

N° d'ordre :

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ AKLI MOHAND OULHADJ DE BOUIRA
FACULTÉ DES SCIENCES ET DES SCIENCES APPLIQUÉES



MÉMOIRE

Présenté par

REDAOUI AHLAM

Pour l'obtention du diplôme de : **Master**

Filière : *Mathématiques*

Spécialité : *Analyse Mathématique et applications*

Sujet :

Étude des Systèmes Bio-mathématiques

Soutenu publiquement, le 02/07/2023, devant le jury composé de :

| | | |
|----------------------------------|----------------------------------|--------------|
| Dr. BOUDREF Mohamed Ahmed | Maître de conférences classe -A- | Président |
| Dr. BERKANI Amirouche | Maître de conférences classe -A- | Encadreur |
| Mme. MELOUNE Nacima | Maître assistante classe -A- | Examinatrice |

Promotion 2022/2023

Remerciements

Je remercie avant tout Allah qui m'a donné la force et la volonté pour achever ce travail.

En premier lieu, je tiens à remercier chaleureusement **Dr. BERKANI Amirouche**, enseignant à l'université de Bouira, pour son aide, sa disponibilité, son dynamisme et sa gentillesse. Il a su me guider avec un enthousiasme constant et communicatif. Pendant ces années, il m'a témoigné sa confiance. Ses grandes qualités scientifiques et humaines ont été indispensables à l'élaboration de cette thèse. Pour tout cela, je ne l'en remercierai jamais assez.

Merci au membres de jury, d'avoir accepté d'examiner ce travail et faire partie du jury, et nous les en remercions sincèrement.

Sans oublier de remercier tous nos enseignants pendant tous les paliers de notre parcours, et exceptionnellement aux enseignants qui ont enrichi nos connaissances.

Enfin, toute personne ayant aidé de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire est vivement remerciée.

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| Remerciements | i |
| Table des matières | iv |
| Introduction générale | 1 |
| 1 Quelques résultats de base | 2 |
| 1.1 Équations différentielles d'ordre 1 | 2 |
| 1.1.1 Prolongement d'une solution : solutions maximales | 2 |
| 1.1.2 Équations autonomes | 3 |
| 1.2 Problème de Cauchy | 3 |
| 1.2.1 Fonction lipschitzienne, localement lipschitzienne | 4 |
| 1.3 Problèmes d'existances | 5 |
| 1.3.1 Existence locale (théorème de Cauchy lipschitz) | 5 |
| 1.3.2 Explosion de la solution maximale | 5 |
| 1.3.3 Existence Globale | 6 |
| 1.3.4 Quelques résultats concernant le cas d'un système autonome | 6 |
| 1.4 Notion sur la stabilité | 7 |
| 1.4.1 Point d'équilibre | 7 |
| 1.4.2 Stabilité local de l'état d'équilibre $E = 0$ | 8 |

Table des matières

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1.4.3 | Stabilité asymptotique globale | 8 |
| 1.4.4 | Stabilité dans le cas linéaire | 8 |
| 1.4.5 | Stabilité dans le cas non linéaire | 10 |
| 1.4.6 | Théorie de Lyapunov | 11 |
| 2 | Étude qualitative de système de Lotka-Volterra | 12 |
| 2.1 | Formulation mathématique du problème | 12 |
| 2.1.1 | Description des variables | 12 |
| 2.1.2 | Système d'équations | 13 |
| 2.2 | Existence de solutions | 15 |
| 2.2.1 | Existence locale | 15 |
| 2.2.2 | Existante Globale | 16 |
| 2.3 | Positivité des solutions | 17 |
| 2.4 | Bornitude de solutions | 18 |
| 2.5 | Étude des points d'équilibre | 19 |
| 2.5.1 | Étude de point d'équilibre $O(0,0)$ | 19 |
| 2.5.2 | Étude de point d'équilibre $\theta\left(\frac{\sigma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$ | 20 |
| 2.6 | Étude globale des solutions | 24 |
| 2.6.1 | Périodicité des solutions | 24 |
| 3 | Étude de quelques modèles de dynamique des populations | 28 |
| 3.1 | Modèle logistique | 28 |
| 3.2 | Différentes formulations de la fonction réponse du prédateur | 31 |
| 3.3 | Modèle de Lotka-Volterra avec réponse fonctionnelle de Holling de type II . . . | 33 |
| 3.4 | Modèle logistique de Lotka-Volterra dans le cas d'une réponse fonctionnelle de Holling type II | 35 |
| 3.5 | Modèle logistique de Lotka-Volterra dans le cas d'une réponse fonctionnelle de Holling type III | 37 |

Table des matières

| | | |
|----------|---|-----------|
| 4 | Approximation numérique des solutions du système de Lotka-Volterra | 42 |
| 4.1 | Rappels sur les méthodes numériques | 42 |
| 4.1.1 | Quelque méthodes classiques | 42 |
| 4.1.2 | Notions de consistance et de stabilité | 44 |
| 4.1.3 | Quelques définitions utiles | 44 |
| 4.2 | Application au système de Lotka-Volterra | 45 |
| 4.2.1 | Visualisation des solutions numériques | 45 |
| 4.2.2 | Étude théorique des schémas dans le cas linéaire | 47 |
| | Conclusion | 49 |
| | Bibliographie | 50 |

Introduction générale

Les mathématiques ont des relations privilégiées, sans équivalent du côté des autres disciplines scientifiques, telles que la chimie et la biologie par l'utilisation de ces domaines comme les équations différentielles. Elles sont étudiées depuis l'invention du calcul différentiel par Newton en 1671. La description mathématique de plusieurs systèmes conduit à des équations ou systèmes différentielles pour lesquels il convient de rechercher les solutions stationnaires ou périodiques et d'étudier leurs propriétés de stabilité. Ces équations différentielles sont présentées par des modèles mathématiques qui ont été développées depuis 2000 ans.

La dynamique des populations est une partie de la biologie mathématique qui a pour but la description, en termes de modèles mathématiques, de l'interaction entre différents types de populations dans un milieu donné (ex : populations animales en écologie, populations cellulaires en biologie, populations virales en épidémiologie). Ces modèles sont gouvernés par des équations d'évolutions telles par exemple des équations aux différences, fonctionnelles, à retards, aux dérivées partielles ou stochastiques. Un problème central est l'étude du comportement asymptotique des solutions des équations ou des systèmes modélisant ces phénomènes.

Dans ce mémoire, nous allons étudier quelques modèles mathématiques de deux populations en interaction.

Chapitre 1

Quelques résultats de base

Dans ce chapitre, nous allons présenter d'abord quelques notions fondamentales qui nous seront utiles par la suite. Pour les démonstrations, voir [2], [7] et [8].

1.1 Équations différentielles d'ordre 1

Soit $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction définie par $g(t, y) = (g_1(t, z), g_2(t, z), \dots, g_m(t, z))$ avec U est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$. On pose :

$$z' = g(t, z(t)) \tag{1.1}$$

pour tout $t \geq 0$.

1.1.1 Prolongement d'une solution : solutions maximales

Définition 1.1.1 Soient $(\chi, J), (\omega, J')$ deux solutions de (1.1). On dit que (ω, J') prolonge (χ, J) si $J \subset J'$ et $\omega \equiv \chi$ sur J . Une solution (ω, J) de (1.1) est dite maximale si elle n'admet aucun prolongement. Si $J = I$, la solution maximale (ω, J) de (1.1) est appelé solution globale.

1.2. Problème de Cauchy

1.1.2 Équations autonomes

L'équation (1.1) est dite autonome si g ne dépend pas de t , et non autonome sinon. Une équation différentielle autonome est donc du type :

$$z' = g(z(t)) \quad (1.2)$$

pour tout $t \geq 0$.

Remarque 1.1.1 Une équation non-autonome dans \mathbb{R}^m peut être résolue via une équation autonome auxiliaire dans \mathbb{R}^{m+1} . En effet, associons à l'équation non autonome (1.1), avec $g := I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, l'équation autonome :

$$X' = f(X(t)) \quad (1.3)$$

avec, $f := I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ telle que $f(X) = (1, g(X))$. On vérifie que $z : J \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une solution de (1.1) si et seulement si, la fonction $X : J \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ définie par $X(t) = (t, z(t))$ est une solution de (1.3). On peut donc déduire les solutions de (1.1) des solutions de (1.3). En revanche, le fait qu'on puisse le faire en théorie implique qu'il suffit de démontrer certains résultats pour les équations autonomes.

1.2 Problème de Cauchy

Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} z' = g(t, z(t)) \\ z(t_0) = z_0 \end{cases} \quad (1.4)$$

avec $t_0 \in I, z_0 \in \Omega$ et $g : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ une fonction continue.

Définition 1.2.1 Soit $(t_0, z_0) \in U (= I \times \Omega)$. Résoudre le problème de Cauchy (1.4) consiste à déterminer (χ, J) où J est un intervalle contenant t_0 et $\chi : J \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction dérivable (en fait de classe C^1) sur J telle que $J \subset I$ et pour tout $t \in J$, nous avons :

1.2. Problème de Cauchy

$$\chi(t) \in \Omega, \text{ et } \chi' = g(t, \chi(t)).$$

Par exemple, dans le cas scalaire, pour le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} z' - z - t = 0 \\ z_0 = 1 \end{cases}$$

nous avons $g: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$, $g(t, z) = z + t$, ce problème admet la solution maximal unique $\chi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\chi(t) = 2\exp(t) - (t+1)$, car : $\chi'(t) - \chi(t) - t = 0$ et $\chi(0) = 1$. Un problème de Cauchy peut ne pas avoir de solutions si g n'est pas continue et peut avoir plusieurs solutions maximales (même si g est continue).

1.2.1 Fonction lipschitzienne, localement lipschitzienne

Définition 1.2.2 Soit $g: U = I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction ($m \geq 1$). On dira que g est Lipschitzienne en z (uniformément par rapport à t), et on notera $g \in Lip(U)$, s'il existe $k > 0$ tel que :

$$\|g(t, z_2) - g(t, z_1)\|_{\mathbb{R}^m} \leq k \|z_2 - z_1\|_{\mathbb{R}^m}$$

pour tout $(t, z_1), (t, z_2) \in U$.

Définition 1.2.3 On dira que la fonction g est localement Lipschitzienne sur U si pour tout $(t_1, z_1) \in U$, s'il existe un domaine $B = \{(t', z') \in U; |t' - t_1| < \varepsilon_1 \text{ et } \|z' - z_1\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon_2\}$ et une constante $k > 0$ telles que g soit Lipschitzienne sur B . On note alors $g \in Lip_{loc}(U)$.

Cas particulier : Soit $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction où Ω est un ouvert de \mathbb{R}^m ($m \geq 1$) c'est-à-dire que g ne dépend pas de t . Dans ce cas là g est dite lipschitzienne de rapport k sur Ω et on note $g \in Lip(\Omega)$, s'il existe $k > 0$ tel que :

$$\|g(z_2) - g(z_1)\|_{\mathbb{R}^m} \leq k \|z_2 - z_1\|_{\mathbb{R}^m}$$

De même, g est dite localement Lipschitzienne sur Ω si pour tout $z_1 \in \Omega$, il existe une boule $B = \{z' \in \Omega; \|z' - z_1\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon\}$ et une constante $K > 0$ telles que g soit Lipschitzienne sur B . On note alors $g \in Lip_{loc}(\Omega)$.

1.3 Problèmes d'existances

On rappelle dans ce paragraphe les résultats classiques concernant l'existence de solutions pour les systèmes différentielle, en particulier les systèmes autonomes.

1.3.1 Existence locale (théorème de Cauchy lipschitz)

Théorème 1.3.1 Soit $g : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}_m$ une fonction continue et localement Lipschitzienne en $z \in \Omega$, uniformément en $t \in I$. Pour tout $(t_0; z_0) \in U \times \Omega$, le problème de Cauchy (1.4) admet une solution maximal unique $\chi_{max} : J_{max} \rightarrow \mathbb{R}^m$ où l'intervalle $J_{max} \subset I$ est ouvert.

Remarque 1.3.1 Les solutions de (χ, J) du problème de Cauchy sont exactement les restrictions de l'unique solution maximal χ_{max} c'est-à-dire que les couples $(\chi_{max|J})$ avec J est un sous-intervalle de J_{max} .

De ce fait et sauf indication contraire, on ne s'intéressera plus qu'aux solution maximales par la suites.

1.3.2 Explosion de la solution maximale

Sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz, soit $(\chi,]T_-, T_+])$ la solution maximal du problème de Cauchy (1.4). Le théorème suivant nous dit que si $T_+ < \sup I$ où $T_- > \inf I$, la solution maximal explose au voisinage de T_+ et T_- .

Théorème 1.3.2 Soit $g : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}_m$ une fonction continue et localement lipshitzienne par rapport à second variable. Si $T_+ < \sup I$, alors pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $t_K \in]T_-, T_+[$ tel que $\chi(t_K) \notin K$.

Corollaire 1.3.2 si $\Omega = \mathbb{R}_m$, avec les hypothèses de Cauchy-Lipschitz, soit $(\chi,]T_-, T_+])$ la solution maximale du problème (1.4), si $T_+ < \sup I$, alors on a :

$$\lim_{t \rightarrow T_+} \|\chi(t)\| = +\infty.$$

1.3. Problèmes d'existances

1.3.3 Existence Globale

Le résultat sur l'existence d'une solution globale est donné par le théorème suivant :

Théorème 1.3.3 Soit $g \in C(I \times \mathbb{R}_m; \mathbb{R}_m)$ est globalement Lipschitzienne par rapport à z alors, quel que soit $(t_0, z_0) \in I \times \mathbb{R}_m$, il existe une unique solution globale $\chi : I \rightarrow \mathbb{R}_m$ du problème (1.4). De plus, toute solution locale est une restriction de celle-ci.

1.3.4 Quelques résultats concernant le cas d'un système autonome

Soit le problème de Cauchy associé au système différentielle autonome suivant :

$$\begin{cases} z'(t) = g(z(t)) \\ z(0) = z_0 \end{cases} \quad (1.5)$$

où $g : \Omega \subset \mathbb{R}_m \rightarrow \mathbb{R}_m$ et Ω est un ouvert de \mathbb{R}_m contenant z_0 .

Corollaire 1.3.3 Si la fonction f est localement Lipschitzienne sur Ω , alors le problème (1.5) admet une solution maximale unique $z \in C^1((-T, T), \mathbb{R}_m)$.

