**République Algérienne Démocratique et Populaire**
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**

**Université AMO de Bouira**

**Faculté des Sciences et des Sciences Appliquées**

**Département de Mathématique**

# Mémoire de Master

## en Mathématiques

***Spécialité :*** *Analyse Mathématiques et Applications*

---

# Théorèmes du point fixe et problème périodique de Hill

---

**Présenté par :**KALOUNE Rima

**Encadré par :** MELOUANE Nassima

Soutenu le :14/09/2023.

Membres de jury :

| | | |
|---|---|---|
| M. BERKANI Aimirouche | MCA | Président. |
| M. TOKOBAINI Hamid | MAA | Examinateur. |
| Mme. MOLOUANE Nassima | MAA | Encadrante. |

2022/2023

# Remerciements

Louange a **ALLAH** par la grâce duquel les bonnes choses se réalisent, je remercier DIEU le tout puissant, miséricordieux, de m'avoir donné la force, la santé, la volonté et le courage d'accomplir ce modeste travail.
Je voudrais dans un premier temps remercier, mon encadrante **M.MELOUANE Nassima** , pour sa patience, sa disponibilité et surtout ses judicieux conseils, qui ont contribué à alimenter ma réflexion.

Je voudrais aussi d'exprimer ma reconnaissance envers les amis et collégues qui m'ont apporté leur soutient moral et intellectuel tout au long de ma démarche.
Je remercie également toute l'équipe pédagogique de l'université de Bouira.
Enfin, j'adresse mon vifs remerciement aux membres du jury qui ont accepté d'évaluer mon travail. .

# Dédicace

**A mes chéres parents**

Que nulle dédicace ne puisse exprimer ce que nous leurs doit, pour leur bienveillance, leur affection et leur soutien... Trésors de bonté, de générosité et de tendresse, en témoignage de nos profonds amours et nos grandes reconnaissances << Que Dieu vous garde >>

**A mon mari et mes enfants**

pour votre soutien et vos encouragements du début á la fin de ce travail. Je vous exprime mes remerciements et ma gratitude pour votre amour et votre soutien qui ne me quitte jamais.

**A mes chéres soeurs et mon frére**

En témoignage de nos sincéres reconnaissances pour les efforts qu'ils ont consenti pour l'accomplissement de ce projet. On leur dédie ce modeste travail en témoignage de notre grand amour et notre gratitude infnie.

*kaloune rima.*

# Résumé

Dans ce mémoire nous présentons quelques résultats de la théorie des points fixes à savoir le théorème de Brouwer, Schauder et le principe de la contraction. Krasnoselskii les a combinés en un seul résultat de point fixe. Nous poursuivons l'étude des extensions de ces théorèmes en étudiant un modulaire convexe dans un espace vectoriel. Afin de fournir certaines extensions du principe de contraction de Banach et du théorème de point fixe de Krasnoselskii. Nous avons appliqué le théorème de Krasnoselskii pour montrer l'existence d'une solution de problème périodique non linéaire de l'équation de Hill.

# Abstract

In this memoire, we present the results of fixed point theory are Brouwer,Schauder's theorem and the contraction mapping principle. Krasnoselskii combined them into one fixed point result.we continue the study of extensions of these theorems investigating a convex modular in a vector space. to provide certain extensions of Banach contraction principle and Krasnoselskii fixed point theorem. We applied theorem of Krasnoselskii to show the existence solution of the nonlinear periodic problem of Hill's equation.

# Table des matières

# Introduction

La théorie du point fixe est très importante dans l'étude de l'existence de solution pour certaine problèmes mathématique(analyse et recherche opérationnelle). De nombreux théorèmes d'existence sont obtenus à partir des théorèmes de Banach et Schauder en reformulant le problème d'existence en un problème de point fixe. En analyse,un théorème de point fixe est un résultat qui établit,qu'une fonction $f$ possède au moins un point fixe, avec quelques conditions sur $f$. Un point fixe d'une fonction $f$ qui est définie dans un espace métrique $X$ vers lui même,est un élément $x \in X$qui satisfait l'équation $f(x) = x$. Ces théorèmes présentent un outil très utile en mathématiques, notamment dans le domaine de la résolution des équations différentielles. Dans ce mémoire, on présenté quelques variantes du théorème du point fixe : Banach, Brouwer, Schauder et krasnoselskii.

Le théorème du point fixe de Banach,établi en 1922, dit qu'une contraction d'un espace métrique complet dans lui-même admet un point fixe unique. De plus, il fournit un algorithme d'approximation du point fixe comme limite d'une suite itérée.

Le théorème du point fixe de Brouwer est un résultat de topologie algébrique, sous sa forme la plus simple, ce théorème exige uniquement la continuité de l'application d'un intervalle fermé borné dans lui-même.

Le théorème du point fixe de Schauder établi en 1930, est une généralisation du théorème du point fixe de Brouwer et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique.

En 1955, Krasnoselskii a élaboré son théorème du point fixe qui affirme que dans un convexe compact, toute application qui se met sous la forme d'une somme de deux applications dont l'une est contractante et l'autre compacte admet un point fixe. Ce théorème est très efficace dans la résolution des équations différentielles non linéaires et des problèmes d'existence et d'unicité.

L'objectif de ce mémoire est d'introduire un modulaire convexe, Nous appliquons le module convexe pour définir une topologie sur un espace vectoriel donné, puis dans cet espace topologique, nous considérons une application contractante (par rapport à ce modulaire) et une application complètement continue (par rapport à cette topologie). Nous prouvons ensuite un théorème de type Banach, Schauder et Krasnoselskii pour la somme convexe de telles applications. Comme nous n'avons pas de norme dans notre espace, dans la démonstration du théorème de Krasnoselskii, nous appliquons notre propre théorème de type Schauder. Nous sommes en mesure de prouver le théorème de Krasnoselskii uniquement pour la somme convexe d'une application j-contractante et d'une application j-complètement continue.

Dans le première chapitre, nous rappelons quelques notions d'analyse fonctionnelle et des résultats connus qu'on va utiliser dans la suite de notre travail. Dans le deuxième chapitre, nous présentons quelques théorèmes du point fixe dans l'espaces de Banach tels les théorèmes de Brouwer, Schauder et Krasnoselskii .

Dans le troisième chapitre, nous étudions des extensions de théorèmes précédent en utilisant un modulaire convexe dans un espace vectoriel.

Dans le quatrième chapitre, nous appliquons théorème de Krasnoselskii pour montrer l'existence d'une solution de problème périodique non linéaire de l'équation de Hill.

# Chapitre 1

# Rappels et notions fondamentales

## 1.1 Espaces topologiques

**Définition 1.1.** *Soit $X$ un ensemble non vide et $\tau$ une collection de sous-ensembles de $X$. Alors $\tau$ est appelée une topologie sur $X$ si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *$\emptyset \in \tau$ et $X \in \tau$,*
2. *$\tau$ est stable par les réunions arbitraires.*
3. *$\tau$ est stable par les intersections finies.*

*Le couple $(X, \tau)$ est appelé un espace topologique.*
*alors Les éléments de $\tau$ sont appelés des ensembles $\tau$-ouverts ou simplement des ouverts.*

**Théorème 1.1.** *Soit $C$ la collection de tous les ensembles fermés dans un espace topologique $(X, \tau)$. Alors $C$ a les propriétés suivantes :*

1. *$\phi \in C$ et $X \in C$.*
2. *$C$ est stable par les intersections arbitraires.*
3. *$C$ est stable par les réunions finies.*

**Définition 1.2.** ***(Espace métrique)****[6] Soit $X$ un ensemble non vide et $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ une fonction.L'application d est appelée une distance (ou métrique) sur $X$ si les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. *$d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$ pour tout $x, y \in X$.*
2. *$d(x, y) = d(y, x)$ pour tout $x, y \in X$;*
3. *$d(x,y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ pour tout $x, y, z \in X$.*

*La valeur $d(x, y)$ est appelée la distance entre x et y, et le couple(X,d) est appelée espace métrique.*

**Exemple 1.1.** *La droite réelle $\mathbb{R}$ avec $d(x, y) =\mid x - y \mid$ est un espace métrique. La distance d est appelé la distance usuelle pour $\mathbb{R}$ .*

**Définition 1.3.** *Soit $(X,d)$ un espace métrique,$x \in X$,pour tout $r > 0$, on définit :*

$B_r(x) := \{y \in X : d(x,y) < r\}$, *la boule ouverte de centre $x$ et de rayon $r$ ;*

