

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur  
et de la Recherche Scientifique

Université Akli Mohand Oulhadj - Bouira -

X•⊙V•EX •KllE E•A:|A •llA•X - X:⊙E⊙:t -



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
جامعة أكلي محمد أولحاج  
- البويرة -

Faculté des Sciences et des Sciences Appliquées

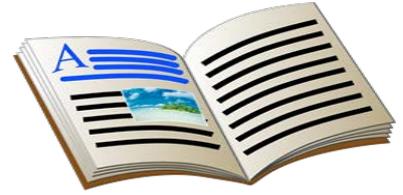
كلية العلوم والعلوم التطبيقية

Département de génie électrique

## Polycopié de cours

En : Télécommunications

Niveau : 3<sup>ème</sup> année Licence



---

# Ondes et Propagation

---

Par : Dr. ALIMOHAD Abdenmour

Année : 2018/2019

## Liste des figures

<b>Figure I.1</b> Représentation d'un vecteur en coordonnées cartésiennes.....	2
<b>Figure I.2</b> Courbe quelconque.....	7
<b>Figure I.3</b> Représentation d'un point M en coordonnées cylindriques.....	8
<b>Figure I.4</b> Représentation d'un point M en coordonnées sphériques.....	10
<b>Figure I.5</b> Représentation d'une force $F_{ab}$ résultant de l'interaction de deux charges $Q_a$ et $Q_b$ .....	11
<b>Figure I.6.</b> Champ magnétique créé par un élément $dl$ parcouru par un courant $I_a$ .....	13
<b>Figure I.7</b> Comportement du champ magnétique pour une géométrie d'interface à composantes normales.....	16
<b>Figure I.8</b> Comportement du champ magnétique pour une géométrie d'interface à composantes tangentielles.....	17
<b>Figure I.9</b> Comportement des champs pour une conductivité non nulle.....	18
<b>Figure II.1</b> : Représentation de la propagation d'une onde électromagnétique suivant la direction $z$ positive.....	25
<b>Figure II.2.</b> Exemple de transmission/réflexion d'une onde électromagnétique à l'interface de deux milieux.....	31
<b>Figure II.3.</b> Exemple de transmission/réflexion d'une onde électromagnétique à l'interface de deux milieux.....	32
<b>Figure III.1</b> Illustration d'une onde stationnaire où $\vec{E}$ est en sinus et $\vec{B}$ en cosinus.....	39
<b>Figure IV.1</b> : Réflexion et transmission d'une onde en incidence normale sur une interface plane.....	44
<b>Figure IV.2</b> : Réflexion et transmission d'une onde en incidence oblique sur une interface plane: (a) polarisée perpendiculairement (b) polarisée parallèlement.....	46

## Liste des tableaux

<b>Tableau II.1</b> : Permittivité relative de quelques matériaux.....	21
<b>Tableau III.1</b> : Conductivités de quelques types de sols.....	42

## Préface

Les ondes électromagnétiques ont connu un grand intérêt ces dernières années. Cet intérêt est entrainé par le développement des télécommunication sans fils. La téléphonie mobile, la télévision satellitaire, le radar, ...etc. sont des applications des systèmes de télécommunications. Dans tous ces systèmes, l'information doit être traitée, transmise, puis réceptionnée. Le concepteur du système doit prendre en considération les conditions de transmission résultant de l'environnement, du climat...etc. Ces derniers influencent énormément l'onde transmise dans l'espace.

Ce cours traite du problème de la propagation des ondes électromagnétiques. Il est destiné aux étudiants de 3<sup>ème</sup> année licence, spécialité télécommunications. Il est le fruit de plusieurs années d'enseignement dans l'université Dr Yahia Fares de MEDEA puis dans l'université Akli Mohand Oulhadj de BOUIRA.