Définition 1.3.1 On appelle **trajectoire (où orbite)** partant de z_0 l'ensemble

$$O_{z_0} = \{\chi(t); t \in]-T, T[\}$$

où $(\chi,]-T, T[)$ est la solution maximale correspondante à la condition initial $\chi(0) = z_0$.

Selon le théorème de Cauchy-Lipschitz, et l'explosion de la solution maximale on déduit que :

Corollaire 1.3.4 Deux trajectoires distinctes sont disjointes.

Définition 1.3.2 On appelle **portrait de phase** la partition de Ω en trajectoires .

En pratique, on peut tracer le portrait de phase sans résoudre explicitement l'équation ce qui ne permet d'avoir des informations importantes sur le comportement qualitatif des solutions.

Théorème 1.3.4 Soit $(\chi,]-T, T[)$ la solution maximale de (1.5). Si χ est bornée sur $[0, T[$, alors on a : $T = +\infty$.

1.4 Notion sur la stabilité

Considérons le système continu de dimension finie décrit par une équation différentielle autonome vectorielle non-linéaire du premier ordre :

$$z'(t) = g(z(t)) \tag{1.6}$$

c'est à dire que $g : \mathbb{R}_m \longrightarrow \mathbb{R}_m$ où $(m > 1)$ est une fonction vérifiant au moins les conditions de Cauchy-Lipschitz, avec $t \geq 0$.

1.4.1 Point d'équilibre

Définition 1.4.1 Un vecteur $E \in \mathbb{R}_m$ est dit point ou état d'équilibre si $g(E) = 0$. La trajectoire de cette équilibre est réduite au point E .

Remarque 1.4.1 Le point d'équilibre $z \equiv E$ est l'unique solution de (1.6) avec la condition initial $z(t_0) = E$ avec $t_0 \geq 0$. En effet, pour $z \equiv E$, on a $E' = 0 = g(E)$ et $z(t_0) = E$.

Remarquons aussi qu'en posant $f(z_1) = g(z_1 + E)$, on vérifie que E est un point d'équilibre de (1.6) si et seulement si 0 est un point d'équilibre de $z_1' = f(z_1)$. Danc, sans perte de généralité, les définitions et théorèmes qui suivent seront établis en considérons $E = 0$.

Exemple 1.4.1 Soit le système différentielle suivant :

$$(S) \begin{cases} x' = 10(z - x) \\ z' = 28x - z - xy \\ y' = xz - \frac{8}{3}y. \end{cases}$$

Dans (S), on a $f : \mathbb{R}_3 \longrightarrow \mathbb{R}_3$ telle que $g(x, z, y) = \left[10(z - x), 28x - z - xy, xz - \frac{8}{3}y \right]$ et $E = (0, 0, 0)$ est l'unique état d'équilibre pour ce système car c'est la solution unique de l'équation $g(x, z, y) = (0, 0, 0)$.

1.4. Notion sur la stabilité

1.4.2 Stabilité local de l'état d'équilibre $E = 0$

Soit $\chi(t, z_0)$ la solution unique du problème de (1.6) avec la condition initial $z(0) = z_0$ c'est à dire $\chi'(t, z_0) = g(\chi(t, z_0))$ et $\chi(0, z_0) = z_0$.

Définition 1.4.2 L'état d'équilibre $E = 0$ du système (1.6) est :

1. **Stable** : si,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : \|z_0\| < \eta \implies, \forall t > 0, \|\chi(t, z_0)\| < \varepsilon.$$

2. **Instable** : s'il n'est pas stable.

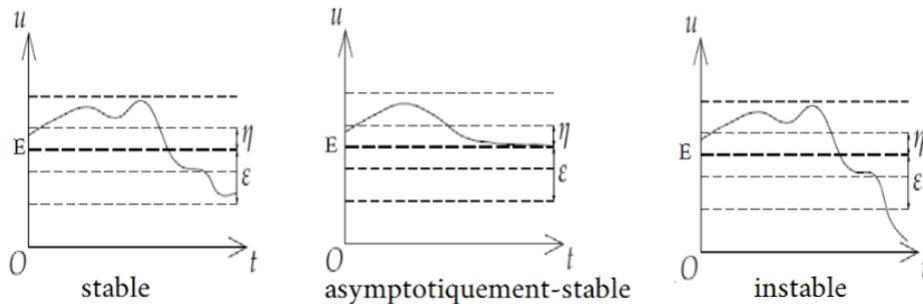
3. **Asymptotiquement stable** : s'il est stable et si ;

$$\exists \eta > 0 : \|z_0\| < \eta \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\varphi(t, z_0)\| = 0.$$

4. **Marginalement stable** : s'il est stable sans être asymptotiquement stable .

1.4.3 Stabilité asymptotique globale

Définition 1.4.3 Si le système est asymptotiquement stable quelque soit le vecteur d'état initial z_0 , alors le point d'équilibre est globalement asymptotiquement (ou exponentiellement) stable. Les dessins qui suivent illustrent les notions qui viennent d'être introduites.



1.4.4 Stabilité dans le cas linéaire

Pour le système différentiel linéaire :

$$z'(t) = A.z(t) \tag{1.7}$$

où $A \in M_m(\mathbb{R})$ est une matrice constante . On s'intéresse au point d'équilibre $E = 0$.

1.4. Notion sur la stabilité

1.4.4.1 Nature des points d'équilibre

Théorème 1.4.1 Soit le système différentiel linéaire (1.7) et soient λ_1 et λ_2 les valeurs propres de cette matrice. On distingue les différents cas selon ces valeurs propres :

1. Si λ_1 et λ_2 sont réelles non nulles et de signe différent, alors le point critique $E = 0$ est un point selle, il est toujours **instable**.

2. Si λ_1 et λ_2 sont réelles de même signe, on a trois cas :

(a) : Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$; le point critique $E = 0$ est un **noeud stable**.

(b) : Si $0 < \lambda_1 < \lambda_2$; le point critique $E = 0$ est un **noeud instable**.

(c) : Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$; le point critique $E = 0$ est un **noeud propre stable** si $\lambda < 0$ et **instable** si $\lambda > 0$.

3. Si λ_1 et λ_2 sont des complexes conjuguées et $Im(\lambda_{1;2}) \neq 0$, alors le point critique $E = 0$ est un **foyer**. Il est **stable** si $Re(\lambda_{1;2}) < 0$ et **instable** si $Re(\lambda_{1;2}) > 0$.

4. Si λ_1 et λ_2 sont imaginaires pures, alors le point critique $E = 0$ est un **centre**, il est **stable** mais pas **asymptotiquement stable**.

1.4.4.2 Stabilité des points d'équilibres

L'étude de la stabilité d'un point d'équilibre nous amène à connaître le comportement des trajectoires voisines de ce point d'équilibre.

Théorème 1.4.2 Le point d'équilibre $E = 0$ du système linéaire (1.7) est :

1. **Stable**, si A est diagonalisable et ses valeurs propres ont des parties réelles négatives ou nulles.

2. **Asymptotiquement stable**, si toutes les valeurs propres de A ont leur partie réelle strictement négative.

3. **Instable**, si l'une au moins des valeurs propres de A est de partie réelle strictement positive.

Remarque 1.4.2 Le cas (1) peut être exprimé autrement : le point d'équilibre $E = 0$ du système linéaire (1.7) est stable si pour toute valeur propre λ de la matrice A , on a :

1.4. Notion sur la stabilité

1. $Re(\lambda) \leq 0$ et

2. $Re(\lambda) = 0 \implies \dim \ker(A - \lambda I) = p$ où p est l'ordre de multiplicité de la racine λ du polynôme $\det(XI - A)$.

1.4.5 Stabilité dans le cas non linéaire

Dans le cas non linéaire on utilise : la linéarisation autour d'un équilibre.

Supposons que E est un point d'équilibre pour le système différentiel suivant :

$$z'(t) = g(z(t)), \quad (1.8)$$

et que g est différentiable en E . Pour approcher la fonction $g(z(t))$, formons au voisinage de E sa matrice Jacobienne : $Dg(E) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq m}$ où les dérivées partielles sont calculées au point E . L'approximation affine de g s'écrit sous la forme :

$$g(z) = g(E) + Dg(E).(z - E) = Dg(E).u$$

où $u = z - E$, ce qui montre qu'au voisinage de E nous avons

$$u' = z' - E' = Dg(E).u$$

car $g(E) = 0$.

Définition 1.4.4 On appelle système linéarisé autour de E associé au système non linéaire (1.8) le système linéaire :

$$u' = Dg(E).u$$

Théorème 1.4.3 Si le système (1.8) est linéarisable autour de E , alors :

1. le point d'équilibre E est stable si et seulement si l'origine est stable pour le système linéarisé.

2. le point d'équilibre E est asymptotiquement stable si et seulement si l'origine est asymptotiquement stable pour le système linéarisé.

1.4. Notion sur la stabilité

1.4.6 Théorie de Lyapunov

On considère toujours $g(0) = 0$ et on regarde le point d'équilibre 0.

Définition 1.4.5 Soit V un voisinage de 0 dans Ω et $\mathcal{L} : V \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et différentiable sur $V \setminus \{0\}$ telle que :

- 1) $\mathcal{L}(0) = 0$ et $\forall v \neq 0, \mathcal{L}(v) > 0$.
- 2) $\mathcal{L}'(v) = \langle g(v), \nabla \mathcal{L}(v) \rangle \leq 0, \forall v \in V \setminus \{0\}$.

La fonction \mathcal{L} s'appelle la **fonction de Lyapunov**.

L'utilité des fonctions de Lyapunov réside dans le résultat suivante :

Théorème 1.4.4 (Lyapunov). S'il existe une fonction de Lyapunov pour l'équation :

$$\begin{cases} z'(t) = g(z(t)) \\ z(0) = 0 \end{cases}$$

où $g : \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $z_0 \in \Omega$. Alors le point d'équilibre 0 est stable.

Le théorème précédente ne fournit qu'une condition suffisante, mais permet souvent de conclure quand la méthode de linéarisation ne s'applique pas.

Théorème 1.4.5 Soient M un espace vectoriel normé réel, N un ouvert de M et $g : N \subset M \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable en un point $\varphi \in N$, et leur dérivées partielles secondaires sont existents et continues en φ .

S'il existe un voisinage U de φ et $U \subset N$, et g vérifie ce que suit :

1. $Dg(\varphi) = 0$ c'est-à-dire $\forall i = 1, 2, \dots, n : \frac{\partial g(\varphi)}{\partial x_i} = 0$.
2. $\forall h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in U; h \neq 0 : D^2g(\varphi)(h, h) > 0$ c'est-à-dire

$$\forall h = h = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in U; \quad h \neq 0 : \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2 g(\varphi)}{\partial x_i \partial x_j} > 0.$$

Alors g admet en φ un minimum local (ou relatif).

Chapitre 2

Étude qualitative de système de Lotka-Volterra

L'objet de ce chapitre est l'étude qualitative d'un modèle mathématique appliqué à la dynamique des populations. On étudie plus particulièrement la dynamique de modèle proie-prédateur présenté par un système autonome de deux équations différentielles ordinaires de premier ordre avec des conditions initiales positives.

2.1 Formulation mathématique du problème

2.1.1 Description des variables

On s'intéresse à l'évolution au cours du temps d'un système biologique composé de deux espèces : espace des proies (Gazelles ou sardines) et espace des prédateurs (Lions ou requins, respectivement).

Si, on note $X(t)$ le nombre de proies et $Z(t)$ le nombre de prédateurs à l'instant t . Donc $X : t \mapsto X(t)$ et $Z : t \mapsto Z(t)$ sont des fonctions de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{N} , alors elles sont discontinues.

Maintenant, si on considère deux nouvelles quantités :

$$x(t) = \frac{X(t)}{X_0} \quad \text{et} \quad z(t) = \frac{Z(t)}{Z_0}$$

2.1. Formulation mathématique du problème

avec X_0 est un nombre de proies et, Z_0 est un nombre de prédateurs, fixés et grands. Les quantités x et z sont donc des proportions de proies et prédateurs respectivement. Les variations de $x(t)$ et $Z(t)$ sont donc des quantités petites, si bien que l'on peut faire l'hypothèse que $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto z(t)$ sont des fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} (car : X_0 étant très grand par rapport à la différence $X(t_1) - X(t_2)$ d'où $x(t_1) - x(t_2)$ est très petit).

Pour la suite, on pose l'hypothèse de régularité supplémentaire de supposer ces fonctions sont dérivables. On définit le taux de variation sur un intervalle $[t; t + \Delta t]$ comme suit :

$$\frac{\Delta X(t)}{X(t)} \quad \text{tel que} \quad \Delta X(t) = \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t}.$$

D'où pour $t \in [t; t + \Delta t]$, on aura

$$\frac{\Delta x(t)}{x(t)} = \frac{\Delta X(t)}{X(t)}$$

En effet, on

$$\Delta x(t) = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{\frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{X_0}}{\Delta t} = \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{X_0 \Delta t}.$$

Si on passe à la limite, on obtient

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x(t)}{x(t)} = \frac{x'(t)}{x(t)}.$$

D'une manière analogue, on aura aussi

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z(t)}{z(t)} = \frac{z'(t)}{z(t)}.$$

Ici, $\frac{x'(t)}{x(t)}$ est le taux de variation de la population de proies et $\frac{z'(t)}{z(t)}$ est le taux de variation de la population de prédateurs.

2.1.2 Système d'équations

1)- En absence de prédateurs, les proies auraient une croissance exponentielle, car dans ce cas, on aurait $\frac{x'(t)}{x(t)} = \alpha$ (où $\alpha > 0$ est le taux de naissance). C'est l'équation de reproduction normale d'une populations biologique en supposant l'abondance de nourriture et l'absence de compétition (c'est-à-dire que les individus se comportent comme s'ils étaient isolés et équivalents).

2.1. Formulation mathématique du problème

2)- En absence de proies, les prédateurs auraient une décroissance exponentielle, faute de nourriture, car on aurait $\frac{z'(t)}{z(t)} = -\sigma$ (où $\sigma > 0$ est le taux de mort) . C'est l'équation qui régit la décadence d'une populations biologique).

3)- Si les deux espèces sont présents, on prend en compte les interactions entre les deux espèces. dans ce cas on suppose que le taux de prédation (capture) des proies est proportionnel au nombre de rencontres entre les prédateurs et les proies, représenté par : βz avec $\beta > 0$ est le taux de la mortalité des proies dû aux prédateurs. De la même façon, le taux de variation du nombre de prédateurs est proportionnel à la quantité de nourriture à leur disposition, c'est-à-dire au nombre de proies représenté par δx , avec $\delta > 0$ est le taux de croissance relative des prédateurs dû à l'abondance de nourriture (les proies).

