

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université A. M. OULHADJ - Bouira
Faculté des Sciences et des Sciences Appliquées
Département de physique



Mémoire

Présenté par

Souag Hocine

TOUMERT Mebrouk

Pour l'obtention du diplôme de

MASTER

Filière: Physique

Spécialité : Physique Théorique

Amélioration des performances d'un protocole de téléportation quantique via une amplification quantique non-déterministe et sans bruit

Soutenu le 27 /09 / 2023

Devant le jury composé de :

Mohamed Sadoun, MCA UAMO, Bouira Président

Adnane Hamza, MCB UAMO, Bouira Rapporteur

Zamoum Redouane, MCA UAMO, Bouira Examineur

Benaiche Salim, MAA UAMO, Bouira Examineur

Remerciements

Nous tenons à remercier premièrement Dieu tout-puissant pour la volonté, la santé et la patience, qu'il nous a donné durant toutes ces longues années.

Nous tenons également à exprimer nos vifs respects et nos forts remerciements à notre encadreur : enseignant à l'université de Bouira pour son accueil, son assistance et son sens de former et d'informer.

Nous tenons aussi à remercier les membres du jury pour l'honneur qu'ils nous font en acceptant d'examiner notre travail.

Nous tenons à remercier vivement tous ceux qui nous ont aidé de près ou de loin à réaliser ce travail.

Nous tenons à remercier aussi tous les enseignants du département de physique qui ont contribué à notre formation.

Enfin, Nous tenons à exprimer notre reconnaissance à tous nos amis et collègues pour le soutien moral et matériel.



Dédicace

Je dédie ce projet:

A ma chère mère,

A mon cher père,

*Qui n'ont jamais cessé, de formuler des prières à mon égard, de me soutenir
et de m'épauler pour que je puisse atteindre mes objectifs.*

Pour leur soutien moral et leurs conseils précieux tout au long de mes études.

À qui je souhaite une bonne santé.

Pour son entente et sa sympathie.

Pour leur indéfectible soutien et leur patience infinie.

Qui m'a aidé et supporté dans les moments difficiles.

Pour leur aide et support dans les moments difficiles.

A tous ceux que j'aime et ceux qui m'aiment.

Souag Hocine

Je dédie ce projet:

A ma chère mère,

A mon cher père,

*Qui n'ont jamais cessé, de formuler des prières à mon égard, de me soutenir
et de m'épauler pour que je puisse atteindre mes objectifs.*

Pour leur soutien moral et leurs conseils précieux tout au long de mes études.

À qui je souhaite une bonne santé.

Pour son entente et sa sympathie.

Pour leur indéfectible soutien et leur patience infinie.

Qui m'a aidé et supporté dans les moments difficiles.

Pour leur aide et support dans les moments difficiles.

A tous ceux que j'aime et ceux qui m'aiment.

Tumert Al-Mabrouk

Résumé:

L'information quantique constitue un domaine qui englobe de nombreuses thématiques. Sur le plan théorique, il est impératif de développer de nouveaux outils et protocoles exploitant les ressources de la physique quantique. Du côté expérimental, le défi principal réside dans la mise en œuvre de ces protocoles, compte tenu des imperfections qui restreignent considérablement les performances. Il est nécessaire de caractériser ces imperfections et de disposer d'outils de diagnostic tirant au mieux parti des ressources expérimentales disponibles.

Notre humble travail s'inscrit dans le contexte de l'information quantique en utilisant des variables continues du champ électromagnétique, et il apporte des contributions aux problématiques théoriques et expérimentales, notamment dans le domaine des communications quantiques.

Dans la première section, nous avons exposé les bases théoriques nécessaires pour décrire le champ, à la fois en termes de variables discrètes et continues. Dans la suite de ce manuscrit, nous verrons comment ces deux approches peuvent être combinées pour ouvrir de nouvelles perspectives en matière d'information quantique.

Dans la deuxième partie, sous l'intitulé "Optique quantique et états usuels du champ quantifié", nous allons aborder la question de la quantification du champ électromagnétique et discuter des états courants du champ quantifié tels que les états cohérents, les états de Fock et les états du vide comprimé. Par la suite, nous allons examiner la génération d'états intriqués à deux modes, qui sont exactement les mêmes états composant le canal quantique du protocole de téléportation quantique.

Par la suite, une focalisation a été opérée sur l'élément essentiel de ce travail, à savoir le protocole standard de téléportation quantique pour les variables continues. L'attention a été dirigée vers la question de la détection du mécanisme de téléportation quantique instantanée au sein du cadre des variables continues. Ceci a été abordé en utilisant un canal quantique composé d'états comprimés et intriqués à deux modes. Cette caractérisation a été extrapolée au système de variables continues à distance, qu'il s'agisse d'états cohérents ou d'états du vide comprimé dans notre contexte spécifique.

Dans la troisième et dernière partie, nous avons abordé amplification quantique non-déterministe et sans bruit et cette partie a été divisée comme suit :

1. Amplification déterministe : L'amplification quantique déterministe augmente l'amplitude des états quantiques, mais introduit généralement du bruit. Elle peut dépendre ou non de la phase relative des composants d'un état quantique.

2. Amplificateur non-déterministe linéaire et sans bruit : L'amplificateur non-déterministe linéaire augmente la taille des états quantiques sans ajout significatif de bruit. Il peut être réalisé dans des systèmes optiques, quantiques ou à base de spins nucléaires. Ses applications incluent la communication et la mesure quantiques.

Utilisation dans la téléportation quantique : Le NLA peut améliorer la téléportation quantique en renforçant l'intrication entre qubits, réduisant ainsi les effets du bruit et augmentant la fidélité de la transmission quantique. Cela a des implications importantes pour les communications et le calcul quantiques.

Liste Des Figures

Liste des figures

Figure I.1: Paradigme de Shannon schéma fondamental d'une transmission.....	3
FigureII.1: Action d'un amplificateur déterministe dépendant de la phase.....	21
FigureII.2: Action d'un amplificateur déterministe indépendant de la phase.....	21
FigureII.3: Action d'un amplificateur déterministe indépendant de la phase sur l'indiscernabilité des états cohérents	23
FigureII.4: Action d'un amplificateur non-déterministe linéaire et sans bruit.	24
FigureIII.1: Représentation graphique de la distribution des photons pour différents états quantiques bipartites.....	36
FigureIII.2: Entropie de Von Neumann excédentaire des faisceaux jumeaux amplifiés et standards en fonction du paramètre de compression.....	37
Figure III.3: La corrélation EPR en fonction du paramètre de compression.....	38
FigureIII.4: Représentation de la fidélité moyenne F en fonction de χ	42
FigureIII.5: La fidélité moyenne F en fonction de g pour des ressources intriquées avec différentes énergies d'entrée	42
FigureIII.6: Illustration de la dépendance de la qualité de téléportation d'un état cohérent avec une amplitude de $\alpha = 2$ en fonction du paramètre de compression χ	44

Sommaire

Sommaire

Résumé

Introduction Générale	1
------------------------------------	----------

**Chapitre I: Protocole de Téléportation Quantique dans
le régime des variables**

I.1. Téléportation quantique avec des variables discrètes ...	3
I.1.1. Premières réalisations expérimentales	4
I.2. Optique quantique et états usuels du champ quantifié	5
I.2.1. Quantification du champ électromagnétique	5
I.2.2. Zoologie quantique : exemples d'états particuliers	10
I.2.2.1. Etat fondamental du champ vide.....	11
I.2.2.2. Etats nombres base de Fock.....	12
I.2.2.3. Etats cohérents dits quasi-classiques.....	12
I.2.2.4. Etats comprimés.....	13
I.3. Protocole standard de la téléportation quantique à variables continues	14
I.3.1. Téléportation en représentation de Heisenberg.....	15

Chapitre II: Amplification quantique non-déterministe et sans bruit

Introduction.....	16
II.1. Amplification déterministe	17
II.1. 1. Amplificateur dépendant de la phase.....	20
II.1. 2. Amplificateur indépendant de la phase	21
II.2. Amplificateur non-déterministe linéaire et sans bruit	23
II.2.1. Principe de fonctionnement	24
II.2.2. Différentes implémentations du NLA	27
II.2.3. Les ciseaux quantiques	27
II.3. Applications du NLA	29
II. 3.1. Génération d'états quantiques	29
II. 3.2. Amélioration des protocoles de communications quantiques	30
II.4. Conclusion	30

Chapitre III: Amélioration du protocole de téléportation quantique moyennant une amplification non-déterministe linéaire et sans bruit

III.1.Introduction	32
III.2.Caractéristiques des faisceaux jumeaux amplifiés	33
III.2. 1. L'état bipartite du faisceau jumeau standard	33
III.2. 2. Le faisceau jumeau amplifié	34
III.2. 3. Degré d'entrelacement	36
III.2. 4. Corrélacion EPR.....	37
III.3. Améliorations de la téléportation assistées par NLA	38
III.3. 1. Téléportation d'états cohérents	40
III.4.Conclusion	44
Conclusion Générale	46
Références	

Introduction
Générale

Introduction Générale

L'information est physique ! Cette assertion ouvre la porte à deux interprétations. D'une part, elle peut être considérée comme une limitation. L'information perd son statut en tant que concept mathématique abstrait et est soumise aux lois de la physique, devenant sujette aux défauts et aux déviations du monde réel. D'autre part, elle peut être exploitée en tant que ressource. Ce nouveau point de vue est à la base d'une branche de la physique relativement récente appelée « information quantique. »

La mécanique quantique a réussi à décrire de nombreux phénomènes avec succès, révélant des comportements non conventionnels. Cependant, comme observé par de nombreux chercheurs, elle souffre de certaines contradictions. Au départ, cela a conduit à des critiques sous forme d'expériences de pensée et de revendications de démontrer l'incomplétude de la mécanique quantique, telles que la célèbre paradoxe EPR [1] et le chat de Schrödinger [2]. Indépendamment du contexte historique, on peut distinguer deux concepts fondamentaux à l'origine de ces contradictions : l'intrication et la réduction du paquet d'ondes lors de la mesure quantique (en conjonction avec le principe de superposition). Les expériences ont favorisé l'intrication [3, 4], mais le problème de la mesure a été résolu à plusieurs reprises sans succès complet.

Cependant, au lieu de constituer des obstacles pour les physiciens, ces idées ont été habilement exploitées pour étendre l'impact de la mécanique quantique dans le domaine de la théorie de l'information. L'idée a déjà germé dans l'esprit de Feynman, qui a suggéré en 1982 la construction d'un ordinateur quantique pour simuler efficacement le comportement des systèmes quantiques [5]. La même année, Wootters et Zurek [6], ainsi que Deutsch [7], ont mentionné le protocole de distribution de clé quantique, BB84, inventé par Bennett et Brassard en 1984 [8]. L'algorithme de Deutsch a été formulé pour déterminer si une fonction binaire est constante ou équilibrée en 1985 et généralisé en 1992 par Deutsch-Jozsa [9]. L'algorithme de Shor, célèbre pour sa capacité à factoriser rapidement les entiers, a mis en évidence la puissance de l'information quantique depuis 1994 [10]. En 1995, la théorie du codage source a été clarifiée par Schumacher, avec le concept de qubit, basé sur l'œuvre de Shannon, dans le cas du codage quantique [11]. En 1996, Grover a proposé un algorithme de recherche quantique pour une base de données non structurée plus efficace que les algorithmes classiques [12]. En même temps, le protocole de téléportation quantique a été énoncé par [Bennett et al [13] en 1993. Cela consiste en la transmission d'un état quantique inconnu entre deux stations, Alice et Bob, en utilisant un canal classique et un canal quantique partagé par les deux parties. Le protocole de téléportation instantanée en 1994 pour les systèmes décrits par des variables continues (position et impulsion) a été proposé par Vaidman [14], utilisant des états présentant un degré d'intrication maximal précédemment introduit par EPR. En 1998,

Introduction Générale

Braunstein et Kimble [15] ont proposé une extension de ce protocole en utilisant des états intriqués d'ordre n , tout en tenant compte des variables continues du champ électromagnétique. Dans ce dernier cas, des états intriqués sont créés sans contrainte en utilisant des états comprimés à deux niveaux [16]. Le protocole standard de téléportation dans ce contexte repose sur la description des états quantiques dans l'espace de phase avec leurs fonctions de Wigner. Ces dernières sont des distributions de probabilité quasi-positives non définies pour tous les états quantiques, mais seulement pour les états gaussiens [17].

Dans le premier chapitre de ce mémoire, nous aborderons le protocole de téléportation quantique avec des variables discrètes et les limites imposées par les qubits, mettant en évidence les avantages du passage au système de variables continues. Par la suite, nous décrirons la mesure quantique du champ électromagnétique et présenterons les états usuels du champ EM quantifié (états cohérents, états de Fock, états du vide comprimé, ...). Ensuite, nous discuterons la génération d'états intriqués à deux niveaux et examinerons le protocole standard de téléportation à variables continues. La question se rapportant à comment est implémentée la téléportation quantique dans le système de variables continues sera abordée.

Dans le deuxième chapitre, nous aborderons l'amplification non déterministe (qui est certainement accomplie mais génère inévitablement du bruit). Nous parlerons de deux cas : L'amplification dépendante de la phase et celle indépendante de la phase. Nous discuterons d'abord du principe de fonctionnement de NLA (l'amplification linéaire non déterministe sans bruit) puis révélerons les différentes applications possibles de l'amplification mentionnée. Enfin, nous parlerons des différentes applications de NLA et de l'objectif de ce travail (utilisation de NLA pour améliorer le protocole de téléportation instantanée quantique à variables continues). Dans le troisième chapitre, nous parlerons de l'application de l'amplification non déterministe à l'état EPR, sur lequel repose le protocole de téléportation quantique. Nous analyserons le degré d'intrication de l'état ainsi généré. Nous aborderons ensuite la partie principale de notre travail qui revisite le protocole standard de téléportation instantanée quantique en améliorant ses performances moyennant l'application d'une amplification non-déterministe et sans bruit sur le canal quantique.

Chapitre I:
Protocole de
Téléportation
Quantique dans le
régime des variables
continues

I. Protocole de Téléportation Quantique :

La téléportation quantique est un protocole de communications quantiques consistant à transférer l'état quantique d'un système vers un autre système similaire et séparé spatialement du premier en mettant à profit l'intrication quantique. Contrairement à ce que le nom laisse entendre, il ne s'agit donc pas de transfert de matière. Le terme de téléportation quantique est utilisé pour souligner le fait que le processus est destructif : à l'issue de la téléportation, le premier système ne sera plus dans le même état qu'initialement.

Avant d'aborder le protocole proprement dit, nous allons préciser un certain nombre de notions élémentaires d'une nouvelle science en train de naître : l'information quantique.

Les fondements de la théorie de l'information telle que nous la connaissons aujourd'hui ont été mis en avant par Claude Shannon dans un article devenu une référence célèbre [18]. Son intuition principale est de définir le processus de communication comme essentiellement aléatoire dans lequel la source (connue sous le nom d'Alice) envoie un message inconnu à un récepteur (appelé Bob) via un canal physique. Aussi trivial que cela puisse nous sembler maintenant, la mise en place de ce modèle a été une condition nécessaire au développement de la théorie de l'information et, plus encore, du concept d'information comme grandeur physique au sens propre.

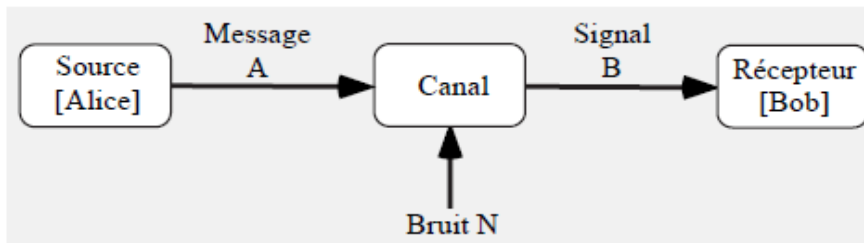


Figure I.1: Paradigme de Shannon. schéma fondamental d'une transmission[18]

I.1. Téléportation quantique avec des variables discrètes :

Toute information numérique est encodée sous forme de mots binaires dont l'entité unique et indivisible est le bit (de l'anglais binary digit). Cette variable binaire ne peut prendre que deux états distincts « 0 » et « 1 » correspondant par exemple à la présence ou non d'un signal électrique, lumineux ou autre. En physique quantique, cette situation se généralise sans difficulté à l'aide d'un système à deux niveaux : un niveau fondamental $|g\rangle$ et un niveau excité $|e\rangle$ séparé du premier d'une énergie non nulle $\hbar\omega_0$, où ω_0 est par exemple la fréquence de Bohr d'une certaine transition atomique que l'on sélectionne à l'aide d'un laser asservi sur cette fréquence. Naturellement, on identifiera l'état binaire « 0 » à l'état fondamental du système à 2 niveaux et l'état binaire « 1 » à l'état excité du système que l'on notera désormais par les kets $|0\rangle$ et $|1\rangle$. Ces deux états constituent alors la base de l'espace de Hilbert du système, et l'état de ce dernier s'écrira de manière générale sous la forme (I.1) où les paramètres complexes (α, β) vérifient la condition de normalisation $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. On appelle alors **qubit** (pour quantum binary digit) un tel système à deux niveaux utilisé comme brique élémentaire de la logique quantique [1]. Etant donné l'arbitraire de phase d'un état quantique $|\Psi\rangle$, on peut représenter l'état d'un qubit par un vecteur parcourant la sphère de Bloch avec :

$$|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \tag{I.1}$$

$$\alpha = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \beta = e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{I.2}$$

A la différence du bit classique, il est impossible de déterminer (de lire) l'état d'un qubit sans projeter ce dernier sur l'un des états binaires classiques. Alors on peut penser qu'il suffit de multiplier un qubit afin d'en déterminer l'état par mesures répétées sur les copies du qubit initial. Cependant, la possibilité d'une telle multiplication des copies du qubit est interdite par la physique quantique, elle fait même l'objet d'un théorème connu sous l'appellation de théorème de non-clonage.

Une dernière étape est nécessaire avant d'aborder le protocole de téléportation quantique. Il s'agit d'introduire les portes logiques quantiques. Il est à noter que la manipulation d'un qubit doit se faire par des opérations unitaires pour les raisons évoquées précédemment. Ainsi, l'opération logique associée à l'application d'une fonction $f(x)$ de la variable binaire x notée \widehat{U}_f est définie par :

$$\widehat{U}_f |x, y\rangle = |x, y \oplus f(x)\rangle, (I.3)$$

où x et y désignent respectivement les registres d'entrée et de sortie qui permettent effectivement d'avoir une opération unitaire puisque l'on vérifie facilement que $\widehat{U}_f^2 = I$, sachant que \oplus désigne ici l'addition modulo 2 ("OU exclusif").

Citons enfin quelques exemples de portes. La porte cNOT (pour Control NOT) définie par cNOT : $(x, y) \rightarrow (x, y + x)$ et la porte d'Hadamard H_d dont l'action est la suivante

$$H_d |x = 0, 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|0\rangle + (-1)^x |1\rangle] (I.4)$$

I.1.1. Premières réalisations expérimentales:

L'une des premières réalisations expérimentales de la téléportation quantique en variables discrètes a été réalisée par l'équipe de Anton Zeilinger en 1997 [19]. Une paire de photons intriqués est créée par conversion paramétrique spontanée et dégénérée en fréquence dans un cristal non linéaire $\chi^{(2)}$. Il s'agit d'une conversion de type II puisque l'accord de phase est assuré par biréfringence. Les photons signal et complémentaire sont alors émis suivant des polarisations orthogonales. Ceci conduit à des photons intriqués en polarisation qui sont en fait dans un état antisymétrique de Bell :

$$|\Psi_{23}^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|h\rangle_2 |v\rangle_3 - |v\rangle_2 |h\rangle_3] \quad (I.5)$$

où h et v désignent respectivement les états de polarisation horizontale et verticale. Le but de l'expérience est alors de projeter le photon à téléporter et le photon intriqué sur ce même état de Bell antisymétrique par des mesures de coïncidence à l'issue d'une lame séparatrice 50/50. En effet, les deux détecteurs de part et d'autre de la lame cliquent en même temps lorsque les deux photons sont soit simultanément transmis, soit simultanément réfléchis. On montre alors que les photons peuvent être dans un état intriqué de la forme $|\Psi_{12}^-\rangle$, ce qui suffit à assurer la téléportation puisque :

$$|\Psi_{12}^-\rangle \langle \Psi_{12}^-| \times |\psi_1\rangle \times \langle \Psi_{23}^-| = -\frac{1}{2} |\Psi_{12}^-\rangle \times ||\psi_1\rangle\rangle_3 \quad (I.6)$$

Le qubit de Bob se retrouve bien dans l'état du qubit d'Alice $|\psi_1\rangle$ dans 25% des cas. On doit le vérifier en plaçant un cube séparateur de polarisation orienté à +/- 45 ° par rapport aux états de polarisations verticales et horizontales. Il y a téléportation pour la triple coïncidence à l'issue de la lame séparatrice d'Alice et sur la voie adéquate du cube de Bob [20].

Nous arrivons enfin au vif du sujet à savoir le principe de la téléportation quantique. Il est de tradition d'appeler les protagonistes d'un scénario de communication Alice et Bob. Alice dispose d'un qubit $|\psi_A\rangle$ qu'elle souhaite transmettre à Bob. Elle dispose pour cela de deux canaux. Un canal classique et un canal quantique dit EPR, en référence au paradoxe Einstein-Podolsky–Rosen. On précisera ultérieurement le sens d'une telle dénomination lorsque l'on présentera la téléportation quantique dans le régime des variables continues. À ce stade, il suffit amplement de dire qu'il s'agit d'un canal composé de deux qubits maximalement intriqués, et dont l'état s'écrit :

$$|\varphi_{AB}^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|0_A 0_B\rangle + |1_A 1_B\rangle] \neq |\varphi_A\rangle \times |\varphi_B\rangle \quad (I.7)$$

En effet, pour un tel état, il est impossible de factoriser l'état de la paire de qubits sous la forme d'un produit tensoriel. Cette inséparabilité se traduit par de très fortes corrélations sur les résultats de mesure qu'il est impossible d'expliquer par des modèles classiques. On peut regarder à ce propos l'article sur l'expérience d'Aspect.