Le chapitre I de ce cours commence par des rappels mathématiques sur l'algèbre vectorielle, nécessaire à la compréhension des concepts physiques de la propagation des ondes électromagnétiques. Les équations de Maxwell ont, ensuite, été établies. Dans les chapitre II et III nous avons étudié l'influence des milieux diélectrique, conducteur, et dissipatifs sur la propagation des ondes électromagnétiques. Les phénomènes de réflexion et de réfraction se produisent à l'interface de deux milieux différents. Ces phénomènes font l'objet du chapitre IV. Dans le chapitre V, nous avons passé en revue les aspects de la propagation des ondes hertziennes. Notamment, l'influence de la structure et les paramètres de l'atmosphère et du sol sur l'onde électromagnétique.

Afin de renforcer les connaissances théoriques développées dans ce cours, une partie contenant des exercices d'application et d'illustration est donnée en annexe.

## Sommaire

Liste des figures.....	I
Liste des tableaux.....	II
Préface.....	III

### **Chapitre I :** Équations de Maxwell

I.1	Introduction.....	1
I.2	Rappels sur les opérateurs scalaires et vectoriels.....	1
	I.2.a Algèbre vectoriel.....	1
	I.2.b Flux et divergence.....	5
	I.2.c Théorème de Stokes.....	6
I.3.	Coordonnées curvilignes .....	7
	I.3.a. Coordonnées cylindriques.....	7
	I.3.b. Coordonnées sphériques.....	9
I.4	Notions d'électrostatique et de magnétostatique .....	11
	I.4.a Loi de Coulomb.....	11
	I.4.b Loi de Biot et Savart .....	13
I.5	Equations de Maxwell .....	14
	1.5.1 Signification physique des équations de Maxwell .....	15
I.6	Conditions d'interface aux limites .....	16
I.7	Onde électromagnétique.....	18
	I.7.1 Onde plane dans le vide.....	19
I.8	Puissance électromagnétique (Vecteur de Poynting).....	20
I.9	Conclusion.....	20

### **Chapitre II :** Propagation des ondes électromagnétiques dans les milieux diélectriques

II.1	Introduction .....	21
II.2	Notion d'onde.....	22
II.3	Propagation d'onde électromagnétique dans le vide.....	23
II.4	Paramètres caractéristiques de l'onde électromagnétique dans le vide.....	26

II.4.1	Puissance .....	26
II.4.2	Impédance caractéristique .....	27
II.5	Les ondes électromagnétiques dans les diélectriques (ou isolants).....	28
II.5.1	Polarisation de l'onde électromagnétique.....	29
II.5.2	Réflexion/transmission entre deux milieux .....	30
II.5.2.1	Incidence normale .....	30
II.5.2.2	Incidence oblique.....	31
I.9	Conclusion.....	31

**Chapitre III :** Propagation des ondes électromagnétiques dans les milieux conducteurs  
et les milieux dissipatifs

III.1.	Introduction.....	33
III.2	Propagation d'onde électromagnétique dans un conducteur.....	33
III.3	Paramètres caractéristiques de l'onde électromagnétique dans le conducteur.....	35
III.3.1	Effet de peau.....	35
III.3.2	Impédance caractéristique et vitesse de l'onde.....	37
III.4	Réflexion sur une surface conductrice parfaite et ondes stationnaires.....	37
III.5	Equations de Maxwell et équation de propagation dans un milieu dissipatif.....	39
III.5.1	Relation de dispersion.....	40
III.5.2	Caractéristiques électriques du sol.....	41
III.6	Conclusion.....	42

**Chapitre IV :** Réflexion et réfraction d'ondes planes

IV.1.	Introduction.....	43
IV.2	Incidence normale dans le milieu sans pertes.....	43
IV.3	Incidence oblique dans le milieu sans pertes.....	46
IV.3.1	Polarisation perpendiculaire.....	47
IV.3.2	Polarisation parallèle.....	49
IV.3.3	Transmission totale.....	51
IV.3.4	Réflexion totale.....	54
IV.4	Conclusion.....	55

