الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Université Akli Mohand Oulhadj - Bouira -
ⵜⴰⵙⴷⴰⵡⵉⵜ ⴰⴽⵍⵉ ⵎⵓⵃⵏⴷ ⵓⵍⵃⴰⴵ - ⵜⵓⴱⵉⵔⴻⵜ -

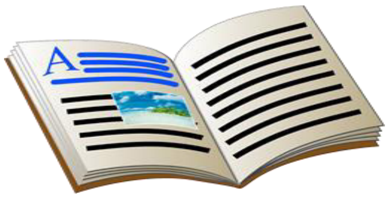
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة أكلي محند أولحاج
- البويرة -

جامعة البويرة

Faculté des Sciences et des Sciences Appliquées
كلية العلوم والعلوم التطبيقية

Département de Physique

Polycopié de cours



En : **Physique**

Spécialité : **Physique Théorique**

Niveau : Master 2

Cours d'Intégrales de Chemins
Partie 1 : Construction du Propagateur de Feynman

Par : Bouchemla Nedjma, Merriche Abderrezak et Benaiche Salim

Année : 2021 /2022

Préambule

Les scientifiques ont tenté l'élaboration de plusieurs formalismes mathématiques ou méthodes de quantifications qui répondent aux nécessités et exigences modernes suscitées par l'apparition de la physique quantique et relativiste. Ainsi, il y a eu dans l'ordre la mécanique des matrices de ***Heisenberg***, la mécanique ondulatoire de ***Schrödinger*** et les Intégrales de chemins de ***Feynman***.

En ce basant sur cette idée de méthodes de quantifications, nous avons tentés de présenter **la construction du propagateur de *Feynman*** comme première partie de cour **« Intégrales de chemins »** destiné aux étudiants de $2^{\text{ième}}$ année Master Physique théorique dans l'ordre suivant:

Le premier chapitre est consacré (dans le cas générale et pour un système unidimensionnel) à définir l'outil mathématique sur lequel repose cette formulation: le propagateur, ce dernier est définit à partir des notions de la **mécanique classique**! tel que l'action et le chemin. La construction du propagateur est faite de façon détaillée en passant par la forme discrète du propagateur et son expression dans l'espace des phases.

Dans le deuxième chapitre, nous considérons encore la construction du propagateur de ***Feynman*** dans le cas non relativiste et unidimensionnel pour une grande gamme de potentiels très importants en physique, il s'agit des systèmes physiques ayant une action quadratique telle que l'oscillateur harmonique.

La construction du propagateur dans les autres systèmes de coordonnées telle que les coordonnées polaires et sphériques sera consacrée dans le deuxième partie de ce cour d'intégrale de chemin et que nous verrons ultérieurement dans un autre polycopie de cours.

Dans le but de donner à l'étudiant une vue plus générale sur la construction du propagateur et par analogie aux différentes méthodes de quantifications, nous avons considérés dans le troisième chapitre d'autres méthodes qui permettent la construction du propagateur de ***Feynman,*** la première est dite **la méthode de *Schwinger*** qui se base sur le principe physique de **moindre action** et la deuxième est **la méthode algébrique** qui remonte au début de la mécanique quantique avec la formulation matricielle de ***Heisenberg*** et ***Pauli*** qui implique la manipulation des opérateur impulsion et position.

Il est à noter que les trois chapitres de ce cour comportent un nombre important de problèmes et de travaux qui ont été soigneusement choisies de façon à ce que l'étudiant ait une bonne base dans ce domaine de recherche en Master et par la suite en Doctorat.

Finalement, il est à noter que la matière à enseigner est très vaste et il faut faire impérativement et nécessairement des choix pour rester dans les limites imposées par le nombre d'heures des programmes d'enseignement en un nombre de pages raisonnable.

Table des matières

Chapitre 1

Le Formalisme des Intégrales de Chemins

En mécanique quantique [1], la formulation Hamiltonienne qui a été découverte et développée par Bohr, Born, Dirac, Heisenberg, Pauli, et Schrödinger et bien[2] [3] [4], en $1925 - 1926$, est basée sur le fait que la probabilité de trouver une particule au point x à l'instant t est égale à $|\Phi(x,t)|^2$ où la fonction d'onde $\Phi(x,t)$ solution de l'équation de Schrödinger est l'amplitude de probabilité de la particule au point (x,t). En 1933, Dirac a considéré que la formulation Lagrangienne est plus fondamentale que la formulation Hamiltonienne, il est arrivé à la conclusion que le propagateur de la mécanique quantique est analogue à $\exp\left(i\frac{S}{\hbar}\right)$,où S est l'action classique évaluée le long du chemin classique [5]. En 1948, Feynman a développé la suggestion de Dirac et a réussi à dériver une troisième formulation de la mécanique quantique appelée formulation des intégrales de chemins [4], basée sur le fait que le propagateur est une somme sur tout les chemins possibles reliant le point initial et final.

1.1 Définition du propagateur

Pour une particule de masse m constante soumise à un potentiel à une dimension allant du point $A(x_a, t_a)$ au point $B(x_b, t_b)$, le Lagrangien du système est donné par

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x), \tag{1.1}$$

où T est l'opérateur énergie cinétique et $V(x)$ l'opérateur énergie potentielle.

La particule peut passer du point A au point B suivant plusieurs chemins, dont l'un d'eux est le chemin classique, et on associe à chaque chemin la quantité $\exp(\frac{i}{\hbar}S)$ dite amplitude de probabilité partielle où S est l'action associée au chemin $x(t)$.

$$k(B/A) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}S_1\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}S_2\right)...\exp\left(\frac{i}{\hbar}S_n\right), \tag{1.2}$$

le calcul de l'action sur chaque chemin est basée sur le Lagrangien $S_1 = \int L\left(x_1.t_1\right)dt$ jusque à $S_n = \int L\left(x_n, t_n\right)dt$, la sommation sur tous les chemins possibles représente le propagateur et s'écrit sous la forme suivante

$$k(B/A) = \int_{x(t_a)}^{x(t_b)} D_{x(t)} \exp\frac{i}{\hbar}S(x(t)), \tag{1.3}$$

avec $D_{x(t)}$ la mesure et $S(x)$ est l'action fonctionnelle

$$S = \int_{t_a}^{t_b} Ldt = \int_{t_a}^{t_b}\left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)\right]dt, \tag{1.4}$$

1.2 Propagateur dans l'éspace des phase

Suivant la définition du propagateur de Feynman

$$K(B/A) = \left\langle x_b \left| \exp\left(-\frac{i}{\hbar}Ht\right) \right| x_a \right\rangle, \tag{1.5}$$

on subdivise l'intervalle de temps en $(N+1)$ intervalles de langueur ε tel que $\varepsilon = \frac{T}{N+1} = \frac{t_b - t_a}{N+1}$,

$$k(B/A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\langle x_{N+1} \left| \exp\left(-\frac{i}{\hbar}H\varepsilon\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}H\varepsilon\right) ... \exp\left(-\frac{i}{\hbar}H\varepsilon\right) \right| x_0 \right\rangle, \tag{1.6}$$

où $x_a = x_0$ et $x_b = x_{N+1}$, on injecte donc N relations de fermeture de la forme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_n \left| x_n \right\rangle \left\langle x_n \right| = I, \tag{1.7}$$

donc :

$$k(B/A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left\langle x_{N+1} \left| \exp\left(-\frac{i}{\hbar}H\varepsilon\right) I \exp\left(-\frac{i}{\hbar}H\varepsilon\right) I \exp\left(-\frac{i}{\hbar}H\varepsilon\right) ... I \exp\left(-\frac{i}{\hbar}H\varepsilon\right) \right| x_0 \right\rangle \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned} K(B/A) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int dx_N dx_{N-1} ... dx_1 \\ &\quad \left\langle x_{N+1} \right| \exp\left(-\frac{i}{\hbar}H\varepsilon\right) \left| x_N \right\rangle \left\langle x_N \right| \exp\left(-\frac{i}{\hbar}H\varepsilon\right) \left| x_{N-1} \right\rangle \left\langle x_{N-1} \right| \\ &\quad ... \exp\left(-\frac{i}{\hbar}H\varepsilon\right) \left| x_1 \right\rangle \left\langle x_1 \right| \exp\left(-\frac{i}{\hbar}H\varepsilon\right) \left| x_0 \right\rangle, \end{aligned} \tag{1.9}$$

on peut écrir le propagateur K sous la forme compacte suivante :

$$K(B/A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int \prod_{n=1}^{N} dx_n \prod_{n=1}^{N+1} \left\langle x_n \right| \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\left((\frac{p^2}{2m}) + V(x)\right)\varepsilon\right] \left| x_{n-1} \right\rangle, \tag{1.10}$$

on introduit maintenant $(N+1)$ relation de fermeture de la forme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dp_n \left|p_n\right\rangle \left\langle p_n\right| = I, \tag{1.11}$$

donc le propagateur devient

$$K(B/A) = \lim_{\varepsilon\to 0} \prod_{n=1}^{N} \int dx_n \prod_{n=1}^{N+1} \int dp_n \prod_{n=1}^{N+1} \left\langle x_n\right| \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\left(\frac{p^2}{2m}+V(x)\right)\varepsilon\right] \left|p_n\right\rangle \left\langle p_n\right| \left|x_{n-1}\right\rangle, \tag{1.12}$$

en utilisant la formule de (BCH) [6], [7], nous obetenons

$$\exp(\hat{A}+\hat{B}) = \exp\left(\hat{A}\right)\exp\left(\hat{B}\right)\exp\left(\frac{1}{2}\left[\hat{B},\hat{A}\right]\right), \tag{1.13}$$

puis en idetifiant donc $\hat{B} = -\frac{i}{\hbar}V(x)\varepsilon$ et $\hat{A} = -\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}\varepsilon$, on aura :

$$\exp\left[(\frac{p^2}{2m})+V(x)\right] = \exp(\frac{p^2}{2m})\exp V(x)\exp\left(\frac{i\varepsilon^2}{\hbar 2m}\left[P^2.V\right]\right)$$

où $\exp\left\{\frac{i\varepsilon^2}{\hbar 2m}\left[P^2.V\right]\right\}$ est de l'ordre ε^2 qui ne contribue pas au niveau du propagateur d'où

$$K(B/A) = \lim_{\varepsilon\to 0} \prod_{n=1}^{N} \int dx_n \prod_{n=1}^{N+1} \int dp_n \prod_{n=1}^{N+1} \left\langle x_n\right| \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\varepsilon\frac{p_n^2}{2m}\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\varepsilon V(x_{n-1})\right) \left|p_n\right\rangle \left\langle p_n\right. \left|x_{n-1}\right\rangle, \tag{1.14}$$

avec le produit scalaire

$$\left\langle x\right. \left|p\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\exp(\frac{i}{\hbar}px), \tag{1.15}$$

Remplacer les deux formules conduit à â relation suivante :

$$K\left(B/A\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\prod_{1}^{N}\int dx_n\prod_{1}^{N+1}\int\frac{dp_n}{2\pi\hbar}\exp\left(\begin{array}{c}\sum_{n=1}^{N+1}\frac{i}{\hbar}\left[-\frac{\varepsilon}{2m}p_n^2+\left(x_n-x_{n-1}\right)p_n\right]\\ \times\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1}\varepsilon V\left(x_{n-1}\right)\right]\end{array}\right), \tag{1.16}$$

on remarque que l'intégrale sur les p_n est une intégrale gaussienne [10] de la forme

$$\int\exp\left(-\alpha x^2+bx\right)=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\exp\left(\frac{b^2}{4\alpha}\right), \tag{1.17}$$

qui donne

$$\begin{aligned}&\prod_{n=1}^{N+1}\int\frac{dp_n}{2\pi\hbar}\exp\sum_{n=1}^{N+1}\left[-\frac{i}{\hbar}\frac{\varepsilon}{2m}p_n^2+\frac{i}{\hbar}\left(x_n-x_{n-1}\right)p\right] \quad (1.18)\\ =&\prod_{n=1}^{N+1}\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}}\exp\left[\sum_{n=1}^{N+1}\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2\varepsilon}\left(x_n-x_{n-1}\right)^2\right],\end{aligned}$$

La forme génerale du propagateur est

$$K\left(B/A\right)=\prod_{n=1}^{N+1}\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}}\prod_{1}^{N}\int dx_n\exp\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1}\left(\frac{m}{\varepsilon}\frac{\left(x_n-x_{n-1}\right)^2}{2}-\varepsilon V\left(x_{n-1}\right)\right). \tag{1.19}$$

1.3 Application

1.3.1 La particule libre

L'Hamiltonien libre

$$H=\frac{p_2}{2m},$$

pour un système libre $V\left(x\right)=0$, [3] le propagateur se réduit à la forme

$$K = \prod_{n=1}^{N+1} \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}} \prod_{n=1}^{N} \int dx_n \exp \frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^{N+1} \left(\frac{m}{\varepsilon} \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{2} \right), \tag{1.20}$$

on intégre terme par terme donc l'intégral sur $x_1$puis sur x_2.... on trouve

$$K(B/A) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar T}} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \frac{m}{2T} (x_{b-}x_a)^2 \right]. \tag{1.21}$$

1.3.2 Particule dans un champ magnétique utilisant le produit de Trotter

L'Hamiltonien du système considéré [8] est

$$H = \frac{\left[p - \frac{e}{c} A(x)\right]^2}{2m} + V(x), \tag{1.22}$$

pour calculer le propagateur ou Fonction de Green(La fonction de Green G est la transformé de fourier du propagateu K)

$$G(x, \varepsilon; y) = \left\langle x \middle| \exp\left(-\frac{i}{\hbar} Ht \right) \middle| y \right\rangle,$$

on utilise le fait que

$$\exp\left[\lambda\left(\hat{A} + \hat{B}\right)\right] = \exp\left(\lambda\hat{A}\right) \exp\left(\lambda\hat{B}\right) \exp\left(\frac{\lambda^2}{2} \left[\hat{B}, \hat{A}\right] + o\left(\lambda^3\right) \right), \tag{1.23}$$

avec l'identification $\lambda = \varepsilon$, $A = \frac{-i}{\hbar} T$, $B = -\frac{i}{\hbar} V$ où T est l'énergie cinétique et V est l'énergie potentielle. On peut aussi écrire l'éq (1.23) sous la forme

$$\exp[\lambda(A + B)] = \exp(\lambda A) \exp(\lambda B) + o\left(\lambda^2\right), \tag{1.24}$$

en utilisant (1.24) on trouve :

$$G(x,\varepsilon;y)=\left\langle x\left|\exp\left(\frac{-i}{\hbar}T\varepsilon\right)\right|y\right\rangle\exp\left[\frac{-i}{\hbar}V(y)\varepsilon\right]+o\left(\varepsilon^2\right). \tag{1.25}$$

on introduit une relation de férmeture $I=\int d^3p\,|p\rangle\langle p|$ et on calcul l'intégrale de l'équation (1.25) on trouve :

$$\int d^3p_n\,\langle x|\exp\left(\frac{-ip^2\varepsilon}{\hbar 2m}\right)|p\rangle\langle p\,|y\rangle=\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}\right)^{\frac{3}{2}}\exp\left[\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2\varepsilon}(x-y)^2\right], \tag{1.26}$$

si nous combinons les équations (1.25) et (1.26), Nous obtenons l'expression suivante à trois dimensions :

$$G(x,\varepsilon;y)=\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}\right)^{\frac{3}{2}}\exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(\frac{m(x-y)^2}{2\varepsilon}-\varepsilon V(y)\right)\right]+o\left(\varepsilon^2\right). \tag{1.27}$$

Lorsque un champ magnétique est présent, l'expression $\exp\left(-\frac{i}{\hbar}T\varepsilon\right)$ est plus compliquée, car $T=\left[p-\frac{eA(x)}{c}\right]^2$. La résolution de l'identité est insuffisante, car A (potentiel scalaire) est en fonction de x. L'idée de la prochaine étape est de regarder la racine carrée de T en utilisant

$$\exp\left(\frac{b^2}{2}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3\int d^3u\exp\left(-\frac{u^2}{2}+b.u\right), \tag{1.28}$$

nous utilisons la variante suivante de l'équations (1.28) :

$$\exp\left(-i\varepsilon\frac{b^2}{2m\hbar}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi i}}\right)^3\int d^3u\exp\left(i\frac{u^2}{2}-i\sqrt{\frac{\varepsilon}{m\hbar}}b.u\right). \tag{1.29}$$

