RÉPUBLIQUE ALGERIÉNNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÉRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DE BOUIRA
FACULTÉ DES SCIENCES ET DES SCIENCES APPLIQUÉES
LABORATOIRE DE RECHERCHE LIMPAF DE BOUIRA
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
MÉMOIRE POUR L'OBTENTION DU DIPÔME DE MASTER MATHÉMATIQUES
Option: Analyse Mathémathique

THÈME

THÉORÈME DU POINT FIXE SOUS LA MESURE DE NON-COMPACITÉ ABSTRAITE

Présenté par: MALKI Loubna

Sotiendra le: Devant le jury:

Mme. RAFAA Souad	MAA	U. BOUIRA	Présidente
M. BANOUH Hicham	MCB	U. BOUIRA	Examinateur
Mme. OUIDJA Daya	MAA	U. BOUIRA	Examinatrice
Mme MELOUANE Nassima	MAA	U. BOUIRA	Prometrice

Année universitaire:2022/2023

Remerciements

En premier lieu, Je remercie l'encadreur de ce mémoire madame Mallouane Nassima pour son aide continue, ses précieux conseils et sa patiente.

Je remercie les membre de jury pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de siéger à la soutenance.

Je remercie mes parents plus spécialement ma mère, pour ses efforts et ses encouragement à atteindre plus hauts rangs, et je remercie mon mari pour son soutien continu.

Enfin, je remercie tout ceux qui m'ont aidé et remercie mes amis Rima, Zahra et Sabrina.

Merci

Résumé

Plusieurs problème en physique, chimie, biologie, ..., sont modélisés par des modèle mathématiques non-linéaires, lesquelles peuvent s'écrire sous forme d'équation $T(x) = x$ où $T : X \longrightarrow X$ est un opérateur et pour trouver les solutions de cette équation, on utilise la théories du point fixe.

Dans ce travail, nous allons présenter des résultats du point fixe pour des classe d'applications non-linéaire continues par l'utilisation d'une mesure de non-compacité abstraite. En effet nous allons présenter les théorèmes connus (Darbo et Sadowskii) du point fixe connue qui sont énoncé avec la mesure de non-compacité de Kuratowskii ou Hausdorff, puis nous allons donner des généralisations.

Ce mémoire de compose de quatre chapitres; dans le premier chapitre, on rappelle les outils mathématiques importants utilisés dans ce travail. Dans la deuxième chapitre, on définie la mesure de non-compacité et quelques propositions.et on donne quelques théorèmes du point fixe(Darbo et Sadowskii et généralisations) dans le troisième chapitre. On termine par appliquer le théorème Darbo pour montrer l'existence d'une solution pour une équation intégrale.

Abstract

any problems in physic, chimsty, biology,...., are modeled by non-linear mathematical models, which can be written in the form of equations $T(x) = x$ where $T : X \longrightarrow X$ is an operator, to find the solutions of this equation, we use the fixed point theoties

In this work, we will presente some fixed point theorems like Darbo and Sadowskii, using an abstract non-compacteness measure.

This disseration consists of four chapters: In the first chapter, we recall the useful important mathematical tools used in the folowing. In the second chapter, we define the measure of non-compacteness and some propositions. In the third chapter, we give some theorems of the fixid point (Darbo and Sadowskii and ther generalizations). In the fourth chapter, we apply the Darbo theorem to show the existence of a solution for a integral equation.

Contents

Introduction générale

Pour une application $T : E \to E$, la solution de l'équation

$$Tx = x, \qquad x \in C \tag{0.0.1}$$

est appelé un point fixe. La théorie du point fixe concerne l'existence d'un point fixe pour l'application T dans l'espace E.

Il est important de noter que l'approche du point fixe, devient l'un des instruments les plus utiles pour traiter de nombreux problème en analyse non-linéaire.

Dans plusieurs problèmes de science (physique, chimie, biologie,...), trouver une solution à un problème théorique ou réel se traduit généralement par la recherche d'un point fixe pour une application T dans un espace de Banach $\mathbb{B}$. En effet, la théorie du point fixe elle-même est un mélange d'analyse, de topologique, de géométrie. Il y a de nombreux scientifiques qui s'y sont intéressés et ainsi de nombreux travaux sur l'existence de point fixe sous déférentes conditions (Sur la structure de l'espace $\mathbb{E}$, ou sur la nature de l'application T).

En 1912, le mathématicien Brouwer [8] est arrivé à l'un des résultats les plus importants qui dit que tout application continue d'un sous-ensemble convexe compacte de $\mathbb{R}^n$ admet au moins un point fixe. Puis, en 1930 Schauder [8] a généralisé le théorème de Brouwer dans les espace de Banach de dimension infinie. Sans oublier le plus important résultat qui est le principe de contraction de Banach. Ce théorème énonce que dans un espace métrique complet toute application contractante admet un point fixe unique dans cet espace.

En 1930, Kuratowski [5] a introduit la définition de la mesure de non-compacité, qui est avancé grande augmentation à la théorie du point fixe. En effet Darbo [13] en 1955 a utilisé la nouveaux concept (MNC) pour définir un nouvelle classe d'application, Les applications strictes contraction ensemble. On dit que T est une k-stricte contraction d'ensemble si elle vérifie la condition suivante

$$\alpha(T(A)) \leq k\alpha(A),, \quad \text{pour tout ensembles borné, non vide de} E$$

où α est la mesure de non-ccompacité de Kuratowski [5]. Darbo a généralisé le théorème de Schauder pour ce type d'applications.

En 1967, Sadowskii à donné le concept de condensation et ainsi un résultat de point fixe plus générale de Darbo a été obtenu.

Depuis l'année ou Kuratowski à donné la définition de la mesure de non-compacité, on l'a utilisé afin d'obtenir des théorème des point fixe de type Darbo. Plusieurs définitions de Mesure de non-compacité a été introduire après Kuratowski comme La mesure de Hausdorff qui est très utilisé.

Le but de ce travail est d'appliquer la mesure de non-compacité abstraite qui est une mesure généralisé et avec une conditions minimales afin obtenir des résultats du points fixes (que ce soit pour des applications non-linéaires continues ou non continue.

Notation

Ω: ensemble non-vide.

$co(\Omega)$:L'enveloppe convexe de Ω.

$\overline{co}(\Omega)$:L'enveloppe convexe fermé de Ω.

$\overline{\Omega}$: la fermeture de Ω.

$\mathbb{R}$:L'ensemble des nombres réel.

$\mathbb{N}$:L'ensemble des nombres naturels

$\mathbb{B}$: Espace de Banach.

$C([a,b],\mathbb{R})$:L'ensemble des fonctions continues.

$\alpha(.), \chi(.)$: La mesure de non compacité de Kuratowski et de Hausdorf.

$B(x_0,r)$: La boule de ouvert centre x_0 et de rayon r.

$\overline{B(x_0,r)}$: La boule fermé de centre x_0 et de rayon r.

T: L'application définie dans un espace.

$diam(A),\ ou\ \delta(A)$: Le diamètre de A.

$|.|$: Le module.

$\|.\|$: La norme.

Q: L'ensemble des compacte.

μ: La mesure de non-compacité.

μ_d: La mesure de diamètre.

μ_s: La mesure de supreme.

X^*: Espace duale de X.

Chapter 1

Préliminaire

Dans ce chapitre nous rappellerons quelque définitions et théorèmes dont nous aurons besoin dans ce mémoire.

1.1 Espace métrique

Définition 1.1. *Soit $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une application, on dit que d est une distance sur un ensemble non vide E si elle vérifie les axiomes suivantes*

1. $\forall x, y \in E, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, *(séparation),*

2. $\forall x, y \in E, d(x, y) = d(y, x)$, *(symétrie),*

3. $\forall x, y, z \in E, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, *(inégalité triangulaire).*

Le couple (E, d) est appelé un espace métrique.

Définition 1.2. *Soit X une partie non vide et bornée de E on appelle le diamètre de X le nombre $\delta(X)$ telle que*

$$\delta(X) = sup_{(x,y) \in X^2} d(x, y)$$

.

Remarque 1.1. $\delta(\emptyset) = 0$.

Définition 1.3. ***(Suite convergente)*** *Soit $(E;d)$ un espace métrique et soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ une suite Dans E et soit $x \in E$. On dit que la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ converge vers x si et seulement si*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N} \geq M \Longrightarrow d(x_m, x) < \varepsilon$$

.

Définition 1.4. ***(Suite de Cauchy)*** *Soit $\{x_n\}_n$ une suite de E, On dit que $\{x_n\}_n$ est une suite de Cauchy*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{N}, n \geq m \leq N_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$$

.

Proposition 1.1. .

1. *Toute suite convergente est une suite de Cauchy.*
2. *Toute suite de Cauchy est une partie bornée de E.*

Définition 1.5. ***(Espace complet)*** *On dit qu'un espace métrique est complet si toute suite de Cauchy est convergente dans cet espace.*

Définition 1.6. ***(Compacité)****Soit X un espace topologique séparé. On dit que X est compact si de tout recouvrement ouvert de X, on peut extraire un sous-recouvrement fini. Autrement dit, pour toute famille d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$ de X telle que $X = \underset{i\in I}{\cup} U_i$, il existe un sous-ensemble fini J de I tel que $X = \underset{i\in J}{\cup} U_i$.*

Définition 1.7. ***(Précompacité)****[11] Un espace métrique (E, d) est dit précompact si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de X par des boules de rayon ε.*

Remarque 1.2.

