

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université Akli Mohand Oulhadj Bouira

Faculté des sciences et sciences appliquées

Département Génie Electrique

Polycopié de cours UEF 3.2.1 intitulé

Systemes Asservis Linéaires

Réalisé par Mr. BENSAFIA Yassine

Maitre de Conférences B

Chargé de Recherche

Année universitaire 2016/2017

Ce cours est destiné aux étudiants en Troisième année Electronique

Résumé

Un système asservis est un système qui prend en compte, durant son fonctionnement, l'évolution de ses sorties pour les modifier et les maintenir conformément à une consigne.

La régulation est une discipline technique destinée à analyser et concevoir des systèmes de commande pratiques et autres dispositifs technologiques.

Le principe de base d'un asservissement est de mesurer l'écart entre la valeur réelle et la valeur cible de la grandeur asservie, et de piloter les actionneurs agissant sur cette grandeur pour réduire cet écart.

Ce polycopié, a pour but de présenter un exposé sur les fondements des systèmes asservis linéaires. Il est destiné aux ingénieurs, physiciens, mathématiciens ainsi qu'aux étudiants en Troisième année Licence Electronique.

Pour comprendre cet exposé, seules des connaissances de base en physique ainsi qu'en calcul différentiel et intégral sont nécessaires. Les connaissances dépassant le niveau seront exposées, notamment des équations différentielles à la transformée de Laplace.

Ce polycopié se divise en deux parties. Dans la première, nous étudierons la transformée de Laplace, les systèmes asservis, la modélisation des systèmes asservis linéaires, les éléments constitutifs d'une chaîne de régulation, les méthodes pour résoudre les équations différentielles linéaires à coefficient constant, les fonctions de transfert, les schémas fonctionnels et l'application des transformées de Laplace à la résolution des équations différentielles. Dans la deuxième partie, nous étudierons les méthodes d'analyse et de conception (les diagrammes de Bode, de Nyquist et de Black) ainsi que les performances des systèmes asservis (Stabilité Rapidité et Précision).

Table des matières

INTRODUCTION GENERALE

I.1 Historique	1
I.2 LA Régulation Automatique Aujourd'hui	3
I.3 Pourquoi automatiser	4

CHAPITRE I

TRANSFORMEE DE LAPLACE

I.1 Introduction	5
I.2. La Transformée de Laplace Directe de LAPLACE	5
I.3. Propriétés de la transformée de Laplace	6
I.4. Transformée Inverse de Laplace	10
I.5. Résolution d'équations différentielles à coefficients Constants	10
I.5.1 Equation du premier ordre	10
I.5.2 Equation du Second ordre	11

CHAPITRE II

SYSTEMES ASSERVIS CONTINUS LINEAIRES

II.1. Introduction à l'automatique	13
II.2. Evolution de l'automatique	13
II.3. Généralités Sur Les Systèmes	14
II.3.1. Définitions	14

II.3.2. Classification des systèmes	15
II.4. Systèmes en boucle ouverte	16
II.5. Systèmes Asservis	17
II.5. 1.Principe des Systèmes Asservis	17
II.5.2. Schéma Général	18
II.5.3. Asservissement Et Régulation	18
II.6.Performances des systèmes asservis	19

CHAPITRE III

MODELISATION DES SYSTEMES ASSERVIS LINEAIRES

III.1 Introduction	23
III.2. Mise En Equations D'un Système Linéaire	23
III.2. 1. Système électrique du premier ordre	24
III.2. 2. Système électrique du second ordre	24
III.3. Représentation Des Systèmes	25
III.4. Notion de Fonction de Transfert	26
III.4.1. Définition	26
III.4.2. Pôles et zéros d'une fonction de transfert	27
III.4.3. Règle de simplifications des schémas blocs	28
III.4.3.1. Mise en série (ou cascade)	28
III.4.3.2. Mise en parallèle	28
III.4.3.3. Cas d'un système à n entrées indépendantes	29
III.4.3.4. Fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO)	29
III.4.3.5. Fonction de Transfert en Boucle Fermée (FTBF)	30
III.5. Déplacement et Permutation des nœuds d'informations	31

CHAPITRE IV

PERFORMANCES DES SYSTEMES LINEAIRE

IV.1. Introduction	34
IV.2. Etude des systèmes du premier ordre	34
IV.2.1. Définition	34
IV.2.2. Réponse indicielle	35
IV.2.3. Réponse à une rampe (échelon de vitesse)	36
IV.2.4. Réponse à une impulsion unité	36
IV.2.5. Réponse fréquentielle	37
IV.3. Etude des systèmes du second ordre	40
IV.3.1. Définition	40
IV.3.2. Réponse à un échelon unité	41
IV.3.3. Réponse à une impulsion unité	43
IV.3.4. Réponse fréquentielle	43

CHAPITRE V

STABILITE DES SYSTEMES

V. 1. Notion de stabilité d'un système	48
V.2. Aspect mathématique de la stabilité	49
V. 3. Conditions de stabilité	50
V. 4. Etude de la stabilité d'un système bouclé	51
V. 5. Critère de Routh – Hurwitz	52

CHAPITRE VI

PRECISION DES SYSTEMES

VI.1. Introduction	58
VI.2. Précision Statiques des Systèmes bouclés	58
VI.2.1. Erreur statique	58
VI.2.2. - Erreur statique (ou erreur de traînage) pour une entrée rampe (ou vitesse)	60
VI.2.3. - Erreur statique pour une entrée parabolique (ou accélération)	61
VI.2.4. - Récapitulatif des erreurs statiques	62
VI.3. Précision Dynamique - Rapidité	63
VI.3.1. La Rapidité : une qualité essentielle	63
VI.3.2. Définition du temps de réponse	63
VI.3.3. Relation entre Rapidité et Bande passante	63
BIBLIOGRAPHIE ET WEBOGRAPHIE	66

INTRODUCTION GENERALE

Ce document, à pour but de présenter un exposé sur les fondements des systèmes asservis linéaires. Il est destiné aux ingénieurs, physiciens, mathématiciens ainsi qu'aux étudiants en Troisième année Licence Electronique dans le cadre des programmes officiels ou même en post-graduation, qui désirent approfondir leurs connaissances ou avoir un document de base en matière d'asservissement.

Pour comprendre cet exposé, seules des connaissances de base en physique ainsi qu'en calcul différentiel et intégral sont nécessaires. Les connaissances dépassant le niveau seront exposées, notamment des équations différentielles à la transformée de Laplace.

La commande et l'interprétation du comportement de procédés industriels ou de phénomènes physiques naturels font partie des tâches qui incombent à l'ingénieur. Ce dernier est confronté à une réalité qu'il lui faudra domestiquer et/ou comprendre pour en tirer le meilleur parti. Au centre de cette connaissance se trouve le concept de *système*, concept que l'on retrouve dans un grand nombre de disciplines et techniques : contrôle de procédé, techniques d'optimisation, traitement du signal, filtrage, mathématique des équations différentielles, etc.

Dans le cadre de ce cours, nous nous intéressons principalement à l'étude des "systèmes" à la fois *continus* et *linéaires*, qui sont représentés sous forme de *fonction de transfert* (représentation externe, dite encore de la "boîte noire") ; ces trois conditions volontairement limitatives permettent d'introduire de façon simple les principaux concepts de l'automatique.

I.1 Historique :

L'histoire des systèmes automatiques peut se diviser en trois époques :

La première époque, que l'on peut qualifier de préhistoire de l'automatique s'étend de l'antiquité au milieu du siècle dernier. Des inventeurs géniaux ont conçu des systèmes automatiques de manière purement intuitive. Dès 250 avant J.-C., nous avons des exemples de régulation de niveau : l'horloge automatique à eau (clepsydre) de Ktesibios (*fig. 1*), la lampe à

huile de Philon de Bizance et la machine à doser le vin de Héron d'Alexandrie (50 ans avant J.-C.).

La *clepsydre* fut inventée à Alexandrie au III^{ème} siècle avant J.-C. par un mécanicien grec nommé Ktesibios. Le dessin de la figure 1 décrit le principe de cette horloge à eau : la statue tenant l'index est placée sur le flotteur principal qui monte dans le réservoir au fur et à mesure que l'eau s'écoule lentement par l'orifice supérieur. À l'époque, chaque période diurne était divisée en douze heures dont la durée changeait en fonction de la saison (les heures d'été étaient plus longues que les heures d'hiver). Ce découpage du temps explique le tracé des graduations sur le tambour horaire. Pour faire varier la longueur des heures, il suffisait de tourner le tambour. La soupape flottante contrôle le débit d'eau arrivant dans le réservoir principal de la clepsydre. Pour que l'ensemble du dispositif fonctionne correctement, le niveau d'eau dans le réservoir de régulation doit rester constant. Si le niveau monte (en raison d'une surpression dans l'arrivée d'eau par exemple), la soupape monte et coupe l'arrivée d'eau. Dans le cas contraire, la pointe mobile descend et l'eau pénètre plus abondamment dans le réservoir de régulation. Plus tard, Réaumur (1683–1757), Watt (1736–1819) et son régulateur, Jacquard (1752–1793) et son métier à tisser à cartes perforées font progresser l'automatisation.

Le régulateur de Watt a pour but de maintenir constante la vitesse de rotation d'une turbine à vapeur. La commande d'admission de vapeur dans la turbine est contrôlée par un robinet dont on peut manœuvrer le papillon. Un ensemble mécanique déformable constitué de masselottes et de tringles permet une mesure de la vitesse de rotation par l'effet de force centrifuge. Plus la turbine tourne vite, plus que les masselottes sont écartées de l'axe. Pour réaliser un asservissement de vitesse il suffit de transmettre mécaniquement une variation de cet écartement en commande de rotation du papillon du robinet. Si la vitesse de rotation est trop faible, l'écartement insuffisant des masselottes engendre une ouverture du papillon d'admission de la vapeur, entraînant une augmentation de la vitesse. Un comportement symétrique a lieu en cas de vitesse trop élevée.

La **seconde époque**, à partir du milieu du XIX^{ème} siècle, est caractérisée par la théorie du bouclage et les applications de l'algèbre de Boole. Les premiers travaux sur le bouclage sont dus à Maxwell (1868), à Routh avec son critère algébrique (1872) et à Hurwitz (1890).

L'étude analytique de la stabilité du régulateur de Watt fut commencée par Maxwell en 1868 et complétée en 1876 par Wichnegradsky. L'étude des systèmes bouclés doit beaucoup à l'approche fréquentielle de Nyquist, Bode, Black, Nichols, Hall, Evans, qui ont laissé leur nom à des représentations et qui ont publié la plupart de leurs résultats à la fin de la seconde

guerre mondiale. Les premières implémentations des systèmes de commande à cette époque reposaient sur l'utilisation de dispositifs électroniques à lampes.

La **troisième époque** débute avec les années cinquante. L'apparition de calculateurs numériques révolutionne le monde de l'automatique. La puissance de calcul disponible fait naître les méthodes dites de l'automatique « moderne » ou « avancée ». Parmi les faits marquants on peut citer :

- l'introduction de la représentation d'état, particulièrement bien adaptée à l'utilisation des calculateurs numériques pour l'étude et la commande des systèmes complexes et multivariables (Kalman 1960) ;
- le développement des méthodes d'étude des systèmes non-linéaires (Kockenburger, Cypkin) et des systèmes échantillonnés (Jury, Ragazzini).
- la prise en compte des phénomènes aléatoires dans les théories récentes comme celles de Kalman, de Bucy.

I.2 LA Régulation Automatique Aujourd'hui :

La régulation automatique, actuellement rebaptisée «automatique» est noyée dans les techniques modernes de commande- robotique, productique etc., en raison surtout de l'apparition de l'électronique, puis vers les années 60 des microprocesseurs et donc de l'informatique. Mais il est utile de souligner que les vieilles techniques de régulation classiques restent encore très utilisées dans l'industrie et elles ont encore de beaux jours devant elles car, la théorie en automatique avance bien plus vite que l'application et cela, parce que les moyens informatiques sont plus «performants» que la connaissance du système à traiter c'est à dire le modèle.

Il est aussi intéressant de noter qu'aujourd'hui, les mécaniciens souhaitent parrainer l'automatique car, « la robotique c'est l'automatique » ,disent-ils, et les informaticiens ont les mêmes ambitions car l'informatique industrielle est leur apanage. Et l'automatique dans tout ça ? Mais cette question, d'actualité d'ailleurs, est sans doute la conséquence des transformations des sciences de l'ingénieur subies grâce (ou à cause) de l'informatique.

I.3 Pourquoi automatiser :

- Augmentation de la fiabilité
- Augmentation de la rapidité, des performances en général
- Diminution des coûts
- Garantie de la sécurité de l'opérateur
- Augmentation de degré de stabilité.

Ce polycopié se divise en deux parties. Dans la première, nous étudierons la transformée de Laplace, les systèmes asservis, la modélisation des systèmes asservis linéaires, les éléments constitutifs d'une chaîne de régulation, les méthodes pour résoudre les équations différentielles linéaires à coefficient constant, les fonctions de transfert, les schémas fonctionnels et l'application des transformées de Laplace à la résolution des équations différentielles. Dans la deuxième partie, nous étudierons les méthodes d'analyse et de conception (les diagrammes de Bode, de Nyquist et de Black) ainsi que les performances des systèmes asservis (Stabilité Rapidité et Précision).

Ce polycopié de cours est partagé en six chapitres en plus d'une introduction générale, organisés comme suit :

- Le premier chapitre est consacré à la transformée de Laplace.
- Le deuxième chapitre présente et définit les systèmes asservis linéaires à travers la notion de systèmes et la définition d'un asservissement.
- Le chapitre 3 est destiné à la modélisation des systèmes asservis par des fonctions de transfert
- Les performances des systèmes asservis linéaires sont traitées dans le chapitre 4.
- Le cinquième chapitre est dédié à l'étude de la stabilité d'un asservissement.
- Enfin, le chapitre 6 introduit la notion de précision de l'asservissement, sa mesure temporelle et fréquentielle.

CHAPITRE I

TRANSFORMEE DE LAPLACE

I.1.Introduction :

L'étude des systèmes physiques s'accompagne obligatoirement de manipulation des équations différentielles. Cependant, la résolution n'est pas toujours simple. Pour faciliter les calculs, on utilise un outil mathématique puissant c'est la transformée de Laplace.

La transformée de Laplace permet d'associer, à toute fonction $f(t)$, une fonction $F(p)$ d'une variable complexe $p=\sigma+j\omega$. Elle permet de remplacer les opérations analytiques de dérivation et d'intégration par des opérations algébriques. Cette propriété facilite la résolution des équations différentielles.

I.2. La Transformée de Laplace Directe de LAPLACE

Par définition, $f(t)$ étant une fonction réelle du temps (nulle pour $t < 0$), on appelle Transformée de Laplace de cette fonction, notée $L \{f(t)\}$, la fonction de la variable complexe $F(p)$ telle que :

$$F(P) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-Pt} dt \quad \text{Pour } t \geq 0$$

Avec : $f(t) = 0$ pour $t < 0$

p : complexe indépendant du temps

$F(p) = L \{f(t)\}$: transformée de Laplace ou image de $f(t)$

$f(t)$: originale ou fonction objet de $F(p)$.

Exemple :

La figure A-1 représente la fonction échelon unitaire $u(t)$:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ 1 & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = U(p) = \int_0^{+\infty} u(t) e^{-pt} dt$$

$$U(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = \left[\frac{e^{-pt}}{-p} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p}$$

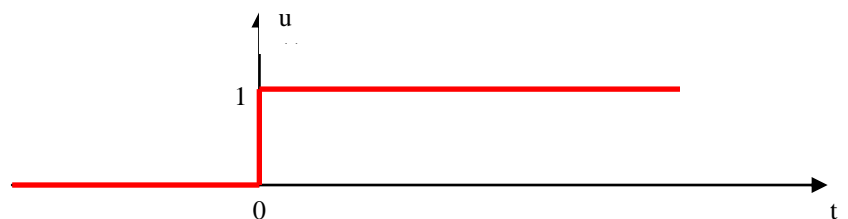


Figure I-1 : Fonction échelon unitaire

I.3. Propriétés de la transformée de Laplace

1. Linéarité :

Si α_1 et α_2 sont constants, on a :

$$\mathcal{L}\{\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)\} = \alpha_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + \alpha_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\} = \alpha_1 F_1(p) + \alpha_2 F_2(p)$$

2. Dérivation :

La transformée de Laplace de la dérivée d'une fonction $f(t)$ est :

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = pF(p) - f(0)$$

Tel que $f(0)$ représente la valeur initiale de $f(t)$

D'une manière générale, on peut écrire :

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = P^n F(P) - \sum_{r=n+1}^{r=2n} P^{2n-r} f^{(r-n-1)}(0) \quad \text{avec} \quad f^{(r-n-1)}(0) = \left. \frac{d^{(r-n-1)} f(t)}{dt^{(r-n-1)}} \right|_{t=0}$$

Exemple :

$$\text{Pour } n=2 : \quad \mathcal{L}\left\{\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right\} = P^2 F(P) - P f(0) - f'(0)$$

$$\text{Pour } n=3 : \quad \mathcal{L}\left\{\frac{d^3 f(t)}{dt^3}\right\} = P^3 F(P) - P^2 f(0) - P f'(0) - f''(0)$$

3. Intégration :

La transformée de Laplace de l'intégrale d'une fonction $f(t)$ est :

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t) dt\right\} = \frac{1}{P} \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{P} F(P)$$

En général :

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t f(t) dt^n\right\} = \frac{1}{P^n} \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{P^n} F(P)$$

4. Changement d'échelle :

Un changement d'échelle de temps se traduit par le changement de la variable " $t \rightarrow K.t$ ou $t \rightarrow K/t$ " dans la fonction $f(t)$. Soit à calculer alors : $L\{f(kt)\}$ connaissant $L\{f(t)\}$:

On a: $\mathcal{L}\{f(Kt)\} = \int_0^{+\infty} f(kt) e^{-Pt} dt$

Posons $Kt = u \implies du = Kdt \implies dt = \frac{du}{K}$

Donc $\mathcal{L}\{f(Kt)\} = \frac{1}{K} \int_0^{+\infty} f(u) e^{-\frac{P}{K}u} du = \frac{1}{K} F\left(\frac{P}{K}\right)$

D'où : $\mathcal{L}\{f(Kt)\} = \frac{1}{K} F\left(\frac{P}{K}\right)$

De même que : $\mathcal{L}\left\{f\left(\frac{1}{K}t\right)\right\} = K F(KP)$

5. Retard – Translation :

Soit à calculer $\mathcal{L}\{f(t - \tau)\}$, c'est à dire la transformée de $f(t)$ quand on fait un changement d'origine de temps.

$$\mathcal{L}\{f(t - \tau)\} = e^{-P\tau} \mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-P\tau} F(P) \quad \text{pour } t \geq \tau$$

De même : $\mathcal{L}\{f(t + \tau)\} = e^{+P\tau} \mathcal{L}\{f(t)\} = e^{+P\tau} F(P)$

6. Transformée d'une fonction périodique :

Utilisons la propriété précédente pour calculer la transformée de Laplace d'une fonction périodique à partir de $t = 0$. Considérons une fonction périodique de période T pour $t > 0$ et nulle pour $t < 0$.

La fonction $f(t)$ peut être vue comme une somme de fonctions définies chacune sur une période :

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t) + \dots + f_n(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t)$$

La fonction $f_1(t)$ se confond avec la fonction $f(t)$ sur la première période $[0, T]$ et elle est nulle ailleurs.

La fonction $f_2(t)$ est définie sur la seconde période $[T, 2T]$, Elle se déduit de la fonction $f_1(t)$ par un décalage d'une période T :

$$f_2(t) = f_1(t - T)$$

De même pour $f_3(t)$

$$f_3(t) = f_1(t - 2T)$$

ce qui peut être généraliser à :

$$f_n(t) = f_1(t - nT)$$

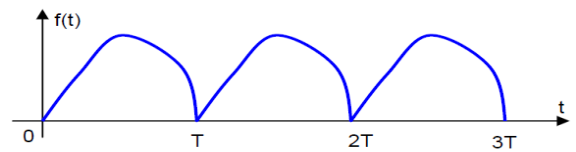


Figure I.2. La fonction f(t)

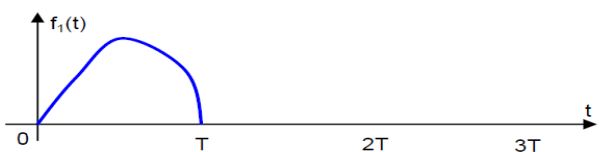


Figure I.3. La fonction f1(t)

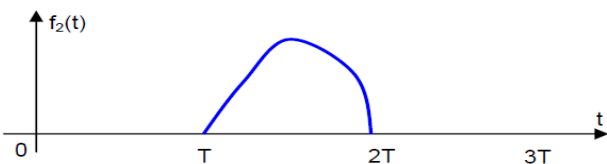


Figure I.4. La fonction f2(t)

Nous pouvons donc encore écrire :

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_1(t - kT)$$

Calculons-la transformée de Laplace de cette expression :

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} f_1(t - kT)\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{L}\{f_1(t - kT)\}$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} F_1(P)e^{-PkT} \quad \text{Où : } F_1(P) = \mathcal{L}\{f_1(t)\}$$

Nous pouvons donc écrire :

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F_1(P) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-PkT} = \frac{F_1(P)}{1 - e^{-PT}} \quad \text{Car } \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

7. Théorème de la valeur initiale

Soit à démontrer que : $f(0^+) = \lim_{P \rightarrow \infty} \{PF(P)\}$

$$\text{On a : } F(P) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-Pt} dt$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = PF(p) - f(0)$$

$$\text{Quand : } P \rightarrow \infty, e^{-Pt} \rightarrow 0. \text{ donc } 0 = PF(P) - f(0^+)$$

$$\text{Ce qui signifie : } f(0^+) = \lim_{P \rightarrow \infty} \{PF(P)\}$$

8. Théorème de la valeur finale

Soit à démontrer que : $f(\infty) = \lim_{P \rightarrow 0} \{PF(P)\}$

$$\text{On a : } F(P) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-Pt} dt$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = PF(p) - f(0)$$

$$\text{Si : } P \rightarrow 0 \text{ alors } e^{-Pt} \rightarrow 1. \text{ donc } \int_0^{\infty} f'(t) dt = \lim_{P \rightarrow 0} \{PF(P) - f(0^+)\}$$

$$\text{Or : } \int_0^{\infty} f'(t) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t f'(\tau) d\tau = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(0^+)$$

Donc : $\lim_{P \rightarrow 0} \{PF(P) - f(0^+)\} = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(0^+)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{P \rightarrow 0} \{PF(P)\}$$

Ce résultat n'est valable que si $\{p F(p)\}$ n'a aucun pôle (racine du dénominateur) dans le demi plan droit du plan complexe et aucun pôle sur l'axe imaginaire, à l'exception du pôle simple à l'origine.