On pose $a(x)=\frac{eA(x)}{c}$,évaluons ensuite l'équation (1.25) en se concentrant sur la partie de l'énergie cinétique qui, à l'aide de l'équation (1.29) se réécrit comme

$$
\begin{aligned}
G_k(x,\varepsilon;y) &= \left\langle x \left| \exp\left(\frac{-i}{\hbar}T\varepsilon\right) \right| y \right\rangle \\
&= \left\langle x \left| \exp\left(-i\varepsilon\frac{(p-a)^2}{2m\hbar}\right) \right| y \right\rangle \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi i}}\right)^3 \int d^3u \exp\left(i\frac{u^2}{2}\right) \left\langle x \left| \exp\left[-i\sqrt{\frac{\varepsilon}{m\hbar}}(p-a).u\right] \right| y \right\rangle, \quad (1.30)
\end{aligned}
$$

ce résultat n'est pas vraiment util car l'exposant contient $\sqrt{\varepsilon}$,cet ordre n'est pas util au niveau du propagateur, la façon de traiter ce problème consiste à améliorer l'éq (1.24), la formule du produit la plus éxacte est de la forme suivante au lieu de (1.24) on utilise l'équation suivante

$$
\exp[\lambda(A+B)] = \exp\left(\frac{\lambda B}{2}\right)\exp(\lambda A)\exp\left(\frac{\lambda B}{2}\right) + o\left(\lambda^3\right), \quad (1.31)
$$

ce qui donne :

$$
\begin{aligned}
\left\langle x \left| \exp\left(-i\sqrt{\frac{\varepsilon}{m\hbar}}(p-a).u\right) \right| y \right\rangle &= \left\langle x \left| \left\{ \begin{array}{c} \exp\left(i\sqrt{\frac{\varepsilon}{m\hbar}}\frac{a.u}{2}\right) \\ \times\exp\left(-i\sqrt{\frac{\varepsilon}{m\hbar}}p.u\right) \\ \times\exp\left(i\sqrt{\frac{\varepsilon}{m\hbar}}\frac{a.u}{2}\right) \end{array} \right\} \right| y \right\rangle \\
&= \exp\left(i\sqrt{\frac{\varepsilon}{m\hbar}}\frac{a(x).u}{2}\right) \left\langle x \left| \exp\left(-i\sqrt{\frac{\varepsilon}{m\hbar}}p.u\right) \right| y \right\rangle \\
&\quad \exp\left(i\sqrt{\frac{\varepsilon}{m\hbar}}\frac{a(y).u}{2}\right), \quad (1.32)
\end{aligned}
$$

et pour trouver $G_k(x,\varepsilon;y)$ il ne reste que de calculer le terme $\left\langle x \left| \exp\left(-i\sqrt{\frac{\varepsilon}{m\hbar}}\hat{p}.u\right) \right| y \right\rangle$

$$
\left\langle x \left| \exp\left(-i\sqrt{\frac{\varepsilon}{m\hbar}}\hat{p}.u\right) \right| y \right\rangle = \int d^3p \left\langle x \left| \exp\left(-i\sqrt{\frac{\varepsilon}{m\hbar}}\hat{p}.u\right) \right| p \right\rangle \langle p|\, y\rangle, \quad (1.33)
$$

avec le produit scalaire

$$\langle x|\, p\rangle = (2\pi\hbar)^{-\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{i}{\hbar}p.x\right), \tag{1.34}$$

on remplace l'équation(1.34) dans l'équation (1.33) on trouve

$$\begin{aligned}
\left\langle x \left| \exp\left(-i\frac{\sqrt{\varepsilon}p.u}{\sqrt{m\hbar}}\right) \right| y \right\rangle &= \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^3 \int d^3p \exp\left(-i\frac{\sqrt{\varepsilon}p.u}{\sqrt{m\hbar}}\right) + i\frac{p.\left(x-y\right)}{\hbar} \\
&= \frac{1}{\hbar^3}\delta^3\left(-\frac{\sqrt{\varepsilon}u}{\sqrt{m\hbar}} + \frac{\left(x-y\right)}{\hbar}\right) \\
&= \frac{1}{\hbar^3}\left[\sqrt{\frac{m\hbar}{\varepsilon}}\right]^3 \delta^3\left(-u + \left(x-y\right)\sqrt{\frac{m}{\hbar\varepsilon}}\right) \qquad (1.35)
\end{aligned}$$

en remplaçant l'équation (1.35) dans l'équation (1.32) et l'équation (1.32) dans (1.30) on trouve :

$$\begin{aligned}
G_k\left(x,\varepsilon;y\right) &= \left[\frac{1}{2\pi i}\frac{m}{\varepsilon\hbar}\right]^{\frac{3}{2}} \int d^3u \exp\left(\frac{iu^2}{2}\right) \times \exp\left[i\sqrt{\frac{\varepsilon}{m\hbar}}u.\left(\frac{a\left(x\right)+a\left(y\right)}{2}\right)\right]\delta^3\left[\frac{\left(x-y\right)}{\sqrt{\frac{\hbar\varepsilon}{m}}} - u\right], \\
&= \left[\frac{1}{2\pi i}\frac{m}{\varepsilon\hbar}\right]^{\frac{3}{2}} \exp\left[\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2}\frac{\left(x-y\right)^2}{\varepsilon}\right] \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(x-y\right).\left(\frac{a\left(x\right)+a\left(y\right)}{2}\right)\right], \qquad (1.36)
\end{aligned}$$

avec $a = \frac{eA}{c}$, en multipliant et divisant par ε dans la dernière expression (1.35), on obtient finalement :

$$G_k\left(x,\varepsilon;y\right) = \left[\frac{m}{2\pi i\hbar\, \varepsilon}\right]^{\frac{3}{2}} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\varepsilon\left[\begin{array}{c} \frac{m}{2}\frac{(x-y)^2}{\varepsilon^2} \\ +\frac{(x-y)}{\varepsilon}.\frac{e}{c}\left(\frac{A(x)+A(y)}{2}\right) - V\left(y\right)\end{array}\right]\right\} + O\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\right). \tag{1.37}$$

Chapitre 2

Propagateur pour les systèmes ayant une action quadratique :

Une action est dites quadratique si son opérateur lagrangien $L(x, \dot{x}, t)$ est de la forme générale suivante :

$$L(x, \dot{x}, t) = a\dot{x}^2 + bx^2 + cx\dot{x} - dx + e\dot{x} + g, \tag{2.1}$$

2.1 Formalisme mathématique

Pour calculer le propagateur [3], relatif a cette action, le défini dans le cas générale par la relation

$$k(B/A) = \int D_x(t) \exp(\frac{i}{\hbar} S_{cl}), \tag{2.2}$$

on pose ensuite

$$x(t) = x_{cl}(t) + y(t), \tag{2.3}$$

où $y(t)$ est une déviation avec les conditions

$$y(t_A) = y(t_B) = 0, \tag{2.4}$$

et la nouvelle mesure

$$D_y(t) = \int_{t_A}^{t_B} dy_1 dy_2 ... dy_n \quad \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar}}^N \tag{2.5}$$

ceci permet d'écrire le propagateur sous la nouvelle forme

$$\begin{aligned} k(B/A) &= \int D_y(t) \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_{t_A}^{t_B} L(x_{cl}, \dot{x}_{cl}, t) dt\right] \\ &\times \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_{t_A}^{t_B} dt \begin{pmatrix} y\frac{\partial L}{\partial x_{cl}} + \dot{y}\frac{\partial L}{\partial x_{cl}} + \frac{1}{2}y^2\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} \\ +\frac{1}{2}\dot{y}^2\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2} + y\dot{y}\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \dot{x}} \end{pmatrix}\right], \end{aligned} \tag{2.6}$$

on réorganise les termes dans le propagateur, on trouve

$$\begin{aligned} k(B/A) &= \int D_{y(t)} \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_{t_A}^{t_B} L(x_{cl}, \dot{x}_{cl}, t) dt\right] \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_{t_A}^{t_B}\left(y\frac{\partial L}{\partial x_{cl}} + \dot{y}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{cl}}\right) dt\right] \\ &\times \exp\frac{i}{\hbar}\int_{t_A}^{t_B}\left(\frac{1}{2}y^2\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\dot{y}^2\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2} + y\dot{y}\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \dot{x}}\right) dt, \end{aligned} \tag{2.7}$$

le terme $\left[\frac{i}{\hbar}\int_{t_A}^{t_B}\left(y\frac{\partial L}{\partial x_{cl}} + \dot{y}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{cl}}\right) dt\right]$ de l'exposant dans l'expression précédente est nul, et on pose :

$$F(t_{b,} t_a) = \int D_{y(t)} \exp\frac{i}{\hbar}\int_{t_A}^{t_B}\left(\frac{1}{2}y^2\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\dot{y}^2\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_{cl}^2} + y\dot{y}\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \dot{x}}\right) dt, \tag{2.8}$$

où F représente le facteure de fluctuation. La forme finale du propagateur relatif à une action quadratique est

$$k(B/A) = F(t_{b,} t_a) \exp\left(\frac{i}{\hbar}S_{cl}\right). \tag{2.9}$$

où S_{cl} est l'action classique relative au système étudié et $F(t_{b,} t_a)$ est le facteur de fluctuation déja définit dans (2.8) .

2.2 Applications :

2.2.1 Oscillateur harmonique à une dimension :

Le système est définit par son opérateur Lagrangien [3]

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega x^2, \tag{2.10}$$

le propagateur donc néssicite de calculer ou de connaitre l'action classique, pour un oscillateur harmonique, cette action est connue et est donnée par

$$S_{cl} = \frac{m\omega}{2\sin(\omega t)}\left((x_B^2 + x_A^2)\cos(\omega t) - 2x_A x_B\right), \tag{2.11}$$

reste à calculer le facteur de fluctuation $F(t_b, t_a)$:

$$F(t_b, t_a) = \int D_{y(t)} \exp\frac{i}{\hbar}\int_{t_A}^{t_B}\left(\frac{1}{2}m\omega^2 y^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2\right)dt, \tag{2.12}$$

où on choisit $y(t)$ sous forme d'une série telle que :

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin\left(n\pi\frac{t - t_A}{T}\right), n \succ 0, \tag{2.13}$$

d'ou les deux termes à calculer donnent :

$$\frac{1}{2}m\omega^2\int_{t_A}^{t_B} y^2 dt = \frac{1}{4}m\omega^2\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 T, \tag{2.14}$$

et

$$\frac{1}{2}m\int_{t_A}^{t_B}\dot{y}^2 dt = \frac{m}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n\pi}{T}\right)^2 a_n^2 T, \tag{2.15}$$

donc on remplace dans la forme du facteur de fluctuation (2.12)

$$F(t_b, t_a) = \int D_{y(t)} \exp\left[\frac{i}{\hbar}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{m}{2}T\frac{a_n^2}{2}\left(\frac{n\pi}{T}\right)^2 - \frac{1}{2}m\omega^2\frac{a_n^2}{2}T\right)\right], \tag{2.16}$$

la mesure est donnée par (2.5) , et qui se met sous la forme finale

$$D_{a_n} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}}^{N} J \int da_1 da_2 ... da_N, \tag{2.17}$$

où J est le Jacobien de la transformation $y \rightarrow a$, Arriver à ce point, on peut intégrer sur les termes a_n

$$F(t_b,t_a) = \int D_{a_n} \exp\left[\frac{i}{\hbar} \sum \frac{m}{2}\frac{T}{2}\left(\left(\frac{n\pi}{T}\right)^2 - \omega^2\right) a_n^2\right], \tag{2.18}$$

les intégrations succéssive sur les a_n donnent

$$k(B/A) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar \sin(\omega t)}} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\frac{m\omega}{2\sin(\omega t)}\left(x_b^2 + x_a^2\right)\cos(\omega t) - 2x_b x_a\right). \tag{2.19}$$

fonction d'onde :

Le propagateur de feynman est donné par sa forme génerale symétrisé

$$K\left(x_b, x_a, t\right) = \sum \Phi_n\left(x_A\right)\Phi_n^*\left(x_B\right)\exp\left(\frac{-E_n}{\hbar}t\right), \tag{2.20}$$

essayon de symétriser la forme du propagateur (2.20) , on sait que :

$$\sin\left(\omega t\right) = \frac{1 - \exp\left(-2i\omega t\right)}{2i\exp\left(-i\omega t\right)}, \tag{2.21}$$

$$\cos\left(\omega t\right) = \frac{1 + \exp\left(-2i\omega t\right)}{2\exp\left(-i\omega t\right)},$$

on pose, $z = \exp\left(-\omega t\right)$ ce qui donne

$$\sin\left(\omega t\right) = \frac{1}{2i}\frac{1 - z^2}{z}, \tag{2.22}$$

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}\frac{1+z^2}{z}, \tag{2.23}$$

donc le propagateur devient sous la forme suivant :

$$K(x_B, x_A, t) = \sqrt{\frac{m\omega z}{\pi\hbar}}\left(1-z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\exp\left[+\frac{im\omega}{\hbar}\left(\frac{z}{(1-z^2)}2x_Bx_A - \frac{1+z^2}{1-z^2}\left(\frac{x_a^2-x_B^2}{2}\right)\right)\right], \tag{2.24}$$

on pose aussi

$$\xi_A = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x_A, \tag{2.25}$$

et

$$\xi_B = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x_B. \tag{2.26}$$

Le propagateur prend la forme

$$K(\xi_B, \xi_A, t) = \sqrt{\frac{m\omega z}{\pi\hbar}}\left(1-z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\exp\left[\frac{2z\xi_B\xi_A}{1-z^2} - \frac{z^2+1}{2(1-z^2)}\left(\xi_A^2+\xi_B^2\right)\right], \tag{2.27}$$

on a

$$\frac{1+z^2}{2(1-z^2)} = \frac{1}{2} + \frac{z^2}{1-z^2}, \tag{2.28}$$

d'où

$$K(\xi_B, \xi_A, t) = \sqrt{\frac{m\omega z}{\pi\hbar}}\left(1-z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\xi_A^2+\xi_B^2\right)\right]\exp\left[\frac{2z\xi_B\xi_A - \left(\xi_A^2+\xi_B^2\right)z^2}{1-z^2}\right], \tag{2.29}$$

on consider la formule de Mehler [9] [10] :

$$\left(1-z^2\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{2z\xi_B\xi_A-\left(\xi_A^2+\xi_B^2\right)z^2}{1-z^2}\right]=\sum_{n=0}^{\infty} H_n\left(\xi_A\right)H_n\left(\xi_B\right)\frac{z^n}{2^n n!}, \tag{2.30}$$

$$K\left(x_B,x_A,t\right)=\frac{1}{2^n n!}\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}\left(x_A^2+x_B^2\right)\right]\sum_{n=0}^{\infty}H_n\left(x_A\right)H_n\left(x_B\right)\exp\left[-i\omega t\left(n+\frac{1}{2}\right)\right], \tag{2.31}$$

d'où les énergies et les fonctions d'onde pour un oscilateur harmonique sont

$$\Phi_n\left(x\right)=\sqrt{\frac{1}{2^n n!}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\exp\left(-\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right), \tag{2.32}$$

$$E_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega. \tag{2.33}$$

2.2.2 Oscillateur harmonique à une masse et une fréquence dépondantes du temps :

L'opérateur Lagrengien L du système est donnée par [11]

$$L=\ \frac{1}{2}m\left(t\right)\dot{x}^2-\frac{1}{2}m(t)\omega\left(t\right)^2x^2, \tag{2.34}$$

qui appartien à la catégorie des actions de forme quadratique ce qui permet d'écrire le propagateur sous la forme :

$$k(B/A)=F\left(t_b,t_a\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}S_{cl}\right). \tag{2.35}$$

où S_{cl} est l'action classique du système donée par

$$S_{cl}=\frac{m_B}{2}x_{bcl}\dot{x}_{bcl}-\frac{m_B}{2}x_{acl}\dot{x}_{acl}, \tag{2.36}$$

qu'on va calculer par la suite.

Le facteur de fluctuation $F(t_{b,}t_a)$ donnée par (1.12) peut se ramener à la forme donnée par [12],[13] suite à une approximation semi-classique et donne

$$F(t_b, t_a) = \frac{i}{2\pi\hbar}\frac{\partial^2}{\partial x_a \partial x_b} S_{cl}. \tag{2.37}$$

Calculons d'abord l'action classique $S_{cl} = S(x_a, t_a; x_b, t_b)$, en utilisant l'équation d'Euler-lagrange pour L donné par (2.34) , l'équation de mouvement peut être écrite sous la forme suivent

$$\ddot{x} + 2\frac{\dot{\eta}}{\eta}\dot{x} + \omega^2(t)x = 0, \tag{2.38}$$

où $\eta = \sqrt{m(t)}$, cette équation de mouvement admet la solution

$$x(t) = \rho(t)\left[A\cos(\gamma(t)) + B\sin(\gamma(t))\right], \tag{2.39}$$

où

$$\rho(t) = \frac{\alpha(t)}{\eta(t)}, \tag{2.40}$$

et $\gamma(t)$ représente l'implitude de L'oscillateur harmonique classique et A et B sont des constantes non nulles et la fonction $\alpha(t)$ peut être déterminée. En repmlacant (2.39) dans (2.38) on obtient

$$\left(\frac{\ddot{\alpha}}{\eta} - \frac{\alpha\ddot{\eta}}{\eta^2} - \alpha\frac{\dot{\gamma}^2}{\eta} + \frac{\alpha\omega^2(t)}{\eta}\right)(A\cos(\gamma) + B\sin(\gamma)) - \left(\frac{\alpha\ddot{\gamma}}{\eta} + \frac{2\dot{\alpha}\dot{\gamma}}{\eta}\right)(A\cos(\gamma) + B\sin(\gamma)) = 0, \tag{2.41}$$

les constantes A et B sont non nulles donc les fonctions $\alpha(t)$ et $\gamma(t)$ satisfont

$$\ddot{\alpha} - \alpha\dot{\gamma}^2 + \alpha\left(\omega^2(t) - \frac{\ddot{\eta}}{\eta}\right) = 0, \tag{2.42}$$

et

$$\alpha\ddot{\gamma}+2\dot{\alpha}\dot{\gamma}=0. \tag{2.43}$$

Les constantes A et B dans l'équation (2.39) peuvent être déterminé en imposant les conditions aux limites $x_b = x(t_b)$ et $x_a = x(t_a)$.Le chemin classique qui relie les points (x_A, t_A) et (x_B, t_B) peut s'écrir comme :

$$x_{cl} = \frac{\alpha(t)}{n(t)\sin(\gamma_B-\gamma_a)}\left\{\frac{n_a x_a}{\alpha_a}\sin(\gamma_B-\gamma)-\frac{\eta_b x_b}{\alpha_b}\sin(\gamma_A-\gamma)\right\}.$$

Une fois x_{cl} est calculée on remplace dans l'équation (2.36)on trouve

$$\begin{aligned} S_{cl} &= \frac{m_B x_B^2}{2}\left(\frac{\dot{\alpha}_b\eta_b-\alpha_b\dot{\eta}_b}{\alpha_B\eta_B}\right)-\frac{m_a x_a^2}{2}\left(\frac{\dot{\alpha}_a\eta_a-\alpha_a\dot{\eta}_a}{\alpha_a\eta_a}\right) \\ &\quad +\frac{1}{2}\left(m_b\dot{\gamma}_b x_b^2+m_a\dot{\gamma}_a x_a^2\right)\cot\left(\gamma_b-\gamma_a\right) \\ &\quad -\eta_a\eta_b\sqrt{\dot{\gamma}_a\dot{\gamma}_b}x_a x_b\csc(\gamma_b-\gamma_a), \end{aligned} \tag{2.44}$$

On substitue l'ation classique ci-dissus dans l'équation (2.37) le facteur de fluctuation, nous obtenons :

$$F\left(t_b,t_a\right)=\left[\frac{1}{2\pi i\hbar}\frac{\eta_A\eta_B\sqrt{\dot{\gamma}_B\dot{\gamma}_A}}{\sin\left(\gamma_B-\gamma_A\right)}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{2.45}$$

D'aprés les équations (2.35),(2.44)et (2.45) le propagateur d'un oscillateur harmonique à une masse et une fréquence dépondantes du temp peut être éxprémé sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
k(B/A) &= \sqrt{\frac{\eta_A\eta_B\sqrt{\dot{\gamma}_b\dot{\gamma}_a}}{2\pi i\hbar\sin(\gamma_b-\gamma_a)}}\exp\left\{\frac{i}{2\hbar}\left[m_b\left(\frac{\dot{\alpha}_b\eta_b-\alpha_b\dot{\eta}_b}{\alpha_B\eta_B}\right)x_b^2\right.\right.\\
&\left.\left.-m_a\left(\frac{\dot{\alpha}_a\eta_a-\alpha_a\dot{\eta}_a}{\alpha_a\eta_a}\right)x_a^2\right]\right\}\\
&\times\exp\left(\frac{i}{\hbar\sin(\gamma_b-\gamma_a)}\right)\left[\left(m_b\dot{\gamma}_bx_b^2+m_a\dot{\gamma}_ax_a^2\right)\cos(\gamma_b-\gamma_a)\right.\\
&\left.-\eta_a\eta_b\sqrt{\dot{\gamma}_a\dot{\gamma}_b}x_ax_b\right]. \qquad (2.46)
\end{aligned}$$