Ces considérations nous conduisent aux système d'équations différentielles suivantes :

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = \alpha - \beta z \quad \text{et} \quad \frac{z'(t)}{z(t)} = -\sigma + \delta x$$

avec α, β, σ et δ sont des constante positives.

Du point de vue mathématique, il s'agit d'un système de deux équations différentielles, auquel on ajoute des conditions initiales (population au départ de chacune des espèces) :

$$(S) \begin{cases} x'(t) = x(\alpha - \beta z) \\ z'(t) = z(-\sigma + \delta x) \end{cases} \quad (2.1)$$

avec les conditions initiales

$$x(0) = x_0 \quad z(0) = z_0, \quad x_0, z_0 > 0.$$

Le système (S) est appelé système de **Lotka-Volterra**.

2.2 Existence de solutions

2.2.1 Existence locale

Si on pose $v = (x, z)$, alors le système (S) est équivalent à :

$$\begin{cases} v' = g(v(t)) \\ v(0) = (x_0, z_0) \end{cases}$$

avec $g(x, z) = (x(\alpha - \beta z), z(-\sigma + \delta x))$ où $(\alpha, \beta, \sigma, \delta > 0)$ et $(x(0), z(0)) = (x_0, z_0)$ et $x_0, z_0 > 0$.

Soit $v(x_0, z_0) \subset C([0, T], \mathbb{R}^2)$, un voisinage de (x_0, z_0) tel que :

$$v(x_0, z_0) = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| < \xi \text{ et } |z - z_0| < \eta\} :$$

avec $\xi > 0, \eta > 0$, muni de la norme : $\|v\| = \|(x, z)\| = |x| + |z|$.

Pour tout $v_1, v_2 \in v(x_0, z_0)$ on a :

$$\begin{aligned} \|g(v_1(t)) - g(v_2(t))\| &= \|(x_1(\alpha - \beta z_1), z_1(-\sigma + \delta x_1)) - (x_2(\alpha - \beta z_2), z_2(-\sigma + \delta x_2))\| \\ &= \|(\alpha(x_1 - x_2) + \beta(x_1 z_1 - x_2 z_2), -\sigma(z_1 - z_2) + \delta(z_1 x_1 - z_2 x_2))\| \\ &\leq \alpha|x_1 - x_2| + \beta|x_1 z_1 - x_2 z_2| + \sigma|z_1 - z_2| + \delta|z_1 x_1 - z_2 x_2| \\ &\leq \alpha|x_1 - x_2| + \sigma|z_1 - z_2| + (\beta + \delta)|x_1 z_1 - x_2 z_2| \\ &\leq \alpha|x_1 - x_2| + \sigma|z_1 - z_2| + (\beta + \delta)|z_1||x_1 - x_2| + (\beta + \delta)|x_2||z_1 - z_2| \\ &\leq (\alpha + (\beta + \delta)|z_1|)|x_1 - x_2| + (\sigma + (\beta + \delta)|x_1|)|z_1 - z_2| \\ &\leq (\alpha + (\beta + \delta)(\eta + |z_0|))|x_1 - x_2| + (\sigma + (\beta + \delta)(\xi + |x_0|))|z_1 - z_2|, \\ &\quad \text{car, } |x| \leq \xi + |x_0|; |z| \leq \eta + |z_0| \\ &\leq k_1|x_1 - x_2| + k_2|z_1 - z_2|, \text{ tel que :} \\ &\quad k_1 = \alpha + (\beta + \delta)(\eta + |z_0|), k_2 = \sigma + (\beta + \delta)(\xi + |x_0|) \\ &\leq k(|x_1 - x_2| + |z_1 - z_2|), \text{ tel que : } k = \max(k_1, k_2) \\ &\leq k\|v_1(t) - v_2(t)\|. \end{aligned}$$

Alors la fonction g est localement lipschitzienne, donc le système (S) admet une unique solution maximal $v \in C([0, T], \mathbb{R}^2)$ d'après le théorème (1.3.1).

2.2. Existence de solutions

2.2.2 Existante Globale

L'existence globale de solutions est donné par le lemme suivant :

Lemme 2.2.1 Soit $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour $x, z > 0$ par :

$$F(x, z) = \delta x - \sigma \ln x + \beta y - \alpha \ln z \quad \text{où } (\alpha, \beta, \sigma, \delta > 0).$$

Alors, F est une intégrale première pour le système (S) c'est-à-dire, si $(x(t), z(t))$ est une solution de (S) sur $[0, T]$ alors on a

$$\forall t \in [0, T]; \quad F(x(t), Z(t)) = cste$$

pour tout $T > 0$.

Preuve. On a :

$$\begin{aligned} (S) &\Rightarrow \frac{x'}{z'} = \frac{x(\alpha - \beta z)}{z(-\sigma + \delta x)} \\ &\Rightarrow \frac{x'(-\sigma + \delta x)}{x} = \frac{z'(\alpha - \beta z)}{z} \quad (\text{après séparation des variables}) \\ &\Rightarrow -\sigma \frac{x'}{x} + \delta x' = \alpha \frac{z'}{z} - \beta z' \\ &\Rightarrow \int_0^t \left(-\sigma \frac{x'(s)}{x(s)} + \delta x'(s) \right) ds = \int_0^t \left(\alpha \frac{z'(s)}{z(s)} - \beta z'(s) \right) ds \\ &\Rightarrow [-\sigma \ln(x(s)) + \delta x(s)] = [\alpha \ln(z(s)) - \beta z(s)] \\ &\Rightarrow -\sigma \ln x + \delta x = \alpha \ln z - \beta z + cste \\ &\Rightarrow F(x(t), z(t)) = \text{constante}. \end{aligned}$$

pour tout $t \in [0, T]$.

Lemme 2.2.2 Sur tout point $M(x, z)$, le gradient de F est perpendiculaire au champ de vecteur $v' = \begin{pmatrix} x' \\ z' \end{pmatrix}$ où (x, z) est une solution de système (S).

2.3. Positivité des solutions

Preuve. On a le gradient de $F : \nabla F(x, z) = \left(\frac{\partial F(x, z)}{\partial x}, \frac{\partial F(x, z)}{\partial z} \right) = \left(\delta - \frac{\delta}{x}, \beta - \frac{\alpha}{z} \right)$. Alors, on obtient :

$$\begin{aligned} \langle v', \nabla F(v) \rangle &= (\alpha x - \beta x z) \left(\delta - \frac{\sigma}{x} \right) + (-\sigma x + \delta x z) \left(\frac{\alpha}{z} \right) \\ &= \alpha \delta x - \alpha \sigma - \beta \delta x z + \beta c z + \alpha \sigma + \beta \delta x z - \alpha \delta x \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'où le gradient de F est perpendiculaire au champ de vecteur $(x', z')^t$ pour le système (S). La connaissance de cette intégrale première nous permet de montrer que (x, z) sont bornées.

2.3 Positivité des solutions

On a le résultat suivant :

Lemme 2.3.1 1)- Si $x_0 = 0$, donc $\forall t \in [0, T]$, $x(t) = 0$.

2)- S'il existe $t_0 < T$, tel que $x(t_0) = 0$, alors $\forall t \in [0, T]$, $x(t) = 0$.

3)- Si $x_0 > 0$, donc $\forall t \in [0, T]$, $x(t) > 0$.

Preuve. 1)- Si $x_0 = 0$, le système (S) devient :

$$\begin{cases} x'(t) = 0 \\ z'(t) = z(-\sigma + \delta x) \end{cases} \quad (2.2)$$

$$x'(t) = 0 \implies \int_0^t x'(s) ds = \int_0^t 0 ds \implies x(t) - x(0) = 0 \implies x(t) = x_0 = 0.$$

$$\text{D'où } z'(t) = -\sigma z \implies z = z_0 e^{-\sigma t}.$$

Alors, la solution de système (S) est : $(0, z_0 e^{-\sigma t})$ donc $\forall t \in [0, T]$, $x(t) = 0$. On voit ainsi que les ensembles de la forme $\{0\} \times]0, z_0[$ sont des trajectoires.

2)- S'il existe $t_0 < T$ tel que $x(t_0) = 0$, alors la trajectoire associée coupe l'axe des ordonnées, ce qui est interdit par le corollaire (1.3.4).

3)- Supposons que $x_0 > 0$ et $\exists t_1 \in]0, T] : x(t_1) = 0$, alors d'après le deuxième cas, on a $x_0 = 0$ alors, contradiction. Donc, $\forall t \in [0, T]$, $x(t) > 0$.

2.4. Bornitude de solutions

D'une manière analogue, on démontre le lemme suivant :

Lemme 2.3.2 1)- Si $z_0 = 0$, donc $\forall t \in [0, T]$, $z(t) = 0$.

2)- S'il existe $t_0 < T$, tel que $z(t_0) = 0$, alors $\forall t \in [0, T]$, $z(t) = 0$.

3)- Si $z_0 > 0$, donc $\forall t \in [0, T]$, $z(t) > 0$.

2.4 Bornitude de solutions

La bornitude de solutions du système (S) est donné par le lemme suivant :

Lemme 2.4.1 La solution maximale $(x(t); z(t))$ est bornée.

Preuve. Il existe $A > 0$ et $B > 0$ tel que :

$$\forall x > A, \quad \sigma \ln x < \frac{\delta x}{2} \quad \text{et} \quad \forall z > B, \quad \alpha \ln z < \frac{\beta z}{2}.$$

D'autre part, pour tout $x, z > 0$, $\exists \xi \in \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} \delta x \geq \sigma \ln x + \xi \\ \beta z \geq \alpha \ln z + \xi \end{cases} \implies \begin{cases} \delta x - \sigma \ln x \geq \xi \dots\dots(1), \\ \beta z - \alpha \ln z \geq \xi \dots\dots(2). \end{cases}$$

On a aussi :

$$\forall x > A; \quad \sigma \ln x < \frac{\delta x}{2} \implies \forall x > A; \quad \delta x - \sigma \ln x > \frac{\delta x}{2} \dots\dots(3).$$

Donc, d'après (2) et (3) on a :

$$\forall x > A, \quad \delta x - \sigma \ln x + \beta z - \alpha \ln z = F(x, z) > \xi + \frac{dx}{2}.$$

Aussi, pour $\forall z > B$;

$$\alpha \ln z < \frac{\beta z}{2} \implies \forall z > B; \beta z - \alpha \ln z > \frac{\beta z}{2} \dots\dots(4)$$

D'où, d'après (1) et (4), on a

$$\forall z > B; \quad \forall x > A; \quad \delta x - \sigma \ln x + \beta z - \alpha \ln z = F(x, z) > \xi + \frac{\beta z}{2}.$$

2.5. Étude des points d'équilibre

Alors $\forall x > A; \quad \forall z > B :$

$$\begin{cases} \frac{2}{\delta}(F(x, z) - \xi) > x \\ \frac{2}{\beta}(F(x, z) - \xi) > z. \end{cases}$$

On déduit que : $\forall t \in [0, T[:$

$$\begin{cases} 0 < x(t) < \max\{A, \frac{2}{\delta}(F(x_0, z_0) - \xi)\} \\ 0 < z(t) < \max\{B, \frac{2}{\beta}(F(x_0, z_0) - \xi)\} \end{cases}$$

car $F(x, z) = cste = F(x_0, z_0)$. Donc, la solution maximale $(x(t), z(t))$ est bornée.

Remarque 2.4.1 On déduit d'après le théorème (1.3.4) que $T = +\infty$.

Alors, les solutions maximale $(x(t), z(t))$ du système (S) sont définies $\forall t \geq 0$.

2.5 Étude des points d'équilibre

Cherchons les points d'équilibre du système (S), on a :

$$(1) \implies X' = g(x) : X = (x, z); \quad g(x, z) = (x(\alpha - \beta z), (-\sigma + \delta x)).$$

Donc

$$g(X) = 0 \implies \begin{cases} x(\alpha - \beta z) = 0 \\ z(-\sigma + \delta x) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \text{ ou } z = \frac{\alpha}{\beta} \\ z = 0 \text{ ou } x = \frac{\sigma}{\delta}. \end{cases}$$

Alors, on a deux points d'équilibre du système (S) qui sont : $O(0, 0)$ et $\theta\left(\frac{\sigma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$.

2.5.1 Étude de point d'équilibre $O(0, 0)$

On a

$$\begin{cases} x'(t) = x(\alpha - \beta z) = g_1(x, z) \\ z'(t) = z(-\sigma + \delta x) = g_2(x, z) \end{cases}$$

2.5. Étude des points d'équilibre

tel que : $g(x, z) = (g_1, g_2)$, et la fonction g est différentiable en $O(0, 0)$ avec

$$Dg(0, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\sigma \end{pmatrix}$$

d'où

$$Dg(0, 0) = A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\sigma \end{pmatrix}.$$

Or, on a : $\det(A - \lambda I) = 0 \implies -(\alpha - \lambda)(\delta + \lambda) = 0 \implies \lambda_1 = \alpha > 0$ et $\lambda_2 = -\sigma < 0$.

Donc, on a une valeur propre est de partie réelle α strictement positive, le théorème (1.4.2) et (1.5) s'applique et point d'équilibre $O(0, 0)$ est instable. On peut même affiner le résultat et dire que la direction x est instable alors que la direction z est asymptotiquement stable.