9. Théorème de Duhamel (ou de Borel) - Intégrale de convolution

Le produit normal de deux transformée de laplace des fonctions $f_1(t)$ et $f_2(t)$ est égale la transformée de laplace de leur produit de convolution :

$$F_1(P).F_2(P) = \mathcal{L} \left\{ \int_0^t f_1(t - \tau).f_2(\tau)d\tau \right\} = \mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\}$$

Tel que * :Produit de convolution.

10. Fonction amortie

Soit $f(t)$ telle que $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(P)$, quelle est alors $\mathcal{L}\{e^{-\alpha t} f(t)\}$

On a : $\mathcal{L}\{e^{-\alpha t} f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-\alpha t} e^{-Pt} dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(P+\alpha)t} dt = F(P + \alpha)$

Donc : $\mathcal{L}\{e^{-\alpha t} f(t)\} = F(P + \alpha)$

11. Multiplication par t

Considérons la dérivée par rapport à p de f (t) :

$$\frac{dF(P)}{dP} = \frac{d}{dP} \int_0^\infty f(t)e^{-Pt} dt$$

Comme la variable P n'apparait que dans l'exponentielle, nous avons :

$$\frac{dF(P)}{dP} = \int_0^\infty f(t) \frac{de^{-Pt}}{dP} dt = - \int_0^\infty \{t.f(t)\}.e^{-Pt} dt$$

Soit encore : $\mathcal{L}\{t.f(t)\} = -\frac{dF(P)}{dP}$

Remarque

Si les conditions initiales sont nulles, alors :

➤ dériver dans le domaine temporel revient à multiplier par p dans le domaine de Laplace.

➤ intégrer dans le domaine temporel revient à diviser par p dans le domaine de Laplace.

I.4. Transformée Inverse de Laplace [1,4]:

$f(t)$ est la fonction originale de $F(p)$ (donc $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)]$), nous admettrons que si elle existe, elle est unique. En utilisant les intégrales de Fourier et de Melin-Fourier, on a :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p) e^{pt} dp \quad (t \geq 0)$$

c : est l'abscisse de convergence

Cette méthode est difficile à utiliser et on préfère généralement :

-Soit l'utilisation de la tables de transformées de Laplace.

- Soit la décomposition de $F(p)$ en fraction partielles et écrire $F(p)$ en termes de fonction simples de p pour lesquelles la transformée de Laplace est toujours connue.

Soit $F(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$ avec $\deg(N(p)) \leq \deg(D(p))$, en utilisant la décomposition en éléments simples on trouve:

$$F(p) = \frac{A}{P+a} + \frac{B}{P+b} + \dots + \frac{E}{(P+c)^2} + \dots + \frac{GP+S}{(P+d)^2 + e^2} + \dots$$

Exemple

Déterminer la transformée de Laplace inverse de la fonction $F(P) = \frac{P^2-3}{2P^2+P-1}$

Solution :

$$F(P) = \frac{P^2 - 3}{2P^2 + P - 1} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{0.5P + 2.5}{P^2 + 0.5P - 0.5} \right]$$

$$\text{Avec } \frac{0.5P+2.5}{P^2+0.5P-0.5} = \frac{A}{P+1} + \frac{B}{P-0.5} = \frac{-\frac{4}{3}}{P+1} + \frac{\frac{11}{6}}{P-0.5}$$

$$\text{D'où } F(P) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \frac{1}{P+1} - \frac{11}{12} \frac{1}{P-0.5}$$

On obtient alors :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)] = 0.5 \delta(t) + \left(\frac{2}{3} e^{-t} - \frac{11}{12} e^{0.5t} \right) u(t)$$

I.5. Résolution d'équations différentielles à coefficients Constants

I.5.1 Equation du premier ordre :

Soit $f(t) = \dot{y} + ay$ avec $y(0^+) = y_0$

On a $\mathcal{L}\{\dot{y} + ay\} = \mathcal{L}\{F(t)\} \iff P Y(P) - y_0 + aY(P) = F(P)$

Donc $(P + a)Y(P) = F(P) + y_0$

D'où : $Y(P) = \frac{F(P)}{P+a} + \frac{y_0}{P+a}$ et $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(P)\}$

Exemple

Trouver $y(t)$ si $f(t)$ est un échelon unité ($f(t)=u(t)$)

Solution

$f(t) = u(t) \iff F(P) = \frac{1}{P}$

$$Y(P) = \frac{1}{P(P+a)} + \frac{y_0}{P+a} = \frac{A}{P} + \frac{B}{P+a} + \frac{y_0}{P+a} = \frac{(A+B)P + Aa}{P(P+a)} + \frac{y_0}{P+a}$$

Par identification, on trouve : $A = \frac{1}{a}$ et $B = \frac{-1}{a}$

D'où : $y(t) = \left[\frac{1}{a} + \left(y_0 - \frac{1}{a} \right) e^{-at} \right] u(t)$

1.5.2 Equation du Second ordre :

Soit $f(t) = \ddot{y} + a\dot{y} + by$ avec $y(0^+) = y_0$ et $\dot{y}(0^+) = \dot{y}_0$



On a $\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{\ddot{y} + a\dot{y} + by\}$ $P^2 - Py_0 - \dot{y}_0 + aPY(P) - ay_0 + bY(P) = F(P)$

$(P^2 + aP + b)Y(P) = F(P) + Py_0 + ay_0 + \dot{y}_0$

D'où : $Y(P) = \frac{F(P)}{P^2+aP+b} + \frac{(P+a)y_0+\dot{y}_0}{P^2+aP+b}$ et $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(P)\}$

Exemple :

Trouver $y(t)$ si $f(t)$ est une impulsion avec $y(0^+) = 1, \dot{y}(0^+) = -1, a = 2$ et $b = 5$

Solution :

$$Y(P) = \frac{P+2}{P^2+2P+5} = \frac{P+1}{(P+1)^2+4} + \frac{1}{(P+1)^2+4}$$

D'où : $y(t) = e^{-t}[\cos(2t) + 0.5 \sin(2t)]u(t)$

Exercice N°1 :

En appliquant les transformées de Laplace, résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = tu(t)$$

Tel que $u(t)$ est un échelon unité

Avec les conditions initiales $y(0^+) = 1, \dot{y}(0^+) = 1$

Solution :

D'après la propriété de transformée de la dérivée :

$$P^2 Y(P) - P - 1 + 5P Y(P) - 5 + 4Y(P) = \frac{1}{P^2}$$

$$Y(P) = \frac{P^3 + 6P^2 + 1}{P^2(P+4)(P+1)} = \frac{a}{P^2} + \frac{b}{P} + \frac{c}{P+4} + \frac{d}{P+1}$$

On obtient: $a = \frac{1}{4}, b = \frac{-5}{16}, c = \frac{-11}{16}, d = 2$

$$\text{Alors : } S(t) = \frac{-5}{16} + \frac{t}{4} - \frac{11}{16} e^{-4t} + 2e^{-2t}$$

Exercice N°2:

Trouver la transformée inverse de Laplace des fonctions suivantes :

$$\text{a) } F(P) = \frac{P+2}{(P+1)^2(P+3)}$$

$$\text{b) } H(P) = \frac{P^2+2P+2}{P^2+3P+2}$$

Solution :

$$\text{a) } S(t) = -1 + \frac{1}{4} e^{-t} + \frac{3}{4} e^{-t} - \frac{1}{2} t e^{-t}$$

$$\text{b) } S(t) = \delta(t) + e^{-t} - 2 e^{-2t}$$

CHAPITRE II

SYSTEMES ASSERVIS CONTINUS LINEAIRES

II.1. Introduction à l'automatique

L'automatique est généralement définie comme la science qui traite des ensembles qui se suffisent à eux-mêmes et où l'intervention humaine est limitée à l'alimentation en énergie et en matière première [1,2].

L'objectif de l'automatique est de remplacer l'homme dans la plupart des tâches (tâches répétitives, pénibles, dangereuses, trop précises, trop rapides) qu'il réalise dans tous les domaines sans intervention humaine.

Les systèmes automatiques permettent donc :

- * de réaliser des opérations trop complexes ou délicates ne pouvant être confiés à l'homme,
- * de se substituer à l'opérateur pour des tâches répétitives,
- * d'accroître la précision,
- * d'améliorer la stabilité d'un système et sa rapidité.

De tels dispositifs se rencontrent fréquemment dans la vie courante, depuis les mécanismes biologiques du corps humain jusqu'aux usines entièrement automatisées.

Une telle science englobe un grand nombre de disciplines et, par conséquent, un automaticien devrait être à la fois : Mathématicien, Electricien, Mécanicien et Economiste

Exemple

Nous sommes entourés d'un grand nombre de systèmes automatiques, machine à laver, ascenseur, distributeur de boisson, robot, suivi de trajectoire d'un missile.

II.2. Evolution de l'automatique

Ces dernières années, l'automatique s'est considérablement modernisée, surtout depuis l'avènement des calculateurs numériques. Les systèmes automatiques conduits par calculateurs assurent la quasi-totalité des tâches :

- * ils collectent et traitent les informations issues des capteurs qui fournissent l'ensemble des variables d'entrée.
- * ces variables d'entrée constituent les données sur lesquelles des calculs numériques seront effectués. Ils correspondent à la résolution numérique de systèmes d'équations qui constituent le "modèle mathématique".
- * le résultat de ce traitement fourni en binaire est converti en variables continues et est injecté dans le processus, afin de modifier son évolution dans un sens désiré.

II.3. Généralités Sur Les Systèmes

II.3.1. Définitions :

Système : Un système est un ensemble de processus physique-chimiques en évolution, des actions sur le système (entrées) sont effectuées dans le but d'obtenir des objectifs donnés (sorties) [3,5].

Les signaux relatifs à un système sont de deux types :

- Signaux d'entrées : ils sont indépendants du système et peuvent être commandables (consignes) ou non commandables (perturbations).
- Signaux de sorties : ils sont dépendants du système et du signal d'entrée. Pour évaluer les objectifs, ces signaux doivent être observables par utilisation de capteurs.

La consigne : C'est une grandeur d'origine théorique qui peut se présenter sous deux formes :

- Signal analogique : par exemple la tension de sortie d'un potentiomètre.
- Information numérique : contenu d'une variable informatique, par exemple la variable position dans le cas d'une commande de position angulaire d'une antenne.

Le schéma ci-dessous illustre un système à une entrée de commande, une sortie et une entrée de perturbation :

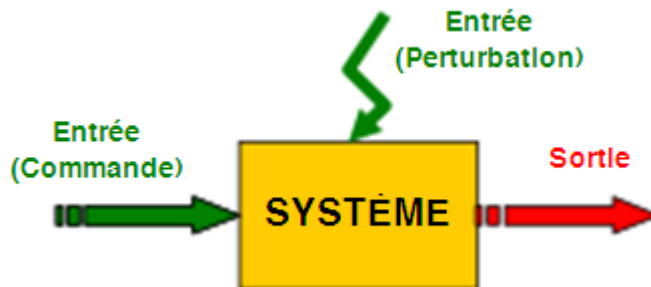


Figure II.1. Système avec perturbation

Elaboration de la commande : Le schéma ci-dessous illustre l'organisation de la commande :



Figure II.2. Commande d'un système en boucle ouverte

Le bloc de commande :

C'est l'organe permettant de traduire la consigne en une grandeur de commande compatible avec le système. C'est par exemple, un amplificateur suiveur de puissance pour la commande de vitesse d'un moteur à courant continu

La commande : C'est la grandeur susceptible de changer l'état du système et en particulier l'état de la sortie.

II.3.2. Classification des systèmes

1) **Système linéaire :** un système analogique est linéaire s'il est décrit par une ou plusieurs équations différentielles linéaires [5].

Un système linéaire vérifie le principe de superposition : la sortie $s(t)$ correspond à la somme de plusieurs entrées $e_1 + e_2 + \dots$. Est égale à la somme $s_1 + s_2 + \dots$ des sorties correspondant à chacune des entrées.

D'une manière générale, si une entrée $e_i(t)$ correspondant la sortie $s_i(t)$ donc :

$$e(t) = \sum_{i=1}^n a_i e_i(t) \tag{II - 1}$$

Correspondant la sortie :

$$s(t) = \sum_{i=1}^n a_i s_i(t) \tag{II - 2}$$

2) Les systèmes invariants

Un système est dit invariant (stationnaire) si la réponse du système à un signal $x(t)$ différé d'un temps τ est la même que la réponse $y(t)$ du système mais différée de τ

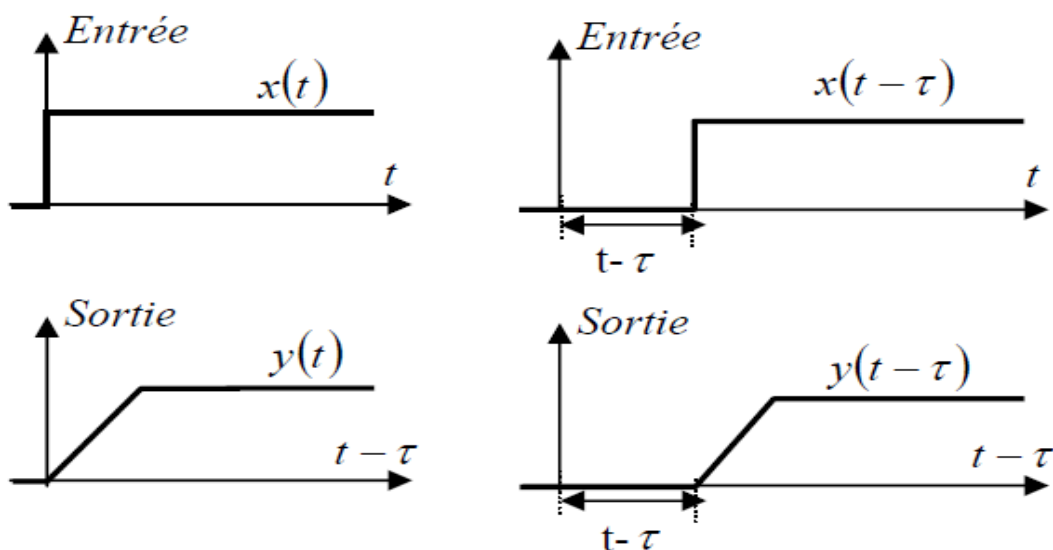


Figure II.3. Entrées- Sorties d'un Système Invariant

Un système invariant est aussi appelé système à paramètres constants localisés ou à constantes localisées. Cette propriété des systèmes invariants est aussi appelée principe de permanence.

- 3) **Systèmes causales** : un système est dit causal si les sorties ne peuvent dépendre d'entrée ultérieures. Les systèmes physiquement réalisables sont des systèmes causals.
- 4) **Système analogique** : un système est dit analogique (ou continu) si les entrées et les sorties sont analogiques ainsi que le traitement interne qui les relie.
- 5) **Système discret** : un système est dit discret (ou échantillonné) s'il traite des données discrètes, avec un traitement interne discret. Un système peut contenir des parties analogiques et des parties discrètes.

II.4. Systèmes en boucle ouverte

Un système est en boucle ouverte lorsqu'on n'a aucune information sur la sortie.

Exemple :

Prenons l'exemple du réglage de la température d'un four en agissant sur le débit du combustible assurant la production de chaleur :

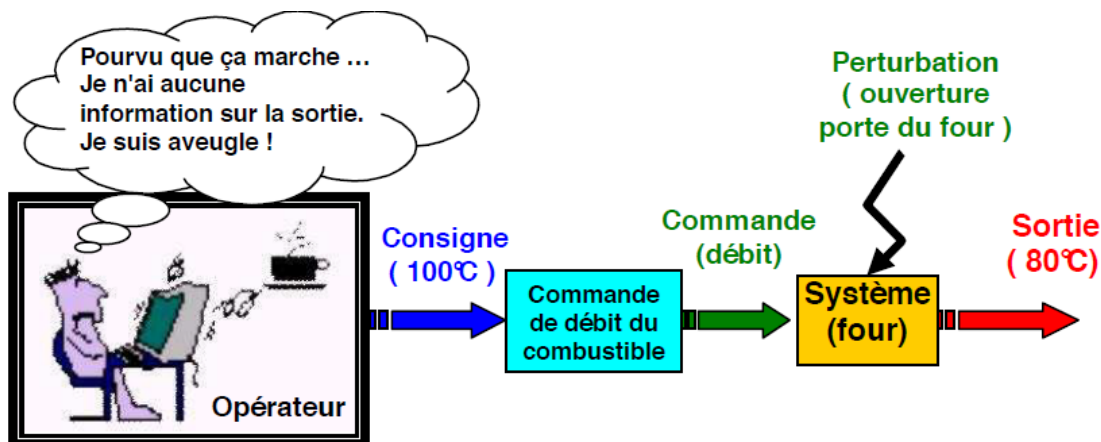


Figure II.4. Commande de la température d'un Four

Inconvénients de la boucle ouverte

- Correction impossible : n'ayant aucune information sur la sortie. L'opérateur ne peut élaborer aucune stratégie d'ajustement pour obtenir la sortie désirée.
- Sensibilité aux perturbations : en admettant que la sortie soit conforme à la consigne, une perturbation peut à un moment donné affecter la sortie. L'opérateur «aveugle» ne pourra corriger cette situation.

Cas où la commande en boucle ouverte est possible :

La commande en boucle ouverte est très utilisée dans des cas simples de systèmes stables avec une moindre exigence sur la sortie

Exemples : Moteur électrique, Four domestique, Système d'arrosage ... etc

II.5. Systèmes Asservis

II.5. 1.Principe des systèmes asservis :

Un système asservi est un système qui prend en compte, durant son fonctionnement, l'évolution de ses sorties pour les modifier et les maintenir conforme à une consigne.

Le principe de base d'un asservissement est de mesurer l'écart entre la valeur réelle et la valeur cible de la grandeur asservie, et de piloter les actionneurs agissant sur cette grandeur pour réduire cet écart [8,10].

Un système asservis contient les éléments suivants :

a- Schéma fonctionnel : c'est une représentation graphique abrégée des entités entrée et sortie d'un système physique.

b- Système : c'est un dispositif isolé soumis à des lois bien définies. Chaque système a plusieurs entrées et sorties par lesquelles on peut exercer une influence sur ce système.

c- La consigne : c'est ce que je veux, ce que je désire obtenir, exemple je veux 20 degrés dans mon salon.

d- La grandeur réglante : c'est la grandeur qui va agir sur le processus (ex : four) pour permettre dans notre exemple de modifier la température.

e- La grandeur réglée : c'est ce que j'ai réellement, exemple j'ai 18 degrés dans ma pièce alors que j'en veux 20.

f- Les perturbations: ce sont des phénomènes qui peuvent modifier la bonne stabilité d'une boucle de régulation (ex : ouverture d'une fenêtre dans le cas d'une régulation de température d'un local domestique).

g- Le comparateur: Compare en permanence la consigne et la grandeur réglée et donne le résultat de cette comparaison au régulateur.

h- l'erreur e : appelé également signal de commande, c'est la somme algébrique des signaux d'entrées et de sorties.

Exemple

Reprenons l'exemple de la commande en température d'un four. Nous allons donner une information supplémentaire à l'opérateur. Il s'agit de lui indiquer la température du four.

L'opérateur compare la température désirée (consigne) avec la température réelle (mesure) pour évaluer l'écart (erreur) et ajuster en conséquence (commande).