## Chapitre V : Propagation des ondes Hertziennes.

V.1.	Introduction.....	56
V.2	Structure atmosphérique de la terre.....	56
V.3	Paramètres de l'atmosphère.....	57
	V.3.1 Pression atmosphérique.....	57
	V.3.2 Température.....	58
	V.3.3 Humidité relative.....	58
	V.3.4 Pression partielle de la vapeur d'eau.....	58
V.4	Phénomènes climatiques.....	59
	V.4.1 Durée d'ensoleillement .....	59
	V.4.2 Rayonnement solaire .....	59
	V.4.3 Evaporation.....	59
	V.4.4 Condensation.....	59
	V.4.5 Vent.....	59
	V.4.6 Précipitations.....	60
V.5	Différents modes de la propagation atmosphérique.....	60
	IV.5.1 Propagation par onde de surface ou de sol.....	61
	IV.5.2 Propagation ionosphérique.....	61
	IV.5.3 Propagation troposphérique.....	62
	IV.5.4 Propagation par diffraction troposphérique.....	62
V.6	Conclusion.....	63
	Bibliographie.....	64
	Annexe A.....	65
	Annexe B.....	67

# **Chapitre I : Équations de Maxwell**

## **Plan du chapitre**

- I.1 Introduction
- I.2 Rappels sur les opérateurs scalaires et vectoriels
- I.3 Les équations de Maxwell
- I.4 Onde électromagnétique
- I.5 Puissance électromagnétique (vecteur de Poynting).
- I.6 Conditions d'interface aux limites
- I.7 Onde électromagnétique
- I.8 Puissance électromagnétique (Vecteur de Poynting)
- I.9 Conclusion

## **I.1 Introduction**

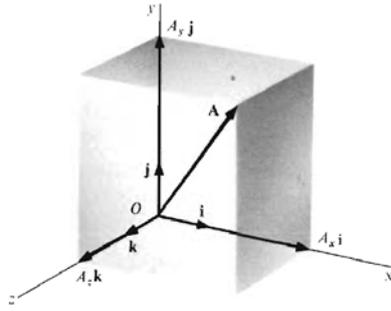
L'étude de la propagation d'ondes, qu'il s'agit d'ondes acoustiques, électromagnétique, ou de lumière, est primordiale pour la développement des systèmes de télécommunication. Car très utilisée pour la transmission des informations.

Dans ce chapitre nous allons étudier les équations de Maxwell sur lesquelles se base la propagation des ondes électromagnétiques.

## **I.2 Rappels sur les opérateurs scalaires et vectoriels**

### **I.2.a Algèbre vectorielle**

Un vecteur est caractérisé par ses trois composantes le long de trois axes orthogonaux. Dans le système de coordonnées cartésiennes, par exemple, le vecteur  $\vec{A}$  a pour composantes  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $A_z$ .



**Figure I.1** Représentation d'un vecteur en coordonnées cartésiennes

Le vecteur  $\vec{A}$  peut être déterminé à l'aide d'une seule expression si l'on utilise les vecteurs unitaires  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  qui sont les vecteurs de longueur 1 dans les directions respectives des x, y, z positives.

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k} \quad \text{Eq I.1}$$

Le vecteur  $\vec{A}$  est la somme des trois vecteurs de modules  $A_x, A_y, A_z$  parallèles aux axes X, Y, Z respectivement.

Le module de  $\vec{A}$  est :

$$A = \|\vec{A}\| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}. \quad \text{Eq I.2}$$

On obtient la somme de deux vecteurs en ajoutant leurs composantes :

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x) \vec{i} + (A_y + B_y) \vec{j} + (A_z + B_z) \vec{k}. \quad \text{Eq I.3}$$

La soustraction est tout simplement une addition où le signe d'un des vecteurs est changé :

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) = (A_x - B_x) \vec{i} + (A_y - B_y) \vec{j} + (A_z - B_z) \vec{k}. \quad \text{Eq I.4}$$

Nous allons définir deux types de produits : le produit scalaire et le produit vectoriel.

Le produit scalaire est une quantité scalaire obtenue en multipliant le module du premier vecteur par le module du deuxième vecteur et par le cosinus de l'angle que font les deux vecteurs [1].