2.5.2 Étude de point d'équilibre $\theta\left(\frac{\sigma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$

On pose $x = f + \frac{\sigma}{\delta}$ et $z = h + \frac{\alpha}{\beta}$. Alors $(x, z) = \left(\frac{\sigma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right) \iff (f, h) = (0, 0)$.

$$(1.5) \iff \begin{cases} x' = x(\alpha - \beta z) \\ z' = z(-\sigma + \delta x) \end{cases} \iff \begin{cases} f' = (f + \frac{\sigma}{\delta})(\alpha - \beta(h + \frac{\alpha}{\beta})) \\ h' = (h + \frac{\alpha}{\beta})(-\sigma + \delta(f + \frac{\sigma}{\delta})) \end{cases} \iff \begin{cases} f' = -\beta h(f + \frac{\sigma}{\delta}) \\ h' = \delta f(h + \frac{\alpha}{\beta}). \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} f' = -\beta h(f + \frac{\sigma}{\delta}) \\ h' = \delta f(h + \frac{\alpha}{\beta}) \end{cases} \iff G' = K(G) : K(f, h) = \left(-\beta h\left(f + \frac{\sigma}{\delta}\right), \delta f\left(h + \frac{\alpha}{\beta}\right)\right)$$

2.5. Étude des points d'équilibre

La fonction g est différentiable sur \mathbb{R}^2 . Alors, la linéarisation du système (??) est le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} G'(t) = DK(0)G(t) \\ G(0) = G_0. \end{cases}$$

On pose :

$$\begin{cases} K_1(f, h) = -\beta h \left(f + \frac{\sigma}{\delta} \right) \\ K_2(f, h) = \delta f \left(h + \frac{\alpha}{\beta} \right) \end{cases}$$

tel que

$$DK(f, h) = \begin{pmatrix} \frac{\partial K_1}{\partial f} & \frac{\partial K_1}{\partial h} \\ \frac{\partial K_2}{\partial f} & \frac{\partial K_2}{\partial h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta h & -\beta f - \frac{\beta\sigma}{\delta} \\ \delta h + \frac{\delta\alpha}{\beta} & \delta z \end{pmatrix}$$

d'où

$$DK(0, 0) = B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sigma\beta}{\alpha} \\ \frac{\delta\alpha}{\beta} & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc, on a $\det(B - \lambda I) = 0 \iff \lambda^2 + \alpha\sigma = 0 \implies \lambda_1 = i\sqrt{\alpha\sigma}$ et $\lambda_2 = -i\sqrt{\alpha\sigma}$ c'est-à-dire que λ_1 et λ_2 sont imaginaires pures. Dans ce cas là, le principe de linéarisation ne s'applique pas.

Il y a trois comportements possibles des orbites du système (1) à s'avoir :

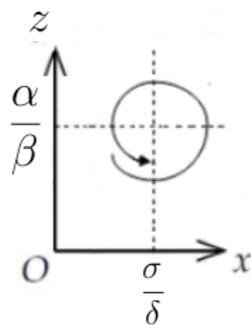


figure 1

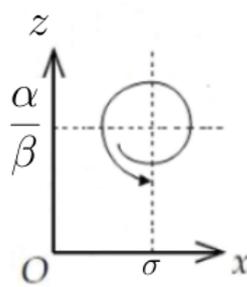


figure 2

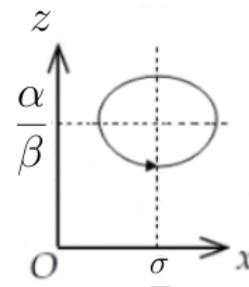


figure 3

Maintenant, on recherche la fonction de Lyapunov. On pose

$$F_1 : D_{F_1} =] - \frac{\sigma}{\delta}, +\infty[\times] - \frac{\alpha}{\beta}, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

2.5. Étude des points d'équilibre

avec $F_1(x, z) = F\left(x + \frac{\sigma}{\delta}, z + \frac{\alpha}{\beta}\right) = \delta x - \sigma \ln\left(x + \frac{\sigma}{\delta}\right) + \beta z - \alpha \ln\left(z + \frac{\alpha}{\beta}\right) + \alpha + \sigma$.

Étape 1. La fonction F_1 admet en $O(0, 0)$ un minimum local. On a F_1 est différentiable en $O(0, 0)$ et on a :

$$\frac{\partial F_1(x, z)}{\partial x} = \delta - \frac{\sigma}{x + \frac{\sigma}{\delta}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial F_1(x, z)}{\partial z} = \beta - \frac{\alpha}{z + \frac{\alpha}{\beta}}.$$

$$\frac{\partial F_1(0, 0)}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial F_1(0, 0)}{\partial z} = 0.$$

Et on a :

$$\frac{\partial^2 F_1(x, z)}{\partial x^2} = \frac{\sigma}{\left(x + \frac{\sigma}{\delta}\right)^2}; \quad \frac{\partial^2 F_1(x, z)}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 F_1(x, z)}{\partial z \partial x} = 0; \quad \frac{\partial^2 F_1(x, z)}{\partial z^2} = \frac{\alpha}{\left(z + \frac{\alpha}{\beta}\right)^2}.$$

Alors, les dérivées partielles secondaires de F_1 existent dans D_{F_1} et sont continues en O pour tout $f = (f_1, f_2) \in \mathbb{R}^2$ avec $f \neq 0$ et on a :

$$D^2 F_1(0, 0)(f, f) = f_1^2 \frac{\partial^2 F_1(0, 0)}{\partial x^2} + f_1 f_2 \frac{\partial^2 F_1(0, 0)}{\partial x \partial z} + f_2 f_1 \frac{\partial^2 F_1(0, 0)}{\partial z \partial x} + f_2^2 \frac{\partial^2 F_1(0, 0)}{\partial z^2};$$

$$D^2 F_1(0, 0)(f, f) = f_1^2 \frac{\delta^2}{\sigma} + f_1 f_2 \times (0) + f_2 f_1 \times (0) + f_2^2 \frac{\beta^2}{\alpha} = \frac{f_1^2 \delta^2}{\sigma} + \frac{f_2^2 \beta^2}{\alpha} > 0.$$

Alors, d'après le théorème (1.7), F_1 admet un minimum en O avec

$$F_1(0, 0) = F\left(\frac{\sigma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right).$$

Étape 2. Construction de la fonction de Lyapunov. On pose :

$$\mathcal{L} : D_{F_1} =] - \frac{\sigma}{\delta}, +\infty[\times] - \frac{\alpha}{\beta}, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} . :$$

$$\text{où } \mathcal{L}(x, y) = F_1(x, z) - F\left(\frac{\sigma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right).$$

2.5. Étude des points d'équilibre

D'après ce qui précède on déduit que :

$$\forall (x, z) \in D_{F_1} =]-\frac{\sigma}{\delta}, +\infty[\times]-\frac{\alpha}{\beta}[, \quad \text{on a } F_1(x, z) \geq F\left(\frac{\sigma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right).$$

Alors

$$i) \quad \mathcal{L}(x, z) = 0 \iff (x, z) = (0, 0) \text{ car, on a : } (x, z) = (0, 0) \implies \mathcal{L}(x, z) = 0 \text{ évident.}$$

Maintenant, montrons que $\mathcal{L}(x, z) = 0 \implies (x, z) = (0, 0)$. Supposons que :

$$\exists (x_1, z_1) \in D_{F_1} - \{(0, 0)\} : \mathcal{L}(x_1, z_1) = 0.$$

On a d'après la définition de la fonction F_1 ; $\forall (x, z) \in D_{F_1} : \mathcal{L}(x, z) \geq 0$. Alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v(x_1, z_1)}{\partial x} = \beta - \frac{\alpha}{z_1 + \frac{\alpha}{\beta}} = 0 \\ \frac{\partial v(x_1, z_1)}{\partial z} = \delta - \frac{\sigma}{x_1 + \frac{\sigma}{\delta}} = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} z_1 = 0 \\ z_2 = 0 \end{array} \right. \quad \text{contradiction.}$$

d'où $\mathcal{L}(x, z) = 0 \iff (x, z) = (0, 0)$.

ii) $\forall (x, z) \in D_{F_1} - \{(0, 0)\} : \mathcal{L}(x, z) > 0$ car $F\left(\frac{\sigma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$ est une valeur minimum de F_1 au point $(0, 0)$.

iii) $\forall (x, z) \in D_{F_1}$, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(x, z) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \\ &= \left(\delta - \frac{\sigma}{x + \frac{\sigma}{\delta}} \right) x' + \left(\beta - \frac{\alpha}{z + \frac{\alpha}{\beta}} \right) z' \\ &= - \left(\delta - \frac{\sigma}{x + \frac{\sigma}{\delta}} \right) \beta z \left(x + \frac{\sigma}{\delta} \right) + \left(\beta - \frac{\alpha}{z + \frac{\alpha}{\beta}} \right) \delta x \left(z + \frac{\alpha}{\beta} \right) \\ &= - \left(\frac{\delta x}{x + \frac{\sigma}{\delta}} \right) \beta z \left(x + \frac{\sigma}{\delta} \right) + \left(\frac{\beta z}{z + \frac{\alpha}{\beta}} \right) \delta x \left(z + \frac{\alpha}{\beta} \right) \\ &= -\delta \beta x z + \delta \beta x z = 0. \end{aligned}$$

Alors, \mathcal{L} est une fonction de Lyapunov, donc le point $(0, 0)$ est stable par rapport au système.

D'où le point de l'équilibre $\theta\left(\frac{\sigma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$ est stable. Par conséquent le deuxième figure n'a pas lieu.

2.6 Étude globale des solutions

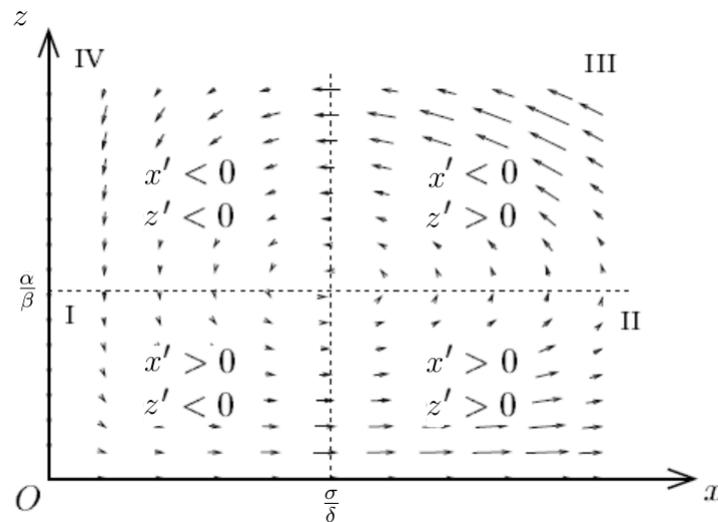
2.6.1 Périodicité des solutions

D'après ce qui précède il reste deux cas : est ce que les orbites de système de Lotka-Volterra sont périodiques, ou stables non périodiques. Le théorème qui suit répond à cette question.

Théorème 2.6.1 *Les solutions du système de Lotka-Volterra sont périodiques.*

Preuve :

On a dessiné sur le schéma suivant, le champ des vecteurs pour le système de Lotka-Volterra. Celui-ci délimite le quart de plan en quatre zones, notées *I, II, III* et *IV*, dans lesquelles x et z sont monotones.



En effet : on a :

$$\begin{aligned}
 I &= \{(x, z) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \mid x < \frac{\sigma}{\delta} \text{ et } z < \frac{\alpha}{\beta}\} \\
 &= \{(x, z) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \mid -\sigma + \delta x < 0 \text{ et } \alpha - \beta z > 0\} \\
 &= \{(x, z) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \mid z(-\sigma + \delta x) < 0 \text{ et } x(\alpha - \beta z) > 0\} \\
 &= \{(x, z) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \mid x' > 0 \text{ et } z' < 0\},
 \end{aligned}$$

2.6. Étude globale des solutions

$$\begin{aligned}
 II &= \{(x, z) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \mid x > \frac{\sigma}{\delta} \text{ et } z < \frac{\alpha}{\beta}\} \\
 &= \{(x, z) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \mid -\sigma + \delta x > 0 \text{ et } \alpha - \beta z > 0\} \\
 &= \{(x, z) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \mid z(-\sigma + \delta x) > 0 \text{ et } x(\alpha - \beta z) > 0\} \\
 &= \{(x, z) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \mid x' > 0 \text{ et } z' > 0\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 III &= \{(x, z) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \mid x > \frac{\sigma}{\delta} \text{ et } z > \frac{\alpha}{\beta}\} \\
 &= \{(x, z) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \mid -\sigma + \delta x > 0 \text{ et } \alpha - \beta z < 0\} \\
 &= \{(x, z) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \mid z(-\sigma + \delta x) > 0 \text{ et } x(\alpha - \beta z) < 0\} \\
 &= \{(x, z) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \mid x' < 0 \text{ et } z' > 0\}
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 IV &= \{(x, z) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \mid x < \frac{\sigma}{\delta} \text{ et } z > \frac{\alpha}{\beta}\} \\
 &= \{(x, z) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \mid -\sigma + \delta x < 0 \text{ et } \alpha - \beta z < 0\} \\
 &= \{(x, z) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \mid z(-\sigma + \delta x) < 0 \text{ et } x(\alpha - \beta z) < 0\} \\
 &= \{(x, z) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \mid x' < 0 \text{ et } z' < 0\}.
 \end{aligned}$$

Dans les quatre zones x et z sont monotones. Notre preuve consiste à suivre une trajectoire à travers de ces zones pour montrer qu'elle est périodique.

Soit donc (x_0, z_0) le point initial, qu'on suppose - sans perte de généralité - dans la zone I . On note $(x(t), z(t))$ la solution de (S) avec la condition initiale (x_0, z_0) .

Étape 1. La solution parcourt les quatre zones successivement.

–**Sur I** , on a : x croissante et z est décroissante, et comme $z(t) \neq 0$ pour tout $t > 0$, il existe $t_1 > 0$ à partir duquel $N(t) = N(x(t), z(t))$ quitte la zone I et rentre dans la zone II .

En effet : si $N(t)$ reste dans I pour tout le temps, alors x et z sont bornés. Comme ils sont monotones, ils convergent tous-deux vers des limites respectives x_∞ et z_∞ . D'après (S), on en déduit que x' et z' convergent aussi et leur limite ne peut être que 0. En effet : si x' tend vers 0 alors, x est équivalent à t , donc ne peut converger. En conséquence, toujours grâce à (1), (x_∞, z_∞) est un point stationnaire. Or, comme x croît, $x_\infty > 0$ et, puisque z décroît, $z_\infty < \frac{\alpha}{\beta}$. On aboutit donc à une contradiction, puisque les deux seuls points stationnaires

2.6. Étude globale des solutions

sont $(0,0)$ et $(\frac{\sigma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$. Ainsi, $N(t)$ sort de la zone I. C'est bien-sûr, dans la zone II qu'elle entre, puisque z décroît.