En remplaçant $\eta_A=\eta_B=\sqrt{m}=cte$, cela réduit le propagateur à celui d'un oscillateur harmonique avec une fréquence et une masse constantes

$$\begin{aligned}
K(x_B,t_B,x_a,t_a) &= \left[\frac{m}{2\pi i\hbar}\frac{\sqrt{\dot{\gamma}_B\dot{\gamma}_A}}{\sin(\gamma_B-\gamma_A)}\right]^{\frac{1}{2}}\\
&\times\exp\left[\frac{im}{2\hbar}\left(\frac{\dot{\alpha}_B}{\alpha_B}x_B^2-\frac{\dot{\alpha}_A}{\alpha_A}x_B^2\right)\right]\\
&\times\exp\left[\begin{array}{c}\left(\frac{im}{2\hbar\sin(\gamma_B-\gamma_A)}\right)\\ \times\left(\begin{array}{c}(\dot{\gamma}_Bx_B^2+\dot{\gamma}_Ax_A^2)\cos(\gamma_B-\gamma_A)\\ -2\sqrt{\dot{\gamma}_A\dot{\gamma}_B}x_Ax_B\end{array}\right)\end{array}\right], \qquad (2.47)
\end{aligned}$$

Ce propagateur est en accord avec le résultat de Khandekar et Lawande [14] et aussi avec les résultats de Yoen et al [15], de plus ce résultat peut être reduit a celui d'un oscillateur harmonique simple en posant α,ω constants et $\eta_A=\eta_B=\sqrt{m}=cte$. Les équations$(2.42)$, (2.43) deviennent

$$\left(\omega^2+-\dot{\gamma}^2\right)\alpha=0, \qquad (2.48)$$

$$\gamma_B-\gamma_A=\omega\left(t_b-t_a\right), \qquad (2.49)$$

en remplaçant ces paramêtres dans l'équation(2.47) on trouve le propagateur sous la forme suivante :

$$K\left(x_B, t_B, x_a, t_a\right) = \left(\frac{m\omega}{2\pi i\hbar \sin\omega\left(t_b - t_a\right)}\right)^{\frac{1}{2}} \times \exp\left[\begin{array}{c} \left(\frac{im\omega}{2\hbar\sin\omega(t_b-t_a)}\right) \\ \times\left(\left(x_b^2 + x_a^2\right)\cos\omega\left(t_b - t_a\right) - 2x_a x_b\right) \end{array}\right]. \quad (2.50)$$

Fonction d'onde :

Dans cette partie, les fonctions d'onde sont calculées à partir de la représentation spéctrale du propagateur en définissant :

$$z = \exp\left(-i\phi\right) \quad où\ \phi = \gamma_b - \gamma_a. \quad (2.51)$$

$$\sin\left(\phi\right) = \frac{1}{2i}\frac{1 - z^2}{z}. \quad (2.52)$$

$$\cos\left(\phi\right) = \frac{1}{2}\frac{1 + z^2}{z}. \quad (2.53)$$

$$a = \sqrt{\frac{m_b\dot{\gamma}_b}{\hbar}}x_b; b = \sqrt{\frac{m_a\dot{\gamma}_a}{\hbar}}x_a. \quad (2.54)$$

La forme générale du propagateur (2.47) peut être écrite en fonction de z sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} K\left(x_b, t_b, x_a, t_a\right) &= \left(\frac{\eta_a\eta_b\sqrt{\dot{\gamma}_a\dot{\gamma}_b}}{\pi\hbar}Z\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 - z^2\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\times\exp\left(\frac{i}{2\hbar}\left[m_b x_b^2\left(\frac{\dot{\alpha}_b\eta_{b-}\alpha_b\dot{\eta}_b}{\alpha_b\eta_b}\right) - m_a x_a^2\left(\frac{\dot{\alpha}_a\eta_{a-}\alpha_a\dot{\eta}_a}{\alpha_a\eta_a}\right)\right]\right) \\ &\times\exp\left\{\frac{1}{1 - z^2}\left[2abz - \left(a^2 + b^2\right)\left(\frac{1 + z^2}{z}\right)\right]\right\}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Maintenent on utilise l'identité suivant :

$$\frac{1+z^2}{2\left(1-z^2\right)}=\frac{1}{2}+\frac{z^2}{1-z^2}, \tag{2.56}$$

le propagateur s'écrit donc en fonction de z comme

$$\begin{aligned}
K\left(x_b,t_b,x_a,t_a\right) &= \left(\frac{\eta_a\eta_b\sqrt{\dot{\gamma}_a\dot{\gamma}_b}}{\pi\hbar}Z\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-z^2\right)^{-\frac{1}{2}} \\
&\quad\times\exp\left(\frac{i}{2\hbar}\left[m_bx_b^2\left(\frac{\dot{\alpha}_b\eta_{b-}\alpha_b\dot{\eta}_b}{\alpha_b\eta_b}\right)-m_ax_a^2\left(\frac{\dot{\alpha}_a\eta_{a-}\alpha_a\dot{\eta}_a}{\alpha_a\eta_a}\right)\right]\right) \\
&\quad\times\exp\left[-\frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)\right]\times\exp\left[\frac{2abz-\left(a^2+b^2\right)z^2}{1-z^2}\right].
\end{aligned} \tag{2.57}$$

On utilise la formule de Mehler [9] :

$$\left(1-z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\exp\left[\frac{\left(2abz-\left(a^2+b^2\right)z^2\right)}{1-z^2}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}H_n\left(a\right)H_n\left(b\right)\frac{z^n}{2^nn!}, \tag{2.58}$$

où $H_n\left(x\right)$ sont les polynome de Hérmite, donc le propagagteur devient sous la forme suivant :

$$\begin{aligned}
k\left(x_b,x_a,t\right) &= \left(Z\frac{m\left(t\right)\sqrt{\dot{\gamma}_b\dot{\gamma}_a}}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad\times\exp\left[\frac{i}{2\hbar}\left[\begin{array}{c} m_bx_b^2\left(\frac{\dot{\alpha}_b\eta_b-\alpha_b\dot{\eta}_b}{\alpha_b\eta_b}\right) \\ -m_ax_a^2\left(\frac{\dot{\alpha}_a\eta_a-\alpha_a\dot{\eta}_a}{\alpha_a\eta_a}\right)\end{array}\right]\right] \\
&\quad\times\exp\left[-\frac{i}{2\hbar}\left(m_b\dot{\gamma}_ax_b^2+m\dot{\gamma}_b{x_a}^2\right)\right] \\
&\quad\times\sum_{n=0}^{\infty}H_n\left(\sqrt{\frac{m\dot{\gamma}_b}{\hbar}}x_b\right)H_n\left(\sqrt{\frac{m\dot{\gamma}_a}{\hbar}}x_a\right)\frac{\exp\left[-i\phi\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]}{2^nn!}.
\end{aligned} \tag{2.59}$$

La comparaison du propagateur de l'équation (2.59) avec l'équation (2.20) donne

$$\begin{aligned}\Phi_n(x,t) &= \left(\frac{1}{2^n n!}\sqrt{\frac{m(t)\dot{\gamma}(t)}{\pi\hbar}}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\times \exp\left[\frac{im(t)}{2\hbar}\left\{\frac{\dot{\alpha}(t)\eta(t)-\alpha(t)\dot{\eta}(t)}{\alpha(t)\eta(t)}+i\dot{\gamma}(t)\right\}x^2\right] \\ &\times H_n\left(\sqrt{\frac{m(t)\dot{\gamma}(t)}{\hbar}}x\right). \qquad (2.60)\end{aligned}$$

L'orsque on fixe α ,ω et $\eta_a=\eta_b=\sqrt{m}$, la fonction d'onde générale devient sous la forme suivante

$$\begin{aligned}\Phi_n(x,t) &= \sqrt{\frac{1}{2^n n!}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}} \\ &\times \exp\left[\left(-\frac{m(t)\omega}{\hbar}\right)x^2\right]H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right), \qquad (2.61)\end{aligned}$$

L'équation (2.61) représente la fonction d'onde d'un oscillateur harmonique à une dimension.

Dans le but d'avoir la bonne forme des fonctions d'ondes c-à-d une forme en accord avec les résultats déja trouvé [16],[17] on pose

$$\frac{\alpha(t)}{\eta(t)}=\rho(t), \qquad (2.62)$$

avec :

$$\gamma(t)=\int_0^1\frac{1}{m(t_a)\rho(t_a)}dt, \qquad (2.63)$$

on remplace ces valeures dans l'équation de mouvement (2.42) on trouve :

$$\ddot{\rho}(t)+\dot{\rho}(t)\frac{\dot{m}(t)}{m(t)}+\omega^2(t)\rho(t)=\frac{1}{m^2(t)\rho^2(t)} \qquad (2.64)$$

finalment on trouve la fonction de d'onde sous la forme suivant :

$$\begin{aligned}\Phi_n(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\left(\frac{1}{\pi\hbar\rho^2(t)}\right)^{\frac{1}{4}} \\ &\times \exp\left[\left(\frac{im(t)}{2\hbar}\left(\frac{\dot{\rho}(t)}{\rho(t)}\right)+\frac{i}{m(t)\rho^2(t)}\right)x^2\right] \\ &\times H_n\left(\sqrt{\frac{1}{\hbar}}\frac{x}{\rho(t)}\right).\end{aligned} \tag{2.65}$$

et

$$E_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\int_0^1 \frac{dt'}{m(t')\rho^2(t')}. \tag{2.66}$$

2.2.3 Oscillateur Caldirola-kanai :

L'oscillateur de Caldirola-Kanai est un cas particulier de l'oscillateur harmonique amorti [11], son hamiltonien est exprimé comme

$$H(t) = \left[\frac{p^2}{2m}\right]\exp(-rt) + \frac{1}{2}m\omega^2\exp(rt)\,x^2, \tag{2.67}$$

où

$$m(t) = m\exp(rt), \tag{2.68}$$

avec m et r representes la masse constante et le coefficient d'amortissement.

Les coéfficient α et $\gamma(t)$ peuvent être deriveés à partir de (3.84)

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{\Omega}}, \tag{2.69}$$

$$\gamma(t) = \Omega(t), \tag{2.70}$$

où $\Omega(t)$ est la fréquence definit par

$$\Omega^2 = \omega^2 - \frac{r^2}{4}, \tag{2.71}$$

Pour trouver le propagateur de Caldirola-Kanai il suffit de remplacer les expressions $m(t), \alpha, \gamma(t)$ et $\eta_A = \eta_B = \eta(t) = \sqrt{m(t)}$dans l'expression du propagateur (2.47), d'où

$$\begin{aligned} K(x_b, t_b, x_a, t_a) &= \left(\frac{m\Omega \exp\left(\frac{r(t_B+t_A)}{2}\right)}{2\pi i\hbar \sin\Omega(t_b - t_a)}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\times \exp\left\{\frac{im\Omega}{2\hbar}\left[\begin{array}{c} \cot\Omega(t_b - t_a)\left(x_B^2 \exp(rt_B) + x_A^2 \exp(rt_A)\right) \\ -\frac{2x_a x_b \exp[r(t_a+t_b)/2]}{\sin\Omega(t_b-t_a)} \end{array}\right]\right\} \\ &\times \exp\left[\frac{imt}{4}\left(x_b^2 \exp(rt_b) - x_a^2 \exp(rt_a)\right)\right]. \end{aligned} \tag{2.72}$$

Fonction d'onde :

$$\begin{aligned} \Phi_n(x,t) &= \sqrt{\frac{1}{2^n n!}}\left(\frac{m\Omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \\ &\times \exp\left[-\frac{m}{2\hbar}\left(\Omega + i\frac{r}{4}\right)\exp(rt)\,x^2\right] H_n\left[\left(\frac{m\Omega}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{r}{2}t\right) x\right]. \end{aligned} \tag{2.73}$$

2.2.4 L'oscillateur harmonique avec une masse fortement pulsante

Le hamiltonien du système est définit par [11]

$$H = \frac{p^2}{2m}\sec^2(\nu t) + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \cos^2(\nu t), \tag{2.74}$$

avec

$$m = m\cos^2(\nu t), \tag{2.75}$$

où ν est une fréquence.

En remplacant

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{\Omega}}. \tag{2.76}$$

$$\gamma(t) = \Omega t, \tag{2.77}$$

où $\Omega(t)$ est definit par :

$$\Omega = \omega^2 + \nu^2. \tag{2.78}$$

On remplace donc $m(t), \alpha, \gamma(t)$ dans l'expression du propagateur (2.46) on obtient le propagateur

$$\begin{aligned} K(x_B, t_B, x_A, t_A) &= \left(\frac{m\Omega\cos(\nu t_a)\cos(\nu t_b)}{2\pi i\hbar\sin(\Omega(t_b - t_a))}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\times \exp\left[\frac{im\nu}{2\hbar}\left(x_b^2\cos^2(\nu t_b)\tan(\nu t_b) - x_a^2\cos^2(\nu t_a)\tan(\nu t_a)\right)\right] \\ &\times \exp\left[\begin{array}{c} \frac{im\Omega}{2\hbar\sin\Omega(t_b - t_a)}\left[x_b^2\cos^2(\nu t_b) + x_a^2\cos^2(\nu t_a)\right] \\ \times\cos\Omega(t_b - t_a) \\ -2x_a x_b\cos(\nu t_a)\cos(\nu t_b) \end{array}\right], \end{aligned} \tag{2.79}$$

ce propagateur peut être simplifié lorsque on définit $\upsilon = 0$ et $\Omega = \omega$,le résultat est réduit au cas d'un oscillateur harmonique simple.

Fonction d'onde :

On remplace la forme de α, γ dans l'équation du propagateur trouvé ; on trouve facilement la fonction d'onde sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \Phi_n(x,t) &= \sqrt{\frac{1}{2^n n!}}\left(\frac{m(t)\Omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \\ &\times \exp\left[\frac{im}{2\hbar}\left(\upsilon\tan(\nu t) + i\Omega\right)x^2\right] H_n\left(\sqrt{\frac{m(t)\Omega}{\hbar}}x\right). \end{aligned} \tag{2.80}$$

Chapitre 3

Autres méthodes pour la construction du propagateur

3.1 La Méthode de Schwinger

La méthode de Schwinger a été introduite en 1951 par J. Schwinger [18] dans le contexte de la théorie quantique des champs, et depuis, a été employée principalement dans des problèmes relativistes tel que le calcul de la fonction de Green pour le cas bosonique[20] et le cas fermionique [21],[22] et a été à l'époque rarement utilisée dans le cas non relativiste.

Schwinger a formulé un principe d'action conforme à la mécanique quantique, sa méthode a un aspect opératoriel ; elle a était rarement utilisée, bien qu'elle donne l'opportunité de trouver des fonctions de transformation (propagateurs) pour des problèmes compliqués avec précision et rigueur.

La difficulté majeure dans l'application de la méthode de Schwinger, réside dans la résolution des équations d'Heisenberg de mouvement qui sont des équations opératorielles souvent difficiles à résoudre, la question qui se pose est comment surmenter ce problème ? en 2007 un travail a été effectuer au sein de l'université de Annaba (UNIVERSITE BADJI MOKHTAR, ANNABA), ou il montre comment utiliser les transformations canoniques pour détourner le problème des équation de Heisenberg.

3.1.1 Formalisme mathématique pour les systèmes indépendants du temps

Tout d'abord on décrit cette méthode, en écrivant le propagateur de Feynman pour un système non relativiste indépendant du temps décri par un Hamiltonien $\hat{H}$

$$K(x_b, x_a, \tau) = \theta(\tau) \left\langle x_b \left| \hat{U}(\tau) \right| x_a \right\rangle, \tag{3.1}$$

où $U(\tau)$ est l'opérateur d'évolution donné par

$$\hat{U}(\tau) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\tau\right), \tag{3.2}$$

et $\theta(\tau)$ est la fonction step de $Heaviside$ définie par

$$\theta(\tau) = \tau - \tau_0 = \{^{0 \text{ pour } \tau \langle \tau_0}_{1 \text{ pour } \tau \geq \tau_0}. \tag{3.3}$$

pour $\tau \succ 0$, le propagateur de Feynman représenté par l'équation (1.1) vérifie l'équation diffèrentielle

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial\tau}K(x_b, x_a, \tau) = \left\langle x_b \left| \hat{H}\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\tau\right) \right| x_a \right\rangle. \tag{3.4}$$

En utilisant la relation entre opérateur dans la représentation de Heisenberg O_H et opérateur dans la représentation de Schrödinger O_S

$$\hat{O}_H(t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right)\hat{O}_S\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right), \tag{3.5}$$

on peut facilement montrer que le propagateur de Feynman prend la forme

$$K(x_b, x_a, \tau) = \langle x_b, \tau | x_a, 0\rangle, \tag{3.6}$$

où

$$\hat{X}(t)\left|x,t\right\rangle = x\left|x,t\right\rangle, \tag{3.7}$$

$$\left|x,t\right\rangle = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right)\left|x\right\rangle$$

$$\hat{X}(\tau)\left|x_b,\tau\right\rangle = x_b\left|x_b,\tau\right\rangle,$$

$$\hat{X}(0)\left|x_a,0\right\rangle = x_a\left|x_a,0\right\rangle, \tag{3.8}$$

$$\hat{X}(t) = \exp\left(i\frac{\hat{H}}{\hbar}t\right)\hat{X}\exp\left(-i\frac{\hat{H}}{\hbar}t\right), \tag{3.9}$$

l'équation (3.4) prend donc la forme

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial\tau}\left\langle x_b,\tau\left|x_a,0\right\rangle\right. = \left\langle x_b,\tau\left|\hat{H}\right|x_a,0\right\rangle,\ \ \tau\rangle 0. \tag{3.10}$$

Cette forme est très importante vu que c'est le point de départ pour appliquer la méthode de Schwinger, l'idée est de calculer l'élément de matrice dans l'expression précédente, en écrivant H en terme des opérateurs $\hat{X}(\tau)$ et $\hat{X}(0)$.