Le schéma suivant représente le système asservi :

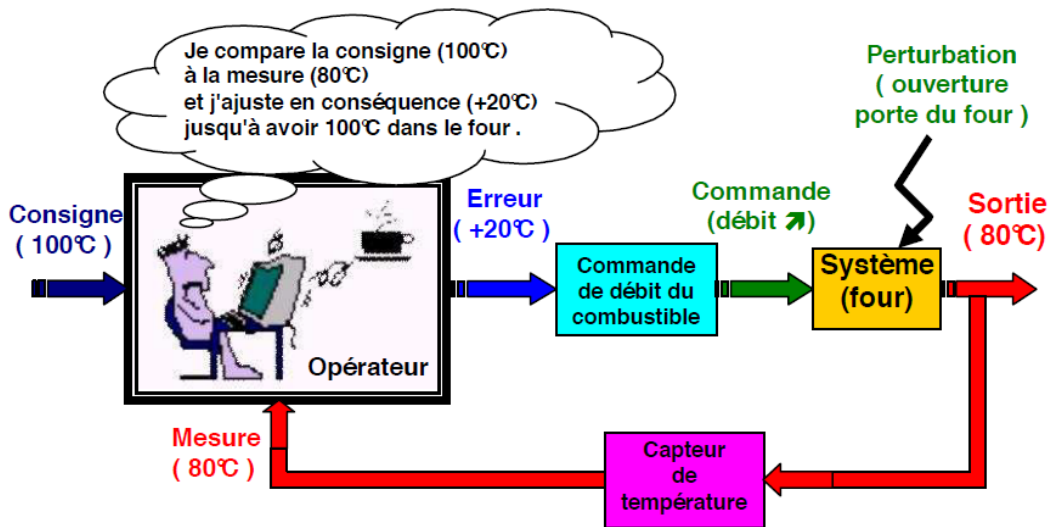


Figure II.5.Exemple d'un Système Asservis

II.5.2. Schéma Général :

Le schéma général d'un système asservi est illustré par la figure suivante :

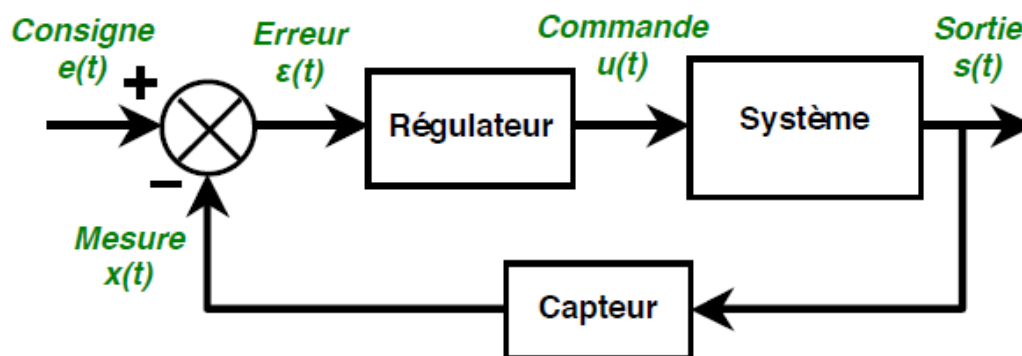


Figure II.6. Schéma général d'un système asservis

II.5.3. Asservissement Et Régulation [3,5]:

Asservissement : La consigne n'est pas constante et les grandeurs perturbatrices n'existent pas ou sont très peu influentes sur la grandeur à maîtriser.

Exemple : asservissement de température (obtention d'un profil de température en fonction du temps dans un four de traitement thermique).

Régulation : permet de maintenir une grandeur physique à une valeur constante quel que soient les perturbations extérieures. L'objectif global de la régulation peut se résumer par ces trois mots clefs : Mesurer, Comparer et Corriger [4,6].

Exemple :

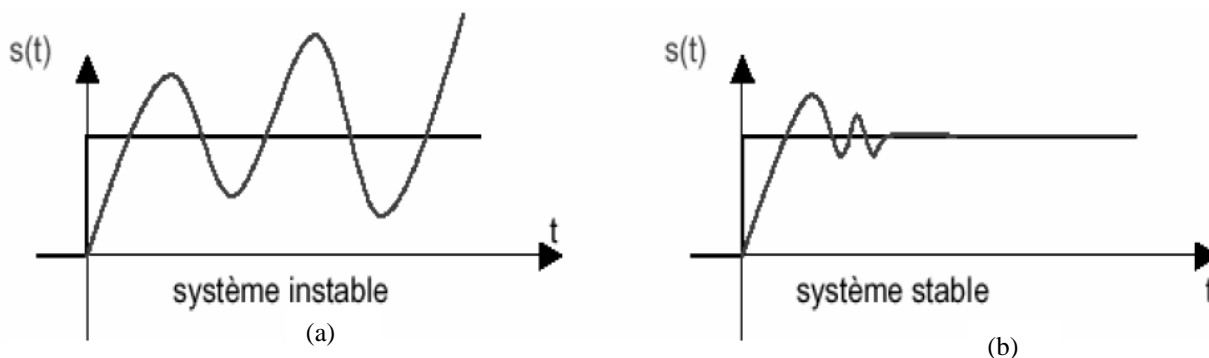
Régulation de température dans un local subissant les variations climatiques.

Remarque : En pratique, lorsqu'un changement de consigne est effectué, une régulation devient un asservissement et un asservissement qui maintient une grandeur constante pendant une durée donnée peut subir une perturbation et devient alors une régulation.

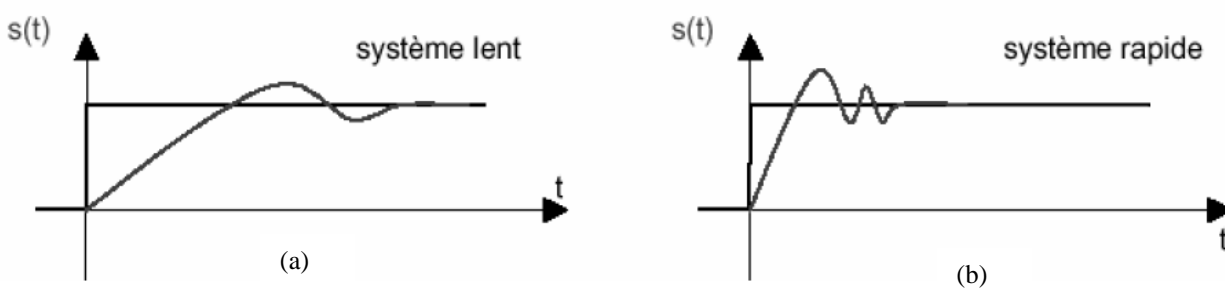
Dans beaucoup de cas il y a à la fois régulation et asservissement. On parle alors de système asservi soit de maintien ou de poursuite.

II.6. Performances des Systèmes Asservis

La stabilité : On dit qu'un système est stable, lorsque celui-ci tend à revenir à son état d'équilibre lorsqu'on lui applique une perturbation de courte durée.



La rapidité : La rapidité quantifie le temps de réponse du système.



Le temps de réponse est la durée mis par la réponse pour ne plus dépasser $\pm 5\%$ de la valeur finale. Ce temps est retenu comme critère de rapidité : $t_r 5\%$

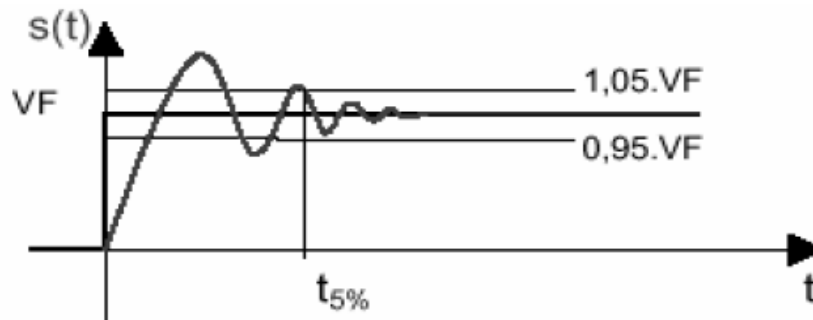


Figure II.9. Temps de Réponse

La précision : quantifie l'erreur lorsque l'équilibre est atteint. avec $e(t)$ et $s(t)$ de même nature. Autrement, l'erreur est mesurée à la sortie du comparateur.

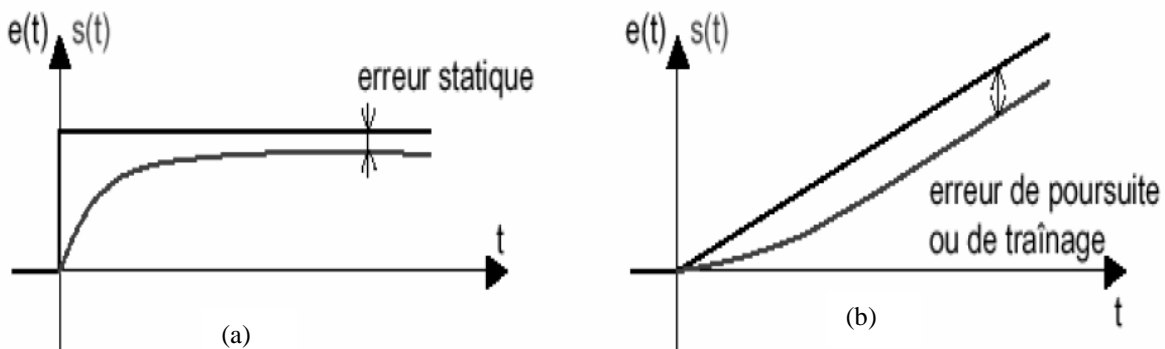


Figure II.10. (a) :Erreur Statique ,(b) : Erreur de Traînage

Exercice N°1 :

La réponse d'un système du deuxième ordre est donnée par le graphe ci-dessous :

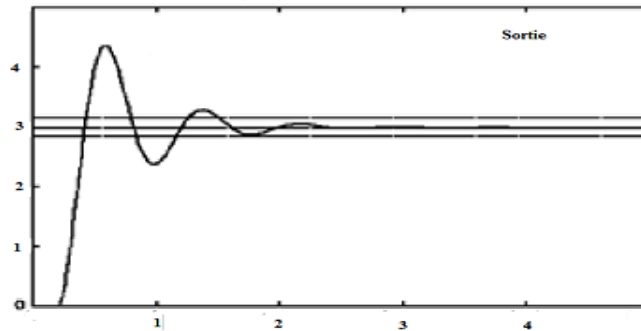


Figure II.11. La réponse d'un système du deuxième ordre

1-Relever à partir du graphe le dépassement $D=A/B$ ainsi que le temps de montée ?

2-D'après le graphe, le système est-il stable ?

Solution :

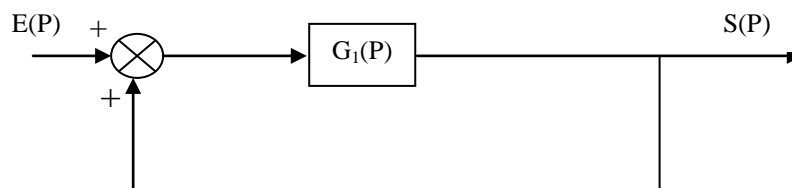
1)

$$\frac{A}{B} = \frac{4.5-3}{3} = 0.5, \text{ Le temps de montée } \tau=0.25 \text{ s}$$

2) Le système est stable car la réponse du système converge vers une valeur finie 3.

Exercice N°2 :

Soit un système décrit par le schéma fonctionnel suivant :



Tel que : $G(P) = \frac{k}{P(P+2)}$

Trouvez les domaines de variations de k pour les trois régimes possibles.

Solution :

$$T(P) = \frac{G(P)}{1+G(P)} = \frac{\frac{k}{P(P+2)}}{1+\frac{k}{P(P+2)}} = \frac{k}{P^2+2P+k} = \frac{w_n^2}{P^2+2\eta w_n P+w_n^2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} w_n^2 = k \\ 2\eta w_n = 2 \end{cases} \Rightarrow \eta = \frac{1}{w_n} = \frac{1}{\sqrt{k}}$$

Pour $0 < \eta < 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{k}} < 1 \quad \Rightarrow \quad k > 1$ Régime sur amorti.

Pour $\eta = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 \quad \Rightarrow \quad k = 1$ Régime amorti .

Pour $\eta > 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{k}} > 1 \quad \Rightarrow \quad k < 1$ Régime moins amorti .

CHAPITRE III

MODELISATION DES SYSTEMES ASSERVIS LINEAIRES

III.1. Introduction

La plupart des systèmes physiques peuvent être décrits comme étant des opérateurs faisant correspondre des réponses (Sorties) à des sollicitations (entrées). Ainsi, un système électrique pourra être étudié et caractérisé en exprimant une tension de sortie (réponse) en fonction d'une tension d'entrée (sollicitation).

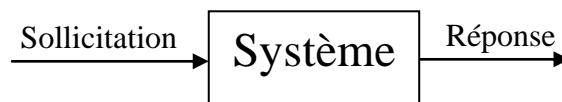


Figure III.1.Représentation d'un système

Les exemples peuvent être multipliés à l'infini, car finalement, cette modélisation peut s'appliquer à la quasi totalité des objets physiques, et ce, que ce soit en électricité, en mécanique, en chimie, en optique, etc. Tout système peut donc s'apparenter au modèle proposé sur le schéma de la figure. Dans la réalité, les systèmes peuvent posséder une ou plusieurs entrées, une ou plusieurs sorties, certaines sorties pouvant même éventuellement être considérées comme de nouvelles entrées (cas des systèmes bouclés que nous étudierons plus tard).

Nous étudierons dans ce chapitre, la manière dont le fonctionnement de tels systèmes peut être décrit, à partir de modèles mathématiques plus ou moins sophistiqués (en tout cas adaptés à la complexité du problème). Ceci nous permettra de répondre à différents types de question, par exemple :

- Quelle sera la réponse d'un système quelconque à telle ou telle entrée ? (Aspect prédictif.)
- De quoi se compose un système qui fournit telle réponse à telle entrée ? (Aspect caractérisation, identification, mais aussi diagnostic et détection de défauts).
- Comment adapter ou régler un système pour qu'il fournisse une réponse donnée à une certaine entrée ?

Il est déjà évident qu'une meilleure connaissance de ces systèmes conditionne non seulement leur utilisation, mais également tous les concepts physiques qui y sont associés.

III.2. Mise en Equations d'un Système Linéaire [5,10]

Les systèmes étudiés sont considérés linaires et n'auront qu'une entrée et qu'une sortie.

L'équation liant la sortie à l'entrée d'un système linéaire est une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

La forme générale de cette équation différentielle est :

$$a_0s(t) + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} = b_0e(t) + b_1 \frac{de(t)}{dt} + \dots + b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m}$$

Ces systèmes linéaires sont homogènes, c'est à dire $s(k.e) = k.s(e)$ et additifs, c'est à dire que l'on a $s(e_1 + e_2) = s(e_1) + s(e_2)$.

On appelle l'ordre de l'équation précédente (n), **l'ordre du système linéaire**. Seuls les systèmes pour lesquels $m \leq n$ se rencontrent dans la pratique.

III.2. 1. Système électrique du premier ordre

Exemples : Circuit RC

Soit le circuit RC en figure III.1 :

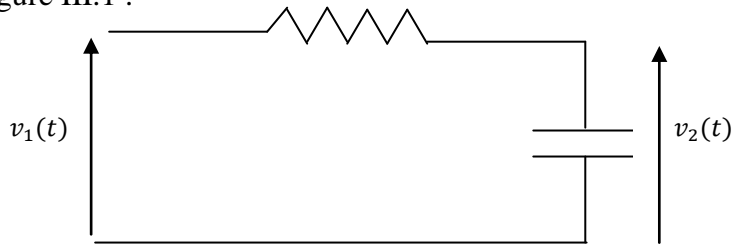


Figure III.2.Circuit RC

Les équations électriques

$$v_1 = R.i + v_2$$

$$C \frac{dv_2}{dt} = i$$

Nous pouvons obtenir une équation différentielle d'ordre 1 reliant la sortie v2 et l'entrée v1 :

$$v_1 = R.C. \frac{dv_2}{dt} + v_2$$

III.2. 2. Système électrique du second ordre [3]

On considère le montage électrique représenté sur la figure. On injecte dans ce système un signal d'entrée $e(t)$ correspondant à un échelon de tension de 0 à 5 V.

Déterminer l'équation différentielle qui lie $e(t)$ à la tension de sortie $s(t)$.

En déduire la fonction de transfert du système.

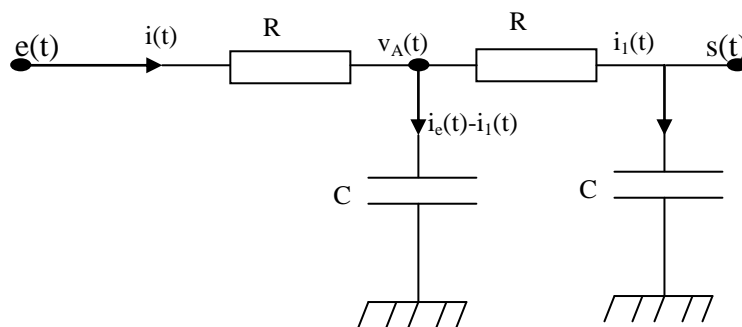


Figure III.3.Système Electrique de Second ordre

Appelons A le point commun aux deux résistances et $v_A(t)$ la tension en ce point. Nommons les courants dans les différentes branches du circuit et appliquons la loi des nœuds au point A :

$$\frac{e - v_A}{R} = C \frac{dv_A}{dt} + \frac{v_A - s}{R}$$

Par ailleurs, le courant $i_1(t)$ circulant dans le second condensateur, on peut écrire :

$$C \frac{ds}{dt} = \frac{v_A - s}{R}$$

Tirons de cette équation l'expression de la tension $v_A(t)$ et remplaçons celle-ci dans la première équation :

$$v_A = RC \frac{ds}{dt} + s(t)$$

$$e - RC \frac{ds}{dt} - s(t) = R^2 C^2 \frac{d^2s}{dt^2} + 2RC \frac{ds}{dt}$$

On obtient ainsi l'équation différentielle qui lie $s(t)$ à $e(t)$:

$$R^2 C^2 \frac{d^2s}{dt^2} + 3RC \frac{ds}{dt} + s(t) = e(t)$$

III.3. Représentation Des Systèmes

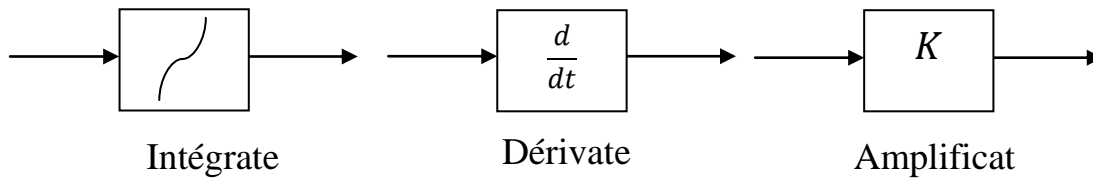
Les systèmes industriels sont par nature complexes, il est nécessaire de décomposer le système en sous-systèmes plus facilement modélisable. Par assemblage des différents modèles, il sera possible de déduire le comportement global du système complexe.

Généralement on utilise la représentation par schéma fonctionnel mettant en relation les entrées et sorties du système et permettant de comprendre la structure du système selon un point de vue commande, ce mode de représentation est intéressant lorsque l'on souhaite comprendre les « communications » entre les composant.

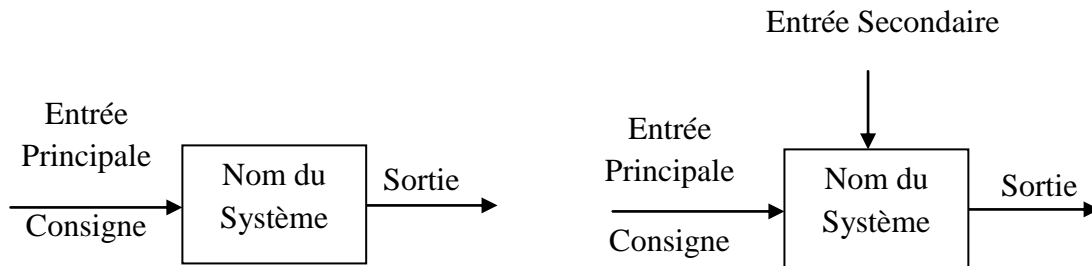
On distingue trois types d'éléments graphiques principaux :

- 1) **Le bloc** : qui contient un nom et possède une ou plusieurs entrée/sortie, le nom est en général le nom du comportement (exemple : moteur, réducteur,...etc), ou bien encore l'opérateur mathématique associé.

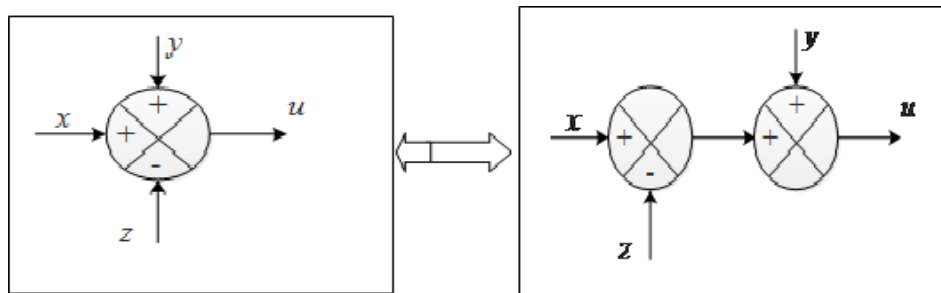
Exemple :



Une entrée secondaire correspond en général à une perturbation :



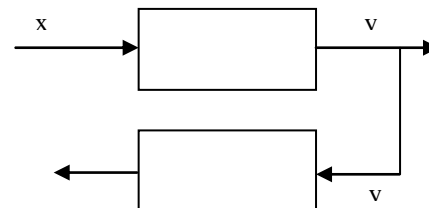
2) **Le point de sommation** (sommateur, soustracteur, comparateur) : qui réalise des opérations de type addition ou soustraction (opérations réalisées par la partie commande en général).



$$u = x + y - z$$

3) **Le point de prélèvement ou de jonction :**

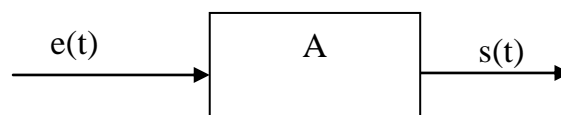
Une variable est réutilisée comme entrée d'un bloc (ne pas confondre avec les schémas électriques)



III.4. Notion De Fonction De Transfert

III.4.1. Définition

Rappelons que si nous considérons un système quelconque A, le plus général possible, possédant une entrée e(t) et une sortie s(t) :



Alors, Si on applique un signal à l'entrée, on obtiendra, à la sortie, un signal qui sera liée au signal d'entrée par une équation différentielle de type :

$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_0 e(t)$$

En appelant S(p) et E(p) les transformées Laplace de s(t) et de e(t), si on prend la Transformée de Laplace des deux membres de l'équation différentielle, on aura :

$$a_n P^n S(P) + \dots + a_1 P S(P) + a_0 S(P) = b_m P^m E(P) + \dots + b_1 P E(P) + b_0 E(P)$$

D'où :

$$S(P) = \frac{b_m P^m + \dots + b_1 P + b_0}{a_n P^n + \dots + a_1 P + a_0} E(P)$$

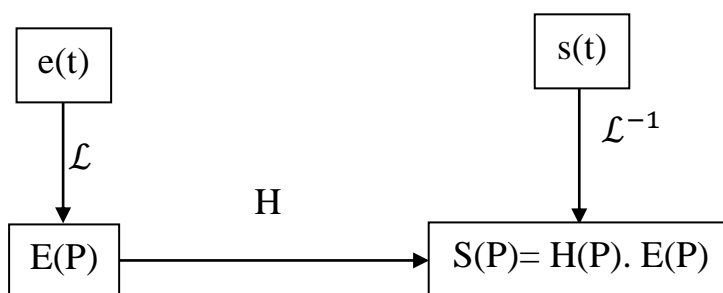
Par définition, La **Fonction De Transfert** (ou **Transmittance**) du système est le quotient :

$$H(P) = \frac{b_m P^m + \dots + b_1 P + b_0}{a_n P^n + \dots + a_1 P + a_0}$$

C'est aussi le rapport de la transformée de Laplace de la sortie à la transformée de Laplace de l'entrée quand toutes les conditions initiales sont nulles. Dans ce cas, on a : $S(p) = F(p) \cdot E(p)$

La Fonction de Transfert caractérise la dynamique du système. Elle ne dépend que de ses caractéristiques physiques. Ainsi, dorénavant, un système sera décrit par sa fonction de transfert et non par l'équation différentielle qui le régit.