$\bar{B}_r(x) := \{y \in X : d(x,y) \leq r\}$, *la boule fermée de centre $x$ et de rayon $r$ ;*

$\partial B_r(x) := \{y \in X : d(x,y) = r\}$, *la frontière de la boule de centre $x$ et de rayon $r$.*

*Le nombre $sup\{d(x,y) : x,y \in C\}$ est appelé le diamètre de l'ensemble $C$ et est noté $diam(C)$.Si $diam(C)$ est fini, alors $C$ est dit borné.*

**Définition 1.4.** ***(Espace vectoriel normé)*** *Soit $E$ un espace vectoriel. Une application $\|.\|$ :: $E \to \mathbb{R}_+$ est dite norme sur $E$ si elle vérifie :*

1. *Pour tout $x \in E, \|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$.*
2. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}, x \in E, \|\alpha x\| =\mid \alpha \mid \|x\|$, où $\mid . \mid$ désigne respectivement la valeur absolue si $\mathbb{R}$ ou le module si $C$.*
3. *Pour tout $x,y \in E, \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).*

*le couple $(E, \|.\|)$ est appelé espace vectoriel normé, on définit la distance associée à une norme par $d(x,y) = \|x-y\|$.*

**Définition 1.5.** *Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet. C'est donc un espace métrique complet où la distance est définie par la norme.*

**Définition 1.6.** *Soit $X$ un espace linéaire. Le segment de droite ou l'intervalle reliant les deux points $x,y \in X$ est l'ensemble $[x,y] := \{\lambda x + (1-\lambda)y : 0 \leq \lambda \leq 1\}$.*

**Définition 1.7.** *Soit $E$ un espace de Banach réel, pour toute partie finie $D \subset E$ on désigne par l'enveloppe convexe de $D$ l'intersection de toutes les parties convexes contenant $D$, elle est définie par la formule suivante :*

$$conv(D) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i x_i, t_i \geq 0, x_i \in D, \sum_{i=1}^{n} t_i = 1 \right\}$$

**Définition 1.8.** ***(Ensemble convexe)*** *Un ensemble $C$ dans $X$ est dit convexe lorsque, pour tous $x$ et $y$ de $C$, le segment $[xy]$ est tout entier contenu dans $C$., c'est-à-dire :*

$$\forall x,y \in C, \quad \forall t \in [0;1], \quad tx + (1-t)y \in C$$

.

**Définition 1.9.** ***(Fonctions convexes)*** *Soit $X$ un espace linéaire et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors :*

1. *$f$ est dite convexe si $f[\lambda x+(1-\lambda)y] \leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$ pour tout $x, y \in X$ et $\lambda \in [0,1]$.*
2. *$f$ est dite strictement convexe si $f(\lambda x+(1-\lambda)y) < \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$ pour tout $\lambda \in (0,1)$ et $x, y \in X$ avec $x \neq y$, $f(x)$et $f(y)$sur $\mathbb{R}$*

**Exemple 1.2.** *1. Considérons $X = \mathbb{R}^n, n \geq 2$, avec la norme $\|x\|_2$ définie par $\|x\|_2 = \sqrt{(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)}, x = (x_1, x_2, ........, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Alors $\|x\|_2$ est strictement convexe.*

*2. Considérons $X = \mathbb{R}^n, n \geq 2$, avec la norme $\|x\|_1$ définie par*
*$\|x\|_1 =| x_1 | + | x_2 | +....+ | x_n |,\ x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.*
*Si $\lambda \in (0,1)$ alors*

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\| = 1 = \lambda\|x\| + (1-\lambda)\|y\| = 1.$$

*D'où la norme n'est pas strictement convexe.*

**Définition 1.10.** ***(Compacité)*** *Soit $X$ un espace topologique séparé. On dit que $X$ est compact si de tout recouvrement ouvert de $X$, on peut extraire un sous-recouvrement fini. Autrement dit, pour toute famille d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$ de $X$ telle que $X = \underset{i\in I}{\cup} U_i$, il existe un sous-ensemble fini $J$ de $I$ tel que $X = \underset{i\in J}{\cup} U_i$*

**Définition 1.11.** ***(Ensemble dense)*** *Un sous-ensemble $C$ d'un espace métrique $(X, d)$ est dit dense dans $X$ si $\bar{C} = X$.*

**Définition 1.12.** *Soient $(X, \tau)$ un espace topologique. On dit que $X$ est séparable s'il existe une partie au plus dénombrable $A$ de $X$ dense dans $X$.*

**Proposition 1.1.** *Tout ensemble métrique compact est séparable.*

**Définition 1.13.** ***(Suite convergente)***

*Soit $(X, d)$ un espace métrique la suite $(x_n)_n \in X$ est convergente vers $x \in X$ si $\lim_{n\to 0} d(x_n, x) = 0$. c'est-à-dire*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } d(x_n, x) < \epsilon, \text{pour tout } n > N$$

**Définition 1.14.** ***(Suite de Cauchy)*** *On dit que la suite $(x_n)$ dans l'espace métrique $(X, d)$ est une suite de Cauchy si :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } d(x_n, x_m) < \epsilon, \forall n, m > N$$

*On écrit alors $d(x_n, x_m) \to 0$ lorsque $n, m \to \infty$.*

**Proposition 1.2.** *Dans un espace métrique (X ; d) on a :*

1. *Toute suite convergente est de Cauchy.*
2. *Toute suite de Cauchy est bornée.*
3. *Toute suite extraire d'une suite de Cauchy est de Cauchy.*
4. *Toute suite de Cauchy admettant une sous suite convergente est converge.*

**Définition 1.15.** ***(Espace métrique complet)*** *Un espace métrique (X, d) est dit complet si toute suite de Cauchy dans X converge dans X.*

**Proposition 1.3.** *Soit X un espace métrique. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

*(a) X est compact.*

*(b) Toute suite dans X possède une sous-suite convergente.*

*(c) X est complet et totalement borné.*

**Proposition 1.4.** *Soit C un sous-ensemble d'un espace métrique complet X. Alors nous avons les résultats suivants :*

*(a) C est compact si et seulement s'il est fermé et totalement borné.*

*(b) C est compact si et seulement s'il est totalement borné.*

**Exemple 1.3.**

1. *$X = (0, 1)$ avec la métrique usuelle est totalement borné, mais non compact.*
2. *$X = \mathbb{R}$ avec la métrique usuelle est complet. Mais il n'est pas totalement borné et donc non compact.*

**Définition 1.16.** *Un sous-ensemble C d'un espace topologique est dit relativement compact si sa fermeture est compacte, c'est-à-dire si $\bar{C}$ est compact.*

**Proposition 1.5.** *Une partie Y d'un espace topologique (X, T) est dite relativement compacte si et seulement si il existe un compact K de X tel que* $Y \subseteq K$.

**Théorème 1.2.** *Soient X et Y deux espaces topologiques, et soit* $T : X \to Y$ *une application continue. Si* $C \subseteq X$ *est compact, alors T(C) est compact.*

## 1.2 Continuité des application

*Nous allons considérer un opérateur T de X dans Y et nous allons donner une définition concernant les propriétés de la continuité de T. La notion la plus simple est la suivante :*

**Définition 1.17.** ***(Application continue)*** *Soit* $(X, \tau_X)$ *et* $(Y, \tau_Y)$ *deux espaces topologique,l'application* $f : X \to Y$ *est continue en* $x_0 \in X$ *si* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ .

**Remarque 1.1.** *La fonction f est dite continue sur X si elle est continue en chaque point de X.*

**Définition 1.18.** ***(Application complètement continue)*** *Soient E, F deux espaces normés et l'application* $f : E \to F$, *On dit que f est complètement continue si :*

1. *f est continue.*
2. *f transforme tous ensemble borné en un ensemble relativement compact.*

**Définition 1.19.** *Un opérateur* $T : X \longrightarrow Y$ *est dit compact s'il est continu et possède la propriété :*
*pour toute suite* $(x_n)_n$ *bornée dans X, la suite* $(T(x_n))$ *admet une sous-suite convergente.*

**Définition 1.20.** ***(Application Lipschitzienne)*** *Soient* $(X, d)$ *et* $(Y, p)$ *deux espaces métrique et* $T : X \to Y$ *une application. Alors T est dite Lipschitzienne s'il existe* $L > 0$ *tel que*

$$p(Tx, Ty) \leq Ld(x, y) \quad \text{pour tout} \quad x, y \in X$$

. *(a) Si L=1 ,T est dit non expansive*

*(b) Si* $L < 1$ *, on dit que T est une contraction .*

*(c) T est dit contractive si pour tout x, y dans X et* $x \neq y$, *on a*

$$P(Tx, Ty) < d(x, y)$$

$\boxed{\textit{Contraction}} \Longrightarrow \boxed{\textit{Contractive}} \Longrightarrow \boxed{\textit{Non expansif}} \Longrightarrow \boxed{\textit{Lipschitzienne}}$

*Mais les implications inverses ne sont pas vraies en général .de plus, toutes ces applications sont continues.*

**Exemple 1.4.** *1- Soit :* $[-\frac{\pi}{10}; \frac{\pi}{10}] \longrightarrow [-\frac{\pi}{10}; \frac{\pi}{10}]$ *une application définie par*

$$T(x) = \begin{cases} 2x\sin(\frac{1}{x}) \quad si \quad x \neq 0 \\ 0 \quad si \quad x = 0 \end{cases}$$

*On voit alors que* $T$ *est continue , mais n'est pas lipschitzienne.*

*2- Soit* $T : C[0;1] \to C[0;1]$ *une application définie par*

$$(T_x)(t) = x(0) + \lambda \int_0^t x(s)ds, \lambda \in \mathbb{R}$$

$T$ *est une application de contraction si* $\mid \lambda \mid < 1$ *.*

**Définition 1.21.** ***(Équicontinuité)****[11] Soit* $(E,d)$, $(F,d')$ *deux espaces métriques.*

*Soit* $H \subset B_0(E,F)$*(les application borné) et* $x_0 \in E$.

1. *On dit que* $H$ *est équicontinue en un point* $x_0 \in E$ *si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in E,\ \forall f \in H;\ d(x,x_0) < \delta \Longrightarrow d'(f(x),f(x_0)) < \varepsilon.$$

2. *On dit que* $H$ *est équicontinue si elle est équicontinue en tout point de* $E$.

**Exemple 1.5.** *L'ensemble des applications lipschitziennes de rapport donné* $k$ *de* $E$ *dans* $F$ *est équicontinue sur* $E$.

**Théorème 1.3.** ***(Arzela-Ascoli)***

$(E,d)$*et* $(F,\delta)$ *deux espaces métriques compacts. Une partie* $A \subset E$ *est relativement compact si et seulement si*

*i)* $A$ *est équicontinue*

*ii)* $\forall x \in E, A_x = \{f(x)/f \in A\}$ *est relativement compact dans* $F$.

**Définition 1.22.** *[13] Un ensemble* $A$ *est un homéomorphe à l'ensemble* $B$ *s'il existe une fonction continue bijective* $h : A \to B$ *telle que* $h^{-1}$ *est aussi continue. Une telle fonction* $h$ *est appelée un homéomorphisme.*

**Définition 1.23.** ***(Fonction de Carathéodory****[15]* $(\Omega, \Sigma)$ *espace mesurable*

*On dit que* $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction de Carathéodory si l'application* $(t, u) \mapsto f(t, u)$ *est continue en* $u$ *et mesurable en* $t$.

# Chapitre 2

# Quelques Théorèmes du point fixe

*Le but de ce chapitre de présenter quelques théorèmes du point fixe et leurs démonstrations. On commence par : le théorème du point fixe de Banach pour les applications contractantes. Ensuite on va présenter le théorème de Brouwer et Schauder. Enfin, nous abordons le théorème du point fixe de Krasnoselskii.*

**Définition 2.1.** *On dit que l'espace métrique* $(X, d)$ *admet la propriété du point fixe (notée PPF) si chaque application continue* $T : X \to X$ *admet un point fixe*

**Exemple 2.1.** 1. *Tout intervalle borné et fermé* $J = [a; b] \subset \mathbb{R}$ *admet PPF. En effet , pour toute fonction continue donnée* $T : J \to J$*, on a*

$$a - T(a) \leq 0 \quad et \quad b - T(b) \geq 0$$

*Le théorème des valeurs intermédiaire assure que l'équation* $x - T(x) = 0$ *a une solution dans* $J$*, et donc* $T$ *a un point fixe.*

2. *Soit* $X = \mathbb{R}$ *et* $T : X \to X$ *une application définie par* $T(x) = x + a$ *pour un élément fixe* $a \neq 0$ *. Alors* $T$ *n'a pas de point fixe . Ainsi ,la droite réelle* $\mathbb{R}$ *n'admet pas la PPF .*

## 2.1 Théorème du point fixe de Banach

**Théorème 2.1.** *[6] Soit* $(X, d)$ *un espace métrique complet et* $T : X \to X$ *une application contractante avec la constante de contraction* $k$ *. Alors* $T$ *a un point fixe unique dans* $X$ *.*

*Démonstration.* **1- l'existence :** Soit $y \in X$ un point arbitraire dans X, considérons la suite $(x_n)$ définit comme suit :

$$\begin{cases} x_0 = y, \\ x_n = T(x_{n-1}), n \geq 1. \end{cases}$$

On montre que $(x_n)$ est suite de Cauchy dans $X$.

pour $m < n$ on a

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) ...... + d(x_{n-1}, x_n)$$

.

Puisque $T$ est une contraction alors , pour $p \geq 1$

$$d(x_p, x_{p+1}) = d(Tx_{p-1}, Tx_p) \leq kd(x_{p-1}, x_p)$$

donc :

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq (k^m + k^{m+1} + .... + k^{n-1})d(x_0, x_1) \\ &\leq k^m(1 + k + ... + k^{n-m-1})d(x_0, x_1) \\ &\leq k^m(1 - k)^{-1}d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

On déduit que$(x_n)$ est de Cauchy dans $X$ qui est complet, donc $(x_n)$ converge vers $x$ dans $X$ .Puisque $T$ est continue, on a

$$x = \lim_{x\to\infty} x_n = \lim_{x\to\infty} T(x_{n-1}) = T(\lim_{x\to\infty} x_{n-1}) = Tx$$

Donc $x$ est un point fixe de $T$ .

**2-l'unicité :**

Supposons qu'il existe $v \quad et\ w \in X$ tels que $v = Tv$ et $w = Tw$. Alors

$$d(v-w) = d(Tv - Tw) \leq kd(v-w).$$

On obtient

$$(1-k)d(v-w) \leq 0.$$

Comme $k < 1$ alors $d(v-w) = 0$ donc $v = w$. □

**Proposition 2.1.** *$X$ espace métrique complet. Soit $T : X \to X$ une application Lipschitzienne (pas nécessairement contractante) et il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $T^p$ est une contraction .Alors $T$ a encore un point fixe unique.*

*Démonstration.* D'après le théorème de Banach , $T^p$ admet un unique point fixe $x_0$ On a

$$T^p(T(x)) = T(T^p(x)) = T(x)$$

D'où $T(x)$ est un point fixe de $T^p$.Comme le point fixe est unique alors $T(x) = x$. □

**Exemple 2.2.**

1. *Il existe des applications qui n'est pas des contractions, mais qui a un point fixe unique. Pour cela, considérons $X = [0; 1]$ et $T : X \to X$ une application définie par $Tx = 1 - x, x \in X$ . alors $T$ a un point fixe unique 1/2 ,mais ce n'est pas une contraction.*

2. *Soit $X = \mathbb{R}$ l'espace de Banach des nombres réels muni de la norme $\|.\|$ donné par $\|x\| = |x|$ et $[a; b] \subset \mathbb{R}; f : [a; b] \to [a, b]$, une fonction différentiable telle que $|f'(x)| < c < 1$. Supposons que nous souhaitions trouver la solutions de l'équation $f(x) = x$. Pour tout $x, y \in [a, b]$, nous avons par le théorème de la valeur moyenne de Lagrange que $f(x) - f(y) = (x - y)f'(z), y < z < x$,Il s'ensuit que*

$$|f(x) - f(y)| = |x - y||f'(z)| \leq c|x - y|.$$

*Ainsi , $f$ est une contraction de $[a;b]$ en lui-même.puisque $[a;b]$ est un sous ensemble fermé de $\mathbb{R}$, il s'ensuit $[a;b]$ que est complet donc d'après la théorème de Banach , il existe une point fixe unique c'est-à-dire $\bar{x} \in [a;b] \quad tq \quad f(\bar{x}) = \bar{x}$.*

## 2.2 Théorème du point fixe de Brouwer

**Théorème 2.2.** *[6] Toute application continue de la boule unité fermée $\mathbb{B}^n de \mathbb{R}^n$ dans elle même admet un point fixe.*

