'état

Chapitre 3

Synthèse Des Systèmes Echantillonnes Dans L'espace D'état

Chapitre 1

Etude de l'échantillonnage d'un signal

1.1. Introduction

Dans l'industrie, l'utilisation des outils numériques de traitement (ordinateurs, calculateurs, automates programmables..etc...) est indispensable et nécessaire en raison de la complexité des systèmes, ainsi que celle des traitements à réaliser.

L'échantillonnage est l'une des techniques du traitement du signal qui est très utilisée par des systèmes numériques dans les différents domaines , son principe est de transformer un signal analogique en une suite de valeurs numériques pour pouvoir être traités

Pour transformer un signal continu en un signal discret, on a recours à deux opérations successives : L'échantillonnage consiste à prélever les valeurs instantanées d'un signal à des instants précis, puis la conversion analogique numérique (CAN) qui transforme ces échantillons en une suite de nombres codés sous forme binaire.

1.2. Principes fondamentaux de l'échantillonnage des signaux

1.2.1.Modèle Mathématique d'échantillonnage:

L'objectif de l'échantillonnage est de transformé un signal temporel $\boldsymbol{x(t)}$ en une suite numérique $\boldsymbol{x(kT_e)}$ de valeurs prises à des instants $\boldsymbol{kT_e}$.

Soit un signal analogique x(t) représenté par une suite de valeur discrète :

$$x(t) = x(kT_e) \tag{1.1}$$

Avec : $\boldsymbol{k}$ est un nombre entier $(k = 0, 1, 2, \dots n)$ et $\boldsymbol{T_e}$ une période d'échantillonnage

Le peigne de Dirac $\boldsymbol{p(t)}$ représenté par la figure 1.1 est défini par :

$$p(t) = \delta_T(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(t - kT_e) \tag{1.2}$$

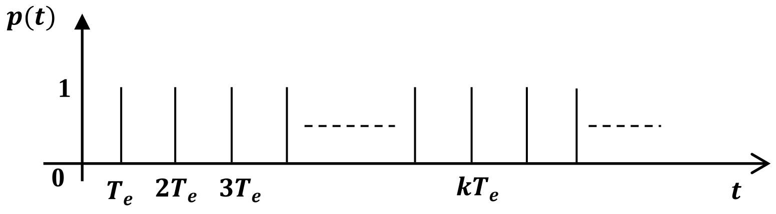


Figure 1.1 peigne de Dirac

Mathématiquement , l'échantillonnage est une opération de multiplication d'un signal x(t) par une fonction d'échantillonnage $\boldsymbol{p(t)}$ (*peigne de Dirac)* représentée sur la figure 1.

$$x^{*}(t) = x(kT_e) = x(t).p(t) = x(t).\sum_{k=0}^{+\infty} \delta(t - kT_e) \tag{1.3}$$

$$x^{*}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} x(k).\delta(t - kT_e) = \{x(kT_e)\} = \{x(0), x(T_e), x(2T_e) \dots\dots\dots x(kT_e)\} \tag{1.4}$$

I.2.2. Théorème de Shannon

Malheureusement, l´échantillonnage d'un signal continu x(t) conduit à une perte d'information du ce dernier. Cette perte d'information est plus grande lorsque la fréquence $f_e = \frac{1}{T_e}$ est petite. Donc le cas idéal est d' échantillonner à une fréquence infinie.

Le choix de la période d'échantillonnage dépend du type de système utilisé et des possibilités offertes par les outils numériques. Dans tout les cas, l'´echantillonnage doit respecter le **théorème de Shannon.**

Soit $|\boldsymbol{x^{*}(f)}|$ le spectre d'un signal x(t) nous montre que cela est possible s'il n'existe aucun recouvrement (sans chevauchement) entre les différents segments de spectre (Figure1.2).

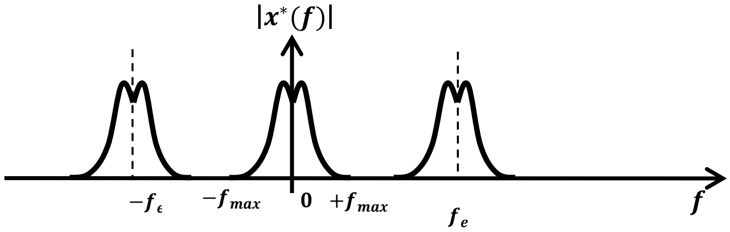


Figure 1.2 Spectre d'un signal échantillonné sans recouvrement

pour préserver, lors de son échantillonnage, l'information contenue dans un signal le théorème de Shannon précise que la fréquence d'´echantillonnage f_e doit être au moins égale à deux fois la plus grande fréquence contenue dans le spectre du signal que l'on veut échantillonner :

$$\boldsymbol{f_e} > 2\boldsymbol{f_{max}}$$

1.2.3.Reconstruction d'un signal continu

L'opération inverse de l'échantillonnage, c'est-à-dire la transformation d'une suite d'échantillons en un signal continu (CNA) acceptable technologiquement par les actionneurs, est appelée **reconstitution (ou reconstruction**. Cette étape est indispensable en commande numérique ; en effet, à partir des nombres générés par l'ordinateur (généralement un calculateur numérique), une grandeur de commande analogique doit être construite afin d'activer le système à commander. En fait, cette opération est réalisée à l'aide de f**iltres** ou de **bloqueurs.** L'objectif est de reconstruire un signal continu (analogique) le plus proche possible du signal dont le spectre est celui de la bande $[0, f_e/2]$.

A-Bloqueur d'ordre zéro (BOZ)

Un bloqueur d'ordre zéro ($\boldsymbol{BOZ}$) en anglais ``*zero order holder*`` qui permet d'obtenir un signal analogique à partir d'une suite d'échantillons ou d'un signal numérique. En effet, le bloqueur d'ordre zéro maintient à sa sortie la valeur de l'échantillon d'entrée, durant la période d'échantillonnage qui sépare deux échantillons consécutifs (kT_e et $(k+1)T_e$). Un exemple est montré par la figure 1.3 ; où la sortie garde la même valeur jusqu'à l'arrivée d'une nouvelle valeur en entrée.

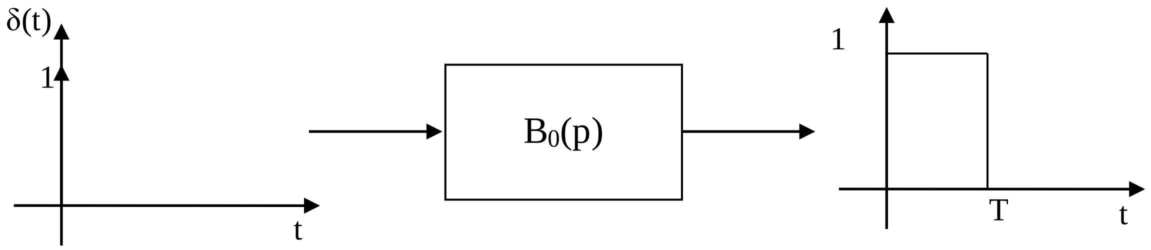


Figure 1.3 Bloqueur d'Ordre Zéro (BOZ)

La réponse impulsionnelle $b_0(t)$ du bloqueur est une différence entre un signal échelon $\varepsilon(t)$ et un autre retardé d'une période T, elle s'écrit :

$$b_0(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t - T_e)$$

Où $\varepsilon(t)$: la fonction échelon unitaire

En utilisant la transformée de Laplace, on déduit la fonction de transfert du BOZ :

$$B_0(p) = \frac{1-e^{-T_e p}}{p} \quad (1.5)$$

B- Bloqueur d'ordre un (*BOU*)

Le principe du bloqueur d'ordre un (***BOU***) est de reproduire exactement un signal linéaire échantillonné par la réalisation d'une extrapolation linéaire de l'évolution de signal avant échantillonnage à partir des deux dernières prises d'information:

La figure suivante montre un exemple d'un bloqueur d'ordre un:

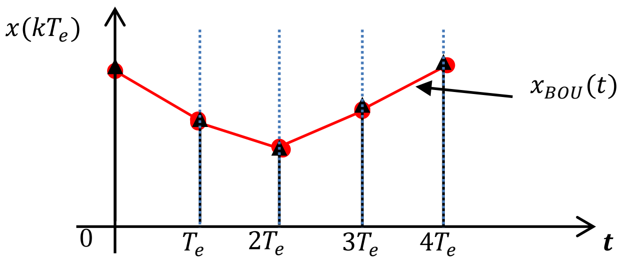


Figure 1.4 bloqueur d'ordre 1

La fonction de transfert d'un bloqueur d'ordre un $B_1(p)$est donnée par l'équation suivante :

$$B_1(p) = \frac{1+T_e p}{T_e}\left(\frac{1-e^{-pT_e}}{p}\right)^2 \quad (1.6)$$

Remarque :

Il existe plusieurs sortes de bloqueurs :

- pour un **bloqueur d'ordre 0**, permet d'avoir un histogramme en barres.
- pour un **bloqueur d'ordre 1**,son objectif est d'avoir une interpolation linéaire basique (on aura des segments reliant directement deux valeurs successives).
- pour un **bloquer d'ordre 2**, son principe est d'avoir une parabole entre 2 valeurs
- pour un **bloqueur d'ordre n**, on obtiendra entre 2 valeurs successives une courbe d'ordre **n**.

1.3. Transformée en z

1.3.1.Définition

Soit un signal continu x(t), La transformée de Laplace de ce dernier s'´ecrit :

$$X(p) = \int_0^\infty x(t).e^{-p.t}\,dt \tag{1.7}$$

La transformée de Laplace d'un signal discret à une donnée d'une période T est:

$$X^*(p) = \int_0^\infty x^*(t).e^{-p.t}\,dt$$

$$X^*(p) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k).e^{-p.k.T}$$

Où: $x^*(t)$ est le signal échantillonné de $x(t)$. $T_e$est la période d'échantillonnage.

A partir de ce résultat , la transformée en z des signaux discrets à été proposée avec $z = e^{T_e p}$.

Donc on appelle la transformée en z d'un signal à temps discret x(k) (signal causal) la série entière $X(z)$ définie par :

$$X(z) = Z\{x(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} \tag{1.8}$$

Tel que z est une variable complexe où X(z) est un fonction complexe de la variable z.

La transformée en$Z$est généralement définie sur une partie du plan complexe pour laquelle$|z| > R_0$.

La valeur R_0 définissant la limite de convergence est appelée ***rayon de convergence*** de la transformée en Z.

Remarque:

La transformée en Z Est l'outil mathématique qui facilite l'analyse des boucles de régulation numérique et elle permet de déterminer la solution d'une équation aux différences à coefficients constants

1.3.2 Propriétés de la transformée en Z

a) Linéarité

Soit $X(z) = z\{x(k)\}$ et $Y(z) = z\{y(k)\}$ alors:

$$z\{\alpha . x(k) + \beta . y(k)\} = \alpha . X(z) + \beta . Y(z) \quad (1.9)$$

b) Multiplication par une rampe

Soit $X(z) = z\{x(k)\}$ et et k est un nombre réel alors:

$$z\{k . x(k)\} = -z \frac{d}{dz} X(z) \quad (1.10)$$

c) Multiplication par une exponentielle

$$z\{e^{-ak} . x(k)\} = X(ze^{a}) \quad (1.11)$$

d) Changement d'échelleen z

$$X(z) = z\{x(k)\} \Rightarrow z\{a^{k} x(kT_{e})\} = X\left(\frac{z}{a}\right) \forall\, a \in R \quad (1.12)$$

e) Théorème du retard

Soit $x(k) = 0$ pour $k < 0$ (fonction causale)

$$X(z) = z\{x(k)\} \Rightarrow z\{x(k-n\} = z^{-n} X(z)\; pourk \geq n \quad (1.13)$$

f) Avance

La transformée en z d'un signal discret avancé de $\boldsymbol{n}$périodes d'échantillonnageest :

$$X(z) = z\{x(k)\} \Rightarrow z\{x(k+n\} = z^{n} X(z) - z^{n} x(0) - z^{n-1} x(1) - \cdots - z\, x(n-1) \quad (1.14)$$

g) Retard

$$\mathrm{TZ}[\mathrm{x}(\mathrm{k}-\mathrm{n})] = \mathrm{z}^{-\mathrm{n}} \mathrm{X}(\mathrm{z}) \quad (1.15)$$

h) Sommation

$$TZ[\sum_{i=0}^{\infty} x(i)] = \frac{z}{z-1} X(z) \tag{1.16}$$

i) Théorème du la valeur initiale

$$x(0^+) = \lim_{k\to 0}\{x(k)\} = \lim_{z\to +\infty}\{X(z)\} \tag{1.17}$$

j) Théorème du la valeur finale

$$x(\infty) = \lim_{t\to\infty}\{x(t)\} = \lim_{z\to 0}\left\{\left(\frac{z-1}{z}\right)X(z)\right\} \tag{1.18}$$

k) Théorème de la convolution discrète

le produit de convolution discrète de deux fonctions $f\ et\ g$ est :

$$(x * y)(k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(k-n)$$

$$Z\{(x * y)(k)\} = X(z).Y(z) \tag{1.19}$$

1.3.3.Exemples des signaux échantillonnés usuels

Exemple 1:

Soit $\boldsymbol{\delta(kT_e)}$ une impulsion unité échantillonnée donnée par la figure 1.5 :

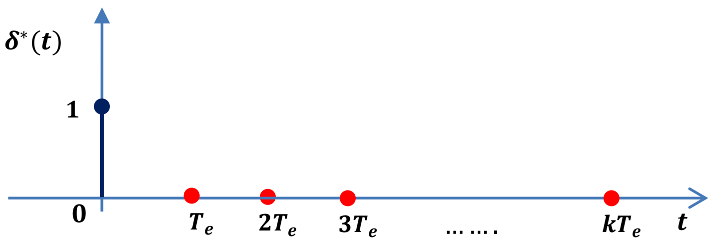


Figure 1.5 Impulsion de Dirac

$$\boldsymbol{\delta(kT_e)} = \begin{cases} 1 & si \quad k = 0 \\ 0 & si \quad k \neq 0 \end{cases} \tag{1.20}$$

En utilisant la définition de la transformée en z précédente, on trouve :

$$X(z) = Z(x(kT_e) = Z(\delta_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k z^{-k} = \delta_0\, z^0 = 1$$

Donc: $X(z) = Z\{\delta^*(t)\} = 1$

Exemple 2:

Soit $\boldsymbol{e(kT_e)}$ un échelon unité échantillonnée donnée par la figure 1.6 :

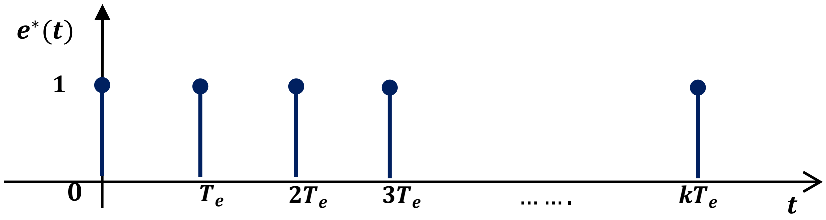


Figure 1.6 Echelon unité

$$\boldsymbol{e(kT_e)} = \begin{cases} 1 & \forall\, k \geq 0 \\ 0 & \forall\, k < 0 \end{cases} \tag{1.21}$$

En appliquant la définition on trouve :

$$E(z) = Z(e(kT_e) = Z(e_k) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots$$

$$= \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

Donc: $E(z) = Z\{e^*(t)\} = \frac{z}{z-1}$

Remarque : La série$\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}$forme une série géométrique convergente de raison$q = z^{-1}$.

Exemple 3:

Soit $\boldsymbol{r(kT_e)}$ une Rampe unité échantillonnée donnée par:

$$\mathrm{r(kT_e)} = \begin{cases} kT_e & \forall\, k \geq 0 \\ 0 & \forall\, k < 0 \end{cases} \tag{1.22}$$

En appliquant la définition on trouve :

$$R(z) = Z(R(kT_e) = Z(r_k) = \sum_{k=0}^{\infty} kT_e z^{-k} = T_e \sum_{k=0}^{\infty} kz^{-k} = zT_e \sum_{k=0}^{\infty} kz^{-k-1}$$

$$= -zT_e \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dz} z^{-k} = -zT_e \frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right) = \frac{T_e z}{(z-1)^2}$$

$$\mathrm{R(z) = Z\{r^*(t)\}} = \frac{\mathrm{T_e z}}{\mathrm{(z-1)^2}}$$

1.3.4 Quelques transformées en *z*

Le tableau suivant donne les transformées en $\boldsymbol{z}$ de quelques fonctions:

Signal causal $k \mapsto \boldsymbol{x}(\boldsymbol{k}), k \in \mathbb{N}$	**Signal causal** $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{z})$
$e(k) = 1$	$\frac{z}{z-1}$
$\begin{cases} \delta(0) = 1 \\ \delta(k) = 0 \ \ si\ k \neq 0 \end{cases}$	1
$r(k) = k$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
$d(k) = k^2$	$\frac{z(z-1)}{(z-1)^3}$
$x(k) = a^k, a \in \mathbb{R} - \{0\}$	$\frac{z}{z-a}$
$x(k) = a^k f(k), a \in \mathbb{R} - \{0\}$	$F\left(\frac{z}{a}\right)$
$x(k) = kf(k)$	$-z\frac{d}{dz}F(z)$
$x(k) = ka^k f(k)$	$-z\frac{d}{dz}F\left(\frac{z}{a}\right)$
$x(k) = y(k-n), (k-n) \in \mathbb{N}$ $\boldsymbol{Ou}$ $x(k) = y(k-n)e(k-n)$	$z^{-n}Y(z)$
$x(k) = y(k+1)$	$zY(z) - zy(0)$
$x(k) = y(k+2)$	$z^2Y(z) - z^2y(0) - zy(1)$
$x(k) = y(k+n)$	$z^nY(z) - z^ny(0) - z^{n-1}y(1) - \cdots$ $- zy(n-1)$
$sin(k\omega T_e)$	$\frac{zsin(\omega T_e)}{z^2 - 2zcos(\omega T_e) + 1}$
$cos(k\omega T_e)$	$\frac{z^2 - cos(\omega T_e)}{z^2 - 2zcos(\omega T_e) + 1}$
$e^{-akT_e}sin(k\omega T_e)$	$\frac{e^{-aT_e}zsin(\omega T_e)}{z^2 - 2e^{-aT_e}zcos(\omega T_e) + e^{-2aT_e}}$
$e^{-akT_e}cos(k\omega T_e)$	$\frac{z^2 - e^{-aT_e}cos(\omega T_e)}{z^2 - 2e^{-aT_e}zcos(\omega T_e) + e^{-2aT_e}}$
$x(0)$	$\lim_{z\to\infty} X(z)$
$y(\infty)$	$\lim_{z\to 1}[(1 - z^{-1})Y(z)]$

1.4. Transformée en Z inverse

La transformée en Z inverse permet de retrouver les échantillons du signal:

$$Z^{-1}\{X(z)\} = x(k)$$

Pour retrouver l'originale d'une fonction $\boldsymbol{X(z)}$ donnée, il existe plusieurs méthodes:

1.4.1. Méthode de Décomposition en somme de fonctions :

On décompose la fonction X(z) en en une somme des fractions rationnelles en $\boldsymbol{z}$ (éléments simples) et après en cherche dans la table de la transformée en Z leurs fonctions originales.

Soit une fonction $F(z)$ de la forme :$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$et supposons que $F(z)$ a uniquement des pôles simples réels différents de zéro.

soit $p_i, i = 1, \ldots n$, les pôles de $F(z)$.

La décomposition en éléments simples de$\frac{\boldsymbol{F(z)}}{\boldsymbol{z}}$nous permet d'écrire la transformée en $\boldsymbol{z}$ sous la forme :

$$X(z) = z\frac{N(z)}{D(z)} = A_0 + \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{z}{z - p_i}$$

Alors, en utilisant la table de transformées en $\boldsymbol{z}$, on obtient :

$$x(k) = \delta(k) + \sum_{i=1}^{n} A_i p_i^k e(k)$$

Remarque: la Méthode de Décomposition peut être utilisée lorsque la fonction $X(z)$ possède des pôles complexes ou/et des pôles multiples.

Exemple :

Déterminer la transformée en $\boldsymbol{z}$ inverse de la fonction :

$$X(z) = \frac{z^2}{z^2 - 3z + 2}$$

Solution

On a:

$$X(z) = \frac{z^2}{z^2 - 3z + 2} = \frac{z^2}{(z-1)(z-2)}$$

On décompose $\frac{X(z)}{z} = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$en éléments simples, on obtient :

$\frac{F(z)}{z} = \frac{-1}{(z-1)} + \frac{2}{(z-2)}$ donc $F(z) = \frac{-z}{z-1} + \frac{2z}{z-2}$

Donc : $x(k) = -e(k) + 2 \times 2^k e(k) = -e(k) + 2^{k+1} e(k)$

tel que : e(k) est un échelon unitaire

1.4.2. Division polynomiale

Soit $X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$, cette méthode consiste à diviser N(z) par D(z) définis en puissance positive de z pour obtenir une série en puissance décroissante de (z-1) dont les coefficients sont les valeurs x(k) recherchées.

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n} \tag{1.23}$$

$$\begin{array}{l|l} N(z) & D(z) \\ \cline{2-2} & X(z) = X(0) + X(1).z^{-1} + X(2).z^{-2} + X(3).z^{-3} + X(4).z^{-4} + \cdots .. \\ & \end{array}$$

Aprés on déduit X(0),X(1),X(2),X(3)........etc (Par identification)

Exemple :

Déterminer la transformée en z inverse de la fonction par la méthode de division polynomiale:

$$X(z) = \frac{z^2}{z^2 - 3z + 2}$$

Solution

$$\begin{array}{r|l} z^2 & z^2 - 3z + 2 \\ \cline{2-2} -z^2 + 3z - 2 & X(z) = 1 + 3.z^{-1} + 7.z^{-2} + 15.z^{-3} + \cdots + X(i).z^{-i} + \cdots \\ +3z + 2 & \\ \vdots & \\ \vdots & \end{array}$$

Par identification, on en déduit X(0)=1, X(1)=3, X(2)=7, X(3)=15........etc

Remarque: La Résolution d'équations aux différences l'aide de la transformée en Z est la suivante :

a. Appliquer la transformée en Z aux 2 membres de l'équation aux différences en x(k)

b. Calculer X(z) en utilisant les propriétés de la transformée en Z

c. Décomposer X(z) en fonctions rationnelles simples

d. Utiliser la table de transformées pour obtenir x(k) par la transformée inverse

1.5. Transformée en « z » modifiée

L'inconvénient de la transformée en Z est le manque d'information sur les valeurs prises par $x(t)$ entre les instants d'échantillonnage. Pour remédier a ce problème L'utilisation de la transformée en **z** modifiée $Z_m x(t)$ est indispensable et en plus cette dernière technique reste le seul moyen pour calculer la transformée en **z** d'un signal retardé.

La transformée en **z** modifiée de $x(t)$, est une transformée en **z** de $x(t-(1-m)T)$, avec $m \in [0,1]$.

L'expression de $Z_m x(t)$ peut être calculée en utilisant l'une des deux méthodes suivantes :

a) la série :

$$\mathrm{Z_m x(t) = Z[x(t-(1-m)T_e)] = z^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} x\,((k+m)T_e z^{-k}} \tag{1.24}$$

b) ***la méthode des résidus***

$$Z_m x(t) = Z[x(t-(1-m)T_e)] = z^{-1} \sum_{p_i} \left[\text{résidus de } \frac{X(p)e^{mpT_e}}{1-e^{pT_e}z^{-1}}\right]_{p=p_i} \tag{1.25}$$

Tel que : p_i sont les pôles de la fonction $X(p)$et $X(p) = TL(x(t))$

1.5.1. Exemple

Soit $f(t) = e^{-at}.\varepsilon(t) \Rightarrow F(p) = \frac{1}{p+a}$. Calculons le transformée en **z**modifiée $Z_m f(t)$.

$$Z_m f(t) = z^{-1} \sum_{p_i} \left[\text{résidus de } \frac{F(p)e^{mpT_e}}{1-e^{T_e p}z^{-1}}\right]_{p=p_i}$$

$$= z^{-1}.\,Résidu_{de\ \text{pôle}\ p=-a}\ \ de\ \left[\frac{\left(\frac{1}{p+a}\right)e^{mpT_e}}{1-e^{T_e p}z^{-1}}\right]$$

$$= z^{-1}\left[\frac{e^{-maT_e}}{(1-e^{-aT_e}z^{-1})}\right] = \frac{e^{-maT_e}}{(z-e^{-aT_e})}$$

1.5.1. Propriétés de la transformée en z modifiée

a) Linéarité

$$Z_m\{\alpha.x(t)+\beta.y(t)\}=\alpha.Z_m x(t)+\beta.Z_m y(t) \qquad (1.26)$$

b) Translation complexe

$$Z_m X(p+a)=e^{-aT_e(m-1)}X(ze^{aT_e}) \qquad (1.27\ )$$

c) Théorème de valeur initiale

$$x(0)=\lim_{\substack{k\to 0\\ m\to 0}} x_m(kT_e)=\lim_{\substack{z\mapsto\infty\\ m\to 0}} X_m(z) \qquad (1.28)$$

d) Théorème de valeur finale

$$x(\infty)=\lim_{k\mapsto\infty} x_m(kT_e)=\lim_{z\mapsto 1} X_m(z) \qquad (1.29)$$

1.6. Fonction de transfert échantillonnée

l'analyse d'un système commandé par calculateur numérique passe par la définition d'un système à temps discret, comprenant le procédé commandé de nature généralement continue, et les convertisseurs analogique-numérique et numérique analogique, que l'on peut respectivement assimiler au bloqueur d'ordre zéro et à l'échantillonneur, selon le schéma de la figure 1.7.