Si on connaît la fonction de transfert H(p), il est possible de calculer la réponse du système à n'importe quelle entrée selon le schéma de principe suivant :



Si $e(t) = \delta(t)$ alors $S(P) = H(P)$, la fonction de transfert est dans ce cas égale à la transformée de Laplace de la réponse impulsionnelle.

III.4.2. Pôles et zéros d'une fonction de transfert [8]:

La fonction de transfert se présente sous la forme de deux polynômes en p, le numérateur B(p) et le dénominateur A(p) qui possèdent des racines. Les racines z_i du numérateur représentent les zéros alors que les racines p_i du dénominateur constituent les pôles de la fonction de transfert H(p).

La fonction de transfert se met sous la forme suivante :

$$H(P) = \frac{B(P)}{A(P)} = c \cdot \frac{\prod_i^n (P - z_i)}{\prod_j^m (P - p_j)} = c \cdot \frac{(P - z_1)(P - z_2) \dots (P - z_n)}{(P - p_1)(P - p_2) \dots (P - p_m)}$$

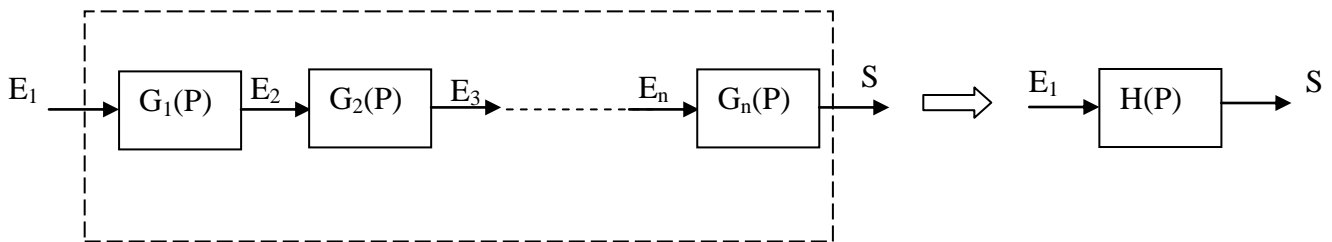
Cette expression peut se décomposer en éléments simples pour donner :

$$H(P) = \sum_i \frac{a_i}{P - p_i}$$

III.4.3. Règle de simplifications des schémas blocs :

III.4.3.1. Mise en série (ou cascade)

Soit n éléments de fonction de transfert G1 (p)Gn (p) mis en série (la sortie du premier est reliée à l'entrée du second, etc...).



La fonction de transfert de l'ensemble est égale au produit des fonctions de transfert de chaque élément :

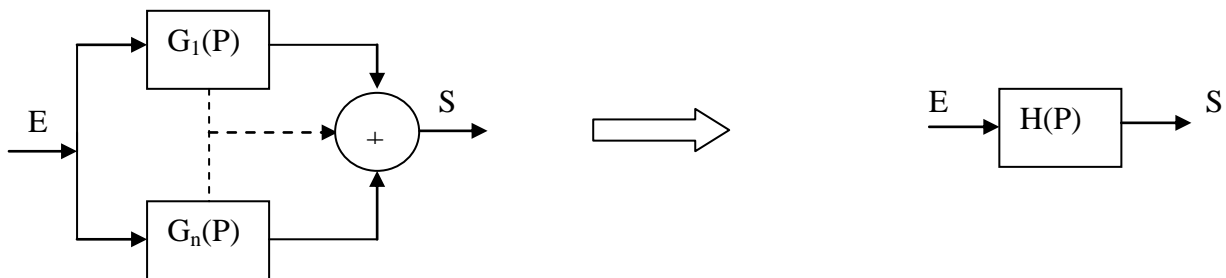
$$H(P) = \frac{S(P)}{E_1(P)} = G_1(P) \cdot G_2(P) \dots G_n(P)$$

Ceci est évident puisque, par définition, on a :

$$G_1(P) = \frac{E_2(P)}{E_1(P)}, G_2(P) = \frac{E_3(P)}{E_2(P)}, \dots, G_n(P) = \frac{S(P)}{E_n(P)} \text{ et } H(P) = \frac{S(P)}{E_1(P)}$$

III.4.3.2. Mise en parallèle

Soient n éléments de fonction de transfert G1 (p)Gn (p) mis en parallèle.



La fonction de transfert équivalente $H(p)$ a pour expression :

$$H(P) = \frac{S(P)}{E(P)} = G_1(P) + G_2(P) + \dots + G_n(P)$$

On peut considérer que $S(p)$ est le résultat de la superposition des n sorties des n éléments, c'est-à-dire que :

$$S(p) = S_1(p) + S_2(p) + \dots + S_n(p) \text{ (en vertu de la linéarité du système, les effets s'ajoutent)}$$

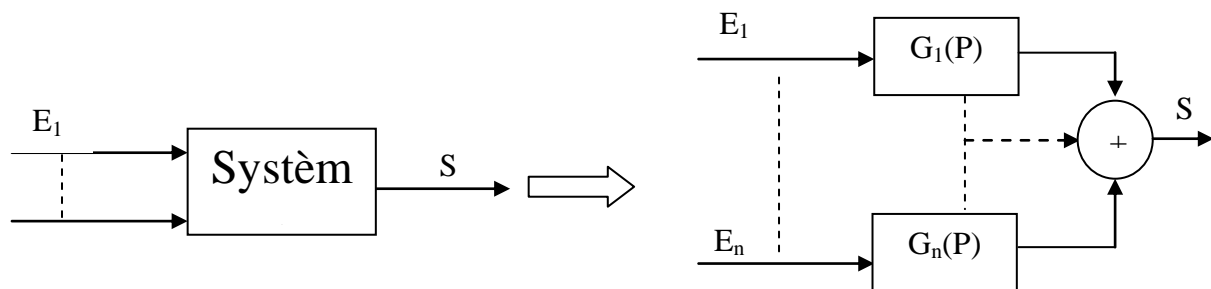
Chaque élément pris, indépendamment, donnera une sortie $S_i(p)$ quand on lui applique l'entrée $E(p)$.

Donc :

$$S(P) = \sum_i S_i(P) = G_1(P).E(P) + G_2(P).E(P) + \dots + G_n(P).E(P)$$

$$S(P) = [G_1(P) + G_2(P) + \dots + G_n(P)].E(P), \text{ d'où } G(P) = [G_1(P) + G_2(P) + \dots + G_n(P)]$$

III.4.3.3. Cas d'un système à n entrées indépendantes



La fonction de transfert n'a de sens qu'entre la sortie et une entrée. Le système de la figure pourra donc se décomposer en n constituants ayant la sortie en commun et pour entrée chacune des n entrées.

On calculera les fonctions de transfert $G_i(p)$ de chaque élément en supposant nulles les entrées autres que $E_i(p)$. Ceci n'est possible que si les différentes équations du système ne sont pas couplées entre elles.

Dans ce cas, on peut écrire :

$$S(P) = \sum_i G_i(P).E_i(P)$$

Il n'y a pas de fonction de transfert globale pour le système.

III.4.3.4. Fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO)

La Fonction de Transfert en Boucle Ouverte (également appelée F.T.B.O.) est la fonction de transfert qui lie les transformées de Laplace de la sortie de la chaîne de retour $S(P)$ à l'erreur $\varepsilon(P)$. Elle correspond à l'ouverture de la boucle .

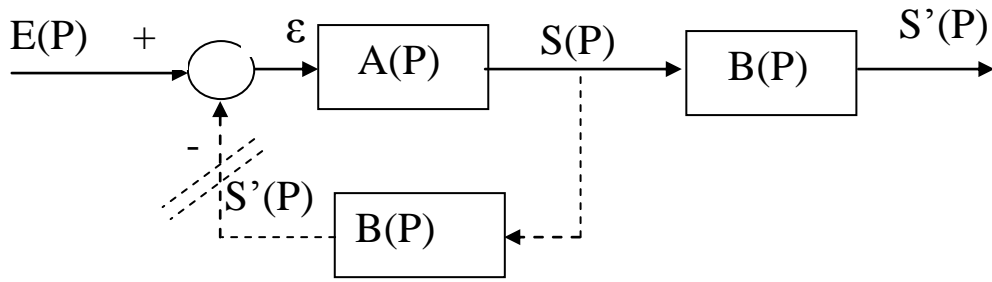


Figure III.4. Système en Boucle Ouverte

Dans ce cas, $\varepsilon = E$ puisque le comparateur ne reçoit plus qu'une seule information.

On a donc : $S'(P) = B(P).S(P) = B(P).A(P).\varepsilon(P)$

$$S'(P) = B(P).A(P).E(P)$$

D'où : $\frac{S'(P)}{\varepsilon(P)} = K(P) = A(P).B(P)$

La Fonction de Transfert en Boucle Ouverte (ou FTBO) d'un asservissement est le produit des fonctions de transfert de la chaîne directe par la chaîne de retour.

La fonction de transfert en boucle ouverte a une grande importance dans l'étude de la stabilité des systèmes ; de plus, elle est directement accessible à la mesure.

III.4.3.5. Fonction de Transfert en Boucle Fermée (FTBF)

Soit un système asservi, le plus général, représenté par le schéma ci-dessous.

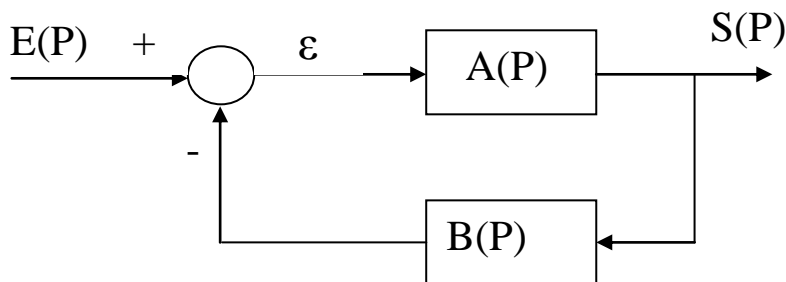


Figure III.5. Système en Boucle Fermée

Soit $A(p)$ et $B(p)$, respectivement, les fonctions de transfert des chaînes directe et de retour.

Cherchons la fonction de transfert du système complet :

$$H(P) = \frac{S(P)}{E(P)}$$

Nous avons les relations suivantes :

$$S(P) = A(P).\varepsilon(P)$$

$$S'(P) = B(P).S(P) \text{ et } \varepsilon(P) = E(P) - S'(P)$$

Donc $S(P) = A(P). [E(P) - S'(P)] = A(P). [E(P) - B(P).S(P)]$

d'où: $S(P) = \frac{A(P)}{1+A(P).B(P)}E(P)$

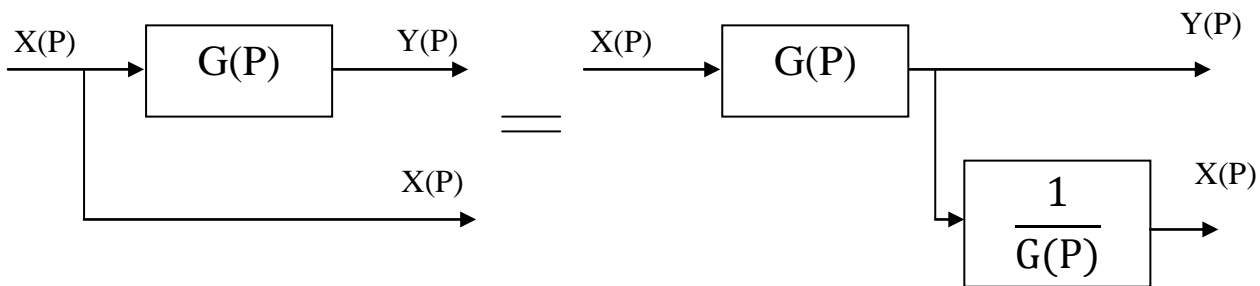
La fonction de transfert d'un système bouclé ou en Boucle Fermée (FTBF) est donc le rapport de la fonction de transfert de sa chaîne directe à $1 + A(p). B(p)$:

$$H(P) = \frac{A(P)}{1 + A(P).B(P)}$$

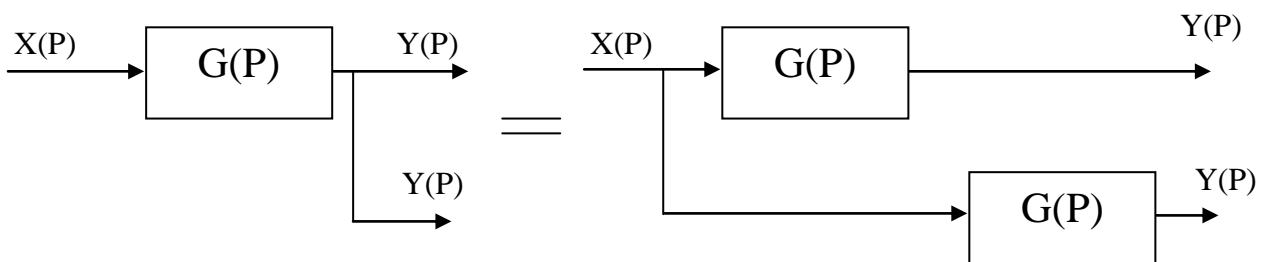
III.5. Déplacement et Permutation des nœuds d'informations

A) Déplacement des nœuds d'informations

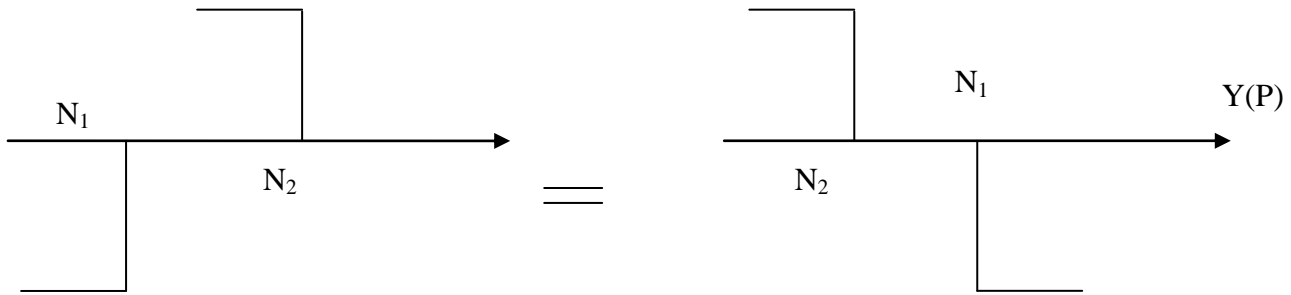
- De l'amant à l'aval



- De l'aval à l'amant

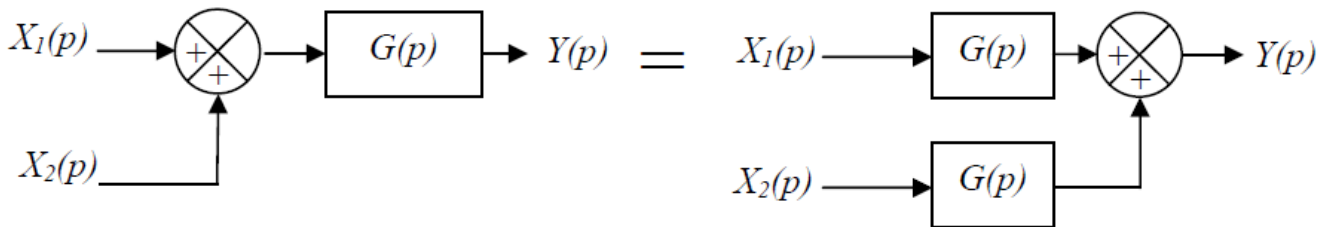


B) Permutation de deux nœuds successifs

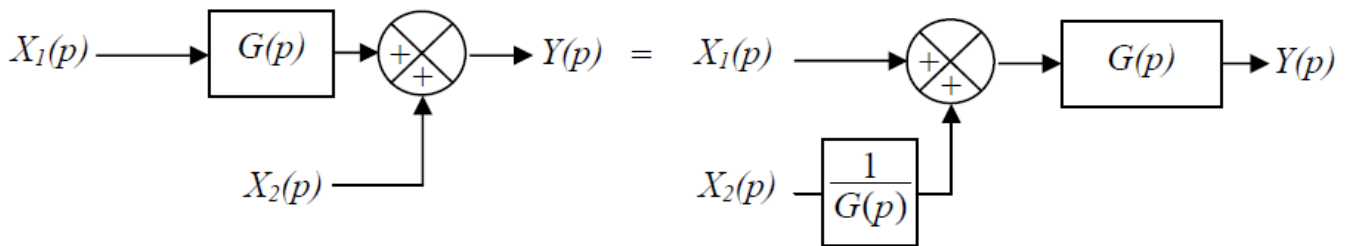


C) Déplacement de sommateurs

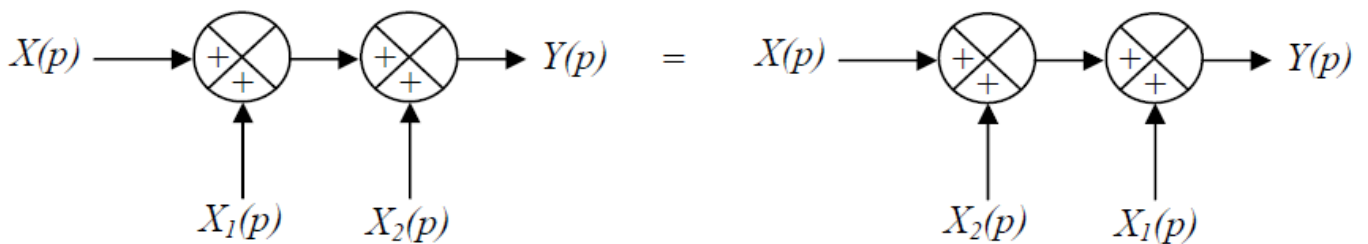
- De l'amant à l'aval



- De l'aval à l'amant



D) Permutation de deux sommateurs successifs



Exercice N°1 :

La sortie $S_1(t)$ d'un système asservi est $2(1-e^{-2t})$ pour une entrée $e_1(t) = 2$.

Trouvez la sortie de ce système pour une entrée $e_2(t) = 2.t$

Solution :

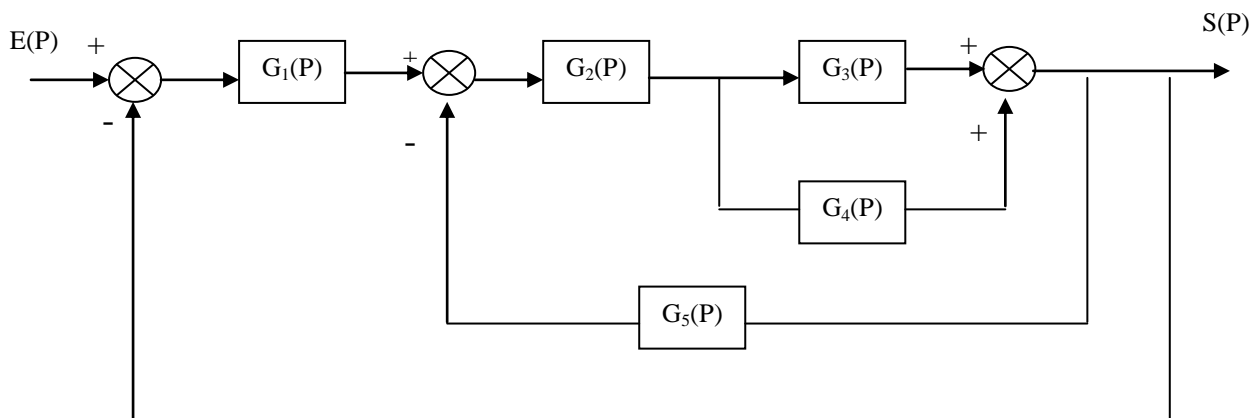
$$T(P) = \frac{4}{P^2(P+2)}$$

Après la décomposition on trouve :

$$S(t) = -1 + 2.t + e^{-2t}$$

Exercice N°2 :

Trouvez la fonction de transfert équivalente pour le système asservis suivant :



Solution :

$$T(P) = \frac{G_1(P)G_2(P)[G_4(P) + G_3(P)]}{1 + G_2(P)G_5(P)[G_3(P) + G_4(P)] + G_2(P)G_1(P)[G_3(P) + G_5(P)]}$$

CHAPITRE IV

PERFORMANCES DES SYSTEMES LINEAIRES

IV.1. Introduction

Nous avons vu, dans le chapitre précédent, qu'il était possible connaissant les équations différentielles, de déterminer la fonction de transfert d'un système. Mais il existe de nombreux cas où le système est un système industriel mal défini et on ne connaît pas les équations différentielles. Or, la connaissance de sa fonction de transfert est très importante pour déterminer ses performances et surtout la stabilité. Il est donc important de mettre au point des méthodes capables de résoudre le problème.