**Théorème 2.3.** *[12] Soit $K$ un sous-ensemble non vide convexe, compact de $\mathbb{R}^n$ et soit $T$ une application continue de $K$ dans lui-même .alors $T$ admet un point fixe dans $K$.*

## 2.3 Théorème du point fixe de Schauder

**Théorème 2.4.** *[12] Si $K$ est un sous-ensemble convexe compact d'un espace vectoriel normé, alors toute fonction continue $f : K \to K$ en lui-même possède au moins un point fixe.*

*Démonstration.* Étant donné tout $\epsilon > 0$ , grâce à la compacité de K, nous pouvons trouver un nombre fini de points $x_1, ..., x_N$ dans K tels que chaque $x \in K$ se trouve dans une boule ouverte centrée en $x_i$ pour certains i = 1, 2,..., N et de rayon $\epsilon$. Pour chaque $j \in \{1, 2..., N\}$ définissons la fonction $g_j : K \to \mathbb{R}^+$ par

$$g_j(x) = \begin{cases} \epsilon - \|x - x_j\|, & Si \quad \|x - x_j\| < \epsilon \\ 0, & Si \quad \|x - x_j\| \geq \epsilon. \end{cases}$$

Il est clair que chaque $g_j$ est continue, on définit $h_j$ par

$$h_j(x) = \frac{g_j(x)}{\sum_{i=1}^N g_i(x)}$$

De plus

$$\sum_{i=1}^N h_i(x) = 1 \quad \forall x \in K \text{ et } h_j(x) = 0 \text{ si } \|x - x_j\| \geq \epsilon... \qquad (*)$$

l'application $x \to V(x)$ définie par

$$V(x) = \sum_{i=1}^N h_j(x) x_j$$

envoie K dans l'enveloppe convexe de $\{x_1, x_2, ..., x_N\}$.

pour $x \in K$, on a

$$x - V(x) = \sum_{j=1}^{N} h_j(x)(x - x_j)$$

Ainsi, pour $x \in K$, d'aprés $(*)$ on a

$$\|x - V(x)\| \leq \sum_{j=1}^{N} h_j(x)\|x - x_j\| \leq \epsilon \qquad ...(**)$$

Si nous notons $K_\epsilon$ l'enveloppe convexe de $x_1, ..., x_N$ ,alors l'application $x \to V(f(x))$ continue, un ensemble convexe compact, en lui-même.On a les $K_\epsilon$ ont des parties qui sont dans des espaces vectoriels de dimension finie donc selon ( le théorème 2.3) ,$V(fx_\epsilon) = x_\epsilon$, pour un certain $x_\epsilon$ .

Fixons $\epsilon = 1/n$ pour chaque $n \in N$. Ainsi, nous avons $x_n \in K$ tel que $V(f(x_n)) = x_n$. Maintenant, grâce à la compacité de $K$, il existe une sous-suite $x_{nk}$ qui converge vers un certain $x^*$. Par l'inégalité triangulaire et la continuité de $V_f$, et$(**)$, nous avons

$$\|f(x^*) - x^*\| \leq \|f(x^*) - f(x_{nk})\| + \|f(x_{nk}) - Vf(x_{nk})\| + \|x_{nk} - x^*\| \leq \frac{1}{n}$$

En laissant $k$ tendre vers $\infty$ dans l'expression ci-dessus, il s'ensuit, grâce à la continuité de$f$ et$(**)$, que $f(x^*) = x^*$ □

*Le théorème du point fixe de Schauder a été généralisé à l'espace vectoriel topologique localement convexe et cette généralisation est connue sous le nom de théorème de Schauder Tychonoff.*

**Théorème 2.5.** ***(Théorème du point fixe de Schauder-Tychonoff )****[6] Soit $X$ un espace localement convexe ,$K \subset X$ non vide et convexe,$K_0 \subset K, K_0$ compact. étant donné une application continue $f : K \to K_0$, il existe $\bar{x} \in K_0$ tel que $f(\bar{x}) = \bar{x}$*

*Démonstration.* Soit B la base locale de la topologie de X engendrée par la famille séparant des semi-normes P sur X .étant donnée $U \in B$,d'après la compacité de $K_0$ , il existe $x_1, x_2, ....x_{n0}$ tel que

$$K_0 \subset \bigcup_{j=1}^{n} (x_j + U)$$

Soit $\varphi_1, ......, \varphi_n \in C(K_0)$ une partition de l'unité pour $K_0$ subordonnée au couverture ouverte $\{x_j + U\}$ ,et définissons

$$f_u(x) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(f(x))x_j, \forall x \in K$$

alors

$$f_u(K) \subset K_u = co(\{x_1, ......, x_n\}) \subset K$$

Et le théorème (2.4) donne l'existence de $x_u \in K_u$ tel que $f_u(x_u) = x_u$.Alors

$$x_u - f_u(x_u) = f_u(x_u) - f(x_u) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(f(x_u))(x_j - f(x_u)) \in U \tag{2.1}$$

Pour $\varphi_j(f(x_u)) = 0$ dés que $x_j - f(x_u) \notin U$. faisant encore appel à la compacité de $K_0$ ,il existe

$$\bar{x} \in \bigcap_{w \in B} \overline{\{f(x_u) : U \in B, U \in W\}} \subset K_0 \tag{2.2}$$

Sélectionnez maintenant $p \in P$ et $\epsilon > 0$ , et laissez $V = \{x \in X : p(x) < \epsilon\} \in B$ Comme est continue sur K , il existe $W \in B, W \subset V$ ,tel que

$$f(x) - f(\bar{x}) \in V$$

Chaque fois que $x - \bar{x} \in 2W, x \in K$ .de plus , d'après (2.2) ,il existe $U \in B, U \in W$ ,tel que

$$\bar{x} - f(x_u) \in W \subset V \tag{2.3}$$

En combinant (2.1) et(2.3) on obtient $x_u - \bar{x} = x_u - f(x_u) + f(x_u) - \bar{x} \in U + W \subset W + W + 2W$ Qui donne

$$f(x_u) - f(\bar{x}) \in V \tag{2.4}$$

Ainsi (2.3) et (2.4) impliquant

$$p(\bar{x} - f(\bar{x})) \leq p(\bar{x} - f(x_u)) + p(f(x_u) - f(\bar{x})) < 2\epsilon$$

Etant $p$ et $\epsilon$ arbitraire ,nous conclus que $p(\bar{x} - f(\bar{x})) = 0$ pour tout $p \in P$ .ce qui implique l'égalité $f(\bar{x}) = \bar{x}$. $\square$

## 2.4 Théorème du point fixe de Krasnoselskii

**Théorème 2.6.** *[16] Soit $M$ est un ensemble convexe fermé et non vide d'un espace de Banach $(X, \|.\|)$.Supposons que $A$ et $B$ sont des applications :$A : M \to X$ et $B : M \to X$ telles que*

1. *$Ax + By \in M, \forall x, y \in M$*
2. *$A$ compact et continue.*
3. *$B$ contractante de constante $\alpha\langle 1$.*

*Alors il existe $x \in M$.tel que $Ax + Bx = x$*

*Démonstration.* -Montrons que $(I - B)^{-1}$ existe et est continue.

D'après la condition (3) ,on a

$$\begin{aligned}\|(I-B)(x)-(I-B)(y)\| &= \|(x-y)-(Bx-By)\| \\ &\leq \|(x-y)\| + \|(Bx-By)\| \\ &\leq \|(x-y)\| + \alpha\|(x-y)\| \\ &\leq (1+\alpha)\|(x-y)\|\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\|(I-B)(x)-(I-B)(y)\| &= \|(x-y)-(Bx-By)\| \\ &\geq \|(x-y)\| - \|(Bx-By)\| \\ &\geq \|(x-y)\| - \alpha\|(x-y)\| = |(1-\alpha)\| + \|(x-y)\|\end{aligned}$$

Donc

$$(1-\alpha)\|(x-y)\| \leq \|(I-B)(x)-(I-B)(y)\| \leq (1+\alpha)\|(x-y)\| \qquad ...(*)$$

Alors l'application

$$(I-B) : M \to (I-B)M$$

est continue .