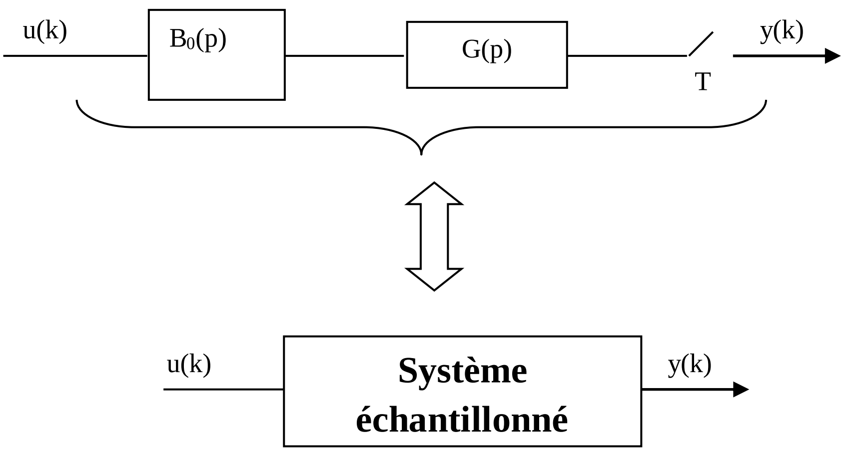


Figure 1.7 Système échantillonné

La fonction de transfert en z de système échantillonné suivant le schéma de la figure est donnée par:

$$G(z) = \left(\frac{z-1}{z}\right)\boldsymbol{Z}\ \left[\frac{G(p)}{p}\right] \qquad (1.30)$$

Démonstration:

$$G(z) = Z[B_0(p).G(p)] = Z\left[\frac{1-e^{-Tp}}{p}.G(p)\right]$$

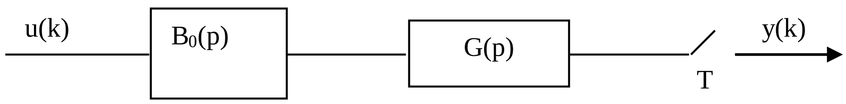
$G(z) = (1 - z^{-1})\boldsymbol{Z}\left[\frac{G(p)}{p}\right]$ avec $z=e^{Tp}$

Donc:

$$G(z) = \left(\frac{z-1}{z}\right)\boldsymbol{Z}\left[\frac{G(p)}{p}\right]$$

Exemple

Soit un système échantillonné représenté par la figure suivante :



Avec $G(p) = \frac{1}{p(p+1)}$

La fonction de transfert échantillonnée est:

$$G(z) = Z[B_0(p).G(p)] = \left(\frac{z-1}{z}\right)\boldsymbol{Z}\left[\frac{G(p)}{p}\right]$$

En faisant la décomposition en éléments simples :

$$\frac{G(p)}{p} = \frac{1}{p^2(p+1)} = \frac{-1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p+1}$$

En utilisant la table des transformée, on trouve:

$$G(z) = \left(\frac{z-1}{z}\right)\left[-\frac{z}{z-1} + \frac{T_e z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-e^{-T_e}}\right] = \frac{k(z-b)}{(z-1)(z-a)}$$

$$Avec\text{: } k = e^{-T_e} - 1 + T_e, a = e^{-T_e}, b = 1 - \frac{T_e(1-e^{-T_e})}{e^{-T_e} - 1 + T_e}$$

$Si\ \ T_e = 1s$ alors :

$$G(z) = \frac{0.3679(z+0.7183)}{(z-1)(z-0.3679)}$$

1.7.Fonction de transfert et équation récurrente

En général la forme de l'équation récurrente linéaire est donnée par :

$$a_n.s(k+n)+a_{n-1}.s(k+n-1)+\cdots+a_1.s(k+1)+a_0.s(k)=b_m.e(k+m)+$$
$$b_{m-1}.e(k+m-1)+\cdots+b_1\,e(k+1)+a_0\,e(k) \qquad (1.31)$$

Avec: n est appelé l'ordre du système.

e(i): Les entrées de système, (i=1....m)

s(j): Les entrées de système, (j=1....n)

b_i : Les coefficients des entrées , (i=1....m)

a_j : Les coefficients des entrées , (j=1....n)

En faisant la transformée en z l'équation (1.29) devient :

$$(a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0)S(z)=(b_mz^m+b_{m-1}z^{m-1}+\cdots+b_1z+b_0)E(z)$$

Donc la fonction de transfert $H(z)$ du système est :

$$H(z)=\frac{S(z)}{E(z)}=\frac{N(z)}{D(z)}=\frac{b_mz^m+b_{m-1}z^{m-1}+\cdots+b_1z+b_0}{a_nzp^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0}=\frac{\sum_{j=0}^{m}b_iz^j}{\sum_{i=0}^{n}a_iz^i} \qquad (1.32)$$

Remarque: Si les conditions initiales ne sont pas nulles la représentation en Z du système est donnée par :

$$S(z)=\frac{N(z)}{D(z)}E(z)+\frac{I(z)}{D(z)}$$

Avec $I(z)$: est un polynôme qui dépend des conditions initiales.

La forme pôles, zéros, gain est obtenue en faisant la factorisation du numérateur et du dénominateur, alors:

$$H(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=\frac{b_m(z-z_1)(z-z_2)\ldots\ldots.(z-z_m)}{a_n(z-p_1)(z-p_2)\ldots\ldots.(z-p_n)}$$

$$H(z)=\frac{\sum_{i=0}^{m}b_iz^j}{\sum_{i=0}^{n}a_iz^i}=K\frac{\prod_{j=0}^{m}(z-z_j)}{\prod_{i=0}^{n}(z-p_i)} \qquad Avec\ K=\frac{b_m}{a_m}$$

Avec: z_i (i=1....m) sont les **zéros** de la fonction de transfert $H(z)$.

p_i (i=1....n) sont les **pôles** de la fonction de transfert $H(z)$.

Exemple

Soit l'équation récurrente $s(k) = e(k) - 0.6.e(k-1) - 0.7s(k-1)$

La transformée en Z de cette dernière est :

$$S(z) = E(z) - 0.6.z^{-1}E(z) - 0,7z^{-1}S(z)$$

Donc:

$$H(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{z-0.6}{z+0,7}$$

1.8.Transformation bilinéaire d'un transfert échantillonné

La transformation bilinéaire consiste à remplacer la variable complexe de Laplace p par une autre fonction en Z:

$p \approx \frac{2(1-z^{-1})}{T_e(1+z^{-1})}$, avec Te : la période d'échantillonnage.

Cette transformation est appelée une transformation trapézoïdale ou de Tustin.

Donc la fonction de transfert discrète sera calculée comme suit :

$$\boldsymbol{G(z) = G(p)|_{p=\frac{2(1-z^{-1})}{T_e(1+z^{-1})}}} \tag{1.33}$$

Exemple

Soit un système continu suivant :

$$G(p) = \frac{5}{p+3}$$

En appliquant la transformation bilinéaire, ce système sera discrétisé comme suit :

$$G(z) = G(p)|_{p=\frac{2(1-z^{-1})}{T_e(1+z^{-1})}} = \frac{10}{p+10}\bigg|_{p=\frac{2(1-z^{-1})}{T_e(1+z^{-1})}}$$

$$G(z) = \frac{5}{\frac{2(1-z^{-1})}{T_e(1+z^{-1})}+3} = \frac{5}{\frac{2(z-1)}{T_e(z+1)}+3}$$

Donc :

$$G(z) = \frac{5.T_e(z+1)}{2(z-1)+3T_e(z+1)}$$

1.9.Exercices Corrigées

Exercice N°1 :

Soient les signaux suivants:

- L'échelon : $\mathrm{e(k)} = \begin{cases} 5 \text{ si } \mathrm{k} \in \mathrm{N} \\ 0 \text{ Ailleurs} \end{cases}$ - La rampe : $\mathrm{r(k)} = \begin{cases} \mathrm{k} \text{ si } \mathrm{k} \in \mathrm{N} \\ 0 \text{ Ailleurs} \end{cases}$

- Calculer la transformée en Z du signal x(k) Suivant :

$$\mathrm{x(k)} = 4.\mathrm{e(k)} + 3.\mathrm{r(k)}$$

Solution:

- Calcul de la transformée en Z du signal x(k):

En appliquant la définition on trouve :

$$E(z) = Z(e(kT_e) = Z(e_k) = 5\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = 5\ (1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots)$$

$$= \frac{5}{1 - z^{-1}} = \frac{5.z}{z - 1}$$

En appliquant la définition de la TZ ,on trouve :

$$R(z) = Z(R(k)) = \sum_{k=0}^{\infty} k.z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} kz^{-k} = z\sum_{k=0}^{\infty} kz^{-k-1}$$

$$= -z\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dz} z^{-k} = -z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right) = \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$\mathrm{R(z)} = \frac{\mathrm{z}}{(\mathrm{z}-1)^2}$$

Nous avons $\mathrm{x(k)} = 4.\mathrm{e(k)} + 3.\mathrm{r(k)}$

$$X(z) = Z(x(k)) = Z\big(4.\mathrm{e(k)} + 3.\mathrm{r(k)}\big) = 20.\frac{z}{z-1} + 3.\frac{\mathrm{z}}{(\mathrm{z}-1)^2}$$

Exercice N°2 :

On considère le système régi par l'équation récurrente suivante :

$$y(k+2) + 0.6\ y(k+1) + 0.05\,y(k) = 3.u(k)$$

1) Déterminer la fonction de transfert H(z)=Y(z) / U(z) ?
2) Etudier la stabilité ?
3) Calculer la réponse impulsionnelle ?
4) Calculer la réponse indicielle ?

Solution:

1) Nous avons:

$$y(k+2) + 0.6\ y(k+1) + 0.05\,y(k) = 3.u(k)$$

En faisant la transformée en Z:

$$z^2 Y(z) + 0.6\,.Z.Y(z) + 0.05\ Y(z) = 3.U(z)$$

donc

$$H(z) = \frac{3}{z^2 + 0.6\,z + 0.05}$$

2) Etude de stabilité:

$$H(z) = \frac{3}{(z+0.5).(z+0.1)}$$

$z_1 + 0.5 = 0 \rightarrow z_1 = -0.5$ et $z_2 + 0.1 = 0 \rightarrow z_2 = -0.1$

$|z_1| = 0.5 < 1\ et\ |z_2| = 0.1 < 1$ donc le système est stable.

3) Calcul de la réponse impulsionnelle:

$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{3}{(z+0.5).(z+0.1)}$ et U(z)=1

Alors

$Y(z) = \frac{3}{(z+0.5).(z+0.1)}.1$

En utilisant la décomposition en élément simple:

$$Y(z) = 60 + \frac{15\,z}{(z+0.5)} - 75\frac{z}{(z+0.1)}$$

Donc: $y(k) = 60\,.\delta(k) + 15.(-0.5)^k - 75.(-0.1)^k$

4) Calcul de la réponse indicielle:

$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{3}{(z+0.5).(z+0.1)}$ et $U(z) = \frac{z}{z-1}$

Alors

$$Y(z) = \frac{3}{(z+0.5).(z+0.1)}.\frac{z}{z-1}$$

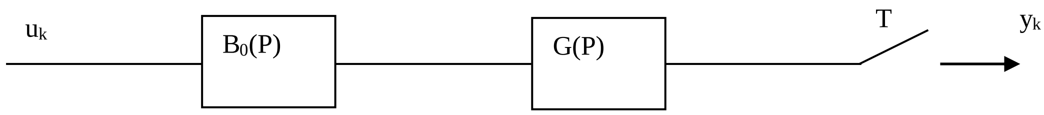
En utilisant la décomposition en élément simple:

$$Y(z) = \frac{5\,z}{(z+0.5)} - 6.82\frac{z}{(z+0.1)} + 1.82\frac{z}{(z-1)}$$

Donc: $y(k) = 5.(-0.5)^k - 6.82.(-0.1)^k + 1.82$

Exercice N°3 :

Soit le système échantillonné représenté par la figure suivante :



Tel que : $\boldsymbol{G(P)} = \frac{\mathbf{3}}{\boldsymbol{p+7}}$, T=1 s

1) Démontrer que la fonction de transfert du bloqueur d'ordre zéro est $\boldsymbol{B_0(P)} = \frac{\mathbf{1}-\boldsymbol{e^{-pT}}}{\boldsymbol{p}}$?
2) Déterminer la fonction de transfert échantillonné $G_e(z)$?
3) Comparer entre G(z) et la fonction de transfert échantillonné $G_e(z)$?
4) Trouver la valeur initiale et finale de g(k) ?