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A B \cos(\varphi - \theta). \quad \text{Eq I.5}$$

Le produit scalaire se calcul en fonction des composantes des vecteurs de la façon suivante :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \quad \text{Eq I.6}$$

D'après cette définition, le produit scalaire possède les propriétés de commutativité et de distributivité de la multiplication en arithmétique :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}. \quad \text{Eq I.7}$$

$$\text{et } \vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}. \quad \text{Eq I.8}$$

Le produit vectoriel entre deux vecteurs est un vecteur dont la direction est perpendiculaire au plan contenant les deux vecteurs initiaux, et dont l'amplitude est donnée par :

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |A B \sin(\varphi - \theta)|. \quad \text{Eq I.9}$$

Nous voyons que :

$$\vec{i} \times \vec{i} = 0, \vec{j} \times \vec{j} = 0, \vec{k} \times \vec{k} = 0.$$

$$\text{et } \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \text{ etc.}$$

Le produit vectoriel se calcul en fonction des composantes des vecteurs de la façon suivante:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}. \quad \text{Eq I.10}$$

La dérivée dans le temps d'un vecteur est donnée par :

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dA_x}{dt} \vec{i} + \frac{dA_y}{dt} \vec{j} + \frac{dA_z}{dt} \vec{k}. \quad \text{Eq I.11}$$

On donne les expressions suivantes des opérateurs mathématiques gradient (noté  $\overrightarrow{grad} = \vec{\nabla}$ ), divergence (notée  $div = \vec{\nabla} \cdot$ ), rotationnel (noté  $\overrightarrow{rot} = \vec{\nabla} \wedge$ ), et le Laplacien (noté  $\Delta$ ), en coordonnées scalaires dans un espace à trois dimensions. Tous ces opérateurs sont construits à partir de l'opérateur fondamental Nabla :  $\vec{\nabla}$ .

Soit un trièdre orthonormé  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ , et M un point de l'espace, de coordonnées  $(x, y, z)$  :

$$\vec{A} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z. \quad \text{Eq I.12}$$

La fonction  $f(M)$  est dite fonction scalaire de point ou champ scalaire si :  $f(M) = f(x, y, z)$

Le vecteur  $\vec{v}(M)$  est dit fonction vectorielle de point ou champ vectoriel si :

$$\vec{v}(M) = v_x(x, y, z) \vec{u}_x + v_y(x, y, z) \vec{u}_y + v_z(x, y, z) \vec{u}_z. \quad \text{Eq I.13}$$

Le gradient est défini à partir d'une fonction scalaire de point et a pour forme :

$$\overrightarrow{grad}(f) = \vec{\nabla}(f) = \frac{df}{dx} \vec{u}_x + \frac{df}{dy} \vec{u}_y + \frac{df}{dz} \vec{u}_z. \quad \text{Eq I.14}$$

$$\text{où : } \vec{\nabla} = \frac{d}{dx} \vec{u}_x + \frac{d}{dy} \vec{u}_y + \frac{d}{dz} \vec{u}_z. \quad \text{Eq I.15}$$

La divergence (notée  $div$ ) n'est définie qu'à partir d'une fonction vectorielle  $\vec{v}(M)$  de point et donne une fonction scalaire de point définie, en coordonnées cartésiennes par :

$$div \vec{v} = \frac{dv_x}{dx} + \frac{dv_y}{dy} + \frac{dv_z}{dz}. \quad \text{Eq I.16}$$

Le rotationnel d'un champ vectoriel peut être calculé en coordonnées cartésiennes par l'expression suivante :

$$\overrightarrow{rot}(\vec{v}) = \left(\frac{dv_z}{dy} - \frac{dv_y}{dz}\right)\vec{u}_x + \left(\frac{dv_x}{dz} - \frac{dv_z}{dx}\right)\vec{u}_y + \left(\frac{dv_y}{dx} - \frac{dv_x}{dy}\right)\vec{u}_z. \quad \text{Eq I.17}$$

Le Laplacien scalaire d'un champ scalaire est donné comme suit :

$$Lap(f) = \Delta f = \overrightarrow{div}(\overrightarrow{grad}(f)) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}(f) = \nabla^2(f). \quad \text{Eq I.18}$$