1. *on dit que A est un ensemble totalement borné ou pré-compact.*
2. *A totalement borné $\Longrightarrow$ A borné, mais la réciproque est fausse;*
3. *A totalement borné $\Leftrightarrow \overline{A}$ est compact.*

Remarque 1.3. *Il est clair que tout espace métrique compact est pré-compact. En effet, soient (X,d) un espace métrique compact et $\varepsilon > 0$. Comme $(B(x,\varepsilon))_{x\in X}$ est un recouvrement ouvert de X, alors il existe $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ tels que $X = \bigcup\limits_{p=1}^{n} B(x_p, \varepsilon)$. Par conséquent, (X,d) est un espace précompact.*

La réciproque est vraie si (X,d) est complet.

Proposition 1.2. *Soit (E,d) un espace métrique. On dit que E est compact si tout suite $(x_n)_n$ de E contient une sous-suite convergente.*

1.2 Espace de Banach

Définition 1.8. ***(La norme)***

Une norme sur un K espace vectoriel ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $\|.\|$ une application :

$$\begin{aligned} \|.\| : \quad & E \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ & X \longrightarrow \|.\| \end{aligned}$$

vérifiant les conditions suivantes

1. $\forall x \in E, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

2. $\forall x \in E, \forall \lambda \in K : \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,

3. $\forall x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(Inégalité triangulaire).*

Le couple $(E, \|.\|)$ s'appelle espace vectoriel normé.

Remarque 1.4. *On dit que E est un espace de Banach si E est un espace vectoriel normé complet.*

Définition 1.9. ***(Ensemble convexe)*** *Soit E un espace vectoriel et $A \subset E$, on dit que A est convexe si : $\forall x, y \in A$ le segment $[x, y] = \{tx + (1-t)y : t \in [0.1]\}$ est contenant dans A. Autrement dit, A est convexe si*

$$\forall x, y \in A, t \in [0.1]; tx + (1-t)y \in A$$

Exemple 1.1. *1. Dans un espace vectoriel normé , toute boule (fermé ou ouverte) est convexe.*

2. Dans le plan, la droite, le cercle, le triangle et le rectangle sont des ensembles convexes.

Définition 1.10. ***(Enveloppe convexe d'un ensemble)*** *Soit E un espace vectoriel et A un sous-ensemble de E, on appelle l'enveloppe convexe de A et on le note $co(A)$ le plus petit convexe qui contient A.*

Proposition 1.3. *Soit A un espace vectoriel et $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ et $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ tel que $\Sigma_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, toute expression de la forme : $\Sigma_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ s'appelle combinaison convexe des points x_i ou barycentre,*

$$co(A) = \{\Sigma_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \quad x_i \in A, \Sigma_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\} \tag{1.2.1}$$

Définition 1.11. *(**Espace réflexif**) Soit $\mathbb{B}$ un espace de Banach et $T/C \subset \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}$ une application. Il est dit réflexif si et seulement si sa boule unité fermée est faiblement compacte.*

Nous allons considérer un opérateur T de E dans F et nous allons donner une définition concernant les propriétés de la continuité de T.

Définition 1.12. *(**Application compact**) Soit $T : C \longrightarrow \mathbb{B}$ une application, $C \subset \mathbb{B}$. On dit que T est compact si pour tout partie borné $C \subset \mathbb{B}$: $T(C)$ est relativement compact dans $\mathbb{B}$.*

Définition 1.13. *(**Application complètement continue**) Soit $T : C \longrightarrow \mathbb{B}$ une application, On dit que T est complètement continue si T continue et totalement bornée.*

1.3 La continuité

Définition 1.14. *(**Application continue**) Soit $f : E \longrightarrow F$ une application tel que (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques , on dit que f est une application continue en $a \in E$ si:*

$$\forall \varepsilon \geq 0, \exists b > 0, \forall x \in E, d_E(x, a) < b \Longrightarrow d_F(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

si E, F deux espaces vectoriel normé , $f : E \longrightarrow F$ est continue en $x_0 \in E$ si seulement si : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta >$0 telle que : $\|x - x_0\|_E < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_F < \varepsilon$

Définition 1.15. ***(Application semi-continue inférieurement)*** *Soit E un espace topologique et $f : E \to (-\infty, +\infty]$ une fonction propre (i.e. il existe $x \in E$ tel que $f(x) < +\infty$). Alors f est dite semi-continue inférieurement (s.c.i) en $x_0 \in E$ si*

$$f(x_0) \leq \liminf_{x \to x_0} f(x) = \sup_{V \in U_{x_0}} \inf_{x \in V} f(x),$$

où U_{x_0} est une base de voisinages du point $x_0 \in E$.

Définition 1.16. *L'opérateur $T : E \longrightarrow F$ est dit séquentiellement continu en $x \in E$, si pour toute suite $(x_n) \subset E$ qui converge vers x, $T(x_n)$ converge vers $T(x)$.*
T est dit séquentiellement continu sur un ensemble $A \subset E$ si T est séquentiellement continu en tout point de A

Définition 1.17. ***(Application Lipschitzienne)*** *Soient (X, d), (Y, d') deux espaces métriques et $f : E \to F$ une application. On dit que f est Lipschitzienne s'il existe une constante $k \geq 0$, appelée rapport de f, tel que pour tout $x, y \in E$, on ait $d'(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$. Si de plus $k \in [0, 1[$, on dit que f est contractante.*

Définition 1.18. ***(équicontinuté)*** *Soit (E, d_E), (F, d_F) deux espaces métriques. Soient $D \subset B_0(E, F)$ et $x_0 \in E$.*

1. *On dit que D est équicontinue en un point $x_0 \in E$ si:*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in E,\ \forall f \in D;\ d_E(x, x_0) < \delta \Longrightarrow d_F(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

2. *On dit que D est equicontinue si elle est équicontinue au point x_0.*

Définition 1.19. *Soit $T : \overline{\Omega} \to E$ une application, T est demi-compacte si pour toute suite $\{x_n\}$, si $\{x_n - Tx_n\}$ converge, alors $\{x_n\}$ admet une sous-suite convergente.*

Théorème 1.1. ***(Ascoli-Arzela)*** *[9] Soit (E, d_E) un espace métrique compact, (F, d_F) un espace métrique complet, D une partie de $C(E, F)$ est relativement compact si et seulement si*

- *D est équicontinue,*
- *D est borné,*

- $\forall x \in E$, *l'ensemble* $D(x) = \{f(x), f \in D\}$ *est relativement compact.*

Théorème 1.2. ***(Théorème de la convergence dominée de Lebesgue)*** *Soit* (X, μ) *un espace mesuré où* X *est un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et* μ *la mesure de Lebesgue définie sur la complétion de la tribu borélienne.*
Soit $(f_n)_n$ *une suite de fonctions mesurables sur* X *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *telle que*

$$f_n(x) \longrightarrow f(x), \text{ quet } n \longrightarrow +\infty, \quad \text{presque partout dans } X,$$

et telle qu'il existe une fonction g *sur* X *à valeurs dans* $\mathbb{R}_+$*, intégrable telle que l'on ait*

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad \text{presque partout dans } X.$$

Alors f *est intégrable et l'on a*

$$\int_X |f_n - f| d\mu \longrightarrow 0, \text{ tel que } n \longrightarrow +\infty.$$

En particulier

$$\int_X f_n d\mu \longrightarrow \int_X f d\mu.$$

Le théorème de la convergence dominée existe aussi en version L^p

1.4 Quelques théorèmes de point fixe

Théorème 1.3. ***(Théorème de Banach)*** *(1922) Soit* (E, d_E) *un espace métrique complet,* $T : E \longrightarrow E$ *une application contractante, Alors* T *admet un point fixe unique dans* E*. et pour* $x_0 \in E$ *la suite* $\{T^n x_0\}$ *converge vers le point fixe* p *et*

$$d(T^n, p) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, f(x)$$

.

Démonstration

1. Existence: on montre que la suite $\{T^n(x)\}$ est une suite de Cauchy.

$$\begin{aligned} d(T^n(x), T^m(x)) &\leq d(T^n(x), T^{n+1}(x)) + d(T^{n+1}(x), T^m(x)) \\ &\leq kd(x, T(x)) + k^{n+1} d(x, T(x)) + ... + k^{m-n} d(x, T(x)) \\ &= (k^n + k^{n-1} + ... + k^{m-n}) d(x, T(x)) \\ &\leq \tfrac{k^n}{1-k} d(x, T(x)). \quad \forall n, m \in \{0, 1, ...\} \end{aligned}$$

$d(T^n(x), T^m(x)) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, T(x))$ puisque $\frac{k^n}{1-k}$ est une suite géométrique et $k \leq 1$ donc $lim_{k\to\infty} \frac{k^n}{1-k} = 0$

donc $\{T^n(x)\}$ est une suite de Cauchy dans un espace métrique complet, alors elle converge vers $z_0 \in X^*$ tel que $lim_{n\to\infty} T^n(x) = lim_{n\to\infty} T^{n+1}(x) = z_0$

2. Unicité: On suppose qu'il existe $x_0, y_0 \in E$, tel que

$$T(x_0) = x_0$$
$$T(y_0) = y_0$$
$$d(T(x_0, T(y_0)) \leq kd(x_0, y_0).$$

donc

$$d(x_0, y_0) \leq kd(x_0, y_0) \;\; comme \;\; k < 1$$

On a $d(x_0, y_0 < d(x_0, y_0)$, donc $d(x_0, y_0) = 0$

alors $x_0 = y_0$

Donc on a un seul point fixe.

3. On montre que $d(T^n(x), z_0) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, T(x))$ On a

$$d(T^n(x), T^m(x)) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, T(x))$$

si $m \longrightarrow \infty$ on obtient le résultat.

Théorème 1.4. ***théorème de Brouwer*** *[8] (1912) Soit C un ensemble non vide, fermé, borné et convexe de $\mathbb{R}^n$, si $T : C \longrightarrow C$ une application continue, Alors T admet au moins un point fixe dans C.*

Théorème 1.5. ***théorème de Schauder*** *[8] (1930) Soit $\mathbb{B}$ est un espace de Banach réel, C un sous-ensemble fermé, borné et convexe de $\mathbb{B}$. $T : C \longrightarrow C$ une application compacte, alors T admet au moins un point fixe dans C.*

Démonstration 1^{ere} **étape**: On suppose $C = B(0, r)$ la boule de rayon r.