Solution:

1) $b_0(t) = e(t) - e(t-T)$

$$B_0(p) = E(p) - e^{-Tp}E(p) = \frac{1}{p} - e^{-Tp}\frac{1}{p} = \frac{1-e^{-Tp}}{p}$$

2) $G_e(z) = \frac{z-1}{z}\,TZ\left\{\frac{G(p)}{p}\right\} = \frac{z-1}{z}TZ\left\{\frac{3}{p(p+7)}\right\} = \frac{3(z-1)}{7.z}TZ\left\{\frac{7}{p(p+7)}\right\} = \frac{3(z-1)}{7.z}\frac{z(1-e^{-7})}{(z-1)(z-e^{-7})}$

$$G_e(z) = \frac{3}{7.}\frac{(1-e^{-7})}{(z-e^{-7})}$$

3)

$\mathrm{G(z)} = \mathrm{TZ}\left\{\frac{3}{\mathrm{p+7}}\right\} = 3\,\frac{\mathrm{z}}{(\mathrm{z}-\mathrm{e}^{-7})}$ et $G_e(z) = \frac{3}{7.}\frac{(1-e^{-7})}{(z-e^{-7})}$

Donc $G_e(z) \neq G(z)$

4)

La valeur initiale:

$$g(0) = \lim_{k\to 0}\{g(k)\} = \lim_{z\to+\infty}\{G(z)\} = \lim_{z\to+\infty} 3\,\frac{z}{(z-e^{-7})} = 3$$

La valeur Finale: $g(\infty) = \lim_{t\to\infty}\{g(t)\} = \lim_{z\to 0}\left\{\left(\frac{z-1}{z}\right)G(z)\right\} = \lim_{z\to 0}\left\{\left(\frac{z-1}{z}\right)3\,\frac{z}{(z-e^{-7})}\right\} = 0$

Chapitre II

Analyse des systèmes échantillonnés dans l'espace d'état

2.1 Introduction

Dans la modélisation des systèmes discrets il existe trois formes de modèles qui sont :la fonction de transfert; l'équation aux différences et la représentation d'état.

Deux approches sont souvent utilisées pour avoir la représentation d'état des systèmes discrets : la représentation directe par analogie avec la représentation d'état en temps continu et la méthode de discrétisation des équations d'état d'un système continu. mais la première approche est très privilégiée car elle permet de généraliser très rapidement les propriétés démontrées aux systèmes continus.

2.2. Discrétisation d'un d'un système continu

2.2.1.Equations d'états

Soit la représentation d'état d'un système continu suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = C\,x(t) + D\,u(t) \end{cases} \tag{2.1}$$

Avec :

u(t) est l'entrée du système (commande), x(t) est un vecteur d'état, y(t) est un vecteur de sortie, A est une matrice d'état, B vecteur colonne d'entrée et C est un vecteur ligne de sortie.

Dans la discrétisation des systèmes continu , l'utilisation des Convertisseurs Analogique Numérique (CAN) et des Convertisseurs Numérique Analogique (CNA) est indispensable pour effectuer une transformation des signaux continus aux signaux discret ou bien le contraire.

La figure 2.1 montre une discrétisation d'un système continu en utilisant les convertisseurs CAN et CNA:

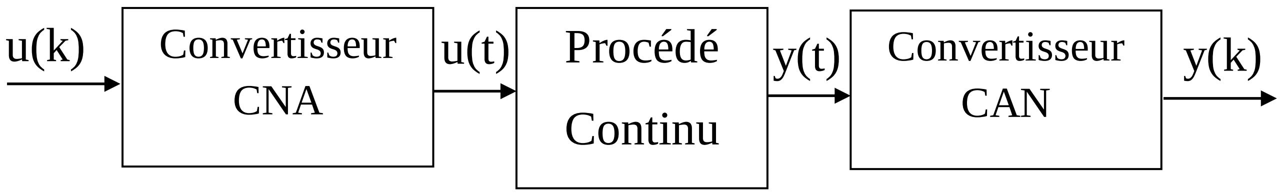


Figure.2.1 : Discrétisation d'un procédé continu

La forme générale d'un système discret est :

$$\begin{cases} x(k+1) = A\,x(k) + B\,u(k) \\ y(t) = C\,x(k) + D\,u(k) \end{cases} \tag{2.2}$$

Avec : A est une a matrice carrée de commande, **B** est un vecteur colonne et **C** est un vecteur ligne.

2.2.2. Représentation et résolution de l'équation d'état d'un système discret

Soit un système continu suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = C\,x(t) + D\,u(t) \end{cases}$$

La solution du ce système s'écrit:

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}B\,u(\tau)d\tau \tag{2.3}$$

$$y(t) = C\,x(t) + D\,u(t) \tag{2.4}$$

Le signal de commande discret s'écrit:

$u(k) = u(t), \forall\, t \in [kT_e, (k+1)T_e]$ Avec Te : la période d'échantillonnage alors on peut facilement calculer la solution d'état aux différents instants d'échantillonnage comme suit:

$$x[(k+1)T_e] = e^{AT_e}\, x(kT_e) + \int_0^{T_e} e^{A(T_e-\tau)} B\, u(\tau) d\tau$$

$$x[(k+1)T_e] = e^{AT_e}\, x(kT_e) + \int_0^{T_e} e^{A(T_e-\tau)} d\tau \;\; B\, u(k)$$

$$x[(k+1)T_e] = e^{AT_e}\, x(kT_e) + [A^{-1}(e^{AT_e} - I)]B\, u(k)$$

Donc:

$$\begin{cases} \mathrm{x(k+1) = F\,x(k) + G\,u(k)} \\ \mathrm{y(t) = C\,x(k) + D\,u(k)} \end{cases} \qquad (2.5)$$

avec $F = e^{AT_e}$, $G = A^{-1}(e^{AT_e} - I)B$

2.3. Stabilité d'un système discret

2.3.1 Stabilité BIBO des systèmes

Soit un système discret H(z) tel que:

$$\mathrm{H(z)} = \frac{\mathrm{N(z)}}{\mathrm{D(z)}} = \frac{\mathrm{b_m(z-z_1)(z-z_2).......(z-z_m)}}{\mathrm{a_n(z-zp_1)(z-zp_2).......(z-zp_n)}} \qquad (2.6)$$

et soient z_{pi} les pôles de ce dernier avec i=1...n, alors le système est stable si $|z_{pi}| < 1, \forall\, i$

Exemple 1:

Soit le système décrit par la fonction de transfert :

$$\mathrm{H_1(z)} = \frac{10}{\mathrm{(z-0.2)(z-0.7)(z-0.9)}}$$

$|z_{p1}| = 0.2 < 1$, $|z_{p2}| = 0.7 < 1$ et $|z_{p2}| = 0.9 < 1$ alors le système $H_1(z)$ est stable (car Les pôles sont de module inférieur à 1)

Exemple 2

Soit le système $H_2(z)$ donné par la fonction de transfert :

$$H_2(z) = \frac{13}{(z-3)(z-5)}$$

$H_2(z)$ est instable car Le pôle $|z_{p1}| = 3 > 1$

2.3.2 Critère de Jury

Le Schéma général d'un système échantillonné asservi est donné par la Figure 2.2 suivante:.

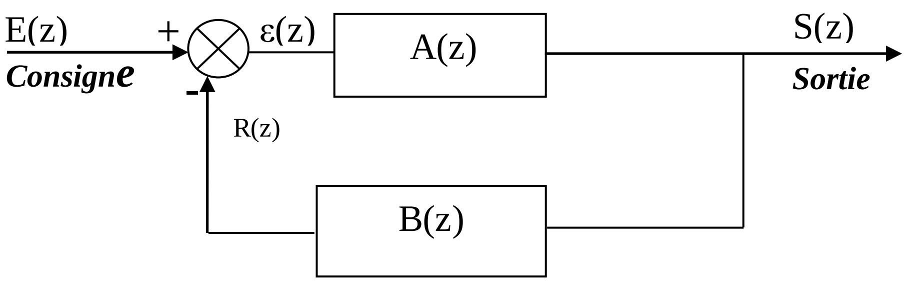


Figure.2.2 : Système échantillonné asservi.

Avec A(z) est la Chaîne Directe et B(z) est la Chaîne de retour

La FTBF (Fonction de Transfert en Boucle Fermée) du système est:

$$\mathrm{FTBF} = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{\mathrm{FTCD}}{1+\mathrm{FTBO}} = \frac{A(z)}{1+A(z).B(z)} \qquad (2.7)$$

Tel que:

FTCD: Fonction de Transfert de la Chaîne Directe

FTBO: Fonction de Transfert de la Boucle Fermée

Soit le polynôme caractéristique suivant :

$$P(z) = 1 + A(z).B(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots .. + a_1 z + a_0 \tag{2.8}$$

A partir de la connaissance du polynôme caractéristique $P(z)$, il est possible d'évaluer la stabilité d'un système sans en calculer les racines en utilisant critère de Jury.

Théorème : Un système linéaire discret est asymptotiquement stable si et seulement si les coefficients de son polynôme caractéristique vérifient les relations Suivante:

.

$$n = 2: \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 > 0 \\ a_0 - a_1 + a_2 > 0 \\ a_2 - a_0 > 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

$$n = 3: \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 > 0 \\ -a_0 + a_1 - a_2 + a_3 > 0 \\ a_3 - |a_0| > 0 \\ a_0 a_2 - a_1 a_3 - {a_0}^2 + {a_3}^2 > 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

$$n = 4: \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 > 0 \\ a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 > 0 \\ {a_4}^2 - {a_0}^2 - |a_0 a_3 - a_1 a_4| > 0 \\ (a_0 - a_4)^2 \, (a_0 - a_2 \; + a_4) + (a_1 - a_3)(a_0 a_3 - a_1 a_4) > 0 \end{cases} \tag{2.11}$$

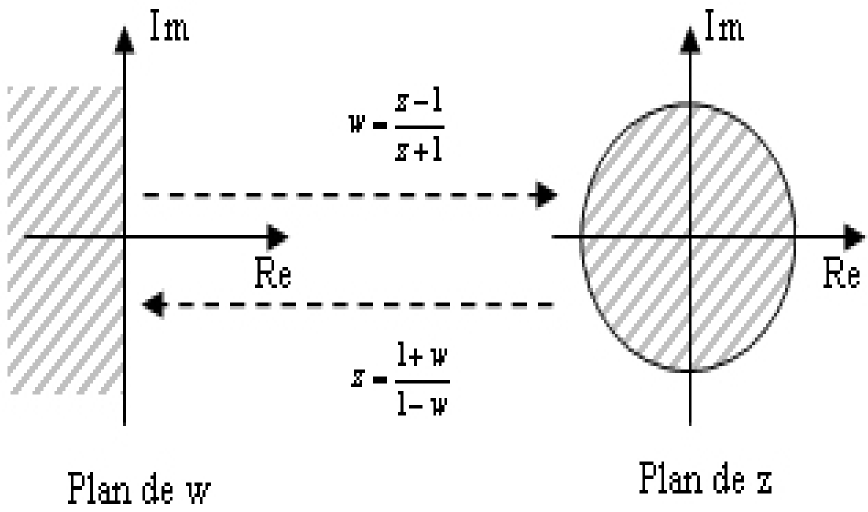
Remarques:

- Les ordres supérieurs peuvent être générés facilement mais sont fastidieux.
- Pour Simplifier on suppose que $a_n > 0$ et dans le cas contraire il suffit de multiplier tous les coefficients par -1.