$\nabla^2$  se lit " del de "

En coordonnées cartésiennes on aura:

$$\nabla^2(f) = \frac{d^2f}{dx^2} + \frac{d^2f}{dy^2} + \frac{d^2f}{dz^2}. \quad \text{Eq I.19}$$

Le Laplacien vectoriel d'un champ vectoriel est donné comme suit :

$$\nabla^2 \vec{v} = \Delta \vec{v} = \overrightarrow{grad}(\overrightarrow{div}(\vec{v})) - \overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}(\vec{v})) = \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot (\vec{v}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}). \quad \text{Eq I.20}$$

En coordonnées cartésiennes, nous obtenons :

$$lap(\vec{v}) = \begin{cases} \Delta v_x = \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \\ \Delta v_y = \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \\ \Delta v_z = \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \end{cases} \quad \text{Eq I.21}$$

## I.2.b Flux et divergence

Le flux d'un vecteur  $\vec{A}$  à travers une surface infinitésimale  $\vec{ds}$  est défini par :

$$d\phi = \vec{A} \cdot \vec{ds}. \quad \text{Eq I.22}$$

où le vecteur  $\vec{ds}$  représente l'élément de surface qui est normal à la surface.

Pour une surface finie, on trouve le flux total en intégrant  $d\Phi$  sur toute la surface.

$$\Phi = \int_S \vec{A} \cdot d\vec{s} \quad \text{Eq I.23}$$

Le flux total sortant de l'élément de volume  $d\tau$  est :

$$d\phi_{tot} = \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) d\tau \quad \text{Eq I.24}$$

Pour un volume fini, le flux total sortant se calcule par :

$$d\phi_{tot} = \int_{\tau} \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) d\tau \quad \text{Eq I.25}$$

La quantité  $\left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right)$  représente le flux sortant par unité de volume. Cette quantité est appelée la divergence du vecteur  $\vec{A}$  en ce point de volume.

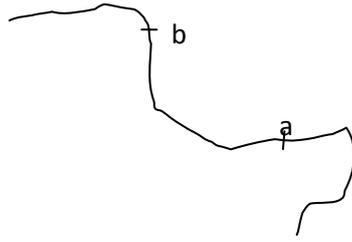
Le flux total sortant est aussi égal au flux sortant de la surface fini du vecteur  $\vec{A}$ , d'où :

$$\Phi = \int_S \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int_{\tau} \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) d\tau = \int_{\tau} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} d\tau. \quad \text{Eq I.26}$$

C'est le théorème de divergence. Appelé aussi théorème de Green.

### I.2.c Théorème de Stokes

Sur une courbe déterminée le calcul de l'intégrale d'un point a à un point b de la courbe est appelé calcul d'intégrale curviligne (voir figure I.2).



**Figure I.2** Courbe quelconque

Le théorème de Stokes stipule que l'intégrale curviligne le long d'une courbe est égale à l'intégrale de surface sur n'importe quelle surface s'appuyant sur cette courbe. Nous obtenons donc;

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} \quad \text{Eq I.27}$$

**Remarque :** On dit que le champ de vecteur  $\vec{A}$  est conservatif si :

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \text{Eq I.28}$$

D'après le théorème de Stokes, le champ de vecteur  $\vec{A}$  est conservatif si l'on peut exprimer  $\vec{A}$  comme le gradient d'une fonction.

### I.3. Coordonnées curvilignes

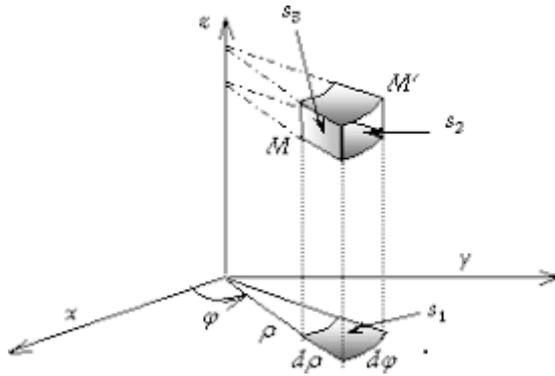
A cause des symétries qui existent dans certains problèmes, il est souvent utile d'utiliser d'autres systèmes de coordonnées que les coordonnées cartésiennes.

