REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR DE LA RECHERCHE SCIENTIFIC

UNIVERSITÉ DE BOUIRA
FACULTE DES SCIENCES ET DES SCIENCES APPLIQUEES
LABORATOIRE DE RECHERCHE LIMPAF DE BOUIRA
DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
MEMOIRE POUR L'OBTENTION DU DIPLOME DE MASTER MATHÉMATIQUES
Option : Recherche opérationnelle

Certains théorèmes du point fixe et applications

Présenté par :

NAIDJAOUI Nedjah **SAIDI Dalal**

Soutiendra le : 04/07/2023

Devant le jury :

M. Mohamed Ahmed BOUDREF	MCA	U. BOUIRA	Président
Mme Nassima MELOUANE	MAA	U. BOUIRA	Examinateur
Mme Souad RAFAA	MAA	U. BOUIRA	Examinateur
Mme Daya OUIDJA	MAA	U. BOUIRA	Encadreur

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Akli Mohand Oulhadj - Bouira
Tasdawit Akli Muhend Ulhag - Tubirett

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة أكلي محند أولحاج - البويرة

التصريح الشرفي الخاص بالالتزام بقواعد النزاهة العلمية لإنجاز بحث.

انا الممضي اسفله،

السيد(ة) سعيد ع. دلال الصفة: طالب (ماستر / دكتوراه)

الحامل(ة) لبطاقة التعريف الوطنية 119990327000400 والصادرة بتاريخ 2022/09/15

المسجل(ة) بكلية / معهد العلوم والعلوم التطبيقية قسم الرياضيات

تخصص: بحث عملياتي

والمكلف(ة) بإنجاز اعمال بحث(مذكرة، التخرج، مذكرة ماستر، مذكرة ماجستير، اطروحة دكتوراه).

عنوانها: Certains Théorèmes du point fixe et Applications

أصرح بشرفي اني ألتزم بمراعاة المعايير العلمية والمنهجية الاخلاقيات المهنية والنزاهة الاكاديمية المطلوبة في انجاز البحث المذكور أعلاه.

التاريخ: 04/07/2023

توقيع المعني (ة)

هيئة مراقبة السرقة العلمية:

البويرة في 2023/07/04

النسبة: 24 %

الامضاء

رئيس قسم الرياضيات

Certains théorèmes du point fixe et applications

Résumé

Le concept du point fixe joue un rôle essentiel dans le domaine des applications. Il est utilisé pour résoudre diverses équations différentielles non linéaires, en mettant l'accent sur les problèmes d'existence et d'unicité.

Dans ce mémoire, nous avons présenté les théorèmes du point fixe, tels que le théorème de Picard-Banach, de Brouwer, de Schauder et de Kannan, ainsi que quelques-unes de leurs applications. et dans notre mémoire, nous sommes limités à étudier leur existence et leur unicité à travers les théorèmes précédents.et enfin avons adopté un nouveau terme,qui est le principe de contraction de Banach et leur applications.

Mots clés : Point fixe, espace métrique, la convergence, principe de contraction de Banach...

Fixed point theorem and applications

Abstract

The concept of the fixed point plays an essential role in the field of applications. He is used to solve various nonlinear differential equations, with emphasis on existence and uniqueness problems. In this dissertation, we have explored fixed point theorems, such as the theorem of Picard-Banach, of Brouwer, of Schauder and of Kannan, as well as some of their applications. and in our memory we are limited to studying their existence and uniqueness through the previous theorems. and finally adopted a new term, which is the principle Banach contraction and their applications.

Key words : Fixed point, metric space, convergence, Banach contraction principle...

Dédicace

À tous les patients, qu'Allah leur accorde la guérison."

Et leur dernière prière était : "Louange à Allah, le Seigneur de tous les mondes."

Les paroles ne sont agréables qu'avec le rappel d'Allah et la gratitude pour Ses bienfaits, en ce jour grandiose de ma vie.

Au meilleur des hommes et au Prophète de la miséricorde, notre maître Muhammad, que les meilleures prières et bénédictions soient sur lui.

À celle qui a été mon soutien, dont les prières ont été mon trésor et le secret de ma réussite, ma chère mère bien-aimée, j'aimerais que ma plume puisse te rendre justice, ma précieuse pomme de mon œil.

À celui dont le nom est doux, bienveillant et sincère, tu es mon modèle et ma fierté dans la vie, mon cher père.

À celui qui a été le baume de mes blessures, celui qui m'a soutenu dans toutes mes faiblesses, l'épaule qui ne vacille jamais, mon frère Hamid, qui a joué le rôle d'un père.

À celui pour qui je ne peux décrire ma nostalgie et mon désir, car il est dans des contrées lointaines, mon frère Toufik.

À celui qui n'aime pas montrer son amour pour moi, mais qui est cher à mon âme et à mon cœur, mon cher et sage frère Hakim.

À la fragrance de la maison et à ses belles, mes chères sœurs Saad, Dalila, Amina et Fatima. Aux bourgeons de la maison,Chourouk , Amir et Noursin.

À mes amies fidèles, Hind, Samaah, Fati, Ferial, Rouqia, Amira et Safouria.

À toute la noble famille et à ceux que la plume n'a pas mentionnés, que vous soyez toujours mon plus grand soutien.

Merci a tous

Nedjah

Dédicace

Je dédie ce travail :

Aux êtres chers de mon cœur, mon père bien-aimé *Boualem* et ma mère bien-aimée *Hadda* qui ont un grand mérite auprès de Dieu Tout-Puissant pour ce que je suis maintenant. Et qui ont consacré leur vie à construire la nôtre.

A mes frères *Ismail* et *Idris* pour leur confiance, leur soutien et leurs encouragements.

A ma seconde moitié, ma seule sœur, son mari, et leurs deux fils : *Mouhammad* et *Anfal*.

Pour les famille : *Saidi* et *Bourahli*, petits et grands.

A mes amis et collègues *Radhia*, *Fatima*, *Amal*, et *Hayat*.

Aux proffesseurs de la Faculté de Mathématiques de l'Université d'Akli Muhand Oulhej et particulièrement à ma promotrice *Mme OUIDJA Daya* qui ont contribué à ma réussite.

Merci a tous

Dalal

Remerciements

Avant tout, nous souhaitons exprimer nos gratitude à l'infiniment Puissant pour la force et la persévérance qu'il nous a accordées tout au long de ces années d'études, en particulier lors de la réalisation de ce projet.
Nous tenons particulièrement à remercier notre superviseur, **Mme OUIDJA Daya**, pour sa patience et ses encouragements tout au long de cette période de formation.
Nous exprimons nos remerciement aux membres du jury qui ont accepté de juger notre travail, en l'occurence **Mr BOUDREF Mohamed-Ahmed** de présider le jury de soutenance et **Mme MELOUANE Nassima** et **Mme RAFAA Souad** qui m'ont fait l'honneur d'accepter d'évaluer ce travail.
Nous n'oublions pas de rendre hommage à nos précieux professeurs qui ont joué un rôle essentiel dans notre apprentissage.
Nous tenons également à exprimer notre profonde reconnaissance envers toutes les personnes qui nous ont apporté leur aide, que ce soit de près ou de loin.

Table des matières

NOTATIONS GÉNÉRALES

$\varepsilon, \lambda, \alpha, \phi, \varphi, \sigma, \delta$	: Des paramètres positives
X, Y	: Des ensembles non vide
$\mathbb{R}$	: L'ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^+$	: L'ensemble des nombres réels positifs.
$\mathbb{R}^n$	: L'espace Euclidien de dimension n.
$\mathbb{N}$	: L'ensemble des nombres naturels.
[a, b]	: l'intervalle fermé a $\leq x \leq b$.
C^k	: La classe des fonctions k fois continument dérivable sur un intervalle de$\mathbb{R}$.
$C^k([a, b])$	: L'espace des fonctions k fois continue différentiable$[a, b]$.
$\sup f(x)$	: La borne supérieur de la fonction f.
$\|.\|$	: Valeur absolue.
$\\|.\\|$	: La norme
$\\|.\\|_\infty$	: Norme infinie, $\|x\|_\infty = \sup\{\|x(t)\|, \|x^{'}\|_\infty\}$.
$\cup$	: Réunion.
$\cap$	: Intersection.
$\emptyset$	: L'ensemble vide.
$n\,!$	: factorielle n
$d(x, y)$	: La distance entre un point x et point y.
T	: Opérateur

Historique

L'histoire des théorèmes de point fixe remonte à plusieurs siècles. Les premiers développements significatifs dans ce domaine ont été réalisés par des mathématiciens tels que Pierre-Simon de Laplace, Carl Friedrich Gauss et Augustin-Louis Cauchy.
Le théorème du point fixe de Banach, qui est l'un des résultats les plus fondamentaux de cette théorie, a été établi par Stefan Banach au début du XXe siècle. Ce théorème énonce qu'une application contractante sur un espace complet possède un unique point fixe. Il a été largement utilisé dans de nombreux domaines des mathématiques et a ouvert la voie à de nombreuses extensions et généralisations.
D'autres théorèmes de point fixe ont été développés, tels que le théorème du point fixe de Brouwer, énoncé par Luitzen Egbertus Jan Brouwer en 1911. Ce théorème garantit l'existence d'un point fixe pour toute application continue d'un intervalle fermé dans lui-même, sans faire appel à la notion de contraction.
Au fil du temps, des mathématiciens tels que Schauder, Roman Kannan ... ont apporté des contributions importantes à la théorie des points fixes, en introduisant de nouvelles conditions et en établissant des résultats plus généraux.
Aujourd'hui, la théorie des points fixes continue de jouer un rôle central dans de nombreux domaines des mathématiques, tels que l'analyse fonctionnelle, la théorie des équations différentielles, l'économie mathématique et la physique mathématique. Elle constitue un outil essentiel pour étudier l'existence, l'unicité et les propriétés des solutions d'équations et de systèmes d'équations.

Introduction

Le théorème du point fixe de Leray-Schauder est une généralisation du théorème du point fixe de Brouwer à des espaces vectoriels topologiques de dimension infinie. Il a été démontré d'abord dans le cas des espaces de Banach par Juliusz Schauder.

Le but de ce mémoire est d'étudier plusieurs théorèmes sur les points fixes dans les espaces métriques. En mathématiques, un théorème sur les points fixes garantit l'existence de solutions pour l'équation $f(x) = x$, sous certaines conditions sur l'application f. La théorie des points fixes est essentielle car de nombreux problèmes mathématiques se réduisent souvent à la recherche de points fixes pour des applications non linéaires. De plus, des problèmes en physique, chimie et biologie peuvent être modélisés par des systèmes d'équations différentielles ou intégrales, qui se présentent sous forme d'équations abstraites $f(x) = x$, où l'application f est définie sur un ensemble E et renvoie à lui-même.

C'est pourquoi il est important d'étudier et de développer la théorie des points fixes. Le célèbre théorème du point fixe de Banach, connu sous le nom de principe de contraction de Banach, affirme qu'une contraction d'un espace métrique complet possède un point fixe unique. Ce théorème fournit également un algorithme d'approximation de ce point fixe en tant que limite d'une suite itérée. En revanche, d'autres théorèmes sur les points fixes tels que ceux de Brouwer, Schauder et Kannan garantissent seulement l'existence de points fixes sans donner de méthode pour les déterminer.

Cependant, démontrer qu'une application est une contraction peut nécessiter des calculs laborieux. Par conséquent, il est nécessaire d'étendre et de généraliser le principe de contraction de Banach afin d'élargir son domaine d'application et de bénéficier de ses avantages.

Dans cette optique, quatre résultats pionniers fondamentaux ([13]) existent (le théorème de Banach, Brouwer, Schauder et Kannan). Ces quatre résultats sont de natures différentes et servent de base à la classification des méthodes de points fixes selon une approche métrique et une approche topologique.

Le théorème de l'application contractante, prouvé par Banach en 1922, affirme qu'une contraction d'un espace métrique complet en lui-même possède un point fixe unique. Cependant, d'une part, démontrer que la fonction est une contraction peut nécessiter des calculs laborieux, et d'autre part, les conditions sur la fonction et l'espace étudié limitent les applications de ce résultat.

Le théorème du point fixe de Brouwer est un résultat de topologie algébrique. Sous sa forme la plus simple, ce théorème exige seulement la continuité de l'application d'un intervalle fermé borné en lui-même.

Le théorème de point fixe de Schauder,[9] formulé par Schauder en 1930, constitue une généralisation du célèbre théorème de point fixe de Brouwer. Ce théorème énonce que toute application continue définie sur un ensemble convexe compact possède au moins un point fixe, sans toutefois garantir son unicité. Contrairement au théorème de Banach, il n'est pas nécessaire d'établir des estimations spécifiques sur la fonction, mais simplement de vérifier sa continuité. Cette caractéristique offre une plus grande flexibilité dans l'analyse de divers cas, y compris des situations impliquant l'identité.

Les applications des résultats relatifs aux points fixes sont multiples et variées. Les points fixes de nature métrique, tels que ceux introduits par Banach et ses extensions, jouent un rôle essentiel dans l'étude des équations fonctionnelles, y compris les équations différentielles.