La méthode de Schwinger comporte les étapes de calcul suivantes :

Première étape

Elle se résume dans le fait de résoudre les équations de Heisenberg pour les opérateurs $\hat{X}(\tau)$ et $\hat{P}(\tau)$, ces équations sont données par

$$i\hbar\frac{d}{d\tau}\hat{X}(\tau) = \left[\hat{X}(\tau),\hat{H}\right] \text{ avec } \frac{d}{dt}\hat{X}(\tau) = \frac{\partial\hat{H}}{\partial p}, \tag{3.11}$$

$$i\hbar\frac{d}{d\tau}\hat{P}(\tau) = \left[\hat{P}(\tau),\hat{H}\right] \text{ avec } \frac{d}{dt}\hat{P}(\tau) = -\frac{\partial\hat{H}}{\partial X}. \tag{3.12}$$

Deuxième étape

Ecrire l'opérateur $\hat{H}$ en fonction de $\hat{X}(\tau)$ et $\hat{X}(0)$ dans un ordre où l'opérateur $\hat{X}(\tau)$ dois toujours apparître à gauche, ceci peut être fait en utilisant la relation de commutation $\left[\hat{X}(0), \hat{X}(\tau)\right]$, le Hamiltonien trouvé dans ce cas sera noté $\hat{H}_{ord}\left(\hat{X}(\tau), \hat{X}(0)\right)$, suite à cet ordre l'élément de matrice dans (2.10) peut être évalué

$$\begin{aligned} \left\langle x_b, \tau \left| \hat{H} \right| x_a, 0 \right\rangle &= \left\langle x_b, \tau \left| \hat{H}_{ord}\left(\hat{X}(\tau),\ \hat{X}(0)\right) \right| x_a, 0 \right\rangle, \\ &\equiv H(x_b,\ x_a, \tau) \left\langle x_b, \tau \left| x_a, 0 \right. \right\rangle, \end{aligned} \tag{3.13}$$

donc apartir des équations (3.10) et (3.13) on trouve :

$$\left\langle x_b, \tau \left| x_a, 0 \right. \right\rangle = C(x_a, x_b) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int H(x_a, x_b, \tau)\, d\tau \right), \tag{3.14}$$

où $C(x_b, x_a)$ est une constante d'intégration qu'on peut calculer dans la troisième étape

Troisième étape

Le calcul de $C(x_b, x_a)$ se fait en imposant les conditions

$$\left\langle x_b, \tau \left| \hat{P}(\tau) \right| x_a, 0 \right\rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_b} \left\langle x_b, \tau \left| x_a, 0 \right. \right\rangle, \tag{3.15}$$

$$\left\langle x_b, \tau \left| \hat{P}(0) \right| x_a, 0 \right\rangle = +i\hbar \frac{\partial}{\partial x_a} \left\langle x_b, \tau \left| x_a, 0 \right. \right\rangle, \tag{3.16}$$

où

$$\left[\hat{X}(\tau), \hat{P}(\tau)\right] = \left[\hat{X}(0), \hat{P}(0)\right] = i\hbar,$$

et pour la constante d'intégration exacte on utilise aussi la condition suivante sur le propagateur

$$\lim_{\tau \longrightarrow 0^{+}} \langle x_b, \tau \left| x_a, 0 \right\rangle = \delta \left(x_b - x_a \right). \tag{3.17}$$

3.1.2 Applications

Nous allons considérer quelques cas non relativistes, à citer, le cas d'une particule libre [23], le cas d'une particule soumise à un force constante [23], l'oscillateur Harmonique a une dimension et la généralisation de la méthode de Schwinger pour une action quadratique[23], aussi et comme cas relativiste, nous considérons le cas d'un électron dans un champ d'onde plane [24].

Propagateur d'une particule libre à une dimension

L'Hamiltonien d'une particule libre est donnée sous la forme

$$H = \frac{\hat{P}^2}{2m}, \tag{3.18}$$

a $t = 0$ l'Hamiltonien devient

$$H = \frac{P^2 \left(0 \right)}{2m}, \tag{3.19}$$

les équations de Heisenberg sont traduite par

$$\frac{dX \left(t \right)}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P} = \frac{P \left(t \right)}{m}, \tag{3.20}$$

$$\frac{dP \left(t \right)}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial X} = 0, \tag{3.21}$$

pour $t = \tau$, ce qui nous ramène à la condition :

$$P \left(t \right) = P \left(0 \right) = cte \tag{3.22}$$

et

$$X(t) = \frac{P}{m}t + X(0), \tag{3.23}$$

d'où

$$P(t) = m\frac{X(t) - X(0)}{t}$$

en calculant le commutateur

$$[X(0), X(t)] = i\hbar\frac{t}{m},$$

on peut réécrire l'opérateur Hamiltonien et avoir H_{ord} sous la forme

$$\hat{H}_{ord} = \frac{m}{2t^2}\left(X^2(t) + X^2(0) - 2X(t)X(0) - i\hbar\frac{t}{m}\right).$$

et en partant de (3.13) ,nous obtenons facilement

$$H_{ord}(x_b, x_a, t) = \frac{m}{2t^2}\left((x_b - x_a)^2 - i\hbar\frac{t}{m}\right),$$

et

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle x_b, t|\, x_a, 0\rangle = H_{ord}(x_b, x_a, t)\langle x_b, t|\, x_a, 0\rangle, \tag{3.24}$$

ce qui nous ramène à

$$\langle x_b, t|\, x_a, 0\rangle = \frac{C(x_b, x_a, t)}{\sqrt{t}}\exp\left[+\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2t}(x_b - x_a)^2\right],$$

en prenant en cosidération la condition (3.17) , on trouve

$$C = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar}}. \tag{3.25}$$

Finalement le propagateur relatif à un système libre est

$$K\left(x_b, x_a, t\right) = \left\langle x_b, t\left|x_a, 0\right.\right\rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t}}\exp\left[\frac{i}{\hbar}\frac{m}{2t}\left(x_b - x_a\right)^2\right] \tag{3.26}$$

Propagateur d'un oscillateur harmonique dans le cas unidimensionnel

Le Hamiltonien d'un oscillateur harmonique

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2\left(t\right)}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{X}^2\left(t\right), \tag{3.27}$$

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2\left(0\right)}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{X}^2\left(0\right), \tag{3.28}$$

les équations de Heisenberg s'écrivent sous la forme suivante

$$\frac{d}{dt}\hat{X}\left(t\right) = \frac{\partial\hat{H}}{\partial P} = \frac{\hat{P}\left(t\right)}{m}, \tag{3.29}$$

$$\frac{d}{dt}\hat{P}\left(t\right) = -\frac{\partial\hat{H}}{\partial X} = -m\omega^2\hat{X}^2\left(t\right), \tag{3.30}$$

qui sont des équations différentielles qui admettent les solutions suivantes

$$\hat{P}\left(t\right) = -m\omega\ \hat{X}\left(0\right)\sin\left(\omega t\right) + \hat{P}\left(0\right)\cos\left(\omega t\right), \tag{3.31}$$

$$\hat{X}\left(t\right) = \hat{X}\left(0\right)\cos\left(\omega t\right) + \frac{\hat{P}\left(0\right)}{m\omega}\sin\left(\omega t\right), \tag{3.32}$$

on écrit par la suite $\hat{P}\left(0\right)$ en fonction des opérateurs $\hat{X}\left(t\right)$ et $\hat{X}\left(0\right)$ ce qui donne

$$\hat{P}\left(0\right) = \frac{m\omega}{\sin\left(\omega t\right)}\left(\hat{X}\left(t\right) - \hat{X}\left(0\right)\cos\left(\omega t\right)\right), \tag{3.33}$$

et en remplaçant dans (3.30), nous obtenons

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \frac{1}{2}\frac{m\omega^2}{\sin^2(\omega t)}\left[\hat{X}^2(t)+\hat{X}^2(0)\cos^2(\omega t)-\left(\hat{X}(0)\hat{X}(t)+\hat{X}(t)\hat{X}(0)\right)\cos(\omega t)\right] \\ &\quad +\frac{1}{2}m\omega^2\hat{X}^2(0) \end{aligned} \tag{3.34}$$

le comutateur

$$[X(0), X(t)] = \frac{i\hbar}{m\omega}\sin(\omega t), \tag{3.35}$$

nous permet d'avoir la forme de l'opérateur $\hat{H}_{ord}$

$$\hat{H}_{ord} = \frac{1}{2}\frac{m\omega^2}{\sin^2(\omega t)}\left[\hat{X}(t)^2+\hat{X}(0)^2-2\hat{X}(t)\hat{X}(0)\cos(\omega t)\right]-\frac{i\hbar\omega}{2}\cot(\omega t), \tag{3.36}$$

finalement, pour trouver le propagateur de Feynman on a

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle x_b, t\,| x_a, 0\rangle = \hat{H}_{ord}(x_b, x_a, t)\langle x_b, t\,| x_a, 0\rangle, \tag{3.37}$$

qui nous ramène à l'expression du propagateur

$$\langle x_b, t\,| x_a, 0\rangle = \frac{C(x_b, xa)}{\sqrt{\sin(\omega t)}}\exp\left[\frac{i}{2\hbar}\frac{m\omega}{\sin(\omega t)}\left[\left(x_b^2+x_a^2\right)\cos(\omega t)-2x_bx_a\right]\right], \tag{3.38}$$

où $C(x_B, x_A)$ est la constante d'intégration qui est indépendante de x_b et x_a c-à-d :

$$\frac{\partial C(x_b, x_a)}{\partial x_a} = \frac{\partial C(x_b, x_a)}{\partial x_b} = 0, \tag{3.39}$$

donc on trouve :

$$C = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar}}, \tag{3.40}$$

finalement le propagateur relatif à un oscillateur Harmonique à une dimension s'écrit

$$\langle x_b, t\,| x_a, 0\rangle = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin(\omega t)}}\exp\left[\frac{i}{\hbar}\frac{m\omega}{2\sin(\omega t)}\left(\left(x_b^2+x_a^2\right)\cos(\omega t)-2x_bx_a\right)\right] \tag{3.41}$$

3.2 Généralisation de la méthode de Schwinger aux systèmes quadratiques 1D dépendants du temps

3.2.1 Système Général Dépendant du Temps

Les équations d'Heisenberg de mouvement sont souvent difféciles à résoudre à cause de leurs natures opératorielles. Ceci dit, un système donné peut être traité d'une manière différente par rapport aux autres systèmes en apliquant une téchnique différente pour la même méthode, la méthode de Schwinger, cet aspect a rendu cette méthode de calcul trés compliquée.

Pour contourner le problème, T.Boudjdaâ et M. Bouloudnine [23]ont utilisé les transformations canoniques pour simplifier et transformer des problèmes complexes en systèmes simples et ils ont prix les systèmes quadratiques dépendants du temps comme exemple pour leurs importances en physique.

Dans cette partie, nous allons évaluer le propagateur d'un système quadratique 1D dans le cas le plus général au moyen des transformations canoniques quantiques sans résoudre les équations d'Heisenberg de mouvement.

Transformation du Hamiltonien du système en celui d'une particule libre

L'Hamiltonien du systeme est donné par

$$H = g_1(t)\, p^2 + g_2(t)\, x^2 + g_3(t)\, xp + g_4(t)\, px + g_5(t)\, p + g_6(t)\, x + g_7(t)\,, \tag{3.42}$$

où $g_i(t)$ sont des fonctions arbitraires qui dépendent du temps.

L'étude de ce système est évidemment compliquée, l'idée qui se présente est d'utiliser les transformations canoniques pour transformer ce système en un système simple et plus précisément en un système libre, par la suite nous appliquant le principe d'action quantique qui sert à déterminer le propagateur de Feynman du système dit fonction de transformation. Cette variation s'écrit dans la représentation x comme

$$\delta W = p_b \delta x_b - p_a \delta x_a - H_b \delta t_b + H_a \ \delta t_a, \tag{3.43}$$

où H est l'Hamiltonien du système et x_a et x_b sont respectivement les coordonnées initiales et finales qui correspondent respectivement aux instants initial et final t_a et t_b.

Considérons maintenant la transformation canonique suivante :

$$x = \sqrt{(2mg_1)} f_1(t) X + f_2(t), \tag{3.44}$$

$$p = \frac{P}{\sqrt{(2mg_1)} f_1(t)} + f_3(t), \tag{3.45}$$

avec $f_i(t)$ une fonction arbitraire qui dépend du temps et m la masse de la particule. Les fonctions génératrices relatives à cette transformation canonique sont

$$\begin{aligned} F_2 &= \frac{(xP + Px)}{2\sqrt{(2mg_1)} f_1(t)} + f_3(t) x - \frac{f_2(t) P}{\sqrt{(2mg_1)} f_1(t)} \\ &= \frac{1}{2}(XP + PX) + \sqrt{(2mg_1)} f_3(t) f_1(t) X + f_3(t) f_2(t) \end{aligned} \tag{3.46}$$

et

$$F_1 = \sqrt{(2mg_1)} f_3(t) f_1(t) X + f_3(t) f_2(t). \tag{3.47}$$

Par conséquant, le nouvel Hamiltonien devient :

$$
\begin{aligned}
\hat{H}(P,X,t) &= \frac{P^2}{2mf_1^2}+2mg_1g_2f_1^2X^2+\frac{1}{2}\left(g_3+g_4-\frac{\dot{f}_1}{f_1}-\frac{\dot{g}_1}{2g_1}\right)(PX+XP) \\
&+\frac{\left(2g_1f_3+g_3f_2+g_4f_2+g_5-\dot{f}_2\right)}{\sqrt{(2mg_1f_1^2)}}P \\
&+\sqrt{(2mg_1f_1^2)}\left(2g_2f_2+g_3f_3+g_4f_3+g_6+\dot{f}_3\right)X \\
&+g_1f_3^2+g_2f_2^2+g_3f_2f_3+g_4f_2f_3+g_5f_3+g_6f_2 \\
&+g_7+f_2\dot{f}_3+\frac{i\hbar}{2}(g_3-g_4), \qquad (3.48)
\end{aligned}
$$

où $\dot{f}_i=\frac{\partial f_i}{\partial t}$.

Les termes linéaires dans ce nouvel Hamiltonien doivent être éliminé, pour cela le système d'équations différentielles suivant doit être résolu

$$\dot{f}_2-f_2(g_3+g_4)-2g_1f_3=g_5, \qquad (3.49)$$

$$\dot{f}_3+2g_2f_2+f_3(g_3+g_4)=-g_6. \qquad (3.50)$$

Nous obtenons

$$\hat{H}(P,X,t)=\frac{P^2}{2mf_1^2}+2mg_1g_2f_1^2X^2+\frac{1}{2}\left(g_3+g_4-\frac{\dot{f}_1}{f_1}-\frac{\dot{g}_1}{2g_1}\right)(PX+XP)+\Gamma(t). \qquad (3.51)$$

Et la variation de l'opérateur action est

$$
\begin{aligned}
\delta W &= P_b\delta X_b-\hat{H}_b\hat{\delta}t_b\ -P_a\delta X_b+\hat{H}_a\ \delta t_a+\delta\left(F_{1b}-F_{1a}\right) \\
&= P_b\delta X_b-\hat{H}_b\hat{\delta}t_b-P_a\delta X_a+\hat{H}_a\ \delta t_a+\delta\left[\sqrt{2mg_{b1}}f_{1b}f_{3b}X_b+f_{b2}f_{3b}\right. \\
&\quad \left.-\sqrt{2mg_{a1}}f_{1a}f_{3a}X_b\ -f_{2a}f_{3a}\right], \qquad (3.52)
\end{aligned}
$$

où

$$\Gamma(t) = g_1 f_3^2 + g_2 f_2^2 + (g_3 + g_4) f_2 f_3 + g_5 f_3 + g_6 f_2 + g_7 + f_2 \dot{f}_3 + \frac{i\hbar}{2}(g_3 - g_4). \tag{3.53}$$

Rappelons que notre but c'est de transformer le système initiale en un système libre, ce qui se fait en appliquant une autre transformation canonique définie par

$$X = X, \tag{3.54}$$

$$\tilde{P} = P + m f_1^2 \left(g_3 + g_4 - \frac{\dot{f}_1}{f_1} - \frac{\dot{g}_1}{2g_1} \right) X. \tag{3.55}$$

Les fonctions génératrices pour cette transformation sont

$$\tilde{F}_2 = \frac{1}{2}\left(X\tilde{P} + \tilde{P}X \right) - \frac{1}{2} m f_1^2 \left(g_3 + g_4 - \frac{\dot{f}_1}{f_1} - \frac{\dot{g}_1}{2g_1} \right) X^2, \tag{3.56}$$

$$\tilde{F}_1 = -\frac{1}{2} m f_1^2 \left(g_3 + g_4 - \frac{\dot{f}_1}{f_1} - \frac{\dot{g}_1}{2g_1} \right). \tag{3.57}$$

finalement notre Hamiltonien s'écrit

$$\tilde{H}\left(\tilde{P}, X, t\right) = \frac{\tilde{P}^2}{2m f_1^2} + \frac{m}{2 f_1^2} \Omega^2(t) X^2 + \Gamma(t), \tag{3.58}$$

où

$$\Omega^2(t) = f_1^3 \left[\ddot{f}_1 + f_1 \left(\frac{\ddot{g}_1}{2g_1} - \frac{3\dot{g}_1^2}{4g_1^2} + 4 g_2 g_1 - (g_3 + g_4)^2 - (\dot{g}_3 + \dot{g}_4) + \frac{\dot{g}_1}{g_1}(g_3 + g_4) \right) \right]. \tag{3.59}$$

Maintenant, nous effectuons la transformation temporelle suivante

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{f_1^2}, \tag{3.60}$$

où l'Hamiltonien vérifie :

$$H\left(\tilde{P},X,\tau\right)=f_1^2\tilde{H}\left(\tilde{P},X,t\right), \tag{3.61}$$

et il prend la forme

$$H=\frac{\tilde{P}^2}{2m}+\frac{1}{2}m\Omega^2X^2+f_1^2\Gamma. \tag{3.62}$$

D'où, la variation de l'opérateur action exprimée dans la nouvelle représentation selon

$$\begin{aligned}\delta W &= \tilde{P}_b\delta X_b-H_b\delta\tau_b-\tilde{P}_a\delta X_a+H_a\delta\tau_a+\delta\left[\left(F_{1b}-F_{1a}+\hat{F}_{1b}-\hat{F}_{1a}\right)\right]\\ &= \tilde{P}_b\delta X_b-H_b\delta\tau_b-\tilde{P}_a\delta X_a+H_a\delta\tau_a\\ &\quad+\delta\left\{\left(\sqrt{2mg_{1b}}\right)f_{1b}f_{3b}X_b\ +f_{2b}f_{3b}-\left(\sqrt{2mg_{a1}}\right)f_{1a}f_{1a}X-f_{2a}f_{3a}\right.\\ &\quad-\frac{mf_{1b}}{2}\left[f_{1b}\left((g_{3b}+g_{4b})-\frac{\dot{g}_{1b}}{2g_{1b}}\right)-\dot{f}_{1b}\right]X_b^2\\ &\quad\left.+\frac{mf_{1a}}{2}\left[f_{1a}\left((g_{3a}+g_{4a})-\frac{\dot{g}_{1a}}{2g_{1a}}\right)-\dot{f}_{1a}\right]X_a^2\right\}.\end{aligned} \tag{3.63}$$

Considérons que $\Omega^2(t)=0$, ceci nous ramène à résoudre l'équation différentielle homogène du second ordre suivant

$$\ddot{f}_1+\zeta\left(t\right)f_1\left(\tau\right)=0, \tag{3.64}$$

où

$$\zeta\left(t\right)=\frac{\ddot{g}_1}{2g_1}-\frac{3\dot{g}_1^2}{4g_1}+4g_2g_1-\left(g_3+g_4\right)^2-\left(\dot{g}_3+\dot{g}_4\right)+\frac{\dot{g}_1}{g_1}\left(g_3+g_4\right), \tag{3.65}$$

nous obtenons l'Hamiltonien d'une particule libre avec un terme suplémentaire dépendant du temps

$$H=H_0+f_1^2\Gamma, \tag{3.66}$$

et

$$H_0 = \frac{\tilde{p}^2}{2m} \ . \tag{3.67}$$

La variation de l'opérateur action s'écrit

$$\begin{aligned}
\delta W &= \tilde{P}_b \delta X_b - H_{0b}\delta\tau_b - \tilde{P}_a \delta X_a + H_{0a}\delta\tau_a + \delta \left\{ \sqrt{2mg_{1b}} f_{1b} f_{3b} X_b \ + f_{2b} f_{3b} - \sqrt{2mg_{1a}} f_{1a} f_{3a} X_a \right. \\
&\quad - f_{2a} f_{3a} - \frac{m f_{1b}}{2} \left[f_{1b} \left((g_{3b} + g_{4b}) - \frac{\dot{g}_{1b}}{2g_{1b}} \right) - \dot{f}_{1b} \right] X_b^2 \\
&\quad \left. + \frac{m f_{1a}}{2} \left[f_{1a} \left((g_{3a} + g_{4a}) - \frac{\dot{g}_{1a}}{2g_{1a}} \right) - \dot{f}_{1a} \right] X_a^2 - \Lambda \right\} ,
\end{aligned} \tag{3.68}$$

où
$$\Lambda = \int_{\tau_a}^{\tau_b} f_1^2 \Gamma d\tau = \int_{t_a}^{t_b} \Gamma dt \ \ \text{et} \ \ \Gamma \text{ vérifie (3.53)}$$