2.3. 3 Critère de Routh

Le critère de Routh-Hurwitz est basé sur le passage d'un plan en z vers un autre plan en w par l'utilisation de la transformée bilinéaire suivante:

$$z = \frac{1+w}{1-w}$$



Donc on obtient un polynôme caractéristique (dénominateur de la fonction de transfert) en w suivant:

$$D(w) = a_n w^n + a_{n-1} w^{n-1} + \cdots + a_1 w + a_0 \qquad (2.12)$$

D(w) possède toutes ses racines à partie réelle négative si :

− Tous les coefficients $a_i \neq 0$ sont de même signe, $\forall i$(i=1...n).

−Tous les termes de la première colonne du tableau de ROUTH sont de même signe.

Formons le tableau de ROUTH :

w^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}
w^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	7
w^{n-2}	c_1	c_2	c_3	c_4
w^{n-3}	d_1	d_2	……	……
w^{n-4}	e_1	……	……	……
……	……	……	……	……
w^1	……	……	……	……
w^0	……	……	……	……

Avec:

$$c_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$
$$c_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$
$$d_1 = \frac{c_1 a_{n-3} - c_2 a_{n-1}}{c_1}$$
$$d_2 = \frac{c_1 a_{n-5} - c_3 a_{n-1}}{c_1}$$

Exemple

Soit un système $H(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$ dont le dominateur est :

$$D(z) = z^2 + (0{,}37K - 1{,}37)z + 0{,}37 + 0{,}26K$$

Pour étudier la stabilité par le critère de ROUTH, nous transformons $D(z)$ en $D(w)$.

Après remplacement $z = \frac{1+w}{1-w}$, nous trouverons :

$$D(w) = (2{,}74 - 0{,}11K)w^2 + (1{,}26 - 0{,}52K) + 0{,}63K$$

D(w) possède toutes ses racines à partie réelle négative si :

- Tous les coefficients $a_i \neq 0$ (i=1..3) sont de même signe, c'est à dire:

$$2{,}74 - 0{,}11K \Rightarrow K < \frac{2{,}74}{0.11} = 24{,}9$$

$$1{,}26 - 0{,}52K \Rightarrow K < \frac{1{,}26}{0.52} = 2{,}42$$

$$0{,}63K \Rightarrow K > 0$$

Formons le tableau de ROUTH :

w^2	$2{,}74 - 0{,}11K$	$0{,}63K$
w^1	$1{,}26 - 0{,}52K$	0
w^0	$0{,}63K$	0

En utilisant la première colonne de tableau précédent :

$$2,74 - 0,11K \Rightarrow K < \frac{2,74}{0.11} = 24,9$$

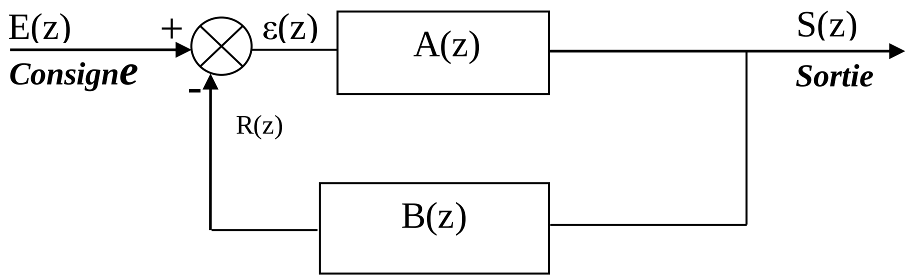
$$1,26 - 0,52K \Rightarrow K < \frac{1,26}{0.52} = 2,42$$

$$0,63K \Rightarrow K > 0$$

Donc le Système est stable si $0 < K < 2,42$

2.4. précision d'un système discret

Soit le d'un système échantillonné:



Calcul de l'erreur statique :

D'aprés le schéma précédent: $\varepsilon(z) = E(z) - R(z)$

On a $R(z) = S(z).B(z)$, $S(z) = \varepsilon(z).A(z)$

$$\varepsilon(z) = E(z) - \varepsilon(z).A(z).B(z)$$

Donc:

$$\varepsilon(z) = \frac{E(z)}{1+A(z).B(z)} \tag{2.13}$$

Et en utilisant le théorème de la valeur finale, l' erreur statique ε_s sera calculée de la manière suivante :

$$\varepsilon_s = \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{n\to\infty} \varepsilon(nT) = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{E(z)}{1+A(z).B(z)} \tag{2.14}$$

Il est intéressant d'introduire la notion de constante d'erreur Pour pouvoir calculer l' erreur statique ε_s qui liée à l'ordre de l'entrée utilisée.
Soient les entrées-test classiques de la forme suivante :

$$e(t) = e_0 \frac{t^m}{m!} \Gamma(t) \tag{2.15}$$

- Si m = 0 : Echelon de position

$$\mathrm{e_p(z)} = \mathrm{e_0} . \frac{\mathrm{z}}{\mathrm{z}-1}$$

$$\varepsilon_\mathrm{p}(\infty) = \lim_{z\to1}(z-1)\, e_0 . \frac{z}{z-1}\, \frac{1}{1+A(z).B(z)} = \lim_{z\to1} \frac{e_0\, z}{1+A(z).B(z)} = \frac{e_0}{k_p}$$

Avec $k_p = \lim_{z\to1}(1+A(z).B(z))$

Telle que k_p: La constante d'erreur de position

- Si m = 1: Echelon de vitesse

$$\mathrm{e_v(z)} = \mathrm{e_0} . \frac{\mathrm{T\,z}}{(\mathrm{z}-1)^2}$$

$$\varepsilon_\mathrm{v}(\infty) = \lim_{z\to1}(\mathrm{z}-1)\, \mathrm{e_0} . \frac{\mathrm{T\,z}}{(\mathrm{z}-1)^2}\, \frac{1}{1+\mathrm{A(z).B(z)}} = \lim_{z\to1} \frac{\mathrm{e_0\, T\, z}}{(\mathrm{z}-1)(1+\mathrm{A(z).B(z)})} = \frac{\mathrm{e_0}}{\mathrm{k_v}}$$

Avec $k_v = \lim_{z\to1}(\boldsymbol{z}-\mathbf{1})[1+A(z).B(z)]$

Telle que k_v: La constante d'erreur de vitesse.

- Si m = 2: Echelon d'accélération

$$\mathrm{e_a(z)} = \mathrm{e_0} . \frac{\mathrm{T^2\, z\, (z+1)}}{2\,(\mathrm{z}-1)^3}$$

$$\varepsilon_\mathrm{a}(\infty) = \lim_{z\to1}(z-1)\, e_0 . \frac{T^2\, z\,(z+1)}{2\,(z-1)^3}\, \frac{1}{1+A(z).B(z)} = \frac{e_0\, T^2}{k_a}$$

Avec $k_a = \lim_{z\to1}(\boldsymbol{z}-\mathbf{1})^2[1+A(z).B(z)]$

Telle que k_a: Constante d'erreur d'accélération

- Si l'entrée est d'ordre m quelconque

Soit $e_m(t)$ suivante:

$$e_m(t) = e_0 \frac{t^m}{m!} \Gamma(t)$$

Cette entrée correspond à l'erreur ε_m :

$$\varepsilon_m(\infty) = \frac{e_0 \, T^m}{k_m}$$

Avec : $k_m = \lim_{z \to 1} (\boldsymbol{z} - \mathbf{1})^{\boldsymbol{m}} [1 + A(z).B(z)]$

Telle que k_m: Constante d'erreur

Evaluation de l'erreur statique

La fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) du système étudié est donnée par:

$$FTBO(z) = A(z).B(z) = \frac{K.P(z)}{(\boldsymbol{z}-\mathbf{1})^{\boldsymbol{n}} \, \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{z})} \qquad (2.16)$$

Avec : n est l'ordre du système, P(z) et Q(z) sont des polynômes en z qui ne possèdent pas de racines égales à 1.

La valeur de la constante d'erreur dépend des valeurs relatives de m et de n.

- si m = n (cas particulier):

$$k_m = \lim_{z \to 1} (\boldsymbol{z} - \mathbf{1})^{\boldsymbol{m}} [1 + \frac{K.P(z)}{(\boldsymbol{z}-\mathbf{1})^{\boldsymbol{m}} \, \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{z})}] \qquad (2.17)$$

Le tableau d'erreurs statiques illustre les différentes erreurs statique Selon l'ordre de l'entrée appliquée au système et le nombre de pôles égaux à 1 :

Ordre m de l'entrée / Nbre de Pole (z=1) de $FTBO(z)$	$\boldsymbol{\varepsilon_p}$ **0**	$\boldsymbol{\varepsilon_v}$ **1**	$\boldsymbol{\varepsilon_a}$ **2**	$\boldsymbol{\varepsilon_j}$ **j**
0	$\frac{\boldsymbol{e_0}}{k_p}$	∞	∞	∞
1	0	$\frac{\boldsymbol{e_0 T}}{k_v}$	∞	∞
2	0	0	$\frac{\boldsymbol{e_0\, T^2}}{k_a}$	∞
3	0	0	0	$\frac{\boldsymbol{e_0\, T^3}}{k_j}$

Remarques:

- Si m=n, l'erreur est d'autant plus faible que la constante d'erreur est plus élevée.
- si la fonction de transfert en boucle ouverte du système possède au moins (m+1) pôles égaux à 1,on peut obtenir une précision parfaite.

2.5. Notions de gouvernabilité et d'observabilité

2.5.1.Gouvernabilité

L'objectif principale lors de la commande d'un système quelconque est d'améliorer les performances de ce dernier (stabilité, rapidité et la précision).

La commandabilité consiste à déterminer le signal de commande $e(t)$, pour amener le système de l'état initial $\mathbf{x}(t_1)$ vers un état final $\mathbf{x}(t_2)$ souhaité, entre deux instants donnés, t_1 et t_2.

- Critère de commandabilité

On dit qu'un système est complètement accessible et commandable si et seulement si les vecteurs: B , AB, A^2B , . . . , $A^{n-1}B$ sont linéairement indépendants.
On définit la matrice de commandabilité C suivante :

$$C=[\ B\ ,\ AB, A^2B\ ,\ .\ .\ .\ , A^{n-1}B] \tag{2.18}$$

C est une matrice formée des *n* vecteurs colonnes

Le système est complètement commandable si et seulement si la matrice C est régulière (son déterminant n'est pas nul).

2.5.2.Observabilité d'état d'un Système

Définition

On dit qu'un système est observable à un instant k_1Te, si on peut calculer l'état du système à l'instant k_1Te en connaissant le signal d'entrée et le signal de sortie sur un intervalle temporel $[k_1Te, k_2Te]$.
On dit qu'un système est complètement observable Si ce dernier est observable quel que soit l'instant k_1Te.

Critère d'observabilité

On dit qu'un système est complètement observable si et seulement si les vecteurs colonnes :
$\mathbf{C}^T$, $\mathbf{A}^T\mathbf{C}^T$, $[\mathbf{A}^T]^2\mathbf{C}^T$, . . . , $[\mathbf{A}^T]^{n-1}\mathbf{C}^T$ sont linéairement indépendants.

On définit la matrice d'observabilité Ob de la manière suivante:

$$\mathrm{Ob} = [\ C^T, A^TC^T, [A^T]^2C^T, \dots\dots\dots.., [A^T]^{n-1}C^T\ ] \tag{2.19}$$

La matrice Ob est une matrice formée des n vecteurs colonnes

On dit qu'un système est complètement observable si et seulement si le déterminant de la matrice d'observabilité n'est pas nul (Ob est une matrice régulière).

Exemple 1

Soit in système discret donnée par les équations d'états suivante :

$$\begin{cases} x(k+1) = A\,x(k) + B\,u(k) \\ y(t) = C\,x(k) + D\,u(k) \end{cases}$$

Avec: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, C = (2 \quad 1)$

En général, La matrice d'observabilité est :

$$Ob = [\ C^T, A^T C^T, [A^T]^2 C^T, \dots \dots \dots .., [A^T]^{n-1} C^T\ ]$$

Dans notre cas n=2 alors $Ob = [\ C^T, A^T C^T\ ]$

$C^T = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ $Et\ A^T C^T = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$

Donc La matrice d'observabilité devienne: $Ob = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$

Le système est donc complètement observable car $Det(Ob) = 11 \neq 0.$

Exemple 2

Soit in système discret donnée par les équations d'états suivante :

$$\begin{cases} x(k+1) = A\,x(k) + B\,u(k) \\ y(t) = C\,x(k) + D\,u(k) \end{cases}$$

$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, C = (1 \quad -1)$

En général, La matrice d'observabilité est définie par :

$$Ob = [\ C^T, A^T C^T, [A^T]^2 C^T, \dots \dots \dots .., [A^T]^{n-1} C^T\ ]$$

Dans notre cas n=2 alors $Ob = [\ C^T, A^T C^T\ ]$

Donc La matrice d'observabilité devienne: $Ob = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

Le système est donc complètement observable car $Det(Ob) = -1 \neq 0.$

2.6.Exercices Corrigées

Exercice N° 1:

Soit le système discret donné par la fonction F(z) suivante :

$$\boldsymbol{F(z)} = \frac{\mathbf{4\,z - 2}}{\mathbf{4z^3 + (4K-8)z^2 + (5-4K)z + (3K-1)}}$$

- En utilisant le critère de Jury , Etudier en fonction du paramètre *K* la stabilité de système F(z).