Le document est compose d'une introduction et de trois chapitres :

Premier chapitre : intitulé « Préliminaires » , on va rappeler quelques concepts préliminaires comme l'espace métrique, Suite de Cauchy, l'espace topologique , l'espace de Banach , la convexité et la compacité, l'homéomorphisme et quelques notions sur les équations différentielle.

Deuxième chapitre : intitulé « Quelques théorèmes du points fixe » on va introduit quelques définitions et quelques théorèmes importants du point fixe.

Il est structuré en trois sections :

La $1^{ére}$ section on va donner la définition de : point fixe , application lipschitzienne et application contractante et aussi la nature de point fixe.

La $2^{éme}$ section on va présenter les différent classification de point fixe et certaines de ses théories (picard-Banach, Brouwer, schauder et Kannan), avec des preuves et des exemples.

La $3^{éme}$ section on va introduit la convergence dans le cadre de théorème de point fixe (la condition nécessaire de convergence et la convergence globale et locale).

Troisième chapitre : intitulé « Principe de contraction de banach et application » on va introduit quelques théorèmes importants de ce principe donc ce dernier chapitre divisée comme suit :

• les sections 1 et 2 sont consacrées aux théorème de principe de contraction de Banach et leur applications.

Quatrième chapitre : intitulé « Applications » est consacré à une résolution de quelques exemples d'applications.

Enfin, on a terminé ce travail par une conclusion générale qui résume tous les résultats importants obtenus dans le cadre de ce travail et quelques perspectives.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre nous permettra de revoir certaines notions clés de l'analyse fonctionnelle.

1.1 Espaces topologiques

Soit Y un ensemble non vide et soit $P(Y)$ l'ensemble de partie de Y.

Définition 1.1.
On appelle τ une topologie sur Y toute partie de $P(Y)$ vérifiant les conditions suivantes :
1. $Y \in \tau$ et $\emptyset \in \tau$.
2. La famille est stable pour la réunion quelconque de parties de τ , c'est-à-dire

$$\forall (U_i)_i \in Y \subset \tau,\ alors \bigcup_{i\in I} U_i \in \tau.$$

3. La famille τ est stable pour l'intersection finie de parties de τ , c'est-à-dire
$\forall (U_i), i = 1...n \in \tau,$ alors $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \tau.$

- Le couple (Y, τ) est appelé *un espace topologique.*
- On le note souvent par Y.

Définition 1.2 (Homéomorphe).
Un homéomorphisme est une application bijective continue d'un espace topologique dans un autre, dont la bijection réciproque est continue. Dans ce cas, les deux espaces topologiques sont dits *homéomorphes.*

1.2 Espace métrique

Définition 1.3. Soit Y un ensemble non-vide. On dit qu'une application :

$$d : Y \times Y \longrightarrow \mathbb{R}^+$$
$$(x, y) \longmapsto d(x, y)$$

d est *une distance* sur Y si elle vérifie les trois axiomes suivants :

1. séparation : $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. symétrie : pour tout $(x, y) \in Y, d(x, y) = d(y, x)$.
3. inégalité triangulaire : pour tout $(x, y, z) \in X$, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

On appelle espace métrique tout couple (Y, d) oú $Y \neq \emptyset$ est un espace vectoriel et d est une distance.

Définition 1.4 (Suite de Cauchy).
On raconte que la suite $(x_n)_n$ dans l'espace métrique (Y, d) est dite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon > 0,\ telque\ \forall n, m > N_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon \tag{1.1}$$

Cela signifie que :
Si $(n, m) \to \infty$ alors la distance $d(x_n, x_m) \to 0$,

Définition 1.5 (Espace métrique complet).
Il est dit que (Y, d) est un espace métrique complet si toute suite de Cauchy de Y converge en Y.

Définition 1.6 (Espace vectoriel normé).
Considérons Y comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Une norme sur $\mathbb{R}$ est une fonction $\|.\|$ définie comme suit :

$$\begin{aligned} \|.\| : Y &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto \|x\| \end{aligned}$$

qui satisfait les conditions suivantes :
$N1$. séparation. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
$N2$. homogénéité positive :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in Y : \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|. \tag{1.2}$$

$N3$. inégalité triangulaire :

$$\forall x, y \in Y : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|. \tag{1.3}$$

Un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ équipé d'une norme est appelé espace vectoriel normé (e.v.n).

Soit Y un e.v.n., il est important de noter que tout espace normé est également un espace métrique. Ainsi, l'application suivante :

$$\begin{aligned} d : Y \times Y &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) &\longmapsto d(x, y) = \|x - y\|, \end{aligned}$$

est appelée *la distance induite par la norme.*

Compacité

Définition 1.7.
Considérons (Y, τ) comme un espace topologique. On dit qu'il est compact si et seulement s'il est à la fois séparé et si, pour toute couverture de Y par des ouverts on peut extraire une sous-couverture finie. Une partie d'un espace topologique est dite compacte si elle est compacte pour la topologie induite.

Proposition 1.1. *1. Un espace compact est fermé.*
2. On a identitée entre les fermés d'un compact et les compacts d'un compact.
3. Toute suite d'un compact admet une valeur d'adhérence.
4. Un espace compact est complet.

Proposition 1.2 (Compacité dans un espace métrique)**.**

— *Dans un espace métrique tout compact est borné.*

— *Les fermées bornés d'un espace vectorielle normé de dimension fini sont exactement les compacts.*

Théorème 1.1.
(Y, d) *compact si seulement si toute suite admet une sous-suite convergente.*

Corollaire 1.1.
Une partie A *de* (Y, d) *est relativement compacte si et seulement si toute suite de* A *converge dans* Y*.*

Convexité

Définition 1.8 (Ensemble convexe)**.**
Soit $G \subset F$ est un ensemble convexe si :

$$\forall \beta \in [0,1], \forall (x,y) \in G^2, \quad \beta x + (1-\beta) y \in G. \tag{1.4}$$

Définition 1.9 (Fonction convexe)**.**
Soit $G \subset X$ un ensemble convexe [11] et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction convexe sur G si :

$$f(\beta y + (1-\beta)x) \leq \beta f(y) + (1-\beta) f(x), \forall x, y \in G, \forall \beta \in [0,1] \tag{1.5}$$

1.2.1 Les applications contractantes

Soit $E = [\frac{2}{3}, +\infty[$, muni de la distance usuelle. Nous allons définir l'application f de E vers $\mathbb{R}$ de la manière suivante :

$$f(x) = \frac{4x+1}{3x+2}$$

Pour tous $x, y \in E$ on a :

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)| &= \left|\frac{4x+1}{3x+2}-\frac{4y+1}{3y+2}\right| \\ &= \left|\frac{8(y-x)}{(3x+2)(3y+2)}\right| \\ &\leq \frac{8}{16}\,|x-y| \\ &= \frac{1}{2}\,|x-y|\,.\end{aligned}$$

Donc, f est une contraction.

Exemple : (Application contractante)

Soit $E=[\frac{2}{3},+\infty[$, muni de la distance usuelle. On définit l'application f de E dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\frac{2x+6}{3x+2}$$

Pour tous $x,y\in E$ on a :

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)| &= \left|\frac{2x+6}{3x+2}-\frac{2y+6}{3y+2}\right| \\ &= \left|\frac{14(y-x)}{(3x+2)(3y+2)}\right| \\ &\leq \frac{14}{16}\,|x-y| \\ &= \frac{7}{8}\,|x-y|\,.\end{aligned}$$

Donc, f est une contraction.

Exemple : (Application Lipschitzienne)

Soit $E\subset\mathbb{R}^+$, et f défini par :

$$f(x)=\frac{1}{1+x}$$

Et pour tout $x\in\mathbb{R}^+$ on a :

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)| &= \left|\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+y}\right| \\ &= \left|\frac{1(1+y)-1(1+x)}{(1+x)(1+y)}\right| \\ &= \left|\frac{1+y-1-x}{(1+x)(1+y)}\right| \\ &= \frac{|y-x|}{(1+x)(1+y)} \\ &\leq |x-y|\,.\end{aligned}$$

C'est-à-dire f est lipschitzienne de rapport 1 sur $\mathbb{R}^+$ donc, elle l'est aussi sur $\mathbb{R}$.

Exemple : (Application contractive)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, telle que :

$$f(x) = \frac{x}{3}$$

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)| &= \left|\frac{x}{3}-\frac{y}{3}\right| \\ &= \frac{1}{3}\,|x-y| \\ &< |x-y|\,.\end{aligned}$$

Donc, f est une application contractive.

Exemple (Application non expansive)

soit la fonction f défini par $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ telle que :

$$f(x) = \frac{x}{1+x}.$$

Pour tous x, y dans E on a :

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)| &= \left|\frac{x}{1+x}-\frac{y}{1+y}\right| \\ &= \left|\frac{x(1+y)-y(1+x)}{(1+x)(1+y)}\right| \\ &= \left|\frac{x-y}{(1+x)(1+y)}\right| \\ &= \frac{|x-y|}{(1+x)(1+y)} \\ &\leq |x-y|\,.\end{aligned}$$

Alors f est non expansive.

Proposition 1.3.
Une application contractante est continue.

1.3 Opérateurs compacts

1.3.1 Opérateurs linéaires compacts

Un opérateur linéaire $T : E \longrightarrow F$ est compact si pour tout ensemble borné $G \subset E$, l'image $T(G)$ est un ensemble relativement compact dans F. Autrement dit, [4] la fermeture de l'image $T(G)$ est compact.

1.3.2 Ensemble relativement compacts :

Un ensemble $G \subset E$ est *relativement compact* si pour toute suite $\{u_n\}$ de G ; il existe une sous suite $\{u_{n_{(k)}}\}$ qui converge dans F.

Théorème 1.2 (Critére de compacité). *[4]*
Un opérateur linéaire $T : E \longrightarrow F$ est compact si et seulement si pour tout suite bornée φ_n de E, la suite $T\varphi_n$ contient une sous suite convergente de F.

Théorème 1.3.
Une combinaison linéaire $T = \alpha T_1 + \beta T_2$ des opérateurs compacts est un opérateur compact.

Théorème 1.4.
Le produit TB de deux opérateurs bornés T et B est compact si l'un des opérateur T ou B est compact.

Théorème 1.5.
Soit E un espace normé et F un espace de Banach, et soit A une suit d'opérateurs compacts de E dans F, convergente en norme vers l'opérateur linéaire T de E dans F

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n - A\| = 0 \tag{1.6}$$

alors T est compact.

Théorème 1.6.
L'opérateur identique I de E dans E est compact si et seulement si E est de dimension finie.

Corollaire 1.2.
La boule unité $B(0;1)$ dans un espace de dimension infinie n'est pas compact.

1.4 Quelques notions sur les équations différentielles

Les équations différentielles sont importantes dans divers domaines, y compris la science et l'ingénierie. C'est un outil essentiel pour comprendre les phénomènes dynamiques, car il permet d'appréhender le comportement de systèmes complexes. Enfin, nous concluons qu'il a une base solide en mathématiques pures et appliquées.

Equations différentielles ordinaires

Définition 1.10.
Une équation différentielle ordinaires (EDO) est un relation entre x et $y(x)$ telle que x variable indépendant et soit $y(x)$ fonction inconnu qui est à la forme :

$$F(x, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{1.7}$$

et soit n l'ordre de cette équation donc le but est de trouver $y(x)$ qui satisfait l'équation différentielle donnée.

Équation différentielles ordinaire linéaire

D'après l'équation précédent de type (1.1) d'ordre n est linéaire si elle est notée généralement par :

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x), \tag{1.8}$$

avec tous les $y^i_{(i)}$ de degré 1 et tous le coefficients dépendant au plus de x.
1. L'équation :

$$y''(x) + 7y'(x) + y(x) = 0 \tag{1.9}$$

est une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre deux à coefficient constantes.
2. L'équation :

$$(x-3)y'''(x) + xy'(x) - 4y = e^{(x)} \tag{1.10}$$

est une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 3 à coefficients dépendant de x.

Équation différentielles autonome

Définition 1.11.

L'équation différentielle indépendante est celle dans laquelle la variable n'apparaît pas clairement car elle ne dépend pas du résultat indépendant x et de son expression générale :

$$\frac{dy}{dx} = f(y) \tag{1.11}$$

oú y est la variable dépendante et f est une fonction de y.

Classification des équations différentielles du premier ordre

Nous allons nous concentrer sur la résolution d'équations différentielles du premier ordre. Malheureusement, il n'existe aucun moyen cohérent de trouver des solutions[4]. La procédure à suivre dépend du type d'équation. Par conséquent, ils sont classés en trois catégories principales.Ils sont les suivants :

-Équation dont on peut séparer les variables.

-Équation homogènes (où les termes sont du même degré).

-Équation linéaires où y et y' sont au premier degré.

Trois types d'équations du premier ordre sont particulièrement importants, car nous en avons besoin dans de nombreux domaines. En plus de ces types d'équations, nous avons également des types d'équations spéciales, notamment les équations de Bernoulli, de Riccati, de Clairaut et de Lagrange.

Formule de Bernoulli : Les équations de Bernoulli sont des équations non linéaires du premier ordre qui peuvent être facilement converties en une équation linéaire. Il s'exprime comme suit :

$$\beta(x)y' + b(x)y + c(x)y^m = 0. \tag{1.12}$$

$\beta(x)$, $b(x)$ et $c(x)$ sont des fonctions continues sur un intervalle I et m est un exposant réel différent de 1.