Evaluation de la fonction de transformation (propagateur)

La variation de l'action du système étudié est connue dans le nouveau système de coordonnés, nous allons appliquer le principe d'action quantique

$$\delta \left\langle X_b, \tau_b \left| X_a, \tau_a \right. \right\rangle = \frac{i}{\hbar} \left\langle X_b, \tau_b \left| \delta W \right| X_a, \tau_a \right\rangle , \tag{3.69}$$

la fonction δW s'écrit en fonction de $X(t), X(0)$ (par convention avec la première partie du chapitre) telle que $X(t)$ doit apparaitre sur le côté gauche et $X(0)$ doit apparaître sur le côté droit et cela se fait à l'aide de la relation de commutation entre $X(t) \equiv X_b$ et $X(0) \equiv X_a$

$$\delta \left\langle X_b, \tau_b \left| X_a, \tau_a \right. \right\rangle = \frac{i}{\hbar} \delta w \left(X_b, X_a, \tau_b, \tau_a \right) \left\langle X_b, \tau_b \left| X_a, \tau_a \right. \right\rangle , \tag{3.70}$$

où $\delta w(X_b, X_a, \tau_b, \tau_a)$ est la valeur propre de la variation de l'opérateur action bien ordonnée. Nous obtenons aprés intégration le propagateur de Feynman du système en fonction du propagateur de Feynman de la particule libre

$$\begin{aligned}
\langle X_b,\tau_b\,|X_a,\tau_a\rangle &= C\,\langle X_b,\tau_b\,|X_a,\tau_a\rangle_{pl} \\
&\times\exp\frac{i}{\hbar}\left[\sqrt{2mg_{1b}}f_{1b}f_{3b}X_b\ +f_{2b}f_{3b}\right. \\
&-\left(\sqrt{2mg_{1a}}\right)f_{1a}f_{3a}X_a-f_{2a}f_{3a} \\
&-\frac{mf_{1b}}{2}\left(f_{1b}\left((g_{3b}+g_{4b})-\frac{\dot g_{1b}}{2g_{1b}}\right)-\dot f_{1b}\right)X_b^2 \\
&\left.+\frac{mf_{1a}}{2}\left(f_{1a}\left((g_{3a}+g_{4a})-\frac{\dot g_{a}}{2g_{a}}\right)-\dot f_{1a}\right)X_a^2-\Lambda\right], \qquad (3.71)
\end{aligned}$$

où $\langle X_b,\tau_b\,|X_a,\tau_a\rangle_{pl}$ est le propagateur de Feynman de la particule libre

$$\langle X_b,\tau_b\,|X_a,\tau_a\rangle_{pl}=\left(\frac{2\pi i\hbar\,(\tau_b-\tau_a)}{m}\right)^{-\frac{1}{2}}\exp\left[\frac{im}{2\hbar}\frac{(X_b-X_a)^2}{(\tau_b-\tau_a)}\right], \qquad (3.72)$$

et C est constante qui doit être calculée.

En utilisant la transformation canonique (3.44) et(3.45) et la transformation temporelle (3.60)

$$\tau_b-\tau_a=\int_{t_a}^{t_b}\frac{dt}{f_1^2}. \qquad (3.73)$$

On trouve

$$\begin{aligned}
\langle x_b,t_b\,|x_a,t_a\rangle &= C\left(\frac{2\pi}{m}i\hbar\int_{t_a}^{t_b}\frac{dt}{f_1^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\exp\left[\frac{i}{4\hbar}\left(\frac{(x_b-f_{2b})}{\sqrt{g_{1b}}f_{1b}}-\frac{(x_a-f_{2a})}{\sqrt{g_{1a}}f_{1a}}\right)^2\Big/\int_{t_a}^{t_b}\frac{dt}{f_1^2}\right] \\
&\times\exp\frac{i}{\hbar}\left[f_{3b}x_b-f_{3a}x_a-\Lambda\right. \\
&-\frac{(x_b-f_{2b})^2}{8g_{1b}}\left(2\,(g_{3b}+g_{4b})-\frac{\dot g_{1b}}{g_{1b}}-\frac{2\dot f_{1b}}{f_{1b}}\right) \\
&\left.+\frac{(x_a-f_{2a})^2}{8g_{1a}}\left(2\,(g_{3a}+g_{4a})-\frac{\dot g_{1a}}{g_{1a}}-\frac{2\dot f_{1b}}{f_{1a}}\right)\right]. \qquad (3.74)
\end{aligned}$$

Après avoir utilisé l'expression

$$\lim_{\varepsilon\rightarrow 0}(\varepsilon\pi)^{\frac{-1}{2}}\exp\left[-\frac{(x_b-x_a)^2}{\varepsilon}\right]=\delta(x_b-x_a)\,, \tag{3.75}$$

et les propriétés de la fonction delta, la condition de normalisation

$$\lim_{t_b\rightarrow t_a}\langle x_b,t_b\,|x_a,t_a\rangle=\delta(x_b-x_a)\,, \tag{3.76}$$

nous permet de calculer le coefficient C.

Nous obtenons finalement propagateur de Feynman du système

$$\begin{aligned}\langle x_b,t_b\,|x_a,t_a\rangle &= \left(4\pi i\hbar\; g_{1a}^{\frac{1}{2}}\; g_{1b}^{\frac{1}{2}}\; f_{1b}f_{1a}\int_{t_a}^{t_b}\frac{dt}{f_1^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\\ &\times\exp\left[\frac{i}{4\hbar}\left[\left(\frac{(x_b-f_{2b})}{\sqrt{g_{1b}}f_{1b}}-\frac{(x_a-f_{2a})}{\sqrt{g_{1a}}f_{1a}}\right)^2\Big/\int_{t_a}^{t_b}\frac{dt}{f_1^2}+4\left(f_{3b}x_b-f_{3a}x_a\right)\right.\right.\\ &-\frac{(x_b-f_{2b})^2}{8g_{1b}}\left(2\left(g_{3b}+g_{4b}\right)-\frac{\dot g_{1b}}{g_{1b}}-\frac{2\dot f_{1b}}{f_{1b}}\right)\\ &\left.\left.+\frac{(x_a-f_{2a})^2}{8g_{1a}}\left(2\left(g_{3a}+g_{4a}\right)-\frac{\dot g_{1a}}{g_{1a}}-\frac{2\dot f_{1b}}{f_{1a}}\right)-\Lambda\right]\right],\end{aligned} \tag{3.77}$$

où $\Lambda=\int_{t_a}^{t_b}\Gamma dt$, Γ satisfait (3.53) et les fonctions $f_i(t)$ sont les solutions des équations différentielles (3.64) et (3.49), (3.50).

L'équation (3.77) représente le propagateur de Feynman exact du système quadratique 1D dépendant du temps relatif à l'Hamiltonien (3.42).

3.2.2 Système 1D dépendant du temps sans termes linéaires et applications à quelques cas particuliers

La fonction de transformation du système (propagateur)

On considère le cas d'un système quadratique 1D dépendant du temps sans termes linéaires

$$H = g_1(t)\, p^2 + g_2(t)\, x^2 + g_3(t)\, xp + g_4(t)\, px. \tag{3.78}$$

c'est-à-dire dans l'Hamiltonien (3.42) on a

$$g_5(t) = g_6(t) = g_7(t) = 0. \tag{3.79}$$

L'absence du terme linéaire dans l'Hamiltonien simplifie énormément les calcules car les fonctions $f_2(t)$ et $f_3(t)$ dans la transformation canonique (3.44) et (3.45) sont utilisées juste pour éliminer les termes linéaires, il devient inutile de résoudre le système d'équations différentielles (3.49) et (3.50) Dans ce cas, nous éffectuerons la transformation canonique suivante

$$x = \sqrt{2mg_1} f_1(t)\, X, \tag{3.80}$$

$$p = \frac{P}{\sqrt{2mg_1} f_1(t)}. \tag{3.81}$$

en considérant

$$f_2(t) = f_3(t) = 0. \tag{3.82}$$

Il en résulte l'annihilation de ces fonctions, le propagateur de Feynman (3.77) alors s'exprime comme

$$\begin{aligned}\langle x_b,t_b\left|x_a,t_a\right\rangle &= \left(4\pi i\hbar\sqrt{g_{1a}}\sqrt{g_{1b}}f_{1b}f_{1a}\int\limits_{t_a}^{t_b}\frac{dt}{f_1^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &\times\exp\left[\frac{i}{4\hbar}\left(\frac{x_b}{\sqrt{g_{1b}}f_{1b}}-\frac{x_a}{\sqrt{g_{1a}}f_{1a}}\right)^2/\int\limits_{t_a}^{t_b}\frac{dt}{f_1^2}\right] \\ &\times\exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(-\frac{x_b^2}{8g_{1b}}\left(2\left(g_{3b}+g_{4b}\right)-\frac{\dot{g}_{1b}}{g_{1b}}-\frac{2\dot{f}_{1b}}{f_{1b}}\right)\right.\right. \\ &\left.\left.+\frac{x_a^2}{8g_{1a}}\left(2\left(g_{3a}+g_{4a}\right)-\frac{\dot{g}_{1a}}{g_{1a}}-\frac{2\dot{f}_{1a}}{f_{1a}}\right)-\int\limits_{t_a}^{t_b}\frac{i\hbar\left(g_3-g_4\right)}{2}dt\right)\right]\end{aligned} \tag{3.83}$$

où $f_1(t)$ est la solution de l'équation différentielle (3.64).

Cas particuliers

Oscillateur Harmonique : L'opérateur Hamiltonien du système prend la forme

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2. \tag{3.84}$$

Avec les fonctions $g_i(t)$ prennent les valeurs suivantes

$$g_1(t)=\frac{1}{2m}\ ,\ g_2(t)=\frac{1}{2}m\omega^2,\ \ g_3(t)=\ g_4(t)=0. \tag{3.85}$$

L'équation différentielle (3.64) donne une équation homogène du second ordre avec un coefficient constant

$$\ddot{f}_1+\omega^2f_1=0. \tag{3.86}$$

Une équation qui admet la solution $f_1=\alpha\cos\omega t+\beta\sin\omega t$,puisque la fonction de transformation est indépendante du choix des constantes arbitraires. Donc la solution la plus simple est $f_1=\alpha\cos\omega t$, on la remplace directement dans l'expression (3.83) et nous obtenons le propagateur de connue d'un oscillateur harmonique

$$\langle x_b, t_b \left| x_a, t_a \right\rangle = \left[\begin{array}{c} \left(\frac{4\pi i\hbar \sin\omega(t_b - t_a)}{m\omega}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ \times \exp\left\{ \frac{im\omega}{2\hbar} \cot\left[\omega\left(t_b - t_a\right)\right] \left(x_b^2 + x_a^2 - \frac{2x_b x_a}{\cos\omega(t_b - t_a)} \right) \right\} \end{array} \right]. \tag{3.87}$$

Oscilateur Harmonique avec fréquence qui dépend du temps : Dans ce cas, nous allons évaluer le propagateur de d'un oscillateur harmonique avec une fréquence qui dépend du temps au moyen des transformations canoniques quantiques.

L'opérateur Hamiltonien du système est donné par l'expression

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2\left(t\right) x^2, \tag{3.88}$$

avec $\omega\left(t\right)$ une fréquence dépendante du temps.

A partir de (3.42) les fonctions $g_i(t)$

$$g_1\left(t\right) = \frac{1}{2m},\ g_2\left(t\right) = \frac{1}{2} m\omega^2\left(t\right),\ g_3\left(t\right) = \ g_4\left(t\right) = 0. \tag{3.89}$$

La substitution de ces équations dans (3.64) nous donne

$$\ddot{f}_1 + \omega^2\left(t\right) f_1 = 0, \tag{3.90}$$

qui admet des solutions dépendantes de l'expression de la fréquence $\omega\left(t\right)$.

Dans ce cas, le propagateur de Feynman de l'oscillateur harmonique avec une fréquence dépendante du temps est

$$\begin{aligned} \langle x_b, t_b \left| x_a, t_a \right\rangle \ &= \ \left[\frac{2\pi i\hbar}{m} f_{1b} f_{1a} \int_{t_a}^{t_b} \frac{dt}{f_1^2} \right]^{\frac{-1}{2}} \\ &\times \exp\left\{ \frac{im}{2\hbar} \left(\left(\frac{x_b}{f_{1b}} + \frac{x_a}{f_{1a}} \right)^2 / \int_{t_a}^{t_b} \frac{dt}{f_1^2} + \frac{\dot{f}_{1b}}{f_{1b}} x_b^2 - \frac{\dot{f}_{1a}}{f_{1a}} x_a^2 \right) \right\}. \end{aligned} \tag{3.91}$$

Considérons que dans (3.59) $\Omega^2(t) = f_1^3\left(\ddot{f}_1 + \omega^2(t) f_1\right) = \omega_0$, où ω_0 est une constante ,ce choix permet de transformer l'Hamiltonien du systéme en celui d'un oscillateur harmonique simple et nous obtenons

$$\begin{aligned}
\langle x_b, t_b | x_a, t_a \rangle &= \left[\frac{2\pi i\hbar}{m\omega_0} f_{1b} f_{1a} \sin\left(\int_{t_a}^{t_b} \frac{\omega_0 dt}{f_1^2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \\
\times & \exp\left[\frac{im}{2\hbar}\omega_0 \cot\left(\int_{t_a}^{t_b} \frac{\omega_0 dt}{f_1^2}\right)\left(\frac{x_b^2}{f_{1b}^2} + \frac{x_a^2}{f_{1a}^2} - \frac{2x_b x_a}{f_{1a} f_{1b} \cos\left(\int_{t_a}^{t_b} \frac{\omega_0 dt}{f_1^2}\right)}\right)\right] \\
& \times \exp\left[\frac{im}{2\hbar}\left(\frac{\dot{f}_{1b}}{f_{1b}} x_b^2 - \frac{\dot{f}_{1a}}{f_{1a}} x_a^2\right)\right], \qquad (3.92)
\end{aligned}$$

qui est exactement le résultat obtenu pour le même système par la méthode des intégrales de chemin [25].

Oscillateur Harmonique avec masse et fréquence qui dépend du temps : L'Hamiltonien d'un oscillateur harmonique avec une masse et une fréquence qui dépendent du temps est donnée par la forme :

$$H = \frac{p^2}{2mh_1(t)} + \frac{1}{2} m\omega^2 h_2(t) x^2, \qquad (3.93)$$

où les fonctions $h_i(t)$ sont des fonctions arbitraires qui dépendent du temps, et m et ω sont, respectivement, la masse et la fréquence qui sont des constantes. L'équation (3.42) permet d'avoir les fonctions $g_i(t)$ qui prennent les formes

$$g_1(t) = \frac{1}{2mh_1(t)}, \quad g_2(t) = \frac{1}{2} m\omega^2 h_2(t), \quad g_3(t) = g_4(t) = 0. \qquad (3.94)$$

Par conséquence l'équation (3.64) prend la forme

$$\ddot{f}_1 + \left[-\frac{\ddot{h}_1(t)}{2h_1(t)} + \frac{\dot{h}_1^2(t)}{4h_1^2(t)} + \omega^2 \frac{h_2(t)}{h_1(t)} \right] f_1 = 0. \tag{3.95}$$

Maintenant nous rappelons la forme générale (3.83) pour écrire finalement le propagateur de Feynman d'un oscillateur Harmonique avec une masse et une fréquence qui dépendent du temps tel que

$$\begin{aligned} \langle x_b, t_b | x_a, t_a \rangle &= \left[\frac{2\pi i\hbar}{m} f_{1b} f_{1a} h_{1a}^{-\frac{1}{2}} h_{1a}^{-\frac{1}{2}} \int_{t_a}^{t_b} \frac{dt}{f_1^2} \right]^{\frac{-1}{2}} \\ & \exp\left\{ \frac{i}{4\hbar} \left[\left(\frac{h_{1b}^{-\frac{1}{2}} x_b}{f_{1b} g(t_b)^{\frac{1}{2}}} - \frac{h_{1a}^{-\frac{1}{2}} x_a}{f_{1a} g(t_a)^{\frac{1}{2}}} \right)^2 / \int_{t_a}^{t_b} \frac{dt}{f_1^2} + \left(\frac{\dot{f}_{1b}}{f_{\ 1b}} - \frac{\dot{h}_{1b}}{2h_{1b}} \right) h_{1b} x_b^2 \right.\right. \\ & \left.\left. - \left(\frac{\dot{f}_{1a}}{f_{1a}} - \frac{\dot{h}_{1a}}{2h_{1a}} \right) h_{1a} x_a^2 \right] \right\}, \end{aligned} \tag{3.96}$$

Oscillateur Harmonique amortie : L'Hamiltonien d'un oscillateur harmonique amorti est donné par

$$H = \frac{p^2}{2m \exp 2\xi(t)} + \frac{1}{2} m\omega^2 \exp 2\xi(t)\, x^2. \tag{3.97}$$

Pour trouver le propagateur de Feynman d'un oscillateur harmonique amorti il suffit de remplacer

$$h_1(t) = h_2(t) = \exp 2\xi(t), \tag{3.98}$$

dans (3.96),le propagateur de Feynman est donc sous la forme

$$
\begin{aligned}
\langle x_b, t_b \left| x_a, t_a \right\rangle &= \left[\frac{2\pi i\hbar f_{1b} f_{1a}}{m \exp\left[\xi\left(t_b\right)+\xi\left(t_a\right)\right]_1} \int_{t_a}^{t_b} \frac{dt}{f_1^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \\
& . \times \exp\left\{ \frac{im}{2\hbar} \left[\left(\frac{x_b \exp\left(\xi\left(t_b\right)\right)}{f_{1b}} - \frac{x_a \exp\left(\xi\left(t_a\right)\right)}{f_{1a}} \right)^2 / \int_{t_a}^{t_b} \frac{dt}{f_1^2} + \left(\frac{\dot{f}_{1b}}{f_{1b}} - \dot{\xi}\left(t_b\right) \right) x_b^2 \right.\right. \\
& \left.\left. \times \exp\left[2\xi\left(t_b\right)\right] - \left[\frac{\dot{f}_{1a}}{f_{1a}} - \dot{\xi}\left(t_a\right) \right] x_a^2 \exp\left[2\xi\left(t_a\right)\right] \right] \right\}, \qquad (3.99)
\end{aligned}
$$

où la fonction f_1 est la solution de l'équation différentielle suivante

$$
\ddot{f}_1 + \left(-\ddot{\xi}\left(t\right) - \dot{\xi}^2\left(t\right) + \omega^2 \right) f_1 = 0. \qquad (3.100)
$$

Oscillateur de Caldirola-Kanai : L'oscillateur de Caldirola-Kanai est un cas particulier de l'oscillateur harmonique amorti, son Hamiltonien est exprimé comme

$$
H = \frac{p^2}{2m \exp\left(2\alpha t\right)} + \frac{1}{2} m \exp\left(2\alpha t\right) \omega^2 x^2. \qquad (3.101)
$$

nous considérons que $\xi(t)$ dans (3.99) est une fonction linéaire telle que $\xi(t) = \alpha t$. Ainsi, l'équation différentielle (3.100) devient

$$
\ddot{f}_1 + \left(\omega^2 - \alpha^2\right) f_1 = 0. \qquad (3.102)
$$

La solution la plus simple est alors

$$
f = \cos\left(\sqrt{\omega^2 - \alpha^2} t\right). \qquad (3.103)
$$

Par substitution dans (3.99) nous obtenons ainsi le propagateur de feynman de l'oscillateur de Caldirola-Kanai

$$\begin{aligned}
\langle x_b, t_b \left| x_a, t_a \right\rangle &= \left[\frac{2\pi i\hbar \sin\left[\left(\sqrt{\omega^2-\alpha^2}\right)(t_b-t_a)\right]}{m \exp\left(\alpha\left(t_b+t_a\right)\right)\sqrt{\omega^2-\alpha^2}} \right]^{-\frac{1}{2}} \\
& \exp\left\{ \frac{im}{2\hbar} \left[\sqrt{\omega^2-\alpha^2} \times \cot\left[\sqrt{\omega^2-\alpha^2}\left(t_b-t_a\right)\right] \right.\right. \\
& \times \left(x_b^2 \exp\left(2\alpha t_b\right) + x_a^2 \exp\left(2\alpha t_a\right) - \frac{2x_b x_a \exp\left(\alpha\left(t_b+t_a\right)\right)}{\cos\left[\sqrt{\omega^2-\alpha^2}\left(t_b-t_a\right)\right]} \right) \\
& \left.\left. - \ \alpha \left(\exp\left(2\alpha t_b\right) x_b^2 - \exp\left(2\alpha t_a\right) x_a^2 \right) \right] \right\}. \qquad (3.104)
\end{aligned}$$

Cette expression est parfaitement conforme au résultat obtenu dans la référence [26]en appliquant la méthode des intégrales de chemin.