Alice qui souhaite communiquer à Bob l'état de son qubit sans être importunée par les indiscretions d'Eve, applique à son qubit $|\psi_1\rangle$ et au qubit de la part intriqué l'algorithme quantique suivant :

A) L'état initial du qubit d'Alice et de la paire intriquée s'écrit

$$|\text{initial}\rangle = |\psi_1\rangle \times |\varphi_{AB}^+\rangle \quad (I.8)$$

B) On fait interagir le qubit d'Alice avec le qubit EPR qu'elle détient via une porte cNOT dont le qubit de contrôle est le qubit d'Alice $|\Psi_A\rangle$. L'état intermédiaire se met alors sous la forme suivante :

$$|\text{inter}\rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} |0_A\rangle [|0_A 0_B\rangle + |1_A 1_B\rangle] + \frac{\beta}{\sqrt{2}} |1_A\rangle [|1_A 0_B\rangle + |0_A 1_B\rangle] \quad (I.9)$$

C) Ensuite, Alice fait subir à son qubit une opération d'Hadamard H_d qui donne le résultat final :

$$\begin{aligned} |\text{final}\rangle = & \frac{1}{2} |0_A 0_A\rangle (\alpha |0_B\rangle + \beta |1_B\rangle) \\ & + \frac{1}{2} |0_A 1_A\rangle (\beta |0_B\rangle + \alpha |1_B\rangle) \\ & + \frac{1}{2} |1_A 0_A\rangle (\alpha |0_B\rangle - \beta |1_B\rangle) \\ & + \frac{1}{2} |1_A 1_A\rangle (\beta |0_B\rangle - \alpha |1_B\rangle) \end{aligned} \quad (I.10)$$

Il a été observé que l'état du qubit d'Alice est transféré sur le qubit de Bob dans 25 % des cas lorsque Alice mesure les états binaires 0 pour ces deux qubits. Dans les autres situations, Alice doit communiquer à Bob les résultats de ses mesures, connues sous le nom de mesures de Bell, pour

permettre la finalisation de la téléportation. Il convient de noter que la théorie de la relativité restreinte d'Einstein n'est pas enfreinte, car la transmission des résultats des mesures de Bell se fait à travers un canal classique. En réalité, il est facile de démontrer que les états de Bob correspondant à chaque scénario sont quasiment identiques à l'état du qubit d'Alice, avec une opération unitaire de correction. Par exemple, lorsque Alice projette ces deux qubits sur l'état $|0_A 1_A\rangle$, l'état de Bob devient similaire à $\sigma_x |\psi_A\rangle$, où σ_x représente l'une des matrices de Pauli, qui peut être utilisée pour décomposer tout opérateur hermitien. Ceci garantit des valeurs propres réelles pour les grandeurs mesurables, correspondant aux observables physiques en physique quantique. En outre, il est important de souligner que le théorème de non-clonage est préservé, car le qubit d'Alice est totalement altéré lors des opérations et mesures qu'elle effectue. Ce schéma, proposé en 1993 par Charles Bennett [13] alors qu'il travaillait chez IBM, prend une forme plus générale où les états EPR et les qubits à téléporter sont projetés sur des états intriqués appelés états de Bell.

I.2. Optique quantique et états usuels du champ quantifié :

Aujourd'hui, ce protocole est implémenté en optique quantique dans le régime des variables dites continues par opposition au régime des variables discrètes abordé précédemment qui se caractérise entre autres par le comptage des photons. En effet, dans le régime des variables continues, on ne peut plus distinguer les photons individuellement : ils arrivent par « bouffées » contenant un très grand nombre de photons rendant l'approche par comptage complètement inimaginable !

La première réalisation expérimentale d'une telle téléportation a été réalisée par l'équipe de H. J. Kimble au Caltech aux États-Unis par Akira Furusawa en 1998.

Avant d'aborder le principe de cette expérience qui, aujourd'hui est devenue routinière en optique quantique, il est utile de préciser quelques notions liées aux variables continues.

I.2.1. Quantification du champ électromagnétique :

Nous allons quantifier le champ électromagnétique dans le vide. Les champs électrique E et magnétique B satisfont les équations de Maxwell dans le vide :

$$\nabla \cdot E(r, t) = 0 \quad \nabla \times E(r, t) = -\frac{\partial B(r, t)}{\partial t} \quad (\text{I. 11})$$

$$\nabla \cdot B(r, t) = 0 \quad \nabla \times B(r, t) = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E(r, t)}{\partial t} \quad (\text{I. 12})$$

où ϵ_0 et μ_0 sont respectivement la permittivité et la perméabilité du vide, et r et t représentent la position et le temps. A posteriori, il semble que la quantification soit plus facile lorsque nous écrivons les équations de Maxwell en fonction du potentiel vecteur et du potentiel scalaire, donc c'est ce que nous allons faire. La divergence nulle du champ magnétique (première équation de l'Éq.(I.12) permet d'exprimer B en tant que rotationnel d'un potentiel vecteur A,[21]

$$B = \nabla \times A \quad (\text{I. 13})$$

Ensuite, en remplaçant B dans l'équation de Maxwell-Faraday (seconde équation de l'Éq.(I.11), cette dernière s'exprime désormais comme

$$\nabla \times \left(-E - \frac{\partial A}{\partial t} \right) = 0 \quad (\text{I. 14})$$

Grâce à l'identité

$$\nabla \times \nabla \phi = 0 \quad (\text{I. 15})$$

où ϕ est une fonction scalaire, le champ électrique se réécrit comme

$$E = -\nabla \phi - \frac{\partial A}{\partial t} \quad (\text{I. 16})$$

En substituant l'Éq.(I.13) et l'Éq.(I.16) dans les équations de Maxwell restantes, nous obtenons les résultats suivants

$$\nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A + \frac{1}{C^2} \frac{\partial A}{\partial t} \nabla \phi + \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{I. 17})$$

et

$$-\nabla^2 \phi - \nabla \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (\text{I. 18})$$

où $C = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$ étant la célérité de la lumière. De plus, nous avons utilisé l'identité vectorielle

$$\nabla \times \nabla \times A = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A \quad (\text{I. 19})$$

Le couplage des termes en A et ϕ complique les équations de champ Éq.(I.17) et Éq.(I.18). Mais elles peuvent être simplifiées en introduisant une autre condition sur les potentiels. En effet, plusieurs potentiels A et ϕ différents peuvent représenter les mêmes champs physiques E et B . Soit f une fonction arbitraire de r et de t , alors toute transformation de ces potentiels définie par :

$$A \rightarrow A' = A + \nabla f \quad (\text{I. 20})$$

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial f}{\partial t} \quad (\text{I. 21})$$

mène aux mêmes expressions de E et B et est appelée transformation de jauge. De plus, les relations II.61 confèrent une certaine liberté dans le choix de la jauge $\{A, \phi\}$ ce qui permet d'ajouter une condition supplémentaire. Celle que nous utilisons est connue sous le nom de jauge de Coulomb. Cette jauge correspond à un potentiel vecteur A de divergence nulle,

$$\nabla \cdot A = 0 \quad (\text{I. 22})$$

L'Éq. (I.18) s'exprime désormais comme

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (\text{I. 23})$$

qui est une équation de Laplace, dont les solutions sont bien connues. Avec les conditions ci-dessus,

une solution de l'Éq.(I.23) est $\phi = 0$. Ensuite, afin de découpler totalement l'Éq.(I.17), nous appliquons le théorème de Helmholtz selon lequel un champ vectoriel (satisfaisant certaines conditions) peut se décomposer en une composante "longitudinale" (irrotationnelle) et une autre composante "transverse" (solénoïdale ou encore de divergence nulle) [22]. Nous obtenons donc l'équation suivante pour le potentiel vecteur

$$\frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi = 0 \quad (\text{I. 24})$$

De plus, en imposant des conditions aux limites périodiques associées à un volume cubique de longueur L, nous pouvons écrire la solution d'Éq.(I.24) comme une superposition d'ondes planes transverses [20]:

$$A(r, t) = \sum_{K,\lambda} \varepsilon_{K,\lambda} A_{K,\lambda}(r, t) \quad (I. 25)$$

Où

$$A_{K,\lambda}(r, t) = A_{K,\lambda}(t)e^{iKr} + A_{K,\lambda}^*(t)e^{-iKr} \quad (I. 26)$$

Ici, les éléments du vecteur d'onde $k = (k_x; k_y; k_z)$ sont de la forme $k_i = 2\Pi n_i/L$ ($i = x; y; z$ et $n_i \in \mathbb{Z}/\{0\}$). De plus, $\varepsilon_{K,\lambda}$ sont les vecteurs polarisation unitaires, et ils vérifient la condition de la jauge de Coulomb s'ils sont transverses :

$$\varepsilon_{K,\lambda} \cdot K = 0 \quad (I. 27)$$

Les polarisations sont choisies perpendiculaires l'une à l'autre :

$$\varepsilon_{K,\lambda} \cdot \varepsilon_{K,\lambda'} = \delta_{\lambda,\lambda'} \quad (I. 28)$$

où $\delta_{\lambda,\lambda'}$ est la fonction delta de Kronecker.

Les éléments $A_{K,\lambda}(t)$ du potentiel vecteur sont indépendants et chacun vérifie l'équation de champ (I.24)

$$\frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 A_{K,\lambda}(t)}{\partial t^2} + K^2 A_{K,\lambda}(t) = 0 \quad (I. 29)$$

Ainsi, les coefficients $A_{K,\lambda}(t)$, et leurs complexes conjugués, vérifient l'équation différentielle du mouvement d'un oscillateur harmonique simple,

$$\frac{\partial^2 A_{K,\lambda}(t)}{\partial t^2} + \omega_K^2 A_{K,\lambda}(t) = 0 \quad (I. 30)$$

où $\omega_K = CK$ est la pulsation.

Dès lors, la quantification du champ électromagnétique s'opère par la conversion de cet oscillateur harmonique classique en son homologue quantique. Pour ce faire, nous allons commencer par évaluer l'énergie du champ.

Nous prenons une solution de l'Éq.(I.30) de la forme

$$A_{K,\lambda}(t) = a_{K,\lambda} e^{-i\omega_K t} \quad (I. 30)$$

Nous avons donc

$$A(r, t) = \sum_{K,\lambda} \varepsilon_{K,\lambda} [a_{K,\lambda} e^{-i\omega_K t + iKr} + a_{K,\lambda}^* e^{i\omega_K t + iKr}] \quad (I. 31)$$

Nous obtenons le champ électrique transverse complet correspondant à partir de l'Éq.(I.16) :

$$E_T(r, t) = \sum_{K,\lambda} \varepsilon_{K,\lambda} i\omega_K [a_{K,\lambda} e^{-i\omega_K t + iKr} - a_{K,\lambda}^* e^{i\omega_K t + iKr}] \quad (I. 32)$$

Et nous obtenons le champ magnétique à partir de l'Éq.(I.13) :

$$B(r, t) = \sum_{K,\lambda} \frac{k \times \varepsilon_{K,\lambda}}{\lambda} ik [a_{K,\lambda} e^{-i\omega_K t + iKr} - a_{K,\lambda}^* e^{i\omega_K t + iKr}] \quad (I. 33)$$

L'énergie totale du rayonnement électromagnétique dans une cavité de volume V est donc

$$\varepsilon_{EM} = \frac{1}{2} \int_V [\varepsilon_0 E^2(r, t) + \mu_0^{-1} B^2(r, t)] = \varepsilon_0 V \sum_{k, \lambda} \omega_k^2 (a_{k, \lambda}^* a_{k, \lambda} + a_{k, \lambda} a_{k, \lambda}^*) \quad (I. 34)$$

L'hamiltonien quantique d'un oscillateur harmonique à une dimension (de masse m)

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{X}^2 \quad (I. 35)$$

avec l'opérateur position \hat{X} et l'opérateur quantité de mouvement \hat{P} vérifiant la relation de commutation

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i \quad (I. 36)$$

Il est pratique de remplacer \hat{X} et \hat{P} par une paire d'opérateurs sans dimension définis par

$$\hat{a} = (2m\omega)^{-1/2} (m\omega\hat{X} + i\hat{P}) \quad (I. 37)$$

et

$$\hat{a}^+ = (2m\omega)^{-1/2} (m\omega\hat{X} - i\hat{P}) \quad (I. 38)$$

Ces opérateurs \hat{a} et \hat{a}^+ sont appelés, respectivement, l'opérateur d'annihilation et l'opérateur de création d'un oscillateur harmonique, car ils détruisent ou créent un photon dans le champ :

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad (I. 39)$$

$$\hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad (I. 40)$$

Les états $|n\rangle$ sont appelés états de Fock (définis en II.6.1) et l'espace de Hilbert correspondant se nomme espace de Fock. Ce dernier est engendré par l'ensemble des états de Fock, qui sont également des vecteurs propres de l'opérateur nombre de photons $\hat{N} = \hat{a}^+ \hat{a}$ dont les valeurs propres correspondent au nombre de photons dans le champ. De plus, nous avons [23].

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = \hat{a}\hat{a}^+ - \hat{a}^+\hat{a} = 1 \quad (I. 41)$$

et l'hamiltonien peut se réécrire sous la forme

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \omega (\hat{a}^+ \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^+) = \omega \left(\hat{a}^+ \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \quad (I. 42)$$

Lorsqu'il y a plusieurs modes k, λ , chacun associé à un oscillateur harmonique, l'hamiltonien total s'obtient en sommant les différentes contributions des oscillateurs harmoniques, et nous avons ainsi $\hat{H}_{EM} = \sum_{k, \lambda} \hat{H}_{k, \lambda}$ (I. 43)

$$\hat{H}_{k, \lambda} = \frac{1}{2} \omega_k (a_{k, \lambda}^+ \hat{a}_{k, \lambda} + \hat{a}_{k, \lambda} a_{k, \lambda}^+) \quad (I. 44)$$

Comparons avec Éq.(II.75). Il apparaît que les quantifications des amplitudes classiques du potentiel vecteur en opérateurs quantiques doivent prendre les formes

$$a_{k, \lambda} \rightarrow \left(\frac{1}{2\varepsilon_0 V \varepsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} \hat{a}_{k, \lambda} \text{ and } a_{k, \lambda}^* \rightarrow \left(\frac{1}{2\varepsilon_0 V \varepsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} a_{k, \lambda}^+ \quad (I. 45)$$

Avec ces substitutions, nous pouvons quantifier le potentiel vecteur classique de l'Éq.(II.72) en [19]

$$A(r, t) = \sum_{k,\lambda} \varepsilon_{k,\lambda} \left(\frac{1}{2\varepsilon_0 V \omega_K} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{K,\lambda} \hat{a}_{k,\lambda} \varepsilon_{K,\lambda} [e^{(-i\omega_K t + ikr)} + a^+_{k,\lambda} e^{(i\omega_K t - ikr)}] \quad (I.46)$$

Les opérateurs de champ électrique et champ magnétique sont obtenus par conversion des Éqs.(II.73) et (II.74). Nous définissons un angle de phase,

$$X_k(r, t) = \omega_K t - k \cdot r - \frac{\pi}{2} \quad (I.47)$$

afin de simplifier l'expression de ces opérateurs.

L'opérateur champ électrique complet peut être commodément séparé en deux comme

$$\hat{E}_T(r, t) = \hat{E}_T^+ + \hat{E}_T^- \quad (I.48)$$

où les deux termes s'écrivent

$$\hat{E}_T^+(r, t) = \sum_{k,\lambda} \varepsilon_{k,\lambda} \left(\frac{\omega_k}{2\varepsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \hat{a}_{k,\lambda} e^{(-iX_k(r,t))} \quad (I.49)$$

et

$$\hat{E}_T^-(r, t) = \sum_{k,\lambda} \varepsilon_{k,\lambda} \left(\frac{\omega_k}{2\varepsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} a^+_{k,\lambda} e^{(iX_k(r,t))} \quad (I.50)$$

Ces deux éléments s'appellent respectivement la partie de fréquence positive et la partie de fréquence négative de l'opérateur du champ électrique. L'opérateur de champ magnétique s'écrit sous forme analogue comme.

$$\hat{B}_T(r, t) = \hat{B}_T^+ + \hat{B}_T^- \quad (I.51)$$

avec

$$\hat{B}_T^+(r, t) = \sum_{k,\lambda} k \varepsilon_{k,\lambda} \left(\frac{\omega_k}{2\varepsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} \hat{a}_{k,\lambda} e^{(-iX_k(r,t))} \quad (I.52)$$

et

$$\hat{B}_T^-(r, t) = \sum_{k,\lambda} k \varepsilon_{k,\lambda} \left(\frac{\omega_k}{2\varepsilon_0 V} \right)^{\frac{1}{2}} a^+_{k,\lambda} e^{(iX_k(r,t))} \quad (I.53)$$

Ainsi, les champs électrique et magnétique ont été quantifiés. Les opérateurs champ électrique et champ magnétique des Éqs.(I.48) et (I.51) sont hermitiens et ils représentent les champs électromagnétiques observables dans la cavité.

I.2.2. Zoologie quantique : exemples d'états particuliers :

Nous rappelons brièvement les définitions et propriétés de différents états quantiques utiles pour les applications en communications quantiques. Les formules ci-dessous sont présentées dans la notation normalisée de N_0 pour la variance du bruit de photons[24]. Le premier de ces états est l'état de quadrature $|\hat{x}\rangle$, défini comme l'état propre de l'opérateur \hat{X} avec la valeur propre x . L'ensemble de ces états forme une base orthogonale complète de l'espace de Hilbert. Néanmoins, comme ces états ne sont visiblement pas normalisables, ils n'ont pas de réalité physique propre et apparaissent davantage comme une commodité mathématique pour définir la fonction d'onde

d'un état $\psi(X) = \langle X|\psi \rangle$. A l'opposé, la fonction d'onde $\psi(x)$ possède bien une réalité physique : son module carré représente la distribution de probabilité en x de l'état, qui est mesurée avec une détection homodyne

I.2.2.1. Etat fondamental du champ vide:

L'état fondamental $|0\rangle$ de l'oscillateur harmonique est défini par l'annulation de l'opérateur annihilation :

$$\hat{a}|0\rangle = 0 \tag{I.54}$$

Cette équation implique que le nombre moyen de photons dans cet état est nul, $\langle \hat{N} \rangle = 0$. Pour cette raison, l'état $|0\rangle$ est appelé l'état du vide.

L'énergie moyenne de l'oscillateur harmonique définie par l'hamiltonien est alors minimale, d'où l'appellation d'état fondamental du champ. Cette énergie vaut alors :

$$\langle 0|\hat{H}|0\rangle = \frac{\hbar\omega}{2} \tag{I.55}$$

Dans ce système de notation, l'énergie d'un mode vide n'est pas nulle et vaut l'énergie d'un demi-photon ! Ce résultat est à relier au fait que si la valeur moyenne du champ est nulle, le champ présente néanmoins des fluctuations statistiques non nulles, conformément au principe d'Heisenberg. Si on considère l'ensemble des modes vides de l'espace, l'énergie contenue dans le vide diverge vers l'infini, ce qui pose le problème critique de la normalisation de la théorie quantique des champs. Cependant, nos mesures expérimentales de l'énergie électromagnétique ne permettent d'accéder qu'à une différence d'énergie à partir de l'énergie du vide. La valeur du niveau de référence n'aura donc pas d'influence dans nos expériences.

Plutôt que de considérer le mode vide sous ses aspects énergétiques, on peut s'intéresser aux moments statistiques de son champ électromagnétique :

$$\langle X \rangle = 0 \tag{I.56}$$

$$\Delta X^2 = \langle X^2 \rangle = N_0 \neq 0 \tag{I.57}$$

Comme on pouvait s'y attendre, la moyenne du champ électrique dans le vide est nulle. Par contre, même dans le vide, les composantes de quadratures fluctuent avec une variance N_0 non nulle. Ces fluctuations sont des aspects spécifiquement quantiques du champ et sont absolument nécessaires à la théorie quantique, sans quoi la relation fondamentale d'incertitude de Heisenberg serait violée. On peut d'ailleurs noter que pour l'état vide, les variances sont symétriques et minimales au sens de la relation d'Heisenberg : $\Delta X^2 = \Delta P^2 = N_0$

Une équation différentielle vérifiée par la fonction d'onde du vide s'obtient en réécrivant la formule (I.54) et $\hat{P} = i \frac{\partial}{\partial x}$. La fonction d'onde en X du vide s'écrit alors :

$$\Psi_0(x) = \frac{1}{(2\pi N_0)^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{4N_0}} \tag{I.58}$$

Ce qui permet de calculer la fonction de Wigner associée [18, 17]

$$W_0(x, p) = \frac{1}{2\pi N_0} e^{-\frac{x^2+p^2}{2N_0}} \tag{I.59}$$

On remarquera que ces fonctions sont des gaussiennes. L'état vide est un exemple fondamental d'état gaussien.

I.2.2.2. Etats nombres :

Les états nombres ou états de Fock $|n\rangle$ sont les états pour lesquels le nombre de photons dans le mode est parfaitement défini[25, 26]

$$\hat{a}^+ \hat{a} |n\rangle = n |n\rangle \tag{I. 60}$$

Cette définition en tant qu'états propres de l'opérateur nombre de photons impose alors des relations où l'opérateur \hat{a}^+ intervient pour la création d'un photon. On peut alors définir n'importe quel état $|n\rangle$ comme une excitation obtenue à partir du vide :

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^+)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle \tag{I. 61}$$

De cette définition découle alors l'orthonormalité des états de Fock et le fait qu'ils forment une base complète de l'espace de Hilbert. Cette propriété constitue l'intérêt essentiel des états de Fock pour représenter n'importe quel autre état quantique. En effet, ces états sont difficiles à produire expérimentalement au-delà de $n = 2$ et apportent donc plutôt une commodité de représentation et de calcul.