En général, on applique cette procédure pour déterminer les fonctions de transfert des éléments qui entrent dans une chaîne. La connaissance expérimentale ou mathématique de toutes les fonctions de transfert des éléments permet alors de déterminer la fonction de transfert de l'ensemble.

Ces méthodes sont basées sur l'utilisation d'entrées dites canoniques, faciles à mettre en œuvre dans toutes les techniques (électrique, mécanique, hydraulique). On en déduit alors les différentes constantes de la fonction de transfert.

IV.2. Etude des systèmes du premier ordre :

IV.2.1. Définition

On appelle système du 1er ordre, un système régi par une équation linéaire différentielle du premier ordre telle que :

$$T \cdot \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = k \cdot e(t)$$

ou encore, un système dont la fonction de transfert est du type :

$$\frac{S(P)}{E(P)} = \frac{k}{1 + TP}$$

Ces systèmes sont encore appelés *systèmes à une seule constante de temps*, ou *système à retard*.

Ils sont très nombreux en physique. En dehors des circuits RC ou RL en électricité, on peut considérer qu'un amplificateur est un système du 1er ordre. En mécanique, tous les assemblages comportant un ressort et un amortisseur sont du 1er ordre.

IV.2.2. Réponse indicielle

La réponse indicielle nous renseignera sur le comportement du système en régime transitoire.

$$S_1(P) = \frac{K}{1 + TP} E_1(P)$$

$$\text{Et } E_1(P) = \frac{1}{P} \quad \text{donc } S_1(P) = \frac{K}{P(1+TP)}$$

En consultant une table de Transformée de Laplace, on voit que l'originale $S_1(t)$ de $S_1(P)$ est :

$$S_1(t) = K(1 - e^{-\frac{t}{T}})$$

$$\text{Et } \lim_{t \rightarrow \infty} S_1(t) = K$$

On constate donc que la sortie $S_1(t)$ atteint pratiquement le régime permanent au bout d'un temps qui dépend de la constante T.

Cette constante T, appelée *constante de temps*, caractérise donc la *rapidité du système* à atteindre son régime permanent.

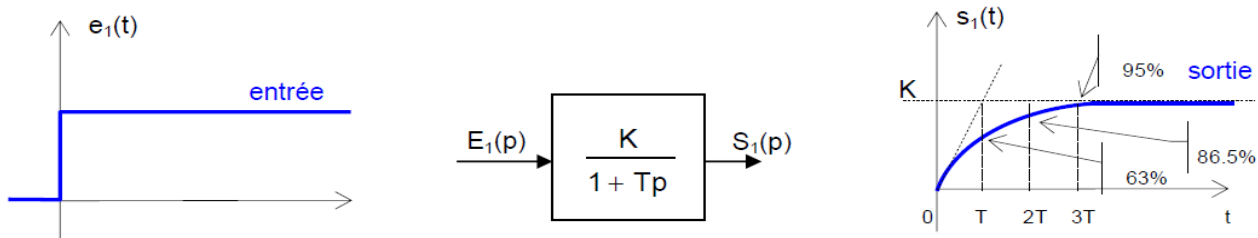


Figure IV.1 : Réponse indicielle d'un système de premier ordre

La pente de la tangente à l'origine est K/T , plus le système a une constante de temps faible, plus il "répond" vite.

Au bout d'un temps $t = T$, la sortie est $S_1(T) = K(1 - \frac{1}{e})$, ce qui représente environ 63% de K.

Temps de réponse : le temps de réponse est le temps au bout duquel la sortie atteint son régime permanent à 5% près. Dans le cas du système du premier ordre, ce temps correspond à $3T$ environ.

Temps de montée : On appelle temps de montée du système : c'est le temps nécessaire pour passer de 10% de la valeur finale de la sortie à 90 % de la valeur finale pour un échelon d'entrée.

IV.2.3. Réponse à une rampe (échelon de vitesse)

Dans ce cas, nous avons : $E_2(t) = t.U(t)$ où $U(t)$ est un échelon unitaire, alors $E_2(P) = \frac{1}{P^2}$

$$\text{Donc : } S_2(P) = \frac{K}{P^2(1+TP)} = \frac{S_1(P)}{P}$$

Avec $S_1(P)$: transformée de Laplace de la réponse indicielle d'un système du 1^{er} Ordre.

$$S_2(t) = \int_0^t S_1(t) dt = \int_0^t K(1 - e^{-\frac{t}{T}}) dt$$

$$S_2(t) = K \left[t - T(1 - e^{-\frac{t}{T}}) \right]$$

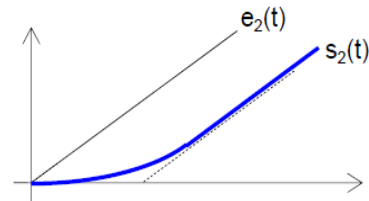


Figure IV.2 : Réponse à une rampe d'un système de premier ordre

En régime permanent : $t \rightarrow \infty$, alors $S_2(t) = K(t - T)$

On met, ainsi, en évidence le retard T qui constitue une erreur permanente.

Dans le cas où $K=1$, l'erreur entre l'entrée et la sortie est appelée l'erreur de "traînage".

Donc, un système du 1^{er} ordre suit les variations linéaires de l'entrée avec un certain retard, d'où leur nom de système à retard.

IV.2.4. Réponse à une impulsion unité :

Dans ce cas, nous avons : $E_3(t) = \delta(t)$ où $\delta(t)$: impulsion unitaire et $E_3(P) = 1$

$$S_3(P) = \frac{K}{1+TP} = \frac{K}{T} \frac{1}{P + \frac{1}{T}}$$

$$\text{Donc } S_3(t) = \frac{K}{T} e^{-t/T}$$

On met ainsi en évidence la constante de temps sur le graphe de la figure IV.3.

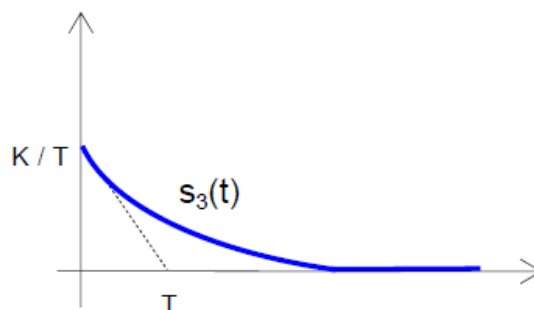


Figure IV.3 : Réponse impulsionnelle d'un système de premier ordre

IV.2.5. Réponse fréquentielle

$$H(P) = \frac{K}{1+\tau P} \text{ Et en posant } P = j\omega \implies \overline{H(j\omega)} = \frac{K}{1+j\tau\omega}$$

$$\implies H(j\omega) = \frac{K}{\sqrt{1+(\tau\omega)^2}} \cdot \exp(-j \cdot \text{Arctg}(\tau\omega)) = |\overline{H}| \cdot \exp(j\varphi)$$

$$\overline{H(j\omega)} = \frac{K}{1+(\tau\omega)^2} + \frac{-jK\tau}{1+(\tau\omega)^2} \implies \begin{cases} \text{Re}(\overline{H(j\omega)}) = \frac{K}{1+(\tau\omega)^2} \\ \text{Im}(\overline{H(j\omega)}) = \frac{-K\tau}{1+(\tau\omega)^2} \end{cases}$$

Dans la pratique trois méthodes de représentations sont utilisées.

A) Représentation de Bode

On trace les deux courbes suivantes :

- $|H(j\omega)|_{db}$ de la fonction $H(j\omega)$ en fonction de la pulsation ω .
- $\varphi = \text{Arctg}(H(j\omega))$ de la fonction $\overline{H(j\omega)}$ en fonction de la pulsation ω .

Représentation du module en dB

$$|H(j\omega)|_{db} = 20 \log_{10} \left(\frac{K}{\sqrt{1+(\tau\omega)^2}} \right) = 20 \log_{10}(K) - 10 \log_{10}[1+(\tau\omega)^2]$$

Etude des asymptotes :

- Pour $\frac{\omega}{\omega_c} \ll 1$

$$|H(j\omega)|_{db} \rightarrow 20 \log_{10} K : \text{Asymptote d'équation } |H(j\omega)|_{db} \rightarrow 20 \log_{10} K$$

- Pour $\omega = \frac{1}{\tau} \implies |H(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} K - 3dB$

- Pour $\frac{\omega}{\omega_c} \gg 1 \implies |H(j\omega)|_{dB} \rightarrow -20 \log_{10}(\tau\omega)$

$$\begin{aligned} |H(j \cdot 10 \cdot \omega_1)|_{dB} - |H(j \cdot \omega_1)|_{dB} &= -20 \log_{10}(\tau \cdot 10 \cdot \omega_1) - (-20 \log_{10}(\tau \cdot \omega_1)) \\ &= -20(\log_{10}(\tau \cdot 10 \cdot \omega_1) - (\log_{10}(\tau \cdot \omega_1))) \\ &= -20 \log_{10} \left(\frac{\tau \cdot 10 \cdot \omega_1}{\tau \cdot \omega_1} \right) = -20 \log_{10}(10) = -20dB \end{aligned}$$

→ C'est une droite de pente -20 dB/décade.

$$\begin{aligned} \text{Ou : } |H(j \cdot 2 \cdot \omega_1)|_{dB} - |H(j \cdot \omega_1)|_{dB} &= -20 \log_{10}(\tau \cdot 2 \cdot \omega_1) - (-20 \log_{10}(\tau \cdot \omega_1)) \\ &= -20(\log_{10}(\tau \cdot 2 \cdot \omega_1) - (\log_{10}(\tau \cdot \omega_1))) \\ &= -20 \log_{10}(2) = -6 dB \end{aligned}$$

→ C'est une droite de pente -6 dB/décade.

Représentation de la Phase :

$$\varphi = \text{Arg}(H(j\omega)) = -\text{arctg}(\tau\omega)$$

Etude des asymptotes :

• Pour $\omega \rightarrow 0 \implies \varphi = 0 \implies$ asymptotes horizontale

• Pour $\omega \rightarrow \frac{1}{\tau} \implies \varphi = -\text{arctg}(1) = -\frac{\pi}{4}$

Pour $\omega \rightarrow \infty \implies \varphi = \text{Arg}(H(j\omega)) = -\text{arctg}(\infty) = \frac{-\pi}{2} \implies$ asymptotes horizontale $\varphi = \frac{-\pi}{2}$

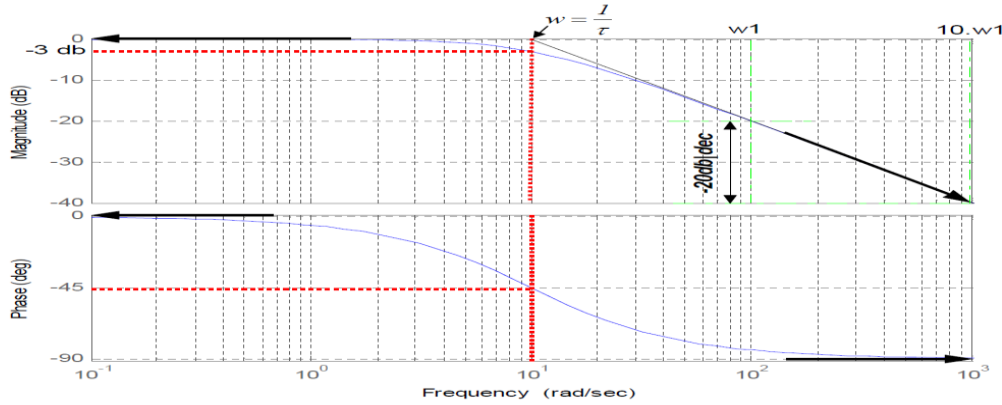


Figure IV.4 Diagramme de bode d'un système de premier ordre

B) Courbe de Nyquist

On trace la courbe $\text{Im}(\overline{H(j\omega)}) = f(\text{Re}(\overline{H(j\omega)}))$

Soient $x = \text{Re}(\overline{H(j\omega)})$ et $y = \text{Im}(\overline{H(j\omega)})$

D'où $x = \frac{K}{1+(\tau\omega)^2}$ (1) et $y = \frac{K\tau\omega}{1+(\tau\omega)^2}$ (2)

($y < 0 \rightarrow$ Demi cercle negatif)

(1) $\implies 1 + (\tau\omega)^2 = \frac{K}{x}$ et $(\tau\omega)^2 = \frac{K}{x} - 1$

(2) $\implies y = -\tau\omega x \implies y^2 = (\tau\omega)^2 x^2 = \left(\frac{K}{x} - 1\right) x^2 = Kx - x^2$

Donc $x^2 - Kx + y^2 = 0 \implies \left(x - \frac{K}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{K}{2}\right)^2$: C'est une équation d'un cercle de centre $\left(\frac{K}{2}, 0\right)$ et de rayon $\frac{K}{2}$.

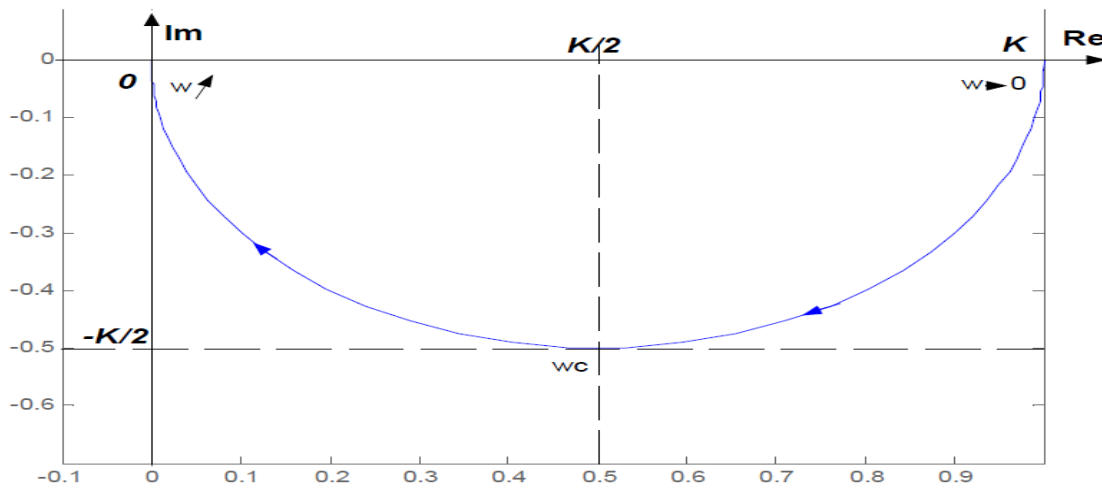


Figure IV.5 Diagramme de Nyquist d'un système de premier ordre

C) Courbe de Black

On représente $G_{db} = f(j\varphi)$: c'est un diagramme contracté obtenu en éliminant ω .

Etude des asymptotes :

- Pour $\omega \rightarrow 0 \implies |H(j\omega)|_{db} \rightarrow 20\log_{10}K ; \varphi = 0$
- Pour $\omega \rightarrow \frac{1}{\tau} \implies |H(j\omega)|_{db} \rightarrow 20\log_{10}K - 3dB ; \varphi = \frac{\pi}{4}$
- Pour $\omega \rightarrow \infty \implies |H(j\omega)|_{db} \rightarrow -\infty \text{ et } \varphi \rightarrow \frac{-\pi}{2}$

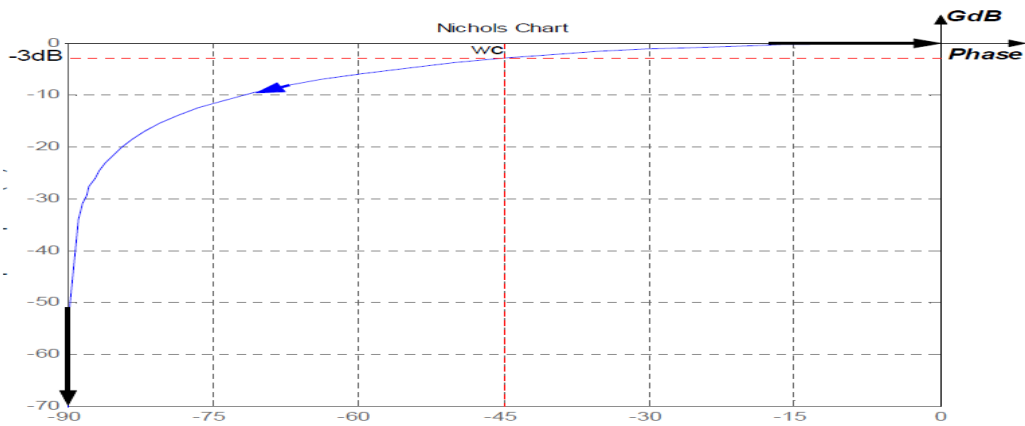


Figure IV.6 Courbe de Black d'un système de premier ordre

IV.3. Etude des systèmes du second ordre [3,10]

IV.3.1. Définition

Les systèmes du second ordre sont régis par des équations linéaires différentielles à coefficients constants du 2^{ème} ordre, du type :

$$B_2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + B_1 \frac{ds(t)}{dt} + B_0 s(t) = A_0 e(t)$$

Leurs fonctions de transfert seront du type :

$$\frac{S(P)}{E(P)} = \frac{A_0}{B_2 P^2 + B_1 P + B_0}$$

Le comportement du système sera extrêmement différent suivant que le degré qui figure au dénominateur aura des racines réelles ou imaginaires.

On introduit les paramètres suivants :

- Gain statique : $K = \frac{A_0}{B_0}$ C'est le rapport $\frac{s(t)}{e(t)}$ en régime statique ($\frac{ds(t)}{dt} = 0$; $\frac{d^2 s(t)}{dt^2} = 0$)
- Pulsation propre non amortie : $\omega_n = \sqrt{\frac{B_0}{B_2}}$ rad/s
- Facteur d'amortissement (sans dimension) : $\xi = \frac{B_1}{2\sqrt{B_0 B_2}}$, $\xi = 1$ (valeur critique).
- Constante de temps : $T = \frac{1}{\xi \omega_n}$

La fonction de transfert s'écrit en fonction des paramètres ainsi définis :

$$H(P) = \frac{S(P)}{E(P)} = \frac{K}{\frac{1}{\omega_n^2} P^2 + \frac{2\xi}{\omega_n} P + 1}$$

Etudions les différentes réponses :

Le comportement dynamique d'un tel système dépend de la valeur des deux constantes ω_n et surtout de ξ .

- Si $\xi > 1$: Le polynôme est décomposable, le dénominateur a 2 racines réelles ($-p_1$ et $-p_2$) :

$$p_1 = \omega_n (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) \text{ et } p_2 = \omega_n (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})$$

- Si $0 < \xi < 1$: Le polynôme n'est pas décomposable, le dénominateur a 2 racines complexes conjuguées

$$p_0 \text{ et } p_0^* : p_0 = \omega_n (\xi + j\sqrt{\xi^2 - 1}) \text{ et } p_0^* = \omega_n (\xi - j\sqrt{\xi^2 - 1})$$

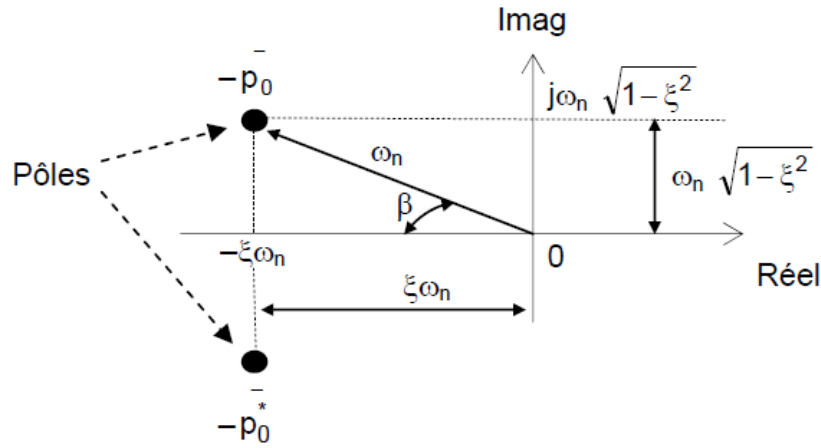


Figure IV.7. Les Pôles d'un système de second ordre

Remarque : $\xi = \cos \beta = \frac{\xi \omega_n}{\omega_n}$: coefficient d'amortissement

- Si $\xi = 1$: Les 2 racines sont égales ($-p_{1,2}$) : $p_{1,2} = \omega_n = \frac{1}{\tau}$

IV.3.2. Réponse à un échelon unité

$$E(P) = \frac{1}{P}, \quad S(P) = \frac{K}{P} \frac{1}{\frac{1}{\omega_n^2} P^2 + \frac{2\xi}{\omega_n} P + 1}$$

- Si $0 < \xi < 1$: Les 2 racines imaginaires conduisent à une solution oscillatoire amortie.