Formule de Ricatti : Les équations de Ricatti sont des équations de Bernoulli avec $m = 2$ et incluent une seconde période membre. Ils sont représentés comme suit :

$$\beta(x)y' + b(x)y + c(x)y^2 = f(x) \tag{1.13}$$

Les fonctions $\beta(x)$, $b(x)$, $c(x)$ et $f(x)$ sont continues sur un intervalle de temps I.

Formule de Lagrange : Les équations de Lagrange sont des équations linéaires en deux variable x et y, c'est sous la forme suivante :

$$y + \beta(y')x + b(y) = 0 \tag{1.14}$$

Formule de Clairaut : L'équation de Clairaut est l'équation de Lagrange avec $f \equiv Id$ (oú Id est la fonction identité, c'est-à-dire $Id(y) = y$). Autrement dit, il est de la forme :

$$y = xy' + g(y) \tag{1.15}$$

oú g est une fonction définie et différentiable sur un certain intervalle J de $\mathbb{R}$.

Équation différentielles linéaires du premier ordre

On donne le nom d'équation différentielle linéaire du premier ordre à une équation linéaire en fonction de la fonction inconnue et de sa dérivée. Une telle équation prend la forme suivante :

$$a(x)y' + b(x)y = c(x), \tag{1.16}$$

où a, b et c sont des fonctions données de x. $a(x)$ et $b(x)$ sont appelés les coefficients, tandis que $c(x)$ est le second membre. À cette équation, on associe l'équation sans second membre suivante :

$$a(x)y' + b(x)y = 0, \tag{1.17}$$

qui est une équation à variables séparables.

Problème de Cauchy

Un probléme de Cauchy [4] est défini par une équation différentielle et une condition initiale, où l'on cherche une solution qui satisfait cette condition. La nature de l'équation différentielle détermine la forme spécifique de la condition initiale.

Soit V un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $g : V \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Définition 1.12.

Dans le contexte d'une équation différentielle du premier ordre, exprimée sous la forme suivante :

$$y_0(t) = g(t, y),$$

pour $(t, y(t)) \in V$, et un point $(t_0, y_0) \in V$, le problème de Cauchy correspondant vise à trouver des solutions $y = y(t)$ telles que $y(t_0) = y_0$. On désigne le problème de Cauchy comme suit :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \quad (t, y(t)) \in V \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{1.18}$$

Définition 1.13.

Une solution du problème de Cauchy (1.18) sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ avec la condition initiale $(t_0; y_0) \in V$ et $t_0 \in I$ est une fonction dérivable $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

— pour tout $t \in I, (t, y(t)) \in V$,

— pour tout $t \in I, y_0'(t) = f(t, y(t))$,

— $y'(t_0) = y_0$,

Théorème 1.7.

Une fonction $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une solution du problème de Cauchy (1.18) si et seulement si :
1. La fonction y est continue et $\forall t \in \mathbb{R}, \quad (t, y(t)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

2. La solution y du problème de Cauchy est appelée l'intégrale du problème :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = y_0 + \int_t^{t_0} f(s, y(s))ds.$$

Exemple 1.1.

Soit l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} y' = 2x, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

Pour résoudre ce problème de Cauchy, nous devons trouver une fonction $y(x)$ qui satisfait à la fois l'équation différentielle et la condition initiale.

En intégrant l'équation différentielle, on obtient :

$$y = x^2 + c,$$

c est une constante d'intégration.

En utilisant la condition initiale :

$$y(0) = 1 \Rightarrow c = 1.$$

Ainsi, la solution du problème de Cauchy est :

$$y(x) = x^2 + 1$$

Cette équation représente la solution générale du problème de Cauchy donné.

Chapitre 2

Quelques théorèmes du point fixe

2.1 Point fixe

2.1.1 Définition de point fixe

Soit f une application définie par $f : Y \to Y$, tel que (Y, d) un espace métrique ([12]) et $x \in Y$ est un point fixe de f si $f(x) = x$.

Proposition 2.1.

— *Soit I un segment de $\mathbb{R}$ alors toute fonction continue $f : I \to I$ admet un point fixe.*

— *Soit l'application $f : I \to \mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset I$, alors toute fonction continue f admet un point fixe.*

Exemple 2.1.

Soit f une fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 4x + 1$$

on va chercher les points fixes de l'application f

$$\begin{aligned} &f(x) = x \\ &\Leftrightarrow 4x + 1 = x \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

alors f admet un seul point fixe dans $\mathbb{R}$

2.2 Quelques théorèmes du point fixe

Nous étudions dans cette section quelques théorèmes du point fixe. On commence par le théorème du point fixe de Picard-Banach et le théorème de Brouwer suit par le théorème de Schauder et Kannan avec quelques définitions et des preuves et des exemples.

2.2.1 Théorème du point fixe de Picard-Banach

Théorème 2.1. *[8]*

Soient (Y, d) un espace métrique complet et $f : Y \to Y$ une application m-contractante. Alors :

1. f admet un unique point fixe $a \in Y$,

2. pour tout $x_0 \in Y$, la suite des itérées de x_0 par f, définie par $x_n := f^n(x_0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, converge vers a

3. la convergence est géométrique :

$$\forall n \in \mathbb{N}, d(x_n, a) \leq \frac{m^n}{1-m} d(x_1, x_0). \tag{2.1}$$

Preuve.

Soit $x_0 \in Y$. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie comme dans 2 , alors pour tout $p \geq q$,

$$d(x_p, x_q) = d(f^p(x_0), f^q(x_0)) \leq m^q d(f^{p-q}(x_0), x_0). \tag{2.2}$$

Par inégalité triangulaire et le calcul précédent, on a

$$\begin{aligned} d(f^{p-q}(x_0), x_0) &\leq d(f^{p-q}(x_0), f^{p-q-1}(x_0)) + \cdots + d(f(x_0), x_0) \\ &\leq (m^{p-q-1} + \cdots + m + 1) d(f(x_0), x_0) \\ &\leq \frac{1}{1-m} d(f(x_0), x_0). \end{aligned}$$

Ainsi, étant donné que $0 < m < 1$,

$$d(x_p, x_q) \leq \frac{m^q}{1-m} d(x_1, x_0) \longrightarrow_{q\to+\infty} 0, \tag{2.3}$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre naturel n tel que, pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, $d(x_p, x_q) < \varepsilon$. Cela démontre que la suite $(x_n)n$ est une suite de Cauchy. Étant donné que l'espace (Y, d) est complet, cette suite converge vers un certain élément $a \in X$. De plus, comme f est une fonction contractante, elle est continue. En passant à la limite lorsque n tend vers l'infini dans la relation $x_{n+1} = f(x_n)$, on obtient $a = f(a)$. Ainsi, f possède un point fixe, noté a. Il est intéressant de noter que, en passant à la limite lorsque p tend vers l'infini dans la relation (2.3), on peut montrer que la convergence est géométrique. Enfin, si $a^{'}$ est un autre point fixe de f appartenant à Y, alors $d(f(a), f(a^{'})) = d(a, a^{'}) \leq md(a, a^{'})$, ce qui implique $a = a^{'}$.
Ainsi, l'application f possède un unique point fixe.
Ce théorème reste valide si l'on généralise l'hypothèse selon laquelle « f est une fonction contractante en « l'une des itérées de f est une fonction contractante ».

Théorème 2.2. *[8]*

Considérons (Y, d) comme un espace métrique complet et $f : Y \to Y$. Supposons qu'une certaine itérée f^p de f soit m_p-contractante. Alors, f possède un unique point fixe $a \in X$. Et pour tout $x_0 \in X$, la suite des itérées de x_0 par f, définie par $x_n := f^n(x_0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, converge vers a.

La convergence est géométrique, et il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, ; d(x_n, a) \leq C m_p^{r/p}. \tag{2.4}$$

Preuve.

Appliquons le théorème du point fixe de Picard-Banach à la fonction f^p, ce qui garantit l'existence et l'unicité d'un point fixe $a \in X$ pour f^p. En observant d'une part que $f^{p+1}(a) = f(f^p(a)) = f(a)$, et d'autre part que $f^{p+1}(a) = f^p(f(a))$, nous concluons que $f(a)$ est un point fixe de f^p et, par unicité, $f(a) = a$. De plus, un point fixe de f est également un point fixe de f^p, ce qui confirme l'unicité du point fixe de f. En outre, pour tout entier naturel n, nous considérons la division euclidienne de n par p : $n = pq + r$, afin de démontrer que cette propriété est vérifiée pour tout $x_0 \in Y$.

$$d(f^n(x_0), a) \leq \frac{m_p^n}{1-m} d(f^n(x_0), x_0). \tag{2.5}$$

Le théorème du point fixe de Picard-Banach trouve son utilité dans les démonstrations de divers théorèmes fondamentaux. On peut notamment citer les théorèmes d'inversion locale et le théorème de Cauchy-Lipschitz. Ce résultat joue un rôle central dans ces différentes théories.

Variations sur le Théorème de Picard

Proposition 2.2.

Supposons qu'il existe une application continue $f : C \to C$, où C est un espace compact métrisable. De plus, pour tout couple de points distincts (x, y) de C, nous avons l'inégalité $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$. Dans ce cas :

1.L'application f possède un point fixe unique a dans C.

2.Pour tout point initial $x_0 \in C$, la suite $(f^n(x_0))_n$ converge vers le point fixe a

Exemple 2.2.

soit f une fonction définie par :

$$\begin{aligned} f : [-\pi, \pi] &\to [-1, 1], \\ x &\to \sin x, \end{aligned}$$

donc la fonction f admet un point fixe unique (en l'occurrence 0).

2.2.2 Théorème du point fixe de Brouwer

Le théorème de Brouwer est la théorie fondamentale d'un point fixe dans un espace de dimension finie, et a été démontré par *le mathématicien néerlandais Luitzen Egbertus Jan Brouwer en 1912*. Le théorème de Banach s'applique uniquement aux espaces métriques complets et aux fonctions contractantes, tandis que le théorème de Brouwer s'applique aux espaces euclidiens compacts et convexes et à toutes les fonctions continues. Il est utilisé dans des nombreux domaines des mathématiques et des sciences, en particulier en topologie, analyse, géométrie et l'économie mathématique. Il est également connu sous le nom de *principe de non-rétroactivité de Brouwer* oú *théorie du point fixe*. Qui confirment les théories suivantes :

Théorème 2.3. *[7]*

Soit $f : C \to C$ une fonction continue, tel que $C \subset E$ un sous ensemble non vide compact convexe de $\mathbb{R}^n$. Alors il existe $x \in E$ tel que $f(x) = x$.

Remarque 2.1.

Le théorème de Brouwer prends plusieurs formes selon le contexte d'utilisation, pour $n = 1$ il prend la forme suivant

Théorème 2.4. *[5]*

Si $f : [a, b] \to [a, b]$ continue, alors il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = x$.

Remarque 2.2.

Dans $\mathbb{R}$ les partie compactes et convexes sont les segments.

Preuve.

Si f est continue sur $[a, b]$ dans lui même, la fonction $g(x) = f(x) - x$ est continue, de plus

$$g(a) = f(a) - a \geq 0 \text{ et } g(b) = f(b) - b \leq 0.$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un point x_0 tel que $g(x_0) = x_0$, c'est-à-dire $f(x_0) = x_0$ (x_0 est le point fixe de f).

Remarque 2.3.

1. Si " I fermé " n'est là que pour assurer que $x_0 \in I$. Si on sait déjà, par ailleurs, que $x_0 \in I$ (en pratique, on a parfois déjà calculé l en résolvant l'équation $f(x_0) = x_0$), cette hypothèse devient inutile.

2. Le théorème du point fixe ne s'applique pas si "f contractante sur I" par l'hypothèse "f 1-lipschitzienne sur I".

Exemple 2.3.

On a un contre-exemple : soit , $I = [1, +\infty[$ et $f : I \to I$.

telle que,

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

.

On suppose que x et y dans I tel que $x < y$, Comme la fonction f est croissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$, on a :

$$|f(y) - f(x)| \leq f(y) - f(x)$$

donc,

$$|f(y) - f(x)| \leq y - x + \frac{x - y}{xy}$$

alors,

$$|f(y) - f(x)| \leq y - x \leq |y - x|.$$

Cependant f n'a pas de point fixe sur I (L'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution) Ainsi, la fonction f est lipschitzienne sur l'intervalle I avec une constante de Lipschitz égale à 1.

Cependant, f ne possède aucun point fixe sur I. En d'autres termes, l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution dans cet intervalle.

Théorème 2.5. *[7]*
Soit f une application continue du disque fermé dans lui même, alors f admet au moins un point fixe.

Remarque 2.4.

- Dans le plan, les parties compactes et convexes sont des disques fermés ou bien des boules fermées.

- Le théorème de Brouwer, bien qu'il soit remarquable, ne garantit pas l'unicité des points fixes. En effet, chaque point de l'ensemble C est un point fixe de l'application identité.

Théorème 2.6. *[7]*
Toute application f continue de la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même admet un point fixe, ce point fixe n'est pas forcement unique.