L'expression de la fonction d'onde de l'état de Fock $|n\rangle$ est donnée par l'expression [25, 26] :

$$W_n(x, \theta) = \frac{H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2N_0}}\right)}{(2\pi N_0)^{\frac{1}{4}} \sqrt{2^n n!}} e^{-\frac{x^2}{4N_0}} e^{-in\theta} \tag{I. 62}$$

Où H_n désigne le n-ième polynôme de Hermite défini par :

$$H_0(x) = 1; \quad H_1(x) = 2x \quad ; \quad H_2(x) = 4x^2 - 2 \quad ; \quad \frac{dH_n}{dx} = 2nH_{n-1}(x) \tag{I. 63}$$

La fonction de Wigner associée à l'état $|n\rangle$ s'écrit:

$$W_n(x, \theta) = \frac{(-1)^n}{2\pi N_0} e^{-\frac{x^2+p^2}{2N_0}} \ln\left(\frac{x^2 + p^2}{N_0}\right) \tag{I. 64}$$

Où L_n désigne le n-ième polynôme de Laguerre défini par :

$$\ln(x) = \sum_{k=0}^n c_n^k \frac{(-x)^k}{k!} \tag{I. 64}$$

Cette expression montre que pour n impair, la fonction de Wigner W_n est négative à l'origine, ce qui est une signature flagrante de l'aspect spécifiquement quantique des états de Fock.

I.2.2.3. Etats cohérents dits quasi-classiques:

Afin de modéliser un champ monomode dépourvu de bruit technique, on cherche un état quantique dont la valeur du champ en amplitude et phase est définie au mieux compte tenu de la relation d'Heisenberg. Cet état servira alors pour modéliser intuitivement le champ issu d'un laser monomode opérant largement au-dessus du seuil. L'expression du champ électromagnétique quantifié conduit à définir cet état quasi-classique $|\alpha\rangle$ comme la valeur propre de l'opérateur annihilation \hat{a}

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle \tag{I. 65}$$

Cette définition permet immédiatement de calculer les valeurs moyennes et les variances des composantes de quadratures :

$$\langle X \rangle = 2\sqrt{N_0} \operatorname{Re}(\alpha) \quad (\text{I. 66})$$

$$\langle p \rangle = 2\sqrt{N_0} \operatorname{Im}(\alpha) \quad (\text{I. 67})$$

$$\Delta X^2 = \Delta p^2 = N_0 (= \text{constante}) \quad (\text{I. 68})$$

Ce qui justifie à posteriori la définition (I.65): l'état cohérent $|\alpha\rangle$ possède des fluctuations en quadratures minimales indépendantes de l'amplitude et est centré sur la valeur α attendue pour un champ classique. En particulier, l'état du vide $|0\rangle$ est aussi un état cohérent. Cette similitude peut être poussée plus loin en démontrant que tout état cohérent est un état vide déplacé dans l'espace des phases [25, 26].

En se servant des états de Fock comme base de l'espace de Hilbert, un état cohérent peut se décomposer selon [27, 28].:

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (\text{I. 69})$$

Cette équation montre en particulier que le nombre de photon d'un état cohérent suit une distribution de Poisson de moyenne $|\alpha|^2$ et d'écart-type $|\alpha|$. On retrouve alors la célèbre formule de Schottky du bruit de photon ou shot noise : l'écart-type du bruit de détection est proportionnel à la racine carrée du nombre moyen de photons.

Compte tenu de la relation liant un état cohérent à l'état du vide, on peut déduire la fonction d'onde d'un état cohérent $|\alpha\rangle$ [27, 29] :

$$W_\alpha(x, p) = \frac{1}{(2\pi N_0)^{1/4}} e^{-\frac{(x-\langle x \rangle)^2}{4N_0}} e^{+i\frac{\langle p \rangle p}{2N_0} - i\frac{\langle x \rangle \langle p \rangle}{4N_0}} \quad (\text{I. 70})$$

A un terme de phase près, la fonction d'onde correspond à celle d'un vide déplacé. La densité de probabilité associée est alors exactement celle d'un état vide centré sur les valeurs moyennes des quadratures. Cette relation permet d'exprimer la fonction de Wigner associée de façon très intuitive :

$$W_\alpha(x, p) = W_0(x - \langle x \rangle, p - \langle p \rangle) \quad (\text{I. 71})$$

Les états cohérents sont donc eux aussi des états gaussiens.

Une dernière propriété importante est que les états cohérents ne sont pas orthogonaux entre eux :

$$\langle \beta | \alpha \rangle = e^{-(|\beta - \alpha|^2)} \quad (\text{I. 72})$$

I.2.2.4. Etats comprimés :

Les états cohérents ont la particularité de ne pas posséder davantage de fluctuations statistiques que l'état vide, et de minimiser la relation d'incertitude d'Heisenberg. Dans son esthétique démonstration de 1932 [30], Wolfgang Pauli démontra que les fonctions d'ondes minimisant la relation d'incertitude d'Heisenberg étaient nécessairement des gaussiennes. La relation d'Heisenberg ne spécifiant que le produit des variances, il est possible d'imaginer des états quantiques tels que la variance d'une quadrature soit inférieure au bruit quantique standard N_0 . Le prix à payer pour cette réduction de bruit est une augmentation du bruit de la quadrature conjuguée, de sorte à conserver un niveau minimal de la relation d'Heisenberg. On appelle ces états des états comprimés, tels que :

$$\Delta X^2 = sN_0\Delta p^2 = \frac{1}{s}N_0 \quad (I.73)$$

Où s est un facteur de compression, pris par convention inférieur à 1. Les expériences basées sur la génération d'états comprimés par amplification paramétrique utilisent également la notion

de paramètre de compression r tel que $s = e^{-2r}$. Le paramètre r est alors directement lié à la non-linéarité effective de l'interaction.

Lorsque les valeurs moyennes des quadratures sont nulles, l'état comprimé est centré sur l'origine de l'espace des phases et on parle alors de vide comprimé. Il est intéressant de noter que la valeur moyenne du nombre de photons dans un état vide comprimé est non nulle et vaut $\langle \hat{N} \rangle = \sin^2 r$. Cet effet peut se comprendre comme une conséquence de l'émission spontanée dans le milieu non-linéaire. Une autre propriété intéressante démontre [26] que tout état comprimé se déduit d'un vide comprimé par l'application d'un opérateur de déplacement.

Du fait de leurs relations entre les distributions de bruit des quadratures, les états comprimés présentent des particularités spécifiquement quantiques. Par exemple, le vide comprimé d'un facteur de compression $s = e^{-2r}$ peut se décomposer sur la base des états de Fock selon [9] :

$$|0_s\rangle = \frac{1}{\sqrt{\cos h(r)}} \sum_{k=0}^{\infty} \left[c_{2k}^k \left(\frac{1}{2} \tan h(r) \right)^{2k} \right]^{1/2} |2k\rangle \quad (I.74)$$

Cette relation montre que les seuls termes présents dans la décomposition sont les termes pairs en nombre de photons, ce qui est une conséquence physique du fait que les photons sont émis par paires lors du processus d'interaction paramétrique à l'origine de la compression des fluctuations. Cette particularité quantique sera essentielle à la conception d'une source d'états non-gaussiens. D'un point de vue élémentaire, notre intuition conçoit le vide comprimé comme un état vide dont les échelles des axes de quadratures auraient été étirées ou comprimées. Cette intuition se retrouve de manière plus formelle dans l'expression de la fonction d'onde du vide comprimé donnée ici à un terme de phase près [29, 27] :

$$W_s(x) = \frac{1}{(s)^{1/4}} W_0\left(\frac{x}{\sqrt{s}}\right) \quad (I.75)$$

Il en va de même pour la fonction de Wigner associée :

$$W_s(x, p) = W_0\left(\frac{x}{\sqrt{s}}, \sqrt{s}p\right) \quad (I.76)$$

I.3. Protocole standard de la téléportation quantique à variables continues :

A l'instar des variables discrètes, nous allons introduire la téléportation quantique comme une application de l'intrication dans le domaine de la communication de l'information en utilisant les variables continues. Le protocole de la téléportation a été étendu aux variables continues par Vaidman en utilisant comme variables la position et l'impulsion et un état EPR comme état intriqué. Plus tard, Braunstein et al ont introduit le premier protocole de téléportation des variables continues réalisable expérimentalement, en utilisant pour cela des états comprimés du vide à deux modes comme états intriqués et les quadratures du champ électromagnétique comme variables. La vérification expérimentale de ce protocole a été réalisée par Furusawa et al qui ont démontré le rôle joué par l'état intriqué pour transmettre un état quantique inconnu plus efficacement que toute communication classique.

I.3.1 Téléportation en représentation de Heisenberg :

Il est plus facile de comprendre le protocole de la téléportation des variables continues dans la représentation de Heisenberg. Dans cette représentation, on s'intéresse à l'évolution des opérateurs de quadratures. Pour illustrer le protocole, nous supposons que l'état qu'Alice veut téléporter est décrit par un mode inconnu du champ électromagnétique, de quadratures x_{in} et p_{in} . Comme dans le cas des variables discrètes, Alice et Bob doivent échanger au préalable deux modes intriqués, $(x_1; p_1)$ chez Alice et $(x_2; p_2)$ chez Bob. Si l'état intriqué utilisé est un état comprimé du vide à deux modes, les quadratures précédentes s'écrivent en fonction des quadratures du vide à deux modes comme

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{+r}x_1^0 - e^{-r}x_2^0) \quad ; \quad p_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{+r}p_1^0 - e^{-r}p_2^0) \quad (I.77)$$

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{+r}x_1^0 + e^{-r}x_2^0) \quad ; \quad p_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{+r}p_1^0 + e^{-r}p_2^0)$$

où r représente le paramètre de compression $(x_1^0; p_1^0)$ et $(x_2^0; p_2^0)$ les deux modes du vide. Pour commencer, Alice va combiner le mode à téléporter $(x_{in}; p_{in})$ avec la partie du système intriqué en sa possession $(x_\mu; p_\mu)$ à l'aide d'une transformation SU (2). Elle obtient deux nouveaux modes $(x_\mu; p_\mu)$ et $(x_\nu; p_\nu)$ tels que

$$x_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_{in} - x_1) \quad ; \quad p_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_{in} - p_1) \quad (I.78)$$

$$x_\nu = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_{in} + x_1) \quad ; \quad p_\nu = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_{in} + p_1)$$

Elle mesure ensuite les quadratures x_μ et p_ν qui correspondent respectivement à la différences des quadratures positions et la somme des quadratures impulsions des modes (in) et (1). Une telle mesure représente la version variable continues d'une mesure projective sur la base de Bell. Elle transmet ensuite le résultat de cette mesure à Bob via un canal de communication classique.

En utilisant la définition (I.77) des quadratures de l'état intriqué, on peut écrire le mode $(x_2; p_2)$ de Bob en fonction des deux nouveaux modes comme suit

$$x_2 = x_{in} - (x_1 - x_2) - \sqrt{2}x_\mu = x_{in} - \sqrt{2}e^{-r}x_2^0 - \sqrt{2}x_\mu \quad (I.79)$$

$$p_2 = p_{in} + (p_1 - p_2) - \sqrt{2}p_\nu = p_{in} + \sqrt{2}e^{-r}p_1^0 - \sqrt{2}p_\nu$$

On remarque qu'aux quadratures du vide près, les quadratures du mode de Bob sont égales à celles du mode à téléporter (in) mais déplacées de $\sqrt{2}x_\mu$ en position et $\sqrt{2}p_\nu$ en impulsion. Connaissant les résultats de la mesure d'Alice, Bob déplace son mode (2) pour retrouver les quadratures du mode (in) et former les nouvelles quadratures

$$x_{out} = x_2 + \sqrt{2}x_\mu = x_{in} + \sqrt{2}e^{-r}x_2^0 \quad (I.80)$$

$$p_{out} = p_2 + \sqrt{2}p_\nu = p_{in} + \sqrt{2}e^{-r}p_2^0$$

Les quadratures du vide interviennent comme un bruit qui devient négligeable pour de grandes valeurs du paramètre d'intrication et à la limite d'une intrication maximale $r \rightarrow \infty$ les quadratures de Bob à la fin du processus de téléportation deviennent Identiques à celles du mode qu'Alice veut téléporter.

Chapitre II:
Amplification
quantique non-
déterministe et sans
bruit

CHAPITRE II: Amplification quantique non-déterministe et sans bruit

Introduction :

L'amplification joue un rôle crucial dans les protocoles de télécommunications traditionnels pour assurer une transmission efficace des signaux. Que ce soit dans les communications téléphoniques, les transmissions par fibre optique ou les communications par satellite, l'utilisation d'amplificateurs est courante. Un amplificateur agit de la manière suivante : lorsqu'un signal atténué ou perturbé est transmis via un canal de communication, l'amplificateur reçoit ce signal dont l'amplitude et la phase sont généralement inconnues. L'amplificateur ajoute de manière cohérente une énergie supplémentaire pour amplifier le signal. Ensuite, le signal amplifié est réinjecté dans le canal de transmission pour poursuivre son parcours.

Récemment, d'importantes avancées technologiques ont conduit les chercheurs à développer des protocoles de communication quantique. Bien que ces protocoles n'en sont qu'à leurs débuts, compte tenu de la rapidité avec laquelle de nouvelles découvertes sont réalisées, il est tout à fait plausible qu'ils soient commercialisés dans les années à venir. En somme, ces protocoles consistent à transférer de l'information entre une station émettrice et une station réceptrice, en l'encodant sur des états quantiques qui sont transmis au moyen des canaux quantiques. Ces canaux de transmission quantiques sont particuliers étant donné qu'ils préservent les propriétés cohérentes des composantes quantiques (superpositions) des états transférés. Cependant, en pratique, le bruit et les pertes altèrent les informations encodées, d'où la nécessité d'amplifier les états quantiques transférés avant leur détection par la station réceptrice. Un tel dispositif permettrait d'amplifier les composantes des états quantiques transférés, améliorant ainsi la transmission à travers le canal. Pareillement, la détection des états quantiques de faible amplitude nécessite des équipements sophistiqués et présentent des limitations imposées par les lois de la physique quantique. A titre d'exemple, lorsque l'amplitude de l'état quantique mesurée est du même ordre de grandeur que le bruit inhérent à la mesure, le signal se confond avec le bruit au point qu'il devient difficile d'extraire les informations qui y sont encodées.

Un amplificateur quantique qui agit sur les états quantiques avant leur détection pourrait contourner les imperfections des dispositifs de détection ou des canaux de transmission, à condition qu'il préserve les superpositions quantiques et n'amplifie pas le bruit intrinsèque des états quantiques transférés. Malheureusement, un tel amplificateur, considéré comme idéal, est théoriquement impossible à concevoir. En effet, les lois de la physique quantique, caractérisées par leur unitarité et leur linéarité, imposent qu'un amplificateur quantique linéaire, indépendant de la phase et déterministe, ajoute inévitablement un bruit minimal, quel que soit le dispositif expérimental envisagé. L'état quantique résultant se caractérise par un bruit additionnel induit par l'amplificateur, en plus du bruit initial qui est amplifié.

CHAPITRE II: Amplification quantique non-déterministe et sans bruit

Pour surmonter cette limite, T. Ralph et A. Lund ont proposé un amplificateur probabiliste dit amplificateur linéaire sans bruit non-déterministe (NLA pour "noiseless linear amplifier"). En renonçant au caractère déterministe de l'amplification, c'est-à-dire en amplifiant correctement seulement une fraction des états quantiques incidents, il est possible de concevoir un amplificateur indépendant de la phase qui non seulement n'ajoute pas de bruit à l'état résultant, mais n'amplifie pas non plus le bruit initial. Ce chapitre vise à présenter les études théoriques et les implémentations possibles réalisées au cours des deux dernières décennies d'un amplificateur non-déterministe. Nous commencerons par expliquer ce qu'est un amplificateur déterministe, qu'il soit dépendant ou indépendant de la phase, ainsi que les limites imposées par les lois quantiques. Ensuite, nous présenterons l'amplificateur linéaire non-déterministe et sans bruit, ainsi que ses propriétés attrayantes. Nous examinerons également quelques mises en œuvre possibles du NLA. Enfin, nous conclurons ce chapitre en présentant les applications potentielles de ce type d'amplificateurs dans le domaine de l'information quantique[30,31].

II.1. Amplification déterministe:

Contrairement à l'acceptation classique où des mesures précises sont possibles, dans la conception quantique toutes les mesures effectuées sur les états quantiques sont caractérisées par des fluctuations. Même pour les états d'incertitude minimale, ces fluctuations demeurent constantes, quel que soit l'énergie (amplitude) de l'état quantique. Ainsi, il est plus facile de détecter un état quantique de forte amplitude qu'un état de faible amplitude, ce qui suscite un intérêt croissant pour les amplificateurs quantiques.

La question qui se pose alors est la suivante : comment concevoir un dispositif capable d'amplifier un signal quelconque tout en préservant son bruit initial ? On démontre qu'un tel amplificateur agissant de manière déterministe est impossible en utilisant plusieurs arguments simples. On mentionne notamment l'argument de la violation du principe de non-clonage et un raisonnement développé par T. Ralph et A. Lund basé sur l'unitarité de l'évolution quantique. L'argument de la violation du principe de non-clonage indique qu'il est prohibé de créer une copie identique d'un état quantique inconnu. Si un amplificateur déterministe était possible, il serait en mesure de reproduire exactement un état quantique donné, violant ainsi ce principe fondamental de la mécanique quantique.

Le raisonnement basé sur l'unitarité de l'évolution quantique montre qu'un amplificateur déterministe agissant sur un état quantique induirait inévitablement un bruit minimal, peu importe le dispositif expérimental utilisé. Les lois quantiques exigent que l'évolution d'un système quantique soit unitaire, c'est-à-dire réversible et sans perte d'information. L'amplification

CHAPITRE II: Amplification quantique non-déterministe et sans bruit

déterministe d'un état quantique ne peut pas respecter cette condition d'unitarité, introduisant inévitablement d'un bruit supplémentaire dans l'état amplifié.

Ces raisonnements démontrent donc l'impossibilité théorique de concevoir un amplificateur quantique déterministe qui ajoute de l'énergie au signal sans introduire de bruit supplémentaire. Cette limitation conduit à l'exploration d'autres approches, telles que l'amplification non-déterministe, qui seront abordées dans les sections suivantes.

La violation du théorème de non-clonage permet de montrer qu'un amplificateur déterministe parfait est également impossible selon les lois quantiques. Pour illustrer cela, considérons l'action d'un tel amplificateur sur les états cohérents. Supposons qu'un amplificateur déterministe puisse exister et soit calibré avec un gain $g = \sqrt{2}$. Son effet sur un état cohérent incident serait d'amplifier son amplitude par un facteur g . L'état émergent $|\sqrt{2}\alpha\rangle$ est ensuite envoyé sur une lame semi-réfléchissante 50/50 où il est mélangé avec un état du vide. Cela entraîne la création de deux copies identiques de l'état d'entrée $|\alpha\rangle$, comme suit :

$$|\alpha\rangle|0\rangle \rightarrow |\sqrt{2}\alpha\rangle|0\rangle \rightarrow |\alpha\rangle|\alpha\rangle \quad (\text{II. 1})$$

Cela signifie que deux copies parfaites de l'état d'entrée sont réalisées, ce qui violerait le théorème de non-clonage. Par conséquent, nous concluons qu'un amplificateur agissant de manière déterministe sur n'importe quel état est interdit en raison du caractère unitaire de l'évolution quantique.

Un raisonnement alternatif démontrant l'impossibilité d'un amplificateur déterministe sans bruit a été proposé par T. Ralph et A. Lund. Reprenons ce raisonnement pour mieux illustrer ce théorème.

Supposons qu'il existe une transformation unitaire \hat{T} permettant de réaliser une amplification parfaite, où un état cohérent d'entrée $|\alpha\rangle$ est transformé en un état cohérent de sortie $|g\alpha\rangle$ selon l'équation suivante :

$$\hat{T}|\alpha\rangle = c|g\alpha\rangle \quad (\text{II. 2})$$

où g est supérieur à 1 et $c = e^{i\theta}$ est un nombre complexe de module 1, α représente l'amplitude de l'état cohérent incident et $g\alpha$ est l'amplitude amplifiée de l'état cohérent émergent.

Introduisons maintenant l'opérateur d'annihilation transformé $\hat{a}_t = \hat{T}\hat{a}\hat{T}^\dagger$ et examinons son action sur l'état cohérent amplifié : $\hat{a}_t|g\alpha\rangle = \frac{1}{c}(\hat{T}\hat{a}\hat{T}^\dagger)\hat{T}|\alpha\rangle$

CHAPITRE II: Amplification quantique non-déterministe et sans bruit

$$= \frac{1}{C} \hat{T} \hat{a} |\alpha\rangle \quad (\text{II. 3})$$

$$= \frac{\alpha}{C} \hat{T} |\alpha\rangle$$

$$= \alpha |g\alpha\rangle$$

Ainsi, nous avons $\hat{a}_t |g\alpha\rangle = \alpha |g\alpha\rangle$, ce qui signifie que les états cohérents sont les états propres de cet opérateur transformé avec les valeurs propres $\frac{1}{g}\alpha$. L'opérateur d'annihilation transformé s'écrit alors :

$$\hat{a}_t = \frac{1}{g} \hat{a} \quad (\text{II. 4})$$

Ce raisonnement démontre donc l'impossibilité d'un amplificateur déterministe sans bruit, car il entraînerait une transformation de l'opérateur d'annihilation qui n'est pas compatible avec les propriétés des états cohérents.

La relation de commutation entre les opérateurs d'annihilation transformés est donnée par :

$$[\hat{a}_t, \hat{a}_t^\dagger] = \frac{1}{g^2} \quad (\text{II. 5})$$

Cependant, puisque l'opérateur d'annihilation transformé est obtenu à partir de l'opérateur d'annihilation conventionnel par l'application d'une transformation unitaire, nous avons par définition :

$$[\hat{a}_t, \hat{a}_t^\dagger] = \hat{T} [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] \hat{T}^\dagger = 1 \quad (\text{II. 6})$$

À partir des équations (II. 5) et (II. 6), nous en déduisons qu'une amplification déterministe sans bruit, où un état cohérent d'amplitude α est transformé en un état cohérent d'amplitude $g\alpha$, est impossible.