En régime permanent : $s(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \lim_{P \rightarrow 0} P \cdot S(P) = K$

La solution est :

$$S(P) = K \left(\frac{1}{P} - \frac{P + 2 \cdot \xi \omega_n}{P^2 + 2 \cdot \xi \omega_n P + \omega_n^2} \right) = K \left(\frac{1}{P} - \frac{P + \xi \omega_n}{(P + \xi \omega_n)^2 + \omega_n^2 (1 - \xi^2)} - \frac{\xi \omega_n}{(P + \xi \omega_n)^2 + \omega_n^2 (1 - \xi^2)} \right)$$

$$\text{or } \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{p + \xi \omega_n}{(p + \xi \omega_n)^2 + \omega_n^2 (1 - \xi^2)} \right) = e^{-\xi \omega_n t} \cos(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t) \quad (t \geq 0)$$

$$\text{et } \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}{(p + \xi \omega_n)^2 + \omega_n^2 (1 - \xi^2)} \right) = e^{-\xi \omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t) \quad (t \geq 0)$$

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1}(S(p))$$

$$s(t) = K \left(1 - \frac{e^{-\xi \omega_n t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \left\{ \underbrace{\sqrt{1 - \xi^2} \cos(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t) + \xi \sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t)}_{\sin(a) \cdot \cos(b) + \cos(a) \cdot \sin(b) = \sin(a+b)} \right\} \right) \quad (t \geq 0)$$

En posant : $\sin a = \sqrt{1 - \xi^2} (< 1)$ et $\cos a = \xi (< 1)$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} a = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} \Rightarrow a = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} \right)$$

et, $b = \omega_n(\sqrt{1 - \xi^2})t$

on aura :

$$s(t) = K \left(1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \left\{ \underbrace{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} \right)}_{\varphi} \right\} \right) \quad (t \geq 0)$$

- Si $\xi = 1$: Les 2 racines (pôles) sont égales : système amorti critique.

$$S(p) = \frac{K}{p} \frac{\omega_n^2}{p^2 + 2\omega_n p + \omega_n^2} = \frac{K}{p} \frac{\omega_n^2}{(p + \omega_n)^2}$$

On aura,

$$s(t) = K(1 - e^{-\omega_n t}(1 + \omega_n t)) \quad (t \geq 0)$$

- Si $\xi > 1$: Les 2 racines (pôles) sont négatives et inégales : système apériodique.

$$S(p) = \frac{K}{p} \frac{\omega_n^2}{(p + \xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1})(p + \xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1})}$$

$$s(t) = K \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{\xi^2 - 1}(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})} e^{-(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t} - \frac{1}{2\sqrt{\xi^2 - 1}(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})} e^{-(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t} \right) \quad (t \geq 0)$$

$$s(t) = K \left(1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \left[\frac{e^{-a_1 t}}{a_1} - \frac{e^{-a_2 t}}{a_2} \right] \right) \quad (t \geq 0) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a_1 = \omega_n(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) \\ a_2 = \omega_n(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}) \end{cases}$$

La Figure IV.8 donne les réponses indicielles en fonction du coefficient d'amortissement ξ .

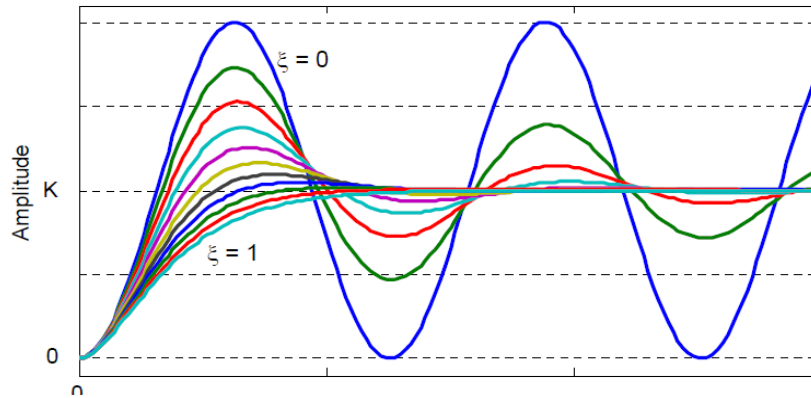


Figure IV.8 . Réponse indicielle d'un système de second ordre pour les différentes valeurs de ξ

IV.3.3. Réponse à une impulsion unité

$$E(P) = 1 \text{ et } S(P) = \frac{K\omega_n^2}{P^2 + 2\xi\omega_n P + \omega_n^2}$$

- Si $0 < \xi < 1$: $s(t) = K \left(\frac{\omega_n}{\sqrt{\xi^2 - 1}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n t \sqrt{\xi^2 - 1}) \right) \quad t \geq 0$
- Si $\xi = 1$: $s(t) = K(\omega_n^2 t e^{-\omega_n t}) \quad t \geq 0$
- Si $\xi > 1$: $s(t) = K \frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \left(e^{-(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t} - e^{-(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t} \right) \quad t \geq 0$

La Figure suivante donne les réponses impulsionnelles d'un système du second ordre en fonction du coefficient d'amortissement ξ .

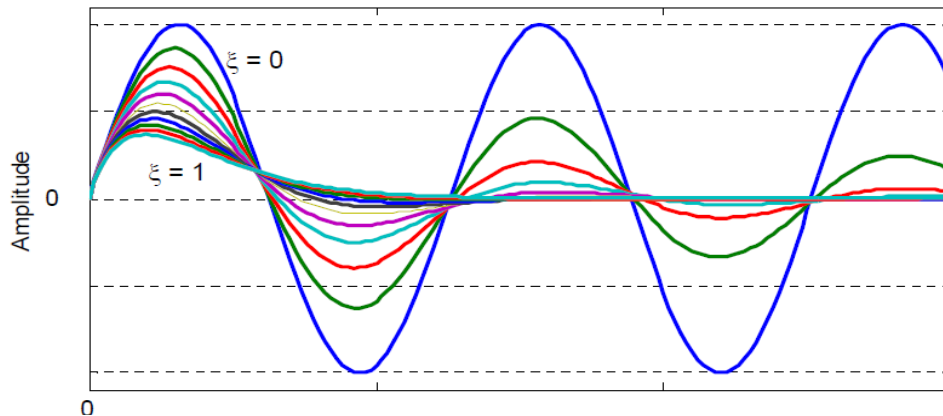


Figure IV.9. Réponse impulsionnelle d'un système de second ordre pour les différentes valeurs de ξ

IV.3.4. Réponse fréquentielle :

A) Diagramme de Bode

On se place en régime permanent sinusoïdal :

$$E(t) = E_0 \cdot \sin(\omega t) \text{ et } S(t) = S_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi) \text{ puisque le système est considéré linéaire.}$$

$$G(P) = \frac{S(P)}{E(P)} = \frac{K}{\omega^2 P^2 + \frac{2\xi}{\omega_n} P + 1}$$

$P = j\omega \rightarrow G(w) = |G(w)|e^{j\varphi(\omega)}$, avec :

$$|G(w)| = \left| \frac{S_0(\omega)}{E_0(\omega)} \right| = \left| \frac{K}{\left(\frac{\omega}{\omega_n}j\right)^2 + \frac{2\xi\omega}{\omega_n}j + 1} \right| = \left| \frac{K}{\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right\} + \left\{\frac{2\xi\omega}{\omega_n}\right\}j} \right| = \frac{K}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 - \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \angle G(\omega) = -\arctg\left(\frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right)$$

Module :

$$\log|G(\omega)| = \log K - \log \sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

pour $\omega \ll \omega_n$, $\log|G(\omega)| \rightarrow \log K$ (asymptote horizontale),

pour $\omega \gg \omega_n$, $\log|G(\omega)| \rightarrow \log K - \log\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 = (\log K + 2 \log \omega_n) - 2 \log \omega$ (asymptote de pente -2)

les deux asymptotes se coupent en : $\log K = \log K - 2 \log\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) \rightarrow$ pour $\omega = \omega_n$

Phase :

$$\varphi(\omega) = -\arctg\left(\frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right) \rightarrow \begin{cases} \text{pour } \omega \rightarrow 0, & \varphi(0) = 0^\circ \\ \text{à } \omega = \omega_n, & \varphi(\omega_n) = -90^\circ \\ \text{pour } \omega \rightarrow \infty, & \varphi(\infty) = -180^\circ \end{cases}$$

La figure IV.10 donne le diagramme de Bode en fonction du coefficient d'amortissement ξ .

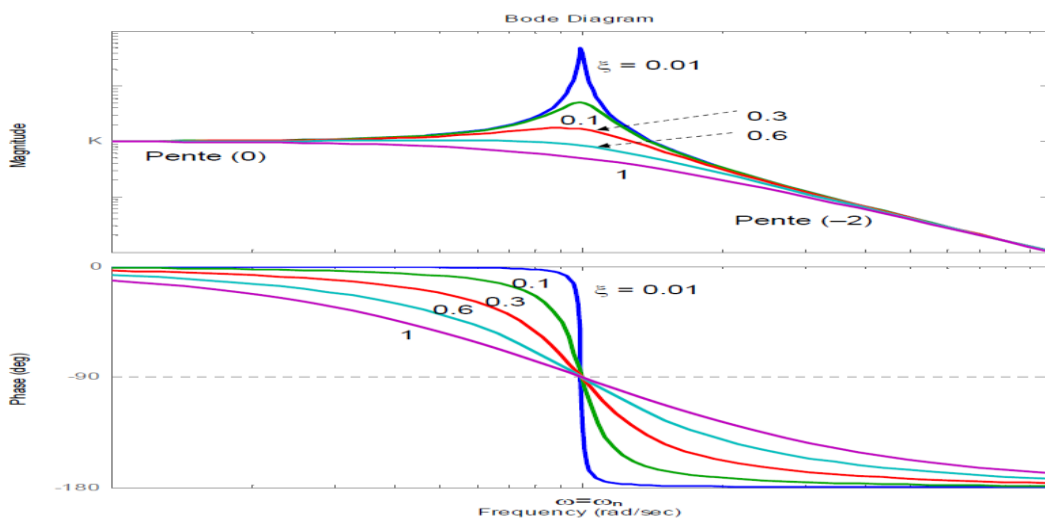


Figure IV.10. Diagramme de Bode d'un système de second ordre

B) Courbe de Nyquist

On trace cette fois $|G(\omega)|$ et $\varphi(\omega)$ en coordonnées polaires.

L'allure de la courbe (Fig IV.11) peut être déduite des courbes de Bode. On voit notamment que :

- Pour $\omega \rightarrow 0$, $|G(\omega)| = K$ et $\varphi(\omega) = 0^\circ$
- Pour $\omega \rightarrow \infty$, $|G(\omega)| = 0$ et $\varphi(\omega) = -180^\circ$

Il est difficile de mettre en équation la courbe, car elle n'a pas une forme classique connue.

- Pour un système très peu ou pas amorti, la résonance a lieu pour $\omega = 1/T$, donc pour $\tan \varphi = -\infty$, soit $\varphi = -90^\circ$
- Plus ξ est grand, plus la courbe est "petite" et se rapproche de celle d'un système du 1er ordre (demi cercle).
- Quand $\omega \rightarrow \infty$, $\varphi = -180^\circ$. Les courbes sont donc tangentes à l'axe réel.

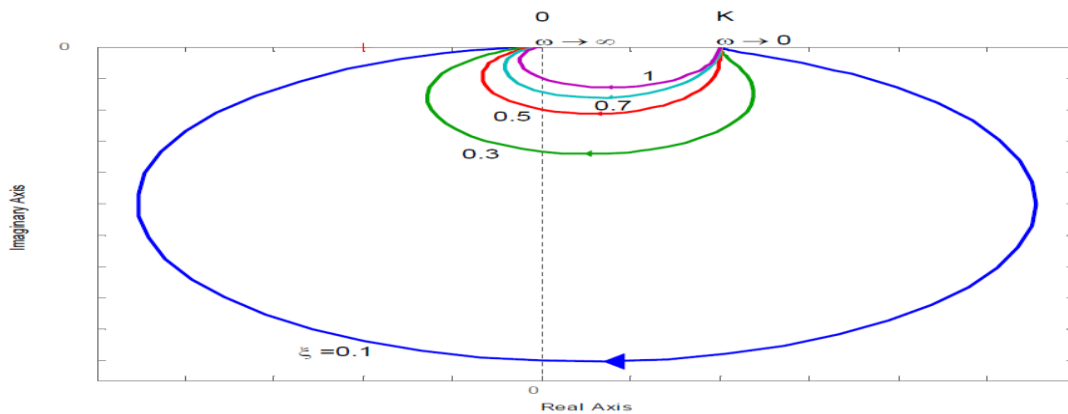


Figure IV.11. Courbe de Nyquist d'un système de second ordre

C) Courbe de Black

Les courbes de Black permettent de mettre facilement en évidence la résonance car elle correspond à un maximum de la courbe ; Plus le système est amorti, plus le maximum est faible.

L'allure du lieu de Black est donnée sur de la figure Suivante

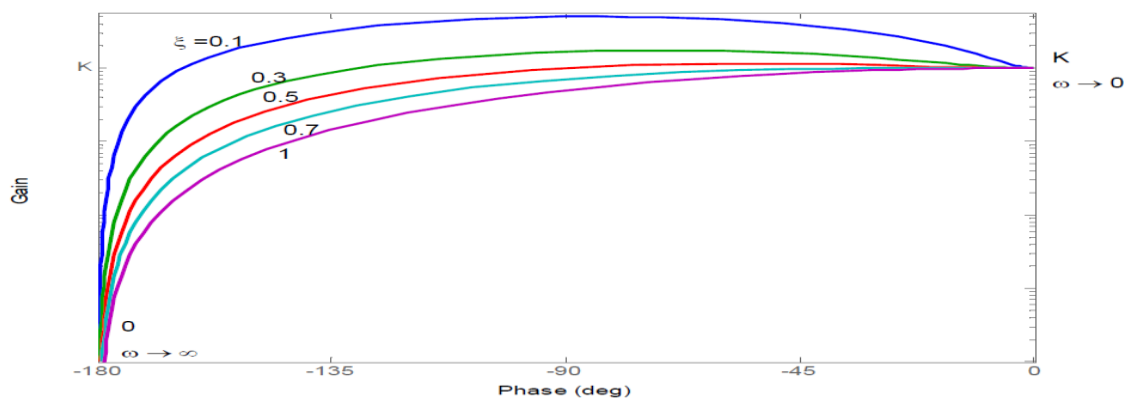


Figure IV.12. Courbe de Black d'un système de second ordre

Exercice N°1 :

Soit un système de premier ordre décrit par la fonction de transfert suivante :

$$G(s) = \frac{5}{s + 3}$$

- 1) Déterminer la réponse impulsionnelle ?
- 2) Déterminer la réponse indicielle ?

Solution :

1) Nous avons : $E(t) = \delta(t)$ où $\delta(t)$: impulsion unitaire et $E(P) = 1$

$$\text{Alors } S(P) = \frac{K}{1+TP} = \frac{K}{T} \frac{1}{P+\frac{1}{T}} \quad \text{avec } K = \frac{5}{3} \quad \text{et } T = \frac{1}{3}$$

$$\text{Donc } S(t) = \frac{K}{T} e^{-t/T} = 5e^{-3t}$$

2) Dans ce cas, $E_1(P) = \frac{1}{P}$

$$\text{Alors } S_1(P) = \frac{K}{1+TP} E_1(P) = \frac{K}{P(1+TP)} \quad \text{avec } K = \frac{5}{3} \quad \text{et } T = \frac{1}{3}$$

$$\text{Donc } S_1(t) = K \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) = \frac{5}{3} (1 - e^{-3t})$$

Exercice N°2:

Soit le système décrit par :

$$T(P) = \frac{25}{(0.1P + 0.5)(0.2P + 0.5)(2.5P + 1)}$$

- Déterminez $|T(\text{dB/dec})|$, le déphasage φ ainsi que les fréquences de coupures ?

Solution :

$$T(P) = \frac{25 \times 4}{4 \times (0.1P + 0.5)(0.2P + 0.5)(2.5P + 1)} = \frac{100}{(0.2P + 1)(0.4P + 1)(2.5P + 1)}$$

$$\implies T = 20 \log 100 + T_{1\text{dB/dec}} + T_{2\text{dB/dec}} + T_{3\text{dB/dec}}$$

$$T_1 \begin{cases} |T_1| = (1 + (2.5)^2)^{-0.5} \\ \varphi_1 = -\arctg(2.5) \\ \omega_{c1} = \frac{1}{2.5} = 0.4 \text{ rd/s} \end{cases}$$

$$T_2 \begin{cases} |T_2| = (1 + (0.4)^2)^{-0.5} \\ \varphi_2 = -\arctg(0.4) \\ \omega_{c2} = \frac{1}{0.4} = 2.5 \text{ rd/s} \end{cases}$$

$$T_3 \begin{cases} |T_3| = (1 + (0.2)^2)^{-0.5} \\ \varphi_3 = -\arctg(0.2) \\ \omega_{c3} = \frac{1}{0.2} = 5 \text{ rd/s} \end{cases}$$

	$\omega < 0.4$	$0.4 \leq \omega < 2.5$	$2.5 \leq \omega < 5$	$\omega \geq 5$
100	$20 \log 100$	$20 \log 100$	$20 \log 100$	$20 \log 100$
T_1 (dB/dec)	0	-20	-20	-20
T_2 (dB/dec)	0	0	-20	-20
T_3 (dB/dec)	0	0	0	-20
T(dB/dec)	$20 \log 100 = 40\text{dB}$	-20	-40	-60
φ	0	$-\pi/2$	$-\pi$	$-3\pi/2$

CHAPITRE V

STABILITE DES SYSTEMES

V. 1. Notion de stabilité d'un système

Un système dynamique linéaire est stable si, et seulement si, écarté de sa position d'équilibre par une sollicitation extérieure, le système revient à cette position d'équilibre lorsque la sollicitation a cessé.

Les réponses indicielles des figures V.1 et V.2 correspondent à celles de systèmes stables. Nous retrouvons les critères cités ci-dessus.

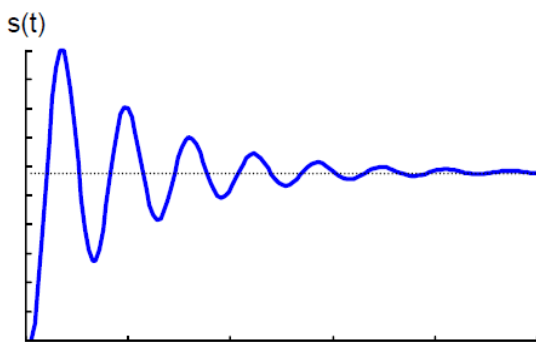


Figure V.1.Exemple 1 d'un système stable

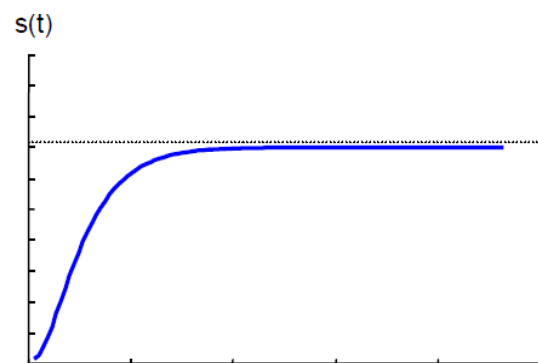


Figure V.2.Exemple 2 d'un système stable

La figure V.3. est un cas de système instable. Les oscillations sont de plus en plus importantes et le système ne retrouve pas son état d'équilibre.

Physiquement, un système instable dont la réponse croît sans limite peut se causer des dommages ou en causer à autrui (danger pour l'être humain). En pratique, la majorité des systèmes sont conçus avec des dispositifs de limitation.

Si on considère le cas où des oscillations persistent indéfiniment (cas du pompage de la figure V.4.), on peut considérer le système comme stable (système marginalement stable) puisque sa sortie garde une valeur finie, à condition que l'amplitude ne soit pas trop grande.

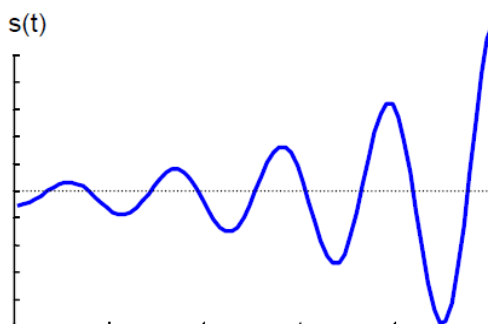


Figure V.3.Exemple d'un système stable

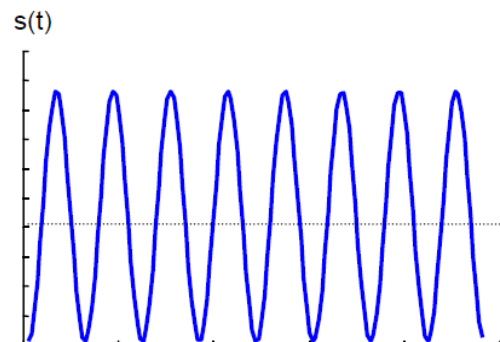


Figure V.4.Exemple d'un système marginalement stable

La stabilité est une condition impérative. Pour que les systèmes soient utilisables en asservissement, il est absolument nécessaire que les fonctions de transfert en boucle fermée FTBF soient stables. Ceci n'implique toutefois pas que les FTBO soient stables.