On a

$$\begin{aligned}(*) &\Rightarrow 0 < (1-\alpha)\|(x-y)\| \leq \|(I-B)(x)-(I-B)(y)\| \\ &\Rightarrow x \neq y \Rightarrow (I-B)(x) \neq (I-B)(y)\end{aligned}$$

Donc $(I-B)$ est injective , d'autre part, l'application $(I-B):M\to(I-B)M$ est surjective par contraction, donc $(I-B)^{-1}$ existe.
Comme $(I-B)^{-1}$ existe donc,

$$\|(I-B)(x)-(I-B)(y)\|\geq(1-\alpha)\|(x-y)\|$$

c'est équivalent

$$\|x'-y'\|\geq(1-\alpha)\|(I-B)^{-1}x'-(I-B)^{-1}y'\|$$

Donc,$(I-B)^{-1}$ est lipschitzienne donc continue. Posons $U:=(I-B)^{-1}A$.Cette application est bien définie, en d'autre termes :$\forall x\in M, Ax\in(I-B)M$ pour $x\in M$fixé, on pose l'application

$$\begin{aligned}\phi\ \ &: M\to M\\ &y\to\phi(y)=Ax+By.\end{aligned}$$

est bien définie, d'après la condition(1),et est une contraction

$$\begin{aligned}\|\phi(y)-\phi(y')\| &= |Ax+By-Ax-By'\|\\ &=\|By-By'\|\leq\alpha\|y-y'\|\end{aligned}$$

d'où, d'après le théorème du point fixe de Banach, l'application $\phi$ admet un point fixe $z\in M(M$ est fermé donc complet).

$$\begin{aligned}\phi(z)=z\ &\Rightarrow Ax+Bz=z\\ &\Rightarrow Ax=z-Bz\\ &\Rightarrow Ax=(I-B)z.\end{aligned}$$

Et par conséquent,$Ax\in(I-B)M$. Finalement $U:M\to M$ est bien définie.
$U$ est une application compacte, puisque $U$ est une composition d'une application continue avec une application compacte ,d'après le théorème de Schauder, U admet un point fixe c'est à dire

$$\exists x\in M, tel\ que(I-B)^{-1}Ax=x$$

C'est-à-dire $Ax+Bx=x$.

# Chapitre 3

# Théorèmes du point fixe en utilisant modulaire convexe

Dans ce chapitre, nous poursuivons la présentation des extensions des théorèmes du point fixe précédents en utilisant un modulaire convexe dans un espace vectoriel $X$.

## 3.1 Définition et notations

Nous présentons le concept de modularité convexe sur ensemble $X$. Dans ce chapitre et le suivant, $X$ désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Nous considérons $X$ avec une topologie déterminée uniquement par la modularité convexe $j$ introduite ci-dessous.

**Définition 3.1.** *Une application $j : X \to [0;\infty]$ est dite modulaire convexe sur $X$ si les trois conditions suivantes sont vérifiées :*

*j1.* $j(x) = 0 \iff x = 0,$

*j2.* $j(x) = j(-x),$

*j3.* *$j$ est convexe.*

**Exemple 3.1.** *1. Pour $X = \mathbb{R}$, l'application $j$ définie par $j(x) =\mid x \mid$ est une modulaire convexe .*

*2. $X$ un espace normé,la norme $\|.\|$ est modulaire convexe.*

*3. $X = L^P([a;b])$, j(x)= $\int_a^b |x(t)|^p dt$ est modulaire convexe sur $X$ pour $p \geq 1$.*

**Remarque 3.1.** *Pour chaque $\alpha \in [0,1]$ et $\forall x \in X, j(\alpha x) \leq \alpha j(x)$*

En effet, $\alpha \in [0,1]$, alors en utilisant de (j1)et(j3, on obtient

$$j(\alpha x) = j(\alpha x + (1-\alpha)0) \leq \alpha j(x) + (1-\alpha)j(0) = \alpha j(x).$$

**Définition 3.2.** *Pour tout $x \in X$ et $\epsilon > 0$. On définit l'ensemble $B_j(x,\epsilon)$ par*

$$B_j(x,\epsilon) = \{y : j(y-x) < \epsilon\}.$$

**Remarque 3.2.** *Comme $J$ est convexe tous les $B_j(x,\epsilon)$ sont convexes. En effet, pour $y_1, y_2 \in B_j(x,\epsilon)$ et $\alpha \in [0;1]$. On a*

$$\begin{aligned}
j(\alpha y_1 + (1-\alpha)y_2 - x) &= j(\alpha y_1 + (1-\alpha)y_2 - x + \alpha x - \alpha x) \\
&= j(\alpha y_1 + (1-\alpha)y_2 - (1-\alpha)x - \alpha x) \\
&= j(\alpha(y_1 - x) + (1-\alpha)(y_2 - x)) \\
&\leq \alpha j((y_1 - x) + (1-\alpha)j(y_2 - x)) \\
&\leq \alpha\epsilon + (1-\alpha)\epsilon = \epsilon
\end{aligned}$$

*Donc*

$$\alpha y_1 + (1-\alpha) y_2 \in B_j(x, \epsilon).$$

Les ensembles $B_j(0, \epsilon)$ agissent comme une base à la topologie $(X, j(.))$ générée par $j$ c'est-à-dire une base modulaire.$(X, j(.))$ n'est pas un espace localement convexe. Cette affirmation indique que l'espace $(X, j(.))$ ne possède pas la propriété de convexité locale(la convexité locale se réfère à une propriété où chaque point de l'espace a un voisinage convexe).

Pour analyser la continuité de $j(.)$ sur les ensembles ouverts où il est borné, nous considérons $(X, j(.))$ Comme un espace topologique. La topologie sur X est générée par le module j. Par la définition du module convexe, nous pouvons conclure que $j(.)$ est continue à réécrire un espace topologique avec la topologie générée par le module $j$ et nous écrirons simplement $X$ au lieu de $(X, j(.))$.

**Remarque 3.3.** *Un sous-ensemble $T \subset X$ est borné si $T \subset B_j(0, n)$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.*

Nous définissons la convergence d'une suite dans $X$, un ensemble fermé, un ensemble compact et la complétude de $X$.

**Définition 3.3.** ***(Suite j-Cauchy)*** *On appelle une suite $(u_m) \in X$ j-Cauchy dans $X$ si*

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{n>m} j(u_n - u_m) = 0.$$

**Définition 3.4.** ***(Suite j-convergente)*** *Soit $(u_m) \in X$ une suite et $u \in X$. On dit que $(u_m)$ est j-convergente vers $u$ Si $\lim\limits_{m\to\infty} j(u_m - u) = 0$ (notons $u_m \xrightarrow{j} u$ ou $\lim^j_{m\to\infty} u_m = u$).*

**Remarque 3.4.** *On dit qu'une suite $(u_m) \subset X$ est j-convergente sur $X$ si $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ est j-convergente vers $u$ où $u \in X$.*

**Définition 3.5.** *Un sous-ensemble $T$ de l'espace $X$ est fermé, si la limite de chaque suite j-convergent d'élément de $T$ appartient à $T$ ; c'est-à-dire si pour une suite $(u_m) \subset T$ il existe $u \in X$ tel que $\lim\limits_{m\to\infty} j(u_m - u) = 0$ alors $u \in T$.*

**Définition 3.6.** ***(Espace j-complet)*** *Si chaque suite j-Cauchy $(u_m)$ dans $X$ est j-convergente dans $X$, alors on dit que $X$ est un espace j-complet.*

**Définition 3.7.** ***(Application j-continue)*** *Soit $A : X \to X$ une application, on dit que $A$ est J-continue dans $X$, si pour chaque suite $(u_m) \in X$ tel que $u_m \xrightarrow{j} u$ alors $\lim\limits_{m\to\infty} j(Au_m - Au) = 0$.*

**Définition 3.8.** ***(Application complètement j-continue)*** *On dit qu'une application A j-continue est complètement j-continue dans $X$ , si l'image par $A$ de chaque ensemble borné dans $X$ est contenue dans un sous-ensemble compact de $X$.*

**Définition 3.9.** ***(Application j-compacte)*** *$A$ application j-compacte dans $X$ si $A(X)$ est contenu dans un sous-ensemble compact de $X$.*

**Remarque 3.5.** *Dans un ensemble fini$T$ et $A : T \to T$ une application j-continue donc $A$ est continue.*

## 3.2 Théorèmes du point fixe

**Théorème 3.1.** ***(Théorème du point fixe type de Schauder)****[3] Soit $T$ un sous-ensemble fermé, borné et convexe de $X$ et $A : T \to X$ une application j-continue a vérifiant :*

*S1) $A(T) \subset T$*

*S2) $A$ est complètement j-continue sur $T$.*

*Donc $A$ a un point fixe dans $T$ .*

*Démonstration.* Soit $Y$ un ensemble compact de $X$ tel que $A(T) \subset Y$, puisque $T$ est fermé, nous pouvons supposer que $Y \subset T$ .Soit $\epsilon > 0$ quelconque et soit $y_1, y_2, y_3, .....y_n \in Y$ tel que

$$j(y_i - y_k) \geq \epsilon \quad pour 1 \leq i < k \leq n \tag{3.1}$$

Il est claire que $n$ est fini. Sinon il existe une suite $y_1, y_2, y_3, ...$qui satisfait (3.1),ce qui contredirait la compacité de $Y$.