Les amplificateurs déterministes jouent un rôle central dans les expériences d'optique quantique. Nous avons mentionné précédemment qu'un amplificateur déterministe introduit inévitablement une quantité minimale de bruit. Dans les lignes suivantes, nous verrons comment cela découle de l'unitarité et de la linéarité des lois quantiques.

Considérons un amplificateur quantique linéaire et unitaire. En général, il dépend de la phase, ce qui signifie que son action sur les quadratures conjuguées est différente. En supposant que les quadratures restent non corrélées après l'amplification, leurs valeurs moyennes sont transformées comme suit :

$$\langle \hat{X}_{\theta,f} \rangle = g_1 \langle \hat{X}_{\theta,i} \rangle \quad (\text{II. 7})$$

$$\langle \hat{X}_{\theta+\pi/2,f} \rangle = g_2 \langle \hat{X}_{\theta+\pi/2,i} \rangle$$

CHAPITRE II: Amplification quantique non-déterministe et sans bruit

Naturellement, on pourrait penser que les opérateurs de quadrature sont transformés selon :

$$\hat{X}_{\theta,f} = g_1 \hat{X}_{\theta,i} \quad , \quad (\text{II. 8})$$

$$\hat{X}_{X_{\theta+\pi/2},f} = g_2 \hat{X}_{X_{\theta+\pi/2},i}$$

Cependant, on constate rapidement que le commutateur des deux opérateurs de quadrature conjuguée amplifiée n'est plus égal à l'unité. Pour remédier à cela, on introduit les opérateurs de bruit \hat{F}_0 et $\hat{F}_{\theta+\pi/2}$ qui sont ajoutés respectivement aux quadratures amplifiées. Ces opérateurs de bruit doivent avoir une moyenne nulle pour rétablir les transformations (II. 8) Ainsi, les quadratures conjuguées amplifiées deviennent :

$$\hat{X}_{\theta,f} = g_1 \hat{X}_{\theta,i} + \hat{F}_0$$

$$\hat{X}_{\theta+\pi/2,f} = g_2 \hat{X}_{\theta+\pi/2,i} + \hat{F}_{\theta+\pi/2} \quad . \quad (\text{II. 9})$$

Effectuons un calcul rapide pour déduire que, pour préserver la relation de commutation des quadratures initiales, les opérateurs de bruit doivent satisfaire la relation de commutation suivante :

$$[\hat{F}_0, \hat{F}_{\theta+\pi/2}] = (1 - g_1 g_2) i \quad (\text{II. 10})$$

Cela conduit à une inégalité de Heisenberg :

$$\Delta \hat{F}_0 \Delta \hat{F}_{\theta+\pi/2} \geq \frac{|g_1 g_2 - 1|}{2} \quad (\text{II. 11})$$

Nous pouvons clairement constater que si $g_1 \neq \frac{1}{g_2}$, les variances des opérateurs de bruit ne peuvent être simultanément nulles. Cela signifie qu'un bruit inévitable est ajouté à l'état quantique amplifié.

II.1. 1. Amplificateur dépendant de la phase:

Dans le cas d'un amplificateur dépendant de la phase, l'équation (II. 11) nous montre qu'il est possible de concevoir un amplificateur quantique déterministe sans bruit en renonçant à une amplification indépendante de la phase. Cela signifie qu'en amplifiant une quadrature avec un gain g et en atténuant la quadrature conjuguée avec un gain $1/g$, il est possible d'obtenir un amplificateur sans bruit. Cependant, il est important de noter que le bruit initial de la quadrature amplifiée sera également amplifié, tandis que le bruit initial de la quadrature atténuée sera également atténué. Par conséquent, l'appellation "amplificateur sans bruit" est réservée au dispositif qui sera introduit par la suite, qui est réellement sans bruit.

Dans le cas de l'amplificateur dépendant de la phase, les opérateurs de bruit \hat{F}_0 et $\hat{F}_{\theta+\pi/2}$ introduits précédemment ne sont plus nécessaires, car le commutateur des quadratures de sortie est conservé. Un amplificateur dépendant de la phase permet de réaliser des états monomodes comprimés, où une quadrature est amplifiée avec un gain $g = e^r$ et la quadrature conjuguée est

CHAPITRE II: Amplification quantique non-déterministe et sans bruit

atténuée avec un gain $1/g = e^{-r}$. Ainsi, la variance de la quadrature amplifiée sera amplifiée de la même manière que l'amplitude, tandis que la variance de la quadrature conjuguée atténuée sera comprimée. Cette opération peut être mise en œuvre à l'aide d'un oscillateur paramétrique dégénéré.

Il est à noter que, dans le cas d'un amplificateur dépendant de la phase, le rapport signal-bruit reste inchangé pour les deux quadratures, car le bruit et l'amplitude sont amplifiés ou atténués de manière équivalente.

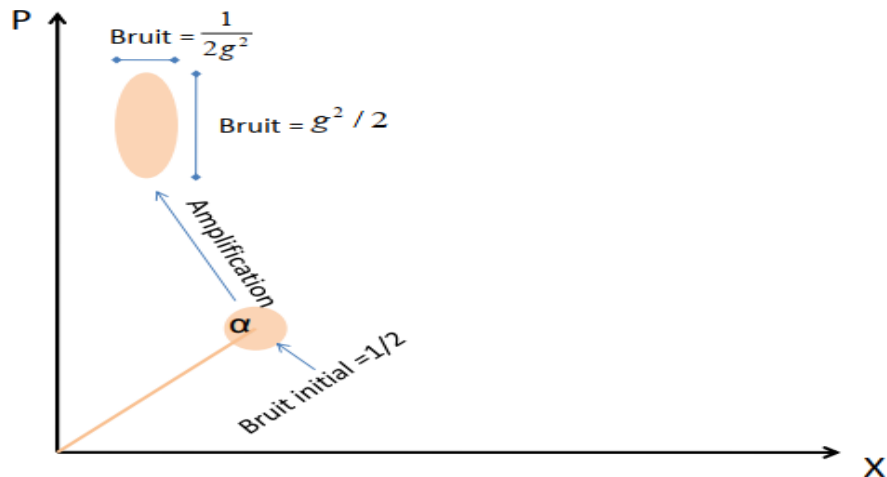


Figure II.1.– Action d'un amplificateur déterministe dépendant de la phase. La quadrature amplifiée est, en l'occurrence P et la quadrature atténuée X .

II.1. 2. Amplificateur indépendant de la phase:

Un amplificateur est considéré comme indépendant de la phase lorsque les gains d'amplification pour les quadratures conjuguées \hat{X}_θ et $\hat{X}_{\theta+\pi/2}$ sont les mêmes, c'est-à-dire $g_1 = g_2$. Dans ce cas, les écarts-types des opérateurs de bruit, \hat{F}_θ et $\hat{F}_{\theta+\pi/2}$, doivent satisfaire l'inégalité suivante : $\Delta\hat{F}_\theta\Delta\hat{F}_{\theta+\pi/2} \geq \left| \frac{g^2-1}{2} \right|$. (II. 12)

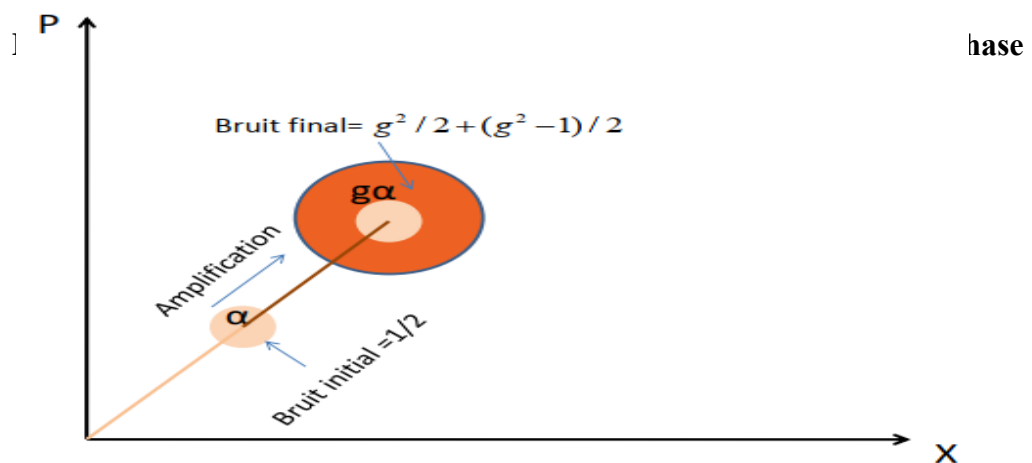


Figure II. 2. Action d'un amplificateur déterministe indépendant de la phase

CHAPITRE II: Amplification quantique non-déterministe et sans bruit

Effectivement, dans le cas d'un amplificateur indépendant de la phase, on suppose que les opérateurs de bruit sont également affectés par le même gain. Cela conduit à supposer que les variances des opérateurs de bruit sont égales :

$$\Delta^2 \hat{F}_\theta = \Delta^2 \hat{F}_{\theta+\pi/2} \geq \left| \frac{g^2-1}{2} \right|. \quad (\text{II. 13})$$

Ainsi, l'action d'amplifier les quadratures indépendamment de la phase entraîne un bruit d'au moins $\left| \frac{g^2-1}{2} \right|$ en plus de l'amplification du bruit initial de l'état incident. L'amplificateur qui satisfait l'inégalité (II. 13) est considéré comme idéal. Il réalise alors la transformation suivante sur les quadratures d'entrée :

$$\hat{X}_{\theta,f} = g\hat{X}_{\theta,i} + \sqrt{g^2-1}\hat{X}_0. \quad (\text{II. 14})$$

Ici, $\hat{X}_{\theta,f}$ représente la quadrature amplifiée, $\hat{X}_{\theta,i}$ la quadrature d'entrée, et \hat{X}_0 est la quadrature correspondant au bruit initial de l'état incident. Le terme $\sqrt{g^2-1}\hat{X}_0$ correspond à la contribution du bruit amplifié par l'amplificateur.

Effectivement, dans l'équation (II. 15), \hat{X}_0 représente la quadrature d'un mode contenant l'état du vide. La valeur moyenne de la quadrature amplifiée de manière idéale est donnée par :

$$\langle \hat{X}_{\theta,f} \rangle = g\langle \hat{X}_{\theta,i} \rangle. \quad (\text{II. 15})$$

Cela signifie que la valeur moyenne de la quadrature amplifiée est simplement multipliée par le facteur de gain g par rapport à la quadrature d'entrée.

De plus, dans l'équation (II. 16), la variance de la quadrature amplifiée est donnée par :

$$\Delta^2 \hat{X}_{\theta,f} = g^2 \Delta^2 \hat{X}_{\theta,i} + \left| \frac{g^2-1}{2} \right|. \quad (\text{II. 16})$$

Cela montre que la variance de la quadrature amplifiée est composée de deux termes. Le premier terme correspond à l'amplification de la variance de la quadrature d'entrée par le carré du facteur de gain g , le deuxième terme $\left| \frac{g^2-1}{2} \right|$ est une contribution supplémentaire provenant du bruit amplifié par l'amplificateur.

Les états cohérents sont des états Gaussiens purs d'incertitude minimale, ce qui signifie que la variance d'une quadrature d'un mode se trouvant dans un état cohérent est égale à $1/2$.

Ainsi, si un système se trouvant dans un état cohérent est amplifié, la valeur moyenne de la quadrature amplifiée serait $\langle \hat{X}_{\theta,f} \rangle_\alpha = g\Re[\alpha]$, où g est le facteur de gain de l'amplificateur. En d'autres termes, la valeur moyenne de la quadrature amplifiée serait l'amplitude cohérente initiale multipliée par le facteur de gain de l'amplificateur.

Cependant, en raison de l'amplification du bruit initial, la quadrature amplifiée serait également caractérisée par un bruit de $g^2/2$. En plus de cela, il y aurait une contribution supplémentaire de bruit de $|g^2-1|/2$, qui est spécifique à l'amplificateur lui-même, comme indiqué dans l'équation (II. 12)

En résumé, lorsqu'un état cohérent est amplifié, la quadrature amplifiée présente une valeur moyenne proportionnelle à l'amplitude cohérente initiale, mais elle est également accompagnée d'un bruit amplifié ($g^2/2$) résultant de l'amplification du bruit initial, ainsi que d'une contribution de bruit supplémentaire ($|g^2-1|/2$) due à l'amplificateur lui-même.

$$\Delta_\alpha^2 \hat{X}_{\theta,f} = g^2/2 + |g^2-1|/2. \quad (\text{II. 17})$$

CHAPITRE II: Amplification quantique non-déterministe et sans bruit

En effet, il est courant d'amplifier les états classiques du champ de manière déterministe sans se soucier de la quantité de bruit ajoutée. Cela est souvent applicable aux états cohérents de fortes amplitudes, pour lesquels le signal est beaucoup plus important que le bruit. Dans ce cas, si l'inégalité $g\Re[\alpha] \gg g^2/2 + |g^2 - 1|/2$ est satisfaite, le bruit caractérisant l'état amplifié est négligeable devant la grandeur du signal mesuré.

Cependant, pour des états cohérents de faibles amplitudes, le bruit ajouté peut être du même ordre de grandeur que la quantité mesurée, ce qui peut poser de sérieux problèmes en termes de détection et de discernabilité. Lorsqu'on amplifie de tels états cohérents proches les uns des autres, l'ajout de bruit rend leur indiscernabilité encore plus difficile. Cela est particulièrement visible dans le chevauchement prononcé des états cohérents amplifiés, tel que décrit dans l'équation (II. 3).

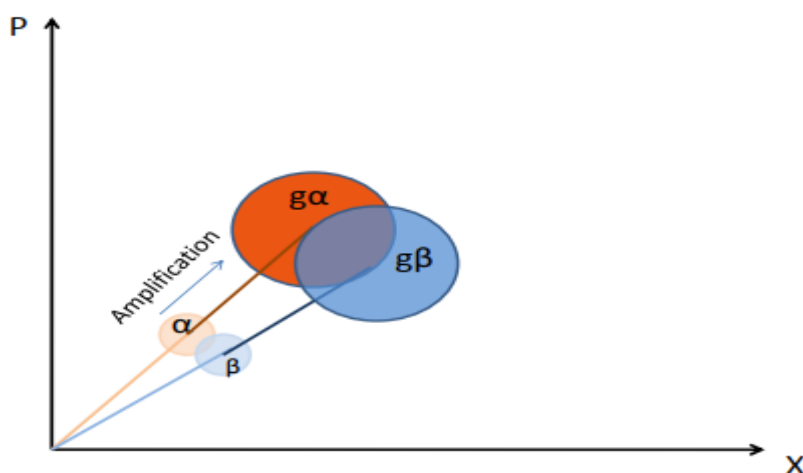


Figure II. 3.– Action d'un amplificateur déterministe indépendant de la phase sur l'indiscernabilité des états cohérents.

II.2. Amplificateur non-déterministe linéaire et sans bruit

En effet, comme nous l'avons vu dans la section précédente, un amplificateur qui opère indépendamment de la phase ajoute inévitablement une quantité minimale de bruit, même s'il est unitaire. De plus, même dans le cas où l'amplificateur dépend de la phase, le bruit inhérent à l'état initial est amplifié. Cela est intuitif car l'amplificateur ne peut pas discriminer sélectivement le signal du bruit. Cependant, il est possible de réaliser une telle discrimination en abandonnant la nature déterministe de l'amplificateur.

Un amplificateur non-déterministe linéaire et sans bruit (NLA) est un dispositif qui n'effectue une amplification réussie que pour une fraction des états incidents. Son fonctionnement nécessite donc une rupture de l'évolution unitaire et linéaire.

Effectivement, la brisure de l'évolution unitaire et linéaire dans un amplificateur non-déterministe linéaire et sans bruit (NLA) est introduite par la mesure, un élément fondamental du paradigme quantique. C'est cette mesure qui confère au NLA son caractère probabiliste. Lorsque la mesure projette sur l'état désiré, nous concluons que l'amplification a été réalisée avec succès, tandis que si elle projette sur un autre état, nous considérons que l'amplification a échoué.

Dans ce qui suit, nous allons décrire le principe de fonctionnement du NLA et présenter quelques-unes de ses réalisations possibles.

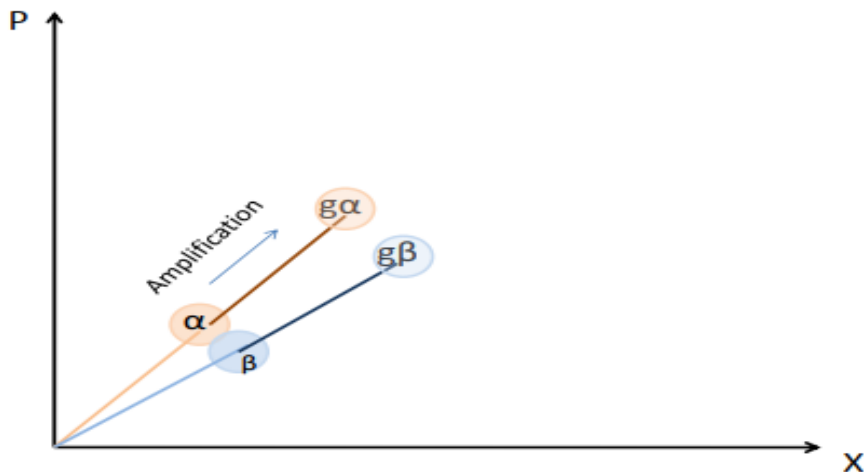


Figure II. 4.– Action d'un amplificateur non-déterministe linéaire et sans bruit.

II.2.1.Principe de fonctionnement

Au cours des deux dernières décennies, de nombreuses recherches ont démontré que des processus unitaires qui étaient auparavant interdits par des théorèmes no-go peuvent être rendus possibles en abandonnant leur caractère déterministe. Cela a conduit à l'émergence de concepts tels que le clonage probabiliste et l'augmentation locale d'intrication. Dans le même esprit, différentes équipes de recherche ont adopté une approche similaire pour réaliser une amplification sans bruit. Ces propositions reposent sur le raisonnement suivant :

1-L'amplification déterministe est soumise à des contraintes quantiques qui empêchent l'amplification sans bruit. Cela est démontré par des théorèmes no-go.

2-En acceptant le caractère probabiliste de l'amplification, il devient possible de contourner ces contraintes et d'implémenter une amplification sans bruit.

Ainsi, l'idée est d'utiliser des processus probabilistes qui permettent une amplification réussie avec une certaine probabilité, tandis que dans les cas où l'amplification échoue, aucun bruit n'est ajouté. Cela peut être réalisé en utilisant des protocoles basés sur des mesures et des rétroactions, où une mesure appliquée au résultat de l'amplification permet de déterminer si elle a été réussie ou non. Cette approche probabiliste a ouvert de nouvelles perspectives dans le domaine de l'amplification quantique sans bruit, offrant des alternatives aux limitations imposées par les théorèmes no-go et permettant la réalisation pratique de tels dispositifs.

Dans la représentation de Schrödinger, une amplification idéale est une opération qui transforme un état cohérent $|\alpha\rangle$ en un état cohérent de plus grande amplitude $|g\alpha\rangle$ avec une probabilité de succès P_S . Cette probabilité de succès dépend à la fois des paramètres intrinsèques du NLA, de l'amplitude de l'état d'entrée $|\alpha\rangle$ et d'autres facteurs.

L'action de l'amplificateur non-déterministe se manifeste dans l'espace des phases, et contrairement à la version déterministe de l'amplificateur, il augmente la discernabilité entre les états d'entrée. Formellement, dans la représentation de Schrödinger, l'amplificateur non-déterministe transforme l'état d'entrée $|\alpha\rangle$ en l'état post-mesure conditionné par la probabilité de succès, comme indiqué dans l'équation (II. 18):

$$\hat{T}_S[|\alpha\rangle\langle\alpha|] = P_S|g\alpha\rangle\langle g\alpha| \quad (\text{II. 18})$$

CHAPITRE II: Amplification quantique non-déterministe et sans bruit

Cette équation exprime que l'état cohérent $|\alpha\rangle$ est transformé en l'état cohérent amplifié $|g\alpha\rangle$ avec une probabilité de succès P_S

Dans le cas d'un NLA, si N états cohérents entrent dans l'amplificateur, seule une fraction NP_S parmi eux sera correctement amplifiée, tandis que les $N(1 - P_S)$ restants seront rejetés. L'état résultant de l'évolution unitaire sous l'action d'un NLA peut être exprimé comme suit:

$$\hat{\mathcal{T}}[|\alpha\rangle\langle\alpha|] = P_S|g\alpha\rangle\langle g\alpha| + (1 - P_S)\widehat{\mathcal{Q}}_E \quad (\text{II. 19})$$

où $\widehat{\mathcal{Q}}_E$ représente l'état résultant lorsque l'amplification échoue, et $(1 - P_S)\widehat{\mathcal{Q}}_E = \hat{\mathcal{T}}_E[|\alpha\rangle\langle\alpha|]$, où $\hat{\mathcal{T}}_E$ est la transformation induite sur l'état cohérent d'entrée lorsque l'amplification n'a pas été correctement mise en œuvre. Les statistiques résultant d'une telle mesure sont obtenues à partir de la règle de Born en utilisant une mesure généralisée (POVM) avec des éléments $\{\widehat{\Pi}_S = \hat{\mathcal{T}}_S, \widehat{\Pi}_E = \hat{\mathcal{T}}_E\}$. Les transformations $\hat{\mathcal{T}}_S$ et $\hat{\mathcal{T}}_E$ sont complètement positives et peuvent être décomposées en opérateurs quantiques de Krauss. La transformation $\hat{\mathcal{T}}_S$, correspondant à une amplification réussie, peut être décomposée comme suit:

$$\hat{\mathcal{T}}_S[\widehat{\mathcal{Q}}] = \sum_{k=0}^k M_K \widehat{\mathcal{Q}} M_K^\dagger \quad (\text{II. 20})$$

où l'ensemble des opérateurs de Krauss non unitaires $\{\widehat{M}_K\}$ satisfait la contrainte suivante

$$\sum_{k=0}^k M_K \widehat{\mathcal{Q}} M_K^\dagger \leq \mathbb{I} \quad (\text{II. 21})$$

De même, la transformation $\hat{\mathcal{T}}_E$ peut être décomposée en opérateurs de Krauss \widehat{L}_m :

$$\hat{\mathcal{T}}_E[\widehat{\mathcal{Q}}] = \sum_{m=0}^{\mathcal{M}} \widehat{L}_m \widehat{\mathcal{Q}} \widehat{L}_m^\dagger \quad (\text{II. 22})$$

où les opérateurs de Krauss \widehat{L}_m satisfont également la contrainte (II. 21)

Il a été démontré dans [17] que l'instrument quantique optimal qui décrit l'action du NLA est l'instrument de Lüders, dans lequel les éléments de la POVM se décomposent en des opérateurs de détection individuels.