3.2.3 Oscillateur Harmonique amorti forcé

Calcul de la fonction de transformation (propagateur)

Dans ce cas, nous allons appliquer la transformation canonique linéaire à l'Hamiltonien d'un oscillateur harmonique amorti, forcé par une fonction arbitraire $F(t)$ qui dépend du temps

$$H = \frac{p^2}{2m(t)} + \frac{1}{2}m(t)\,\omega^2 x^2 - \exp[2\xi(t)]\,F(t)\,x, \tag{3.105}$$

où

$$m(t) = m_0 \exp[2\xi(t)], \tag{3.106}$$

et $\xi(t)$ est une fonction qui dépend du temps.

Les fonctions $g_i(t)$, dans l'Hamiltonien général (3.42) prennent les formes suivantes

$$\begin{aligned} g_1(t) &= \frac{1}{2m_0 \exp[2\xi(t)]} \quad , \quad g_2(t) = \frac{1}{2}m_0\omega^2 \exp[2\xi(t)], \\ g_6(t) &= -\exp[2\xi(t)]\,F(t) \;\; , g_3(t) = \;\; g_4(t) = g_5(t) = g_7(t) = 0. \end{aligned} \tag{3.107}$$

la solution des équations (3.64) et (3.49), (3.50), nous permettra de déterminer la transformation canonique convenable, afin de calculer le propagateur de Feynman exacte de l'oscillateur harmonique amorti forcé. Dans ce cas le système(3.49)(3.50) des équations différentielles prend la forme

$$\ddot{f}_1 + \left[-\ddot{\xi}(t) - \dot{\xi}^2(t) + \omega^2\right] f_1 = 0, \tag{3.108}$$

$$\ddot{f}_2 + 2\dot{\xi}(t)\,\dot{f}_2 + \omega^2 f_2 = \frac{F(t)}{m_0}, \tag{3.109}$$

$$f_3 = m_0 \exp[2\xi(t)]\,\dot{f}_2. \tag{3.110}$$

La solution de ces équations différentielles dépend des fonctions $F(t)$ et$\xi(t)$. alors le propagateur de Feynman de l'oscillateur harmonique amorti forcé est exprimé comme

$$\begin{aligned}
\langle x_b, t_b \left| x_a, t_a \right\rangle &= \left[\frac{2\pi i\hbar f_{1a} f_{1b}}{m_0 \exp\left(\xi_b + \xi_a\right)} \int_{t_a}^{t_b} \frac{dt}{f_1^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \\
&\times \exp\left[\frac{i m_0}{2\hbar} \left[\left(\frac{(x_b - f_{2b})}{f_{1a} \exp\left(-\xi_b\right)} - \frac{(x_a - f_{2a})}{f_{1a} \exp\left(-\xi_a\right)} \right)^2 / \int_{t_a}^{t_b} \frac{dt}{f_1^2} + \frac{2}{m_0} \left(f_{3b} x_b - f_{3a} x_a \right) \right.\right. \\
&+ \left(\frac{\dot{f}_{1b}}{f_{1b}} - \dot{\xi}\left(t_b\right) \right) \left(x_b - f_{2b}\right)^2 \exp 2\xi_b \\
&\left.\left. - \left(\frac{\dot{f}_{1a}}{f_{1b}} - \dot{\xi}(t_a) \right) \left(x_a - f_{2a}\right)^2 \exp 2\xi_a - \frac{2}{m_0} \Lambda \right]\right], \qquad (3.111)
\end{aligned}$$

où

$$\Lambda = \int_{t_a}^{t_b} \left[\frac{f_3^2}{2m_0 \exp\left(2\xi(t)\right)} + \frac{1}{2} m_0 \omega^2 \exp\left(2\xi(t)\right) f_2^2 - h \exp\left(2\xi(t)\right) f_2 + f_2 \dot{f}_3 \right] dt \qquad (3.112)$$

Cas particuliers

Afin de vérifier la validité et la précision du résultat ci-dessus, nous considérerons les cas suivants

Particule dans un champ externe constant F : L'Hamiltonien de la particule prend la forme

$$H = \frac{p^2}{2m} - Fx, \qquad (3.113)$$

où m est une constante et $\xi(t)$et ω de (3.105) sont nuls. En conséquence, les équations (3.108), (3.109) et (3.110) deviennent

$$\ddot{f}_1 = 0, \qquad (3.114)$$

$$\ddot{f}_2 = \frac{F}{m}, \qquad (3.115)$$

$$f_3 = m\dot{f}_2. \tag{3.116}$$

D'où les solutions $f_i(t)$ suivantes

$$f_1 = 1, \tag{3.117}$$

$$f_2 = \frac{Ft^2}{2m}, \tag{3.118}$$

$$f_3 = Ft. \tag{3.119}$$

Ce qui nous permet d'obtenir ler propagateur de Feynman dans le cas d'une particule dans un champ externe constant

$$\begin{aligned} \langle x_b, t_b \left| x_a, t_a \right\rangle &= \left[\frac{2\pi i\hbar \left(t_b - t_a\right)}{m}\right]^{-\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(\frac{m\left(x_b - x_a\right)^2}{2\left(t_b - t_a\right)} + \frac{1}{2}F\left(t_b - t_a\right)\left(x_b + x_a\right)\right.\right. \\ &\left.\left. - \frac{F^2 \ \left(t_b - t_a\right)^3}{24m}\right)\right] \end{aligned} \tag{3.120}$$

Le même résultat a été obtenu en utilisant la méthode des intégrales de chemins [4].

L'oscillateur harmonique soumis à une force externe : Lorsqu'on considère la fonction $\xi\ (t)$ nulle dans l'équation (2.164), nous obtenons l'Hamiltonien d'un oscillateur harmonique simple soumis à une force externe tel que

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - F\left(t\right)x. \tag{3.121}$$

Par conséquent, les équations (3.108), (3.109) et (3.110)sont écrites comme

$$\ddot{f}_1 + \omega^2 f_1 = 0, \tag{3.122}$$

$$\ddot{f}_2 + \omega^2 f_2 = \frac{F\left(t\right)}{m}, \tag{3.123}$$

$$f_3 = m\dot{f}_2. \tag{3.124}$$

$f_i\left(t\right)$ prennent les formes suivantes

$$f_1 = \cos\omega t, \tag{3.125}$$

$$f_2 = \int_{t_a}^{t_b} \frac{F\left(s\right)}{m\omega} \sin\omega\left(t-s\right) ds, \tag{3.126}$$

$$f_3 = \int_{t_a}^{t_b} F\left(s\right) \cos\omega\left(t-s\right) ds. \tag{3.127}$$

En remplaçant ces fonctions dans (3.111), on obtient la fonction de transformation qui s'écrit sous la forme suivante

$$\begin{aligned}\left\langle x_b, t_b\left| x_a, t_a\right.\right\rangle &= \left[\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin\omega T}\right]^{\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{im\omega}{2\hbar\sin\omega T}\left(\cos\omega T\left(x_b^2+x_a^2\right)-2x_bx_a\right.\right.\\ &\quad + \frac{2x_b}{m\omega}\int_{t_a}^{t_b} F\left(t\right)\sin\omega\left(t-t_a\right)dt + \frac{2x_a}{m\omega}\int_{t_a}^{t_b} F\left(t\right)\sin\omega\left(t_b-t\right)dt\\ &\quad \left.\left. - \frac{2}{m^2\omega^2}\int_{t_a}^{t_b}\int_{t_a}^{t} F\left(t\right)F\left(s\right)\sin\left(t_b-t\right)\sin\omega\left(s-t_a\right)dsdt\right)\right].\end{aligned} \tag{3.128}$$

avec $T = t_b - t_a$.

Maintenant nous supposons, $\omega = 0$.(ω est une fréquence) L'Hamiltonien devient :

$$H = \frac{p^2}{2m} - F\left(t\right)x. \tag{3.129}$$

Alors les équations différentielles (3.108), (3.109) et (3.110) deviennent

$$\ddot{f}_1 = 0, \tag{3.130}$$

$$\ddot{f}_2 = \frac{F\left(t\right)}{m}, \tag{3.131}$$

$$f_3 = m\dot{f}_2. \tag{3.132}$$

Ou $f_i\,(\,t)$ prennent les formes suivantes

$$f_1 = 1, \tag{3.133}$$

$$f_2 = \int_{t_a}^{t} \frac{F\,(s)}{m}\,(t-s)\,ds, \tag{3.134}$$

$$f_3 = \int_{t_a}^{t} F\,(s)\,ds. \tag{3.135}$$

En remplaçant ces fonctions dans (3.128), on obtient la fonction de transformation qui s'écrit sous la forme suivante

$$\langle x_b, t_b\,|x_a, t_a\rangle = \left[\frac{m\omega}{2\pi i\hbar T}\right]^{\frac{1}{2}} \exp\left[\begin{array}{c} \frac{im}{2\hbar T}\,(x_b - x_a)^2 + \frac{2x_b}{m}\int_{t_a}^{t_b} F\,(t)\,(t-t_a)\,dt \\ +\frac{2x_a}{m}\int_{t_a}^{t_b} F\,(t)\,(t_b - t)\,dt \\ -\frac{2}{m^2}\int_{t}^{t_b}\int_{t_a}^{t} F\,(t)\,F\,(s)\,(t_b-t)\,(s-t_a)\,dsdt \end{array}\right]. \tag{3.136}$$

Lorsque $\omega = 0$ l'équation (3.128) devient équivalente à l'équation (3.136) .

3.3 La Méthode Algébrique

L'origine de la méthode Algébrique remonte au début de la mécanique quantique avec la formulation matricielle de Heisenberg et Pauli. Ici nous présentons une méthode Algébrique pour le calcul du propgateur de Feynman, qui implique la manipulation des opérateur impulsion et position. Cette manipulation nécessite la séparation des opérateure où en outre la permutation entres ces opérateurs. La formule de Baker-Campbell-Hausdorff $(B.C.H)$ permet cette manipulation de façon trés simple.

Nous avons commencé par un cas simple à une dimension (l'oscillateur Harmonique) où la méthode est basée sur l'utilisation de la formule de $(B.C.H)$ [6] , [7], et la permutation entre les opérateurs $\hat{P}, \hat{X}$. Comme deuxième étape on a étudié un cas plus générale où on a calculé la fonction de Green pour les problèmes non relativistes via l'Algébre de Lie $SO\,(2;1)$, dans cette dernière étape on a comme application (oscillateur Harmonique linèaire, Potentiel de coulomb unidimensionnel)

3.3.1 Formalisme mathématique

La méthode Algébrique [29] peut être résumée, dans le cas non relativiste à une dimension, par les étapes suivantes :

Premiére étape :

Réécrire d'abord l'opérateur d'évolution $\hat{U}\,(\tau)$ comme un produit des exponentiels des opérateurs $\hat{X}, \hat{P}$ et $\hat{P}\hat{X}$, la factorisation(séparation des opérateurs) peut se faire à l'aide de la formule $(B.C.H)$ donné par :

$$\exp\left(A\right)B\exp\left(-A\right) = C, \tag{3.137}$$

où A, B et C sont des opérateurs et

$$C = B + [A, B] + \frac{1}{2!}\left[A, [A, B]\right] + \frac{1}{3!}\left[A, [A, [A, B]]\right], \tag{3.138}$$

en développant $\exp(C)$ on trouve :

$$\exp(C) = \exp(A)\exp(B)\exp(-A), \tag{3.139}$$

qu'on peut inverser pour avoir

$$\exp(B) = \exp(-A)\exp(C)\exp(A), \tag{3.140}$$

on identifie diréctement $B = \frac{-i}{\hbar}\hat{H}\tau$, l'opérateur A varie d'un système à l'autre ce qui permet de trouver une forme factorisée de l'opérateur d'évolution (séparer les opérateurs). La factorisation peut être répetée tant de fois selon le besoin jusqu'à trouver la forme voulue.

Deuxiéme étape :

Remplacer l'Hamiltonien factorisé dans la définition du propagateur (3.1) et calculer l'action de exponentiel des opérateur $\hat{X}, \hat{P}$ et $\hat{P}\hat{X}$ sur l'état $|x\rangle$, pour l'opérateur $\hat{X}$ le calcul est trivial, pour l'opérateur $\hat{P}$ nous avons juste besoin d'utiliser la relation de fermeture $I = \int dp\,|p\rangle\langle p|$, et pour l'opérateur mixte $\hat{P}\hat{X}$ nous devons utiliser l'expression :

$$\left\langle \acute{p} \middle| \exp\left(-\frac{i\gamma\hat{P}\hat{X}}{\hbar}\right) \middle| P \right\rangle = \exp(-\gamma)\delta\left[\acute{P} - \exp(-\gamma)P\right], \tag{3.141}$$

où γ est un parametre arbitraire à choisir.

3.3.2 Applications

L'oscillateur harmonique à 1D

Maintenant on applique cette méthode dite méthode Algébrique pour résoudre le problème unidimentionel d'un oscillateur harmonique. L'opérateur d'évolution s'écrit :

$$\hat{U}(\tau) = \exp\left[-\frac{i\tau}{\hbar}\left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2\right)\right], \tag{3.142}$$

en suivant l'étape (1), choisissant A telque : $A = \alpha\hat{X}^2$ ce choix n'est pas arbitraire.

en remplaçant A et B dans les équations (3.138) et (3.139) on obtient :

$$\begin{aligned}\exp\left(\alpha\hat{X}^2\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\tau\right)\exp\left(-\alpha\hat{X}^2\right) &= \exp\left\{-\frac{i\tau}{\hbar}\left(\frac{p^2}{2m}+\frac{i\alpha\hbar}{m}\left(\hat{X}\hat{P}+\hat{P}\hat{X}\right)\right.\right.\\ &\quad \left.\left.+\frac{m}{2}\left(\omega^2-\left(\frac{i\alpha\hbar}{m}\right)^2\right)\hat{X}^2\right)\right\}. \quad (3.143)\end{aligned}$$

L'idée générale de la méthode Algébrique est d'écrie l'opérateur d'évolution en termes de $\hat{X}$, $\hat{P}$ et $\hat{X}\hat{P}$, donc il faut illiminer l'opérateur $\hat{X}^2$ dans l'équation (3.143) et ceci est réalisé avec le choix de A c-à-d le choix de α :

$$\alpha = +\frac{m\omega}{2\hbar}, \quad (3.144)$$

et on introduit la relation de commutation $\left[\hat{X},\hat{P}\right] = i\hbar$ pour simplifier le calcul, on peut réécrire l'équation(3.183) sous la forme

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\tau\right) = \exp\left(i\frac{\omega}{2}\tau\right)\exp\left(-\alpha\hat{X}^2\right)\exp\left[-\frac{i\tau}{\hbar}\left(\frac{\hat{p}^2}{2m}+i\omega\hat{P}\hat{X}\right)\right]\exp\left(\alpha\hat{X}^2\right). \quad (3.145)$$

Remarquons que dans cette équation(3.145) le terme $\exp\left[-\frac{i\tau}{\hbar}\left(\frac{\hat{p}^2}{2m}+i\omega\hat{P}\hat{X}\right)\right]$ ne contient plus de $\hat{X}^2$. On répète es mêmes étapes pour éliminer l'opérateur $\hat{P}^2$, on pose donc $\acute{A} = \beta$ $\hat{P}^2$ et $B' = \frac{\hat{p}^2}{2m} + i\omega\hat{P}\hat{X}$ avec l'utilisation des équations (3.137) et (3.138) on trouve

$$\exp\left(\beta\hat{P}^2\right)\left(\frac{\hat{p}^2}{2m}+i\omega\hat{P}\hat{X}\right)\exp\left(-\beta\hat{P}^2\right) = \left(\frac{1}{2m}+2\omega\beta\hbar\right)\hat{P}^2+i\omega\hat{P}\hat{X}, \quad (3.146)$$

et pour éliminer le $\hat{P}^2$on pose :

$$\beta = \frac{-1}{4m\omega\hbar}, \tag{3.147}$$

Donc l'équation (3.146)devient sous la forme suivante :

$$\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\tau\left(\frac{\hat{p}^2}{2m}+i\omega\hat{P}\hat{X}\right)\right] = \exp\left(-\beta\hat{P}^2\right)\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\left(i\omega\tau\right)\hat{P}\hat{X}\right]\exp\left(\beta\hat{P}^2\right). \tag{3.148}$$

On remplace l'équation (3.148)dans (3.145) on trouve :