V.2. Aspect mathématique de la stabilité

Considérons un système asservi quelconque dont la fonction de transfert est :

$$\frac{S(P)}{E(P)} = \frac{A(P)}{1 + A(P).B(P)}$$

Si on envoie sur l'entrée un échelon unité $E(p)=1/p$, alors :

$$S(P) = \frac{1}{P} \frac{A(P)}{1 + A(P).B(P)}$$

Nous avons vu précédemment que $S(p)$ pouvait se mettre sous la forme d'un quotient de polynômes du type $N(p)/D(p)$ et que celui-ci pouvait se décomposer en une somme de fractions rationnelles :

$$S(P) = \frac{N(P)}{D(P)} = \frac{c_1}{P-p_1} + \dots + \frac{c_n}{P-p_n} \quad \text{Où les } p_i \text{ sont les racines réelles ou complexes de } D(p).$$

Prenons, par exemple, le cas où le dénominateur contient des racines nulles (pôles multiples), des racines réelles (pôles réels) et des racines complexes. C'est-à-dire qu'il est de la forme :

$$D(P) = P^{n_0}(P - p_1) \dots (P - p_{n_1})[(P - \alpha_1)^2 + \omega_1^2] \dots [(P - \alpha_{n_2})^2 + \omega_{n_2}^2]$$

La décomposition de $S(p)$ en fractions rationnelles sera :

$$S(P) = \sum_{i=1}^{i=n_0} \frac{A_i}{P^i} + \sum_{K=1}^{K=n_1} \frac{B_K}{P - P_K} + \sum_{j=1}^{j=n_2} \frac{C_j P + D_j}{(P - \alpha_j)^2 + \omega_j}$$

Les racines complexes étant $\alpha_j \pm j \omega_j$ (α_j partie réelle, ω_j partie imaginaire), cherchons l'original $s(t)$ de $S(p)$ qui est la réponse du système à un échelon unité. On trouve :

$$S(t) = A_1 + \sum_{i=2}^{i=n_0} \frac{A_i t^{(i-1)}}{(i-1)!} + \sum_{K=1}^{K=n_1} B_K e^{P_K t} + \sum_{j=1}^{j=n_2} F_j e^{\alpha_j t} \cdot \text{Sin}(\omega_j t + \varphi_j)$$

On constate donc que la *sortie garde une valeur finie* quand $t \rightarrow \infty$, si les conditions suivantes sont remplies :

- Les p_k et les a_j doivent être négatifs pour que les exponentielles correspondantes soient décroissantes.
- Les A_i doivent être nuls sauf A_1 .

Nous verrons dans la suite que pour certaines fonctions de transfert, la présence de pôles multiples nuls n'entraîne pas forcément une augmentation infinie de la sortie.

En effet, les termes en $1/p$ ont une action d'intégration, leur influence peut être combattue par des actions de dérivation provenant de terme en p au numérateur. S'il n'en est pas ainsi, le système possédant des pôles multiples à l'origine au dénominateur de sa fonction de transfert est dit " intrinsèquement instable ", c'est à dire qu'aucune modification des coefficients ne peut le rendre stable.

V. 3. Conditions de stabilité

Un système linéaire est stable si aucune des racines du dénominateur de sa fonction de transfert n'a de partie réelle positive.

Cela exclut :

- Les racines réelles positives.
- Les racines complexes à parties réelles positives.

On peut formuler ceci autrement :

- Un système asservi bouclé est stable si tous les pôles de la FTBF sont localisés dans le demi-plan gauche du plan complexe.
- Un système asservi bouclé est instable si sa FTBF comprend, au moins, un pôle localisé dans le demi-plan droit du plan complexe et/ou des pôles de multiplicité > 1 sur l'axe imaginaire.
- Si le système comprend une seule paire de pôle sur l'axe imaginaire ou un pôle unique à l'origine, le système est dit marginalement stable. Sa réponse sera oscillatoire non amortie ou non oscillatoire à variation constante lorsque $t \rightarrow \infty$.

La figure V.5 récapitule les cas possibles suivant le signe et la nature des racines.

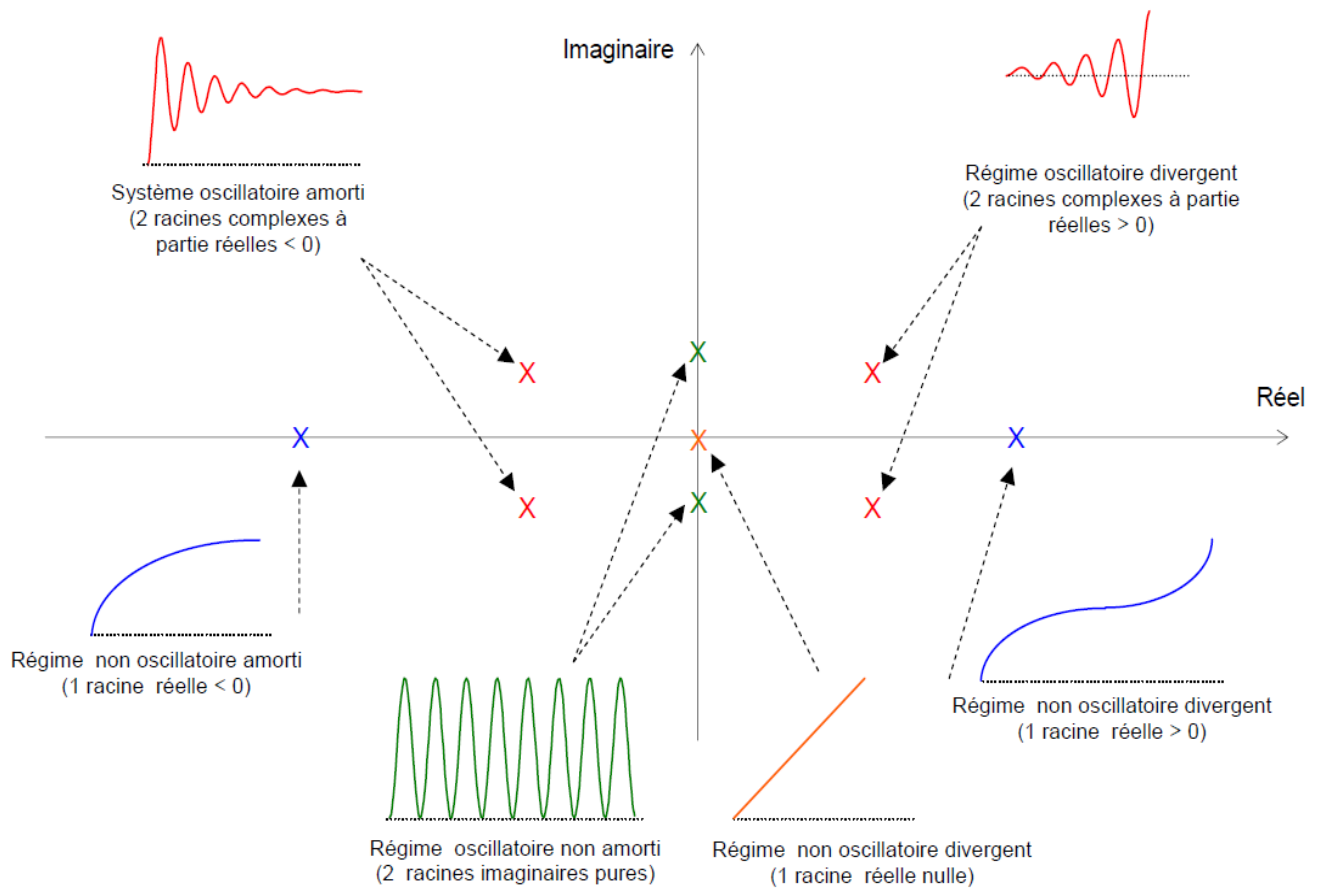


Figure V.5. Les différents cas possibles de stabilité et l'instabilité suivant le signe et la nature des racines

Mais les conditions de stabilité ainsi définies ne sont pas suffisantes pour caractériser un système asservi : **un système très mal amorti sera inutilisable, il faudra donc toujours définir des marges dites de sécurité sur les coefficients d'amortissement.**

Remarque à propos des systèmes instables :

Quand on a affaire à un système instable, sa sortie tend théoriquement vers l'infini si on soumet son entrée à une brusque variation. En réalité, sa sortie ne tend pas vers l'infini, mais vers une valeur qui correspond à la saturation. Cette valeur peut être très grande et conduire à la destruction du système. En tout état de cause, dans le cas où la fonction de transfert a des pôles à parties réelles positives, le système sort rapidement de son domaine de linéarité et ses équations ne sont plus valables.

V. 4. Etude de la stabilité d'un système bouclé [8]

Le système asservi bouclé de la figure V.6 a pour fonction de Transfert :

$$\frac{S(P)}{E(P)} = \frac{A(P)}{1 + A(P).B(P)}$$

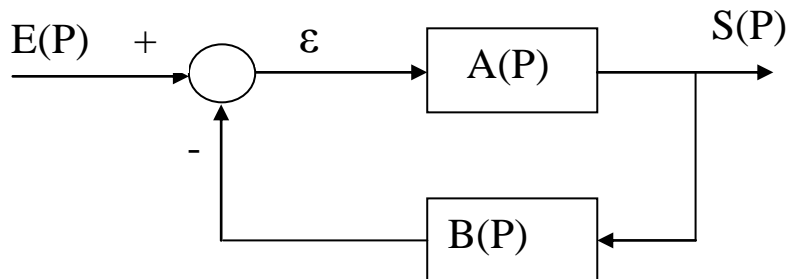


Figure V.6. Système asservi bouclé

La stabilité est conditionnée par le signe des parties réelles des racines du dénominateur.

Il suffira, donc, d'étudier l'équation : $1 + A(P).B(P) = 0$, et de chercher le signe de ses racines.

Plusieurs moyens sont possibles pour y arriver :

a) 1^{er} moyen : Calculer les racines de $1 + A(p).B(p) = 0$

Cette méthode est bonne puisqu'elle nous donne également les valeurs des racines en plus de leurs signes. Mais elle est pratiquement inapplicable à cause de la grande difficulté qu'elle présente si le degré du polynôme est important. L'usage d'un ordinateur peut simplifier le travail, car il peut aussi tracer le lieu des racines quand on fait varier les paramètres. C'est une méthode très puissante.

b) 2^{ème} moyen : Discuter le signe des racines sans les calculer, à partir des coefficients du dénominateur (critère de Routh-Hurwitz) Malheureusement, si le système trouvé est instable, on ne sait pas sur quel paramètre il faut agir pour le rendre stable. Il faut en plus connaître la fonction sous sa forme mathématique.

c) 3^{ème} moyen : Utiliser le critère de Nyquist (méthode graphique).

Cette méthode est intéressante car elle n'a pas les inconvénients du critère de Routh. A savoir, on peut utiliser directement les résultats expérimentaux sans connaître les équations du système et elle montre graphiquement sur quels paramètres on peut agir pour rendre le système stable.

V. 5. Critère de Routh - Hurwitz

Soit $P(p)$ le dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée. $P(p)$ peut être écrit sous la forme :

$P(p) = 1 + A(p).B(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n$ (Équation caractéristique de la fonction de transfert en boucle fermée) Pour que le système soit stable, il faut et il suffit que les racines de $P(p)$ n'aient pas de parties réelles positives.

a - Critère d'Hurwitz :

Ce critère (nécessaire mais pas suffisant) indique que le système est instable si les a_i sont de signes différents ou certains sont nuls.

b - Critère de Routh-Hurwitz :

La condition nécessaire et suffisante de stabilité est alors que tous les termes de la 1^{ère} colonne du tableau de Routh soient de même signe.

On construit le tableau de Routh de la manière suivante :

Pour $P(p) = 1 + A(p).B(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n$, le tableau de Routh est simplement une matrice carrée avec une ligne pour chaque puissance de p dans le polynôme de l'équation caractéristique.

p^n :	1ère ligne : coefficients des termes en p^{n-2k} (avec $k = 0, 1, 2, \dots$)
p^{n-1} :	• 2ème ligne : coefficients des termes en $p^{n-(2k+1)}$ (avec $k = 0, 1, 2, \dots$)
p^{n-2} :	• 3ème ligne : combinaison des 2 lignes précédentes
p^{n-3} :	• 4ème ligne : combinaison des 2 lignes précédentes
p^0 :	• dernière ligne : combinaison des 2 lignes précédentes

Si, par exemple, $P(p) = a_0 p^7 + a_1 p^6 + a_2 p^5 + a_3 p^4 + a_4 p^3 + a_5 p^2 + a_6 p + a_7$, alors le tableau de Routh se construit comme suite :

$p^7 :$	a_0	a_2	a_4	a_6
$p^6 :$	a_1	a_3	a_5	a_7
$p^5 :$	$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$	$b_3 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$	$b_5 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}$	
$p^4 :$	$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_3}{b_1}$	$c_3 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_5}{b_1}$	$c_5 = \frac{b_1 a_7 - a_1 \cdot 0}{b_1} = a_7$	
$p^3 :$	$d_1 = \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1}$	$d_3 = \frac{c_1 b_5 - b_1 c_5}{c_1}$		
$p^2 :$	$e_1 = \frac{d_1 c_3 - c_1 d_3}{d_1}$	$e_3 = \frac{d_1 c_5 - c_1 \cdot 0}{d_1} = c_5$		
$p^1 :$	$f_1 = \frac{e_1 d_3 - d_1 e_3}{e_1}$			
$p^0 :$	$g_1 = \frac{f_1 e_3 - e_1 \cdot 0}{f_1} = e_3$			

Routh a démontré que le nombre de " pôles instables " (c'est-à-dire le nombre de pôles à partie réelle positive) de la fonction de transfert en boucle fermée est égal au nombre de changement de signe que comporte la 1ère colonne, lue de haut en bas.

Si ce nombre est différent de zéro, alors le système est instable.

Remarques:

Cette méthode a l'avantage d'être rapide et exacte, mais elle ne donne pas une mesure de la stabilité comme les autres critères ; car elle se borne à dire si le système est stable ou non. De plus, elle est inapplicable si on ne connaît pas l'expression mathématique de la fonction de transfert.

Le critère de Routh est intéressant pour connaître le nombre de racines réelles positives, mais il est incapable de donner des renseignements sur l'amortissement du système quand celui-ci est stable.

La méthode est cependant en défaut dans les 2 cas suivants :

- Si tous les coefficients d'une ligne sont nuls.
- Si un terme de la 1ère colonne de gauche est nul à l'exclusion des autres termes de la même ligne.

Exemple 1

$$P(p) = 1 + A(p).B(p) = p^3 + 3p^2 + 3p + 1 + K, (K \text{ gain variable})$$

- 1ère condition (critère d'Hurwitz) : $1 + K > 0 \rightarrow K > -1$
- 2ème condition (critère de Routh-Hurwitz) : tableau de Routh

p^3 :	1	3
p^2 :	3	1+K
p^1 :	$\frac{9 - (1 + K)}{3}$	
p^0 :	1+K	

Pour que le système soit stable, il faudrait que :

$$\begin{cases} \frac{9 - (1 + K)}{3} > 0 \\ 1 + K > 0 \end{cases}$$

C'est-à-dire : $-1 < K < 8$ (condition nécessaire et suffisante de stabilité) Si cette condition n'est pas vérifiée, c'est-à-dire, si :

- $K < -1$, il y a 1 seul changement de signe dans la 1^{ère} colonne; donc un seul pôle instable.
- $K > 8$, il y a 2 changement de signe dans la 1^{ère} colonne; donc 2 pôles instables.
- Si ($K = -1$ ou $K = 8$), (frontière entre la stabilité et l'instabilité) on dit que le système est oscillant (marginalelement stable).

Exemple 2 (ligne complète de zéros)

Nous avons dit que si une ligne complète était composée de zéro, la méthode était en défaut. En fait, il est quand même possible d'en tirer des conclusions moyennant certains aménagements.

Si $P(p) = p^5 + 7p^4 + 6p^3 + 42p^2 + 8p + 56$

Alors, le tableau de Routh est :

p^5 :	1	6	8	
p^4 :	7→1	42→6	56→8	Division de la ligne par 7
p^3 :	0	0		
p^2 :	-	-		
p^1 :	-			
p^0 :	-			

La 3^{ème} ligne est nulle. On substitue alors à cette ligne les coefficients obtenus en différentiant une fonction fictive, appelée polynôme auxiliaire, construite sur la ligne précédant la ligne nulle. Le polynôme auxiliaire pour l'exemple en cours s'écrit : $Q(p) = p^4 + 6p^2 + 8$

Si nous le dérivons, par rapport à p, nous obtenons alors : $\frac{dQ(p)}{dp} = 4p^3 + 12p + 0$

Les coefficients de ce polynôme remplacent ceux de la ligne nulle dans le tableau initial. Le tableau devient alors :

$p^5 :$	1	6	8
$p^4 :$	1	6	8
$p^3 :$	4→1	12→3	
$p^2 :$	3	8	
$p^1 :$	1/3		
$p^0 :$	8		

Il n'y a aucun changement de signe sur la 1^{ère} colonne du tableau, donc aucune racine à partie réelle positive. Le système est donc stable.

Exemple 3 (un zéro sur la première colonne)

Si le premier élément de la ligne est nul, la ligne suivante ne pourra pas être calculée car il y aurait une division par zéro. Pour éviter cela, on utilise un nombre de valeur très faible ϵ (epsilon) pour remplacer le zéro de la première colonne. ϵ peut tendre vers zéro par valeur positive ou négative, pour permettre par la suite le calcul du nombre de changement de signe de la première colonne.

$$G(P) = \frac{10}{P^5 + 2P^4 + 3P^3 + 6P^2 + 5P + 3}$$

Considérons le système dont la FTBF :

$$P(p) = P^5 + 2P^4 + 3P^3 + 6P^2 + 5P + 3$$

Alors, le tableau de Routh est :

$p^5 :$	1	3	5
$p^4 :$	2	6	3
$p^3 :$	0→ ϵ	7/2	
$p^2 :$	$\frac{6\epsilon - 7}{\epsilon}$	3	
$p^1 :$	$\frac{42\epsilon - 49 - 6\epsilon^2}{12\epsilon - 14}$		
$p^0 :$	3		

Considérons uniquement le changement de signe dans la première colonne et calculons le signe de chaque ligne dans les 2 cas ($\varepsilon \rightarrow 0^+$ et $\varepsilon \rightarrow 0^-$) :

	1ère colonne	$\varepsilon \rightarrow 0^+$	$\varepsilon \rightarrow 0^-$
$p^5 :$	1	+	+
$p^4 :$	2	+	+
$p^3 :$	$0 \rightarrow \varepsilon$	+	-
$p^2 :$	$\frac{6\varepsilon - 7}{\varepsilon}$	-	+
$p^1 :$	$\frac{42\varepsilon - 49 - 6\varepsilon^2}{12\varepsilon - 14}$	+	+
$p^0 :$	3	+	+

Si ε est choisi positif, il y a 2 changements de signe. S'il est choisi négatif, il y a également 2 changements de signe. Le système a donc 2 pôles dans le demi-plan droit du plan complexe (2 pôles instables) et ce n'est pas important si nous choisissons d'approcher le zéro par valeur positive ou négative. Ceci est toujours le cas.

Exercice N°1 :

Soit le système décrit par : $T(P) = \frac{K}{(P+1)(P+2)(P+5)}$

Pour quelle valeur de K le système est stable. Vérifier la stabilité par les critères de ROUTH -Hurwitz.

Solution :

L'équation caractéristique : $P^3 + 8P^2 + 17P + 10 + K = 0$

Après l'application de critère de ROUTH -Hurwitz , le système est stable si $K \in] - 10, 126[$

Exercice N°2 :

Soit le système décrit par : $T(P) = \frac{K}{(P+3)(AP+1)}$

Pour quelle valeur de K et de A le système est stable. Vérifier la stabilité par le critères de ROUTH -Hurwitz

Solution :

L'équation caractéristique : $AP^2 + (3A + 1)P + 3 + K = 0$

Après l'application de critère de ROUTH -Hurwitz , le système est stable si $K \in] - 3, +\infty[$ et $A > 0$.

CHAPITRE VI

PRECISION DES SYSTEMES

VI.1. Introduction

La précision d'un système est définie à partir de l'erreur ε entre la grandeur de consigne E et la grandeur de sortie S . Nous distinguerons la précision statique qui caractérise la limite de l'erreur au bout d'un temps infini pour une entrée donnée, c'est-à-dire le régime permanent, et la précision dynamique qui tient compte des caractéristiques d'évolution du processus en régime transitoire [6].

VI.2. Précision Statiques des Systèmes bouclés

VI.2.1. Erreur statique

La précision d'un asservissement, en régime permanent, est définie par l'écart permanent $\varepsilon(t)$ qui existe entre la sortie réelle et celle que l'on désire obtenir.

Par définition, on dira qu'un système est d'autant plus précis que le signal d'erreur $\varepsilon(t)$ est plus faible.

L'idéal serait que l'on ait : $\varepsilon(t) = 0, \forall t$

En pratique, il en est autrement, car :

- La consigne peut varier : la recherche de la minimisation de $\varepsilon(t)$, en dépit de ces variations, constitue un problème de **suivi** (ou de **poursuite**).
- Un signal de perturbation aléatoire (exemple : un bruit) peut venir de superposer au signal utile en un point de la chaîne : le maintien de $\varepsilon(t)$, en dépit de la perturbation, constitue un problème de **régulation**.