2.2.3 Théorème du point fixe de Schauder

Le théorème de point fixe de Schauder a été démontré pour la première fois par *le mathématicien allemand Juliusz Schauder en 1930*. Il s'agit d'une généralisation du théorème de Brouwer pour prouver un point fixe d'une application continue sur convexes compact dans un espace de Banach. Il affirme qu'une application continue sur un convexe compact a un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique, il a utilisé des techniques d'analyse fonctionnelle et de topologie pour le prouver.

Le théorème du point fixe de Schauder a eu un impact profond sur les mathématiques. C'est un outil puissant pour montrer les solutions aux équations aux dérivées partielles non linéaires. La théorie a ouvert la voie à de nombreuses découvertes importantes dans le domaine.

Théorème 2.7. *[7]*
Supposons que $f : C \to C$ une application continue et C un sous ensemble non vide, compact et convexe dans un espace Banach E, alors f admet un point fixe.

Preuve.
Considérons C, un sous-ensemble compact et convexe d'un espace de Banach E, et soit $f : C \to C$ une application continue. Étant donné que C est compact, f est uniformément continue. Ainsi, fixons $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in C$, nous avons :

$$|x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

De plus, il existe un ensemble $\{x_1, x_2, \dots, x_l\} \subset C$ tel que $C \subset \bigcup_{1 \leq j \leq l} B(x_j, \delta)$.
Soit $L := \mathrm{vect}(f(x_j))_{1 \leq j \leq l}$, alors L est de dimension finie et $C^* := C \bigcap, L$ est un sous-ensemble compact et convexe de dimension finie. Pour tout $1 \leq j \leq \ell$, nous définissons les fonctions continues $\psi : E \to \mathbb{R}$ par :

$$\psi_j = \begin{cases} 0 & \text{si} |x - x_j| \geq \delta \\ 1 - \frac{|x - x_j|}{\delta} & \text{sinon,} \end{cases}$$

ψ_j est strictement positive sur $B(x_j, \delta)$ et nulle ailleurs. On a donc pour tout $x \in C$,

$$\sum_{j=1}^{\ell} \psi_j(x) > 0.$$

Ainsi, nous pouvons définir sur C des fonctions continues positives ε_j en utilisant l'expression :

$$\varepsilon_j(x) = \frac{\psi_j(x)}{\sum_{r=1}^{\ell} \psi_m}$$

pour les quelles, on a $\sum_{j=1}^{\ell} \varepsilon_j(x) = 1$, pour tout $x \in C$.
Posant, pour $x \in C$

$$g(x) = \sum_{j=1}^{\ell} \varepsilon_j(x) f(x_j)$$

. La fonction g est continue et ses valeurs appartiennent à C^*. Le théorème de Brouwer garantit que la restriction $g/C^* : C^* \to C^*$ possède un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $z \in C^*$ tel que $g(z) = z$. De plus :

$$\begin{aligned} f(z) - z &= f(z) - g(z). \\ &= \sum_{j=1}^{\ell} \varepsilon_j(z) f(z) - \sum_{j=1}^{\ell} \varepsilon_j(x) f(x_j). \\ &= \sum_{j=1}^{\ell} \varepsilon_j(z) \left[f(z) - f(x_j) \right]. \end{aligned}$$

On a, si $\varepsilon_j(z) \neq 0$ alors $\|z - x_j\| < \delta$, et par suite $\|f(z) - f(x_j)\| < \varepsilon$. On a donc pour tout j :

$$\begin{aligned} \|f(z) - z\| &\leq \sum_{j=1}^{\ell} \varepsilon_j(z) \|f(z) - f(x_j)\|. \\ &\leq \sum_{j=1}^{\ell} \varepsilon_j(z) \varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

Pour tout entier r, nous pouvons trouver un point $y_r \in C$ tel que :

$$\|f(z_r) - z_r\| < 2^{-r}.$$

Et étant donné que C est compact, nous pouvons extraire une sous-suite (z_{rm}) de la suite $(z_r)_{r \in Z}$ qui converge vers un point $z^* \in C$. Puisque f est continue, la suite $(f(z_{rm}))$ converge vers $f(z^*)$, et nous en concluons que $f(z^*) = z^*$. Cela signifie que z est un point fixe de f sur C. Le théorème de Brouwer assure que la restriction $g/c^* : C^* \to C^*$ possède un point fixe $z \in C^*$. De plus :

$$\begin{aligned} f(z) - z = f(z) - g(z). \\ &= \sum_{j=1}^{\ell} \varepsilon_j(z) f(z) - \sum_{j=1}^{\ell} \varepsilon_j(x) f(x_j). \\ &= \sum_{j=1}^{\ell} \varepsilon_j(z) \left[f(z) - f(x_j) \right]. \end{aligned}$$

On a si $\varepsilon_j(z) \neq 0$ alors $\|z - x_j\| < \delta$, et par suite $\|f(z) - f(x_j)\| < \varepsilon$. On a donc pour tout j

$$\begin{aligned} \|f(z) - z\| &\leq \sum_{j=1}^{\ell} \varepsilon_j(z) \|f(z) - f(x_j)\|. \\ &\leq \sum_{j=1}^{\ell} \varepsilon_j(z) \varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

Pour tout entier r, en peut trouver un point $y_r \in C$ tel que :

$$\|f(z_r) - z_r\| < 2^{-r}.$$

et puisque C est compact, on peut extraire une sous suite (z_{rm}) de la suite $(z_r)_{r \in Z}$
et qui converge vers un point $z^* \in C$.
Alors f étant continue, la suite $(f(z_{rm}))$ converge vers $f(z^*)$, et on conclut par la suite que $f(z^*) = z^*$ i.e z^* est un point fixe de f sur C.

Théorème 2.8. *[5]*
Soit X un espace de Banach , C un convexe fermé de X et T une application continue de C dans C telle que $T(C)$ soit relativement compact, alors T admet un point fixe.

Théorème 2.9. *[5]*
Soit X un espace de Banach, $C \subset X$ un ensemble convexe, fermé, borné et non vide, et soit $T : C \to C$ un opérateur complétement continu, alors T admet au moins un point fixe.

2.2.4 Théorème du point fixe de Kannan

Le théorème de Kannan est une conséquence importante de la théorie du point fixe qui porte le nom du mathématicien indien Vanjipurapu Venkata Ramanan Kannan. Cette théorie a été publiée pour la première fois en 1965. Et il a diverses applications dans le domaine des mathématiques et de la physique, notamment dans la théorie des points fixes, afin de prouver l'existence de solution à certaines équations différentielles, là où les chercheurs ont pu prouver que ces équations ont au moins une solution. C'est une condition nécessaire pour appliquer des méthodes de contrôle optimales, ce qui a conduit au développement de nombreuses autres théories et résultats concernant les points fixes qui sont liés et non automatiquement liés.

Définition 2.1. [2]

Soient (Y, d) un espace métrique et $T : Y \to Y$. On dit que T est *une application de Kannan* s'il existe un nombre réel $\alpha \in [0, \frac{1}{2}[$ tel que pour tout $x, y \in Y$, on a :

$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha \left[d(x, T(x)) + d(y, T(y)) \right] \tag{2.6}$$

Exemple 2.4.

Soients $Y = [0, 2] \subset \mathbb{R}$, l'ensemble des nombres rèels munit de la distance usuelle et l'application $T : Y \to Y$ définie par :

$$T(x) = \begin{cases} \frac{x}{9} & \text{si } x \in Y_1 = [0, 1] \\ \frac{x}{10} & \text{si } x \in Y_2 = [1, 2] \end{cases}$$

On vérifier que T satisfait (2.6) . Soient $x, y \in Y_1$, on a :

$$\begin{aligned} d(x, T(x)) &= \left| x - \frac{x}{9} \right| = \frac{8x}{9}, \\ d(y, T(y)) &= \left| y - \frac{y}{9} \right| = \frac{8y}{9}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d(T(x), T(y)) &= \left| \frac{x}{9} - \frac{y}{9} \right| \leq \frac{1}{9}(x + y) \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{8}{9} \right) (x + y) \\ &= \frac{1}{8} \left[d(x, T(x)) + d(y, T(y)) \right]. \end{aligned}$$

Si $x, y \in Y_2$,

$$\begin{aligned} d(x, T(x)) &= \left| x - \frac{x}{10} \right| = \frac{9x}{10}, \\ d(y, T(y)) &= \left| y - \frac{y}{10} \right| = \frac{9y}{10}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d(T(x), T(y)) &= \left| \frac{x}{10} - \frac{y}{10} \right| \leq \frac{1}{10}(x + y) \\ &= \frac{1}{9} \left(\frac{9}{10} \right) (x + y) \\ &= \frac{1}{9} \left[d(x, T(x)) + d(y, T(y)) \right]. \\ &\leq \frac{1}{8} \left[d(x, T(x)) + d(y, T(y)) \right]. \end{aligned}$$

Donc
$$d\left(T(x), T(y)\right) \leq \left[d\left(x, T(x)\right) + d\left(y, T(y)\right]\right..$$
Soient maintenant $x \in Y_1$ et $y \in Y_2$, alors
$$d(x, T(x)) = \left|x - \frac{x}{9}\right| = \frac{8x}{9},$$
$$d(y, T(y)) = \left|y - \frac{y}{10}\right| = \frac{9y}{10},$$
On a :
$$\begin{aligned} d(T(x), T(y)) &= \left|\frac{x}{9} - \frac{y}{10}\right| \leq \frac{x}{9} + \frac{y}{10} \\ &= \frac{1}{8}(\frac{8x}{9}) + \frac{1}{9}(\frac{9y}{10}) \\ &\leq \frac{1}{8}\left[d(x, T(x)) + d(y, T(y)\right]. \end{aligned}$$
Par conséquent, T satisfait sur Y la condition
$$d\left(T(x), T(y)\right) \leq \frac{1}{8}\left[d\left(x, T(x)\right) + d\left(y, T(y)\right]\right..$$

c-à-d l'inégalité (2.6) avec $\alpha = \frac{1}{8}$.

Théorème (Kannan 1968)

Soient (Y, d) un espace métrique complet et $T : Y \to Y$ une application de Kannan. Alors T admet un point fixe unique $u \in Y$.

Preuve.

Existence : La suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ défini par $x_n = T(x_{n-1})$, $n = 1, 2, \ldots$, et $x_0 \in X$ en utilisant (2.6), alors :
$$\begin{aligned} d\left(x_n, x_{n+1}\right) &= d(T(x_{n-1}), T(x_n)) \\ &\leq \alpha\left[d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})\right], \end{aligned}$$

Donc :
$$d\left(x_n, x_{n+1}\right) \leq \frac{\alpha}{1-\alpha} d(x_{n-1}, x_n).$$

Par récurrence, on a :
$$d\left(x_n, x_{n+1}\right) \leq \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^n d(x_0, x_1).$$

Soit $r = \frac{\alpha}{1-\alpha}$. Si n, p sont deux entiers naturels, alors :

$$\begin{aligned} d\left(x_n, x_{n+p}\right) &\leq d\left(x_n, x_{n+1}\right) + d\left(x_{n+1}, x_{n+2}\right) + \ldots + d\left(x_{n+p-1}, x_{n+p}\right) \\ &\leq (r^n + r^{n+1} + \ldots + r^{n+p-1}) d(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{r^n}{1-r} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Comme $\alpha \in [0, \frac{1}{2}[$, on a $r \in [0, 1[$ et donc $d\left(x_n, x_{n+p}\right) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$, la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est alors de Cauchy. Comme Y est complet, il existe $u \in Y$ tel que $\lim_{n\to+\infty}$
$x_n = u$. u est
un point fixe de Y car :

$$d\left(u, T(u)\right) \leq \frac{1}{1-\alpha} d\left(u, x_n\right) + \alpha \left[d\left(x_n, x_{n+1}\right) + d\left(u, T(u)\right)\right].$$

et donc

$$d\left(u, T(u)\right) \leq \frac{1}{1-\alpha} d\left(u, x_n\right) + \frac{\alpha}{1-\alpha} d\left(x_{n-1}, x_n\right).$$

Soit $\varepsilon > 0$ un réel arbitraire, comme $\{x_n\}_{n\geq 0}$
converge vers u, il existe un entier naturel $N = N(\varepsilon)$ tel que

$$n \geq N \geq 1 \Rightarrow d\left(u, x_n\right) \leq \varepsilon \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\, et\, d\left(x_{n-1}, x_n\right) \leq \varepsilon \frac{1-\alpha}{1+\alpha}.$$

Il en résulte que

$$d\left(u, T(u)\right) \leq \frac{\varepsilon}{1+\alpha} + \frac{\varepsilon\alpha}{1+\alpha} = \varepsilon.$$

Comme ε est arbitraire, on déduit que $T(u) = u$.
<u>Unicité :</u>
Si v est un autre point fixe de T, alors :

$$\begin{aligned} d\left(v, u\right) &\leq \alpha \left[d\left(u, T(u)\right) + d\left(v, T(v)\right)\right] \\ &= 0, \end{aligned}$$

et donc $v = u$.