S'il existe $x_0 \in \partial C$ tel que $T(x_0) = x_0$, il n'y a rien à démontrer. Sinon, pour tout $t \in [0, 1]$, le degré $\deg(T_t, C, 0)$, où $T_t = I - tK$, est bien défini. En effet, s'il existe $x \in \partial C$, $tT(x) = x$, alors $R = \|x\| = t\|T(x)\| \leq rt$ car $T(C) \subset C$ et donc $t = 1$, ce qui conduit à une contradiction avec $\|T(x)\| = r = \|x\|$. Le degré donc est bien défini et vaut, par homotopie, $\deg(T, C, 0) = 1$, d'où le résultat.

2^{eme} **étape**: C est un convexe, fermé, borné, non vide.

On considère une rétraction continue $l : X \to C$ (définit comme dans ([1, 2, 3]) et B une boule contenant C. Soit le diagramme $B \xrightarrow{l} C \xrightarrow{T} B$. L'application $(T \circ l)$ est compacte car T est compacte et l bornée. D'après la première étape, l'application $T \circ l$ admet un point fixe $x_0 \in B$, $x_0 = (T \circ l)(x_0)$. On a $l(x_0) \in C$ et par hypothèse, $T(C) \subset C$; alors $T(l(x_0)) \in C$ et donc $x_0 \in C$.

Chapter 2

Mesure de non-compacité

2.1 Mesure de Kuratowski

Définition 2.1. *[5] La mesure de non-compacité de Kuratowski, de l'ensemble Ω, notée $\alpha(\Omega)$ est le plus petit nombre $d > 0$, tel que Ω admet un recouvrement fini par des ensembles de diamètre inférieur à d, c'est à dire,*

$$\alpha(\Omega) = inf[d > 0, \Omega = \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i \quad et \quad \delta(\Omega_i) \leq d] \tag{2.1.1}$$

La fonction $\alpha : p(X, d) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est appelé mesure de non-compacité de Kuratowski.

Proposition 2.1. *[10] soit Ω, Ω_1 et Ω_2 des sous ensemble non vide et bornés d'un ensemble espace métrique et X, Y deux espaces métriques.alors*

1. $\alpha(\Omega) = 0 \Leftrightarrow \overline{\Omega}$ *est compact , ou $\overline{\Omega}$ désigne la fermeture de Ω*
2. $\alpha(\Omega) = \alpha(\overline{\Omega})$.
3. $\Omega_1 \subset \Omega_2 \Rightarrow \alpha(\Omega_1) \leq \alpha(\Omega_2)$.
4. $\alpha(\Omega_1 \cup \Omega_2) = max[\alpha(\Omega_1), \alpha(\Omega_2)]$.
5. $\alpha(\Omega_1 \cap \Omega_2) = min[\alpha(\Omega_1), \alpha(\Omega_2)]$.

Démonstration

1. montrons $\alpha(\Omega) = 0 \Leftrightarrow \overline{\Omega}$ compact

   $\Rightarrow$)

   $\alpha(\Omega) = 0 \leq \infty \Rightarrow \Omega$ est un ensemble borné $\Longrightarrow \exists B(y, r)$ tel que $\Omega \subset B(y, r)$ comme $B(y, r)$ est un ensemble totalement borné , Alors:

   $$\forall \varepsilon > 0, \exists x_1 ... x_n \in X \text{ tel que } B(y, \varepsilon) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i(y, \varepsilon)$$

   Alors

   $$\forall \varepsilon > 0, \exists x_1 ... x_n \in X \text{ tel que } \quad \Omega \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i(y, \varepsilon)$$

   Alors Ω est un ensemble totalement borné(précompacte), et donc $\overline{\Omega}$ compact.

   $\Longleftarrow$):

   D'autre part : soit $\Omega \subset X$ un ensemble compact

   $\overline{\Omega}$ est un compact $\Leftrightarrow \Omega$ est totalement borné c'est-à-dire:

   $$\forall \varepsilon > 0, \exists x_1 ... x_n \in X \text{ tel que } \Omega \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i(y, \varepsilon)$$

   si on pose $\varepsilon = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

   $$\begin{aligned} \Omega \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i(y, \tfrac{1}{n}) \quad & \Rightarrow \alpha(\Omega) = inf\{\tfrac{2}{n}, n \in \mathbb{N}^*\} \\ & \Rightarrow \alpha(\Omega) = 0 \end{aligned}$$

   Donc $\alpha(\Omega) = 0 \Leftrightarrow \Omega$ est un compact

2. Montrons que $\alpha(\Omega) = \alpha(\overline{\Omega})$:

   On sait que $\Omega \subset \overline{\Omega}$ donc : $\alpha(\Omega) \leq \alpha(\overline{\Omega})$ (propriété de la mesure de Kuratowski)

   D'autre part :

   Soit $\varepsilon > 0$ Supposons que:

   $$\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i(y, \varepsilon)$$

   ou ,$S_i \subset X$ est un sous-ensemble borné avec :

$$\sigma(S_i) < \varepsilon, \forall i = \overline{1, n}$$

on a :

$$\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{n} S_i$$

Donc :

$$\overline{\Omega} \subset \bigcup_{i=1}^{n} S_i = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{S_i}$$

Alors :

$$\alpha(\overline{A}) \leq \alpha(\bigcup_{i=1}^{n} \overline{S_i})$$

Alors: $\alpha(\Omega) \leq max(\alpha(\overline{S})_i, ..., \alpha(\overline{S}_n))$ Donc: $\alpha(\overline{\Omega}) \leq \varepsilon \Rightarrow \alpha(\overline{\Omega}) \leq \alpha(\Omega)$

Donc $\alpha(\overline{\Omega}) = \alpha(\Omega), \forall \Omega \subset B$

3. montrons que : $\Omega_1 \subset \Omega_2 \Rightarrow \alpha(\Omega_1) \leq \alpha(\Omega_2) \quad \forall \Omega_1, \Omega_2 \in B$

   C'est une conséquence évidente de la définition.

4. Soit $\Omega_1, \Omega_2 \in B$ deux sous-ensemble borné de X; $\alpha(\Omega_1 \cup \Omega_2) = max\{\alpha(\Omega_1), \alpha(\Omega_2)\}$, on a :

$$\begin{cases} \Omega_1 \subset \Omega_1 \cup \Omega_2 \\ \Omega_2 \subset \Omega_1 \cup \Omega_2. \end{cases}$$

   Donc,

$$\begin{cases} \alpha(\Omega_1) \leq \alpha(\Omega_1 \cup \Omega_2) \\ \alpha(\Omega_2) \leq \alpha(\Omega_1 \cup \Omega_2). \end{cases}$$

   Donc $max(\alpha(\Omega_1), \alpha(\Omega_2) \leq \alpha(\Omega_1 \cup \Omega_2)$

   $\Longleftarrow$) D'autre part: soient $\varepsilon > 0$, et $S = max(\alpha(\Omega_1), \Omega_2) \leq \alpha(\Omega_1 \cup \Omega_2)$ D'après la définition de la mesure de Kuratowski on a que Ω_1 et Ω_2 admettent un recouvrement finie par des sous-ensembles de diamètre inférieur à $s+\varepsilon$ (La propriété de l'inférieure) il est claire que l'union de ces deux couvertures couver $\Omega_1 \cup \Omega_2$, Donc: $\alpha(\Omega_1 \cup \Omega_2) \leq \varepsilon + s$ on passe à la limite, $\varepsilon \to 0$, on conclue :

   $\alpha(\Omega_1 \cup \Omega_2) \leq max\{\alpha(\Omega_1), \alpha(\Omega_2)\}$

Donc $\alpha(\Omega_1 \cup \Omega_2) = max\{\alpha(\Omega_1), \alpha(\Omega_2)\} \qquad \forall \Omega_1, \Omega_2 \in B$

Proposition 2.2. *[12] Soient Ω, Ω_1 et Ω_2 des sous ensemble non vide et bornés d'un espace de Banach $(X, \|.\|)$sur $\mathbb{K}(\mathbb{K} = R$ ou $C)$. Alors:*

1. $\alpha(\Omega_1 + \Omega_2) \leq \alpha(\Omega_1) + \alpha(\Omega_2)$.

2. $\alpha(\Omega + x) = \alpha(\Omega), \forall x \in X$.

3. $\alpha(\lambda\Omega) = |\lambda|\alpha(\Omega), \forall \lambda \in F$

4.$\alpha(co\Omega) = \alpha(\Omega)$ *où $co(\Omega)$ désigne l'enveloppe convexe de l'ensemble Ω.*

2.2 Mesure de Hausdorff

Définition 2.2. *[12] Soit X un espace métrique. La mesure de Hausdorff de la non-compacité d'un sous-ensemble non vide et borné Ω de X, notée par $\chi(\Omega)$est donnée par:*

$$\chi(\Omega) = inf[r > 0, \Omega \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_r(x_i, r), x_i \in B] \tag{2.2.1}$$

Exemple 2.1. *[12] Soit B la boule d'unité dans un espace de Banach de dimension finie alors, $\chi(B) = 0$. En effet, il est claire que on peut écrire*

$$B \subset \bigcup_{i=0}^{n} B_i(0, r)$$

avec $r \leq 1$ donc $\chi(B) \leq 1$. on suppose que :

1. $\chi(B) = q < 1$
2. $\varepsilon > 0$, *tel que* $q + \varepsilon < 1$
3. $\{x_1....x_n\} \subset X$ *une suit vérifient* $B \subset \bigcup\limits_{k=0}^{n} [x_k + (q + \varepsilon)B]$
   D'après les propriétés de la mesure de non compacité de Hausdorff , on a $q = \chi(B) \leq (q + \varepsilon)\chi(B) = (q + \varepsilon)q$. *on remarque que l'inégalité* $q \leq (q + \varepsilon)q$ *est possible seulement pour* $q = 0$ $[car\ \ \varepsilon + q < 1 \Rightarrow \chi(B) = 0]$.