Nous nous limitons dans notre cours aux deux systèmes les plus fréquemment utilisés, à savoir, les coordonnées cylindriques et les coordonnées sphériques.

#### I.3.a. Coordonnées cylindriques

En coordonnées cylindriques, comme le montre la figure (I.3), la position d'un point M de l'espace est repérée par  $\rho$ ,  $\varphi$ , et  $z$ .

Au point M, on définit trois directions orthogonales deux à deux, caractérisées par les vecteurs unitaires suivants :



**Figure I.3** Représentation d'un point M en coordonnées cylindriques

- $\vec{\rho}_1$  dans la direction de la perpendiculaire à l'axe des z passant par M.
- $\vec{\varphi}_1$  dans la direction de la perpendiculaire au plan contenant le point M et l'axe des z dans le sens des  $\varphi$  croissant.
- $\vec{z}_1$  dans le sens des z croissant.

Le vecteur décrivant la position du point M est :

$$\vec{r} = \rho \vec{\rho}_1 + z \vec{z}_1 \quad \text{Eq I.29}$$

Pour des accroissement quelconques  $d\rho$ ,  $d\varphi$ , et  $dz$ , nous aurons :

$$d\vec{r} = d\rho \vec{\rho}_1 + \rho d\varphi \vec{\varphi}_1 + dz \vec{z}_1 \quad \text{Eq I.30}$$

$$\text{et } dr = \sqrt{(d\rho)^2 + (\rho d\varphi)^2 + (dz)^2} \quad \text{Eq I.31}$$

L'élément de volume dont les cotés sont les déplacements correspondant aux accroissement définis plus haut :

$$d\tau = \rho d\rho d\varphi dz \quad \text{Eq I.32}$$

L'expression du gradient pour une fonction scalaire  $f$  est donnée par :

$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \vec{\rho}_1 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{\varphi}_1 + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{z}_1 \quad \text{Eq I.33}$$

La divergence d'un vecteur  $\vec{A}$  est donnée par :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad \text{Eq I.34}$$

Le rotationnel dans ce cas est donné par :

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \vec{\rho}_1 & \vec{\rho}\varphi_1 & \vec{z}_1 \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix} \quad \text{Eq I.35}$$

Le Laplacien d'une fonction scalaire est donné par :

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad \text{Eq I.36}$$

### I.3.b. Coordonnées sphériques

En coordonnées sphériques la position d'un point  $M'$  est repérée par  $\rho$ ,  $\theta$ , et  $\phi$  où  $\rho$  est la distance de l'origine à  $M'$ ,  $\theta$  est l'angle entre l'axe des  $z$  et le rayon vecteur et  $\phi$  représente l'angle azimutal (comme illustrée dans la figure I.4).

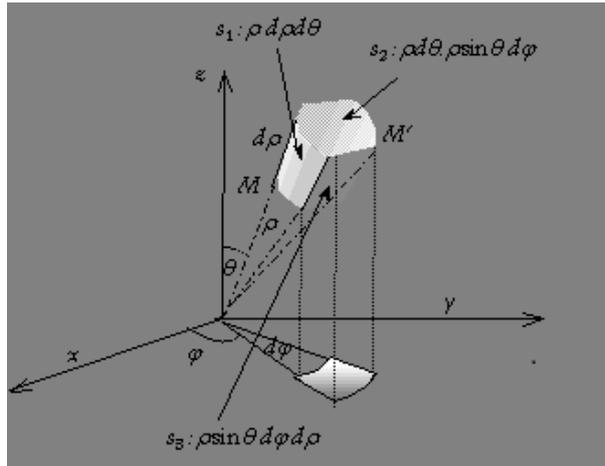


Figure I.4 Représentation d'un point M en coordonnées sphériques

L'élément de longueur correspondant à des accroissements des coordonnées est :

$$\vec{dr} = d\rho \vec{\rho}_1 + \rho d\theta \vec{\theta}_1 + \rho \sin\theta d\varphi \vec{\varphi}_1 \quad \text{Eq I.37}$$

$$\text{où } dr = \sqrt{(d\rho)^2 + (\rho d\theta)^2 + (\rho \sin^2\theta d\varphi)^2} \quad \text{Eq I.38}$$