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\tau\hat{H}\right) = \left[\begin{array}{c} \exp\left(\frac{i\omega\tau}{2}\right)\exp\left(-\alpha\hat{X}^2\right)\exp\left(-\beta\hat{P}^2\right) \\ \times\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\left(i\omega\tau\right)\hat{P}\hat{X}\right]\exp\left(\beta\hat{P}^2\right)\exp\left(\alpha\hat{X}^2\right) \end{array}\right], \tag{3.149}$$

on insére L'équation (3.149) dans la définition du propagateur (3.1)on trouve

$$\begin{aligned} k\left(x_b, x_a, \tau\right) &= \exp\left[-\alpha\left(x_b^2 - x_a^2\right) + \frac{i\omega\tau}{2}\right]\int\frac{dp d\acute{p}}{2\pi\hbar} \\ &\quad \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(\acute{p}x_b - px_a\right) - \beta\left(\acute{p}^2 - p^2\right)\right] \\ &\quad \left\langle \acute{p}\left|\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\left(i\omega\tau\right)\hat{P}\hat{X}\right]\right|p\right\rangle. \end{aligned} \tag{3.150}$$

Si nous utilisons l'équation (3.141) et par comparaison avec (3.150) on trouve $\gamma = i\omega\tau$, et avec l'utilisation des définitions (3.144) et (3.147), nous avons :

$$\begin{aligned} k\left(x_b, x_a, \tau\right) &= \frac{1}{2\pi\hbar}\exp\left\{\frac{-m\omega}{\hbar}\left[\left(x_b^2 - x_a^2\right) + 2\frac{\left(\exp\left(-i\omega\tau\right)x_b - x_a\right)^2}{1-\exp\left(-2i\omega\tau\right)}\right] - \frac{i\omega\tau}{2}\right\} \\ &\quad \times\int dp\exp\left[-\left(\frac{1-\exp\left(-2i\omega\tau\right)}{4m\omega\hbar}\right)\right. \\ &\quad \left.\left(P - 2im\omega\frac{\left(\exp\left(-i\omega\tau\right)x_b - x_a\right)}{1-\exp\left(-2i\omega\tau\right)}\right)^2\right]. \end{aligned} \tag{3.151}$$

Cette intégrale a une forme gaussienne et peut être facilement calculée, et donne la forme du Propagateur d'un oscillateur harmonique à une dimension :

$$k\left(x_b, x_a, \tau\right) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar \sin\omega\tau}} \exp\left[\frac{im\omega}{2\hbar \sin\omega\tau}\left(\left(x_b^2 - x_a^2\right)\cos\omega\tau - 2x_b x_a\right).\right] \tag{3.152}$$

3.3.3 Problèmes non relativistes via l'algèbre de Lie $SO\left(2,1\right)$

L'Hamiltonien général à une demension

$$H = -\frac{\hbar^2}{2M}\frac{d^2}{dx^2} + V\left(x\right), \tag{3.153}$$

nous voulons discuter une téchenique Algébrique [29] associée à l'Algébre de Lie $SO\left(2,1\right)$. On impose que l'Hamiltonien unidimensionel posséde une symétrie dynamique $SO\left(2,1\right)$, cela signifie que cette Hamiltonien peut être écrit comme des combinaisons des générateurs T_i de L'Algébre de Lie $SO\left(2,1\right)$ satisfant les relations de commutations suivantes :

$$\left[T_1, T_2\right] = -iT_1, \tag{3.154}$$

$$\left[T_2, T_3\right] = -iT_3, \tag{3.155}$$

$$\left[T_1, T_3\right] = -iT_2, \tag{3.156}$$

choisissons les générateurs T_i de la forme :

$$T_i\left(x\right) = \sum_{K=0,1,2} \alpha_{ik} x^{\beta_{ik}} \left(\frac{d}{dx}\right)^K, \text{où } \left(i = 1, 2, 3\right), \tag{3.157}$$

où nous nous sommes limités au dérivés d'ordre inférieur ou égale à deux. On a deux possibilités :

- Les trois opérateurs ne contiennent que les dérivés de premier ordre .
- L'un des trois opérateurs est du second ordre.

Ici nous discuterons la deusième possibilité car nous voulons une forme de l'Hamiltonien s'écrit comme une combinison linèaire des générateurs $T_i\,(i=1,2,3)$, d'où

$$T_1 = \alpha_2 x^{2-j}\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + \alpha_1 x^{1-j}\left(\frac{d}{dx}\right) + \alpha_0 x^{-j}, \tag{3.158}$$

$$T_2 = -\frac{i}{j}x\left(\frac{d}{dx}\right) - i\beta, \tag{3.159}$$

$$T_3 = \lambda x^i, \tag{3.160}$$

avec

$$\beta = \frac{1}{2j}\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} + j - 1\right), \tag{3.161}$$

$$\lambda = -\left(2\alpha_2 j^2\right)^{-1}, \tag{3.162}$$

et les paramêtres α_i et $(j \neq 0)$ peuvent être choisis selon la forme voulue de l' Hamiltonien.

La fonction de Green qui décrit la dynamique d'un système donné par l'Hamiltonien (3.153) qui satisfait l'équation de schrodinger non homogéne

$$(H-E)\,G_E(x,x') = \delta(x-x'). \tag{3.163}$$

Pour une énergie E . l'opérateur résolvante est donnée par :

$$\Lambda = x^{2-j}(H-E) = g_0 + g_1 T_1(x) + g_3 T_3(x). \tag{3.164}$$

On suppose que g_0, g_1 et g_3 peuvent être des constantes, et le paramètre j se fixe selon le système choisit, la fonction de Green s'écrit alors :

$$G_E(x,x') = \Lambda^{-1} x'^{2-j}\delta(x-x'), \tag{3.165}$$

et sa représentation intégrale de Schwinger

$$G_E(x,x') = \frac{i}{\hbar}\int_0^{\infty} dt \exp\left[-i\frac{t}{\hbar}(\Lambda - i\varepsilon)\right] x'^{2-j}\delta(x-x'), \tag{3.166}$$

à la limite où $\varepsilon \to 0$ elle devient

$$G_E(x,x') = \frac{i}{\hbar}\int_0^{\infty} dt \exp\left[-i\frac{t}{\hbar}(g_0 + g_1T_1(x) + g_3T_3(x) - i\varepsilon)\right] x'^{2-j}\delta(x-x'), \tag{3.167}$$

donc la construction Algébrique de la fonction de Gréen pour ce probléme se réduit à la determination de l'action de l'exponentiel.

Appliquant les générateurs $T_i(x)$ avec $(i = 1, 2, 3)$ sur la fonction delta de dirac ceci s'éffectue à l'aide de la formule de $(B.C.H)$ définit dans (3.137) avec (3.138)

$$\exp\left[-i\frac{t}{\hbar}(g_1T_1 + g_3T_3)\right] = \exp(-iaT_3)\exp(-ibT_2)\exp(-icT_1). \tag{3.168}$$

$$\exp(-ia_1T_3)\exp(-ib_1T_2)\exp(-ic_1T_1) = \exp(-icT_1)\exp(qT_3), \tag{3.169}$$

avec :

$$a = 2\frac{k}{g}\tan\left(k\frac{t}{\hbar}\right)\ ,\ b = 2\ln\left(\cos k\frac{t}{\hbar}\right)\ \text{ et }\ c = \frac{g}{k}\tan\left(k\frac{t}{\hbar}\right), \tag{3.170}$$

$$k = \sqrt{\frac{g_1g_3}{2}}, \tag{3.171}$$

$$a_1 = iq\left(1 - \frac{iqc}{2}\right)^{-1}\ ,\ b_1 = 2\ln\left(1 - i\frac{qc}{2}\right)\ \text{ et }\ c_1 = c\left(1 - i\frac{qc}{2}\right), \tag{3.172}$$

et q un paremètre.

En utilisant la formule de $(B.C.H)$ et utilisons la représentation fondamentale de l'Algèbre de Lie $SO\,(2.1)$ donnée par les matrices de spin de Pauli :

$$\sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \sigma_+ = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \sigma_- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

les générateurs $(3.158)\,,(3.159)$ et (3.160) deviennent

$$T_1 = \frac{\sigma_-}{2}\sqrt{2}. \tag{3.173}$$

$$T_2 = -i\frac{\sigma_z}{2}. \tag{3.174}$$

$$T_3 = \frac{\sigma_+}{2}\sqrt{2}. \tag{3.175}$$

Afin que nous puissions réécrire l'équation

$$\exp\left[-i\frac{t}{\hbar}\left(g_1T_1 + g_3T_3\right)\right] = \exp\left[-iaT_3\right]\exp\left[-ibT_2\right]\exp\left[-icT_1\right], \tag{3.176}$$

comme

$$\exp\left[-i\frac{t}{\hbar}\left(g_1\frac{\sigma_-}{2}\sqrt{2} + g_3\frac{\sigma_+}{2}\sqrt{2}\right)\right] = \exp\left[-ia\frac{\sigma_+}{2}\sqrt{2}\right]\exp\left[-b\frac{\sigma_z}{2}\right]\exp\left[-ic\frac{\sigma_-}{2}\sqrt{2}\right], \tag{3.177}$$

et par comparaison avec

$$\exp\left[p\sigma_+ + q\sigma_-\right] = \exp\left[r\sigma_+\right]\exp\left[u\sigma_z\right]\exp\left[t\sigma_+\right]. \tag{3.178}$$

$$q = -it\frac{g_1}{2\hbar}\sqrt{2}\,;\, p = -itg_3\frac{\sqrt{2}}{2\hbar}\ \ ;\, r = -\frac{ia}{2}\sqrt{2}\ \ ;\, u = \frac{-b}{2}\sqrt{2}\ \ ;\, t = -i\frac{c}{2}\sqrt{2}, \tag{3.179}$$

Considérons maintenant que le côté gauche de l'équation précédente s'écrit

$$\exp\left[p\sigma_{+}+q\sigma_{-}\right]=\exp\left(A\right), \tag{3.180}$$

ceci donne

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 2p \\ 2q & 0 \end{bmatrix} \tag{3.181}$$

d'où

$$\exp\left(A\right)=I+A+\frac{4}{2!}pqI+\frac{4}{3!}pqA+...., \tag{3.182}$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$\exp\left(A\right)=I\cosh\left(2\sqrt{pq}\right)+\frac{A}{2\sqrt{pq}}\sinh\left(2\sqrt{pq}\right), \tag{3.183}$$

finalement

$$\exp\left[p\sigma_{+}+q\sigma_{-}\right]=\begin{bmatrix} \cosh\left(2\sqrt{pq}\right) & \frac{p}{\sqrt{pq}}\sinh\left(2\sqrt{pq}\right) \\ \frac{q}{\sqrt{pq}}\sinh\left(2\sqrt{pq}\right) & \cosh\left(2\sqrt{pq}\right) \end{bmatrix}. \tag{3.184}$$

Maintenant le côté droit de l'équation (3.178) ,suit à un développement de Taylor, donne

$$\exp\left[r\sigma_{-}\right]\exp\left[u\sigma_{z}\right]\exp\left[t\sigma_{+}\right]=\begin{bmatrix} \exp\left(u\right)+4rt\exp\left(-u\right) & 2r\exp\left(-u\right) \\ 2t\exp\left(-u\right) & \exp\left(-u\right) \end{bmatrix}, \tag{3.185}$$

réécrivons maintenant l'équation(3.178)

$$\begin{bmatrix} \cosh\left(2\sqrt{pq}\right) & \frac{p}{\sqrt{pq}}\sinh\left(2\sqrt{pq}\right) \\ \frac{q}{\sqrt{pq}}\sinh\left(2\sqrt{pq}\right) & \cosh\left(2\sqrt{pq}\right) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \exp\left(u\right)+4rt\exp\left(-\mu\right) & 2r\exp\left(-u\right) \\ 2t\exp\left(-u\right) & \exp\left(-u\right) \end{bmatrix}, \tag{3.186}$$

avec

$$u = -\ln\left[\cosh\left(2\sqrt{pq}\right)\right], \tag{3.187}$$

$$r = \frac{1}{2}\frac{p}{\sqrt{pq}}\tanh\left(2\sqrt{pq}\right), \tag{3.188}$$

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{q}{p}}\tanh\left(2\sqrt{pq}\right). \tag{3.189}$$

Revenons maintenant à l'équation(3.169) , le côté gauche de cette équation s'écrit

$$\exp\left(-icT_1\right)\exp\left(qT_3\right) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{q}{\sqrt{2}} \\ -i\frac{c}{2}\sqrt{2} & 1-ic\frac{q}{2} \end{bmatrix}, \tag{3.190}$$

et le côté droit

$$\exp\left(-i\alpha_1 T_3\right)\exp\left(-ib_1 T_2\right)\exp\left(-ic_1 T_1\right) = \begin{bmatrix} \exp\left(-\frac{b_1}{2}\right) - \frac{a_1 c_1}{2}\exp\left(\frac{b_1}{2}\right) & -i\frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}\exp\left(\frac{b_1}{2}\right) \\ -\frac{ic_1}{\sqrt{2}}\exp\left(\frac{b_1}{2}\right) & \exp\left(\frac{b_1}{2}\right) \end{bmatrix}. \tag{3.191}$$

Donc l'équation (3.168) s'écrivent sous la forme suivante

$$\begin{bmatrix} \exp\left(-\frac{b_1}{2}\right) - \frac{a_1 c_1}{2}\exp\left(\frac{b_1}{2}\right) & -i\frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}\exp\left(\frac{b_1}{2}\right) \\ -\frac{ic_1}{\sqrt{2}}\exp\left(\frac{b_1}{2}\right) & \exp\left(\frac{b_1}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{q}{2} \\ -i\frac{c}{2}\sqrt{2} & 1-ic\frac{q}{2} \end{bmatrix}, \tag{3.192}$$

d'où nous pouvons avoir directement les paramétres donnés par (3.172) .

Maintenant que l'expression (3.167) de la fonction de Green est simplifiée, essayons de la calculer. Notons d'abord que pour une fonction quelconque $f(x)$ nous avons

$$\exp\left[-i\alpha T_3(x)\right] f(x) = f(x)\exp\left[-i\alpha T_3(x)\right], \tag{3.193}$$

puisque l'opérateur $T_3(x)$ de l'équation (3.160) commute avec n'importe quelle fonction de x car il ne possède pas de dérivé par rapport à cette variable.

Pour $T_2(x)$

$$\exp\left[-ibT_2(x)\right] f(x) = \exp\left[-b\beta\right] \exp\left[-\frac{b}{j}\frac{d}{dx}\right] f(x), \tag{3.194}$$

où $f(x)$ est de la forme

$$f(x) = \sum_{j}^{+\infty} \frac{x^j}{j!}\frac{dj}{dx^j} f(x)\bigg|_{f(x)=0}, \tag{3.195}$$

et

$$\exp\left[-\frac{b}{j}\frac{d}{dx}\right] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\left(-\frac{b}{j}\frac{d}{dx}\right)^m, \tag{3.196}$$

notons que

$$\left(-\frac{b}{j}\frac{d}{dx}\right)^m \left[f(x)\right]^j = j^m \left[f(x)\right]^j. \tag{3.197}$$

Alors, l'équation (3.194) se réduit à :

$$\exp\left[-ibT_2(x)\right] f(x) = \exp(-b\beta) f\left(x \exp\left(-\frac{b}{j}\right)\right). \tag{3.198}$$

reste le cas de $T_1(x)$ dans lequel l'exponentielle de $T_1(x)$ agit sur une fonction $f(x)$ pour ce cas nous utilisons la transformation de Laplace

$$F(q) = j\lambda \int_0^{\infty} dx\ f(x) \exp\left[-q\lambda x^j\right] x^{j-\rho-1}, \tag{3.199}$$

on peut montrer que l'inverse de la transformation s'écrit

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int dq F(q) \exp\left(q\lambda x^j\right) x^{\rho}, \tag{3.200}$$

par substitution directe de l'équation (3.200) dans l'équation (3.199).

Pour fixer le paramêtre ρ nous imposons

$$T_1(x)\, x^{\rho} = 0, \tag{3.201}$$

d'où

$$\rho=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)\pm\left[\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha}\right)^2-4\frac{\alpha_0}{\alpha_2}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}, \tag{3.202}$$

notons que l'équation (3.201) implique que

$$\exp\left[-icT_1\left(x\right)\right]x^\rho=x^\rho. \tag{3.203}$$

en utulisant les équations (3.169) , (3.193) et (3.198) et (3.203) nous pouvons montrer que :

$$\begin{aligned}\exp\left(-icT_1\right)\exp\left(qT_3\right)x^\rho &= \exp\left(-i\alpha_1T_3\right)\exp\left(-ib_1T_2\right)\exp\left(-ic_1T_1\right)x^\rho\\ &= \exp\left(-i\alpha_1\lambda x^j\right)\exp\left[-ib_1\left(\beta+\frac{\rho}{j}\right)\right]x^\rho,\end{aligned} \tag{3.204}$$

donc on remplace $f\left(x\right)$ par son équation de transformation de Laplace (3.200) et $F\left(q\right)$ donnée par l'équation (3.199) dans (3.204)on obtient

$$\begin{aligned}\exp\left(-icT_1\right)f\left(x\right) &= \frac{1}{2\pi i}\int dqF\left(q\right)\exp\left(-i\alpha_1\lambda x^j\right)\exp\left[-ib\left(\beta+\frac{\rho}{j}\right)\right]x^\rho\\ &= j\lambda\int_0^\infty dyf\left(y\right)\frac{1}{2\pi i}\int dq\exp\left\{-q\lambda y^j\right\}y^{j-\rho-1}\\ &\quad\times\exp\left(-i\alpha_1\lambda x^j\right)\exp\left[-ib_1\left(\beta+\frac{\rho}{j}\right)\right]x^\rho.\end{aligned} \tag{3.205}$$

le dérnier éxposant

$$\begin{aligned}\exp\left[-ib_1\left(\beta+\frac{\rho}{j}\right)\right] &= \left(1-iq\frac{c}{2}\right)^{-2(\beta+\mu\rho)}\\ &= \left(\frac{2i}{c}\right)^{2(\beta+u\rho)}\left(q+\frac{2i}{c}\right)^{-2(\beta+u\rho)},\end{aligned} \tag{3.206}$$

avec

$$
\begin{aligned}
\exp\left[-i\alpha_1\lambda x^j\right] &= \exp\left(\frac{q\lambda x^j}{1-iq\frac{c}{2}}\right) \\
&= \exp\left[\lambda x^j\left(\frac{2i}{c}+\frac{\frac{4}{c^2}}{q+\frac{2i}{c}}\right)\right] \\
&= \exp\left(2i\lambda\frac{x^j}{c}\right)\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{j!}\left(\frac{4\lambda\frac{x^j}{c^2}}{q+\frac{2i}{c}}\right)^j, \qquad (3.207)
\end{aligned}
$$

où nous avons utilisé le développement de Taylor, substituant les équations(3.206) et (3.207) dans l'équation (3.205) nous trouvons

$$
\begin{aligned}
\exp\left(-icT_1\right)f\left(x\right) &= j\lambda\int_0^\infty dy f\left(y\right)\exp\left(2i\lambda\frac{x^j}{c}\right)\left(\frac{2i}{c}\right)^{2(\beta+u\rho)} y^{j-\rho-1}x^\rho \\
&\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{4\lambda x^j}{c^2}\right)^n\Xi\left(q\right), \qquad (3.208)
\end{aligned}
$$

avec

$$
\Xi\left(q\right)=\frac{1}{2\pi i}\int dq\exp\left(-iq\lambda y^j\right)\left(q+\frac{2i}{c}\right)^{-2(\beta+u\rho)-n}, \qquad (3.209)
$$

identifiant

$$
u=q+\frac{2i}{c}, \qquad (3.210)
$$

$$
\nu=-\lambda y^j, \qquad (3.211)
$$

$$
m=2\beta+\frac{2\rho}{j}+n-1, \qquad (3.212)
$$

on trouve

$$
\Xi\left(q\right)=\frac{1}{2\pi i}\int du\frac{\exp\left(u\nu\right)}{u^{m+1}}=\frac{\nu^m}{\Gamma\left(m+1\right)}. \qquad (3.213)
$$

remplaçant $\Xi(q)$ et les paramêtres ν et m dans (3.208) on trouve la forme suivante

$$\begin{aligned}\exp\left(-icT_1\right)f\left(x\right) &= j\lambda\int_0^{\infty}dyf\left(y\right)y^{j-\rho-1}x^{\rho}\exp\left\{\frac{2i\lambda}{c}\left(x^j+y^j\right)\right\}\\ &\quad\times\frac{2i}{c}\left(-1\right)^{\nu}\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{j\nu}{2}}J_{\nu}\left(\frac{4\lambda\left(xy\right)^{\frac{j}{2}}}{c}\right),\end{aligned} \tag{3.214}$$

où $J_{\nu}(z)$ sont les fonctions de Bessel cylindrique donnée par [27]

$$J_{\nu}\left(z\right)=\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\frac{\left(\frac{-z^2}{4}\right)^n}{\Gamma\left(n+\nu+1\right)}, \tag{3.215}$$

et nous avons identifié

$$\nu=2\beta+\frac{2\rho}{j}-1. \tag{3.216}$$

Choisissant maintenant

$$f\left(x\right)=\delta\left(x-x'\right), \tag{3.217}$$

dans l'équation (3.214) on trouve

$$\begin{aligned}\exp\left(icT_1\right)\delta\left(x-x'\right) &= \frac{2ij\lambda}{c}\left(-1\right)^{\nu}\left(x\right)^{\prime j-1}\left(\frac{x'}{x}\right)^{\frac{j\nu}{2}-\rho}J_{\nu}\left(\frac{4\lambda\left(xx'\right)^{\frac{j}{2}}}{c}\right)\\ &\quad\times\exp\left[\frac{2i\lambda}{c}\left(x^j+x'^j\right)\right].\end{aligned} \tag{3.218}$$