2.2.5 La nature de point fixe

En rgle générale, nous admettons que la fonction f est définie et de classe C^1 sur l'intervalle $I = [a; b]$ de $\mathbb{R}$. Plus précisément, la dérivée de f est continue sur $[a; b]$. Comme mentionné auparavant, notons $]a; b[$ un point fixe de la fonction f sur l'intervalle I. Dans ce contexte, nous pouvons discerner trois situations distinctes

Point fixe attractif

Définition 2.2. On considère une application $f : I \to I$ de classe C^2 ou $I \in \mathbb{R}$. Soit a un point fixe de f . Si $|f^{'}(a)| < 1$, alors a est attractif

Théorème 2.10. *[16] Si $|f'(\beta)| < 1$, alors il existe un intervalle J inclus dans I, où la suite (U_n) dfinie par $U_0 \in J$ pour tout nombre naturel n, $U_{n+1} = f(U_n)$, converge vers . En se rapprochant suffisamment de , sans avoir plus d'informations à priori, on est assuré de la convergence de la suite (U_n). Ainsi, est un point fixe attractif, car il entraîne la convergence de toutes les suites récurrentes construites à partir de f, à condition que la valeur initiale soit suffisamment proche de ce point fixe.*

Preuve. Plaçons-nous dans l'intervalle $J = [\beta - \sigma; \beta + \sigma]$, où $\beta > 0$ est choisi de manière satisfaire les conditions suivantes :

$$\forall x \in [\beta - \sigma; \beta + \sigma], |f'(\beta)| < k < 1,$$

Cela est toujours possible car f' est une fonction continue sur l'intervalle $I = [a; b]$.
Prouvons maintenant que la fonction f vérifie les hypothèses du théorème du point fixe sur cet intervalle.
Tout d'abord, la fonction f est une fonction contractante sur l'intervalle J, avec un rapport $m < 1$.
De plus, l'image de l'intervalle $[\beta - \sigma; \beta + \sigma]$ par la fonction f est incluse dans l'intervalle lui-même, c'est-à-dire que

$$f([\beta - \sigma; \beta + \sigma]) \subset [\beta - \sigma; \beta + \sigma].$$

En effet, soit x appartenant à $[\beta - \sigma; \beta + \sigma]$, ce qui peut s'écrire $|x - \beta| < \sigma$.
Ainsi, pour tout x dans J,

$$|f(x) - f(\beta)| = |f(x) - \beta| \leq k|x - \beta| < |x - \beta| \leq \sigma$$

Ce qui démontre clairement que $f(x)$ appartient l'intervalle $[\beta - \sigma; \beta + \sigma]$.
Ainsi, nous pouvons appliquer le théorème du point fixe à l'intervalle J, et la suite (U_n) converge quel que soit son premier terme x_0 situé dans J.
Intéressons-nous maintenant au cas où $f'(x) = 0$.
On suppose que f soit de classe C^2 sur l'intervalle $[a; b]$ et que $|f''| \leq M$ sur l'intervalle J.
La formule de Taylor, appliquée à l'intervalle délimité par x et , s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned} f(x) = f(\beta) &= (x - \beta)f'(\beta) + \frac{(x - \beta)^2}{2\,!} f''(c) \\ &= \beta + \frac{(x - \beta)^2}{2\,!} f''(c) avec c \in]\beta; x[\end{aligned}$$

Ainsi, nous en concluons : $|f(x) - \beta| = \frac{M}{2}(x - \beta)^2$.
Par conséquent, pour tout nombre entier naturel n, à condition de sélectionner U_0 dans l'intervalle J :

$$|U_{n+1} - \delta| \leq \frac{M}{2}(U_n - \beta)^2.$$

Cela révèle une convergence quadratique, incroyablement rapide. En réalité, si nous savons que $|u_n - \beta| \leq 10^{-p}$, alors nous pouvons déduire que $|u_{n+1} - \beta| \leq \frac{M}{2}10^{-2p}$: en d'autres termes, le nombre de décimales exactes a plus ou moins doublé après une itération. Dans ce cas, le point fixe est qualifié de super-attractif. Une autre façon d'exprimer ceci est la suivante :

$$\frac{M}{2}|u_n - \beta| \leq \left(\frac{M}{2}(u_{n-1} - \beta)\right)^2 \leq \left(\frac{M}{2}(u_{n-2} - \beta)\right)^{2^2} \leq \ldots \leq \left(\frac{M}{2}(u_0 - \beta)\right)^{2^n}$$

soit

$$|u_n - \beta| \leq \frac{2}{M}\left(\frac{M}{2}(u_0 - \beta)\right)^{2^n}.$$

• **Point fixe répulsif**

Définition 2.3. Soit l'application $f : I \to I$, de classe C^2 où I est une segment de $\mathbb{R}$. Soit a un point fixe de f . Si $|f^{'}(a)| > 1$, alors a *est répulsif*

Théorème 2.11. *Si $|f'(\beta)| > 1$, alors il existe un intervalle J inclus dans I, tel que pour tout $u_0 \neq \beta, u_0 \in J$, la suite récurrente associée à f avec le premier terme u_0 ne converge pas vers δ Dans ce cas, le point fixe δ est qualifié de point fixe répulsif. Même si nous nous approchons très près de δ, la suite (u_n) diverge toujours. Elle ne peut converger que lorsqu'elle devient constante et égale à δ.*

Preuve. Considérons l'intervalle $J = [\beta - \delta, \beta + \delta]$ où $\delta > 0$ est choisi de telle manière que :

$$\forall x \in [\beta - \sigma, \beta + \delta], |f^{'}(\beta) > 1|,$$

(Ce choix est possible car $f^{'}$ est continue sur l'intervalle $I = [a, b]$))
Ensuite, $\min_{x \in J} \left| f^{'}(x) \right| = K > 1$
Il est possible que la suite (u_n) ne soit pas définie pour toutes les valeurs de n : dans ce cas, elle ne converge pas vers δ. Sinon, nous savons que pour tout x dans $J, |f(x) - \beta| \leq m|x - \beta|$ La suite ne peut pas converger vers δ car pour tout entier naturel $n, |u_n - \beta| \geq am^{n-1} avecm > 1$.

• **Un cas douteux :**

$\left| f^{'}(\beta) \right| = 1$, Prenons deux exemples afin d'explorer des conclusions divergentes : c'est ce que l'on appelle un cas incertain. Pour chacun d'entre eux, nous obtiendrons $\beta = 0$ et $f^{'}(\beta) = 1$.

Exemple 2.5. Soit $f(x) = \sin x$ pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. La convergence est indéniable lorsque l'on observe que pour tout x dans l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$, $\sin x < x$. Peu importe la valeur initiale choisie dans l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la suite récurrente associée à f est alors décroissante, bornée inférieurement par 0, donc elle converge vers le point fixe 0, qui est véritablement attractif.

2.2.6 La convergence

On suppose que (E, d) est un espace métrique. [6] On dit qu'une suite $\{x\}_{n\in N} \in E$ converge vers un point $l \in E$, si pour tout $\forall \varepsilon > 0$ il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$d(x_n, l) < \varepsilon, \text{pour tout n} \geq N_\varepsilon.$$

Donc on peut écrit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$ oú, $x_n \to l$.

2.2.7 La convergence uniforme

Définition 2.4.

Considérons Y comme un ensemble topologique, soit (Y, d) un espace métrique, et A un sous-ensemble de Y. Supposons que nous avons une suite de fonctions définies sur Y et à valeurs dans Y. On dira que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon,\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_\varepsilon,\ \forall x \in A \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon.$$

2.2.8 Suite convergente

Définition 2.5.

[2] Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ suite des éléments d'un espace métrique (Y, d) converge ou tend vers un point $x \in Y$ lorsque $n \to \infty$ si et seulement si

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$$

Autrement dit

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon : d(x_n, x) < \varepsilon.$$

On dit aussi que x est la limite de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et on note $x_n \to x$ $\left(\text{oú} \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x\right)$

Cette limite existe, alors elle est unique. en effet, si on a x et y dans Y tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \text{ tel que } n > N_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon,$$

et

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon^{'} \text{ tel que } n > N_\varepsilon^{'} \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon,$$

Et pour $n \geq \sup\{N_\varepsilon, N_\varepsilon^{'}\}$ on a :

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(y, x_n) \leq 2\varepsilon$$

Et donc

$$d(x, y) \leq 2\varepsilon, \forall \varepsilon > 0.$$

Ce qui donne
$$d(x,y)=0$$
Donc
$$x=y$$

Proposition 2.3. *[12]*

Toute suite convergente est bornée

Preuve.

On suppose que $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite converge vers un point l, alors, $\exists N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$:
$$n\geq N_\varepsilon \Longrightarrow |U_n-l|\leq 1,$$
alors, $\forall n\geq N_\varepsilon$ on a
$$\begin{aligned}|U_n| &= |U_n-l+l|\\ &\leq 1+|l|\end{aligned}$$
on a donc $|U_n|\leq 1+|l|$.

Si on pose
$$M=\max(|U_0|,|U_1|,\ldots,|U_{N_{\varepsilon-1}}|1+|l|)$$
, il vient, $\forall n\in\mathbb{N}$, $|U_n|\leq M$. Par conséquent, la suite $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Proposition 2.4.

Soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un espace métrique (Y,d). Alors on a :

- *Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x\in Y$, toute sous-suite de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.*
- *Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ possède deux sous-suites convergent vers des limites distinctes, alors $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.*
- *Si les deux sous_suites $\{x_n\}_{2n\in\mathbb{N}}$ et $\{x_{2n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite x alors $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.*

Preuve. i. Soit $\{x_{\varphi(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ l'application φ étant strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\varphi(n)\geq n$.

Soit la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x\in X$:
$$\forall\varepsilon>0,\exists N_\varepsilon\in\mathbb{N},\forall n\in\mathbb{N}, n\geq N_\varepsilon\Longrightarrow d(x_n,x)\leq\varepsilon,$$
or si $n\geq N_\varepsilon$, on a :
$$\varphi(n)\geq n\geq N_\varepsilon,$$
Alors
$$d(x_{\varphi(n)},x)\leq\varepsilon,$$
on en déduit donc que $\{x_{\varphi(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$, converge vers x.

ii. n'est autre que la contraposée de 1).

iii. Considérons $\varepsilon > 0$, comme les deux sous-suites $\{x_n\}_{2n\in\mathbb{N}}$ et $\{x_{2n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers x, il existe N_1 et $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que, $n \geq N_1 \Rightarrow d(x_{2n}, x) < \varepsilon$ et $n \geq N_2 \Rightarrow d(x_{2n+1}, x) < \varepsilon$. Soit $m \in \mathbb{N}$:
si m est pair, alors $m \geq 2N_1 \Rightarrow d(x_m, x) < \varepsilon$ et si k impair, alors

$$m \geq 2N_2 + 1 \Rightarrow d(x_m, x) < \varepsilon$$

donc si on pose $N = \max(2N_1, 2N_2 + 1)$, on a :

$$m \geq N \Rightarrow d(x_m, x) < \varepsilon$$

donc $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.

2.2.9 Une condition nécessaire de convergence

On suppose que f une fonction continue définie sur un intervalle I, tel que I est un intervalle stable par f, Si la suite récurrente (u_n) converge, c'est nécessairement vers un point fixe de f.

Preuve.
Effectivement, si la suite (u_n) converge vers un nombre réel α, en passant à la limite dans l'égalité qui définit la récurrence :

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = f\left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right) \text{(car la fonction } f \text{ est continue sur } I)$$
$$\alpha = g(\alpha)$$

ce qui prouve que α est un point fixe de f

Exemple 2.6.
Étude de la convergence de la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in [-1, +\infty[\\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \end{cases}$$

On peut introduire l'application f définie sur $[-1, +\infty[$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{1 + x}$$

on cherche le point fixe de f :

$$f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{1 + x} = x \Leftrightarrow x \geq 0$$

et

$$x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \lambda = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

On montre facilement que f est dérivable sur $]-1, \infty[$, croissante sur $[-1, +\infty[$, puis que :

$$f([-1,+\infty[) = [0,+\infty[\subset [-1,+\infty[$$

L'intervalle $I = [-1,+\infty[$ est donc stable et la suite (u_n) est bien définie .
De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \left|f^{'}(x)\right| = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \leq \frac{1}{2}.$$

En utilisant l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, |f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{2}\,|b-a|\,.$$

Donc, f est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur I, donc contractante sur I.
En outre :

$$f(\mathbb{R}^+) = [1,+\infty[\subset \mathbb{R}^+.$$

Donc, $\mathbb{R}^+$ est stable par f .
D'après le théorème du point fixe, la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}^+ \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases}$$

converge donc vers λ.

Enfin, si $u_0 \in [-1,+\infty]$ alors $u_1 \in \mathbb{R}^+$ et d'après ce qui précède (u_n) converge encore vers λ .