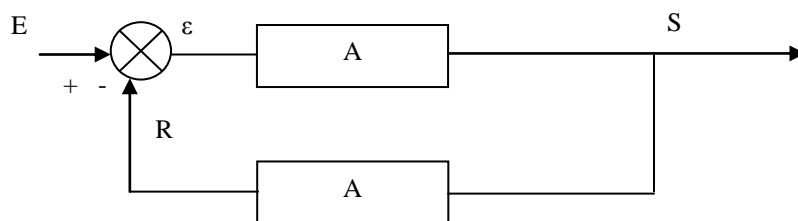


Figure VI.1. Régulation du système A

Calculons l'erreur statique :

$$\varepsilon(p) = E(P) - R(P)$$

$$\text{On a } R(p) = S(p) \cdot B(p) \text{ et } S(p) = \varepsilon(p) \cdot A(p)$$

$$\varepsilon(p) = E(p) - \varepsilon(p) \cdot A(p) \cdot B(p)$$

D'après le théorème de la valeur finale, l'erreur statique ε_s (ou encore ε_∞) est donnée par la relation :

$$\varepsilon(p) = \frac{E(P)}{1 + A(P) \cdot B(P)}$$

$$\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{P \rightarrow 0} P \cdot \varepsilon(P)$$

$$\varepsilon_s = \lim_{P \rightarrow 0} P \cdot \frac{E(P)}{1+A(P).B(P)} = \lim_{P \rightarrow 0} P \cdot \frac{E(P)}{1+FTBO(P)} \quad , \text{ Tel que } \varepsilon_s: \text{ Erreur statique}$$

ε_s dépend donc à la fois :

- du système considéré {présence de $A(p).B(p)$ },
- du signal d'entrée appliqué {présence de $E(p)$ }.

Adoptons la notation suivante :

n : le nombre d'intégrateurs que comporte la FTBO(p)

$$FTBO(P) = A(P).B(P) = \frac{K}{P^n} \cdot \frac{1 + a_1P + a_2P^2 + \dots}{1 + b_1P + b_2P^2 + \dots} \quad , n \geq 0$$

n : est appelé **classe du système**

m : l'ordre du signal d'entrée canonique $E(P) = \frac{E_0}{P^m}$, $m \geq 1$

Si $m = 1 \rightarrow$ échelon

Si $m = 2 \rightarrow$ rampe

Si $m = 3 \rightarrow$ Accélération

a - Erreur statique pour une entrée échelon

C'est l'erreur qui subsiste en régime permanent sur la réponse indicielle.

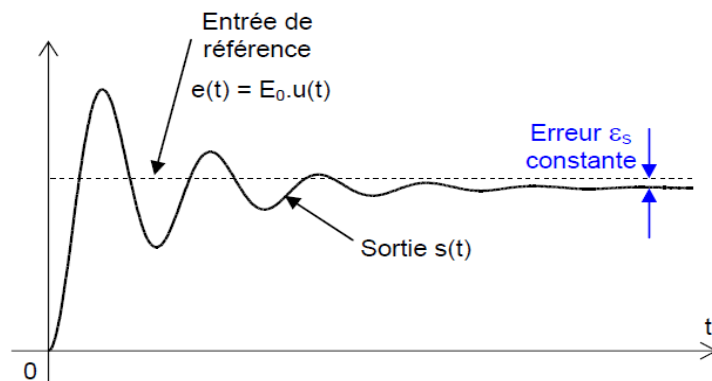


Figure VI.2. Réponse indicielle et l'erreur statique

Si l'entrée vaut : $E(P) = \frac{E_0}{P}$

$$\xi_s = \lim_{P \rightarrow 0} P \cdot \frac{E(P)}{1 + A(P).B(P)} = \frac{E_0}{1 + \lim_{P \rightarrow 0} FTBO(P)}$$

$$\varepsilon_s = \frac{E_0}{1+K_e} \quad \text{avec} \quad K_e = \lim_{P \rightarrow 0} FTBO(P)$$

K_e est une constante d'erreur statique d'échelon ou gain statique en Boucle ouverte.

Pour les systèmes de classe 0 :

$$K_e = \lim_{P \rightarrow 0} K \cdot \frac{1+a_1P+a_2P^2+\dots}{1+b_1P+b_2P^2+\dots} = K \rightarrow \varepsilon_s = \frac{E_0}{1+K} = Cte$$

Pour les systèmes de classe n > 0 :

$$K_e = \lim_{P \rightarrow 0} \frac{K}{P^n} \cdot \frac{1+a_1P+a_2P^2+\dots}{1+b_1P+b_2P^2+\dots} = \infty \rightarrow \varepsilon_s = 0$$

VI.2.2. - Erreur statique (ou erreur de traînage) pour une entrée rampe (ou vitesse)

C'est l'erreur qui subsiste en régime permanent sur la réponse à une rampe.

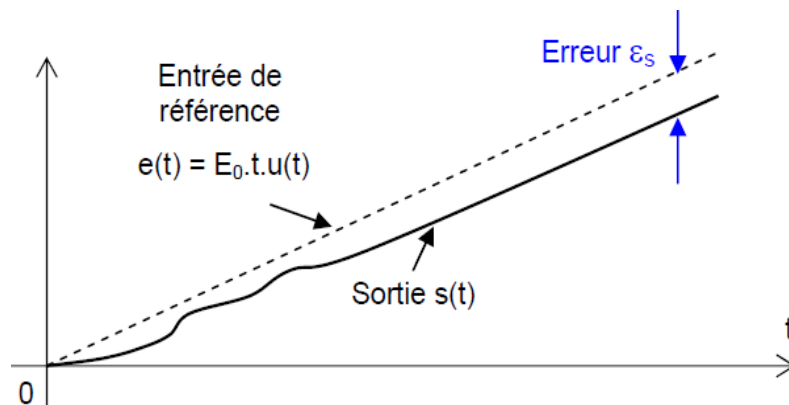


Figure VI.3. Réponse à une rampe et l'erreur statique

Si l'entrée vaut : $E(P) = \frac{E_0}{P^2}$

$$\varepsilon_s = \lim_{P \rightarrow 0} P \cdot \frac{E(P)}{1 + A(P) \cdot B(P)} = \lim_{P \rightarrow 0} \left(\frac{E_0}{P + P \cdot FTBO(P)} \right) = \frac{E_0}{\lim_{P \rightarrow 0} P \cdot FTBO(P)}$$

$\varepsilon_s = \frac{E_0}{K_v}$, Avec $K_v = \lim_{P \rightarrow 0} P \cdot FTBO(P)$: Constante d'erreur statique de vitesse

• Pour les systèmes de classe 0 :

$$K_v = \lim_{P \rightarrow 0} P \cdot K \cdot \frac{1+a_1P+a_2P^2+\dots}{1+b_1P+b_2P^2+\dots} = 0 \rightarrow \varepsilon_s = \infty$$

• Pour les systèmes de classe 1 :

$$K_v = \lim_{P \rightarrow 0} P \cdot \frac{K}{P^1} \cdot \frac{1+a_1P+a_2P^2+\dots}{1+b_1P+b_2P^2+\dots} = K \rightarrow \varepsilon_s = \frac{E_0}{K} = Cte$$

- Pour les systèmes de classe $n > 1$:

$$K_v = \lim_{P \rightarrow 0} P \cdot \frac{K}{P^n} \cdot \frac{1 + a_1 P + a_2 P^2 + \dots}{1 + b_1 P + b_2 P^2 + \dots} = \infty \rightarrow \varepsilon_s = 0$$

VI.2.3. - Erreur statique pour une entrée parabolique (ou accélération)

C'est l'erreur qui subsiste en régime permanent sur la réponse à une entrée accélération.

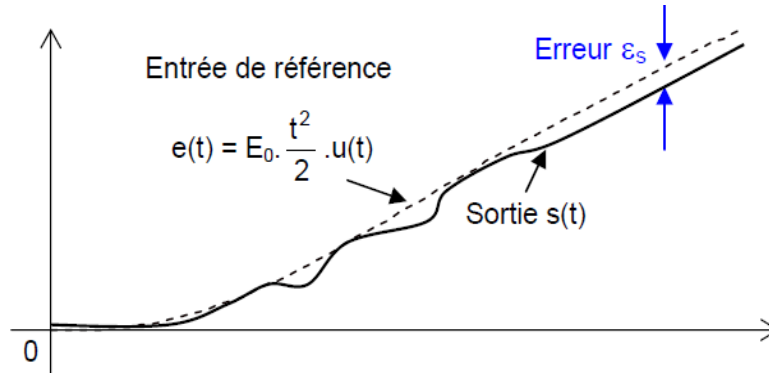


Figure VI.4. Réponse à une entrée parabolique et l'erreur statique

Si l'entrée vaut : $E(P) = \frac{E_0}{P^3}$

$$\varepsilon_s = \lim_{P \rightarrow 0} \left(P \cdot \frac{E(P)}{1 + FTBO(P)} \right) = \lim_{P \rightarrow 0} \left(\frac{E_0}{P^2 + P^2 \cdot FTBO(P)} \right) = \frac{E_0}{\lim_{P \rightarrow 0} P^2 \cdot FTBO(P)}$$

$\varepsilon_s = \frac{E_0}{K_a} = Cte$, Avec $K_a = \lim_{P \rightarrow 0} P^2 \cdot FTBO(P)$: Constante d'erreur statique d'accélération

- Pour les systèmes de classe 0 :

$$K_a = \lim_{P \rightarrow 0} P^2 \cdot K \cdot \frac{1 + a_1 P + a_2 P^2 + \dots}{1 + b_1 P + b_2 P^2 + \dots} = 0 \rightarrow \varepsilon_s = \infty$$

- Pour les systèmes de classe 1 :

$$K_a = \lim_{P \rightarrow 0} P^2 \cdot \frac{K}{P^1} \cdot \frac{1 + a_1 P + a_2 P^2 + \dots}{1 + b_1 P + b_2 P^2 + \dots} = 0 \rightarrow \varepsilon_s = \infty$$

- Pour les systèmes de classe 2 :

$$K_a = \lim_{P \rightarrow 0} P^2 \cdot \frac{K}{P^2} \cdot \frac{1 + a_1 P + a_2 P^2 + \dots}{1 + b_1 P + b_2 P^2 + \dots} = K \rightarrow \varepsilon_s = \frac{E_0}{K} = Cte$$

- Pour les systèmes de classe $n > 2$:

$$K_a = \lim_{P \rightarrow 0} P^2 \cdot \frac{K}{P^n} \cdot \frac{1 + a_1 P + a_2 P^2 + \dots}{1 + b_1 P + b_2 P^2 + \dots} = \infty \rightarrow \varepsilon_s = 0$$

VI.2.4. - Récapitulatif des erreurs statiques

Le tableau suivant récapitule les valeurs de l'erreur statique en fonction :

- de la classe n du système
- de l'ordre du signal d'entrée canonique
- du gain K de la FTBO du système

Classe du Système	Constantes d'erreur Statique			Erreur Statique ϵ_s		
	K_e	K_v	K_a	Erreur Echelon $\frac{E_0}{1 + K_e}$	Erreur Vitesse $\frac{E_0}{K_v}$	Entrée accélération $\frac{E_0}{K_a}$
0	K	0	0	$\frac{E_0}{1 + K}$	∞	∞
1	∞	K	0	0	$\frac{E_0}{K}$	∞
2	∞	∞	K	0	0	$\frac{E_0}{K}$
3	∞	∞	∞	0	0	0
⋮	∞	∞	∞	0	0	0

Remarques importantes:

Les constantes d'erreurs K_e , K_v et K_a décrivent l'aptitude du système asservi à réduire ou éliminer l'erreur statique. Elles renseignent, par conséquent, sur les performances du système en régime permanent.

Il est généralement préférable d'accroître les constantes d'erreurs, tout en maintenant la réponse transitoire dans des proportions acceptables ; En effet, l'erreur statique, lorsqu'elle est finie et non nulle, décroît lorsque le gain en boucle ouverte croît. Mais cette croissance du gain peut détériorer la stabilité du système. Cette propriété est connue sous le nom de " Dilemme Stabilité – Précision ", qui nécessite souvent un compromis.

Il est à noter également que pour améliorer les performances en régime statique, nous pouvons augmenter la classe du système en ajoutant un ou des intégrateur(s) dans la chaîne directe du système. Ceci peut, cependant, engendrer des problèmes de stabilité supplémentaires.

Pour un système stable, le gain statique en boucle fermée est défini par :

$$K_S = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{s(t)}{e(t)} = \lim_{P \rightarrow 0} FTBF(P)$$

VI.3. Précision Dynamique - Rapidité

VI.3.1. La Rapidité : une qualité essentielle

La précision dynamique est caractérisée par l'évolution du signal d'erreur pendant le régime transitoire ; précision et rapidité sont intimement liées durant cette phase d'évolution du système. **le couple précision-rapidité résulte d'un compromis** dans le réglage du gain de la chaîne [4].

Un système automatique doit de réagir le plus rapidement possible à toute sollicitation de la commande et de corriger également très vite toute déviation due aux perturbations subies.

La rapidité d'un système se mesure par son **temps de réponse**.

VI.3.2. Définition du temps de réponse

Très peu de systèmes sont à réponse instantanée. La plupart des systèmes physiques évoluent d'un état stable à un autre état stable selon leurs propriétés intrinsèques et les réglages (de gain en particulier) qui les affectent.

Ainsi en ce qui concerne **la Rapidité**, celle-ci répond à la définition suivante :

Le temps de réponse à 5% est le temps au bout duquel, pour une entrée en échelon de position, le système de fonction de transfert $H(p)$ atteint sa valeur définitive à 5% près et reste ensuite compris entre 95% et 105%.

- Si le système est du premier ordre, de constante de temps T , un calcul simple montre que le temps de réponse à 5% est : $t_r \approx 3T$
- Dans le cas d'un système du second ordre, deux paramètres dynamiques interviennent : la pulsation propre non amortie ω_n et le coefficient d'amortissement ξ qui, suivant sa valeur par rapport à l'unité, engendre un régime oscillatoire amorti ($\xi < 1$) ou un régime apériodique ($\xi > 1$).

On constate qu'un système, décrit par une fonction de transfert du second ordre, présente la plus grande rapidité pour un réglage à 0,707 de son facteur d'amortissement réduit. Pour $\xi = 0,707$, $T_r \omega_n = 2,93$

VI.3.3. Relation entre Rapidité et Bande passante

Soit un système de fonction de transfert $H(j\omega)$, soumis à une analyse harmonique (sollicitation sinusoïdale). Le signal de sortie recueilli est lui-même sinusoïdal (après disparition du régime transitoire).

Si le signal d'entrée est de la forme : $e(t) = E_0 \sin(\omega t)$, le signal de sortie permanent sera :

$$s(t) = E_0 |H(j\omega)| \sin[\omega t + \text{Arg}(H(j\omega))]$$

La bande passante d'un système peut se définir comme sa faculté à transmettre sans atténuation notable les signaux sinusoïdaux qui le traverse :

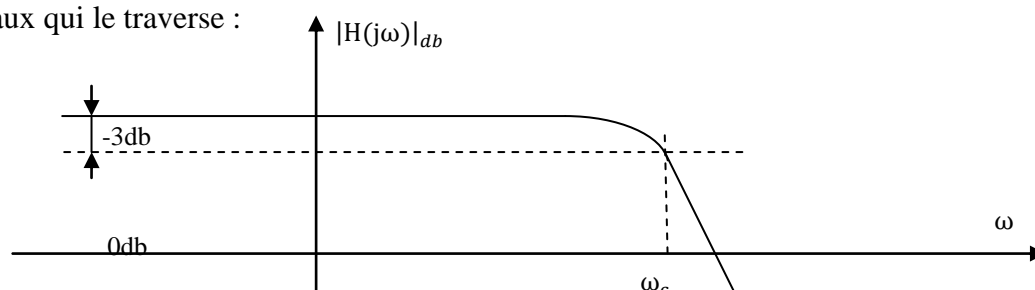


Figure VI.5. fonction de transfert $H(j\omega)$ en fonction de ω

- **La bande passante est définie à -3db** (atténuation tolérée de 30%). Elle s'étend, pour les systèmes habituellement traités en Automatique, entre zéro et la pulsation de coupure ω_c . Ces systèmes sont dits passe-bas. D'une façon générale, plus la bande passante d'un système est étendue plus il est rapide.
- **Dans le cas d'un système du premier ordre**, sa pulsation de coupure est l'inverse de sa constante de temps :

$$\omega_c = \frac{1}{T} \quad \text{Et} \quad T_r = 3.T$$

- **Dans le cas d'un système du second ordre**, pour un facteur ξ donné sa bande passante est proportionnelle à sa pulsation propre non-amortie ω_n , tandis que son temps de réponse lui est inverse.

Exercice N°1 :

Soit le système asservi de la figure VI -6 :

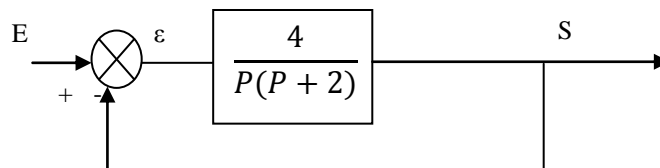


Figure VI.6. Système de deuxième ordre en boucle fermée

- 1) Etudiez la stabilité de ce système ?
- 2) Calculez le Gain statique en boucle fermée ?
- 3) Calculez l'erreur statique pour l'entrée Echelon ?

Solution :

- 1) Utilisons pour cela le critère de Routh :

$$FTBO(P) = \frac{4}{P(P+2)} = \frac{2}{P(\frac{P}{2} + 1)}$$

$$FTBF(P) = \frac{\frac{2}{P(\frac{P}{2} + 1)}}{1 + \frac{2}{P(\frac{P}{2} + 1)}} = \frac{1}{\frac{P^2}{4} + \frac{P}{2} + 1}$$

$$P^2 : \frac{1}{4} \quad 1$$

$$P^1 : \frac{1}{2} \quad 0 \quad \rightarrow \quad \text{Tous les signes de la 1ere colonne sont de même signes alors le système est stable}$$

$$P^0 : 1$$

$$2) \text{ Gain statique en boucle fermée : } K_s = \lim_{P \rightarrow 0} FTBF(P) = 1$$

3) L'erreur statique pour l'Entrée Echelon :

$$\varepsilon_s = \lim_{P \rightarrow 0} P \cdot \frac{E(P)}{1+FTBO(P)} = 0, \text{ Avec } E(P) = \frac{1}{P} \text{ et } E_0 = 1$$

Alors $K_e = \infty$, puisqu'il s'agit d'un système de classe 1.

$$\varepsilon_s = \frac{E_0}{1+K_e} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Exercice N°2 :

Soit le même système asservi de la figure VI -6 :

- Calculez les différentes erreurs statiques pour les entrées canoniques suivante: Rampe et entrée parabolique ?

Solution :

Entrée Rampe (vitesse) :

$$\varepsilon_s = \lim_{P \rightarrow 0} P \cdot \frac{E(P)}{1+FTBO(P)} = \frac{1}{2} \text{ Avec } E(P) = \frac{1}{P^2} \text{ et } E_0 = 1$$

Alors $K_v = K = 2$, puisqu'il s'agit d'un système de classe 1. $\xi_s = \frac{E_0}{K_v} = \frac{1}{\infty} = \frac{1}{2}$

Entrée parabolique (accélération) :

$$\varepsilon_s = \lim_{P \rightarrow 0} P \cdot \frac{E(P)}{1+FTBO(P)} = \infty \text{ Avec } E(P) = \frac{1}{P^3} \text{ et } E_0 = 1$$

Alors $K_a = 0$, puisqu'il s'agit d'un système de classe 1. $\varepsilon_s = \frac{E_0}{K_a} = \infty$

BIBLIOGRAPHIE ET WEBOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Mohammed-Karim FELLAH , « Automatique 1 et 2 (Asservissements Linéaires Continus) », Université Djillali Liabès – Sidi Bel-Abbès, 2013.
- [2] Ogata .K, « Automatic Control Engineering », Prentice Hall, fifth edition, 2010.
- [3] Kuo. B.C., « Automatic Control Systems», Prentice Hall, ninth edition, 2009.
- [4] Bernard BAYLE, « Systèmes et asservissements à temps continu », Ecole Nationale supérieure de Physique de Strasbourg année 2007–2008
- [5] Stéphane LE METEIL. BTS2 CIRA, « Résumé du cours sur la transformation de LAPLACE», 2005.
- [6] Eric Magarotto, « Cours de Régulation», IUT Caen - Département Génie, Chimique et Procédés. Université de Caen. 2004.
- [7] Patrick ROUSSEAU, « Asservissements linéaires continus», Collection Ellipses, Édition marketing S.A., Paris, 2004.
- [8] Patrick PROUVOST, « Automatique contrôle et régulation», Collection Dunod, Paris, 2004.
- [9] Close.Ch. M., Frederic, Newell , « Modeling and Analysis of Dynamic Systems». 3ème Edition, 2002
- [10] Christian Burgat, « Problèmes résolus d'automatique ». Collection Ellipses, Édition marketing S.A. , Paris, 2001.
- [11] Pierre BORNE, Mekki KSOURI, « Systèmes asservis linéaires continus cours et exercices résolus», Collection Technologie, Centre de Publication Universitaire, Tunisie, 2000.
- [12] Hubert ÉGON, Michel MARIE, Pascal PORÉE, « Traitement du signal et asservissements analogiques», Collection Méthodes, Éditeurs des sciences et des arts, Paris, 2000.
- [13] Michel VILLAIN , « Systèmes asservis linéaires », Collection Ellipses, Édition marketing, Paris, 1996.

WEBOGRAPHIE

[A] Nejib BENNIS, « Asservissement linéaire continu » :

<http://www.specialautom.net/>

[B] Dutertre, J.M. , « Automatique Linéaire 1 »:

http://www.minesstetienne.fr/~dutertre/documents/cours_automatique_1A_jmd_2014.pdf

[C] Jean-Paul . C, « Site sur l'automatique », Ecole polytechnique de l'université de tours, consulté le 08 décembre 2015 :

<http://auto.polytech.univ-tours.fr/automatique/SA/index.php/>

[D] P.Gatt , « Régulation », page 1-18, 2009-2010 :

<http://perso.numericable.fr/cira/pdf/Cours/Regulation/1%29%20Boucles%20de%20regulation.pdf>