Solution :

L'ordre du système est n=3donc le critère de Jury est :

$$n = 3: \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 > 0 \\ -a_0 + a_1 - a_2 + a_3 > 0 \\ a_3 - |a_0| > 0 \\ a_0 a_2 - a_1 a_3 - {a_0}^2 + {a_3}^2 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3K > 0 \\ K < \dfrac{18}{11} \\ 4 - |3K-1| > 0 \quad donc\ -1 < K < \dfrac{5}{3} \\ 3(K-1)^2 > 0 \end{cases}$$

En utilisant l'intersection des intervalles de la variable K,on trouve que le système est stable si :

$$K =]0,1[\, \cup \,]1, 18/11[$$

Remarque: Si K=0,K=1 ou K=18/11 on dit le système F(z) est à la limite de stabilité

Exercice N° 2:

Soit un système F(z) décrit par :

$$F(z) = \frac{S(P)}{E(P)} = \frac{A(P)}{1 + A(P).B(P)} = \frac{1}{\mathrm{P}^3 + 3\mathrm{P}^2 + 3\mathrm{P} + 1 + \mathrm{K}}$$

En utilisant le critère de ROUTH –Hurwitz, Pour quelle valeur de K le système est stable ?

Solution :

- critère d'Hurwitz : $1 + K > 0 \rightarrow K > -1$
- critère de Routh-Hurwitz : utilisation du tableau de Routh

p^3 :	1	3
p^2 :	3	1+K
p^1 :	$\dfrac{9-(1+K)}{3}$	
p^0 :	1+K	

Les conditions pour avoir la stabilité du système F(z) sont :

$$\begin{cases} \dfrac{9-(1+K)}{3} > 0 \\ 1+K > 0 \end{cases}$$

Donc le système est stable si $K \in$: $-1 < K < 8$ (condition nécessaire et suffisante de stabilité

Remarques :

- Si K = -1 ou K = 8, le système est à la limite de stabilité (système oscillant
- .K < -1, il existe un seul changement de signe dans la 1ère colonne (un seul pôle instable).
- K > 8, existence deux pôles instables (deux changement de signe dans la 1ère colonne).

Exercice N°3:

I) Considérons un système régi par les équations :

$$\begin{cases} \mathrm{x(k+1) = A\,x(k) + B\,u(k)} \\ \mathrm{y(t) = C\,x(k) + D\,u(k)} \end{cases} \qquad (1)$$

$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, C = (1 \quad -1)$

- Etudier l'observabilité de système (1) ?

II) Soit un système $H(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$ dont le dominateur est :

$$D(z) = z^2 + (0{,}37K - 1{,}37)z + 0{,}37 + 0{,}26K$$

- Etudier la stabilité de système $H(z)$ en utilisant le critère de Routh?

III) Soient deux systèmes $H_1(z)$ et $H_2(z)$ dont les polynômes caractéristiques sont :

$\boldsymbol{P_1(z) = z^2 + (3\,K + 1)\,z + (2\,k + 3)}$

$\boldsymbol{P_2(z) = z^3 + 3\,z^2 - 5\,z + 2}$

- Etudier la stabilité des systèmes $H_1(z)$ et $H_2(z)$ en utilisant le critère de jury?

Solution :

I) La matrice d'observabilité est définie par :

$$Ob = [\ C^T, A^T C^T, [A^T]^2 C^T, \dots\dots\dots.., [A^T]^{n-1} C^T\ ], \qquad avec\ n = 2$$

$$Ob = [\ C^T, A^T C^T\ ], C^T = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ A^T = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\ Et\ A^T C^T = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Donc $Ob = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

$Det(Ob) = -1 \neq 0$, alors Le système est donc complètement observable.

II) Pour étudier la stabilité par le critère de Routh, nous transformons $D(z)$ en $D(w)$.

Après remplacement $z = \frac{1+w}{1-w}$, nous trouverons :

$$D(w) = (2{,}74 - 0{,}11K)w^2 + (1{,}26 - 0{,}52K)\,w + 0{,}63K$$

w^2	$2{,}74 - 0{,}11K$	$0{,}63K$	$\Rightarrow K < \frac{2{,}74}{0{,}11} = 24{,}9$
w^1	$1{,}26 - 0{,}52K$	0	$\Rightarrow K < \frac{1{,}26}{0{,}52} = 2{,}42$
w^0	$0{,}63K$	0	$\Rightarrow K > 0$

Système stable si $\mathbf{0} < K < 2{,}42$

III)

- **Système** $H_1(z)$: $\boldsymbol{P_1(z) = z^2 + (3\,K + 1)\,z + (2\,k + 3)}$

$$n = 2: \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 > 0 \\ a_0 - a_1 + a_2 > 0 \\ a_2 - a_0 > 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2\,K + 3 + 3K + 1 + 1 > 0 \\ 2\,K + 3 - 3K - 1 + 1 > 0 \\ 1 - 2\,\mathrm{k} - 3 > 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} K > -1 \\ K < 3 \\ K < -1 \end{cases}$$ Donc le Système est instable

- **Système** $H_2(z)$: $\boldsymbol{P_2(z) = z^3 + 3\,z^2 - 5\,z + 2}$

$$n = 3: \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 > 0 \\ -a_0 + a_1 - a_2 + a_3 > 0 \\ a_3 - |a_0| > 0 \\ a_0 a_2 - a_1 a_3 - {a_0}^2 + {a_3}^2 > 0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$n = 3: \begin{cases} 1 > 0 \\ -9 > 0 \quad \boldsymbol{Faux} \\ -1 > 0\ \boldsymbol{Faux} \\ 8 > 0 \end{cases}$$ Donc Le Système est instable

Exercice N°4:

Soit le système asservi de la figure 1 :

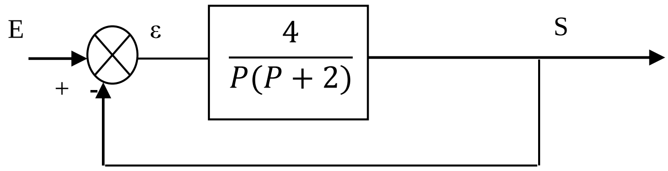


Figure 1. Système de deuxième ordre en boucle fermée

1) Etudiez la stabilité de ce système ?
2) Calculez le Gain statique en boucle fermée ?
3) Calculez l'erreur statique pour l'entrée Echelon ?
4) Calculez les différentes erreurs statiques pour les entrées canoniques suivante: Rampe et entrée parabolique ?

Solution :

1) Utilisons pour cela le critère de Routh :

$$FTBO(P) = \frac{4}{P(P+2)} = \frac{2}{P(\frac{P}{2}+1)}$$

$$FTBF(P) = \frac{\frac{2}{P(\frac{P}{2}+1)}}{1+\frac{2}{P(\frac{P}{2}+1)}} = \frac{1}{\frac{P^2}{4}+\frac{P}{2}+1}$$

P^2 : $\frac{1}{4}$ 1

P^1 : $\frac{1}{2}$ 0 → Tous les signes de la 1ere colonne sont de même signes alors le système est stable

P^0 : 1

2) Gain statique en boucle fermée : $K_s = \lim_{P\to 0} FTBF(P) = 1$

3) L'erreur statique pour l'Entrée Echelon :

$\varepsilon_s = \lim_{P\to 0} P.\frac{E(P)}{1+FTBO(P)} = 0$, Avec $E(P) = \frac{1}{P}$ et $E_0 = 1$

L e système est de classe 1 donc $K_e = \infty$,

et $\varepsilon_s = \frac{E_0}{1+K_e} = \frac{1}{\infty} = 0$

Entrée Rampe (vitesse) :

$\varepsilon_s = \lim_{P\to 0} \mathrm{P}.\frac{E(P)}{1+FTBO(P)} = \frac{1}{2}$ Avec $E(P) = \frac{1}{P^2}$ et $E_0 = 1$

Le système est de classe 1 ,a Alors $K_v = K = 2$,.

donc: $\xi_s = \frac{E_0}{K_v} = \frac{1}{\infty} = \frac{1}{2}$

Entrée parabolique (accélération) :

$\varepsilon_s = \lim_{P\to 0} \mathrm{P}.\frac{E(P)}{1+FTBO(P)} = \infty$ Avec $E(P) = \frac{1}{P^3}$ et $E_0 = 1$

L e système est de classe 1 alors:

$K_a = 0$ et $\varepsilon_s = \frac{E_0}{K_a} = \infty$

Chapitre 3

Synthèse Des Systèmes Echantillonnés Dans L'espace D'état

3.1. Introduction

La représentation d'état du système échantillonné permet de connaître son comportement "interne" et "externe" contrairement à la fonction de transfert qui permet de connaitre s juste son comportement "externe".

Le type de modèle qui est utilisé dans la commande par retour d'état est la représentation d'état. L'idée consiste toujours à piloter le système par un signal de consigne et à générer automatiquement le signal de commande pour l'objectif d'améliorer les performances des systèmes (stabilité, rapidité et la précision).
Le Principe du retour d'état est illustré dans la figure 3.1 par une représentation schématique:

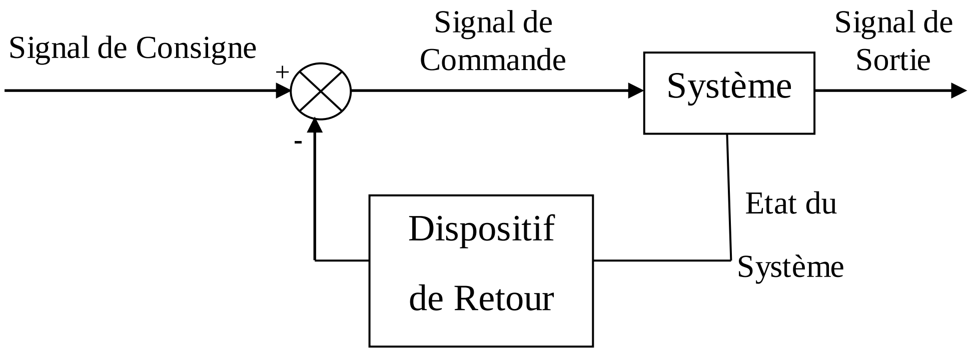


Figure 3.1 : Principe du retour d'état

Dans le cas des systèmes multivariable, la simplicité d'utilisation de la fonction de transfert est perdue. De plus, seules les parties observables et gouvernables sont représentées et les conditions initiales ne sont pas facilement prises en compte. Malgré tout, les représentations fréquentielles, à la base de ces représentations, donnent une vision irremplaçable sur les comportements externes des systèmes. Par ailleurs, la représentation d'état permet d'utiliser les techniques de calcul disponibles en algèbre linéaire, et des outils de synthèse puissants ont pu être développés: commande optimale linéaire quadratique, placement de pôles, , commande H∞, commande linéaire quadratique, ...etc

3.2. Principe de la commande par retour d'état

La synthèse d'un retour d'état peut être faite par différentes approches (le placement des valeurs propres, la commande modale, la commande optimale, la commande découplée...).

Le schéma bloc de la commande par retour d'état a la structure Figure 3.2.

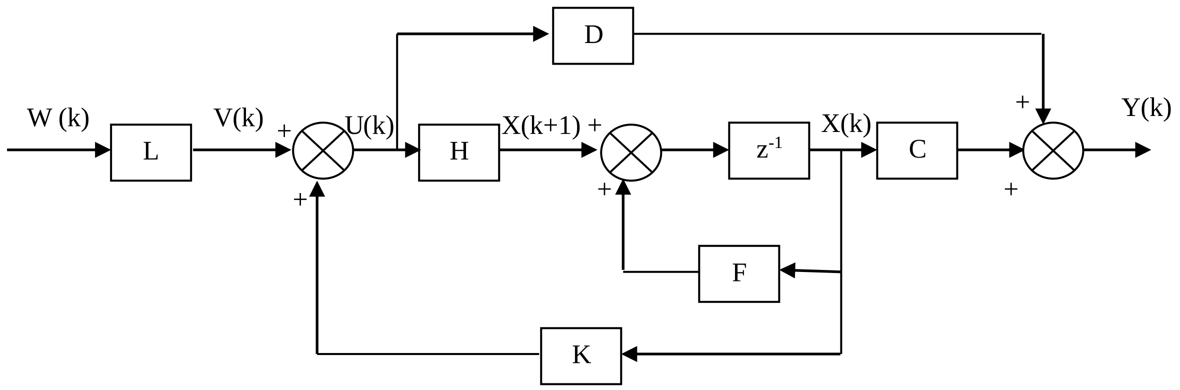


Figure 3.2: Schéma blocs d'une commande par retour d'état

Le vecteur de commande U(k) est composé d'un retour d'état effectué par l'intermédiaire d'une matrice K (matrice de gain). il est possible d'adjoindre une matrice L en aval de la consigne W(k), afin d'agir sur la matrice des gains statiques en boucle fermée.