2.2.10 Convergence globale de la méthode du point fixe

Soit $\Phi \in C^1\left([a,b]\right)$ vérifiant $\Phi\left([a,b]\right) \subset [a,b]$ et

$$\exists L < 1 \text{tel que} \forall x \in [a,b]\,, |\Phi'(x)| \leq L,$$

Soit $x_0 \in [a,b]$, et $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_{k+1} = \Phi(x_k)$. On a alors :

1. $\alpha \in [a,b]$ est un point fixe de la fonction Φ.
2. $\forall m \in \mathbb{N}$, $x_m \in [a,b]$.
3. la suite (x_m) converge vers α avec un ordre 1 au moins.
4. on a

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{x_{m+1}-\alpha}{x_m-\alpha} = \Phi^{'}(\alpha)$$

2.2.11 Convergence locale de la méthode du point fixe

Soit α un point fixe d'une fonction Φ de classe C^1 au voisinage de α. Si $|\Phi'(x)| < 1$, alors il existe $\delta > 0$ pour lequel (x_m) converge vers α pour tout x_0 tel que $|x_0 - \alpha| < \delta$.
De plus, on a :

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{x_{m+1}-\alpha}{x_m-\alpha} = \Phi'(\alpha).$$

Chapitre 3

Principe de contraction de Banach et applications

Introduction

Le théorème du point fixe de Banach à plusieurs termes, le principe de contraction de Banach ou théorème du point fixe de Picard, a été initialement développé dans le but de trouver des solutions aux équations intégrales en 1922 dans l'article [10]. Il s'agit d'une généralisation de la méthode classique d'approximations successives, qui a été développée par Liouville en 1837 et par Picard en 1890. Ce théorème est fréquemment utilisé dans de multiples domaines de l'analyse mathématique, en particulier dans le contexte des équations différentielles, en raison de sa simplicité et de son utilité avérée. Banach a effectué diverses extensions concernant les espaces métriques et les espaces topologiques, notamment en ce qui concerne les espaces localement convexes.

Théorème 3.1. *[10] **(principe de contraction de banach,1922)***

Considérons (Y, d) comme un espace métrique complet et $E : Y \to Y$ comme une fonction contractante avec une constante de contraction m. Dans ce cas :

a. E admet un unique point fixe $\beta \in Y$.

b.$\forall t \in Y$, $\beta = \lim_{n\to\infty} E^n(t)$ oú $E^0(t) = t$ et $E^n(t) = E(E^{n-1}(t))$.

c.$\forall t \in Y$, la formule correcte pour estimer la vitesse de convergence est :

$$d(E^n(t), \beta) \leq \frac{m^n}{1-m} d(t, E(t)). \tag{3.1}$$

Remarque 3.1.

Dans le théorème précédente, nous avons considéré une application $E : Y \to Y$, où Y est un espace métrique complet. Maintenant, nous allons donner deux preuves du théorème (**??**), qui concerne l'application $E : A \to A$, où A est un ensemble fermé de l'espace Y. La première démonstration est constructive : Cette démonstration également connue sous le nom de méthode d'approximation de Banach adopte, sur la construction itérative d'une séquence convergente qui converge vers le point fixe souhaité. la deuxième est démonstration non constructive basée sur le principe des groupes de Cantor imbriqués : Cette preuve utilise le principe des ensembles imbriqués de Cantor pour prouver l'existence et l'unicité du point fixe.

Preuve. Si β et β' sont tous deux des points fixes de l'application E, alors l'unicité du point fixe s'applique et nous avons :

Méthode 1 :

— Si β et β' sont tous deux des points fixes de l'application E, alors l'unicité du point fixe s'applique et nous avons :

$$d(\beta, \beta') = d(E(\beta), E(\beta')) \leq m.d(\beta, \beta') \tag{3.2}$$

ce qui est impossible sauf si $d(\beta, \beta') = 0$ c'est-à-dire $\beta = \beta'$.

— Démontrons l'existence du point fixe :
Montrons que si $t \in Y$, la suite $(E^n(t))_n \subset Y$ est une suite de Cauchy. Pour tout $n \in N$, nous avons :

$$d(E^{n+1}(x), E^n(t)) \leq kd(E^n(t), E^{n-1}(t)) \leq ... \leq k^n d(E(t), t). \tag{3.3}$$

Par conséquent, pour tout $n, p \in N$, nous avons :

$$\begin{align}
d(E^{n+p}(t), E^n(t)) &\leq d(E^{n+p}(t), E^{n+p-1}(t)) + ... + d(E^{n+1}(t), E^n(t)) \tag{3.4}\\
&\leq (m^n + m^{n+1} + m^{n+2} + ... + m^{n+p-1})d(E(t), t) \tag{3.5}\\
&\leq m^n(1 + m + m^2 + ... + m^{p-1})d(E(t), t) \tag{3.6}\\
&\leq m^n \frac{1 - m^p}{1 - m} d(E(t), t) \tag{3.7}\\
& \tag{3.8}
\end{align}$$

La dernière inégalité est obtenue en calculant la somme d'une suite géométrique de raison m. On observe que si $n \to +\infty$, $d(E^{n+p}(t), E^n(t)) \to 0$ et donc la suite$(E^n(t))_n$ est de Cauchy dans Y.
Par conséquent, étant donné que Y est complet, cette suite converge vers une limite que nous appellerons a, que nous allons montrer être un point fixe de E. Tout d'abord, remarquons que :

$$\lim_{n\to\infty} E^{n+1}(t) = \lim_{n\to\infty} E^n(t) \tag{3.9}$$

Ensuite, étant donné que E est contractante, cela implique qu'elle est continue, et donc :

$$\beta = \lim_{n\to\infty} E^{n+1}(t) = \lim_{n\to\infty} E(E^n(t)) = E(\lim_{n\to\infty} E^n(t)) = E(\beta). \tag{3.10}$$

Enfin, dans l'inégalité (3.4), si on fixe n et en fait tendre p vers l'infini on aura :

$$d(\beta, E^n(t)) \leq \frac{m^n}{1 - m} d(t, E(t)). \tag{3.11}$$

Méthode 2 :

soit $a = inf d(t, E(t)) : t \in Y \geq 0$, supposons que $a > 0$. Alors pour $\varepsilon > 0$, il existe $t \in Y$ tel que $d(t, E(t)) < a + \varepsilon$, on aura donc :

$$a \leq d(E(t), E^2(t)) \leq md(t, E(t)) < m(a + \varepsilon), \tag{3.12}$$

ce qui nous ramène à une contradiction lorsque ε tend vers 0, d'où $a = 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, considérons les ensembles :

$$D_n = \{t \in Y : d(t, E(t)) \leq \frac{1}{n}\}$$

— $D_n \neq \emptyset$, car $a = 0$.

— D_n est fermé, car toute suite de D_n convergente dans Y a une limite dans D_n.

— De plus, les ensembles D_n forment une suite décroissante quand $n \to \infty$ avec : $\lim\limits_{n\to\infty} diam(D_n) = 0$. En effet $\forall t, y \in D_n$

$$\begin{aligned} d(t, y) &\leq d(t, E(t)) + d(E(t), E(y)) + d(E(y), y) \\ &\leq \frac{2}{n} + md(t, y). \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$d(t, y) \leq \frac{2}{n(1-m)} \to 0 \; quand \; n \to \infty.$$

Par la suite, nous plongeons dans le fascinant théorème des ensembles imbriqués de Cantor. Ce théorème révèle un phénomène étonnant : lorsque nous explorons les ensembles D_n, où n est un nombre naturel, nous découvrons une intersection qui se réduit à un point unique. Ce point particulier est en réalité le seul point fixe de l'application E.

Exemple 3.1. — Soit $Y = [a, b]$ et l'application $E : Y \to Y$ telle que E est dérivable en chaque $t \in]a, b[$ et $|E'(t)| \leq m < 1$. Alors, on déduit du théorème des accroissements finis que :

$\forall t, y \in Y$, il existe un point ε entre t et y tel que :

$$E(t) - E(y) = E'(\varepsilon)(t - y),$$

donc

$$|E(t) - E(y)| = |F'(\varepsilon)||(t - y)| \leq m|t - y|.$$

Par conséquent, E est contractante et donc elle admet un unique point fixe.

— Soient $Y = \mathbb{R}$ et l'application $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$E(t) = \frac{1}{3}t + 1.$$

Alors E est contractante et elle admet un unique point fixe $t = 3$.

Corollaire 3.1.

Dans l'espace de Banach $(Y, \|.\|)$ avec $E : Y \to Y$, une application m-lipschitzienne, et $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $|\lambda| > m$, chaque point $a \in Y$ admet une unique solution $\beta = \beta(a)$ dans Y pour l'équation abstraite $E(t) + \lambda t = a$..

Preuve.

Soient l'application f telle que $f(t) = \frac{a-E(t)}{\lambda}$ et $t, y \in Y$, alors :

$$\|f(t) - f(y)\| = \|\frac{a - E(t) - a + E(y)}{|\lambda|}\| \tag{3.13}$$

$$= \frac{1}{|\lambda|}\|E(t) - E(y)\| \tag{3.14}$$

$$\leq \frac{m}{\lambda}\|t - y\| \tag{3.15}$$

$$\tag{3.16}$$

Si $|\lambda| > m$, alors l'application f est contractante, ce qui implique l'existence d'une unique solution β à l'équation $f(t) = t$. Ce résultat découle du théorème (3.1). En d'autres termes, il existe une solution de l'équation qui satisfait cette condition.

Remarque 3.2.

D'après le théorème précédent (3.1), Lorsque $m = 1$, les situations suivantes peuvent se présenter :

— L'application E peut ne pas avoir de point fixe. Par exemple, considérons la translation dans un espace de Banach : $t \to t + v(v \neq 0)$.

— Si E possède un point fixe, ce point n'est pas nécessairement unique .Un exemple en est l'application identité.

— Cependant, il est également possible que l'application E ait un point fixe unique.

Exemple 3.2.

Prenons comme exemple l'application suivante :

$$E : [0, 1] \to [0, 1]$$
$$t \to \frac{t}{2}.$$

Dans ce cas, l'application E n'a pas de point fixe dans l'intervalle $[0, 1]$. En effet, aucun point t dans cet intervalle ne satisfait l'équation $E(t) = t$. Ainsi, cet exemple illustre une situation où l'application ne possède pas de point fixe.

Il convient de noter qu'il existe différentes variations du théorème de contraction de Banach dans la littérature. Selon les variantes, certaines hypothèses peuvent être affaiblies tandis que d'autres doivent être renforcées. Cependant, la complétude de l'espace est généralement considérée comme une condition indispensable. Les formulations du principe de contraction de Banach peuvent donc varier en fonction des hypothèses spécifiques qui sont imposées.

3.1 Résultats d'existence pour un probléme aux limite à trois points

Lemme 3.1. *Dans cette section, nous examinons le problème aux limites du second ordre suivant, qui concerne l'étude des équations différentielles d'ordre deux avec des conditions aux limites spécifiques :*

$$\begin{cases} v'' = f(x, v, v'), 0 < x < x_0, \\ v(0) = 0, v(x_0) = g(v(\eta)), \end{cases} \tag{3.17}$$

3.1.1 Reformulation du probléme

Lemme 3.2.

le problème (3.17) équivalent à l'équation suivante :

$$v(x) = \int_0^{x_0} G(x, s) f(s, v(s), v'(s)) ds + \frac{x}{x_0} g(v(\eta))$$

soit $G(x, s)$ la fonction de Green définie comme suit :

$$G(x, s) = \begin{cases} -\frac{x(x_0 - s)}{x_0}, 0 < x \leq s \leq x_0, \\ -\frac{s(x_0 - x)}{x_0}, 0 < s \leq x \leq x_0, \end{cases}$$

En outre, il est possible de prouver que :

$$\max_{x \in [0, x_0]} \int_0^{x_0} |G(x, s)| ds = \max_{x \in [0, x_0]} \frac{x(x_0 - x)}{2} = \frac{x_0^2}{8}$$

Preuve.

on a $v'' = f(x, v, v')$, en intégrant deux fois de 0 à x les deux membre de cette équations. on obtient :

$$v'(x) - v'(0) = \int_0^{x_0} f(s, v(s), v'(s)) ds,$$

donc :

$$v'(x) = v'(0) + \int_0^{x_0} f(s, v(s), v'(s)) ds,$$

ensuite

$$v(x) - v(0) = v'(0)x + \int_0^{x_0} \int_0^{x_0} f(s, v(s), v'(s)) ds,$$

De plus, la première condition aux limites implique que :

$$v(x_0) = v'(0)x + \int_0^{x_0} \int_0^{x_0} f(s, v(s), v'(s)) ds, \tag{3.18}$$

en substituant $v(x_0)$ dans l'expression de $g(v(\eta))$:

$$g(v(\eta)) = v'(0)t + \int_0^{x_0}\int_0^{x_0} f(s, v(s), v'(s))ds,$$
$$v'(0) = -\frac{1}{x_0}\int_0^{x_0}\int_0^{x_0} f(s, v(s), v'(s))ds + \frac{1}{x_0}g(v(\eta)),$$

en effectuant le remplacement de $v'(0)$ dans l'équation (3.18), et en substituant x par x_0, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
v(x) &= \left[\frac{1}{x_0}g(v(\eta)) - \frac{1}{x_0}\int_0^{x_0}\int_0^{x_0} f(s, v(s), v'(s))ds\right]x + \int_0^{x}\int_0^{x} f(s, v(s), v'(s))ds,\\
v(x) &= \frac{x}{x_0}g(v(\eta)) - \frac{x}{x_0}\int_0^{x_0}(x_0 - s)f(s, v(s), v'(s))ds + \int_0^{x}(x - s)f(s, v(s), v'(s))ds,\\
v(x) &= \frac{x}{x_0}g(v(\eta)) - \frac{x}{x_0}\int_0^{x_0}(x_0 - s)f(s, v(s), v'(s))ds\\
&\quad - \frac{t}{x_0}\int_0^{x_0}(x_0 - s)f(s, v(s), v'(s))ds + \int_0^{x}(x - s)f(s, v(s), v'(s))ds,\\
v(x) &= \frac{x}{x_0}g(v(\eta)) - \int_0^{x}\frac{s}{x_0}(x_0 - x)f(s, v(s), v'(s))ds - \int_x^{x_0}\frac{x}{x_0}(x_0 - s)f(s, v(s), v'(s))ds,\\
\Rightarrow v(x) &= \int_0^{x_0} G(x, s)f(s, v(s), v'(s))ds + \frac{1}{x_0}g(v(\eta)),
\end{aligned}$$

oú :

$$G(x, s) = \begin{cases} -\frac{x(x_0-s)}{x_0}, 0 < x \leq s \leq x_0,\\ -\frac{s(x_0-t)}{x_0}, 0 < s \leq x \leq x_0,\end{cases}$$