Dans le cas de l'instrument de Lüders, les éléments de la POVM se décomposent en opérateurs de détection individuels:

$$\widehat{\Pi}_S = \widehat{M}_S^\dagger \widehat{M}_S \quad (\text{II. 23})$$

$$\widehat{\Pi}_E = \widehat{M}_E^\dagger \widehat{M}_E \quad (\text{II. 24})$$

Ainsi, l'état inconditionnel résultant de l'action du NLA peut être écrit comme:

$$\hat{\mathcal{T}}[\widehat{\mathcal{Q}}] = \widehat{M}_S \widehat{\mathcal{Q}} \widehat{M}_S^\dagger + \widehat{M}_E \widehat{\mathcal{Q}} \widehat{M}_E^\dagger \quad (\text{II. 25})$$

Notons que les opérateurs de détection constituent les éléments de la POVM, $\{\widehat{\Pi}_S, \widehat{\Pi}_E\}$, forment

CHAPITRE II: Amplification quantique non-déterministe et sans bruit

une résolution de l'identité:

$$\widehat{M}_S^\dagger \widehat{M}_S^\dagger + \widehat{M}_E^\dagger \widehat{M}_E^\dagger = \mathbb{1} \quad (\text{II. 26})$$

Nous remarquons que la transformation $\widehat{\mathcal{T}}$ (II. 18) est unitaire car elle préserve la trace. Afin d'implémenter théoriquement une amplification correcte (II. 19), il suffirait d'identifier l'opérateur de détection \widehat{M}_S .

En utilisant l'instrument de Lüders transformant des états purs en d'autres états purs, l'expression (II. 18) se réduirait à:

$$\widehat{M}_S |\alpha\rangle = \sqrt{P_S} |g\alpha\rangle \quad (\text{II. 27})$$

En exprimant les états cohérents d'entrée et de sortie dans la base de Fock, nous obtenons :

$$\widehat{M}_S e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = \sqrt{P_S} e^{-|g\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(g\alpha)^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (\text{II. 28})$$

En identifiant les termes, nous obtenons l'expression de l'opérateur de détection caractérisant une amplification réussie:

$$\widehat{M}_S = a g^{\hat{n}} = a \sum_{n=0}^{\infty} g^n |n\rangle\langle n| \quad (\text{II. 29})$$

où \hat{n} représente l'opérateur nombre de photons et a est une constante de proportionnalité liée à la probabilité de succès: $|\alpha|^2 = P_S e^{(g^2-1)|\alpha|^2}$. Il convient de rappeler que l'opérateur de détection \widehat{M}_S est non unitaire ($\widehat{M}_S^\dagger = a^* g^{\hat{n}}$ et $\widehat{M}_S^{-1} = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{g}\right)^{\hat{n}}$) et est soumis à la contrainte (II. 21), qui peut être reformulée comme suit:

$$|a|^2 g^{2\hat{n}} \leq \mathbb{1}. \quad (\text{II. 30})$$

$$|a|^2 \sum_{n=0}^{\infty} g^{2n} |n\rangle\langle n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n|$$

Effectivement, pour un gain supérieur à l'unité, une telle opération ne peut être réalisée car l'inégalité (II. 30) ne peut être satisfaite que pour $a = 0$, c'est-à-dire une probabilité de succès nulle. Cependant, une amplification non-déterministe sans bruit peut être approximée avec une probabilité de succès arbitraire en tronquant son action sur l'espace de Hilbert de l'état d'entrée aux $N + 1$ premiers états de Fock.

L'opérateur de détection correspondant à cette approximation est donné par:

$$\widehat{M}_S = a_N \sum_{n=0}^N g^n |n\rangle\langle n| + \sum_{n=N}^{\infty} |n\rangle\langle n| \quad (\text{II. 31})$$

CHAPITRE II: Amplification quantique non-déterministe et sans bruit

Cette opération est autorisée tant qu'elle satisfait la contrainte: $|a_N|^2 g^{2N} \leq 1$

Ainsi, plus l'amplification est performante (avec un gain et un seuil de troncature élevés), plus la probabilité de succès de l'amplification diminue.

En résumé, il est possible de réaliser une amplification sans bruit en utilisant l'opérateur de détection probabiliste (II. 31). Une telle amplification est conditionnelle et sa performance est déterminée à la fois par son action (caractérisée par son gain g et le seuil N) et par sa probabilité de succès. Cette limitation est également présentée dans le clonage non-déterministe, où un clonage parfait n'est possible qu'avec une probabilité de succès nulle. Ces approches non-déterministes offrent des avantages significatifs en restreignant l'action de l'opérateur de transformation aux premiers états de Fock.

II.2.2. Différentes implémentations du NLA :

En ce qui concerne les différentes implémentations du NLA, après que sa faisabilité ait été démontrée par T. Ralph et A. Lund, de nombreuses équipes se sont intéressées à sa réalisation expérimentale. Plusieurs modèles théoriques proposant des versions approximatives du NLA ont été proposés [33], ce qui a conduit à différentes réalisations expérimentales. Nous allons aborder certaines d'entre elles en mettant l'accent sur leurs particularités.

II.2.3. Les ciseaux quantiques :

Le protocole proposé par T. Ralph et A. Lund pour la réalisation du NLA, en particulier pour les états cohérents de faible amplitude, repose sur l'utilisation de ce qu'ils appellent les "ciseaux quantiques". Ce protocole est basé sur un espace de Hilbert de dimension 2, dans lequel les états cohérents sont décrits comme une superposition cohérente du vide et d'un photon unique.

Dans ce protocole, l'amplification réussie entraîne la transformation suivante de l'état d'entrée :

$$|0\rangle + \alpha|1\rangle \rightarrow |0\rangle + g\alpha|1\rangle \text{ (II. 32)}$$

Voici les étapes du protocole :

1-Un faisceau ne contenant qu'un photon unique est mélangé avec l'état du vide sur une lame semi-réfléchissante asymétrique de réflexivité r . La partie réfléchie subira une seconde transformation, tandis que la partie transmise constituera l'état de sortie conditionnel de l'amplificateur.

2-La partie réfléchie est ensuite mélangée avec l'état cohérent que l'on souhaite amplifier sur une lame semi-réfléchissante 50/50, et les deux faisceaux résultants sont détectés à l'aide de deux compteurs de photons.

3-Dans le cas où un seul photon est détecté par les deux compteurs, le signal de sortie (le faisceau transmis après la lame séparatrice asymétrique) est correctement amplifié en fonction du compteur qui a détecté le photon. Une inversion de phase permet d'ajuster correctement l'état si c'est le détecteur 2 qui a capturé le photon.

Il est intéressant de noter que ce modèle présente des similitudes avec la téléportation quantique et le protocole des ciseaux quantiques, où un état intriqué est utilisé pour transférer un état quantique. Le principe de base consiste à mélanger l'état d'entrée avec l'un des modes de l'état intriqué sur une lame séparatrice 50/50, suivi d'une mesure conjointe sur les deux modes

résultants. Ensuite, une action classique conditionnée par le résultat de la mesure est appliquée au mode restant de l'état intriqué, ce qui permet de l'ajuster pour qu'il corresponde à l'état souhaité.

CHAPITRE II: Amplification quantique non-déterministe et sans bruit

Cependant, il est difficile de comprendre comment ce protocole peut produire un état amplifié. L'ingrédient clé de ce protocole d'implémentation réside dans l'étrangeté quantique de l'incapacité à déterminer à partir de quel port de la lame 50/50 provient le photon détecté, c'est-à-dire l'indiscernabilité du chemin suivi par le photon avant sa détection. En effet, lorsque un photon est détecté par l'un des compteurs C_1 ou C_2 , il est impossible de distinguer sa provenance, ce qui conduit à deux situations possibles :

-L'état cohérent ne contient pas de photon, donc le photon détecté provient du photon unique réfléchi par la lame asymétrique. Son mode transmis est alors vide.

- Effectivement, si l'état cohérent contient un photon et que ce photon est détecté, cela signifie que le photon unique a été transmis par la lame asymétrique et constitue donc l'état de sortie de l'amplificateur

Dans le premier scénario, où le compteur C_1 détecte un photon et rien dans C_2 , cela correspond à une mesure projective sur l'état $|1\rangle_1 |0\rangle_2$. Dans ce cas, l'état du système global est donné par :

$$e^{-|\alpha|^2/2} \left((|1\rangle_1 |0\rangle_2 - |0\rangle_1 |1\rangle_2) \frac{r}{\sqrt{2}} |0\rangle_t + t |0\rangle_1 |0\rangle_2 |1\rangle_t \right) \quad (\text{II. 33})$$

Cette mesure projective sur l'état $|1\rangle_1 |0\rangle_2$ permet d'ajuster l'état du mode transmis $|1\rangle_t$. Ainsi, si l'état cohérent initial contenait un photon, cet état photonique est transmis et amplifié dans le mode de sortie $|1\rangle_t$.

Dans le deuxième scénario, où le compteur C_2 détecte un photon et rien dans C_1 , cela correspond à la projection sur l'état $|0\rangle_1 |1\rangle_2$. Dans ce cas, l'état du système global est donné par :

$$e^{-|\alpha|^2/2} \left((|0\rangle_1 |1\rangle_2 + |1\rangle_1 |0\rangle_2) \frac{\alpha t}{\sqrt{2}} |1\rangle_t + (|2\rangle_1 |0\rangle_2 - |0\rangle_1 |2\rangle_2) \frac{\alpha t}{\sqrt{2}} |0\rangle_t \right) \quad (\text{II. 34})$$

Cette mesure projective sur l'état $|0\rangle_1 |1\rangle_2$ ne modifie pas l'état du mode transmis $|0\rangle_t$, qui reste inchangé.

En somme, les mesures projectives sur les états $|1\rangle_1 |0\rangle_2$ et $|0\rangle_1 |1\rangle_2$ permettent d'ajuster les modes transmis du système, en amplifiant l'état cohérent d'entrée lorsque le photon unique est détecté (premier scénario) et en laissant l'état cohérent inchangé lorsque aucun photon n'est détecté (deuxième scénario). Ainsi, en fonction des résultats de détection, l'état de sortie de l'amplificateur sera une superposition de l'état cohérent amplifié et de l'état initial, avec une probabilité accrue de contenir un photon unique.

Dans cette implémentation du NLA, appelée "ciseaux quantiques", l'état de sortie est effectivement une superposition de l'état cohérent amplifié et de l'état initial, tronqué à un photon. L'état cohérent amplifié, noté $g\alpha$, est une approximation de l'état cohérent initial, avec une amplitude amplifiée par un facteur g .

L'amplification est réalisée en utilisant une lame semi-réfléchissante asymétrique de réflexivité r . La probabilité de succès de l'amplification, notée PS, dépend de la valeur de g et de la réflexivité r . Pour de grandes valeurs de g , la probabilité de succès diminue car la réflexivité est atténuée, ce qui réduit la détection d'un photon par les deux compteurs.

La probabilité de succès PS est donnée par l'expression

CHAPITRE II: Amplification quantique non-déterministe et sans bruit

$$P_S = e^{-|\alpha|^2} \frac{r^2}{2} (1 + g^2 |\alpha|^2) \quad (\text{II. 36})$$

, où $|\alpha|$ est l'amplitude de l'état cohérent initial. Lorsque $g\alpha \ll 1$, la probabilité de succès PS est approximativement égale à r^2 .

Il est important de noter que cette implémentation du NLA, les "ciseaux quantiques", fonctionne efficacement lorsque l'état cohérent initial a une faible amplitude. Une généralisation de ce protocole permet d'amplifier des états cohérents de toutes amplitudes en les divisant en N états cohérents de faible amplitude α/\sqrt{N} pour les amplifier individuellement. Ensuite, ces états amplifiés sont recombinaés à l'aide d'un dispositif à $2N$ ports pour obtenir l'amplification souhaitée. Cependant, cette approche n'est pas optimale car elle est caractérisée par une faible probabilité de succès.

II. 3. Applications du NLA

L'amplificateur non-déterministe linéaire et sans bruit a suscité une grande attention et a fait l'objet de nombreux travaux en raison de ses nombreuses applications potentielles et des avantages qu'il offre. Ce dispositif expérimental est passé du stade de curiosité en laboratoire à une technologie qui présente des avantages cruciaux dans différents domaines.

L'une des applications de l'amplificateur non-déterministe est la génération d'états quantiques. Il permet d'amplifier des états cohérents de faible amplitude, ce qui peut être utilisé pour produire des états quantiques de haute qualité et de grande pureté. Ces états quantiques amplifiés sont utilisés dans des expériences de recherche fondamentale et peuvent également être utilisés dans des applications pratiques telles que la réalisation de calculs quantiques.

Un autre domaine d'application important est celui des communications quantiques.

L'amplificateur non-déterministe peut être utilisé pour amplifier des signaux quantiques faibles tout en préservant l'information quantique contenue dans ces signaux. Cela permet d'améliorer la transmission des informations quantiques sur de longues distances et d'accroître la sécurité des communications quantiques.

En outre, l'amplificateur non-déterministe peut être utilisé pour augmenter l'intrication des états EPR (Einstein-Podolsky-Rosen). L'intrication est un phénomène quantique dans lequel deux particules sont étroitement liées, peu importe la distance qui les sépare. L'amplificateur non-déterministe peut être utilisé pour amplifier l'intrication des états EPR, ce qui ouvre de nouvelles possibilités dans les domaines de la téléportation quantique et de la cryptographie quantique.

En résumé, l'amplificateur non-déterministe linéaire et sans bruit a des applications étendues allant de la génération d'états quantiques à l'amélioration des communications quantiques et à l'augmentation de l'intrication des états EPR. Ces applications potentielles ont suscité un grand intérêt et ont déjà été réalisées dans le cadre d'expériences scientifiques et de développements technologiques.

II. 3.1. Génération d'états quantiques

Il est vrai que la génération expérimentale d'états quantiques complexes, tels que l'état chat de Schrödinger, peut être difficile et coûteuse. La réalisation d'un état chat de Schrödinger avec des amplitudes significatives n'est possible que pour des états de faible amplitude, ce qui limite leur utilisation pratique [32, 33]. Cependant, l'une des applications potentielles de l'amplificateur non-déterministe (NLA) est de générer des états de type chat de Schrödinger avec des amplitudes plus grandes, tels que $|g\alpha\rangle + | -g\alpha\rangle$.

CHAPITRE II: Amplification quantique non-déterministe et sans bruit

Dans votre travail de thèse, vous explorez la génération de ces deux classes d'états quantiques, à la fois non-classiques et non-gaussiens, en utilisant l'amplificateur non-déterministe. Vous étudiez en détail l'effet de l'amplificateur sur les états cohérents de la lumière, les états du vide comprimés et les états EPR (faisceaux jumeaux).

En plus de la génération d'états non-classiques et non-gaussiens de la lumière, votre étude révèle que l'amplificateur non-déterministe est robuste pour augmenter l'intrication des états EPR. Il permet d'atteindre des degrés d'intrication significatifs en utilisant des non-linéarités disponibles en laboratoire, comme cela a été prédit dans des travaux antérieurs [31, 37].

Ces résultats indiquent que l'amplificateur non-déterministe offre des perspectives intéressantes pour la génération et l'amélioration d'états quantiques complexes, tels que les états de type chat de Schrödinger et les états EPR intriqués. Cela ouvre la voie à de nouvelles applications et avancées dans le domaine de la manipulation des états quantiques.

II. 3.2. Amélioration des protocoles de communications quantiques

Effectivement, l'amplification non-déterministe sans bruit offre des avantages significatifs pour améliorer les performances des protocoles de communication quantique. Dans l'article [31], il est démontré qu'en utilisant l'amplification non-déterministe, un état EPR dont l'un des modes est transmis à travers un canal présentant des pertes devient équivalent à un état EPR caractérisé par un degré d'intrication plus élevé, transmis à travers un canal comportant moins de pertes, sans même avoir recours à l'amplificateur. En d'autres termes, l'amplificateur probabiliste permet de rendre les états intriqués plus robustes face aux pertes subies lors de leur transmission. En plus d'améliorer le degré d'intrication du canal quantique et de renforcer la robustesse contre les pertes, l'amplificateur non-déterministe s'est révélé efficace pour augmenter la distance maximale de transmission de clés secrètes dans le régime des variables continues [36]. Cela signifie que l'utilisation de l'amplificateur permet d'étendre la portée des protocoles de communication quantique, ce qui est essentiel pour des applications pratiques à grande échelle.

En résumé, l'amplification non-déterministe sans bruit offre des avantages significatifs pour les protocoles de communication quantique, tels que l'amélioration de l'intrication des états, la résistance aux pertes et l'augmentation de la portée des transmissions sécurisées de clés. Ces résultats ouvrent de nouvelles perspectives pour l'utilisation pratique de la communication quantique.

II.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons consacré notre attention à l'amplificateur non-déterministe, qui est le sujet central de cette thèse. Nous avons passé en revue les modèles théoriques existants permettant sa mise en œuvre et mis en évidence ses avantages décisifs. Voici un résumé des principaux points abordés :

1-Détection d'états cohérents : L'amplificateur non-déterministe joue un rôle crucial dans la détection d'états cohérents de faibles amplitudes, où l'information est souvent noyée dans le bruit. Grâce à sa capacité à amplifier les états sans introduire de bruit excessif, il permet d'améliorer la sensibilité de la détection et d'améliorer la qualité du signal extrait.

2-Génération d'états non-classiques et non-Gaussiens : L'un des points forts de l'amplificateur non-déterministe réside dans sa capacité à générer des états de lumière qui ne suivent pas la statistique classique gaussienne. Ces états non-classiques sont essentiels pour les applications en

CHAPITRE II: Amplification quantique non-déterministe et sans bruit

informatique quantique, en communication quantique et dans d'autres domaines de la recherche quantique. L'amplificateur non-déterministe offre une plateforme robuste pour la génération de tels états, ce qui ouvre de nouvelles possibilités pour les expériences et les protocoles basés sur ces états.

3-Amélioration des performances des communications quantiques : Les protocoles de communication quantique sont sensibles aux bruits et aux perturbations qui peuvent entraîner des erreurs de transmission et de détection. L'amplificateur non-déterministe peut être utilisé pour améliorer les performances de ces protocoles en amplifiant les signaux faibles et en réduisant l'impact du bruit. Cela permet d'augmenter la distance de transmission, d'améliorer la fidélité des informations transmises et d'augmenter le débit de communication.

En résumé, l'amplificateur non-déterministe présente des avantages significatifs dans divers domaines de la recherche quantique. Son utilisation permet d'améliorer la détection d'états cohérents, la génération d'états non-classiques et non-Gaussiens, ainsi que les performances des protocoles de communications quantiques. Ces aspects font de l'amplificateur non-déterministe un outil précieux pour de nombreuses applications quantiques.

Chapitre III:
Amélioration du
protocole de
téléportation quantique
moyennant une
amplification non-
déterministe linéaire et
sans bruit

Chapitre III:

Amélioration du protocole de téléportation quantique moyennant une amplification non-déterministe linéaire et sans bruit

Introduction:

La téléportation quantique s'est avérée être l'une des manifestations les plus pertinentes de l'intrication [38, 13]. Dans ce protocole, un état quantique inconnu est téléporté d'une station d'envoi à un terminal de réception distant en exploitant un canal quantique constitué d'un état intriqué à deux modes. Dans le cadre des systèmes à variables continues (CV), plusieurs protocoles de téléportation exploitant des ressources optiques intriquées gaussiennes ont été suggérés et réalisés expérimentalement [39, 40, 41].