Théorème 2.1. *[9] soit α et χ les mesures de non-compacité de Kuratowski et de Hausdorff et Ω un sous ensemble d'un espace de Banach $\mathbb{B}$. Alors:*

$$\chi(\Omega) \leq \alpha(\Omega) \leq 2\chi(\Omega)$$

.

La mesure de non compacité de Kuratowski ou de Hausdorff soient invariantes par le passage à la fermeture et l'enveloppe convexe , ce qu'affirme le théorème suivant

Théorème 2.2. *Soient ν une mesure de non compacité (Kuratowski ou de Hausdorff) et Ω un sous ensemble d'un espace de Banach E. Alors*

$$\nu(\Omega) = \nu(\overline{\Omega}) = \nu(co\Omega)$$

.

2.3 La mesure de non-compacité abstraite

Définition 2.3. *[3, 4] Soit $\mathbb{B}$ un espace de Banach, on dit qu'une application $\mu : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une mesure de non-compacité dans $\mathbb{B}$ si elle aux conditions suivantes*

(P_1) . *La famille $ker(\mu) = \{X \in B : \mu(X) = 0\}$ est non vide et $ker(\mu) \subseteq Q$ ou Q l'ensemble des compact*

(P_2) *Monotone :si $Y \subseteq X$ alors $\mu(X) \leq \mu(Y)$*

(P_3) *Invariant sous l'enveloppe convexe fermé : $\mu(\overline{co}(X)) = \mu(X)$*
par fois , il est nécessaire de supposer qu'une mesure de non-compacité μ satisfait certaines propriétés supplémentaires

(P_4) *(Intersection de Cantor généralisée) Si $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(X_n) = 0$ est une suite d'ensembles fermés de B tell que $X_{n+1} \subset X_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et alors l'ensemble*

$$X_\infty = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n \text{est non vide et compact.} \tag{2.3.1}$$

(P_5) *La propriété du maximale : pour tout $x \in B$ et $X \in B$,$\mu(X \cup (x)) = \mu(X)$.*

(P_6) *Convexité algebrique*

$$\mu(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\mu(X) + (1-\lambda)\mu(Y) \tag{2.3.2}$$

pour tout $X, Y \in \mathbb{B}$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$

La famille $ker(\mu)$ est appelée le noyau de la mesure de non-compacité μ.

En remarque que l'ensemble d'intersection $X_\infty \subset ker(\mu)$

En effet , puisque, $\mu(X_\infty) \leq \mu(X_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.Alors $\mu(X_\infty) = 0$ cela donne $X_\infty \subset ker(\mu)$.

Remarque 2.1. *Si la mesurer μ satisfait les conditions $(P_1, ..., P_6)$, on dit qu'elle μ est régulière. De plus si on a*

$$\mu(A) = 0 \Leftrightarrow (A \quad relativement\ compact)$$

μ est dite complète.

Exemple 2.2. *Il y a d'autre mesure de non-compacité*

1. *La mesure de diamètre de la non-compacité: $\mu_d = diam(A)$.*

2. *La mesure supreme de non-compacité: $\mu_s = sup\{\|x\| : x \in A\}$.*

3. *Soit $(\mathbb{B}, \|.\|)$ est un espace de Banach, on définie $\mu_{s_i} : \mathbf{B}(\mathbb{B}) \longrightarrow \mathbb{R}$. tel que*

$$\mu_{s_i} = sup\{\|x\| x \in A\} - inf\{\|y\| : y \in \overline{co}(A)\}.$$

Définition 2.4. *(**Espace strictement convexe**) Soit $\mathbb{B}$ un espace de Banach, on dit que $\mathbb{B}$ est strictement convexe si*

$$x, y \in S_{\mathbb{B}},\ tel\ que x \neq y \Longrightarrow \|(1-\lambda)x + \lambda y\| < 1 \quad \forall \lambda \in (0,1).$$

Définition 2.5. *(**Propriété de Kadac-Klee**) On dit que $\mathbb{B}$ un espace de Banach vérifie la propriété de Kadac-Klee, Si pour tout suit $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathbb{B}$ converge faiblement ver x ($x_n \rightharpoonup x$), et $\|x_n\| \longrightarrow \|x\|$, Alors $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$.*

Proposition 2.3. *Si $(\mathbb{B}, \|.\|)$ est strictement convexe, alors μ_{s_i} est une mesure de non-compacité.*

Exemple 2.3. *[15] Soit $B = (C[0,1], \mathbb{R})$ l'espace de tout les fonctions continue de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$ muni de la norme*

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f\|_2 = max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \mid f(t) \mid + (\int_0^1 f^2(t)dt)^{\frac{1}{2}}$$

$(B, \|.\|)$ est un espace de Banach strictement convexe non réflexif. Dans ce cas, Nous voyons que μ_{si} ne vérifie pas la condition P_4, Pour montrer ce là il suffira de considérer la suite décroissante $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ des ensembles convexes, fermés et bornés définie par

$$C_n = \{f \in C([0,1],\mathbb{R}) : \|f\|_\infty \leq 1, f(0) = 0, f(t) = 1 \ si \ \frac{1}{n} \leq t \leq 1\}$$

d'où, $\mu_{si}(C_n) \longrightarrow 0$ comme $n \longrightarrow \infty$, car pour tout $f \in C_n$

$$\|f\| \leq 1 + (\int_0^{\frac{1}{n}} f^2(t)dt)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}$$

puisque $0 \leq f^2(t) \leq 1$ pour tout $t \in [0, \frac{1}{n}]$, On déduit que :

$$1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \leq \|f\| \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}$$

Ainsi, $0 \leq \mu_{si}(C_n) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc $\mu_{si}(C_n) \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow \infty$ par contre s'il existe $\{f\} = \bigcap\limits_{n\in N} C_n$, Alors $f(t) = 1$ si $\frac{1}{n} \leq t \leq 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Soit $n \longrightarrow \infty$, on a $f(t) = 1$ si $t \in [0,1]$, mais $f(0) = 0$ alors $f \in\!| \ C([0,1],\mathbb{R})$ qui est une conséquent $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} C_n = \emptyset$

Proposition 2.4. *[?] Soit $\mathbb{B}, \|.\|)$ est un espace de Banach réflexif strictement convexe avec les propriété de Kadec-Klee, Alors il ne satisfait pas la condition P_4 .*

2.4 k-contraction d'ensemble

Dans cette section $\mathbb{B}$ désigne un espace de Banach, $B(\mathbb{B})$ l'ensemble de sous-ensembles borné de $\mathbb{B}$

Définition 2.6. *Soit $g : B(\mathbb{B}) \longrightarrow \mathbb{B}$ une application continue et bornée,*

- *On dit que g est une k-contraction d'ensembles s'il existe $k \geq 0$; tel que*

$$\mu(g(\Omega)) < k\mu(\Omega), \forall \Omega \in \mathbf{B}(\mathbb{B})$$

- *g est k-stricte contraction d'ensembles si : $0 \leq k < 1$.*

- *g est dite condensante si : $\mu(g(\Omega)) < \mu(\Omega)$, avec $(\mu(\Omega) > 0)$.*

où μ est une mesure de non-compacité abstraite.

Proposition 2.5. *a. Soit $\mathbb{B}$ un espace de Banach réel, Supposons que $f : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}$est une K_1-contraction d'ensemble et $g : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}$ est une K_2-set-contraction, Alors gf est une K_1K_2-contraction d'ensemble tel que $(gf = g(f))$*

b. $g + f$ est une $(K_1 + K_2)$-contraction.

Démonstration α la mesure de non-compacité de Kuratowski

(a) soit A un ensemble borné dans $\mathbb{B}$, Alors f(A) est un ensemble borné dans $\mathbb{B}$ et $\alpha_2(f(A)) \leq K_1\alpha_1(A)$
puisque g est une $\mathbb{B}$-contraction d'ensemble,

$$\alpha_3(g(f(A))) \leq K_2\alpha_2(f(g(A))) \leq K_1K_2\alpha_1(A)$$

c'est-à-dire gf est une K_1K_2-contraction d'ensemble

(b) . Soit A un ensemble borné dans X,Alors $(f + g)(A) \subset f(A) + f(A)$, donc $\alpha((f + g)(A)) \leq \alpha(f(A) + g(A)) \leq \alpha(f(A)) + \alpha(g(A)) \leq K_1\alpha(A) + K_2\alpha(A) = (K_1 + K_2)\alpha(A)$ donc $f + g$ est une$(K_1 + K_2)$-contraction d'ensemble

Proposition 2.6. *soit (X_1, d_1) et (X_2, d_1) deux espaces métrique et $f : X_1 \longrightarrow X_2$ une application continue.*

(a) si f est une K-contraction, Alors f est une K-contraction d'ensemble.

(b) si f est compacte sur les ensembles bornés, Alors f est une 0-contraction d'ensemble. Inversement: si X_2 est complet et f est une 0-strict-contraction d'ensemble, Alors f est compact sur les ensembles bornés.

Démonstration

(a) soit A un ensemble borné dans X_1, et supposons que $\alpha_1(A) = d$ alors étant donné ε, On peut écrire $A = \bigcup\limits_{j=1}^{n} S_j, \delta(S_j) \leqslant d + \varepsilon$ donc $f(A) = \bigcup\limits_{j=1}^{n} f(s_i)$, et puisque f est une k-contraction, $\delta(f(S_j) \leqslant K(d + \varepsilon)$ puisque est arbitraire $\alpha_2(A) = Kd$ et f est une k-contraction d'ensemble.