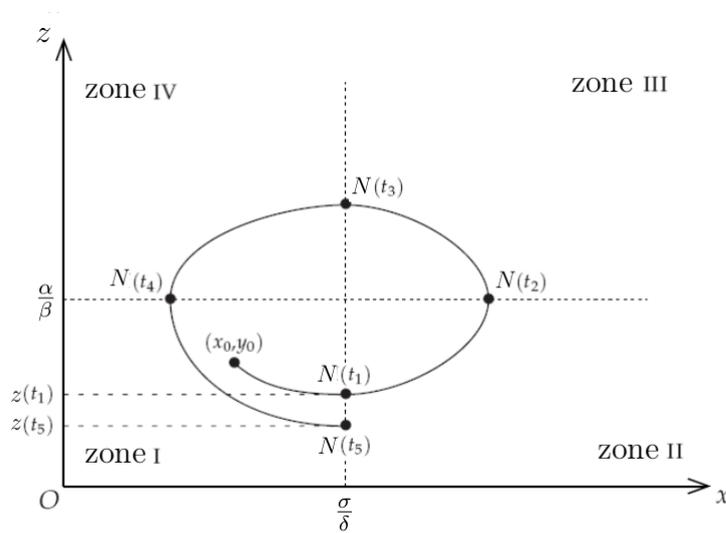
–**Sur II** on a : x et z croissante et comme elles sont bornées d'après le lemme (2.4.1), il existe $t_2 > t_1$ à partir duquel $N(t) = N(x(t), z(t))$ quitte la zone II et rentre dans la zone III. Ici encore, x et z sont monotones et bornées (attention, dans cette zone, il faut invoquer le lemme (2.4.1) . Par le même raisonnement qu'à l'étape précédente, on prouve l'existence d'un instant $t_2 > t_1$ à partir duquel $N(t)$ quitte la zone II pour la zone III.

Les points suivants se démontrent de même :

Il existe $t_3 > t_2$ à partir duquel $N(t) = N(x(t), z(t))$ quitte la zone III et rentre dans la zone IV.

Il existe $t_4 > t_3$ à partir duquel $N(t) = N(x(t), z(t))$ quitte la zone IV et rentre dans la zone I.

Il existe $t_5 > t_4$ à partir duquel $N(t) = N(x(t), z(t))$ quitte la zone I et rentre dans la zone II.



Étape 2. Les points $N(t_1)$ et $N(t_5)$ sont confondus.

Par définition, on a déjà $x(t_1) = x(t_5) = \frac{\sigma}{\delta}$. De plus, $N(t_1), N(t_5)$ sont des points d'une même trajectoire, alors : $F(x(t_1), z(t_1)) = cste = F(x(t_5), z(t_5))$.

2.6. Étude globale des solutions

D'où

$$F(x(t_1), z(t_1)) = F(x(t_5), z(t_5)) \dots (*)$$

Donc, on a :

$$(*) \implies \beta z_1 - \alpha \ln(z_1) = \beta z_5 - \alpha \ln(z_5) \dots (**)$$

car $x(t_1) = x(t_5)$. Soit h une fonction tel que : $h :]0, \frac{\alpha}{\beta}[\rightarrow \mathbb{R}; h(z) = \beta z - \alpha \ln(z)$. On a : $h'(z) = \beta - \frac{\beta z - \alpha}{z}$. Comme h est strictement décroissante, alors h est injective.

$$\text{Donc : } (**)\implies z(t_1) = z(t_5). \text{ Alors } N(t_5) = N(t_1).$$

Étape 3. Les solutions sont périodiques. Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, on pose :

$$\tilde{x}(t) = x(t_1 + t) \quad \text{et} \quad \tilde{z}(t) = z(t_1 + t).$$

et

$$\bar{x}(t) = x(t_5 + t) \quad \text{et} \quad \bar{z}(t) = z(t_5 + t).$$

Et comme (\tilde{x}, \tilde{z}) et (\bar{x}, \bar{z}) vérifiant le même problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x' = x(\alpha - \beta z) \\ z' = z(-\sigma + \delta x) \end{cases} \quad (x(0), z(0)) = (x_1, z_1)$$

où $x_1 = \tilde{x}(0) = \frac{\sigma}{\delta} = x(t_5) = \bar{x}(0)$ et $z_1 = \tilde{z}(0) = z(t_5) = \bar{z}(0)$. D'où $(\tilde{x}(0), \tilde{z}(0)) = (\bar{x}(0), \bar{z}(0))$.

Alors, $(x(t_1 + t), z(t_1 + t)) = (x(t_5 + t), z(t_5 + t))$. D'où $\forall t \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$[x(t_1 + t + (t_5 - t_1)), z(t_1 + t + (t_5 - t_1))] = [x(t + t_5), z(t + t_5)] = [x(t_1 + t), z(t_1 + t)].$$

Donc :

$$\forall s \in \mathbb{R}_+, N(s + (t_5 - t_1)) = N(s).$$

Et par suite la solution est périodique, de période $(t_5 - t_1)$.

Chapitre 3

Étude de quelques modèles de dynamique des populations

Dans ce chapitre, on se propose d'étudier quelques modèles mathématiques de deux espèces : Le modèle logistique, le modèle de Lotka-Volterra avec réponse fonctionnelle de Holling de type 2 et 3.

3.1 Modèle logistique

Le modèle mathématique le plus fin qui permet la saturation des proies est le système suivant :

$$\begin{cases} x' = \alpha x - \beta xz - \gamma x^2 \\ z' = -\sigma z + \delta xz \end{cases} \quad (3.1)$$

avec $\alpha, \beta, \gamma, \sigma$ et δ sont des constantes positives.

Ce système est appelé le modèle logistique de proie prédateur parce qu'il contient un terme logistique $-\gamma x^2$ dans la première équation du système (3.1). Les points d'équilibre du système (3.1) sont $O(0,0)$ et $\theta' \left(\frac{\sigma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\sigma\gamma}{\beta\delta} \right)$ pour $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\sigma\gamma}{\beta\delta}$.

Étude de l'équilibre $\theta' \left(\frac{\sigma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\sigma\gamma}{\beta\delta} \right)$.

On étudie cet équilibre en utilisant deux méthodes différentes :

3.1. Modèle logistique

1^{ère} Méthode : on pose

$$x = f + \frac{\sigma}{\delta}, \quad z = h + \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\sigma\gamma}{\beta\delta}.$$

Alors : $(f, h) = (0, 0)$ si $(x, z) = \left(\frac{\sigma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\sigma\gamma}{\beta\delta}\right)$. En substituant ces expressions dans le système (3.1) on obtient :

$$\begin{cases} f' = \left(f + \frac{\sigma}{\delta}\right)(-\beta h - \gamma f) \\ h' = \delta f \left(h + \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\sigma\gamma}{\beta\delta}\right). \end{cases} \quad (3.2)$$

Celui-ci est équivalent à $G' = K(G)$ pour :

$$K(G) = K(f, h) = \left(\left(f + \frac{\sigma}{\delta}\right)(-\beta h - \gamma f), \delta f \left(h + \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\sigma\gamma}{\beta\delta}\right) \right).$$

Comme la fonction K est différentielle sur \mathbb{R}^2 . Alors, la linéarisation du système (3.2) est :

$$\begin{cases} G'(t) = DK(0)G(t) \\ G(0) = G_0 \end{cases}$$

tel que

$$DK(f, h) = \begin{pmatrix} -\beta h - 2\gamma f - \frac{\sigma\gamma}{\delta} & -\beta f - \frac{\beta\sigma}{\delta} \\ \delta h + \frac{\alpha\delta}{\beta} - \frac{\gamma\sigma}{\beta} & \delta f \end{pmatrix}.$$

Donc,

$$DK(0, 0) = B = \begin{pmatrix} -\frac{\sigma\gamma}{\delta} & -\frac{\beta\sigma}{\delta} \\ \frac{\alpha\delta - \sigma\gamma}{\beta} & 0 \end{pmatrix}.$$

Or, si $\det(B - \lambda I) = 0$, on a le polynôme caractéristique est $\lambda^2 + \frac{\sigma\gamma}{\delta}\lambda + (\alpha\sigma - \frac{\sigma^2\gamma}{\delta}) = 0$, alors

$$\Delta = \frac{\sigma^2\gamma^2}{\delta^2} - 4\alpha\sigma + 4\frac{\sigma^2\gamma}{\delta} = \frac{\sigma}{\delta^2}(\sigma\gamma^2 - 4\delta(\alpha\delta - \sigma\gamma)).$$

La condition $\alpha\delta > \sigma\gamma$ ce n'est pas suffisante pour connaître le signe du Δ , pour cela on distingue trois cas possible :

1). Si $\Delta > 0$ il ya deux valeurs propres : $\lambda_1 = -\frac{\sigma\gamma}{2\delta} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{\sigma\gamma}{2\delta} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$

on a $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_1 \times \lambda_2 = 2[\alpha\sigma - \frac{\sigma^2\gamma}{\delta}] = 2[\frac{\sigma}{\delta}(\alpha\delta - \sigma\gamma)] > 0$. (car $\alpha\delta - \sigma\gamma > 0$), et comme $\lambda_1 < 0$, alors $\lambda_2 < 0$.

3.1. Modèle logistique

2). Si $\Delta = 0$ donc $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{\sigma\gamma}{2\delta} < 0$

3). Si $\Delta < 0$ donc :

$$\lambda_1 = \frac{-\sigma\gamma}{2\delta} - i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$$

et

$$\lambda_2 = \frac{-\sigma\gamma}{2\delta} + i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$$

On remarque que :

$$Re(\lambda_1) = Re(\lambda_2) < 0.$$

Alors, dans tous les cas $Re(\lambda_k) < 0 : k = 1, 2$, par conséquent le point $(0, 0)$ est asymptotiquement stable par rapport au système (3.2). D'où l'équilibre $\theta' \left(\frac{\sigma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\sigma\gamma}{\beta\delta} \right)$ est asymptotiquement stable.

2^{ème} Méthode : considérons la fonction $\mathcal{L} :]-\frac{\sigma}{\delta}, +\infty[\times]-\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma\sigma}{\beta\delta}, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f, h) &= \delta \int_{\frac{\sigma}{\alpha}}^{f + \frac{\sigma}{\alpha}} \frac{v - \frac{\sigma}{\delta}}{v} dv + \beta \int_{\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma\sigma}{\beta\delta}}^{h + \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma\sigma}{\beta\delta}} \frac{u - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma\sigma}{\beta\delta}}{u} du \\ &= \delta f - \sigma \ln \left(\frac{f + \frac{\sigma}{\delta}}{\frac{\sigma}{\delta}} \right) + f\beta - \left(\alpha - \frac{\gamma\sigma}{\delta} \right) \ln \left(\frac{h + \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma\sigma}{\beta\delta}}{\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma\sigma}{\beta\delta}} \right) \end{aligned}$$

La fonction \mathcal{L} est une fonction de Lyapunov. En effet :

1/. On voit que : $\mathcal{L}(f, h) > 0$ pour tout $(f, h) \in]-\frac{\sigma}{\delta}, +\infty[\times]-\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma\sigma}{\beta\delta}, +\infty[- (0, 0)$ et $\mathcal{L}(f, h) = 0$ si et seulement si $(f, h) = (0, 0)$.

2/. on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(f, h) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} \cdot \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \\ &= \left(\delta - \frac{\sigma}{f + \frac{\sigma}{\delta}} \right) f' + \left(\beta - \frac{\alpha - \frac{\sigma\gamma}{\delta}}{h + \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma\sigma}{\beta\delta}} \right) h' \\ &= \left(\delta - \frac{\sigma}{f + \frac{\sigma}{\delta}} \right) \left(f + \frac{\sigma}{\delta} \right) (-\beta h - \gamma f) + \left(\beta - \frac{\alpha - \frac{\sigma\gamma}{\delta}}{h + \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma\sigma}{\beta\delta}} \right) \delta f \left(h + \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\sigma\gamma}{\beta\delta} \right) \\ &= \delta f (-\beta h - \gamma f) + \delta f \beta h \left(\frac{\delta\beta h + \delta\alpha - \sigma\gamma}{h\delta\beta + \alpha\delta - \sigma\gamma} \right) \\ &= -\delta\gamma f^2 < 0. \end{aligned}$$

3.2. Différentes formulations de la fonction réponse du prédateur

Alors \mathcal{L} est une fonction de Lyapov, donc le point $(0, 0)$ est asymptotiquement stable par rapport au système (3.2). D'où la stabilité asymptotique de l'équilibre $\theta'(\frac{\sigma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\sigma\gamma}{\beta\delta})$ par rapport au système (3.1).

3.2 Différentes formulations de la fonction réponse du prédateur

Depuis le modèle de Lotka-Volterra, de nombreuses études ont contribué à exprimer de différentes manières les taux de croissance des populations et leurs interactions. Les systèmes prédateur-proie ainsi générés exhibent des dynamiques très variées. Un aspect biologique important de ces systèmes dynamiques est la manière avec laquelle les prédateurs interagissent. Selon Holling, l'alimentation est composée de deux types d'activité : la recherche de proies et leur capture. Holling suppose :

(i) que le temps total dédié à l'alimentation est la somme du temps de recherche t_r et du temps de capture t_h , et

(ii) que le temps de capture de chaque proie t_h est une constante.

Soit a le taux d'attaques réussies ; c'est le nombre de proies consommées par prédateur et par unité de temps de recherche. On peut écrire

$$F = \frac{\text{Nombre de proies consommées par prédateur}}{\text{Temps total d'alimentation}} = \frac{at_r}{t_r + at_r t_h}.$$

La réponse fonctionnelle du prédateur peut donc finalement être exprimée sous la forme suivante :

$$F = \frac{a}{1 + at_h}$$

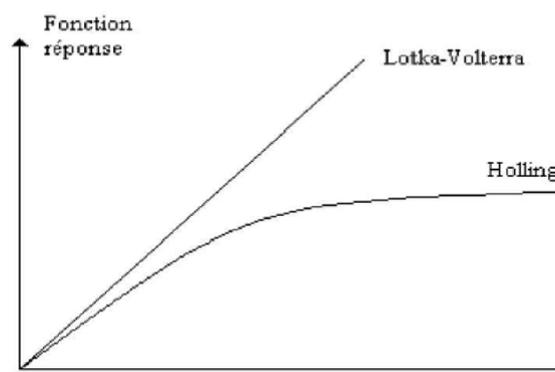
où a va être exprimé de plusieurs façons en fonction de x mais aussi en fonction de x et z .

L'hypothèse la plus simple pour la formulation du taux d'attaque des proies, et qui correspond à la réponse fonctionnelle de type I de Holling, est une simple proportionnalité avec

3.2. Différentes formulations de la fonction réponse du prédateur

le nombre de proies présentes dans le milieu : $a = bx$, avec b une constante positive. cette réponse fonctionnelle s'appelle aussi la fonction de réponse de Lotka-Volterra.