Le vecteur de commande U(k) est:

$$U(k) = K.X(k) + L.W(k) \tag{3.1}$$

Tel que:

V(k) : Entrée (vecteur d' de dimension (e,1))

Y(k) : Sortie (vecteur de dimension (s,1)).

X(k) :Etat du système (vecteur de dimension (n,1))

W(k) : Consigne (vecteur de dimension (s,1))

U(k) : Commande (vecteur de de dimension (e,1)).

F : Matrice d'état de dimension (n,n)

H : Matrice d'entrée de dimension (n,e)

C Matrice de sortie (dimension (s,e))

D Matrice de couplage entrée - sortie (dimension (s,e))

K : matrice de retour d'état (dimension (e,n))

L : matrice de compensation (dimension (e,e))

On pose V(k) : vecteur intermédiaire de commande :

$$V(k) = LW(k) \tag{3.2}$$

tel que V est un vecteur intermédiaire de commande.

Donc U(k) devient :

$$U(k) = K.X(k) + V(k) \tag{3.3}$$

Les équations d'état discrètes d'un système linéaire sont :

$$\begin{cases} X(k+1) = F.X(k) + H.U(k) \\ Y(k) = C.X(k) + D.U(k) \end{cases} \tag{3.4}$$

Les équations d'état en boucle fermée avec le retour d'état défini sont données par :

$$\begin{cases} X(k+1) = (F + H.K).X(k) + H.U(k) \\ Y(k) = (C + D.K).X(k) + D.V(k) \end{cases} \tag{3.5}$$

Dans le cas des systèmes monovariables, les valeurs propres de la matrice (F+H.K) correspondent aux pôles de la fonction du transfert de ces derniers.

Les valeurs propres de la matrice F détermine la dynamique du système en boucle ouverte et les valeurs propres de la matrice F+H.K fixeront les performances en boucle fermée. Donc la problématique de la commande par retour d'état est de déterminer la matrice de gain K, les matrices F et H pour fixer les valeur propres de (F+H.K) .

Remarques:

- La matrice de gain K est de dimension (1, n) et la solution est unique..
- Le nombre de valeurs propres est égal à la taille de la matrice d'état (donc n conditions à satisfaire).

3.3. Placement des pôles par retour d'état et par retour de sortie

L'objectif général dans l'automatique est de déterminer des lois de commande qui assurent aux systèmes linéaires des bonnes performances. les pôles d'un système LTI sont prépondérants dans le comportement transitoire de ce dernier. il est souvent souhaitable que les valeurs propres de la matrice d'évolution A soient bien localisées dans le plan complexe dans le cas ou ce système est décrit par une représentation d'état,

Pour un système monovariable nous considérons que la matrice d'état est développée sous sa forme compagne (décomposition canonique gouvernable).

3.3.1. Décomposition canonique

La fonction de transfert d'un système linéaire est de la forme suivante :

$$\frac{\mathrm{Y(z)}}{\mathrm{U(z)}} = \frac{\mathrm{b_0+b_1z+\cdots+b_mz^m}}{\mathrm{a_0+a_1z+\cdots+a_{n-1}z^{n-1}+z^n}} \qquad ,\mathrm{m} < n \tag{3.6}$$

Les équations d'état ont pour expression :

$$\begin{cases} X_c(k+1) = F.X(k) + H.U(k) \\ Y(k) = C.X(k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_c(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\mathrm{a_0} & -\mathrm{a_1} & \ldots & \cdots & -\mathrm{a}_{n-1} \end{bmatrix}.X(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.U(k) \\ Y(k) = [\mathrm{b_0} \;\; \mathrm{b_1} \ldots \mathrm{b_m} \; 0 \ldots 0].X_c(k) \end{cases} \tag{3.7}$$

Soit A(z) l'équation caractéristique qui est définie comme suit :

$$A(z) = \det(z.I - F_c) = \mathrm{a_0} + \mathrm{a_1z} + \cdots + \mathrm{a_{n-1}z^{n-1}} + \mathrm{z^{n-1}} \tag{3.8}$$

La matrice D est nulle car le degré du numérateur est inférieur au degré du dénominateur, Alors:

$$\begin{cases} X_c(k+1) = (F_c + H_c.K_c).X_c(k) + H_c.V(k) \\ Y(k) = C_c.X(k) \end{cases} \tag{3.9}$$

avec Kc la matrice de retour d'état

Les valeurs propres recherchées que nous noterons α(z) sont les racines de l'équation caractéristique:

$$\alpha(z) = \det\left(z.\mathrm{I} - (F_c + H_c.K_c)\right) = \alpha_0 + \alpha_1.z + \alpha_2 z^2 + \cdots + z^n \qquad (3.10)$$

la matrice de gain K pour un système monovariable (de dimension (1,n)) est:

$$K_c = [\, k_1\, k_2\ \ldots \ldots k_n] \qquad (3.11)$$

La matrice d'état en boucle fermée est :

$$F_c + H_c.K_c = \begin{bmatrix} 0\ 1\ 0 & 0\ 0 \\ 0\ 1\ 0 & 0\ 0 \\ :\ :\ : & :\ : \\ 0\ 0\ 0 & 1\ 0 \\ 0\ 0\ 0 & 0\ 1 \\ d_1\ d_2 \,.. & ..\ d_n \end{bmatrix} \qquad (3.12)$$

Tel que : $d_1 = (k_1 - a_0), d_2 = (k_2 - a_1), \ldots .. d_n = (k_n - a_{n-1})$

Le polynôme caractéristique en boucle fermée (Fc+Hc .Kc) vaut alors :

$$\alpha(z) = (a_0 - k_1) - +(a_1 - k_2).z + (a_2 - k_3)z^2 + \cdots + (a_{n-1} - k_n)z^{n-1} + z^n \qquad (3.13)$$

Fixer les valeurs propres de (Fc+Hc.Kc) revient à calculer les coefficients αi du α(z) .
par identification des formules (3.10) et (3.12), on obtient la matrice K comme suit :

$$\begin{cases} k_1 = a_0 - \alpha_0 \\ k_2 = a_1 - \alpha_1 \\ \quad : \\ k_n = a_{n-1} - \alpha_{n-1} \end{cases} \qquad (3.14)$$

Remarque: le calcul du vecteur K est simple puisqu'il fait appel aux paramètres a_i issus de la modélisation du processus et des coefficients αi fixés par l'utilisateur pour placer les valeurs propres du système commandé.

3.3.2. Décomposition d'état quelconque

Considérons un système d'état qui n'est pas sous la forme souhaitée suivant :

$$\begin{cases} X(k+1) = F.X(k) + H.U(k) \\ Y(k) = C.X(k) \end{cases} \qquad (3.15)$$

Nous présenterons deux méthodes pour obtenir la forme compagne

- Calcul de K à partir d'une matrice de transformation M

Pour avoir la forme canonique gouvernable (3.9), nous cherchons M du vecteur d'état X(k).

posons :

$$X(k) = M.X_c(k) \qquad (3.16)$$

Avec :

X(k) : Etat du système (vecteur d'état).

X_c (k) : Nouveau vecteur d'état qui donne une décomposition sous forme compagne.

Pour le vecteur d'état X_c (k) d'état, les équations deviendront :

$$\begin{cases} X_c(k+1) = M^{-1}.F.M.X_c(k) + M^{-1}H.U(k) \\ \qquad\qquad Y(k) = C.M.X(k) \end{cases} \qquad (3.17)$$

avec: $F_c = M^{-1}.F.M$,$H_c = M^{-1}H$, $C_c = C.M$

Il vient:

$$\begin{cases} X_c(k+1) = F_c.X_c(k) + H_c.U(k) \\ \qquad Y(k) = C_c.X_c(k) \end{cases} \qquad (3.18)$$

Identifions (3.17) et (3.18) :

$$M = [M_1\ M_2 \dots M_n] \qquad (3.19)$$

$$M^{-1}.F.M = F_c \implies F.M = MF_c \qquad (3.20)$$

$$M^{-1}.H = H_c \implies H = M.H_c \qquad (3.21)$$

Si nous explicitons dans (3.20) et (3.21) les formes de F_c et H_c , nous obtenons:

$$F.[M_1\ M_2 \dots M_n] = [M_1\ M_2 \dots M_n] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad (3.22)$$

$$H = M.H_c = [M_1\ M_2 \ldots M_n]\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix} \qquad (3.23)$$

La valeur Mn est fournie par (3.23) et en développant (3.22) nous obtenons:

$$\begin{cases} M_n = H \\ M_{n-1} = F.M_n + a_{n-1}.M_n \\ M_{n-2} = F.M_{n-1} + a_{n-2}.M_n \\ \quad \vdots \\ \quad \vdots \\ M_1 = F.M_2 + a_1.M_n \\ 0 = F.M_1 + a_0.M_n \end{cases} \qquad (3.24)$$

Pour déterminer la matrice de gain K dans le système donné par (3.15) ,on remarque que la commande est la même dans les deux représentations ,alors:

$U(k) = K_c \cdot X_c(k) + V(k) = K \cdot X(k) + V(k) \Rightarrow K_c \cdot X_c(k) = K \cdot X(k)$

puisque $X(k) = M \cdot X_c(k)$,donc:

$$K = K_c.M^{-1} \qquad (3.25)$$

- Calcul de K par la méthode de Bass-Gura.

Nous allons décrire une méthode d'obtention directe de la matrice K en utilisant l'expression du polynôme $\alpha(z)$, du système commandé (3.10).

$$\alpha(z) = \det\big(z.I - (F + H.K)\big) = \alpha_0 + \alpha_1.z + \alpha_2 z^2 + \cdots + z^n$$

Nous pouvons transformer l'expression $\alpha(z)$ en faisant la décomposition suivante :

$$\alpha(z) = \det[(z.I - F).(I - (z.I - F)^{-1}H.K]$$
$$\alpha(z) = \det[(z.I - F)].\det[(I - (z.I - F)^{-1}H.K]$$

Puisque $det[(z.I - F)] = A(z)$, il vient:

$$\alpha(z) = A(z).\det[(I - (z.I - F)^{-1}H.K]$$

Le deuxième terme est un scalaire dans un cas monovariable ,donc :

$\alpha(z) = A(z).(1 - \det((z.I - F)^{-1}H.K))$

Alors nous pouvons exprimer:

$\alpha(z) - A(z) = -A(z).\det((z.I - F)^{-1}H.K)$

Un développement de cette expression conduit:

$(a_{n-1} - \alpha_{n-1}) = K.H$

$(a_{n-2} - \alpha_{n-2}) = K.F.H + K.a_{n-1}.H$

$(a_{n-3} - \alpha_{n-3}) = K.F^2.H + K.a_{n-1}.F.H + K.a_{n-2}.H$

:

:

en posant :

$$\alpha = [\alpha_{n-1}\ \ \alpha_{n-2}\ \ \alpha_{n-3} \dots \alpha_0] \tag{3.26}$$

$$A = [a_{n-1}\ \ a_{n-2}\ \ a_{n-3} \dots a_0] \tag{3.27}$$

On obtient la forme matricielle suivante:

$$[A - \alpha] = K.[H\ \ F.H\ \ F^2.H \dots\ \ F^{n-1}.H]\begin{bmatrix} 1 & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & a_1 \\ 0 & 1 & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 \\ 0 & 0 & 1 & a_{n-1} & \dots & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

$[A - \alpha] = K.G.T$

on tire :

$$K = [A - \alpha].T^{-1}.G^{-1} \tag{3.29}$$

$$Tel\ que\ \ G = [H\ \ F.H\ \ F^2.H \dots\ \ F^{n-1}.H]\ et\ T = \begin{bmatrix} 1 & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & a_1 \\ 0 & 1 & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 \\ 0 & 0 & 1 & a_{n-1} & \dots & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Avec G est une matrice de gouvernabilité.