D'autre côté, ona :

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{x}\frac{s(x_0 - x)}{x_0}ds + \int_x^{x_0}\frac{x(x_0 - s)}{x_0}ds\\
&= \frac{1}{x_0}(x_0 - x)\left[\frac{s^2}{2}\right]_0^x + \frac{x}{x_0}\left[x_{0s} - \frac{s^2}{2}\right]^{x_{0x}}\\
&= \frac{1}{x_0}(x_0 - x)\frac{x^2}{2} + \frac{x}{x_0}\left(x_0^2 - \frac{x_0^2}{2} - x_0x + \frac{x^2}{2}\right)\\
&= \frac{1}{x_0}\left(\frac{x_0x}{2} - \frac{x^2}{2} + x_0^2 - \frac{x_0^2}{2} - x_0x + \frac{x^2}{2}\right)\\
&= \frac{t}{x_0}\left(-\frac{x_0x}{2} + \frac{x_0^2}{2}\right)\\
&= \frac{x}{2}(x_0 - x)
\end{aligned}$$

La fonction φ est définie par $\varphi(x) = \frac{x}{2}(x_0 - x) = -\frac{x^2+t_0x}{2}$ pour x appartenant à l'intervalle $[0, x_0]$. On peut observer que φ est un polynôme de degré deux avec un coefficient négatif pour le terme en x^2. De plus, la dérivée de φ évaluée en $\frac{x_0}{2}$ est nulle. Ainsi, on peut conclure que φ atteint son maximum en $x = \frac{x_0}{2}$.

$$\max_{x\in[0,x_0]} \left\{\int_0^{x_0} |G(x,s)|ds\right\} = \max_{x\in[0,x_0]} \left\{\frac{x}{2}(x_0 - x)\right\} = \frac{x_0^2}{8}$$

En prenant le maximum, étant donné que $x \leq x_0$, on peut affirmer que v est un point fixe de l'opérateur si et seulement si est un solution du problème (**??**). donc :

$$T : C^1[0,x_0] \to C^1[0,x_0]$$

défini par :

$$(Tv)(x) = \int_0^{x_0} G(x,s)f(s,v(s),v'(s))ds + \frac{x}{x_0}g(v(\eta)),$$

On note par $C^1([0,x_0])$ l'espace des fonctions continûment différentiables sur $[0,x_0]$, muni de la norme suivante :

$$\|v\|_{c^1[0,x_0]} = \max_{x\in[0,x_0]} \left\{\|v\|_\infty, \|v'\|_\infty\right\}.$$

Ici, $\|w\|_\infty = max|w(x)|$ alors l'espace C^1 $[0,x_0]$est un espace de Banach lorsque la norme est définie comme suit $\|v\|_{C^1[0,x_0]}$.

3.1.2 Application du principe de contraction de banach

Théorème 3.2.

Si la fonction F vérifie la propriété suivante :

— *On pose $a,b,c > 0$ tells que :*

$$[H1]\begin{cases} |f(x,v,u) - f(x,\overline{v},\overline{u})| \leq a|v-\overline{v}| + b|u-\overline{u}|, \\ |g(v) - g(\overline{v})| \leq c|v-\overline{v}|, \end{cases}$$

pour $x \in [0,x_0] et v, u, \overline{v}, \overline{u} \in \mathbb{R}$,

— *pour vu que :*

$$\frac{a+b}{2} = x_0 + cx_0 < 1, \tag{3.19}$$

Dans ce cas, le problème (3.17) possède une solution unique.

Preuve.

En se basant sur l'hypothèse $(H1)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}|T(v)(x)-T(\overline{v})(x)| &= \int_0^{x_0} G(x,s)f(s,v(s),v'(s))ds+\frac{x}{x_0}g(v(\eta)) \\ &- \int_0^{t_0} G(x,s)f(s,\overline{v}(s),\overline{v'}(s))ds+\frac{x}{x_0}g(\overline{v}(\eta)) \\ &\leq |\int_0^{x_0} G(x,s).f(s,v(s),v'(s)-f(s,\overline{v}(s),\overline{v'}(s)|+\frac{t}{x_0}|g(v(\eta)-g(\overline{v}(\eta)| \\ &\leq \int_0^{x_0} |G(x,s)|.(a|v(s)-\overline{v}(s)|+b|v_0'(s)-\overline{v_0'}(s)|ds+\frac{x}{x_0}.c|v(\eta)-|(\eta)|.\end{aligned}$$

Comme nous avons

$$\max_{x\in[0,x_0]}\left\{\int_0^{x_0}|G(x,s)|ds\right\}=\max_{x\in[0,x_0]}\left\{\frac{x}{2}(t_0-x)\right\}=\frac{x_0^2}{8}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\|T(v)-T(\overline{v})\|_\infty &\leq a\frac{x_0^2}{8}\|v-\overline{v}\|_\infty+b\frac{t_0^2}{8}\|v'-\overline{v'}\|_\infty+c\|v-\overline{v}\|_\infty \\ &\leq a\frac{x_0^2}{8}\|v-\overline{v}\|_{c^1[0,x_0]}+b\frac{x_0^2}{8}\|v'-\overline{v'}\|_{c^1[0,x_0]} \\ &\leq \left(\frac{a+b}{8}\right)\end{aligned}$$

En outre

$$(Tv)'(x)=\int_0^{x_0}G_x(x,s)f(s,v(s),v_0(s))ds+\frac{1}{x_0}g(v(\eta)),$$

oú

$$G_x(x,s)=\frac{\partial G}{\partial x}(x,s)$$

$$\begin{cases}\frac{s}{x_0}-1, & 0\leq x\leq s\leq x_0,\\ \frac{s}{x_0}, & 0\leq s\leq x\leq x_0\end{cases} \tag{3.20}$$

alors

$$
\begin{aligned}
|T(v)(x)-T(\overline{v})(x)| = {} & |\int_0^{x_0} G_x(x,s)f(s,v(s),v'(s))ds + \frac{1}{x_0}g(v(\eta)) \\
& - \int_0^{x_0} G(x,s)f(s,\overline{v}(s),\overline{v'}(s))ds + \frac{1}{x_0}g(\overline{v}(\eta))| \\
& \leq |\int_0^{x_0} G_x(x,s).f(s,v(s),v'(s) - f(s,\overline{v}(s),\overline{v}'(s)| + \frac{1}{x_0}|g(v(\eta) - g(\overline{v}(\eta))| \\
& \leq \int_0^{x_0} |G_x(x,s)|.(a|v(s)-\overline{v}(s)| + b|v_0'(s) - \overline{v_0}'(s)|ds + \frac{1}{x_0}.c|v(\eta) - |(\eta)|.
\end{aligned}
$$

Puisque

$$
|\int_0^{x_0} G_x(x,s)|ds = \int_0^{x_0} \frac{s}{x_0}ds + \int_0^{x_0}(\frac{s}{x_0}-1)ds \leq \frac{x_0}{2} \tag{3.21}
$$

pour tout $x \in [0, x_0]$.

il s'ensuit que

$$
|(Tv)'(x) - (T\overline{v}')(x)| \leq a\frac{x_0}{2}\|v-\overline{v}\|_\infty + b\frac{t_0}{2}\|v'-\overline{v}'\|_\infty + \frac{c}{x_0}\|v-\overline{v}\|_\infty.
$$

par conséquent :

$$
\begin{aligned}
\|(Tv)'(x) - (T\overline{v}')(x)\|_\infty & \leq a\frac{x_0}{2}\|v-\overline{v}\|_\infty + b\frac{x_0}{2}\|v'-\overline{v}'\|_\infty + \frac{c}{x_0}\|v-\overline{v}\|_\infty. \\
& \leq a\frac{x_0}{2}\|v-\overline{v}\|_{c^1[0,x_0]} + b\frac{x_0}{2}\|v'-\overline{v}'\|_{c^1[0,x_0]} + \frac{c}{x_0}\|v-\overline{v}\|_{c^1[0,t_0]} \\
& \leq \frac{a+b}{2}x_0 + \frac{c}{x_0}\|v-\overline{v}\|_{C^1[0,x_0]}
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\|Tv - T\overline{v}\|_{C^1[0,x_0]} \leq \max_{x_0 \leq 1}\left\{\frac{a+b}{8}x_0^2 + c, \frac{a+b}{2}t_0 + \frac{c}{x_0}\right\}\|v-\overline{v}\|_{C^1[0,x_0]}
$$

De l'hypothèse $x_0 \leq 1$, nous déduisons que :

$$
\frac{a+b}{8}x_0^2 + c \leq \frac{a+b}{8}x_0^2 + \frac{c}{x_0} \leq \frac{a+b}{8}x_0 + \frac{c}{x_0}
$$

et donc

$$
\max_{x_0 \leq 1}\left\{\frac{a+b}{8}t_0^2 + c, \frac{a+b}{2}t_0 + \frac{c}{x_0}\right\} = \frac{a+b}{2}t_0 + \frac{c}{x_0}
$$

On obtient ainsi que

$$\|Tv - T\overline{v}\| \leq \left(\frac{a+b}{2}x_0 + \frac{c}{x_0}\right)\|u - \overline{v}\|_{c^1[0,x_0]}$$

Puisque

$$\frac{a+b}{2}x_0 + \frac{c}{x_0} < 1,$$

Si l'opérateur T satisfait la condition de contraction, alors le principe de contraction de Banach peut être utilisé.

Exemple 3.3.

le nombre des solutions de l'équation $\cos x = x$.

On a $\cos x = x \Rightarrow x \in [-1, 1]$ .soit :

$$\begin{aligned} f : [-1,1] &\to [-1,1] \\ x &\mapsto f(x) = \cos x \end{aligned}$$

on a [-1,1] est complet (muni de la distance usuelle) : Par ailleurs, on a :

$$\|f'(x)\| \leq \sin 1 < 1, \forall x \in [-1, 1]$$

D'après le théorème des accroissements finis on trouve :

$$|f(x) - f(y)| \leq \sin 1|x - y|, avecx, y \in [-1, 1]$$

Il s'ensuit que l'équation $cosx = x$ a exactement une solution.

Chapitre 4

Application

4.1 Résolution de l'équation $f(x) = x$

Soient $[a, b]$ un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ et ϕ une fonction continue de $[a, b]$ dans lui même $(\phi([a, b]) \subset [a, b])$. Soit $x_0 \in [a, b]$. On considère la suite $(x_k)k \in \mathbb{N}$ définie par :

$$x_{k+1} = \phi(x_k), \forall k \in \mathbb{N} \tag{4.1}$$

1.La suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est définie lorsque la relation (4.1) permet de déterminer de manière complète et unique tous les termes de la suite $(xk)_{k\in\mathbb{N}}$ à partir de la connaissance de x_0.
Dans ce cas particulier, il est essentiel de veiller à ce que $x_k \in [a, b]$ pour tout entier k, car la fonction ϕ est uniquement définie sur l'intervalle $[a, b]$ selon l'hypothèse.
En effet, si x_k n'appartient pas à l'intervalle $[a, b]$, alors il n'est pas possible de définir x_{k+1} car $\phi(x_k)$ n'existe pas.
Nous pouvons démontrer ce résultat par récurrence :

-Initialisation pour $k = 0$. En vertu de l'hypothèse, $x_0 \in [a, b]$.

-Hérédité : supposons que $x_k \in [a, b]$ et démontrons que $x_{k+1} \in [a, b]$. Selon la définition, $x_{k+1} = \phi(x_k)$. Étant donné que $\phi([a, b]) \subset [a, b]$ selon l'hypothèse, nous concluons immédiatement que $x_{k+1} \in [a, b]$.

Remarque 4.1. Hypothèse importante : $(\phi([a, b]) \subset [a, b])$.

2. Pour démontrer que si la suite (4.1) converge, alors elle converge vers un point fixe de ϕ, supposons que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite que nous notons $\bar{x}$, étant donné que $[a, b]$ est un intervalle fermé, nous avons $\bar{x} \in [a, b]$.
De plus, en utilisant la continuité de ϕ, nous pouvons constater que :

$$\lim_{k\to+\infty} \phi(x_k) = \phi(\bar{x}).$$

En appliquant le théorème de comparaison des limites et la relation (4.1), nous obtenons : Ainsi, nous avons $\bar{x} = \phi(\bar{x})$, ce qui signifie que $\bar{x}$ est un point fixe de la fonction ϕ.

$$\bar{x} = \lim_{k\to+\infty} x_{k+1} \overbrace{=}^{(1)} \lim_{k\to+\infty} \phi(x_k) = \phi(\bar{x}).$$

Remarque 4.2. Deux hypothèses importantes sont à souligner : tout d'abord, l'intervalle $[a, b]$ est un intervalle fermé. De plus, la fonction ϕ est continue sur cet intervalle $[a, b]$.