Cependant, il est évident que cette fonction réponse est irréaliste. En effet, F est proportionnelle à x , cela veut dire que le nombre de proies ingurgitées par un seul prédateur peut être très grand si x est grand. On doit plutôt s'attendre à une limitation du nombre de proies tuées et ingurgitées par un prédateur même si la densité des proies est grande. Les capacités physiologiques d'absorption de proies par un prédateur sont limitées, et même si un grand nombre de proies sont disponibles, un prédateur ne pourra pas absorber un nombre de proies supérieur à cette limite. Il est donc plus réaliste de concevoir une fonction réponse présentant un effet de saturation avec la densité des proies, comme le montre la figure suivante :



Une telle fonction réponse présentant un plateau pour les grandes densités de proies est dite fonction réponse de type II. La fonction de type II dite de Holling est la suivante :

$$\varphi_2(x) = \frac{kx}{\xi + x},$$

où ξ est une constante positive.

La réponse fonctionnelle de type III correspondant à un taux d'attaque proportionnel à x^2 tend à représenter le fait que les prédateurs sont moins efficaces dans la capture des proies lorsque celles-ci sont en faible effectif. La fonction de type III dite de Holling est la

3.3. Modèle de Lotka-Volterra avec réponse fonctionnelle de Holling de type II

suivante :

$$\varphi_3(x) = \frac{kx^2}{\xi + x^2},$$

où ξ est une constante positive.

3.3 Modèle de Lotka-Volterra avec réponse fonctionnelle de Holling de type II

La première modification du modèle de Lotka-Volterra est due à Holling qui a remplacé la signification fonctionnelle linéaire de type I par celle de type II, il s'agit du système :

$$\begin{cases} x' = \alpha x - \frac{\beta xz}{\xi + x} \\ z' = \frac{\delta xz}{\xi + x} - \sigma z \end{cases} \quad (3.3)$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \sigma$ et ξ sont des constantes positives telles que :

α : le taux de croissance intrinsèque de la proie en l'absence de prédateur.

β : le taux de prédation (d'attaque) maximale du prédateur sur la proie.

ξ : la constante de demi-saturation pour le prédateur, qui est la quantité de proies au cours de laquelle la réponse fonctionnelle du prédateur est à moitié maximale.

γ : le taux de conversion de la biomasse de proies en prédateurs.

σ : le taux de mortalité du prédateur en l'absence de proie.

Le système précédent admet les points d'équilibre $O(0,0)$ et $w_1\left(\frac{\sigma\xi}{\delta-\sigma}, \frac{\alpha}{\beta}\left(\xi + \frac{\sigma\xi}{\delta-\sigma}\right)\right)$. Soient

$A = \frac{\sigma\xi}{\delta-\sigma}$, $B = \xi + A$ et $C = \frac{\alpha}{\beta}$. Alors on a le résultat suivant :

Théorème 3.3.1 *Supposons que les conditions suivantes sont vérifiées*

$$H_1) \quad \delta > \sigma\xi > \alpha$$

$$H_2) \quad \beta(\delta - \sigma\xi) > \alpha\delta A\xi.$$

Alors, le point d'équilibre du système (3.3) est instable.

3.3. Modèle de Lotka-Volterra avec réponse fonctionnelle de Holling de type II

Démonstration On pose $x = f + \frac{\sigma\xi}{\delta - \sigma}$ et $z = h + \frac{\alpha}{\beta}\left(\xi + \frac{\sigma\xi}{\delta - \sigma}\right)$. Alors on a $(f, h) = (0, 0)$ si $(x, z) = \left(\frac{\sigma\xi}{\delta - \sigma}, \frac{\alpha}{\beta}\left(\xi + \frac{\sigma\xi}{\delta - \sigma}\right)\right)$. En substituant dans (3.3) on obtient

$$\begin{cases} f' = \alpha(f + A) + \frac{\beta(f + A)(h + CB)}{\xi + f + A} \\ h' = \frac{\delta fh + \delta fCB + \delta Ah + \delta ACB}{\xi + f + A} - h\sigma - CB\sigma \end{cases} \quad (3.4)$$

Maintenant, considérons la fonction suivante $\mathcal{L} :]-A, +\infty[\times]-CB, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f, h) &= \delta \int_A^{f+A} \frac{v-A}{v} dv + b \int_{CB}^{h+CB} \frac{u-CB}{u} du \\ &= \delta f - \sigma \ln\left(\frac{f+A}{A}\right) + \beta h - \alpha B \ln\left(\frac{h+CB}{CB}\right) \end{aligned}$$

D'après la définition de la fonction \mathcal{L} , on $\mathcal{L}(f, h) > 0$ pour tout

$$(f, h) \in]-A, +\infty[\times]-CB, +\infty[- (0, 0)$$

et $\mathcal{L}(f, h) = 0$ si et seulement si $(f, h) = (0, 0)$.

Aussi, on a

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} = \delta - \frac{\delta A}{f + A} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h} = \beta - \frac{\alpha B}{h + CB}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(f, h) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} \cdot \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \\ &= \left(\delta - \frac{\delta A}{f + A}\right) \left(\alpha(f + A) + \frac{\beta(f + A)(h + CB)}{\xi + f + A}\right) + \left(\beta - \frac{\alpha B}{h + CB}\right) \left(\frac{\delta(f + A)}{\xi + f + A} - \sigma\right) \\ &= \alpha\delta(f + A) - \frac{\delta\beta(f + A)(h + CB)}{\xi + f + A} + \frac{\delta\beta A(h + CB)}{(\xi + f + A)(h + CB)} + \frac{\delta\beta(f + A)}{\xi + f + A} - \beta\sigma \\ &\quad - \frac{\alpha\delta B(f + A)}{(\xi + f + A)(h + CB)} + \frac{\alpha B\sigma}{h + CB} \\ &= \alpha\delta(f + A) - \alpha\delta A + \frac{\delta\beta A(h + CB)}{\xi + f + A} - \frac{\delta\beta(f + A)(h + CB)}{(\xi + f + A)(h + CB)} + \frac{\delta\beta(f + A) - \beta\sigma(\xi + f + A)}{\xi + f + A} \\ &\quad - \frac{\alpha\delta B(f + A) + \alpha B\sigma(\xi + f + A)}{(h + CB)(\xi + f + A)} \end{aligned}$$

3.4. Modèle logistique de Lotka-Volterra dans le cas d'une réponse fonctionnelle de Holling type II

$$\begin{aligned}
&= \alpha\delta(f+A) - \alpha\delta A - \frac{\beta\delta(h+BC)f}{\xi+f+A} + \frac{\beta(f+A)}{\xi+f+A}(\delta - \sigma\xi) + \frac{\alpha B(f+A)}{(h+CB)(\xi+f+A)}(\sigma\xi - \alpha) \\
&> \alpha\delta(f+A) + \frac{\beta\delta(h+BC)(f+A)}{\xi+f+A} + \frac{\beta(f+A)}{\xi+f+A}(\delta - \sigma\xi) + \frac{\alpha B(f+A)}{(h+CB)(\xi+f+A)}(\sigma\xi - \alpha) \\
&> \alpha\delta(f+A) + \frac{(f+A)}{\xi+f+A}(-\alpha\delta A\xi + \beta(\delta - \sigma\xi)) + \frac{\alpha B(f+A)}{(h+CB)(\xi+f+A)}(\sigma\xi - \alpha).
\end{aligned}$$

D'après les hypothèses H_1 et H_2 , on aura $\mathcal{L}(f, h) > 0$

Donc d'après le théorème (3.3.1) le point $(0, 0)$ au système est instable par rapport au système (3.4) au voisinage de $]-A, A[\times]-CB, CB[$.

D'où l'instabilité du point $w_1\left(\frac{\sigma\xi}{\delta - \sigma}, \frac{\alpha}{\beta}\left(\xi + \frac{\sigma\xi}{\delta - \sigma}\right)\right)$ par rapport au système (3.3).

3.4 Modèle logistique de Lotka-Volterra dans le cas d'une réponse fonctionnelle de Holling type II

Rosenzweig et MacArthur [9] ont donné leur nom au modèle de Lotka-Volterra qu'ils ont modifié en prenant en compte une croissance logistique des proies et une saturation des prédateurs avec une réponse fonctionnelle Holling de type II :

$$\begin{cases} x' = \alpha x - \frac{\alpha}{k}x^2 - \frac{\beta xz}{\xi + x} \\ z' = \frac{\delta xz}{\xi + x} - \sigma z \end{cases} \quad (3.5)$$

où $\alpha, \beta, \sigma, \delta, k$ et ξ sont des constantes positives telles que :

α : le taux de croissance intrinsèque de la proie en l'absence de prédateur,

β : le taux de prédation (d'attaque) maximale du prédateur sur la proie,

ξ : la constante de demi-saturation pour le prédateur, qui est la quantité de proies au cours de laquelle la réponse fonctionnelle du prédateur est à moitié maximale,

σ : le taux de conversion de la biomasse de proies en prédateurs,

δ : le taux de mortalité du prédateur en l'absence de proie et

k : la capacité de portée du milieu en proies.

Les points d'équilibre de notre système sont $O(0, 0)$ et $w_2\left(\frac{\sigma\xi}{\delta - \sigma}, \frac{\alpha\xi}{\delta}(\alpha + A)(k - A)\right)$.

3.4. Modèle logistique de Lotka-Volterra dans le cas d'une réponse fonctionnelle de Holling type II

On a, le résultat suivant

Théorème 3.4.1 Si $\frac{\sigma\xi}{\delta}(\alpha + A)(k - A) - \xi + A > 0$.

Alors, le point d'équilibre $w_2\left(\frac{\sigma\xi}{\delta - \sigma}, \frac{\alpha\xi}{\delta}(\alpha + A)(k - A)\right)$ du système (3.5) est stable.

Démonstration : Soient $x = f + \frac{\sigma\xi}{\delta - \sigma}$ et $z = h + \frac{\alpha\xi}{\delta}(\alpha + A)(k - A)$. Alors $(f, h) = (0, 0)$ si $(x, z) = \left(\frac{\sigma\xi}{\delta - \sigma}, \frac{\alpha\xi}{\delta}(\alpha + A)(k - A)\right)$.

La substitution dans (3.5) on obtient :

$$\begin{cases} f' = \alpha(f + A)\left(1 - \frac{f + A}{k}\right) + \frac{\beta(f + A)(h + B(\alpha + A)(k - A))}{\xi + f + A} \\ h' = (h + B(\alpha + A)(k - A))\left(\frac{\delta(f + A)}{\xi + f + A} - \sigma\right) \end{cases} \quad (3.6)$$

Considérons la fonction $\mathcal{L} :]-A, +\infty[\times]-B(\alpha + A)(k - A), +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f, h) &= \delta \int_A^{f+A} \frac{v - A}{v} dv + \beta \int_{B(\alpha + A)(k - A)}^{h + B(\alpha + A)(k - A)} \frac{u - B(\alpha + A)(k - A)}{u} du \\ &= \delta f - \sigma \ln\left(\frac{f + A}{A}\right) + \beta h - \alpha\xi(\alpha + A)(k - A) \ln\left(\frac{h + CB}{CB}\right) \end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{L}(f, h) > 0$ pour tout $(f, h) \in]-A, +\infty[\times]-B(\alpha + A)(k - A), +\infty[- (0, 0)$ et $\mathcal{L}(f, h) = 0$ si et seulement si $(f, h) = (0, 0)$.

Or

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} &= \delta - \frac{\delta A}{f + A} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h} &= \beta - \frac{\alpha\xi(\alpha + A)(k - A)}{h + B(\alpha + A)(k - A)} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(f, h) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} \cdot \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \\ &= \alpha\delta f \frac{k - A - f}{k} - \frac{\delta\beta(f + A)h}{\xi + f + A} - \frac{\delta\beta B(\alpha + A)(k - A)(f + A)}{\xi + f + A} + \frac{\beta\delta h(f + A)}{\xi + f + A} - \beta\sigma h \\ &\quad + \frac{\delta\beta B(\alpha + A)(k - A)(f + A)}{\xi + f + A} - \beta\sigma B(\alpha + A)(k - A) + \frac{\alpha\xi(\alpha + A)(k - A)hc}{h + B(\alpha + A)(k - A)} \\ &\quad - \frac{\alpha\xi\delta h(\alpha + A)(k - A)(f + A)}{(\xi + f + A)(h + B(\alpha + A)(k - A))} - \frac{\alpha\xi\delta B(\alpha + A)^2(k - A)^2(f + A)}{(\xi + f + A)(h + B(\alpha + A)(k - A))} \\ &\quad + \frac{\alpha\xi\sigma B(\alpha + A)^2(k - A)^2}{h + B(\alpha + A)(k - A)} \end{aligned}$$

3.5. Modèle logistique de Lotka-Volterra dans le cas d'une réponse fonctionnelle de Holling type III

$$\begin{aligned}
&= \alpha \delta f \frac{k-A-f}{k} - \frac{\delta \beta (f+A)h}{\xi+f+A} - \frac{\delta \beta B(\alpha+A)(k-A)(f+A)}{\xi+f+A} + \frac{\delta \beta (f+A)h}{\xi+f+A} \\
&\quad - \beta \sigma h + \frac{\delta \beta B(\alpha+A)(k-A)(f+A)}{\xi+f+A} + \frac{\alpha \xi h \xi (\alpha+A)(k-A)}{(\xi+f+A)(h+B(\alpha+A)(k-A))} (\sigma \xi \\
&\quad + (f+A)(\sigma-\delta)) + \frac{\alpha \xi B(\alpha+A)^2 (k-A)^2}{(\xi+f+A)(h+B(\alpha+A)(k-A))} (\sigma \xi + (f+A)(\sigma-\delta)) \\
&\quad - \beta \sigma B(\alpha+A)(k-A) \\
&< \alpha \delta (f+A) \left(1 - \frac{A+f}{k}\right) - \frac{\delta \beta B(\alpha+A)(k-A)(f+A)}{\xi+f+A} + \frac{\sigma \alpha \xi^2 (\alpha+A)(k-A)}{\xi+f+A} \\
&< \alpha \delta (f+A) \left(1 - \frac{A+f}{k}\right) + \frac{\sigma \alpha \xi (\alpha+A)(k-A)}{\xi+f+A} (\xi - \xi - (f+A)) \\
&< \alpha (f+A) (\delta (\xi+f+A) - \sigma \xi (\alpha+A)(k-A)).
\end{aligned}$$

D'où $\frac{\sigma \xi}{\delta} (\alpha+A)(k-A) - \xi + A > 0$, si on pose : $f < \frac{\sigma \xi}{\delta} (\alpha+A)(k-A) - \xi + A$, alors

$$\begin{aligned}
f < \frac{\sigma \xi}{\delta} (\alpha+A)(k-A) - \xi + A &\implies \delta f < \sigma \xi (\alpha+A)(k-A) - \delta \xi + \delta A \\
&\implies \delta (\xi+f+A) - \sigma \xi (\alpha+A)(k-A) \\
&\implies \alpha (f+A) (\delta (\xi+f+A) - \sigma \xi (\alpha+A)(k-A)) < 0
\end{aligned}$$

Alors, $\mathcal{L}(f, h) < 0$.