- Calcul de la matrice L.

Le calcul de la matrice K ne garantit pas un gain statique unitaire entre la consigne W et la sortie Y.

La fonction de transfert est donné par :

$$F(z) = C.[z.I - F]^{-1}.H$$

La fonction de transfert d'un système commandé par retour d'état est:

$H(z) = C.[z.I - F - H.K]^{-1}.H$

dont le gain statique vaut : $\text{Ks} = C.[I - F - H.K]^{-1}.H$

Donc la valeur de L est l'inverse de gain Ks.

$$L = \frac{1}{\text{Ks}} \tag{3.30}$$

- Etapes pour calcul de K et L

a) Vérifier que la décomposition d'état est commandable

$Rang(|H\ ,F.H,\ F^2.H, \dots\ ,F^{n-1}.H| = n$

b) Calcul du polynôme caractéristique du système :

$$\text{A(z)} = \det(\text{z.I} - \text{F}) = a_0 + a_1.z + a_2 z^2 + \cdots + z^n$$

c) Choisir la dynamique en boucle fermée

$$\alpha(\text{z}) = (\text{z} - z_1)(\text{z} - z_2)(\text{z} - z_3) \dots \dots (\text{z} - z_n) = \alpha_0 + \alpha_1.z + \alpha_2 z^2 + \cdots + z^n$$

d) Calculer la matrice K en utilisant l'une des deux méthodes suivantes:

d-1. En utilisant la transformation M:

$$\begin{cases} M_n = H \\ M_{n-1} = F.M_n + a_{n-1}.M_n \\ M_{n-2} = F.M_{n-1} + a_{n-2}.M_n \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad \vdots \\ M_1 = F.M_2 + a_1.M_n \\ 0 = F.M_1 + a_0.M_n \end{cases}$$

$K_{ci} = (a_{i-1} - \alpha_{i-1})\ ,i \in \{1 \dots n\}$

$K = K_c.M^{-1}$

d-2. En utilisant la méthode de Bass-Gura

$\alpha = [\alpha_{n-1}\ \ \alpha_{n-2}\ \ \alpha_{n-3} \dots \alpha_0]$ $\quad , A = [a_{n-1}\ \ a_{n-2}\ \ a_{n-3} \dots a_0]$

$G = [H \;\; F.H \;\; F^2.H \dots \;\; F^{n-1}.H]$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & a_1 \\ 0 & 1 & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 \\ 0 & 0 & 1 & a_{n-1} & \dots & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$K = [A - \alpha].T^{-1}.G^{-1}$

e) Calcul de la compensation L :

$$L = \frac{1}{C.[I - F - H.K]^{-1}.H}$$

3.4. - Estimateur d'état et de sortie

3.4.1.Principe

L'utilisation de capteurs est indispensable dans la mise en œuvre de la commande par retour d'état , ces capteurs permettent de donner à chaque instant la valeur de l'état . malheureusement, souvent toutes les variables d'état ne soient pas accessibles à la mesure car les capteurs sont difficiles à réaliser pour des raisons techniques ou bien parfois trop coûteux. ce qui rend l'implémentation directe de la commande est impossible.

L'idée est donc de reconstruire l'état à partir des informations disponibles (la sortie et la commande). On utilise pour cela un système dynamique permettant d'approximer x(t), Ce système est en quelque sorte un capteur logiciel ,ce dernier est un algorithme qui donne les variables d'état non mesurées du système à chaque instant une estimation en ligne.

Il existe trois type d'observateur:

Observateur d'ordre complet: il permet d'estimer toutes les variables d'états sans exeption (mesurables et non mesurables) du système.

Observateur d'ordre réduit: est un observateur qui estime les variables d'états dont le nombre est inférieur à n (nombre des états du système)

Observateur d'ordre minimum: Si l'ordre de l'observateur est le minimum possible.

3.4.2.Architecture d'un Observateur

Le schéma généra d'un observateur est représenté par la figure 3.3, suivante :

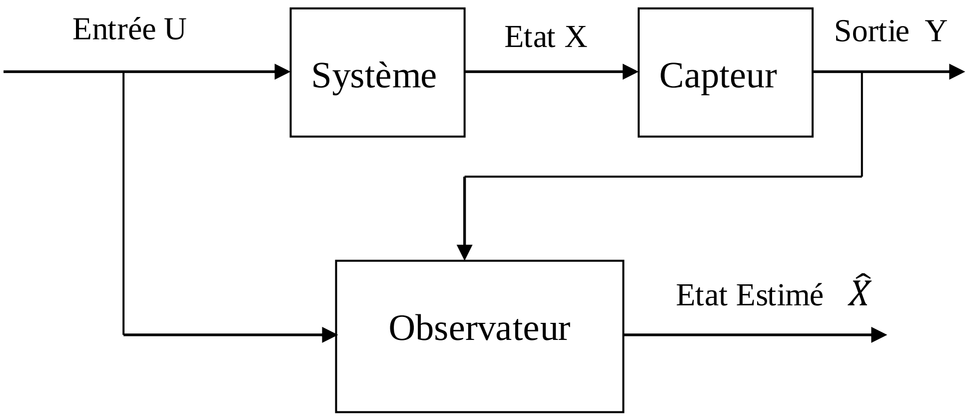


Figure 3.3: Architecture génerale d'un observateur

L'estimation de l'état dépende de la dynamique du système en prenant en compte la commande u(t) et la sortie du système y(t) .

$$\begin{cases} X(k+1) = A.X(k) + B.U(k) \\ Y(k) = C.X(k) + D.U(k) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} X(k+1) = A.\hat{X}(k) + L.(y(k) - C\,\hat{X}(k)) \\ Y(k) = C.\hat{X}(k) \end{cases}$$

Tel que : La matrice L représente le gain de l'observateur.

L'objectif d'utilisation d'un observateur est de trouver l'estimation $\hat{X}(k)$ de telle sorte que :

$$\lim_{t\to\infty} \hat{X}(k) = x(k)$$

Tel que $x_0(t)$ n'est pas connue, donc c'est la même chose pour $\widehat{X_0}(k)$.

Soit l'erreur d'estimation $e(k) = x(k) - \hat{X}(k)$ alors la conception de l'observateur consiste à trouver la matrice de gain L tel que :

$\lim_{t\to\infty} e(k) = 0$

Sachant que : $\begin{cases} X(k+1) = A.\hat{X}(k) + L.(y(k) - C\,\widehat{X}(k)) \\ Y(k) = C.\hat{X}(k) \end{cases}$

$$\hat{X}(k+1) - X(k+1) = [A - L\ C]\ e(k)$$

L'erreur de prédiction à l'instant $k + 1$ est :

$e(k+1) = X(k+1) - \hat{X}(k+1)$

Donc $e(k+1) = [A - L\ C]\ e(k)$

Cette dernière équation permet d'étudier la convergence de $e(k)$. E n choisissant correctement le vecteur L ,nous pouvons, en utilisant la méthode de placement des pôles, déterminer la rapidité de convergence de $e(k)$.

3.5. Exercices Corrigés

Exercice N°1:

Soit un système à temps discret régi par les équations d'état suivantes :

$\begin{cases} X(k+1) = A.X(k) + B.U(k) \\ Y(k) = C.X(k) \end{cases}$

Avec: $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ $et\ \ B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

1) Vérifier la commandabilité du système?

2) Déterminer le vecteur de gain g1 qui assure à ce système la réponse pile à l'état **0** à partir de n'importe quel état **x**(0), pour une commande à retour d'état et pour un signal de consigne nul, et ce, en un temps égal à 2 fois la période d'échantillonnage.

3) Donner une simulation pour un fonctionnement du système en boucle fermée pour vérifier la réponse pile à l'état **x**(2) = **0**.à partir d'un vecteur d'état initial **x**(0) quelconque.

Solution:

1) Vérification de la commandabilité:

$C = [\ B \quad AB\ ]$

$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $donc$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$Det\ C = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

le système est complètement commandable car $Det\ C \neq 0$

2) On cherche d'abord U(k) pour $0 \leq k < 0$ qui permet d'amener le système à 0 en 2 échantillons.

On a: $[A]^{-2}x(2) = x(0) + [[A]^{-1}\ B \quad [A]^{-2}B].\begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \end{pmatrix} = [[A]^{-1}\ B \qquad [A]^{-2}B].(-x(0)$

Calculons tout d'abord$[A]^{-1}$:

$[A]^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \Longrightarrow [A]^{-1}\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Alors:

$$[A]^{-2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

Donc: $[A]^{-2}B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

D'ou: $[[A]^{-1}\ B \qquad [A]^{-2}B] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \Longrightarrow [[A]^{-1}\ B \qquad [A]^{-2}B]^{-1} =$

$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

Le vecteur de gain $g1 = (-1 - 2)$ permet d' assurer la réponse pile (de la première ligne de la matrice précédente)

3) Simulation des premiers échantillons de fonctionnement du système à partir de l'état initial proposé:

$x(1) = A\ x(0) + B\ u(0)$

$$\begin{pmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} g1.x(0)$$

Soit:

$$\begin{pmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Puis: $x(2) = A\,x(1) + Bu(1)$

$$\begin{pmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} g1.x(1)$$

$$\begin{pmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc évidemment; x(k)=0 pour k>2

Exercice N°2:

Soit un système observable donné sous la forme suivante :

$$\begin{cases} X(k+1) = A.X(k) + B.U(k) \\ \qquad Y(k) = C.X(k) \end{cases}$$

Avec: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ $et\;\; C = (0\;0\;1)$

1) Déterminer la matrice $[A - L\,C]$?

2) Déduire les pôles en fonction des éléments de la matrice de gain L?

Solution

1)

$$[A - L\,C] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} (0\;0\;1)$$

$$[A - L\,C] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 - L_1 \\ 1 & 0 & -3 - L_2 \\ 0 & 1 & -2 - L_3 \end{bmatrix}$$

2) Les pôles sont respectivement $-1 - L_1$, $-3 - L_2$ et $-2 - L_3$

Remarque en choisissant $L_1, L_2\; et\; L_3$, nous pouvons placer où on le souhaite en fonction d'un cahier des charge donné.

Exercice N°3:

Soit un système discret suivant:

$$\begin{cases} X(k+1) = A.X(k) + B.U(k) \\ Y(k) = C.X(k) \end{cases}$$

Avec: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 20 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $et\ C = (1\ \ 0)$

1) Vérifier l'observabilité du système?

2) Déterminer la matrice de gain d'observateur L tel que les valeurs propres sont 0.2 et 0.3?

Solution:

1) En général, La matrice d'observabilité est définie par :

$Ob = [\ C^T, A^T C^T, [A^T]^2 C^T, \dots\dots\dots.., [A^T]^{n-1} C^T\ ]$

Dans notre cas n=2 alors $Ob = [\ C^T, A^T C^T\ ]$

Donc La matrice d'observabilité devienne: $Ob = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Le système est donc complètement observable car $Det(Ob) = 1 \neq 0$.

2)

$\hat{X}(k+1) = A\ \hat{X}(k) + B.u(k) + L\ C\ (x(k) - \hat{X}(k)$

$\hat{X}(k+1) - X(k+1) = [A - L\ C]\ e(k)$

On calcul L^T pour que $A^T - C^T L^T$ possède les valeurs propres égale à 0.2 et 0.3

$[A]^T = \begin{bmatrix} 0 & 20 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

En utilisant la formule d'Ackermann on trouve : $L = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 20.06 \end{bmatrix}$

Références bibliographiques

[1] L. Maret, Régulation Automatique, 1987.

[2] H. Buhler, 'Réglages Echantillonnés Tome 1, Edition Dunod,1984.

[3] J. L Abatut, Systèmes et Asservissement Linéaires Echantillonnés, Edition Dunod,1973

[4] M. Rivoire, 'Cours d'Automatique Tome 2, Edition Chihab,1996.

[5] Y. Granjon, 'Systèmes linéaires, non linéaires, à temps continu, à temps discret, représentation d'état', *2e Edition, Dunod, Paris, 2010*.

[6] Dorf & Bishop,' Modern Control Systems, Addison-Wesley, 1995

[7] A. Fortin, Analyse numérique pour ingénieurs, Presses Internationales, Polytechnique, 2011.

[8] G. Allaire, 'Approximation numérique et optimisation, Editions de l'Ecole Polytechnique, 2016.

[9] J.P. Corriou, 'Commande des procédés', *3e Edition, Lavoisier, Paris, 2012.*

[10] A. Jutard, M. Betemps, 'Systèmes et Asservis Linéaires Echantillonnés-Automatique', *http://docinsa.insa-lyon.fr/polycop/download.php?id=108830&id2=0*.