3. Pour démontrer l'existence d'un point fixe α tel que $\phi(\alpha) = \alpha$, nous utilisons le théorème de Brouwer. Pour ce faire, nous considérons la fonction g définie par $g(x) = \phi(x) - x$. Étant donné que $\phi([a, b]) \subset [a, b]$, nous pouvons observer que :

$$g(a) = \phi(a) - a \geq a - a \geq 0.$$

De manière similaire,

$$g(b) = \phi(b) - b \leq b - b \leq 0.$$

Puisque ϕ est continue sur l'intervalle $[a, b]$, le théorème des valeurs intermédiaires (ou le théorème de Bolzano) nous assure qu'il existe un nombre $\alpha \in [a, b]$ tel que $g(\alpha) = 0$. Autrement dit,

$$0 = g(\alpha) = \phi(\alpha) - \alpha$$

ce qui signifie que α est un point fixe de la fonction ϕ.

Remarque 4.3. L'hypothèse de continuité de ϕ revêt une importance capitale. En effet, le résultat n'est pas valide si ϕ n'est pas continue.

4. Supposons de plus que ϕ est une fonction contractante, c'est-à-dire :

$$\exists L \in [0, 1[, \text{tel que}, \forall (x, y) \in [a, b]^2, |\phi(x) - \phi(y)| \leq L|x - y|$$

a- Pour démontrer l'unicité, nous adoptons une démarche classique. Supposons que la fonction ϕ possède deux points fixes α_1 et $\alpha_2(\alpha_1 = \phi(\alpha_1)$ et $\alpha_2 = \phi(\alpha_2))$ et nous allons montrer que $\alpha_1 = \alpha_2$. En utilisant le fait que ϕ est contractante, nous avons : ce qui peut être réécrit comme :

$$(1 - L) |\alpha_1 - \alpha_2| \leq 0. \tag{4.2}$$

Comme $(1 - L) \geq 0$, l'inégalité (4.2) implique $|\alpha_1 - \alpha_2| \leq 0$, et donc $\alpha_1 = \alpha_2$. Ainsi, la fonction ϕ a au plus un point fixe.

b- Pour toute donnée initiale x_0 dans $[a, b]$, nous allons montrer que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers α. D'après les questions précédentes, nous savons que la fonction ϕ possède un unique point fixe $\alpha \in [a, b]$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous avons :

$$|x_{k+1} - \alpha| = |\phi(x_k - \phi(\alpha)| \leq |x_k - \phi(\alpha)|.$$

ce qui nous permet de montrer par récurrence que :

$$|x_k - \alpha| \leq L^k |x_0 - \alpha|, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Comme $L < 1$, nous avons $\lim_{k\to+\infty} L^k = 0$. Par conséquent, le terme de droite de l'inégalité précédente tend vers 0. En utilisant le théorème de comparaison des limites, nous obtenons :

$$\lim_{k\to+\infty} |x_k - \alpha| = 0.$$

4.2 Variation sur point fixe et compacité

Considérons X comme un espace métrique compact (non vide), muni de la distance d, et F comme une application de X dans lui-même. Supposons que pour tout x et y appartenant à X tels que $x \neq y$, on ait :

$$d(F(x), F(y)) < d(x, y)$$

1. Remarquons tout d'abord que F n'est pas nécessairement une application contractante. La fonction distance $(x, y) \mapsto d(x, y)$ est continue sur $X \times X$, et F est continue sur X d'après l'hypothèse. Par composition, la fonction $\varphi(x) = d(x, F(x))$ est continue sur X, et donc elle atteint son minimum en un point a. Supposons que $a \neq F(a)$. Alors, on aurait :

$$\varphi(F(a)) = d(F(a), F(F(a))) < d(a, F(a)) = \varphi(a),$$

ce qui contredirait la définition de a. Donc, on conclut que $F(a) = a$. Si a et b étaient deux points fixes distincts de F, on aurait :

$$d(a, b) = d(F(a), F(b)) < d(a, b).$$

ce qui est impossible. Ainsi, on peut affirmer que F possède un point fixe.
2. Pour tout $x_0 \in X$, montrons que la suite des itérés $x_n = F^n(x)$ converge vers le point fixe. Nous avons :

$$d(x_{n+1}) = d(F(x_n), F(a)) \leq d(x_n, a)$$

(strictement si $x_n \neq a$), et la suite décroissante des $d(x_n, a)$ admet donc une limite $\ell \geq 0$. Montrons que $\ell = 0$. Comme X est compact, nous pouvons extraire de (x_n) une sous-suite (x_{n_k}) qui converge vers un point b de X. Les termes $F(x_{n_k}) = x_{n_{k+1}}$ forment une autre sous-suite extraite de x_n, qui converge vers $F(b)$. Ainsi,

$$d(x_{n_k}, a) \to d(b, a) = \ell$$

$$d(F(x_{n_k}), a) \to d(F(b), a) = \ell$$

Si $a \neq b$, alors nous aurions

$$\ell = d(F(b), a) = d(F(b), F(a)) < d(b, a) = \ell$$

Cela est impossible, ce qui implique que $a = b$, $\ell = 0$, et finalement $\lim x_n = a$. 3.Soient X une partie convexe compacte (non vide) d'un espace normé, et F une application de X dans lui-même. On suppose que, pour tous $x, y \in X$

$$\|F(x) - F(y)\| \leq \|x - y\|.$$

Nous montrons que F admet (au moins) un point fixe unique. Comme X est convexe, le point $F_t(x) = (1 - t)F(x) + tx_0$ appartient à X pour $0 < t < 1$, avec $x_0 \in X$ fixé, et F_t est une application de X dans lui-même. De plus,

$$\|F_t(x) - F_t(y)\| = (1 - t)\|F(x) - F(y)\| \leq (1 - t)\|x - y\|.$$

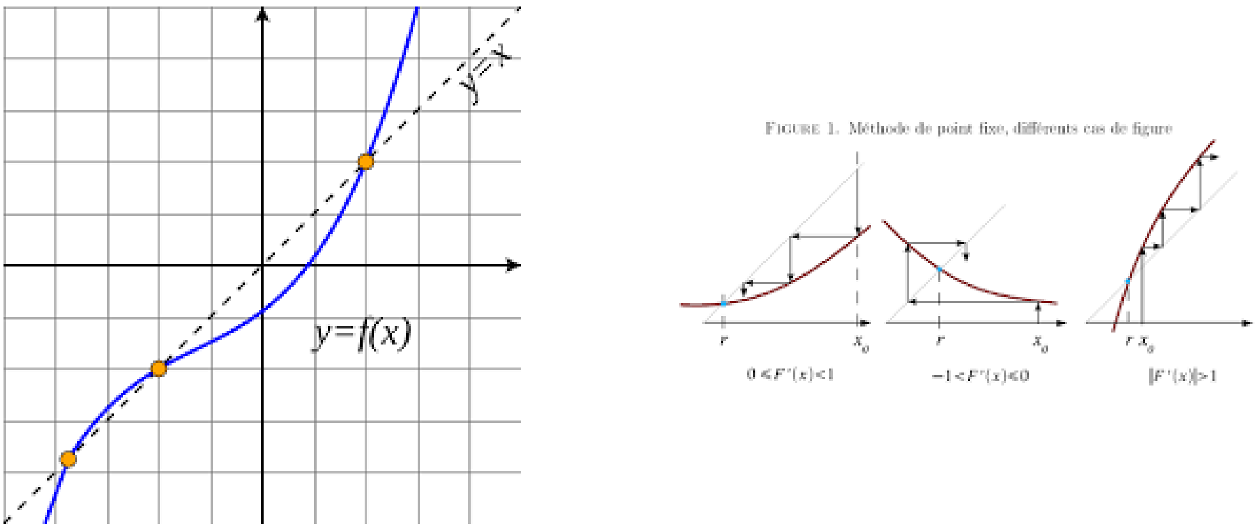

Figure 4.1 – métode de point fixe

pour tous $x, y \in X$, et F_t est une application contractante. Comme X est un espace métrique compact et donc complet, F_t admet un unique point fixe $a_t \in X$.

Si t parcourt une suite tendant vers 0, et F_t est une fonction contractante, les éléments a_t associés forment une suite d'éléments du compact X, à partir de laquelle nous pouvons extraire une sous-suite qui converge vers un point a de X. Appelons simplement cette suite (a_n), la suite correspondante des valeurs de t (t_n), et $F_n = F_{t_n}$. Ainsi, nous avons :

$$F_n(a_n) = a_n \text{ et } \lim a_n = a.$$

et Pour conclure que $F(a) = a$ par passage à la limite, il suffit de montrer que $\lim F_n(a_n) = F(a)$, ce qui peut être obtenu en utilisant un argument classique de convergence uniforme :

$$\|F_n(a_n) - F(a)\| \leq \|F_n(a_n) - F(a_n)\| + \|F(a_n) - F(a)\|$$

$$\leq t_n\|F_n(a_n) - x_0\| + \|a_n - a\|$$
$$\leq Mt_n + \|a_n - a\|,$$

où $M = \max_{x \in X} \|x - x_0\|$. Comme $t_n \to 0$, nous en déduisons que $F_n(a_n) \to F(a_n)$ et finalement $F(a) = a$.

Remarque 4.4. Le résultat perd sa validité si l'on omet l'hypothèse selon laquelle X est convexe ou compact. Cependant, il reste vrai, mais beaucoup plus difficile, si l'on suppose que X est à la fois convexe et compact, et que F est simplement continue de X dans X (sans l'inégalité). C'est ce que l'on appelle le théorème de Schauder, dans une forme légèrement plus générale.

Conclusion

À travers cette étude, nous avons traité les différents théorèmes de point fixe et quelques-unes de leurs applications, offrant ainsi une grande variété de ces théorèmes. L'objectif commun de ces théorèmes est de rechercher des solutions et de résoudre les problèmes d'existence et d'unicité des solutions qui se posent en mathématiques, notamment dans la théorie des équations différentielles. Parmi les théorèmes de point fixe les plus connus et les plus utilisés, nous avons mis en évidence le théorème du point fixe de Picard-Banach et le puissant théorème du point fixe de Brouwer, qui garantit l'existence d'un point fixe en exigeant uniquement la continuité de l'application sur un intervalle fermé borné dans lui-même. De plus, le théorème de Schauder étend le théorème de point fixe de Brouwer en affirmant seulement l'existence d'une solution, tandis que le théorème de Kannan, le plus simple et le plus connu, garantit l'existence et l'unicité d'un point fixe pour les applications non continues, tout en maintenant le théorème de Banach comme élément central (le principe de la contraction de Banach étant la base de la théorie du point fixe, assurant l'existence et l'unicité de la solution).

De plus, nous avons étudié la convergence et conclu qu'elle joue un rôle essentiel dans l'analyse non linéaire, en particulier pour l'étude des points fixes et de leurs théories.
Comme perspectives de travail, on se propose :

• *Stabilité des points fixes*, c'est-à-dire comment lespetites perturbations de la fonction affectent les points fixes.

• *Propriétés et caractérisations des points fixes*, étudier les différentes conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un point soit fixe dans différents contextes mathématiques.

Bibliographie

[1] O.Rahis A. Ali Cherif. Les equations différentielles ordinaires. (2016).

[2] S. Bagui. La théorie du point fixe et les fonctions de c-classe.

[3] S. Beloul. points fixes communs et applications. 2006.

[4] K. Bouguerra. Théorémes du point fixe et applications aux equations différentielles. (2016/2017).

[5] N. Maddi et I. Zerguine. Théoreme de krasnoselskii et schaeffer et leur aplication.

[6] I. Hammana et K. Herier. Le rôle application pseudo contractive dans la théorie du point fixe et application.

[7] C. Mazzi et K. Smaili. Les théorèmes du point fixe dans les espaces métriques et applications. 2020/2021.

[8] G. Kineider et T. Harbreteau. Théorème de point fixe et application. 23 avril 2020.

[9] F.Bachiri. Théorémes du point fixe et applications aux equations intégrales. (2016/2017).

[10] k.Iatime I.Chekima. Sur quelques théorémes de point fixe dans les résolutions d'un probléme aux limites de second ordre. (2019/2020).

[11] I. El khair. Théorémes de point fixe et applications. (2020/2021).

[12] F. Laaiadi. Le théorème de point fixe de krasnoselskii et ses applications au equation différentielle impulsive. 22/05 / 2017.

[13] N.Benini. quelques théorémes de point fixe et leurs applications. (15/ 10 / 2017).

[14] N.Fradj et N.Routal N.Bentoumi, L.Bouzar. Théorémes du point fixe et applications aux équations différentielles. (25/07/2019).

[15] Julie Parreaux. Théoréme de cauchy-lipschitz global. (2018/2019).

[16] E. Zeraoulia. Quelques propriétés de point fixe. 08 June 2018.