La ressource intriquée gaussienne couramment utilisée dans les protocoles d'information quantique à variables continues est l'état de vide comprimé à deux modes (également appelé faisceau jumeau ou état EPR) qui peut être produit par le processus de dédoublement paramétrique. Néanmoins, il a été démontré que les ressources intriquées gaussiennes telles que les faisceaux jumeaux et tous les états gaussiens bipartites générés par des opérations gaussiennes sont soumis à des restrictions. Par exemple, les opérations gaussiennes locales appliquées aux états gaussiens bipartites ne peuvent pas conduire à la distillation de l'intrication [42, 43]. De même, dans le cadre des protocoles de communication quantique, il a été démontré que la sécurité des états gaussiens contre les erreurs gaussiennes ne peut pas être améliorée par des opérations gaussiennes [44]. En plus de ces restrictions, l'ingénierie de faisceaux jumeaux fortement comprimés est une tâche ardue, même lorsque le processus de dédoublement est mis en œuvre dans une cavité résonante. En fait, le niveau le plus élevé de compression atteignable pour le faisceau jumeau avec la technologie actuelle est d'environ 10 dB [45], alors que l'état de l'art de la compression d'un seul mode atteint environ 15 dB [46]. Par conséquent, une attention particulière a été accordée aux ressources intriquées non gaussiennes qui conviennent davantage aux tâches de communication quantique. À cette fin, divers protocoles de dégaussification ont été envisagés précédemment afin d'améliorer l'efficacité du traitement de l'information quantique. En particulier, la soustraction de photons, l'addition de photons et leur superposition cohérente effectuées sur des faisceaux jumeaux se sont avérées améliorer le degré d'intrication ainsi que la fidélité de téléportation [47, 48, 49, 36, 50, 51]. Récemment, des recherches [52] sur l'action d'un amplificateur linéaire sans bruit (NLA) optimal et non déterministe [53, 54, 55] sur les faisceaux jumeaux ont révélé sa robustesse pour la génération d'états bipartites non gaussiens et l'amélioration du degré d'intrication mesuré par l'entropie de Von Neumann excédentaire [56, 57]. Des travaux antérieurs ont démontré que certaines propriétés particulières des ressources intriquées non gaussiennes sont cruciales pour améliorer la qualité de la téléportation quantique. En particulier, Dell'Anno et al. [58] ont montré que l'optimisation de la téléportation avec un protocole de type B-K en utilisant certaines ressources non gaussiennes est rendue possible en ajustant leur niveau d'intrication, leur non-gaussianité (NG) et leur affinité avec le vide comprimé (SVA). De plus, dans [58], la corrélation d'Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) des ressources intriquées est présentée comme un indicateur de la téléportation quantique. Dans ce chapitre, les caractéristiques des faisceaux jumeaux amplifiés avec succès générés par l'action du NLA optimal sont étudiées, ainsi que leurs performances en téléportation d'états cohérents. Le degré d'intrication quantifié par l'entropie de Von Neumann excédentaire y est étudié, la non-gaussianité et les corrélations EPR des faisceaux jumeaux non gaussiens sont discutés. Leurs performances en téléportation quantique (CV) d'états cohérents dans un protocole de type B-K sont ensuite évaluées. Enfin, nous identifions les caractéristiques des faisceaux jumeaux amplifiés non gaussiens qui conduisent à une amélioration de la réussite de la téléportation (quantifiée par la fidélité moyenne de l'état de sortie par rapport à l'état d'entrée inconnu), par rapport aux faisceaux jumeaux standards. Nous montrerons que des améliorations substantielles de la réussite de la téléportation sont obtenues dans le régime où la corrélation EPR des ressources intriquées est réduite, tandis qu'une dépendance non triviale du degré d'intrication et de la non-gaussianité quantifiée par l'entropie relative quantique [58] est rapportée. Il convient de noter que

Chapitre III:

Amélioration du protocole de téléportation quantique moyennant une amplification non-déterministe linéaire et sans bruit

l'amplification sans bruit a déjà été proposée pour être utilisée dans une configuration de téléportation afin d'obtenir une correction d'erreur à variables continues sur des états gaussiens ayant subi un bruit gaussien dû à la perte [59]. Le chapitre est structuré comme suit : dans la section 2, nous analysons les propriétés pertinentes des états intriqués non gaussiens à deux modes créés via un NLA optimal et les comparons à ceux du faisceau jumeau standard. Le contenu de l'intrication, quantifié par l'entropie de Von Neumann excédentaire et la corrélation EPR, ainsi que la non-gaussianité entropique, sont discutés. La section 3 est consacrée à la téléportation quantique à variables continues avec une classe de faisceaux jumeaux amplifiés de manière non déterministe. L'exemple paradigmatique des états cohérents en tant qu'entrées est discuté. Enfin, dans la section 4, nous résumons nos résultats et exposons nos conclusions.

III.2. Caractéristiques des faisceaux jumeaux amplifiés

Dans le but d'examiner les propriétés du faisceau jumeau amplifié non gaussien, nous passons d'abord en revue certains détails concernant sa génération et rappelons certaines caractéristiques du faisceau jumeau gaussien standard

III.2. 1. L'état bipartite du faisceau jumeau standard

Le vide comprimé à deux modes est une ressource intriquée largement utilisée dans divers protocoles d'information quantique. Sa génération implique le processus de down-conversion paramétrique, où un cristal non linéaire de type $\chi^{(2)}$ servant de milieu d'amplification est pompé avec de la lumière à la fréquence ω_p . Une fraction de cette lumière génère une paire de photons avec des fréquences ω_a et ω_b , obéissant à la contrainte $\omega_p = \omega_a + \omega_b$. Formellement, son expression est obtenue en appliquant l'opérateur de compression à deux modes $S_{ab}(r) = \exp -r(\hat{a}^+ \hat{b}^+ - \hat{a} \hat{b})$ [22] sur le vide :

$$|X\rangle = \exp(r(\hat{a}^+ \hat{b}^+ - \hat{a} \hat{b}))|00\rangle = \sqrt{1 - X^2} \sum_{n=0}^{\infty} X^n |nn\rangle \quad (\text{III.1})$$

où r est supposé réel sans perte de généralité, \hat{a}^+ (\hat{a}) et \hat{b}^+ (\hat{b}) sont les opérateurs de création (d'annihilation) des deux modes et $0 < X = \tan h < r$ dépend de la susceptibilité non linéaire et d'une longueur d'interaction efficace. Le faisceau jumeau standard a une fonction de Wigner gaussienne. Étant donné qu'il s'agit d'un état pur (CV), une bonne mesure de son intrication est l'entropie de Von Neumann excédentaire définie comme l'entropie de Von Neumann de l'opérateur de densité réduit ρ_a , obtenu en prenant la trace sur le mode b du faisceau jumeau. Son entropie de Von Neumann est donnée par :

$$S[\rho_a] = -\ln(1 - X^2) - \frac{X^2 \ln(X^2)}{(1 - X^2)} \quad (\text{III.2})$$

Outre le degré d'intrication caractérisant une ressource intriquée, la corrélation Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) d'un état bipartite s'est avérée être un élément important pour effectuer la téléportation quantique. Au lieu des opérateurs de position et de moment d'une particule massive discutée dans l'article célèbre sur l'exhaustivité de la mécanique quantique [60], les grandeurs d'intérêt pour un système optique sont les opérateurs de quadratures définis comme suit :

$$\hat{p}_a = \frac{-i}{\sqrt{2}}(\hat{a} - \hat{a}^+) \quad \hat{x}_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a} + \hat{a}^+) \quad (\text{III.3})$$

$$\hat{x}_b = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{b} + \hat{b}^+) \hat{p}_b = \frac{-i}{\sqrt{2}}(\hat{b} - \hat{b}^+)$$

Chapitre III:

Amélioration du protocole de téléportation quantique moyennant une amplification non-déterministe linéaire et sans bruit

En ce qui concerne un état optique bipartite, la corrélation EPR se lit [61] :

$$\Delta z^2 = \Delta(\hat{x}_a - \hat{x}_b)^2 + \Delta(\hat{p}_a - \hat{p}_b)^2 \quad (\text{III.4})$$

qui, après avoir été exprimé les opérateurs quadratures en termes des opérateurs de création et d'annihilation, devient :

$$\Delta z^2 = 2[1 + \langle \hat{a}^+ \hat{a} \rangle + \langle \hat{b}^+ \hat{b} \rangle - \langle \hat{a}^+ \hat{b}^+ \rangle - \langle \hat{a} \hat{b} \rangle - (\langle \hat{a} \rangle - \langle \hat{b}^+ \rangle)(\langle \hat{a}^+ \rangle - \langle \hat{b} \rangle)] \quad (\text{III.5})$$

Une corrélation EPR nulle révèle une corrélation parfaite entre les deux modes, comme pour l'état EPR idéal introduit dans [1]. En effet, les variances des opérateurs similaires à la position diffèrent et les opérateurs similaires à l'impulsion se somment à zéro, ce qui indique que connaître les quadratures du mode 'a' permet de déterminer exactement les quadratures du mode 'b'. En revanche, une valeur supérieure à 2 indique des états classiques séparables à deux modes. Pour un vide comprimé à deux modes, la corrélation EPR est donnée par :

$$\Delta z^2 = \frac{2(1-X)}{(1+X)} \quad (\text{III.6})$$

Tant que le paramètre de compression χ appartient à l'intervalle]0, 1[, la corrélation EPR du faisceau jumeau standard reste inférieure à 2, ce qui indique la présence de corrélations quantiques. Lorsque χ tend vers 1 (dans la limite de la compression infinie), la corrélation EPR tend vers zéro, indiquant une intrication maximale. En revanche, dans le cas d'une compression faible (χ tendant vers 0), la corrélation EPR tend vers 2. Ainsi, des degrés de compression plus élevés conduisent à des corrélations quantiques plus fortes dans le faisceau jumeau.

III.2. 2. Le faisceau jumeau amplifié

Avant d'approfondir notre étude, nous proposons de présenter brièvement quelques-unes des réalisations expérimentales les plus emblématiques de l'opération non gaussienne discutée ici, à savoir l'amplification linéaire sans bruit. Depuis les travaux pionniers de Ralph et Lund [62], où l'idée d'amplificateurs probabilistes sans bruit a été formulée, plusieurs mises en œuvre du NLA ont été réalisées par différents groupes. Les premières réalisations étaient physiques : elles nécessitaient un dispositif spécialement conçu impliquant des composants optiques. Les principes de fonctionnement des schémas proposés vont des ciseaux quantiques généralisés impliquant des sources de photons uniques et des configurations interférométriques multiphotoniques [63, 64, 65], à la superposition cohérente d'addition et de soustraction de photons uniques [66, 67], en passant par la concentration des informations de phase par l'ajout de bruit [49]. Par la suite, étant donné les ressources importantes nécessaires aux conceptions physiques, des amplificateurs virtuels sans bruit ont été examinés théoriquement [68, 69], puis réalisés expérimentalement [70, 71]. Étonnamment, ces schémas alternatifs, communément appelés "NLA basés sur la mesure", ne nécessitent qu'une post-sélection des résultats de détection hétérodyne qui émulent le filtre quantique induit par l'amplification non déterministe physique. En fin de compte, chacune des conceptions mentionnées jusqu'à présent, ainsi que l'architecture optimale considérée dans notre travail [55], offre naturellement des performances différentes en termes de probabilité de succès et de fidélité par rapport à l'entrée amplifiée de manière idéale, et elles sont considérées comme des réalisations approximatives de l'amplificateur idéal sans bruit et insensible à la phase, réalisant l'opération $g^{\hat{a}^+ \hat{a}}$.

Chapitre III:

Amélioration du protocole de téléportation quantique moyennant une amplification non-déterministe linéaire et sans bruit

La génération d'un état bipartite intriqué non gaussien par soustraction (ou addition) de photons, ou par leur superposition cohérente sur des états de vide comprimés en mode à deux faisceaux, s'est révélée utile dans le traitement de l'information quantique. De même, les états non gaussiens produits en mélangeant des états de vide comprimés par soustraction de photons avec du vide dans un diviseur de faisceau ont montré une amélioration intéressante de la qualité de la téléportation quantique des états cohérents [72]. Ici, nous discutons d'un processus de dé-gaussification basé sur l'action d'un NLA optimal sur un faisceau jumeau. Un mode du faisceau jumeau est couplé à un dispositif de mesure (DM) constitué d'un système à deux niveaux (comme il se trouve $|S\rangle$ et $|F\rangle$), où "S" se réfère à la réussite (success) et "F" à l'échec (failure) par le biais d'une transformation unitaire. Le (DM) est ensuite projeté dans l'un de ses états initiaux $|S\rangle$ et $|F\rangle$, ce qui annonce le succès ou l'échec de l'amplification. Nous ne considérons que les états amplifiés avec succès, que nous appelons le faisceau jumeau amplifié. Le processus est donc intrinsèquement conditionnel et a été présenté en détail dans [52]. Ici, nous rappelons simplement l'expression du faisceau jumeau amplifié dérivée de l'action de l'opérateur de Krauss prenant en compte le bon fonctionnement du dispositif optimal [55, 54].

$$|X_S\rangle = \frac{\hat{E}_S^P \otimes \mathbb{1}_b |X\rangle}{\sqrt{P_{S;X}}} \quad (\text{III. 7})$$

$$= \sqrt{\frac{1 - X^2}{P_{S;X}}} \left(g^{-p} \sum_{n=0}^p (gX)^n + \sum_{n=p+1}^{\infty} X^n |nn\rangle \right) \quad (\text{III. 8})$$

où g et p sont les paramètres intrinsèques du NLA optimal et désignent respectivement le gain et l'entier qui définit l'ordre de troncature dans la base Fock que nous appelons seuil. P_S représente la probabilité de mettre en œuvre avec succès l'amplification souhaitée sur un faisceau jumeau initial et s'exprime comme suit:

$$P_{S;X} = (1 - X^2) \left[g^{-2p} \sum_{n=0}^p (gX)^{2n} + \sum_{n=p+1}^{\infty} X^{2n} \right] \quad (\text{III. 9})$$

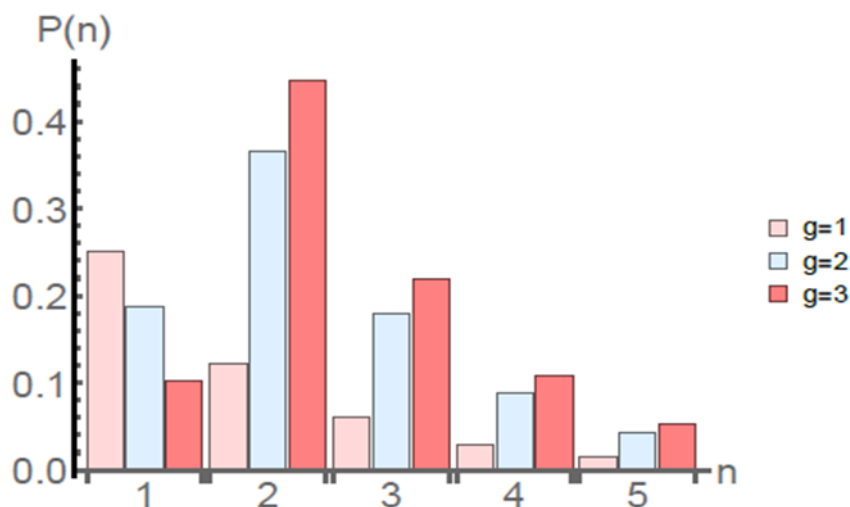


Figure III.1. Représentation graphique de la distribution des photons pour différents états quantiques bipartites. Parmi les états considérés, on retrouve : les faisceaux jumeaux standards avec $g=1$ (rouge clair), et les faisceaux jumeaux amplifiés avec différentes configurations : $g=2$ (bleu clair), $g=3$ (rouge foncé). L'ordre de troncature étant fixé à 2 et le paramètre de compression à 0.6.

Comme nous pouvons clairement le voir, l'amplificateur linéaire sans bruit (NLA) a tendance à favoriser l'apparition de nombres de photons plus élevés, ce qui induit une modification de la distribution du nombre de photons. La **Figure III.1** montre le diagramme en barres représentant la distribution du nombre de photons attribuée aux faisceaux jumeaux amplifiés et à leur version standard, pour un paramètre de compression fixe et différentes configurations du NLA. Nous remarquons en effet que la coïncidence de la mesure d'un nombre plus élevé de photons dans les deux modes du faisceau jumeau amplifié a une pondération plus importante que dans sa version standard, tandis que l'inverse est observé pour les photons uniques. De plus, nous remarquons que plus l'amplification est forte (valeurs élevées du gain), plus la variation de la distribution du nombre de photons induite par le NLA est prononcée. Cette observation reste valable pour toutes les valeurs du paramètre de compression (χ) et du seuil (p).

Nous rappelons au lecteur que des travaux antérieurs [45, 54] ont examiné en détail l'effet d'un amplificateur linéaire sans bruit sur les états EPR. En fait, dans l'étude pionnière de Ralph et Lund [45], les auteurs ont examiné l'action d'un NLA particulier consistant en plusieurs blocs de ciseaux quantiques sur les états EPR, à la fois pour des canaux idéaux et des canaux présentant des pertes. D'autre part, une autre description théorique de l'amplificateur a été étudiée dans [54], où les performances d'un dispositif optimal sur un état EPR présentant des pertes ont été évaluées.

III.2.3. Degré d'intrication

Nous souhaitons quantifier l'effet de l'amplificateur non linéaire optimal sur l'intrication des faisceaux jumeaux. À partir du moment où les faisceaux jumeaux amplifiés restent purs (l'opération quantique décrivant une amplification réussie est représentée par un seul opérateur de Krauss [55]), nous nous tournons à nouveau vers l'entropie de Von Neumann excédentaire pour quantifier leur degré d'intrication. La **Figure III.2** présente les graphiques de l'entropie de Von Neumann excédentaire en fonction du paramètre de compression pour différentes configurations de l'amplificateur non linéaire optimal. Le seuil est fixé tandis que le gain varie. Dans un souci de comparaison, nous reportons également le degré d'intrication des faisceaux jumeaux standard. Comme prévu, toutes les quantités considérées sont des fonctions croissantes du paramètre de

Amélioration du protocole de téléportation quantique moyennant une amplification non-déterministe linéaire et sans bruit

compression. Nous remarquons que le degré d'intrication des faisceaux jumeaux amplifiés est supérieur à celui des faisceaux jumeaux bipartite à vide comprimé standard, et ce, pour toutes les configurations considérées et à n'importe quelle valeur de l'énergie, en particulier dans l'intervalle $0 < \chi < 0,75$ expérimentalement disponible. De plus, les fortes amplifications ont tendance à augmenter le degré d'intrication des faisceaux jumeaux caractérisés par de faibles énergies, tandis que l'inverse est observé pour une faible amplification. Enfin, comme observé pour la non-gaussianité entropique, plus les configurations de l'amplificateur non linéaire sont intenses, plus les valeurs du paramètre de compression auxquelles les pics de l'entropie de Von Neumann excédentaire sont atteints sont faibles.

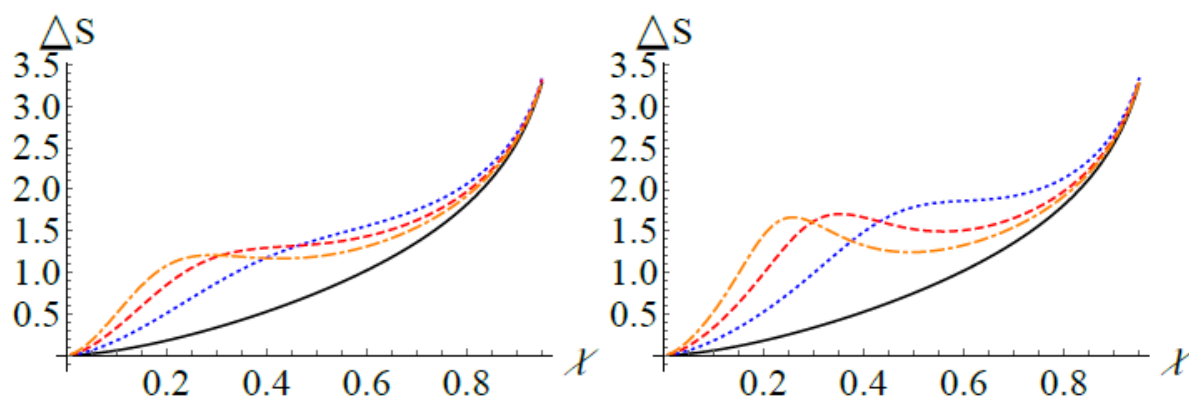


Figure III.2. Entropie de Von Neumann excédentaire des faisceaux jumeaux amplifiés et standards en fonction du paramètre de compression. Différentes configurations d'amplificateur non linéaire optimal (NLA) sont considérées : la ligne en pointillés bleus représente $g = 2$, la ligne en pointillés rouges $g = 3$ et la ligne en pointillés orange représente $g = 4$. La ligne pleine noire correspond aux faisceaux jumeaux standards.

Dans le panneau de gauche, $p = 2$, tandis que dans le panneau de droite, $p = 4$.

III.2.4. Corrélation EPR

Précédemment, nous avons abordé la corrélation EPR entre les quadratures du champ optique comme une approche alternative pour quantifier l'intrication d'un état bipartite. Dans cette sous-section, nous discutons de l'effet d'une amplification optimale non déterministe sans bruit sur la corrélation EPR d'un vide comprimé à deux modes. Nous soulignons que, pour les états bipartites d'intérêt, la variance de la différence de position et la somme des impulsions sont égales, ce qui fait que la corrélation EPR se résume à $\Delta z^2 = 2\Delta(\hat{x}_a - \hat{x}_b)^2$. La **Figure III.3** montre les variations de la corrélation EPR par rapport au paramètre de compression. Différentes configurations, où le seuil est fixé et le gain varie, sont considérées et comparées à celle des faisceaux jumeaux standards. Nous remarquons que, à l'exception des faisceaux jumeaux standards dont la variance de la différence de position est une fonction décroissante monotone du paramètre de compression, la quantité d'intérêt présente un comportement non monotone pour tous les états bipartites générés à partir de différentes configurations. Nous remarquons également que si χ est inférieur à un seuil qui dépend des paramètres intrinsèques de l'amplificateur sans bruit non déterministe, la corrélation EPR est inférieure à celle des faisceaux jumeaux standards. Cela témoigne de la robustesse d'un amplificateur optimal non déterministe sans bruit agissant dans un certain régime pour augmenter l'intrication des faisceaux jumeaux d'une faible énergie. En revanche, au-delà de ce seuil, la variance des faisceaux jumeaux amplifiés est plus grande que

Amélioration du protocole de téléportation quantique moyennant une amplification non-déterministe linéaire et sans bruit

celle du vide comprimé à deux modes standard. En particulier, pour des amplifications fortes, la corrélation EPR atteint des valeurs supérieures à 2 qui séparent les états bipartites quantiques intriqués des états séparables, témoignant ainsi de l'inefficacité de l'amplificateur sans bruit non déterministe dans cette plage d'énergies.

Selon les **Figure III.2.** et **Figure III.3.**, l'amplificateur non linéaire optimal (NLA) améliore le degré d'intrication capturé par l'entropie de Von Neumann excédentaire des faisceaux jumeaux, indépendamment de leur paramètre de compression initial, tandis qu'un effet différent est observé lorsque l'intrication est quantifiée par la corrélation EPR, où l'amélioration n'est observée que dans l'intervalle des faibles énergies. Nous concluons qu'une augmentation de l'entropie de Von Neumann excédentaire n'implique pas systématiquement une corrélation EPR plus forte.