L'ensemble fini $B = \{y_1, ..., y_n\}$ est j-dense dans Y , c'est-à-dire

$$\forall y \in Y, \exists y_i \in B, j(y_i - y) < \epsilon. \tag{3.2}$$

On Définit l'ensemble convexe

$$T_\epsilon = \{\eta_1 y_1 + ... + \eta_n y_n : \sum_{i=1}^{n} \eta_i = 1, \eta_i \geq 0\}$$

Comme $T$ est convexe alors $T_\epsilon \subset T$. On va construire une fonction $p_\epsilon(y)$ j-continue qui approxime $y$ tel que

$$j(p_\epsilon(y) - y) < \epsilon \quad \texttt{pour tout} \quad y \in Y \tag{3.3}$$

On définit pour $i = 1, ..., n, y \in Y$,

$$\varphi_i(y) = \begin{cases} 0 & si \ j(y_i - y) \geq \epsilon \\ \epsilon - j(y_i - y) & si \ j(y_i - y) < \epsilon. \end{cases} \tag{3.4}$$

Chacune de ces $n$ fonctions $\varphi_i(y)$ est j-continue et (3.1) garantit que

$$\varphi_i(y) \geq 0 \quad \texttt{pour } i = 1, ..., n.$$

Soit les n fonctions j-continues

$$\eta_i(y) = \varphi_i(y)/s(y), i = 1, ..., n, y \in Y, \quad où \ s(y) = \varphi_1(y) + ... + \varphi_n(y).$$

Notons que $\sum_{i=1}^{n} \eta_i(y) = 1, \eta_i(y) \geq 0$, donc on peut définir la fonction j- continue $p_\epsilon$ comme suit :

$$p\epsilon(y) = \eta_1(y)y_1 + .. + \eta_n(y)y_n$$

.Il est clair que $p_\epsilon : Y \to T_\epsilon$, et d'après (3.4) on a $\eta_i(y) = 0$ sauf si $j(y_i - y) < \epsilon$. Donc $p\epsilon(y)$ est une combinaison convexe pour les points $y_i$ qui vérifié $j(y_i - y) < \epsilon$ et d'après (j3), nous avons

$$j(p_\epsilon(y) - y)) = j\left(\sum_{i=1}^{n} \eta_i(y)(y_i - y)\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \eta_i(y) j(y_i - y) < \epsilon$$

Donc, nous obtenons (3.3).

Posons $f_\epsilon(x) = p_\epsilon(Ax), x \in T_\epsilon,$, il est clair que $f_\epsilon$ est j-continue dans $T_\epsilon$ qui est fini donc $f_\epsilon$ continue. Le théorème du point fixe de Brouwer garantit un point fixe $x_\epsilon$ , c'est-à-dire $f_\epsilon(x_\epsilon) = x_\epsilon$.

Maintenant, on définit $y_\epsilon = Ax_\epsilon$., laissons $\epsilon \to 0$ et on Prend une suite $\{\epsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ pour laquelle $y_n$ j-converge vers une limite $y^* \in Y$ (puisque Y est j-compact)

$$Ax_{\epsilon n} = y_{\epsilon n} \xrightarrow{j} y^*, lorsque \quad \epsilon_n \to 0. \tag{3.5}$$

Nous avons

$$x_\epsilon = f_\epsilon(x_\epsilon) = p_\epsilon(Ax_\epsilon) = p_\epsilon(y_\epsilon), x_\epsilon = y_\epsilon + [p_\epsilon(y_\epsilon) - y_\epsilon] \tag{3.6}$$

Mais nous avons

$$j(p_\epsilon(y) - y) < \epsilon \quad \texttt{pour tout} \quad y \in Y \tag{3.7}$$

donc (3.5) et (3.6) impliquent $j(x_{\epsilon n} - y^*) \to 0$, lorsque $\epsilon_n \to 0$.
En substituant (3.6) dans [3.7], nous obtenons la convergence nécessaire. Comme A est j-continue, [3.5] donne le point fixe :$Ay^* = y^*$

□

**Théorème 3.2.** ***(Théorème du point fixe de type Banach)****[3] Soit $T$ un sous-ensemble fermé et borné d'un espace $X$ j-complet. Supposons que :*

*(S1) $BT \subset T$,*

*(S2) $B$ satisfait à la condition de j-contraction sur $T$, c'est-à-dire*

$$j(Bx - By) \leq \lambda j(x - y), x, y \in T, \lambda < 1.$$

*Alors $B$ a un point fixe unique $u \in T$.*

*Démonstration.* □

Soit $x_0 \in T$ arbitraire, on définit la suite $(x_n)$ par

$$\begin{cases} x_0 \in T \\ x_{n+1} = Bx_n, n = 0, 1, 2, .... \end{cases}$$

• Étape1 : Nous prouvons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite j-Cauchy. Soient $m, n \in IN, m > n$. À partir de (S2), nous obtenons

$$\begin{aligned} j(x_n - x_m) &= j(Bx_{n-1} - Bx_{m-1}) \\ &\leq \lambda j(x_{n-1} - x_{m-1}) = \lambda j(Bx_{n-1} - Bx_{m-1}) \\ &\leq \lambda^2 j(x_{n-2} - x_{m-2}) = ... \\ &\leq \lambda^n j(x_0 - x_{m-n}). \end{aligned}$$

Donc, pour chaque $m > n$, on a

$$j(x_n - x_m) \leq \lambda^n j(x_0 - x_{m-n}), n = 1, 2, ....$$

On a T borné donc il existe $\epsilon_j > 0$ tel que $T \subset Bj(0, \epsilon_j)$.

Donc $j(x_0 - x_{m-n}) < \epsilon_j$ pour chaque $m, n \in N, m > n$. Et pour chaque $m > n$, nous obtenons

$$j(x_n - x_m) \leq \lambda^n \epsilon_j, \quad n = 1, 2, ... \tag{3.8}$$

Puisque $\lambda < 1$, nous avons

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists n_0 \in N \quad \forall n > n_0 \quad \{\epsilon_j \lambda^n < \epsilon\} \tag{3.9}$$

Soit $\epsilon > 0$ . Alors, pour chaque $m > n > n_0$, en utilisant (3.8) et (3.9), nous avons

$$j(x_n - x_m) \leq \epsilon_j \lambda^n < \epsilon \tag{3.10}$$

Donc,$\forall m > n > n_0, \quad j(x_n - x_m) < \epsilon$, ce qui implique que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite j-Cauchy.

• Étape 2 : montrons qu'il existe $u \in T$ tel que $\lim_{x\to\infty} j(x_n - u) = 0$. *La suite* $(x_n)$ *est une j-Cauchy, et* $X$ *est j-complet donc il existe* $u \in X$ *tel que* $\lim_{x\to\infty} j(x_n - u) = 0$. *On a* $T$ *fermé, alors* $u \in T$.

• *Étape 3 : montrer que le point* $u$ *est un point fixe de* $B$. *On a la suite* $(x_n)$ *j-converge, et* $B$ *j-continue,donc*

$$B(u) = B(\overset{j}{\lim_{n\to\infty}} x_n) = \overset{j}{\lim_{n\to\infty}} B(x_n) = \overset{j}{\lim_{n\to\infty}} B(x_{n+1}) = u$$

*donc* $u$ *est un point fixe de* $B$.

• *Étape 4 : Montrer l'unicité du point fixe.*

*Supposons que il existe* $v \in T$ *et* $w \in T$ *tels que* $v = Bv$ *et*$w = Bw$. *Alors, en utilisant (S2), nous avons*

$$j(v - w) = j(Bv - Bw) \leq \lambda j(v - w)$$

. *Donc,*$(1 - \lambda)j(v - w) \leq 0$ *et* $\lambda < 1$,*i.e* $j(v - w) = 0$ *donc* $v = w$.