(b) soit A un ensemble borné dans X_1, puisque nous supposons que f est compact sur les ensembles bornés , $co(f(A))$ est compact et donc totalement borné .

Ainsi $\alpha_2(cof(A)) = \alpha_2(f(A)) = 0$ donc f est une 0-contraction d'ensemble.

Inversement: si X_2 est complet et f est une 0-contraction d'ensemble, alors pour tout A , $\alpha_2(cof(A)) = \alpha_2(f(A)) = 0$ cet signifie que $cof(A)$ est totalement borné et puisque X_2 est compact sur les ensembles bornés

Exemple 2.4. *Soit G un sous-ensemble d'un espace de Banach $\mathbb{B}$, $U : G \longrightarrow \mathbb{B}$ est une K-contraction et $C : G \longrightarrow \mathbb{B}$ est compact sur les ensembles bornés , Alors $U + C$ est une K-contraction d'ensemble.*

Chapter 3

Théorèmes de points fixe

Dans ce chapitre on va présenter des résultats d'existence du point fixe pour des opérateurs continue via l'utilisation d'une mesure de non-compacité abstraite. Dans la suite, soit B un espace de Banach, α dénote la mesure de non-compacité Hausdorff ou Kuratowski, μ est la mesure de non-compacité abstraite.

On commence par l'essentiel résultat suivant qui a été explicitement prouvé par Nussbaum en moins de généralité pour la mesure de Kuratowski.

Proposition 3.1. *[1] Soit C un ensemble fermé, borné et convexe dans un espace de Banach $\mathbb{B}$. Soit $T : C \to C$ une application continue. On définit la suite d'ensembles suivante*

$$M_1 = \overline{co}(T(C)), \quad M_{n+1} = \overline{co}(T(M_{n-1}))\textit{pour } n > 1$$

On suppose que $\alpha(M_n) \to 0$ si $n \to \infty$. Alors T admet un point fixe.

Remarque 3.1. *Le précédent résultat reste correcte si on utilise une mesure abstraite satisfaite la condition (P_4).*

Proposition 3.2. *Soit C un ensemble fermé , borné et convexe dans un espace de Banach $\mathbb{B}$, Soit*

$$M_1 = \overline{co}(T(C)), \quad M_{n+1} = \overline{co}(T(M_{n-1}))\textit{pour } n > 1$$

une suite de sous-ensembles, convexes, fermé et T-invariant de C telle que $\mu(M_n) \to 0$ lorsque $n \to \infty$ où μ une mesure de non-compacité abstraite définit sur $\mathbb{B}$ vérifiant (P_4). Alors T a au moins un point fixe en C.

Démonstration D'après la propriété (P_4) de μ, l'ensemble $M_\infty = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} M_n$ est non-vide. De plus on a en utilisant la propriété (P_2) de μ

$$\mu(M_\infty) = \mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} M_n) \leq \mu(M_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Par le passage à la limite $n \to \infty$, on obtient

$$\mu(M_\infty) = 0.$$

D'où $M_\infty \in Ker\ (\mu)$ ce qui implique que M_∞ est un ensemble relativement compact. De plus M_∞ est convexe et T-invariant car pour chaque $n \in \mathbb{N}$ l' ensemble M_n est convexe et T-invariant. On conclut que l'application $T : M_\infty \to M_\infty$ satisfait toutes les hypothèse du théorème de Schauder ce qui implique que T a au moins un point fixe. dans $M_\infty \subseteq C$.

Exemple 3.1. *Considérons la mesure de non-compacité μ_s définit dans l'exemple 2.2, soit $T : [1,2] \to [1,2]$ l'application identité. Il est claire que l'ensemble des points fixes de T est $[1,2]$, mais pour toute suite décroissant $\{M_n\}$ de sous-ensemble convexe, fermé et T-invariant de $[1,2]$, on a $\mu_s(M_n) \nrightarrow 0$ quand $n \to \infty$ (car $\mu_s(X) \geq 1$) pour tout sous-ensemble X de $[1,2]$.*

Théorème 3.1. *Soit C un ensemble fermé, borné et convexe dans un espace de Banach $\mathbb{B}$ et μ une mesure de non-compacité sur $\mathbb{B}$. On suppose que μ satisfait la propriété (P_4) et aussi touts les sous-ensemble singleton de C appartenant dans $ker(\mu)$. Si $T : C \to C$ une application continue, alors les assertions suivants sont équivalant:*

1. *Il existe une suite décroissante $\{M_n\}_{n\in N}$ de sous-ensemble convexe, fermé et T-invariant de C telle que $\mu(M_n) \to 0$ quand $n \to \infty$.*

2. *T a au moins un point fixe dans C.*

Démonstration

$1 \Rightarrow 2$ Vient de la proposition 3.2.

$2 \Rightarrow 1$ Soit x_0 un point fixe de l'application T, on définit la suite des sous-ensembles $\{M_n\}_n$ par

$$M_n = \{x_0\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Il est clair que M_n est convexe fermé et T-invariant pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus comme les singletons sont des éléments de $Keru$ alors $\mu(M_n) = 0$, ce qui termine la preuve.

3.1 Théorème de Darbo

On 1955, Darbo a utilisé la définition de la mesure de non-compacité de Kuratowski pour généraliser le théorème de Shauder pour la classe d'applications connus par k-contraction d'ensemble (Voir la définition). En fait ce théorème est généralisé pour une mesure de non-compacité abstraite réguliere et complet.

Théorème 3.2. *Soit B un espace de Banach $C \in B$ un sous-ensemble non-vide, fermé, borné et convexe et Soit $T : C \to C$ une application continue et strictement k-contraction d'ensemble i.e elle vérifie la condition suivante*

$$\mu(T(A)) \leq k\mu(A), \quad \textit{pour tout ensemble borné } A \quad \textit{et } k \in]0, 1[,$$

où μ est une mesure de non-compacité régulière et complet. Alors T admet un point fixe dans C .

Démonstration On définit la suite $\{M_n\}_{n \in N}$ comme suit:

$$M_1 = \overline{co}(T(C)), \quad M_{n+1} = \overline{co}(T(M_{n-1})) \ \text{ pour } n > 1$$

La suite $\{M_n\}n \in \mathbb{N}$ est décroissante. De plus, la suite $\{\mu(M_n)\}$ est décroissante, en effet par l'utilisation de la propriété (P_2) on a

$$M_{n+1} \subset M_n \Rightarrow \mu(M_{n+1}) \leq \mu(M_n) \ \text{ pour chaque } \ n \in \mathbb{N}.$$

La suite $\mu(M_n)$ décroissante et bornée inférieurement par 0, donc il existe $l < \infty$ tel que $\lim\limits_{n \to \infty} = l \geq 0$. Par l'absurde, on suppose que $l > 0$. On a

$$\mu(M_{n+1}) = \mu(\overline{con(T(M_n))}) = \mu(con(T(M_n))) = \mu(T(M_n)) \tag{3.1.1}$$

Comme T est strictement $k-$ contraction d'ensemble on obtient

$$\mu(T(M_n)) \leq k\mu(M_n) \tag{3.1.2}$$

Par réccurence on trouve

$$\mu(M_{n+1}) = \mu(T(M_n)) \leq k\mu(M_n) = k\mu(T(M_{n-1})) \leq k^2\mu(M_{n+1}) \leq ... \leq k^n\mu(M_1)$$

Par le passage à la limite et puisque $k \in]0,1[$ on trouve que

$$\lim_{n\to\infty} \mu(M_n) = 0.$$

Donc, les conditions de la proposition 3.2 sont vérifiés d'où T admet un point fixe.

3.2 Généralisation de théorème de Darbo

Dans cette section on va présenter deux généralisation de théorème de Darbo qui peuvent être obtenues en appliquant la proposition 3.2. On définit d'abord les ensembles suivants (voir Grarcia)

$$G = \left\{ \begin{array}{c} \text{les fontions } g : [0,+\infty[\longrightarrow [0,1[, \quad \text{tel que} \\ \text{si } \ \{t_n\}_n \text{ une suite décroissante avec } \ \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} g(t_n) = 1 \\ \text{alors, } \ \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} t_n = 0. \end{array} \right\}$$

Notons que cette classe des fonctions à été introduite par Geraghty[14], qui n'a fait aucune hypothèse de continuité sur g afin d'obtenir une extension du principe de contraction de Banach.

$$F = \left\{ \begin{array}{c} \text{les fontions } \ f : [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[, \quad \text{tel que} \\ f(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ et ou bien } f \text{est continue ou bien} \\ f(t) \geq t, \quad \text{pour tout } t \geq 0 \end{array} \right\}$$

Théorème 3.3. *[1] Soient C un sous-ensemble non vide, fermé, borné et convexe d'un espace de Banach B et $T : C \to C$ une application continue. On suppose qu'il existe deux fonctions $g \in G$ et $f \in F$ telles que pour tout sous-ensemble T-invariant X de C*

$$f(\mu(T(X))) \leq g(\mu(X))f(\mu(X)). \tag{3.2.1}$$

Où μ une mesure de non-compacité abstraite vérifiant P_4. Alors T a au moins un point fixe dans C.