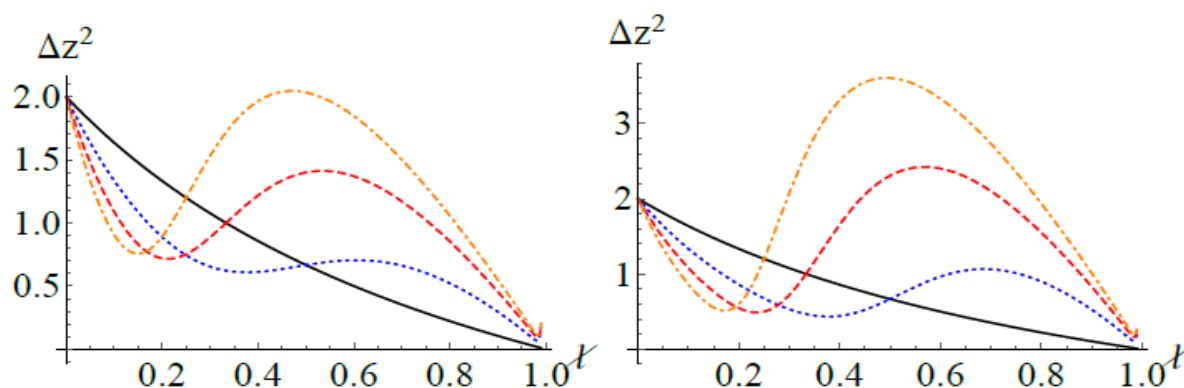


Figure III.3. La corrélation EPR en fonction du paramètre de compression pour un vide comprimé à deux modes (ligne pleine noire) et les faisceaux jumeaux amplifiés générés à partir de différentes configurations de l'amplificateur non linéaire optimal (NLA) : $g = 2$ (ligne en pointillés bleus), $g = 3$ (ligne en pointillés rouges), $g = 4$ (ligne en pointillés orange). Dans le panneau de gauche, p est fixé à 2 tandis que dans le panneau de droite, $p = 4$.

III.3. Améliorations de la téléportation assistées par NLA :

Dans le régime des variables continues (VC), la téléportation quantique permet le transfert d'états quantiques inconnus d'une station d'envoi à un récepteur distant. En Optique, cette méthode a été proposée pour la première fois par Braunstein et Kimble, où l'information est encodée dans les quadratures du système optique et la ressource intriqué utilisée est un vide bipartite à deux modes comprimés [39]. L'implémentation expérimentale de ce protocole a ensuite été réalisée par Furusawa et ses collaborateurs [40].

Dans cette étude, nous présentons des résultats théoriques sur la téléportation quantique VC assistée par un amplificateur non-déterministe optimal (NLA), où la ressource intriquée est un vide bipartite à deux modes comprimés amplifié de manière non-déterministe. Notre objectif est de comparer cette approche avec le protocole conventionnel de Braunstein-Kimble (B-K) qui utilise des faisceaux jumeaux standards comme ressource intriquée.

$$\hat{p}_a = \frac{-i}{\sqrt{(2)}}(\hat{p}_{in} + \hat{p}_a) \quad \hat{x}_a = \frac{1}{\sqrt{(2)}}(\hat{x}_{in} - \hat{x}_a) \quad \text{(III. 10)}$$

Chapitre III:

Amélioration du protocole de téléportation quantique moyennant une amplification non-déterministe linéaire et sans bruit

Le protocole B-K standard implique deux parties, Alice et Bob, qui partagent une ressource bipartite entrelacée composée des modes a et b. Alice possède un état inconnu d'entrée, noté $|\psi_{in}\rangle$, qu'elle souhaite téléporter à Bob. Le processus de téléportation se déroule comme suit : Alice combine son état d'entrée avec le mode a de la ressource partagée en utilisant un diviseur de faisceau équilibré, ce qui donne les modes de sortie c et d. Alice effectue ensuite une détection homodyne sur les modes de sortie, mesurant les observables des quadratures représentées par les parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe

$\mathcal{B} = x_- + ip_+$. En se basant sur le diviseur de faisceau équilibré, les parties réelle et imaginaire correspondent respectivement aux valeurs propres de la différence de position et de la somme de quantité de mouvement. Ces observables sont liées aux opérateurs des modes d'entrée grâce à la transformation unitaire induite par le diviseur de faisceau. Enfin, Bob applique un opérateur de déplacement $\exp(\mathcal{B}\hat{b}^\dagger - \mathcal{B}^*\hat{b})$ sur son mode distant b, conditionné par le résultat de la mesure, pour obtenir l'état téléporté. Le gain du téléporteur est supposé être égal à l'unité tout au long de l'étude.

Formellement, plusieurs descriptions du protocole mentionné ci-dessus ont été présentées dans la littérature, allant de la formalisation de la fonction de Wigner initialement introduite par Braunstein et Kimble [39], à l'approche de l'expansion des états de Fock [14], à la description de l'opérateur de transfert [74] et au formalisme basé sur la fonction caractéristique [75]. Bien que ce dernier soit largement utilisé lorsque des ressources entrelacées non gaussiennes sont impliquées dans la téléportation quantique, nous adoptons la description de l'opérateur de transfert qui est mieux adaptée à notre travail. Afin d'évaluer les performances de la téléportation quantique avec les faisceaux jumeaux amplifiés non gaussiens, nous établissons l'expression de la fidélité moyenne.

Dans le formalisme de l'opérateur de transfert, les expressions de la fidélité de téléportation, de la probabilité pour que la détection homodyne affiche le résultat et de la fidélité moyenne sont évaluées par l'action d'un certain opérateur de transfert sur les états quantiques impliqués dans le processus de téléportation. L'état quantique en possession de Bob, issu de l'ensemble du processus de téléportation (transfert d'informations à travers les canaux quantique et classique), que nous appelons l'état de sortie, est obtenu par l'action de l'opérateur de transfert $\hat{T}(\beta)$ sur l'état d'entrée :

$$|\psi_{out}(\beta)\rangle = \hat{T}(\beta)|\psi_{in}\rangle \quad (\text{III.11})$$

Nous notons que l'état de sortie en question est conditionné par le résultat de la mesure homodyne et n'est donc pas normalisé. La probabilité qu'un résultat donné se produise est donnée par :

$$p(\beta) = \langle \psi_{out}(\beta) | \psi_{out}(\beta) \rangle \quad (\text{III.12})$$

Selon ces expressions, la fidélité de la téléportation $\mathcal{F}(\beta)$, définie comme le chevauchement entre l'état d'entrée $|\psi_{in}\rangle$ et l'état de sortie $|\psi_{out}(\beta)\rangle$, est donnée par :

$$\mathcal{F}(\beta) = \frac{1}{p(\beta)} |\langle \psi_{in} | \hat{T}(\beta) | \psi_{in} \rangle|^2 \quad (\text{III.13})$$

Alors que la fidélité moyenne, qui est la fidélité de téléportation moyennée sur les résultats possibles, prend l'expression suivante :

Chapitre III:

Amélioration du protocole de téléportation quantique moyennant une amplification non-déterministe linéaire et sans bruit

$$\bar{F} = \int d\beta^2 (\beta) p(\beta) F(\beta) = \int d\beta^2 |\langle \psi_{in} | \hat{T}(\beta) | \psi_{in} \rangle|^2 \quad (\text{III.14})$$

Afin d'évaluer les quantités d'intérêt, il est nécessaire d'établir l'expression de l'opérateur de transfert qui dépend de la ressource bipartie intriquée. Dans [74], Hofmann et al. établissent l'expression de l'opérateur de transfert lorsque la ressource intriquée sont les faisceaux jumeaux standards :

$$\hat{T}(\beta) = \sqrt{\frac{1-X^2}{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} X^n \hat{D}(\beta) |n\rangle \langle n| \hat{D}(-\beta) \quad (\text{III.15})$$

où $\hat{D}(\beta)$ désigne l'opérateur de déplacement habituel agissant sur l'état d'entrée. De plus, il a été remarqué dans [48] que si l'état bipartie intriqué prend la forme suivante :

$$|\Phi\rangle = N \sum_{n=0}^{\infty} k_n |n, n\rangle, \quad (\text{III.16})$$

où N est une constante de normalisation et k_n les coefficients de la ressource intriqué lorsqu'ils sont développés dans une base Fock, l'opérateur de transfert se généralise comme suit :

$$\hat{T}(\beta) = \frac{N}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} k_n \hat{D}(\beta) |n\rangle \langle n| \hat{D}(-\beta) \quad (\text{III.17})$$

Comme on peut clairement le voir, notre état entrelacé résultant de l'action d'une NLA optimale sur un état EPR standard est de la forme de l'équation (16), où la constante de normalisation et les coefficients s'écrivent respectivement comme suit :

$$N = \sqrt{\frac{1-X^2}{P_{S,X}}}, \quad (\text{III.18})$$

$$k_n = \begin{cases} g^{n-p} X^n & \text{si } n \leq p \\ X^n & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{III.19})$$

III.3. 1. Téléportation d'états cohérents

Afin d'évaluer les performances de la ressource intriquée considérée dans notre travail, nous nous concentrons sur le cas paradigmatique de la téléportation d'états cohérents. Pour des fins de comparaison, nous rappelons tout d'abord certains résultats concernant le protocole standard avec le vide comprimé à deux modes en tant qu'état intriqué. L'état de sortie résultant du processus de téléportation effectué sur un état cohérent d'amplitude est donné par :

$$\hat{T}(\beta) |\alpha\rangle = \sqrt{\frac{1-X^2}{\pi}} \exp\left[-(1-X^2) \frac{|\alpha-\beta|^2}{2}\right] \exp\left[-(1-X) \frac{\alpha\beta^* - \alpha^*\beta}{2}\right] |X(\alpha - \beta)\rangle \quad (\text{III.20})$$

Nous notons que la sortie est également un état cohérent dont l'amplitude correspond à l'amplitude d'entrée déplacée puis atténuée respectivement par les facteurs β et χ .

La fidélité de téléportation, moyennée sur tous les résultats des mesures homodynes, est indépendante de l'amplitude d'entrée et s'écrit :

$$\bar{F} = \frac{1}{2} (1 - X) \quad (\text{III.21})$$

Chapitre III:

Amélioration du protocole de téléportation quantique moyennant une amplification non-déterministe linéaire et sans bruit

Pour nos protocoles B-K modifiés où l'état EPR standard est remplacé par les faisceaux jumeaux amplifiés conditionnellement, la fidélité de téléportation et la probabilité d'obtenir un résultat donné sont calculées à l'aide de la formule suivante :

$$\langle n | \widehat{D}(\beta) | \alpha \rangle = (n!)^{-1/2} (\alpha + \beta)^n \exp\frac{1}{2} |\alpha + \beta|^2 \exp\frac{1}{2} (\alpha^* \beta - \alpha \beta^*) \quad (\text{III. 22})$$

Dans le cadre de notre protocole B-K modifié, où l'état EPR standard est remplacé par les faisceaux jumeaux amplifiés la fidélité de téléportation et la probabilité d'obtenir un résultat donné sont évaluées à l'aide des formules (III.17) et (III.22) en tronquant la base Fock à un ordre pertinent. La **Figure III.4** présente les graphiques de la fidélité moyenne \bar{F} pour un état cohérent $\alpha = 2$ en fonction du paramètre de compression. Une étude comparative entre les faisceaux jumeaux amplifiés de manière non déterministe et leur version standard, ainsi que différentes instances de faisceaux jumeaux dé-Gaussiens couramment utilisés, est réalisée. Comme le montrent les deux sous-figures du haut, il existe une plage de valeurs du paramètre de compression où la fidélité moyenne pour la téléportation quantique avec notre ressource intriquée conditionnelle est améliorée par rapport au protocole B-K standard. Nous remarquons que bien que les faisceaux jumeaux amplifiés présentent une entropie de Von Neumann excédentaire plus élevée quel que soit le paramètre de compression et les paramètres de NLA, la fidélité moyenne est améliorée uniquement dans une certaine région de l'énergie d'entrée. De plus, nous constatons que la valeur critique délimitant cette région dépend du gain NLA g pour une valeur fixe de l'ordre de troncation p , de telle sorte que plus l'amplification est forte, plus petite est cette valeur critique. À travers les sous-figures du bas de la **Figure III.4**, nous comparons les performances du protocole de téléportation des états cohérents en exploitant le processus de dé-Gaussification basé sur une NLA optimale et deux schémas de dé-Gaussification bien connus qui impliquent respectivement la soustraction de photons et l'ajout puis la soustraction de photons. Les expressions de leurs fidélités moyennes sont indépendantes de l'amplitude cohérente d'entrée et sont rapportées dans [36], où il a également été montré que les faisceaux jumeaux ajoutés-ensuite-soustraits dépassent les performances des faisceaux jumeaux soustraits de photons dans la plage d'énergies faibles. Il apparaît que, pour des calibrations fortes de la NLA (valeurs élevées de g et $p = 4$), les faisceaux jumeaux amplifiés surpassent l'état à deux modes avec ajout-ensuite-soustraction de photons lorsque l'énergie d'entrée appartient à un certain intervalle, tandis qu'ils sont préjudiciables à la qualité de la téléportation dans la région restante. Un comportement différent est observé lorsque le seuil est fixé à $p = 2$. En effet, lorsque le gain est inférieur à $g = 3$, une amélioration est obtenue par rapport à la ressource soustraite de photons, tandis que la qualité de la téléportation reste inférieure à celle des faisceaux jumeaux ajoutés-ensuite-soustraits. Enfin, nous remarquons que les résultats numériques de la fidélité moyenne pour un large ensemble d'amplitudes d'entrée allant de -20 à 20 , incluant également des valeurs complexes, montrent un comportement identique. Nous concluons donc que la qualité de la téléportation capturée par la fidélité est indépendante de l'état d'entrée. Ainsi, les graphiques produits pour la valeur spécifique $\alpha = 2$ de l'amplitude d'entrée considérée dans ce chapitre se généralisent à un état d'entrée cohérent arbitraire.

Amélioration du protocole de téléportation quantique moyennant une amplification non-déterministe linéaire et sans bruit

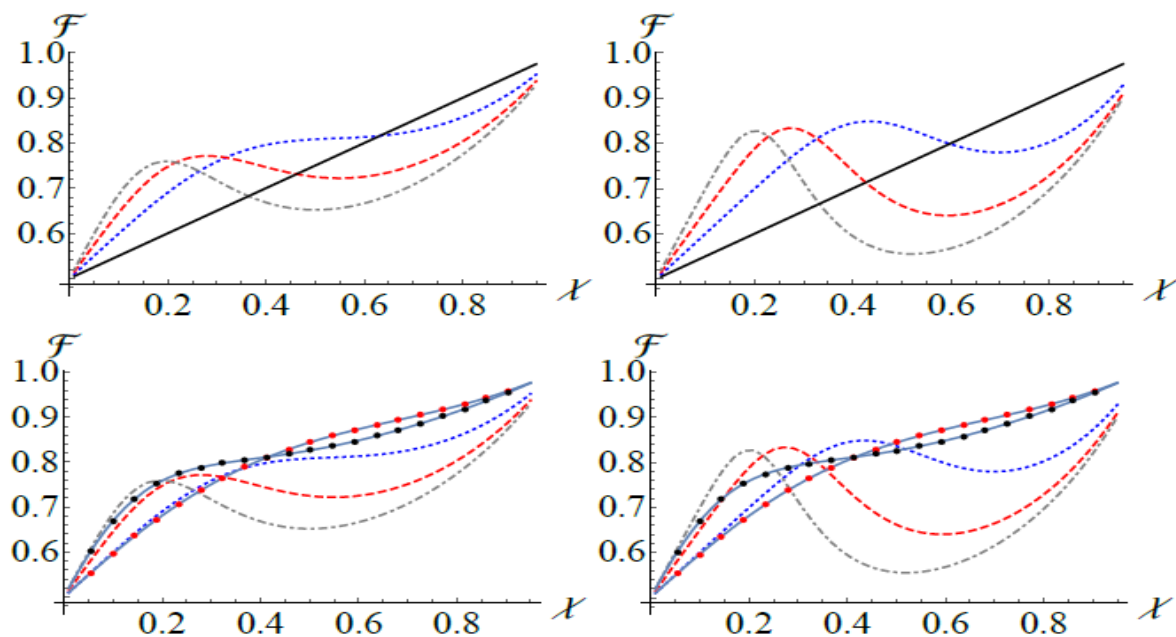


Figure III. 4. Représentation de la fidélité moyenne F en fonction de χ pour des faisceaux jumeaux standards (ligne noire pleine), un état EPR soustrait de photons (cercles rouges), un état EPR ajouté-ensuite-soustrait de photons (cercles noirs) et des faisceaux jumeaux amplifiés générés à partir de différentes configurations de la NLA : $g = 2$ (ligne bleue en pointillés), $g = 3$ (ligne rouge en tirets), $g = 4$ (ligne en pointillé-tiret gris). Dans les panneaux de gauche, p est fixé à 2, tandis que dans les panneaux de droite, $p = 4$.

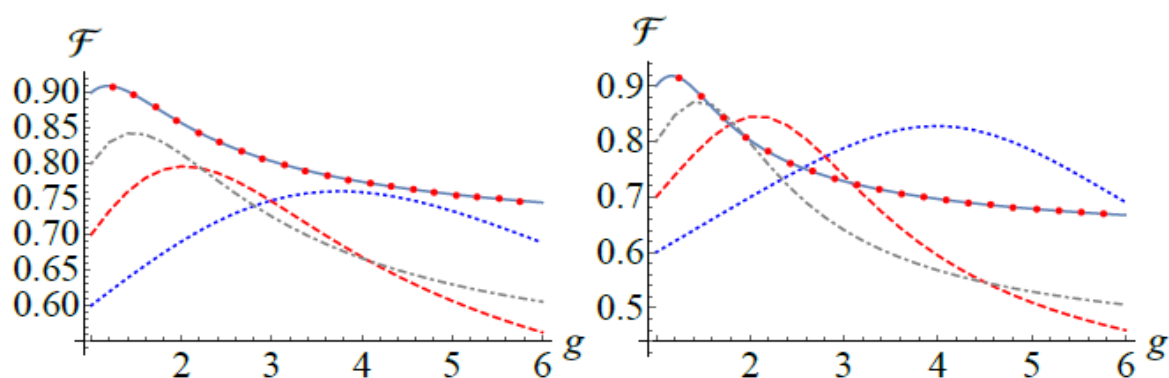


Figure III. 5. La fidélité moyenne F en fonction de g pour des ressources intriquées avec différentes énergies d'entrée : $\chi = 0,22$ (ligne bleue en pointillés), $\chi = 0,4$ (ligne rouge en tirets), $\chi = 0,6$ (ligne pointillé-tiret gris) et $\chi = 0,8$ (cercles rouges). Dans le panneau de gauche, p est fixé à 2, tandis que dans le panneau de droite, $p = 4$.

Chapitre III:

Amélioration du protocole de téléportation quantique moyennant une amplification non-déterministe linéaire et sans bruit

Comme il ressort des résultats présentés dans la **Figure III.4**, les amplifications sans bruit fonctionnant dans le régime de fonctionnement fort (valeurs élevées du gain) ont tendance à améliorer davantage la fidélité moyenne lorsque des ressources intriquées avec de faibles énergies sont considérées, tandis qu'elles sont préjudiciables à la qualité de la téléportation pour les états EPR avec un paramètre de compression élevé. L'identification des valeurs du gain conduisant à l'amélioration la plus substantielle offerte par NLA est d'un grand intérêt. Dans la **Figure 6**, la fidélité moyenne de la téléportation des états cohérents avec des ressources intriquées de différents paramètres de compression est tracée en fonction du gain de NLA. Les intersections des courbes avec l'axe "y" caractérisent la fidélité moyenne du protocole standard B-K. Comme prévu et conformément à nos observations précédentes, les améliorations induites par NLA sur la qualité de la téléportation sont optimisées par des valeurs élevées du gain pour les faisceaux jumeaux avec de faibles énergies d'entrée, tandis que des amplifications faibles conduisent à des fidélités plus substantielles lorsqu'elles sont effectuées sur des ressources intriquées fortement comprimées. En raison de la nature ajustable de NLA, son utilisation peut être optimisée par rapport à ses paramètres intrinsèques pour chaque état EPR considéré et tirer ainsi pleinement parti du processus de dégaussification. Nous remarquons qu'au-delà d'une certaine valeur de la compression d'entrée de l'état EPR, NLA n'est plus utile indépendamment de son calibrage.

Une caractéristique intéressante des états EPR non-déterministiquement amplifiés est ainsi de permettre d'atteindre des fidélités élevées à partir d'un état EPR standard de faible énergie dont la génération expérimentale est bien maîtrisée. Par conséquent, afin d'obtenir des fidélités moyennes élevées pour la téléportation quantique à variables continues, on peut exploiter les avantages du NLA optimal qui agit comme un distillateur d'intrication plutôt que de chercher à concevoir des amplificateurs intenses. Enfin, nous soulignons que même lorsque des amplifications modérées sont mises en œuvre, les ressources intriquées amplifiées montrent, dans une certaine région d'énergies faibles, une amélioration plus substantielle que celle de l'état EPR soustrait de photons largement étudié dans des travaux précédents [49, 36, 76]. Une observation similaire est valable pour sa version non concluante [50].

Dans un processus de téléportation, la transmission d'informations est considérée comme non-locale si sa fidélité moyenne \bar{F} dépasse $1/2$ [77]. Comme le montre la **Figure III.4**, à la fois les faisceaux jumeaux standards et amplifiés dépassent cette limite indépendamment de la configuration du NLA. Une limite plus significative ($\bar{F} > 2/3$), témoignant du fait que l'état en possession de Bob est la meilleure copie existante, a été dérivée dans [78]. La signification de cette limite est que lorsqu'une transmission sécurisée est requise, même si Bob n'est pas en mesure d'empêcher une action d'écoute qui altère ou clone l'état transféré, il peut vérifier s'il est le seul propriétaire de celui-ci [79, 80]. En effet, cela est rendu possible en considérant la fidélité moyenne du processus de téléportation. Lorsque la fidélité dépasse la limite de $2/3$, Bob sait de manière non équivoque que son état n'a pas été dupliqué et la téléportation est considérée comme sécurisée. Dans la **Figure III.6** sont tracées les fidélités moyennes de l'état EPR standard et de son homologue amplifié de manière non-déterministe avec la configuration ($g = 2$ et $p = 4$) en fonction du paramètre de compression, où un état cohérent d'amplitude $\alpha=2$ est téléporté. La **Figure III.6** met en évidence une région (la zone ombrée en bleu clair) où la fidélité moyenne de la téléportation avec notre ressource non gaussienne dépasse $2/3$, tandis que la qualité du protocole standard avec le vide comprimé en deux modes reste en dessous de cette limite. Les lignes verticales et horizontales servent à délimiter la zone ombrée. Selon ces résultats, le schéma conditionnel proposé basé sur l'amplification non déterministe sans bruit permet d'améliorer la qualité de la téléportation d'états cohérents et rend le processus sécurisé dans une région où la ressource EPR standard ne le fait pas.