Maintenant, nous sommes en mesure de trouver l'action de l'exponentielle de la somme des opérateurs T_1 et T_3 sur la fonction delta de Dirac, pour se faire , nous utilisons la formule de$(B.C.H)$ et les équations (3.218) , (3.198)et (3.193) dans cet ordre

$$\begin{aligned}
\exp\left[-it\left(g_1T_1+g_3T_3\right)\right]\delta\left(x-x'\right) &= \exp\left[-iaT_3\right]\exp\left[-ibT_2\right]\exp\left[-icT_1\right]\delta\left(x-x'\right) \\
&= \exp\left[-iaT_3\right]\exp\left[-ibT_2\right]\frac{2ij\lambda}{c}\left(-1\right)^{\nu}x'^{j-1}\left(\frac{x'}{x}\right)^{\frac{j\nu}{2}-\rho} \\
&\quad \times J_{\nu}\left(4\lambda\frac{\sqrt{xy}}{c}\right)\exp\left[\frac{2i\lambda}{c}\left(x^{j}+x'^{j}\right)\right], \\
&= \exp\left\{-ia\lambda x^{j}\right\}\exp\left\{-b\beta\right\}\frac{2ij\lambda}{c}\left(-i\right)^{\nu}x'^{j-1}\left(\frac{x'}{x}\right)^{\frac{j\nu}{2}-\rho} \\
&\quad \times\exp\left[-b\left(\frac{\nu}{2}-\frac{\rho}{j}\right)\right]\times J_{\nu}\left(4\lambda\frac{\left(xx'\right)^{\frac{j}{2}}}{c\exp\left(-\frac{b}{2}\right)}\right) \\
&\quad \times\exp\left\{\frac{2i\lambda}{c}\left[x'^{j}+x^{j}\exp\left(-\frac{b}{2}\right)\right]\right\}. \qquad (3.219)
\end{aligned}$$

on remplace les valeurs de a, b et c donnée par l'équation (3.170), finalement on trouve

$$\exp\left[-i\frac{t}{\hbar}\left(g_1T_1+g_3T_3\right)\right]x'^{2-j}\delta\left(x-x'\right)=\left[\begin{array}{c}\frac{2ik\lambda j\exp(2i\pi\nu)}{g_1\sin\left(k\frac{t}{\hbar}\right)}\left(xx'\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x'}{x}\right)^{\frac{\alpha_1}{2\alpha_2}} \\ \times\exp\left[\frac{2ik\lambda}{g_1}\left(x'^{j}+x^{j}\right)\cot\left(k\frac{t}{\hbar}\right)\right] \\ \times I_{\nu}\left(\frac{4\lambda k\left(x'x\right)^{\frac{j}{2}}}{ig_1\sin\left(k\frac{t}{\hbar}\right)}\right)\end{array}\right], \qquad (3.220)$$

où nous avons utulisé l'identité qui relie les fonctions de Bessel de premier et second type [27]

$$J_{\nu}\left(iz\right)=\exp\left(\frac{i\pi\nu}{2}\right)I_{\nu}\left(z\right), \qquad (3.221)$$

avec

$$\nu=\pm\frac{1}{j}\left[\left(1-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{2}-4\frac{\alpha_0}{\alpha_2}\right]^{\frac{1}{2}},$$

finalement on trouve la forme de notre fonction de Green

$$\begin{aligned} G_E(x',x) &= \frac{i}{\hbar}\int dt \exp\left[-\frac{i}{\hbar}t\left(g_0-i\varepsilon\right)\right]\frac{2ikj\lambda\exp\left(2\pi i\nu\right)}{g_1\sin\left(\frac{kt}{\hbar}\right)}\left(x'x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x'}{x}\right)^{\frac{\alpha_1}{2\alpha_2}} \\ &\times\exp\left[\frac{2ik\lambda}{g_1}\left(x'^j+x^j\right)\cos\left(k\frac{t}{\hbar}\right)\right] \\ &\times I_\nu\left(\frac{4\lambda k\left(xx'\right)^{\frac{j}{2}}}{ig_1\sin\left(k\frac{t}{\hbar}\right)}\right). \end{aligned} \tag{3.222}$$

En imposant la condition de symétrie $G_E(x,x') = G_E(x',x)$ dans l'équation (3.222) ,on trouve la représentation intégrale pour la fonction de Gréen d'un système unidementionnel possédant la symétrie dynamique $SO(2,1)$

$$\begin{aligned} G_E(x',x) &= \frac{i}{\hbar}\int dt \exp\left[-\frac{i}{\hbar}t\left(g_0-i\varepsilon\right)\right]\frac{2ik\lambda j\exp\left(2\pi i\nu\right)}{g_1\sin\left(\frac{k}{\hbar}t\right)}\left(xx'\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\times\exp\left[\frac{2ik\lambda}{g_1}\left(x'^j+x^j\right)\cot\left(\frac{k}{\hbar}t\right)\right] I_\nu\left(\frac{4k\lambda\left(x'x\right)^{\frac{j}{2}}}{ig_1\sin\left(\frac{k}{\hbar}t\right)}\right). \end{aligned} \tag{3.223}$$

Pour trouver les pôles, on utilise la théoréme d'addition pour les polynomes de Laguerre L_μ^ν [10]

$$I_\nu\left(\frac{2\sqrt{y'yz}}{1-z}\right)\exp\left(-z\frac{y'+y}{1-z}\right) = \left(yy'z\right)^{\frac{\nu}{2}}\left(1-z\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{\Gamma\left(n+\nu+1\right)}L_n^\nu\left(y\right)L_n^\nu\left(y'\right)z^n, \tag{3.224}$$

nous identifions

$$y=\frac{4\lambda k}{g_1}x^j \quad ; \quad y'=\frac{4\lambda k}{g_1}x'^j \quad \text{et} \quad z=\exp\left(-\frac{2ikt}{\hbar}\right). \tag{3.225}$$

La fonction de Green s'écrit donc sous la forme

$$\begin{aligned} G_E\left(x', x\right) &= -j \exp\left(2\pi i \nu\right) \left(\frac{4\lambda k}{g_1}\right)^{\nu+1} \left(x x'\right)^{\frac{(j\nu+1)}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! L_n^{\nu}\left(\frac{4\lambda k}{g_1} x^j\right) L_n^{\nu}\left(\frac{4\lambda k}{g_1} x'^j\right)}{\Gamma\left(n+\nu+1\right)} \\ & \times \frac{i}{\hbar} \int_0^{\infty} dt \exp\left[-i \frac{t}{\hbar}\left(g_0 + k\left(\nu+1+2n\right) - i\varepsilon\right)\right] \\ & \times \exp\left[-\frac{2\lambda k}{g_1}\left(x'^j + x^j\right)\right], \end{aligned} \tag{3.226}$$

lorsque $\varepsilon \to 0$ on peut facilement calculer l'intégrale sur le temps pour avoir les états d'énergie

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{i}{\hbar} \int_0^{\infty} dt \exp\left[-i \frac{t}{\hbar}\left(g_0 + k\left(\nu+1+2n\right) - i\varepsilon\right)\right] = \frac{1}{g_0 + k\left(\nu+1+2n\right)}, \tag{3.227}$$

et cela contribuer uniquement aux pôles de la fonction de Gréen qui sont

$$g_0 + k\left(\nu+1+2n\right) = 0 \qquad \text{où } n = 0, 1, 2... \tag{3.228}$$

notons que

$$G_E\left(x', x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Psi_{jn}^{\nu k *}\left(x\right) \Psi_{jn}^{\nu k}\left(x'\right)}{E - E_n}$$

les fonctions d'onde $\Phi_{jn}^{\nu k}$ pour un systémé unidimensionnel sont :

$$\Phi_{jn}^{\nu k} = \sqrt{\frac{jn!}{\Gamma\left(n+\nu+1\right)}} \left(\frac{4\lambda k}{g_1}\right)^{\frac{(\nu+1)}{2}} x^{\frac{(j\nu+1)}{2}} \exp\left(-2\lambda \frac{k}{g_1} x^j\right) L_n^{\nu}\left(\frac{4\lambda k}{g_1} x^j\right), \tag{3.229}$$

La techenique discutée dans cette section peut être appliquée à tout système unidimensionnel d'écrit par l'Hamiltonien quadratique qui pourrait être écrit comme une combinaison linéaire des générateurs de l'Algèbre de Lie $SO\left(2,1\right)$ on peut dire que ces potentiels posssèdent un système dynamique $SO\left(2,1\right)$.

3.3.4 Application aux Systèmes unidimensionnels

Pour trouver quels sont les systèmes unidimensionnels qui peuvent être étudieés par cette téchnique, nous remplaçons l'équation (3.153) dans (3.164) on trouve

$$x^{2-j}\left(-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{d^2}{dx^2}+V\left(x\right)-E\right)=g_0+T_1\left(x\right)+g_3T_3\left(x\right), \tag{3.230}$$

où $g_1=1$,

$$V\left(x\right)=E+x^{-2}\left(g_0x^j+\alpha_0+\lambda g_3x^{2j}\right), \tag{3.231}$$

avec la condition

$$\alpha_2=-\frac{\hbar^2}{2M}\qquad;\qquad\alpha_1=0\quad, \tag{3.232}$$

Donc, si l'on à un potentiel du type donné par l'équation (3.271). Il doit fixer les paramêtres j , g_0 , α_0 et g_3 ,ρ qui fixe

$$\lambda=\frac{M}{j^2\hbar^2}. \tag{3.233}$$

$$k=\sqrt{\frac{g_3}{2}}\quad;\quad g_1=1, \tag{3.234}$$

et

$$\nu=\pm\frac{1}{j}\left(1-4\frac{\alpha_0}{\alpha_2}\right)^{\frac{1}{2}}\quad\text{car } \alpha_1=0. \tag{3.235}$$

Les autres parèmêtres g_0 , α et g_3 seront identifies avec les constantes d'énergie ou de couplage du potentiel déterminé par le choix de j Examinons les deux potentiel exactement solvables et quelque d'attendres quasi-exacte

Application a l'oscillateur harmonique linéaire

Ce systéme provient de l'équation (3.231) l'orsque nous choisissons

$$j=2\ ;\ k=\hbar\omega, \tag{3.236}$$

où ω est la fréquence angulaire classique de l'oscillateur harmonique et M sa masse.

Notons que l'équation (3.231) est un potentiel en x^{-2} suplémentaire, qui est généralement identifié dans les problèmes tridimensionels, avec une constante g_0 libre que nous pouvons assimiler à $(-E)$. laissant le potentiel $V(x)$ indépendant de E

$$V(x) = \alpha_0 x^{-2} + \frac{M\omega^2}{2} x^2. \tag{3.237}$$

Alors la relation de l'équation (3.228) donne les niveaux d'énergies

$$E = \hbar\omega(\nu + 1 + 2n) \; ; \; n = 1, 2... \tag{3.238}$$

où : $\nu = \sqrt{1 + 8\frac{\alpha_0}{2}}$ et la valeur négative de ν à été éxeclue car elle donne une fonction d'onde non physique. si on élimine la barriere carré $\alpha_0 = 0$ il'est possible de prendre $\nu = \pm\frac{1}{2}$ et E se réduit à

$$E = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad ; n = 1, 2, 3... \tag{3.239}$$

Application au Potentiel de coulomb unidimensionnel

Ce cas peut être obtenu en choisissant $M = 1$; $j = 1$; $g_0 = -e^2$; $g_3 = -E\hbar$ dans l'équation (3.271) on trouve

$$V(x) = -\frac{e^4}{x} + \frac{\alpha_0}{x^2}, \tag{3.240}$$

et les niveaux d'énergie, qui sont donnés par l'équation(3.228) avec $K = \hbar\sqrt{\frac{-E}{2}}$

$$E = -\frac{2e^2}{\hbar^2 N^2}, \tag{3.241}$$

avec $N = 1 + \nu + 2n$ et $\nu = \sqrt{1 + 8\alpha_0}$ quand on fait un $\alpha_0 = 0$ puis $\nu \to \nu' = \pm 1$ pour les mêmes raisons que dans le cas précédent , de sorte que $N \to N' = 1, 2...$

L'état $N' = 0$ n'est pas autorisé, car il génère des fonctions d'onde non physique.

Bibliographie

[1] A. Messiah, Mécanique Quantique (Dunod, Paris, 1964) ; L. Landau et E. Lifchitz, Mécanique Quantique. (Editions Mir, Moscou, 1967) Tome III.

[2] D. C. Khandekar, S. V. Lawande et K. V. Bhagwat. Path Integral Methods and their Applications. (1993 by World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd).

[3] H. Kleinert, Path Integrals in Quantum Mechanics and Polymer Physics.

[4] R.Feynman, A.Hibbs.," Quantum Mechanics and Path Integrals", Ed. Mc Graw-Hill, New-York (1965).

[5] P.M.A. Dirac, The Principles of Quantum Mechanics. (Oxford Clarendon Press, 1958).

[6] E. Merzbacher, "Quantum Mechanics", Wiley, New York (1970).

[7] R. M. Wilcox, "Exponential operators and parameter differentiation in quantum physics," J. Math. Phys. 8, 962–982 (1967).

[8] B. Gaveau, E. Miho´kova, M. Roncadelli and L. S. Schulman ; "Path integral in a magnetic field using the Trotter product formula" American Journal of Physics 72, 385 (2004).

[9] George Arfken, Mathematical Methods for Physicists,"7th.ed., Academic Press, NY, (2014).

[10] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, Table of Integrals ; Series and Products ; Academis Press ; New York,(1980) .

[11] P. Surarit, W. Pongtip , O. Tanakorn and R. Udom ;"Path Integral for a Harmonic Oscillator withTime-Dependent Mass and Frequency" ScienceAsia 32 ,2 (2006)

[12] Pauli W (1952)," Ausgewalte Kapitel der Feld quantiseirung" , Lecture Notes, Zurice ETH. (1952).

[13] AV. Jones and GJ. Papadoupoulos ," On the exact propagator", J. Phys A 4, L86-9 (1971).

[14] DC. Khandekar and SV. Lawande ,"Exact propagator for a time-dependent harmonic oscillator with and without a singular perturbation ", J. Math Phys 16, 384-8 (1975).

[15] KH. Yeon , KK. Lee , CI. Um , TF. George , and LN. Pandey " Exact quantum theory of a time-dependent bound quadratic theory Hamiltonian system", Phys . Rev . A, 48, 2716-20 (1993).

[16] IA. Pedrosa ,"Exact wave functions of a harmonic oscillator with time-dependent mass and frequency". Phys. Rev. A 55, 3219-21 (1997).

[17] O. Ciftja ,"A simple derivation of the exact wave function of a harmonic oscillator with time-dependent mass and frequency". J. Phys.A 32, 6385-9 (1999).

[18] J.Schwinger, "Gauge invariance and vacuum polarization," Phys. Rev. 82, 664–679 (1951).

[19] W.Qinmou, "Algebraic structure and kernel of the Schrödinger equation", J. Phys. A 20, 5041(1987).

[20] V. V. Dodonov, I. A.Malkin, and V. I.Man'ko, "Invariants and Green's functions of a relativistic charged particle in electromagnetic fields," Lett. Nuovo Cim. 14, 241–244 (1975).

[21] V. V. Dodonov, I. A. Malkin and V. I. Man'ko, "Coherent states and Green's functions of relativistic quadratic systems," Physica 82A, 113–133 (1976).

[22] V. V. Dodonov, I. A. Malkin, and V. I. Man'ko, "Green's functions for relativistic particles in non-uniform external fields," J. Phys. A 9, 1791–1796 (1976).

[23] T Boudjedaa. M Bouloudenine, “Le prencipe d’action de Schwinger via les transformations canonique linières,” thèse de doctorat en science, université Badji Mokhtar, Annaba (2007).

[24] H. Boschi-Filho , C. Farina, A. Vaidya,“ Schwinger’s method for the electron propagator in a plane wave field revisited”, Physics. Letters A 215. 109- 112 (1996).

[25] G. Crespo, A. N. Proto, A. Plastino, D. Otero, Phys. Rev. A, 39, 2133(1989).

[26] M. C. Huang, M. C. Wu, Ch. J. Phys. 36 N 4, 566 (1998) .

[27] G. N. WATSON, “Theory of Bessel functions,” 2nd ed., Cambridge Univ. Press, London/New York, (1952).

[28] M. ABRAMOWITZ AND I. A. STEGUN, “Handbook of Mathematical Functions,” p. 363, Dover, New York, (1964).

[29] F. A. Barone, H. Boschi-Filho and C. Farina, American Journal of Physics 71(2003) 5.