□

*Maintenant,nous formulons et prouvons une généralisation du théorème de Krasnoselskii pour l'espace X, qui combine les deux derniers théorèmes en un seul. Dans la preuve, nous appliquerons les théorèmes de type contraction et de type Schauder pour l'espace X.*

**Théorème 3.3.** ***( Théorème du point fixe de type Krasnoselskii)****[3] soit $T$ est un sous-ensemble fermé, borné et convexe de l'espace $X$, qui est j-complet.$A$ et $B$ sont des applications telles que $A : T \to T$ et $B : T \to T$ vérifiant :*

*T1. A complètement j-continue,*

*T2. B satisfait la condition de j-contraction , c'est-à-dire*

$$j(Bx - By) \leq \lambda j(x - y), \quad \textit{pour tout} \quad x, y \in T, \lambda < 1.$$

*Alors il existe un point $u \in T$ tel que $(1-\beta)Au + \beta Bu = u$ pour chaque valeur fixée $0 \leq \beta \leq 1$.*

*Démonstration.* Soit $x \in T$ et $0 \leq \beta \leq 1$ arbitraires et fixes. Par le théorème (3.2), nous avons qu'il existe un point $w_x \in T$ tel que

$$w_x = \beta B w_x + (1-\beta)Ax \tag{3.11}$$

B application contractante donc l'application $\beta B$ est également une contraction en raison de la convexité de j. On définir une application $C : T \to T$ selon la formule suivante :$C_x = w_x$. Ainsi, à partir de (3.11),on a

$$Cx = \beta BCx + (1-\beta)Ax \tag{3.12}$$

T est convexe donc $CT \subset T$ . Par conséquent, l'hypothèse (S1) dans le théorème de Schauder est vérifiée.

Donc Nous montrons que C est complètement j-continu sur T. Prenons une suite $(x_m) \subset T$donc $(Ax_m)$ est une j-converge et j-Cauchy dans T( A est complètement j-continu,). Ensuite, à partir de (3.12), nous avons

$$\begin{aligned} Cx_m &= \beta BCx_m + (1-\beta)Ax_m \quad \textit{pour} \quad m \in \mathbb{N} \\ Cx_n &= \beta BCx_n + (1-\beta)Ax_n \quad \textit{pour} \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Alors

$$Cx_n - Cx_m = \beta BCx_n - \beta BCx_m + (1-\beta)Ax_n - (1-\beta)Ax_m \quad \textit{pourtout} \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

En appliquant la convexité de j, et(3.12), On a :

$$\begin{aligned} j(Cx_n - Cx_m) &\leq \beta j(BCx_n - BCx_m) + (1-\beta)j(Ax_n - Ax_m) \\ &\leq \beta\lambda j(Cx_n - Cx_m) + (1-\beta)j(Ax_n - Ax_m) \quad \textit{pour tout} \quad m, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Donc,

$$j(Cx_n - Cx_m) - \beta\lambda j(Cx_n - Cx_m) \leq (1-\beta) j(Ax_n - Ax_m), \quad \textit{pour tout} \quad m, n \in \mathbb{N}$$

Alors

$$j(Cx_n - Cx_m) \leq \frac{1-\beta}{1-\beta\lambda} j(Ax_n - Ax_m), \textit{pour tout} \quad m, n \in \mathbb{N}$$

. Ainsi,$(Cx_m)$ est une suite j-Cauchy donc j-converge. Donc l'image de l'application C est contenue dans un ensemble compact. Ainsi, l'hypothèse (S2) est vérifiée.En utilisant le théorème de Schauder, nous concluons l'affirmation du théorème. □

# Chapitre 4

# Application

*Dans ce chapitre on va utiliser le théorème du point fixe de type Krasnoselskii pour montrer l'existence d'une solution à l'équation de deuxième ordre de Hill.*

## 4.1 L'equation de Hill

**Définition 4.1.** *[3] L'equation de Hill est une equation différentielle linéaire d'ordre 2 qui s'ecrit sous la forme suivante*

$$x'' + a(t)x = 0 \tag{4.1}$$

*où a est une fonction périodique. Cette équation a été introduite par G. Hill en 1886.*

**Remarque 4.1.** *1. Notons que G.Hill[7] a étudie le mouvement de la lune et a obtenue l'équation suivante :*

$$x''(z) + (\theta_0 + 2\sum_{r=1}^{\infty} \theta_{2r} \cos(2rz))x(z) = 0$$

*avec les nombres réels $\theta_0; \theta_1; ...$ et la série $\sum_{r=1}^{\infty} |\theta_{2r}|$ converge et $z$ peut être complexe et pour plus de détaille voire P.J Torres en [18] a étudie l'équation de type Hill généralisée suivante*

$$x'' + a(t)x = f(t; x) + c(t)$$

*où $a \in L^1([0; T])$ et $f : [0; T] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ et $L^1$ caratheodory.*

**Définition 4.2.** *On dit que l'équation 4.1 définit sur $[0, T]$ est non-résonant si sa unique solution $T-$ périodique est la solution triviale.*

*Considèrons l'équation suivante*

$$x'' + a(t)x = f(t; x) + c(t). \tag{4.2}$$

*où $a, c \in L^1([0, T])$ et $f : [0, T] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est une fonction caratheodory et non-négative i.e*

1. *Pour tout $t \in [0, T]$ la fonction $f(., s)$ est continue.*
2. *Pour chaque $0 < r < s.$, il existe $h_{r,s} \in L^1(0, T)$ tels que $|f(t, x)| \leq h_{r,s}$ pour tout $t \in [r, s]$ et presque par tout $t \in [0, T]$.*

*On suppose l'hypothèse suivante (H1) : L'équation de Hill $x'' + a(t)x = 0$ est non résonante et la fonction de Green correspondante$G(t, s)$ est non négative pour tout $(t, s) \in [0, T] \times [0, T]$.*

**Remarque 4.2.** *La fonction de green $G(t, s)$ est continue et donc bornée sur $[0, T] \times [0, T]$ par une certaine constante $M$.*

*On commence par le résultat suivant :*

**Lemme 4.1.** *[17] Sous l'hypothèse $(H_1)$ la fonction $x(t) = \int_0^T G(t,s)c(s)ds$ est la solution T-périodique unique de l'équation linéaire $x'' + a(t)x = c(t)$.*

## 4.2 Résultats d'existence

*Sur la droite réelle, On définit une fonction convexe et finie $j$ satisfaisant (j1)-(j3). $j$ est continue et croissante sur $\mathbb{R}^+$. On considère $\mathbb{R}$ avec le module $j$. Soit $C_T$ l'ensemble des fonctions continues et périodiques de période $T$. On pose $\|q(.)\|_j = max_{t\in[0,T]} j(q(t)), q \in C_T$.*
*Considère l'équation suivante :*

$$x'' + a(t)x = f(t;x) + g(t;x). \tag{4.3}$$

*où $a \in L^1([0,T])$ et on suppose :*

$(H_2)$ *$f, g$ sont mesurables en $t$ et continues en $x$.*

$(H_3)$ *Pour chaque $0 < r < s$, il existe $h_{r,s} \in L^1(0,T) telsque j(f(t,x)) \leq h_{r,s}(t)$ pour $t \in [r,s]$ et presque partout $t \in [0,T]$.*

$(H_3)$ *Il existe $0 < k(t)T < 1$ continu tel que*

$$(\int_0^T j(2G(t,s)(g(s,x_1(s)) - g(s,x_2(s))))ds \leq k(t)\int_0^T j(x_1(s)) - x_2(s))ds$$

*pour tout $t \in [0,T]$ et $x_1, x_2 \in C_T$ et $x_1(t), x_2(t) \in R^+, t \in [0,T]$.*

**Remarque 4.3.** *Étant donné $a \in L^1(0,T)$, nous écrivons $a > 0$ si $a \geq 0$ pour presque tout $t \in [0,T]$ et qu'il est positif dans un ensemble de mesure positive.*

**Théorème 4.1.** *Supposons qu'il existe $b > 0$ qui est positif sur un ensemble de mesure positive sur [0,T] et $\lambda > 0$ tel que*

$$0 \leq j(2bf(t,x)) \leq \lambda, \text{ pour tout } x > 0, \text{ pour presque toutt.} \tag{4.4}$$

*Pour $r > 0$, On définit*

$$y_* = \inf_{x\geq r, t\in[0,T]} j\left(\int_0^T G(t,s)g(t,x)ds\right)$$

*et*

$$y^* = \sup_{x \geq r, t \in [0,T]} j \left( \int_0^T 2G(t,s)g(t,x)ds \right)$$

*Si pour certains $r > 0$, nous avons $y_* \geq r$ et $y^* < +\infty$, alors il existe une solution T-périodique positive de (4.3).*

*Démonstration.* On définit sur $C_T$ l'application $F : C_T \to C_T$ par

$$F[x](.) = (\int_0^T 2G(.,s)[f(s,x(s)) + g(s,x(s))]ds = Ax(.) + Bx(.)$$

où

$$Ax(.) = \int_0^T 2G(.,s)f(s,x(s))ds$$

et

$$Bx(.) = \int_0^T 2G(.,s)g(s,x(s))ds$$

. On a $A, B : C_T \to C_T$ . On définiti l'ensemble

$$K = \big\{x \in C_T : x \geq r^*, r^* \leq \|x\|_j \leq R\big\},$$

où $r^*$ et R seront définis ci-dessous.