Démonstration D'après la proposition 3.2, il suffit de trouver une suite décroissante $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles convexes, fermés et T-invariant de C telle que $\mu(M_n) \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

On définit la suite $\{C_n\}$ par

$$C_1 = C, \quad C_{n+1} = \overline{co}(T(C_n))\text{pour } n > 1$$

D'abord on note que

$$T(C_1) = T(C) \subseteq C = C_1$$

et

$$C_2 = \overline{co}(T(C_1)) \subset C = C_1.$$

Par récurrence si

$$C_n \subset C_{n-1}$$

alors,

$$C_{n+1} = \overline{co}(T(C_n)) \subset \overline{co}(T(C_{n-1})) = C_n.$$

D'où la suite $\{C_n\}_n$ est décroissante. De plus pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on a

$$T(C_n) \subset \overline{co}(T(C_n)) = C_{n+1} \subset C_n,$$

ce qui signifie que la suite $\{C_n\}$ est T-invariante. Il reste à montrer que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \mu(C_n) = 0$ et pour ce la, s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $f(\mu(C_{n_0)}) = 0$ et comme $f \in F$ on trouve que $\mu(C_{n_0}) = 0$. De plus d'après la monotonie de la suite (C_n) on obtient que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow C_n \subset C_{n_0}$$

On utilise la propriété (P_3) de la mesure μ on trouve que

$$0 \leq \mu(C_n) \leq \mu(C_{n_0}) = 0, \quad \text{pour tout } n \geq n_0$$

D'où $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(C_n) = 0$.

Sinon, on suppose que $f(\mu(C_n)) > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a d'après (3.2.1) et les propriétés de la mesure μ

$$\begin{aligned} f(\mu(C_{n+1})) &= f(\mu\overline{co}(T(C_n)) \\ &= f(\mu(T(C_n)) \\ &\leq g(\mu(C_n))f(\mu(C_n)) \\ &\leq f(\mu(C_n)) \end{aligned}$$

pour chaque $n \in \mathbb{N}$. Ceci implique la suite $\{f(\mu(C_n))\}_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et décroissante, ainsi il existe $l \geq 0$ tel que

$$lim_{n\to\infty} f(\mu(C_n)) = l$$

On distingue maintenant deux cas:

1. On suppose que $l > 0$, puisque $\frac{f(\mu(C_{n+1}))}{f(\mu(C_n))} \leq g(\mu(C_n)) < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par le théorème de compression $g(\mu(C_n)) \to 1$ Lorsque $n \to \infty$ et comme $g \in G$. On déduit que $lim_{n\to\infty}\mu(C_n) = 0$

2. On suppose que $l = 0$, d'une part si f est continue alors $\mu(C_n) \to 0$ lorsque $n \to \infty$, car $f(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$. Si non si f satisfait la condition , alors $f(\mu(C_n)) \geq \mu(D_n) \geq 0$ pour tout $n \in N$, Ainsi $lim_{n\to\infty}\mu(C_n) = 0$.

Remarque 3.2. *Si on prend $g(t) = k$ avec $k \in]0, 1[$ dans le théorème précédent on trouve le théorème de Darbo.*

Définition 3.1. *[1] Soit $\psi : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$, on dit que ψ est une fonction de comparaison si*

1. ψ est croissante,

2. $\psi^n(t) \to 0$ lorsque $n \to 0$ pour tout $t \geq 0$.

On dénote par Ψ l'ensemble des fonctions de comparaison.

Théorème 3.4. *Soient C un sous-ensemble non vide, fermé et convexe d'un espace de Banach $\mathbb{B}$ et $T : C \to C$ une application. On suppose qu'il existe deux fonctions $\psi \in \Psi$ et $f \in F$ telle que pour tout sous-ensemble T-invariant X de C*

$$f(\mu(T(X))) \leq \psi(f(\mu(X))), \tag{3.2.2}$$

où μ une mesure de non-compacité satisfait (P_4). Alors T a au moins un point fixe dans C.

Démonstration On définie la suite $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, où

$$D_1 = D \text{ et } D_{n+1} = \overline{co}(T(D_n)), \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

avec $\mu(D_n) > 0, \forall n \in \mathbb{N}$. De (3.2.2), $\forall n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned} f(\mu(D_{n+1}) &= f(\overline{co}(\mu(D_n)) = f(\mu(T(D_n)) \\ &\leq \psi(f(\mu(D_n))) \\ &\leq \psi^2(f(\mu(D_{n-1}))) \\ &\leq \\ &. \\ &. \\ &. \\ &\leq \psi^n(f(\mu(D_1))). \end{aligned}$$

On passe à la limite $n \to \infty$ dans l'inégalité ci dessus et puisque $\psi \in \Psi$ on obtient

$$lim_{n\to\infty} f(\mu(D_n)) = 0$$

si f est continue, on obtient $\mu(D_n)) \to 0$ quand $n \to \infty$, puisque $f(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$, par contre si $f(t) \geq t, \forall t \in \mathbb{R}_+$, il est claire que $\mu(D_n) \to 0$, quand $n \to \infty$

3.3 Théorème de Sadowskii

En 1967, Sadowskii a généralisé le théorème de Darbo pour les applications condensonte en utilisant la mesure de non-compacité de Kuratowski. On rappel que une application $T : C \to C$ est dite condensante si

$$\mu(T(A)) < \mu(A) \text{ pour A un ensemble borné de } C. \tag{3.3.1}$$

Théorème 3.5. *Soit B un espace de Banach et $C \subset B$ un sous-ensemble non-vide, fermé, borné et convexe, Soit $T : C \to C$ une application μ-condensent, où μ est une mesure de non-compacité régulière. Alors T admet un point fixe dans C.*

Démonstration On prend $x \in C$ quelconque et on définie l'ensemble Σ comme suit

$$\Sigma = \{K \subset C \text{ un sous-ensemble fermé et convexe tel que } \; x \in K \; \text{ et } \; T(K) \subseteq K\}$$

Soit

$$B = \bigcap_{k \in \Sigma} K \quad \text{et} M = co(T(B) \cup \{x\}).$$

1. $\Sigma \neq \emptyset$, en effet $k = \{x\}$ est un ensemble fermé convexe et $k \in \sigma$. De plus$\{x\} \in B$ d'où $B \neq \emptyset$.

2. $B = M$, en effet d'une part: $x \in B$ et

$$T(B) \subseteq B \Longrightarrow (T(B) \cup \{x\}) \subseteq \overline{co}(B) = B \Longrightarrow M \subseteq B$$

(car B convexe et fermé). D'autre part: $M \subset C$ un sous-ensemble fermé et convexe et $M \in \Sigma$ et

$$T(M) \subseteq M car (M \subseteq B \Longrightarrow T(M) \subseteq T(B) \subseteq M.$$

Alors $M \in \Sigma$ donc $B \in M$ (définition de B), On concluons que $M = B$.

3. B est un ensemble compact, en effet:

$$\mu(B) = \mu(\overline{co}(T(B) \cup \{x\}) = \mu(T(B) \cup \{x\}) = max\{\mu(T(B)), \alpha(\{x\}\} = \mu(T(B))$$

car $\mu(\{x\}) = 0$). T est μ-condensent donc on obtient,

$$\mu(B) < \mu(T(B)) \leq \mu(B)$$

d'où, $\mu(B) = 0$ et comme μ régulière et complète, alors B est compact ($B = \overline{B}$). On conclut finalement que T est une application continue sur B ($B \subset C$), avec B est non-vide, compact et convexe. D'après le théorème de Schauder l'application $T : B \Longrightarrow B$ admet un point fixe $x \in B$, ce qui termine la démonstration.

3.4 Généralisation de théorème de Sadowskii

Définition 3.2. *Soit μ une mesure de non-compacité sur un espace de Banach $\mathbb{B}$ et C un sous-ensemble borné non-vide de B, $T : C \longrightarrow C$ une application . On dit que T est μ-quasi-condensent si pour tout sous-ensemble T-invariant, fermé et convexe X de C avec $\mu(X) > 0$*

on a

$$\mu(T(X)) < \mu(X) \tag{3.4.1}$$

Théorème 3.6. *[1] Soit μ une mesure de non-compacité satisfaisant (P_5). Soit C un sous-ensemble non-vide, fermé, borné et convexe d'un espace de Banach B et $T : C \longrightarrow C$ une application continue. On suppose que il existe une fonction $h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que pour tout sous-ensemble T-invariant X de C fermé, convexe avec $\mu(X) > 0$ on a*

$$h(\mu(TX)) \neq h(\mu(X)). \tag{3.4.2}$$

Alors T admet au moins un point fixe dans C.

Démonstration Comme la démonstration de théorème 3.5, on prend $x \in C$ quelconque et on définie l'ensemble Σ comme suit

$$\Sigma = \{K \subset C \text{ un sous-ensemble fermé et convexe tel que } \; x \in K \; \text{ et } \; T(K) \subseteq K\}$$

Soit

$$B = \bigcap_{k \in \Sigma} M_k \;\text{ et }\; M = co(T(B) \cup \{x\}).$$

Donc $B = \overline{co}(T(B) \cup \{x\})$ est fermé et convexe. Alors, en utilisant les propriétés $(P_2), (P_3)$ et (P_5) de la mesure de non-compacité μ,on obtient que

$$\mu(B) = \mu(T(B))$$

car

$$\begin{aligned} \mu(B) \quad &= \mu(\overline{co}(T(B) \cup \{x\{) \\ &= \mu(co(T(B) \cup \{x\}) \\ &= \mu(T(B \cup \{x\}) \\ &= \mu(T(B)) \end{aligned}$$

On utilise (3.4.2), on obtient que

$$\mu(B) = \mu(T(B)) \neq h(\mu(B)).$$

Comme $\mu(B) > 0$, alors $h(\mu(B)) = h(\mu(T(B)))$, ce qui est une contradiction. Ainsi $\mu(B) = 0$.

Maintenant si on considère la suite $C_n = B$, $\forall n \in \mathbb{N}$, alors par la proposition 3.2 on obtient le résultat.