Donc, d'après le théorème (3.4.1) le point $(0, 0)$ au système est asymptotiquement stable par rapport au système (3.6) au voisinage de $] -M, M[\times] -B(\alpha+A)(k-A), -B(\alpha+A)(k-A)[$, avec

$$M = \min \left\{ A, \frac{\sigma \xi}{\delta} (\alpha+A)(k-A) - \xi + A \right\}$$

D'où la stabilité du point $w_2 \left(\frac{\sigma \xi}{\delta - \sigma}, \frac{\alpha \xi}{\beta} (\alpha+A)(k-A) \right)$ par rapport au système (3.5).

3.5 Modèle logistique de Lotka-Volterra dans le cas d'une réponse fonctionnelle de Holling type III

La deuxième modification du modèle de Lotka-Volterra est due à Holling qui a remplacé la signification fonctionnelle linéaire de type I par celle de type III, il s'agit du système sui-

3.5. Modèle logistique de Lotka-Volterra dans le cas d'une réponse fonctionnelle de Holling type III

vant

$$\begin{cases} x' = \alpha x - \frac{\alpha}{k}x - \frac{\beta x^2 y}{\xi + x^2} \\ z' = \frac{\delta z x^2}{\xi + x^2} - \sigma z \end{cases} \quad (3.7)$$

avec $\alpha, \beta, \sigma, \delta$, et ξ sont des constantes positives telles que :

α : le taux de croissance intrinsèque de la proie en l'absence de prédateur.

β : le taux de prédation (d'attaque) maximale du prédateur sur la proie.

$\sqrt{\xi}$: la constante de demi-saturation pour le prédateur, qui est la quantité de proies au cours de laquelle la réponse fonctionnelle du prédateur est à moitié maximale.

δ : le taux de conversion de la biomasse de proies en prédateurs.

σ : le taux de mortalité du prédateur en l'absence de proie.

k : la capacité de portée du milieu en proies.

Les points d'équilibre : on a

$$\begin{cases} x' = 0 \\ z' = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha x \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{\beta x^2 y}{\xi + x^2} = 0 \\ z \left(\frac{\delta x^2}{\xi + x^2} - \sigma\right) = 0. \end{cases}$$

d'où $(x, z) = (0, 0)$ ou $(x, z) = \left(\sqrt{\frac{\sigma \xi}{\delta - \sigma}}, BA \left(1 - \frac{A}{k}\right)\right)$ ou $(x, z) = (k, 0)$ avec $\delta > \sigma, k > A$ où

$$A = \sqrt{\frac{\sigma \xi}{\delta - \sigma}} \text{ et } B = \frac{\alpha \delta}{\beta \sigma}.$$

Théorème 3.5.1 *Supposons que les conditions suivantes sont vérifiées*

$$H_1 \frac{\alpha \xi}{\beta} - \delta AB \left(1 - \frac{A}{k}\right) - BA \left(1 - \frac{A}{k}\right) > 0$$

$$H_2 \xi \sigma \beta BA \left(1 - \frac{A}{k}\right) - A > 0.$$

Alors, le point d'équilibre $\theta_3 \left(\sqrt{\frac{\sigma \xi}{\delta - \sigma}}, BA \left(1 - \frac{A}{k}\right)\right)$ du système (3.7) est asymptotiquement stable.

Démonstration : soient $x = f + \sqrt{\frac{\sigma \xi}{\delta - \sigma}}$ et $z = h + BA \left(1 - \frac{A}{k}\right)$. Alors on a $(f, h) = (0, 0)$ si

$$(x, z) = \left(\sqrt{\frac{\sigma \xi}{\delta - \sigma}}, BA \left(1 - \frac{A}{k}\right)\right).$$

3.5. Modèle logistique de Lotka-Volterra dans le cas d'une réponse fonctionnelle de Holling type III

L'injection de ces expressions dans (3.7) nous donne

$$\begin{cases} f' = \alpha(f+A)\left(1 - \frac{f+A}{k}\right) + \frac{\beta(f+A)^2(h + BA(1 - \frac{A}{k}))}{\xi + (f+A)^2} \\ h' = (h + BA(1 - \frac{A}{k}))\left(\frac{\beta(f+A)^2}{\xi + (f+A)^2}\right) \end{cases} \quad (3.8)$$

Considérons la fonction $\mathcal{L} :]-A, +\infty[\times]-BA(1 - \frac{A}{k}), +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f, h) &= \delta \int_A^{f+A} \frac{v-A}{v} dv + \beta \int_{BA(1 - \frac{A}{k})}^{h+BA(1 - \frac{A}{k})} \frac{u - BA(1 - \frac{A}{k})}{u} du \\ &= \delta f - \delta A \ln\left(\frac{f+A}{A}\right) + \beta h - \beta BA\left(1 - \frac{A}{k}\right) \ln\left(\frac{h + BA(1 - \frac{A}{k})}{BA(1 - \frac{A}{k})}\right). \end{aligned}$$

Il vient que $\mathcal{L}(f, h) > 0$ pour tout $(f, h) \in]-A, +\infty[\times]-BA(1 - \frac{A}{k}), +\infty[- (0, 0)$ et $\mathcal{L}(f, h) = 0$ si et seulement si $(f, h) = (0, 0)$.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} = \delta - \frac{\delta A}{f+A} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h} = \beta - \frac{\beta BA(1 - \frac{A}{k})}{h + BA(1 - \frac{A}{k})}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(f, h) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} \cdot \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \\ &= \left(\delta - \frac{\delta A}{f+A}\right)\left(\alpha(f+A)\left(1 - \frac{f+A}{k}\right)\right) + \frac{\beta(f+A)^2(h + BA(1 - \frac{A}{k}))}{\xi + (f+A)^2} + \\ &\quad \left(\beta - \frac{\beta BA(1 - \frac{A}{k})}{h + BA(1 - \frac{A}{k})}\right)\left(h + BA(1 - \frac{A}{k})\right)\left(\frac{\delta(f+A)^2}{\xi + (f+A)^2} - \sigma\right) \\ &= \alpha\delta(f+A)\left(1 - \frac{f+A}{k}\right) - \frac{\delta\beta(f+A)^2(h + BA(1 - \frac{A}{k}))}{\xi + (f+A)^2} - \delta\alpha A\left(1 - \frac{f+A}{k}\right) \\ &\quad + \frac{\delta\beta A(f+A)(h + BA(1 - \frac{A}{k}))}{\xi + (f+A)^2} + \left(\frac{\delta\beta(f+A)^2}{\xi + (f+A)^2} - \beta\sigma\right)\left(h + BA(1 - \frac{A}{k})\right) \end{aligned}$$

3.5. Modèle logistique de Lotka-Volterra dans le cas d'une réponse fonctionnelle de Holling type III

$$\begin{aligned}
& + \frac{\delta\beta BA(f+A)^2(1-\frac{A}{k})}{\xi+(f+A)^2} (h+BA(1-\frac{A}{k})) - \frac{\sigma\beta BA(1-\frac{A}{k})}{h+BA(1-\frac{A}{k})} (h+BA(1-\frac{A}{k})) \\
& = \alpha\delta(f+A)(1-\frac{A}{k}) - \frac{\delta\beta(f+A)^2(h+BA(1-\frac{A}{k}))}{\xi+(f+A)^2} - \delta\alpha A(1-\frac{f+A}{k}) \\
& + \frac{\delta\beta\beta A(f+A)(h+BA(1-\frac{A}{k}))}{\xi+(f+A)^2} + \frac{\beta(f+A)^2}{\xi+(f+A)^2} (\delta-\xi\sigma)(h+BA(1-\frac{A}{k})) \\
& + \frac{\beta BA(f+A)^2(1-\frac{A}{k})}{\xi+(f+A)^2} (\delta\delta-\xi\sigma) \\
& < [\delta\alpha(f+A)\frac{\xi+(f+A)^2}{\xi+(f+A)^2} - \frac{\xi\sigma\beta BA(f+A)^2(1-\frac{A}{k})}{\xi+(f+A)^2}] + [-\delta\alpha A\frac{\xi+(f+A)^2}{\xi+(f+A)^2} \\
& + \frac{\delta\beta BA(f+A)^2(1-\frac{A}{k})}{\xi+(f+A)^2}] + [\frac{-\xi\sigma\beta(f+A)^2(h+BA(1-\frac{A}{k}))}{\xi+(f+A)^2} + \frac{\delta\beta A(f+A)(h+BA(1-\frac{A}{k}))}{\xi+(f+A)^2}] \\
& < \frac{(f+A)^2}{\xi+(f+A)^2} (-\xi\sigma\beta BA(1-\frac{A}{k}) + \delta\alpha\xi(f+A) + \delta\alpha(f+A)) + [\frac{\delta A(f+A)}{\xi+(f+A)^2} (\beta B(1-\frac{A}{k}) - \alpha\xi)] \\
& + \frac{\beta(f+A)(h+BA(1-\frac{A}{k}))}{\xi+(f+A)^2}
\end{aligned}$$

1. D'après les hypothèses on a $\xi\sigma\beta BA(1-\frac{A}{k}) - A > 0$, et si on pose $f < \xi\sigma\beta BA(1-\frac{A}{k}) - A$, alors

$$\begin{aligned}
f < \xi\sigma\beta BA(1-\frac{A}{k}) - A &\implies f(\delta\alpha\xi\xi + \delta\alpha) < \xi\sigma\beta BA(1-\frac{A}{k}) - \delta\alpha\xi A - \delta\alpha A \\
&\implies \alpha(f+A)(\delta(\xi+f+A) - \sigma\xi(\alpha+A)(k-A)) < 0
\end{aligned}$$

2. D'après les hypothèses on a : $\frac{\alpha\xi}{\beta} - \delta AB(1-\frac{A}{k}) - BA(1-\frac{A}{k}) > 0$, si on pose :

$h < \frac{\alpha\xi}{\beta} - \delta AB(1-\frac{A}{k}) - BA(1-\frac{A}{k})$, alors :

$$\begin{aligned}
h < \frac{\alpha\xi}{\beta} - \delta AB(1-\frac{A}{k}) - BA(1-\frac{A}{k}) &\implies \beta h < \alpha\xi - \delta\beta AB(1-\frac{A}{k}) - BAb(1-\frac{A}{k}) \\
&\implies (f+A)[\delta bAB(1-\frac{A}{k}) - \alpha\xi + \beta(h+BA(1-\frac{A}{k}))] < 0
\end{aligned}$$

d'où on obtient $\mathcal{L}(f, h) < 0$

3.5. Modèle logistique de Lotka-Volterra dans le cas d'une réponse fonctionnelle de Holling type III

Donc d'après le théorème (3.5.1), le point $(0, 0)$ au système est asymptotiquement stable par rapport au système (3.8) au voisinage de $] - N, N[\times] - M, M[$ avec $N = \min\{A, \xi \sigma \beta B A (1 - \frac{A}{k}) - A\}$ $M = \min\{B, \frac{\alpha \xi}{\beta} - \delta A B (1 - \frac{A}{k}) - B A (1 - \frac{A}{k})\}$.

D'où la stabilité du point $\theta_3\left(\sqrt{\frac{\sigma \xi}{\delta - \sigma}}, B A \left(1 - \frac{A}{k}\right)\right)$ par rapport au système (3.7).

Approximation numérique des solutions du système de Lotka-Volterra

Dans ce chapitre, nous donnons une approximation numérique du système de Lotka-Volterra pour étayer les résultats théoriques.

4.1 Rappels sur les méthodes numériques

L'objet de ce paragraphe est de présenter brièvement les méthodes simples les plus utilisées pour la résolution numérique des équations différentielles ordinaires, pour plus de détails, on renvoie à [3], [4] et [5].

4.1.1 Quelques méthodes classiques

On désire approcher la solution du problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} v'(t) = g(v(t)), t > 0 \\ v(0) = v_0. \end{cases} \quad (4.1)$$

On suppose que g est Lipschitzienne. Afin de construire une approximation numérique sur l'intervalle $[0, T]$, on introduit une subdivision :

4.1. Rappels sur les méthodes numériques

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$$

de pas $h_n = t_{n+1} - t_n$. Notre but est de trouver une suite $(v_n)_{0 \leq n \leq N}$ telle que v_n soit une approximation de $v(t_n)$. Toutes les méthodes présentées ici sont des méthodes de Runge-Kutta ; leur point de départ est la formules suivantes :

$$v(t_{n+1}) = v(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} v'(t) dt = v(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(u(t)) dt \quad (4.2)$$

Il suffit ensuite d'utiliser une formule d'intégration numérique pour approcher l'intégrale précédente :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} g(v(t)) dt \simeq I(f \circ v, t_n, t_{n+1}).$$

La méthode d'Euler explicite : l'ntégrale (4.2) peut s'approcher par la méthode des rectangles à gauche

$$I(f \circ v, t_n, t_{n+1}) \simeq h_n g(v(t_n))$$

D'où le schéma itératif suivant

$$\begin{cases} v_{n+1} = v_n + h_n g(v_n) \\ v(0) = v_0. \end{cases} \quad (4.3)$$

La méthode d'Euler implicite : de la même façon, la formule des rectangles à droite fournit la méthode d'Eleur implicite

$$\begin{cases} v_{n+1} = v_n + h_n g(v_{n+1}) \\ v(0) = v_0 \end{cases} \quad (4.4)$$

La formule des trapèzes, quant à elle est à l'origine de **la méthode de Crank-Nicolson :**

$$v_{n+1} = v_n + \frac{h_n}{2} (g(v_n) + g(v_{n+1})).$$

Enfin, on peut utiliser la formule de Simpson :

$$I(g(v(.)), t_n, t_{n+1}) \simeq \frac{h_n}{6} (g(v(t_n)) + 4g(v(t_n + \frac{h_n}{2})) + g(v(t_{n+1})))$$

4.1. Rappels sur les méthodes numériques

après l'approximation de $v(t_n + \frac{h_n}{2})$ on définit alors v_{n+1} comme suit :

$$v_{n+1} = v_n + \frac{h_n}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$$

où $k_1 = g(v_n)$, $k_2 = g(v_n + \frac{h_n}{2}k_1)$, $k_3 = g(v_n + \frac{h_n}{2}k_2)$ et $k_4 = g(v_n + h_n k_3)$. On vient de décrire **la méthode de Runge-Kutta classique**.