1. Montrer que $K$ est un ensemble fermé, il suffit de remarquer que pour $x \in K$ on a $0 \leq j(x(t)) \leq \|x\|_j$, pour tout $t \in [0,T]$. Alors toute suites $\{x_n\} \subset K$ tendant à $x \in C_T$ au sens de $\|.\|_j$ est telle que $\{x_n - x\}$ est évidemment bornée dans $C_T$. Comme $j$ est localement Lipschitz donc $\{x_n(t) - x(t)\}$ est également uniformément bornée dans $[0,T]$ au sens habituel et équicontinu pour chaque $t \in [0,T]$. De plus, pour chaque $t \in [0,T]$, $\{x_n(t) - x(t)\}$ converge également vers 0. Ainsi, selon le théorème d'Arzelà-Ascoli, $\{x_n\}$ converge uniformément vers $x$ et donc $x \in K$.
2. On vérifie que pour tous les $x, y \in k$, $1/2Ax + 1/2By \in k$.En effet, étant donné $x, y \in K$, en utilisant le signe non négatif de $G, f$et l'augmentation de $j$ pour tout $t \in [0,T]$, On a

$$\begin{aligned} j\left(\tfrac{1}{2}Ax(t) + \tfrac{1}{2}By(t)\right) &= j(\textstyle\int_0^T G(t,s)f(s,x(s))ds + \int_0^T G(t,s)g(s,y(s))ds) \\ &\geq \gamma_* := r^*, \end{aligned}$$

   et grâce à la convexité de $j$ et (4.4) et on a

$$\begin{aligned} \max_{t\in[0,T]} j(\tfrac{1}{2}Ax(t) + \tfrac{1}{2}By(t)) &\leq \max_{t\in[0,T]} \tfrac{1}{2}j(Ax(t)) + \max_{t\in[0,T]} \tfrac{1}{2}j(By(t)) \\ &\leq \tfrac{T}{2}const + \tfrac{1}{2}\gamma^* := R. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tous les $x, y \in K, 1/2Ax + 1/2By \in K$ avec $r^+$ et R qui viennent d'être définis.

3. De même démonstration de la fermeture de $K$, on peut montrons que $A$ est $\cdot$j-complètement continu dans $K$

4. Soient $x_1, x_2 \in K$. Alors

$$\begin{aligned} \|B_{x_1} - B_{x_2}\| &= \| \int_0^T 2G(.,s)g(s,x_1(s))ds - \int_0^T 2G(.,s)g(s,x_2(s))ds\|_j \\ &= \| \int_p^T 2G(.,s)g(s,x_1(s)) - g(s,x_2(s))ds\|_j \\ &\leq \sup_{t\in[0,T]} k(t) \int_0^T j(x_1(s) - x_2(s))ds \\ &\leq \sup_{t\in[0,T]} k(t)T \max_{t\in[0,T]} j(x_1(t) - x_2(t)). \end{aligned}$$

En conséquence, B est une $\|.\|_j$ -contraction dans $C_T$.

5. Toutes les hypothèses du théorème (3.3) sont vérifiées. En utilisant ce théorème, nous obtenons que l'opérateur (1/2)F a un point fixe dans K et la preuve est terminée.

□

**Remarque 4.4.** *Remarquez que le théorème ci-dessus est correct même dans le cas où $j(\Delta) = |.|$, c'est-à-dire lorsque $j$ est la norme standard dans $\mathbb{R}$. Dans ce cas, l'ensemble $C_T$ avec le module $j$ et la norme standard sont en fait le même espace, car si $x$ est continu, alors $j(x)$ est continu, c'est-à-dire que $j$ envoie l'espace des fonctions continues périodiques sur $[0,T]$ vers lui-même. L'avantage ici d'utiliser l'espace $C_T$ est que les opérateurs $A$ et $B$ peuvent avoir des propriétés différentes liées à $j$.*

**Théorème 4.2.** *Supposons que $f$ et $g$ vérifient les conditions $H_1 - -H_4$. De plus, supposons qu'il existe $b > 0$ qui est positif sur un ensemble de mesure positive sur [0, T],$\lambda > 0$ et des constantes positives $R > r > 0$ telles que*

$$f(t,x) < 0 \quad pour\ tout \quad 0 < x < r \quad et \quad t \in [0,T]; f(t,r) = 0 uniformément\ pour \quad t \in [0,T] \quad (4.5)$$

*et*

$$0 \leq j(2Mf(t,x)) \leq const$$

*, pour tout $x > r$, pour presque tout $t \in [0,T]$. On définit*

$$\gamma_* = \inf_{x\geq r, t\in[0,T]} j(\int_0^T G(t,s)g(t,x)ds),$$

*et*

$$\gamma^* = \sup_{x \geq r, t \in [0,T]} j(\int_0^T 2G(t,s)g(t,x)ds),$$

*et*

$$\beta^* = \sup_{x \geq r, t \in [0,T]} j(\int_0^T 2G(t,s)b(t,x)ds),$$

*Et on suppose que*

$$\frac{\beta^*}{\tau^\lambda} + \gamma^* \leq R$$

*si* $\gamma_* > \tau$, *donc il existe une solution positive T-periodique de (4.3).*

# Conclusion

*Notre but principal, dans ce mémoire, était de présenter quelques résultats en théorie du point fixe en utilisant module convexe, et l'application théoréme de Krasnsolsekii pour montrer l'éxistence d'une solution au probléme périodique. .*

# Bibliographie


*[1] A.Dold, B.Ekmann Orlicz Spaces and Modular Spaces Springer-verlog* 1983.

*[2] A.Kolmogorov,S.Fomine Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle ,Moscou* 1973.

*[3] A. Nowakowski et R. Plebaniak, Fixed point theorems and periodic problems for nonlinear Hill's equation,Nonlinear Differ. Equ. Appl. (2023).*

*[4] Claud WagschalTopologie et Analyse Fonctionnelle* ,2012.

*[5] Furi-Pera, Fixed Point Theorems in Banach Algebras with Applications.*

*[6] Hemant Kumar Pathak , Introduction to Nonlinear Analysis and Fixed point Theory , Springer* 2018.

*[7] Hill, G. : On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon. Acta. Math. 8, 1-36 (1886)*

*[8] H-M. Andrei. Retraction methods in fixed point theory. Sem. Fixed Point Theory Cluj-Napoca 1 (2000), 39–53.*

*[9] H. Brezis. Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, DOI 10.1007/978-0-387-70914-7, Springer, LLC 2011.*

*[10] Mohamed A.khamsi,Wojciech M.Kozlouski Fixed Point Theory in modular space , Birkhäuser Springer 2015.*

*[11] N. El Hage Hassan. Topologie générale et espace normés, Dunod, 2011.*

*[12] P.V.Subrahmanyam ,Elementry Fixed Point Theorem,Springer* 2018.

*[13] R.A. Agarwal, M. Meehan and D. O'Regan, Fixed Point Theory and Applications, Cambridge Tracts in Mathematics, Vol.* 141, *Cambridge University Press,* 2001.

[14] *R.A. Agarwal, D. O'Regan,D.R.sahi Fixed Point Theory for Lipschitzia-type Mappings with Applications.*

[15] *S. Djebali. Le degré topologique. Théorie et application. Département de Mathématiques, E.N.S. Kouba, Alger, Algérie, 2007.*

[16] *T.A.Burton,A Fixed Point Theorem of Krasnoselskii* 1998.

[17] *Taleb, A., Hanebaly, E. : A fixed point theorem and its application to integral equations in modular function spaces. Proc. Am. Math. Soc. 128, 419-426 (1999).*

[18] *Torres, P.J. : Weak singularities may help periodic solutions to exist. J. Differ. Equ. 232, 277-284 (2007)*

[19] *Vincent Guedj ,Analyse fonctionnelle.*