Remarque 3.3. *Concernant le théorème 3.5 on peut penser que la condition (3.4.2) est plus générale que d'être quasi-condensent, mais les deux conditions sont équivalentes, comme nous le montrons dans la proposition suivante:*

Proposition 3.3. *Soit C un sous-ensemble borné d'un espace de Banach $\mathbb{B}$, μ une mesure de non-compacité sur $\mathbb{B}$, $T : C \longrightarrow C$ une application est μ-quasi-condensent si seulement si T satisfait la (3.4.2).*

Démonstration Supposons que T est quasi-condensent, Dans ce cas il suffit de considérer $h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $h(x) = x$. Par contre, s'il existe une fonction h vérifiant la condition (3.4.2), en utilisant la condition (P_2) de la mesure μ on obtient, $\mu(T(X)) < \mu(X)$ dès que $T(X) \subseteq X$ et $\mu(X) > 0$.

Corollaire 3.1. *Soit μ une mesure de non-compacité satisfaisant (P_5), soit C un sous-ensemble fermé, borné et convexe d'un espace de Banach $\mathbb{B}$, si $T : C \longrightarrow C$ une application continue et μ-quasi-condensent, Alors T admet au moins un point fixe dans C.*

Définition 3.3. *Soit C un sous-ensemble non vide, fermé, borné et convexe. Soit $K \subseteq C$, on dit T-invariant minimale si*

1. *K est fermé non vide, convexe, $T(K) \subseteq K$*
2. *Si l'existe Y est un sous-ensemble non vide, fermé et convexe de K avec $T(Y) \subseteq Y$, alors $Y = K$.*

Théorème 3.7. *[1] Soit C un sous-ensemble non vide, fermé, borné et convexe d'un espace de Banach $\mathbb{B}$ et μ une mesure de non-compacité sur $\mathbb{B}$. On suppose que $T : C \longrightarrow C$ une application μ-quasi-condensent et continue. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

a) T admet au moins un point fixe en C.

b) il existe un sous-ensemble minimale T-invariant de C.

c) si K est T invariant minimale, alors K est singleton.

Définition 3.4. *Soit μ une mesure de non-compacité sur un espace de Banach $\mathbb{B}$, On dit que $\mathbb{B}$ admet la propriété de μ-point fixe (noté μ-PFP) si toute application μ-quasi-condensant et continue définie dans un ensemble non-vide, fermé, borné et convexe sur un espace de $\mathbb{B}$ a au moins un point fixe.*

Remarque 3.4. *Notez que si $\mathbb{B}$ est un espace de Banach et μ une mesure de non-compacité satisfait la propriété maximale (P_5) alors $\mathbb{B}$ admet μ-PFP.*

Exemple 3.2. *Soit $\mathbf{B_r}$ la boule fermée de centre zéro de rayon $r > 0$. Dans un espace de Banach de dimension infinie $(\mathbb{B}, \|.\|)$. Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une fonction. On définit l'application $T : \mathbf{B_1} \longrightarrow \mathbf{B_1}$ par $Tx = f(\|x\|).x$ pour tout $x \in \mathbf{B_1}$.*

1. *Si l'on prend $f(t) = k$ pour tout $t \in [0,1]$, ou $k \in [0,1)$, il est facile de voire que T est k-set-contractive pour la mesure de non-compacité de Kauratovski α et, On peut donc appliquer le théorème de Darbo pour s'assurer de l'existence de point fixes de T.*

2. *Si f est une fonction continue et strictement décroissant avec $f(0) = 1$, alors l'application T est α-condensant et par le théorème Sadowskii, on en déduit l'existence de point fixe de T, notons que dans ce cas, nous n'appliquons pas le théorème de Darbo car cette application T n'est pas k-set-contractive pour tout $k \in [0,1)$.*

3. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, poser $I_n = (\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$ et ON considère $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ défini par*

$$f(t) = \begin{cases} 1 & pour \;\; t \in I_{2n-1} ou \; t = 0, \\ 1 - 2^{-n} & pour \;\; t \in I_{2n}. \end{cases}$$

4. *nous affirmons que T n'est pas μ-condensant pour tout mesure de non-compacité μ. En effet, il suffit de prendre l'ensemble $A_n = \{x \in \mathbf{B_1} : \|x\| \in I_{2n-1}\}$ pour certains $n \in \mathbb{N}$, car dans ce cas $TA_n = A_n$ qui implique $\mu(TA_n) = \mu(A_n)$ pour toute mesure de non-compacité μ.*

Il est claire que T n'est pas continue et, par conséquent, la proposition 3.2 ne pas être appliquée. cependant, T a des points fixes dans $\mathbf{B_1}$. Pour être plus précis, l'ensemble des points fixes de T est:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x \in \mathbf{B_1} : \frac{1}{2^{2n-1}} < \|x\| \leq \frac{1}{2^{2(n-1)}}\} \cup \{0\}$$

De plus, T satisfait la condition (1) du théorème 3.1 *pour la mesure de non-compacité $\mu = \mu_d$ or $\mu = \alpha$ ou $\mu = \chi$, considérez simplement $C_n = \mathbf{B_{\frac{1}{n}}}$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$.*

3.5 Un résultat du point fixe pour les applications qui ne sont nécessairement continues

Au vu de l'exemple 3.2 On se demande si la première condition du théorème 3.1 est suffisante afin d'obtenir l'existence de point fixe, c'est-à-dire l'hypothèse de continuité de l'application peut être abandonnée dans la proposition 3.2. La réponse est affirmative chaque fois que la mesure de non-compacité satisfait une condition supplémentaire liée à son noyau. De plus, dans cas, l'hypothèse de convexité est abandonnée. Pour être plus précis, dans cette section, nous considérons une définition différant de la mesure de la non-compacité dans le cadre des espace métriques.

Définition 3.5. *Soit $(\mathbb{E}, d)$ un espace métrique complet, $\mu : \mathbb{B}(\mathbb{E}) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une application. μ est appelée une mesure de non-compacité sur $\mathbb{E}$ si les propriété $(P_i)_{i=\overline{1,4}})$ de la définition 2.3 sont vérifiées, où (P_3) est remplacé par la propriété suivant noté $P_3^{'}$) (Invariant sous la clôture)*

$$\mu(\overline{X}) = \mu(X) \qquad \forall X \in \mathbb{B}(\mathbb{E})$$

Théorème 3.8. *[1] Soit μ une mesure de non-compacité sur un espace métrique complet $\mathbb{E}$ telle que $ker(\mu) = \{A \in \mathbb{B}(\mathbb{E})$ avec A est une singleton $\}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

- *(a) Il existe une suite décroissante $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$de sous-ensemble fermés et T-invariants de $\mathbb{E}$ telle que $\mu(X_n) \longrightarrow 0$, quand $n \longrightarrow \infty$.*
- *(b) T a au moins un point fixe dans $\mathbb{E}$.*

Dans ce cas étant donnée une sous-suite $\{x_n\}$ de $\{X_n\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point fixe de T.

Démonstration

$a \Longrightarrow b$ De manière similaire a la première partie de la proposition (3.2) l'ensemble $M_\infty = \bigcap\limits_{n\in N} M_n$ est non vide, fermé et T-invariant, de plus $\mu(M_\infty) = 0$, alors $M_\infty = \{p\}$ pour certains $p \in \}C$. Puisque X_∞ est T-invariant, on en déduit que p est un point fixe.

$b \Longrightarrow a$ Soit p un point fixe de T dans X, il suffit de considérer $M_n = p$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Enfin, On suppose que $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite vérifiant (a) et p est un point fixe de T avec $X_\infty = \{p\}$, soit $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite de $\{M_n\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on affirme que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers p. Par contradiction, supposons que $n \nrightarrow p$ comme $n \longrightarrow \infty$. Alors, il existe $\varepsilon_0 > 0$ et une sous-suite $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ telle que $d(x_{n_k}, p) > \varepsilon_0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit l'ensemble fermé $s_r = \overline{\{x_{n_k} : k \geq r\}}$. Il est claire que

$$\{S_r\}_{r\in\mathbb{N}}$$

est décroissant pour chaque $r \in \mathbb{N}$, S_r est un sous- ensemble de M_{n_r}, et donc $\mu(S_r) \longrightarrow 0$ lorsque $r \longrightarrow \infty$, donc d'après (P_4),

$$\bigcap_{r\in\mathbb{N}} S_r = \{p\}$$

, c'est a dire que $p \in S_r$ pour tout $r \in \mathbb{N}$. Alors pour chaque $r \in \mathbb{N}$, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ avec $k_0 > r$ tel que $d(x_{n_{k_0}}, p) < \frac{\varepsilon_0}{2}$, qui est une contradiction.

Remarque 3.5. *Il est intéressant de noter que toutes les hypothèses du résultat précédent sont satisfaites par la mesure de non-compacité μ_d*

Corollaire 3.2. *Soit $\mathbb{E}$ est un espace métrique complet. Soit $T : \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{E}$ une application a au moins un point fixe dans $\mathbb{E}$ si seulement s'il existe une suite décroissante $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-ensemble fermé et T-invariant de $\mathbb{E}$ telle que $\mu_d(X_n) \longrightarrow 0$, comme $n \longrightarrow \infty$. De plus, dans ce cas étant donnée une suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_n \in X_n$ opur tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point fixe de T.*

Chapter 4

Application

Soit $E = C([0,T],\mathbb{R})$ est l'espace de Banach des fonctions continue sur $[0,T]$, muni de la norme $\|v\|_\infty = sup_{[0,T]}|v(t)|$

- On considère l'équation suivante

$$v(t) = g(t, v(t)) + \int_0^t f(s, v(s))\ ds \qquad t \in [0,T]. \tag{4.0.1}$$

on suppose

(H_1) $f, g : [0,1] \times \overline{B}(0,1) \longrightarrow \overline{B}(0,1)$ soit continu.