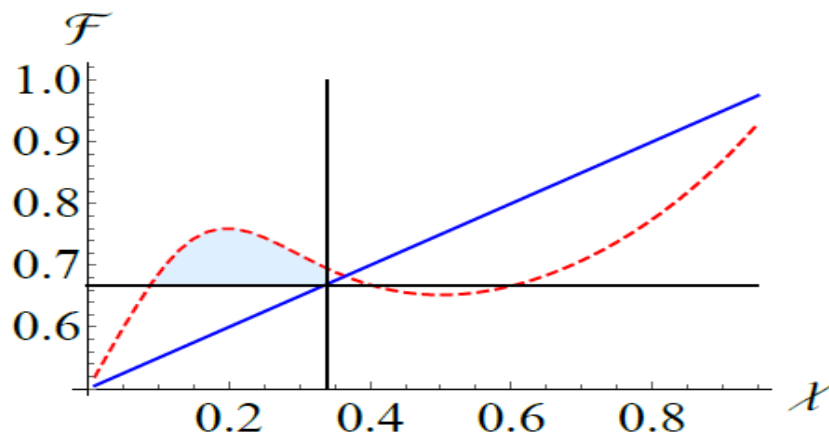


Figure III.6. Illustration de la dépendance de la qualité de téléportation d'un état cohérent avec une amplitude de $\alpha = 2$ en fonction du paramètre de compression χ . Le graphique inclut les résultats obtenus en utilisant l'état EPR standard (ligne bleue continue) et l'état EPR amplifié avec le calibrage ($g = 2$ et $p = 4$) (ligne en pointillés rouges). La zone ombrée en bleu clair représente la région où l'état EPR amplifié atteint une fidélité moyenne dépassant la limite de $2/3$, tandis que l'état EPR standard n'offre pas cet résultat. Les lignes horizontales et verticales marquent les limites de cette région d'intérêt.

III.4. Conclusion

En conclusion, nous avons examiné les propriétés des états biparties non gaussiennes résultant de l'amplification linéaire non déterministe sans bruit des états à deux modes comprimés. Divers attributs caractéristiques liés au contenu d'entrelacement et au caractère non gaussien des ressources non gaussiennes amplifiées ont été pris en compte, puis comparés aux différentes configurations du NLA et des faisceaux jumeaux standards. Nous montrons que l'entropie de Von Neumann excédentaire des états générés est supérieure à celle de l'état EPR standard indépendamment de la configuration du NLA. En particulier, les amplifications faibles favorisent l'augmentation du degré d'intrication dans la plage de compression forte, tandis que les calibrations intenses du NLA tendent à l'optimiser dans l'intervalle des énergies faibles. En ce qui concerne la corrélation EPR, un comportement différent a été observé : l'amplification semble améliorer le contenu d'intrication dans la région des basses énergies, tandis qu'elle est préjudiciable lorsque la compression des faisceaux jumeaux standards d'entrée dépasse une certaine valeur critique.

À la lumière de ces résultats, nous avons étudié un protocole de téléportation de type B-K dans lequel la ressource intriquée standard est remplacée par les faisceaux jumeaux amplifiés de manière non déterministe. Nous avons ensuite dressé une comparaison approfondie des performances de la ressource intriquée non gaussienne amplifiée et de son homologue gaussien dans la téléportation quantique de lumière cohérente en entrée. Nos résultats indiquent deux plages d'énergie d'entrée délimitées par une valeur critique qui dépend de l'étalonnage du NLA : pour une énergie d'entrée inférieure à la valeur critique, une amélioration substantielle de la qualité de la téléportation peut être obtenue, tandis que dans la région restante, l'amplification semble dégrader la fidélité moyenne. Ainsi, le NLA est identifié comme une ressource robuste pour la téléportation quantique lorsqu'elle est réalisée sur des états EPR initiaux de faible énergie. De plus, nous soulignons l'existence d'une région où les ressources non gaussiennes permettent une téléportation quantique sécurisée, tandis que l'état bipartite gaussien standard ne le permet pas. Enfin, nous montrons que l'amélioration de la qualité de la téléportation et la corrélation EPR suivent approximativement le même comportement, contrairement à l'entropie de Von Neumann

Chapitre III:

Amélioration du protocole de téléportation quantique moyennant une amplification non-déterministe linéaire et sans bruit

excédentaire qui présentent une dépendance non triviale. Ainsi, nous identifions la corrélation EPR comme un bon indicateur pour évaluer la qualité de la téléportation, ce qui peut expliquer l'origine de l'amélioration notable.

Conclusion
Générale

Conclusion Générale

Tout au long de ce mémoire, nous avons exploré de nombreux concepts propres aux domaines de l'optique et de l'information quantique. De la téléportation quantique à l'amplification quantique sans bruit, en passant par les mesures d'intrication et de fidélité, ces notions ont sous-tendu notre étude.

Notre travail peut être scindé en trois parties :

Au début, nous avons introduit les bases théoriques nécessaires à la description du champ quantifié. Nous avons passé en revue les formulations discrètes et continue, ainsi que leurs généralisations : la matrice densité et la fonction de Wigner. Les états conventionnels du champ que nous avons abordés dans cette partie nous ont été primordiaux dans notre étude. Ceci a défraîchi le champ pour l'introduction du protocole de téléportation quantique qui est le sujet principal que nous nous sommes fixés d'étudier.

Dans la deuxième partie, nous avons introduit l'amplification non-déterministe linéaire et sans bruit après avoir exposé sa version plus classique, à savoir, l'amplification déterministe. Ce procédé était au cœur de notre objectif : l'amélioration des performances du protocole de téléportation quantique.

Enfin, dans la dernière partie, nous avons exploré l'impact d'une amplification non-déterministe linéaire et sans bruit sur le canal quantique, puis sur la fidélité du protocole. Nos résultats ont été concluants : le NLA est robuste pour la distillation de l'intrication dans le régime des énergies faibles, et par conséquent, améliore sans équivoque les performances du protocole de téléportation quantique.

Références

Références

- [1] A. Einstein, B. Podolsky et N. Rosen : Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete ? *Phys. Rev.*, 47:777_780, mai 1935.
- [2] E. Schrödinger : Die gegenwärtige situation in der quantenmechanik. *Naturwissenschaften*, 23:823_828, 1935.
- [3] A. Aspect, P. Grangier et G. Roger : Experimental tests of realistic local theories via Bell's theorem. *Phys. Rev. Lett.*, 47:460_463, Aug 1981
- [4] A. Aspect, P. Grangier et G. Roger : Experimental realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment : A new violation of Bell's inequalities. *Phys. Rev. Lett.*, 49:91_94, Jul 1982.
- [5] R. P. Feynman : Simulating physics with computers. *International Journal of Theoretical Physics*, 21(6-7):467_488, 1982.
- [6] W. K. Wootters et W. H. Zurek : A single quantum cannot be cloned. *Nature*, 299(5886):802_803, octobre 1982.
- [7] D. Dieks : Communication by EPR devices. *Physics Letters A*, 92(6):271_272, 1982.
- [8] C. H. Bennett et G. Brassard : Quantum cryptography : Public key distribution and coin tossing. In *Proceedings of IEEE International Conference on Computers, Systems and Signal Processing.*, volume 175, page 8, New York, 1984.
- [9] D. Deutsch et R. Jozsa : Rapid solution of problems by quantum computation. *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 439(1907):553_558, 1992.
- [10] P. Shor : Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer. In *Proceedings of the 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, Santa Fe, NM, 1994.
- [11] B. Schumacher : Quantum coding. *Phys. Rev. A*, 51:2738_2747, Avril 1995.
- [12] L. Grover : A fast quantum mechanical algorithm for database search. In *Proceedings, 28th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing*, page 212, 1996.
- [13] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres et W.K. Wootters : Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels. *Phys. Rev. Lett.*, 70:1895_1899, Mars 1993.
- [14] L. Vaidman : Teleportation of quantum states. *Phys. Rev. A*, 49:1473_1476, février 1994.
- [15] S. L. Braunstein et H. J. Kimble : Teleportation of continuous quantum variables. *Phys. Rev. Lett.*, 80:869_872, janvier 1998.
- [16] S. L. Braunstein et P. van Loock : Quantum information with continuous variables. *Rev. Mod. Phys.*, 77:513_577, juin 2005.
- [17] R.L. Hudson : When is the Wigner quasi-probability density non-negative ? *Reports on Mathematical Physics*, 6(2):249 _ 252, 1974.
- [18] C.E. Shannon, A mathematical theory of communication. *Bell Syst. Tech. J.* 27, 623-656 (1948)
- [19] Anton Zeilinger. et al. Experimental quantum teleportation. *Nature* 390, 575–579 (1997)
- [20] Soutenance d'un projet bibliographique de Taoufik AMRI dont cet article s'inspire fortement Bennett, C.H., Brassard, G., Crepeau, C., Jozsa, R., Peres, A., Wootters, W.K., *Phys. Rev. Lett.* 70, 1895 (1993)
- [21] Walls D.F., Milburn G.J. *Quantum optics*, (Springer, 2006)
- [22]. R. Loudon (2000), *The quantum theory of light*, OUP (Oxford).
- [23] Aspect, A., Grangier, P., *Optique quantique 2 : Photons*, Tome 1, (2006)
- [24] F. Grosshans, *Communication et cryptographie quantiques avec des variables continues*, These, Université Paris-Sud 11 (2002).
- [25] D.F. Walls et G.J. Milburn, *Quantum Optics*, Springer, Berlin (1994).

Références

- [26] G. Grynberg, A. Aspect et C. Fabre, *Introduction aux lasers et à l'optique non-linéaire*, Ellipses, Paris (1997).
- [27] U. Leonhardt, *Measuring the quantum state of light*, Cambridge University Press, Cambridge, (1997).
- [28] W.P. Schleich, *Quantum optics in phase space*, Wiley-VCH, Weinheim (2001).
- [29] W.P. Schleich, *Quantum optics in phase space*, Wiley-VCH, Weinheim (2001).
- [30] C. M. Caves, J. Combes, Z. Jiang, and S. Pandey, "Quantum limits on phase preserving Linear amplifiers," *Phys. Rev. A*, vol. 86, p. 063802, Dec 2012.
- [31] T. Ralph and A. Lund, "Nondeterministic noiseless linear amplification of quantum systems," in *AIP Conference Proceedings*, vol. 1110, pp. 155–160, AIP, 2009.
- [32] N. A. McMahon, A. P. Lund, and T. C. Ralph, "Optimal architecture for a nondeterministic noiseless linear amplifier," *Phys. Rev. A*, vol. 89, p. 023846, Feb 2014.
- [33] S. Pandey, Z. Jiang, J. Combes, and C. M. Caves, "Quantum limits on probabilistic amplifiers," *Phys. Rev. A*, vol. 88, p. 033852, Sep 2013.
- [34] A. Ourjoumtsev, R. Tualle-Brouri, J. Laurat, and P. Grangier, "Generating optical schrödinger kittens for quantum information processing," *Science*, vol. 312, no. 5770, pp. 83–86, 2006.
- [35] A. Ourjoumtsev, H. Jeong, R. Tualle-Brouri, and P. Grangier, "Generation of optical 'schrödinger cats' from photon number states," *Nature*, vol. 448, no. 7155, p. 784, 2007.
- [36] Y. Yang and F.-L. Li, "Entanglement properties of non-gaussian resources generated via photon subtraction and addition and continuous-variable quantum-teleportation improvement," *Physical Review A*, vol. 80, no. 2, p. 022315, 2009.
- [37] R. Blandino, A. Leverrier, M. Barbieri, J. Etesse, P. Grangier, and R. Tualle-Brouri, "Improving the maximum transmission distance of continuous variable quantum key distribution using a noiseless amplifier," *Phys. Rev.*
- [38] M. A. Nielsen and I. L. Chuang (2010), *Quantum Computation and Quantum Information*, University Press (Cambridge).
- [39] S. L. Braunstein and H. J. Kimble (1998), *Teleportation of Continuous Quantum Variables*, *Physical review letters*, Vol. 80, No 4, p. 869.
- [40] A. Furusawa, J. L. Srensen, S. L. Braunstein, C. A. Fuchs, H. J. Kimble, and E. S. Polzik (1998), *Unconditional Quantum Teleportation Science*, Vol. 282, No. 5389, pp. 706-709.
- H. Adnane and M. G. A. Paris 951
- [41] M. Yukawa, H. Benichi, and A. Furusawa (2008), *High-fidelity continuous-variable quantum teleportation toward multistep quantum operations*, *Physical Review A*, Vol. 77, No. 2, p. 022314.
- [42] J. Eisert, S. Scheel, and M. B. Plenio (2002), *Distilling Gaussian States with Gaussian Operations is Impossible*, *Physical review letters*, Vol. 89, No. 13, p. 137903.
- [43] J. Fiurasek (2002), *Gaussian Transformations and Distillation of Entangled Gaussian States*, *Physical review letters*, Vol. 89, No. 13, p. 137904.
- [44] J. Niset, J. Fiurasek, and N. J. Cerf (2009), *No-Go Theorem for Gaussian Quantum Error Correction*, *Physical review letters*, Vol. 102, No. 12, p. 120501.
- [45] T. Eberle, V. Handchen, and R. Schnabel (2013), *Stable control of 10 dB two-mode squeezed vacuum states of light*, *Optics express*, Vol. 21, No. 9, pp. 11546-11553.
- [46] H. Vahlbruch, M. Mehmet, K. Danzmann, and R. Schnabel (2016), *Detection of 15 dB squeezed states of light and their application for the absolute calibration of photoelectric quantum efficiency*, *Physical review letters*, Vol. 117, No. 11, p. 110801.
- [47] T. Opatrny, G. Kurizki, and D.-G. Welsch (2000), *Improvement on teleportation of continuous variables by photon subtraction via conditional measurement*, *Physical Review A*, Vol. 61, No. 3, p. 032302.

Références

- [48]. P. T. Cochrane, T. C. Ralph, and G. J. Milburn (2002), Teleportation improvement by conditional measurements on the two-mode squeezed vacuum, *Physical Review A*, Vol. 65, No. 6, p. 062306.
- [49]. F. Dell'Anno, S. De Siena, L. Albano, and F. Illuminati (2007), Continuous-variable quantum teleportation with non-Gaussian resources *Physical Review A*, Vol. 76, No. 2, p. 022301.
- [50]. S. Olivares, M. G. A. Paris, and R. Bonifacio (2003), Teleportation improvement by inconclusive photon subtraction, *Physical Review A*, Vol. 67, No. 3, p. 032314.
- [51]. S. Olivares and M. G. A. Paris (2004), Enhancement of nonlocality in phase space *Physical Review A*, Vol. 70, No. 3, p. 032112.
- [52]. H. Adnane, M. Bina, F. Albarelli, A. Gharbi, and M. G. Paris (2019), Quantum state engineering by non-deterministic noiseless linear amplification, *Physical Review A*, Vol. 99, No. 6, p. 063823.
- [53]. D. Menzies and S. Croke (2009), Noiseless linear amplification via weak measurements, *quant-ph* 0903.4181.
- [54]. N. A. McMahon, A. P. Lund, and T. C. Ralph (2014), Optimal architecture for a non-deterministic noiseless linear amplifier, *Physical Review A*, Vol. 89, No. 2, p. 023846.
- [55]. S. Pandey, Z. Jiang, J. Combes, and C.M. Caves (2013), Quantum limits on probabilistic amplifiers, *Physical Review A*, Vol. 88, No. 3, p. 033852.
- [56]. S. M. Barnett and S. J. D. Phoenix (1989), Entropy as a measure of quantum optical correlation, *Physical Review A*, Vol. 40, No. 5, p. 2404.
- [57]. V. Vedral, M. B. Plenio, K. Jacobs, and P. L. Knight (1997), Statistical inference, distinguishability of quantum states, and quantum entanglement, *Physical Review A*, Vol. 56, No. 6, p. 4452.
- [58]. M. G. Genoni, M. G. A. Paris, and K. Banaszek (2008), Quantifying the non-Gaussian character of a quantum state by quantum relative entropy, *Physical Review A*, Vol. 78, No. 6, p. 060303.
- [59]. T. C. Ralph (2011), Quantum error correction of continuous-variable states against Gaussian noise, *Physical Review A*, Vol. 84, No. 2, p. 022339.
- [60]. H. Araki and E. H. Lieb (1970), Entropy inequalities, *Communications in Mathematical Physics*, Vol. 18, No. 2, pp 160-170.
- [61]. L.-M. Duan, G. Giedke, J. I. Cirac, and P. Zoller (2000), Inseparability Criterion for Continuous Variable Systems, *Physical Review Letters*, Vol. 84, No. 12, p. 2722.
- 952 Teleportation improvement by noiseless linear amplification
- [62]. T. C. Ralph and A. P. Lund (2009), Nondeterministic noiseless linear amplification of quantum systems, *AIP Conference Proceedings*. Vol. 1110. No. 1. AIP.
- [63]. G. Y. Xiang, T. C. Ralph, A. P. Lund, N. Walk, and G. J. Pryde (2010), Heralded noiseless linear amplification and distillation of entanglement, *Nature Photonics*, vol. 4, No. 5, p. 316.
- [64]. F. Ferreyrol, M. Barbieri, R. Blandino, S. Fossier, R. Tualle-Brouri, and P. Grangier (2010), Implementation of a nondeterministic optical noiseless amplifier, *Physical review letters* Vol. 104, No. 12, p. 123603.
- [65]. F. Ferreyrol, R. Blandino, M. Barbieri, R. Tualle-Brouri, and P. Grangier (2011), Experimental realization of a nondeterministic optical noiseless amplifier, *Physical Review A*, Vol. 83, No. 6, P. 063801.
- [66]. M. A. Usuga, C. R. Muller, C. Wittmann, P. Marek, R. Filip, C. Marquardt, G. Leuchs, and U. L. Andersen (2010), Noise-powered probabilistic concentration of phase information, *Nature Physics*, Vol. 6, No. 10, p. 767.
- [67]. J. Fiurasek (2009), Engineering quantum operations on travelling light beams by multiple photon addition and subtraction, *Physical Review A*, Vol. 80, No. 5, p. 053822.
- [68]. A. Zavatta, J. Fiurasek and M. Bellini (2011), A high-fidelity noiseless amplifier for quantum light state, *Nature Photonics* Vol. 5, No. 1, p. 52.
- [69]. J. Fiurasek and N. J. Cerf (2012), Gaussian post selection and virtual noiseless amplification in continuous-variable quantum key distribution, *Physical Review A*, Vol. 86, No. 6, p. 060302.
- [70]. N. Walk, T.C. Ralph, T. Symul, and P. K. Lam (2013), Security of continuous-variable quantum cryptography with Gaussian post selection, *Physical Review A*, Vol. 87, No. 2, p.

Références

020303.

- [71]. H. M. Chrzanowski, N. Walk, S. M. Assad, J. Janousek, S. Hosseini, T. C. Ralph, T. Symul, and P. K. Lam (2014), Measurement-based noiseless linear amplification for quantum communication, *Nature Photonics*, Vol. 8, No. 4, p. 333.
- [72]. J. Y. Haw, J. Zhao, J. Dias, S. M. Assad, M. Bradshaw, R. Blandino, T. Symul, T. C. Ralph, and P. K. Lam (2016), Surpassing the no-cloning limit with a heralded hybrid linear amplifier for coherent states, *Nature Communications*, Vol.7, p. 13222.
- [73]. S. Bose and M. Kumar (2018), Quantum Teleportation with a Class of Non-Gaussian Entangled Resources, *quant-ph/1804.00190*.
- [74]. S. J. van Enk (1999), Discrete formulation of teleportation of continuous variables, *Physical Review A*, Vol. 60, No 6, p. 5095.
- [75]. H. F. Hofmann, T. Ide, T. Kobayashi, and A. Furusawa (2000), Fidelity and information in the quantum teleportation of continuous variables, *Physical Review A*, Vol. 62, No. 6, p. 062304.
- [76]. P. Marian and T. A. Marian (2006), Continuous-variable teleportation in the characteristic-function description, *Physical Review A*, Vol. 74, No. 4, p. 042306.
- [77]. K. P. Seshadreesan, J. P. Dowling, and G. S. Agarwal (2015), Non-Gaussian entangled states and quantum teleportation of Schrodinger-cat states, *Physica Scripta*, Vol. 90, No. 7, p. 074029.
- [78]. S. L. Braunstein, C. A. Fuchs, and H. J. Kimble (2000), Criteria for continuous-variable quantum teleportation, *Journal of Modern Optics*, Vol. 47, No. 2-3, p. 267-278.
- [79]. T. C. Ralph and P. K. Lam (1998), Teleportation with Bright Squeezed Light, *Physical review letters*, Vol. 81, No. 25, p. 5668.
- [80]. N. J. Cerf, A. Ipe, and X. Rottenberg (2000), Cloning of Continuous Quantum Variables, *Physical Review Letters*, Vol. 85, No. 8, p. 1754.
- [81]. F. Grosshans and P. Grangier (2001), Quantum cloning and teleportation criteria for continuous quantum variables, *Physical Review A*, Vol. 64, No. 1, p. 010301.
- [82]. S.-Y. Lee, S.-W. Ji, H.-J. Kim, and H. Nha (2011), Enhancing quantum entanglement for continuous variables by a coherent superposition of photon subtraction and addition, *Physical Review A*, Vol. 84, No. 1, p. 012302.