Explication :

Les quatre méthodes décrites dans ce paragraphe, deux sont explicites : il s'agit des méthodes d'Euler explicite et de Runge-Kutta classique. Cela signifie qu'un simple calcul permet de déterminer v_{n+1} à partir de v_n . En revanche les méthodes d'Euler implicite et de Crank-Nicolson nécessitent la résolution d'une équation pour calculer v_{n+1} connaissant v_n . De telles méthodes sont dites **implicites**.

4.1.2 Notions de consistance et de stabilité

On peut écrire tous les schémas du paragraphe précédent sous la forme :

$$v_{n+1} = \Phi_{h_n}(v_n)$$

Exemple 4.1.1 1- La méthode d'Euler explicite : $\Phi_{h_n}(v_n) = v_n + h_n g(v_n)$.

2- La méthode de Crank-Nicolson : $\Phi_{h_n}(v_n) = v_n + \frac{h_n}{2}(g(v_n) + g(v_{n+1}))$.

3- La méthode de Runge-Kutta classique : $\Phi_{h_n}(v_n) = v_{n+1} = v_n + \frac{h_n}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4]$.

4.1.3 Quelques définitions utiles

Définition 4.1.1 (L'erreur de consistance locale). On définit l'erreur de consistance locale ε_n comme l'erreur commise par le schéma sur la solution exacte $v(\cdot)$:

$$\varepsilon_n = v(t_{n+1}) - \Phi_{h_n}(v(t_n)).$$

4.2. Application au système de Lotka-Volterra

Définition 4.1.2 (La consistance). On dit que la méthode est consistante d'ordre $s \in \mathbb{N}$ si l'erreur de consistance globale est d'ordre s par rapport à $h = \max_n h_n$:

$$\sum_{n=1}^{N-1} |\varepsilon_n| = O(h^s).$$

Définition 4.1.3 (La stabilité). La stabilité se définit comme suit : soit u_n une suite vérifiant un schéma perturbé

$$u_{n+1} = \Phi_{h_n}(u_n) + \mu_n.$$

On dit qu'il y a stabilité si on peut maîtriser l'erreur commise :

$$\max_{0 \leq n \leq N} |v_n - u_n| \leq c(|v_0 - u_0| + \sum_{n=1}^{N-1} |\mu_n|).$$

Corollaire 4.1.1 Si le schéma est à la fois consistant et stable alors, il est convergente.

En effet, si on prend pour u_n la solution exacte $v(t_n)$ alors, $\mu_n = \varepsilon_n$ par définition de l'erreur de consistance. Si on choisit $v_0 = v(0)$ pour initialiser la suite (v_n) , et que la méthode est consistante d'ordre p et stable, alors

$$\max_{0 \leq n \leq N} |v_n - v(t_n)| \leq ch^s$$

ce qui prouve la convergence.

4.2 Application au système de Lotka-Volterra

4.2.1 Visualisation des solutions numériques

On a programmé les quatre méthodes à l'aide du logiciel **Matlab**, et on les a appliqués au système (S) pour les paramètres suivants

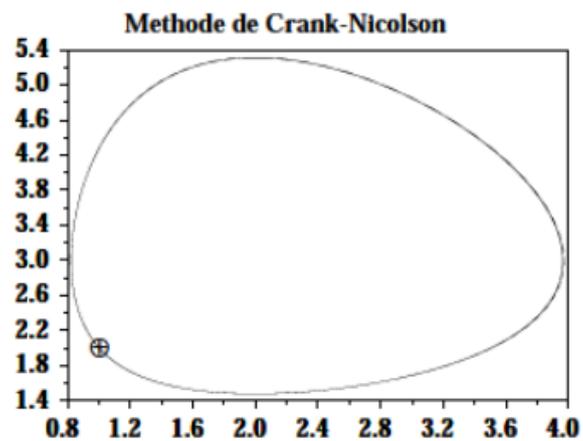
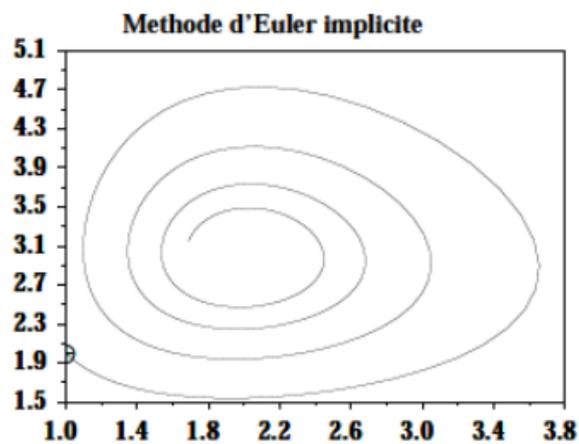
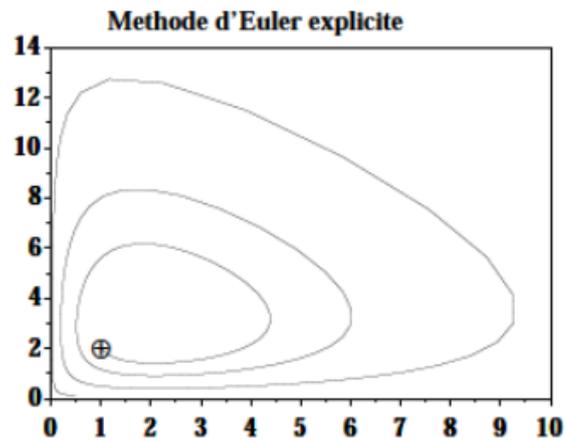
$$\alpha = 3, \beta = 1, \sigma = 2 \text{ et } \delta = 1.$$

On a fixé la condition initiale à

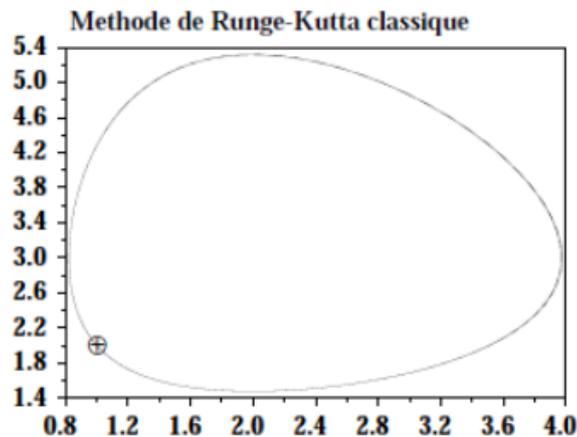
$$x_0 = 1, z_0 = 2.$$

4.2. Application au système de Lotka-Volterra

On calcule la solution exacte sur l'intervalle $[0, T]$, avec $T = 10$; le pas de discrétisation est constant $h = 0.05$. Les courbes suivantes représentent la solution numérique dans le plan de phase (x, z)



4.2. Application au système de Lotka-Volterra



Dans les figures, le caractère \oplus repère la condition initiale.

Seul les deux dernières méthodes fournissent une solution apparemment périodique. Les solutions numériques obtenues à l'aide des méthodes d'Euler sont des spirales. Le paragraphe suivant se propose d'en faire l'étude dans le cas plus simple d'un système différentiel linéaire.

4.2.2 Étude théorique des schémas dans le cas linéaire

À une affinité près, linéarisé du système de Lotka-Volterra au voisinage du point d'équilibre intérieur s'écrit :

$$\begin{cases} x'(t) = -z \\ z'(t) = x \end{cases} \quad (4.5)$$

la solution exacte est

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos t - z_0 \sin t \\ z(t) = x_0 \sin t + z_0 \cos t \end{cases}$$

les trajectoires de (4.5) sont des cercles d'équation $x^2 + z^2 = cste$. Il s'agit de savoir si les schémas numériques conservent cette propriété. Pour cela on calcule $x_{n+1}^2 + z_{n+1}^2$ en fonction de $x_n^2 + z_n^2$ pour chacun des schémas suivants :

4.2. Application au système de Lotka-Volterra

-Euler explicite :

$$\begin{aligned}x_{n+1}^2 + z_{n+1}^2 &= (x_n + h(-z_n))^2 + (z_n + h(x_n))^2 \\&= x_n^2 + h^2 z_n^2 - 2hx_n z_n + z_n^2 + h^2 x_n^2 \\&= 2hx_n z_n \\&= (1 + h^2)(x_n^2 + z_n^2)\end{aligned}$$

Donc : $x_{n+1}^2 + z_{n+1}^2 = (1 + h^2)(x_n^2 + z_n^2)$.

-Euler implicite :

On a : $x_{n+1} = x_n + h(-z_{n+1})$, $z_{n+1} = z_n + h(x_{n+1})$

Alors : $x_n = x_{n+1} + h z_{n+1}$, $z_n = z_{n+1} - h(x_{n+1})$, d'où :

$$(x_n^2 + z_n^2) = (1 + h^2)x_{n+1}^2 + z_{n+1}^2$$

Donc : $x_{n+1}^2 + z_{n+1}^2 = \frac{1}{1 + h^2}(x_n^2 + z_n^2)$, par la même démarche on trouve :

-Crank-Nicolson

$$x_{n+1}^2 + z_{n+1}^2 = x_n^2 + z_n^2$$

-Runge-Kutta :

$$x_{n+1}^2 + z_{n+1}^2 = \left(1 - \frac{h^6}{72} + \frac{h^6}{576}\right)(x_n^2 + z_n^2).$$

Il apparaît que seule la méthode de Crank-Nicolson conserve l'intégrale première $x^2 + z^2$. La méthode d'Euler explicite augmente sa valeur ($1 + h^2 > 1$) alors que pour la méthode d'Euler implicite le rayon du cercle diminue. Cela explique le comportement en spirale vu au paragraphe précédent (au moins au voisinage de l'équilibre). Enfin, la méthode de Runge-Kutta ne conserve pas l'intégrale première, mais le coefficient multiplicateur est très proche de 1 donc, on observe numériquement une solution périodique, tant que T n'est pas trop grand.

Conclusion

Tout au long de ce travail, nous avons considéré quelques problèmes de dynamique des populations. Notre but était de rappeler des définitions générales, des exemples ainsi que des résultats d'existence et d'unicité de la solution pour ces systèmes d'équations.

Après une introduction générale sur le sujet, dans le **chapitre 1**, bref aperçu historique sur la théorie des équations différentielles notamment quelques notions de base et certains résultats de la théorie d'existence et d'unicités des solutions. Dans le **chapitre 2**, nous avons étudié un modèle mathématique appliqué à la dynamique des populations, plus particulièrement la dynamique de modèle proie-prédateur présenté par un système autonome de deux équations différentielles ordinaires de premier ordre avec des conditions initiales positives.

Ensuite, dans le **chapitre 3**, on a étudié le comportement de la solution de quelques modèles mathématiques de deux espèces : Le modèle logistique, le modèle de Lotka-Volterra avec réponse fonctionnelle de Holling de type 2 et 3.

Enfin, dans le dernier chapitre, nous avons donné des approximations numériques de la solution pour le système de Lotka-Volterra.

Bibliographie

- [1] V. Arnold, Equations différentielles ordinaires. Éditions Mir-Moscou, 3ème édition 01/06/2012.
- [2] Sylvie Benzoni, Équations différentielles ordinaires, (polycopie de cours), Univers.de Lyon, 11 mai 2007.
- [3] M. Crouzeix, A. L. Mignot, Analyse numérique des équations différentielles. Collection mathématiques appliquées pour la maîtrise. Masson, Paris 1984.
- [4] J.-P. Demailly, Analyse numérique et équations différentielles. PUG, Grenoble 1996.
- [5] E. Hairer, G. Wanner, Solving ordinary differential equations II, volume 14 of Springer Series in Computational Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, second edition 1996.
- [6] P.Meier, A.Bonanomi, D.Messina, Les équations de Lotka-Volterra pour les systèmes des populations , 11 mai 2006.
- [7] A. Munnier, Théorie des équations différentielles ordinaires, Institut élie Cartan 2006–2007.
- [8] Jean-Pierre Raymond, Systèmes différentiels (résumé de cours), Université Paul Sabatier.
- [9] Mebrouk Rahmane, Equations différentielles théorie et applications, sur les systèmes de Lotka Volterra, bibliothèque de la faculté des sciences, 07 octobre 2012

Résumé

Le modèle de proie et de prédateur est d'une grande importance dans les systèmes biologiques, car il décrit une relation d'interaction qui détermine le comportement dynamique de la communauté biologique, le nombre de ses membres qu'ils soient prédateurs ou proies, et les périodes de temps d'augmentation et de diminution pour chacun d'entre eux, en fonction de la forme d'interaction dans chaque période. Il exprime la relation entre la proie et le prédateur dans un ensemble d'équations différentielles non linéaires appelé le modèle Lotka- Volterra. Ce modèle utilise les taux d'augmentation et de diminution pour chaque espèce, et l'effet de la présence de chacun sur le comportement de l'autre . Cependant, l'apparition d'équation différentielles dans un tel modèle a un inconvénient, celui de trouver une solution à ces équations non linéaires. La plupart du temps, on effectue donc une approximation numérique qui discrétise la durée en de nombreux petits intervalles, afin de trouvé une solution approchée.

Phrases et mots clés : Prédateur-proie, Lotka-Volterra, comportement dynamique, equations differentielles, solution approchée, approximation numérique.

Abstract

The prey and predator model is of great importance in biological systems, as it describes an interaction relationship that determines the dynamic behavior of the biological community, the number of its members, whether predator or prey, and the time periods of increase and decrease for each of them, depending on the form of interaction in each period. It expresses the relationship between the prey and the predator in a set of nonlinear differential equations called the Lotka Volterra model. This model uses the rates of increase and decrease for each species, and the effect of the presence of each

on the behavior of the other. However, the appearance of differential equations in such a model has a drawback, that of finding a solution to these nonlinear equations. Most of the time, we therefore perform a numerical approximation that discretizes the duration into many small intervals, in order to find an approximate solution.

Key words and phrases : Predator-prey, Lotka-Volterra, dynamic behavior, differential equations, approximate solution, numerical approximation.