(H_2) Il existe $k_1 \in]0,1[$ tel que

$$|g(t, v_1) - g(t, v_2)| \leq k_1|v_1 - v_2|, \quad k_1 \in]0,1[$$

donc g est une k_1-contraction car $k_1 \in]0,1[$

(H_3) Il existe k_2 tel que

$$|f(t, v_1) - f(t, v_2)| \leq k_2|v_1 - v_2| \qquad \text{est lipschtzienne}$$

.

On définit les opérateurs suivants

$$F : E \longrightarrow E, \qquad G : E \longrightarrow E$$

avec

$$F(v)(t) = \int_0^t f(s, v(s))ds \qquad G(v)(t) = g(t, v(t)).$$

Proposition 4.1. *sous les hypothèses* (H_1) *et* (H_2), G *est un opérateur* k_1*-contractant.*

Démonstration Soit $v_1, v_2 \ \in E$, donc

$$\begin{aligned} |Gv_1 - Gv_2| &= |g(t, v_1(t)) - g(t, v_2(t))| \\ &\leq (k_1|v_1(t) - v_2(t)|) \end{aligned}$$

d'où par le passage au sup on obtient que

$$sup\|Gv_1 - Gv_2\| \leq k_1 sup\|v_1 - v_2\|$$

d'où

$$\|Gv_1 - Gv_2\| \leq \|v_1 - v_2\|$$

On conclut que G est k_1-contraction.

Proposition 4.2. *sous les hypothèse* (H_1) *et* (H_2), F *est un opérateur complètement continue.*

(1) Montrons que F est complètement continu

(a) Montrons que F est continue Soit $\{x_n\}_n \in \overline{B}(0,1)$ une suite convergente vers $x \in \overline{B}(0,1)$ et on va montrer que $\{F(x_n)\}_n$ converge vers $F(x)$

(i) Montrons que : $f(s, x_n(s)))$ converge vers $f(s, x(s)$

$$\begin{aligned} lim_{n\to\infty} f(s, x_n)) &= f(s, lim_{n\to\infty} x_n(s)) \\ &= f(s, x(s)) \end{aligned}$$

Donc: $f(s, x_n(s))$ converge simplement vers $f(s, x(s))$

(ii) montrons que $\exists l \in L^1([0,1]\ , \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |f(s, x_n(s))| &= |f(s, x_n(s) - f(s, x) + f(s, x)| \\ &\leq |f(s, x_n(s) - f(s, x)| + |f(s, x)| \\ &\leq k_2|x_n(s) - x| + |f(s, x)| \\ &\leq k_2 \tfrac{\varepsilon}{2k_2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Donc il existe $l = \varepsilon \in L^1([0,T])$ tel que $|f(s,x_n(s))| \leq l \quad \forall_{n\in\mathbb{N}}$ D'après (i) et (ii) on conclue:

$$\begin{aligned} lim_{n\to\infty} \int_0^t f(s,x_n(s))\ ds &= \int_0^t lim_{n\to\infty} f(s,x_n(s)\ ds) \\ &= \int_0^t f(s,x(s))\ ds. \end{aligned}$$

(théorème de convergence dominée de Lebesgue)

(iii) Montrons que $lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x)$

$$\begin{aligned} lim_{n\to\infty} F(x_n(t) &= lim_{n\to\infty} \int_0^t f(s,x_n(s))\ ds \\ &= \int_0^t f(s,x(s))\ ds = F(x)(t). \end{aligned}$$

alors, $F(x_n)$ converge vers $F(x)$. donc F est continu.

(2) Montrons que $(F(x_n)(t))$ est uniformument borné, soit (x_n) une suite borné, il existe $M > 0$, c'est-à-dire

$$\exists M > 0, \forall s \in [0,T] : \|x_n(s)\| < M \|(x_n)_n\|$$

est borné alors

$$\begin{aligned} \|F(x_n)(t)\| &= \| \int_0^t f(s,x_n(s))\ ds\| \\ &\leq \int_0^t \|f(s,x_n(s))\|\ ds \\ &= \int_0^t \|f(s,x_n(s)) - f(s,0) + f(s,0)\|\ ds \\ &\leq \int_0^t \|f(s,x_n(s) - f(s,0)\|\ ds \\ &\leq \int_0^t \|f(s,x_n(s) - f(s,0)\|\ ds + \int_0^t \|f(s,0)\|\ ds \\ &\leq \int_0^t k\|x_n(s) - 0\| + \|f(s,0)\| \int_0^t\ ds \\ &= k\|x_n(s)\|t + \|f(s,0)\|t \\ &\leq T(k\|x_n(s)\| + \|f(s,0)\|) \end{aligned}$$

Alors

$$\|F(x_n)(t)\| \leq T(k.M + \varepsilon) \Longrightarrow \|F(x_n)(t)\| \leq H, \qquad H = T(k.M + \varepsilon) > 0$$

donc $(F(x_n(t))_n$ est uniformement borné.

Proposition 4.3. *L'opérateur $T = F + G$ et k-contraction d'ensemble, avec la mesure de non-compacité de Kuratowskii.*

On a $F : E \longrightarrow E$ une compact, donc F est 0-strict contraction d'ensemble

et

$G : E \longrightarrow E$ une k_1-stricte contraction d'ensemble, donc $F+G$ est k_1-contraction d'ensemble.

Théorème 4.1. *On suppose que qu'il existe*

$$2k_2r_0T + 2 + k_1r_0 < r_0 < 1$$

et sous les hypothèse $(H_1), (H_2), (H_3)$ *l'équation 4.0.1 admet une solution.*

Démonstration une solution de l'équation 4.0.1 est un point fixe de l'opérateur $T = G+F$

- l'opérateur T est k_1-contraction, il reste de montrer qu'il existe C un ensemble convexe fermé, borné tel que C est T-invariant
  On considère $C = \overline{B}(0, r_0)$, on montre que C est T-invariant

On a

$$\begin{aligned} |Gv + Fv| &= |\int_0^t f(s, v(s))ds + g(s, v(s))| \\ &\leq \int_0^t |f(s, v(s))|ds + |g(s, v(s))| \\ &\leq \int_0^t |f(s, v(s)) - f(s, 0)|ds + \int_0^t |f(s, 0)|ds + |g(s, v(s)) - g(s, 0)| + |g(s, 0)| \\ &\leq \int_0^t k_2|v|ds + 1 + k_1|v| + 1 \end{aligned}$$

d'où

$$T = F + G : \overline{B}(0, r_0) \longrightarrow \overline{B}(0, r_0)$$

De on obtient le résultat.

Bibliography

[1] A. Aghajani, R. Allahyari, M. Mursaleen, *A generalization of Darbo's theorem with application to the solvability of systems of integral equations,* J. Comput. Appl. Math., 260(2014), 68-77.

[2] J. Garcia, K. Latrach, *On Darbo-Sadovskii's fixed point theorems type for abstract measure of (weak) nocompatness.* Bull. Bell. Math. So. Simon Stevin 22(2015), 797-812.

[3] J. Banas and K. Goebel, *Measure of Noncompactness in Banach Spaces*, Math. and Appli., V. 57, Marcel Dekker, New York, 1980.

[4] j. Banas, L. Olszowy, *Measures of noncompactness related to monotonic- ity.* Comment. Math. Prace Mat. 41 (2001), 13-23.

[5] R.R. Akhmerov, M.I. Kanemskii, A.S. Potapov, A.E. Rodkina and B.N, Sadovskii *Measures of noncompactness and condensing operators,* Birkhauser Verlag, 1992.

[6] J. M. Ayerbe-Toledano, T. Domínguez-Benavides and G. López-Acedo, *Measures of Noncompactness in Metric Fixed Point Theory,* Birkhäuser Verlag, 1997.

[7] D. O'regan *Fixed Point Theory for Sum of Two Operators,Appl.Math.Lett.Vol.9,* (1996) 1-8.

[8] E.Zeidler *Nonlinear Function alAnalys isandits Applications.Vol.I:Fixed Point Theorems,Springer-Verlag,*NewYork,1986.

[9] D. O'Regan, Y.J.Cho,Y.Q.Chen *Topological Degree Theoryand Applications,* Copyright 2006.

[10] J.Banas,M. Mursaleen, *Sequence Spacesand Measures of non compactness with Applications to Differential and Integral Equations.Springer,* NewDelhi(2014).

[11] Y. Zhou,X.H.Shen,L.Zhang, *Cauchy problem for fractionale volution equations with Capu to derivative,* Eur.Phys.J.Special Topics222,1749-1765(2013).

[12] L.Erdos, *Topologies on Continuous Functions. Arzela-Ascoli Theorem , Ludwing-Maximolians-Universitït-München,* (2010) 1-10

[13] G. Darbo, *Punti uniti in trasformazioni a codomio non compatto,* Rend. Semin. Mat. Uni. Padova, 24(1955), 84-92.

[14] B.N. Sadovskii, *On a fixed point, Funkt. Anal.,* 4(1967), no. 2, 74-76.

[15] M. Baronti, E. Casini, P.L. Papini, *Diametrically contractive maps and fixed points,*Fixed Point Theory Appl., 2006(2006), Art. ID 79075, 8 pp.

[16] E.ZEIDLER *Nonlinear Functional Analysis and its Applications I, Fixed-Point Theorems,* Springer-Verlag, 1986.

Conclusion

L'objectif est l'étude d'existence des point fixe pour quelque classe d'applications non-linéaires dans des des espace de Banach, en utilisant la mesure de non-compacité abstraite. Nous avons présenté le théorème de Darbo, Où la mesure utilisée est de Kuratowskii puis nous avons vu que le théorème reste vrai si on utilise une mesure abstraite. De meme pour le théorème de Sadowskii. De plus nous avons plusieurs généralisation de ces théorèmes pour nouvelles classe d'application. Le travail s'est terminé avec une application pour les équation intégrales.