L'élément de volume au point M' est donné par :

$$d\tau = \rho^2 \sin\theta d\rho d\theta d\varphi \quad \text{Eq I.39}$$

L'expression du gradient pour une fonction scalaire f est donnée par :

$$\vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \vec{\rho}_1 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{\theta}_1 + \frac{1}{\rho \sin\theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{\varphi}_1 \quad \text{Eq I.40}$$

La divergence d'un vecteur  $\vec{A}$  est donnée par :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{2}{\rho} A_\rho + \frac{\partial A_\rho}{\partial \rho} + \frac{A_\rho}{\rho} \cot \theta + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho \sin\theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \quad \text{Eq I.41}$$

Le rotationnel dans ce cas est donné par :

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \vec{\rho}_1 & \rho \vec{\theta}_1 & \rho \sin \theta \vec{\varphi}_1 \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_\rho & \rho A_\theta & \rho \sin \theta A_\varphi \end{vmatrix} \quad \text{Eq I.42}$$

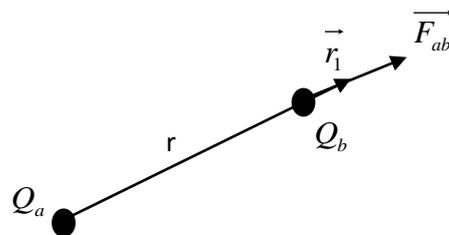
Le Laplacien d'une fonction scalaire en coordonnées cartésiennes est donné par :

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} + \frac{\cot g \theta}{\rho^2} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \quad \text{Eq I.43}$$

## I.4 Notions d'électrostatique et de magnétostatique

### I.4.a Loi de Coulomb

Soient deux charges électriques  $Q_a$  et  $Q_b$  distant de  $r$ , telles que montrées par la figure I.5.



**Figure I.5** Représentation d'une force  $F_{ab}$  résultant de l'interaction de deux charges  $Q_a$  et  $Q_b$

Expérimentalement, on a trouvé que :

$$\vec{F}_{ab} = K \frac{Q_a Q_b}{r^2} \vec{r}_1 \quad \text{Eq I.44}$$

où :  $\vec{F}_{ab}$  est la force exercée sur  $Q_b$  par  $Q_a$

$Q_a, Q_b$  : sont des charges immobiles.

$K$  : constante de proportionnalité. ( $K=9 \cdot 10^9$ )

$r$ : distance entre les deux charges.

$\vec{r}_1$  : Vecteur unitaire dirigé de  $Q_a$  vers  $Q_b$ .

La force est répulsive quand  $Q_a$  et  $Q_b$  sont de même signe comme sur la figure. Elle est attractive quand les deux charges sont de signes contraires.

Dans le système MKSA :

$F_{ab}$  s'exprime en Newton.

$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$  où  $\epsilon_0$  est la permittivité du vide ( $\epsilon_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12}$  Farad /mètres).

$r$ : en mètres.

Le champ électrique est défini comme la force qui s'exercerait sur une charge test égale à l'unité, placée dans le champ. Le champ électrique créé par la charge  $Q_a$  est :

$$\vec{E}_a = \frac{\vec{F}_{ab}}{Q_b} = \frac{Q_a}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{r}_1 \quad \text{Eq I.45}$$

$\vec{E}_a$  est mesuré en volts / mètres.

Pour une distribution de charges, le champ total produit est :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau'} \frac{\rho \cdot \vec{r}_1}{r^2} d\tau' \quad \text{Eq I.46}$$

$\rho$  : est la densité de charge électrique au point de source ( $x',y',z'$ ).

$\vec{r}_1$  : est le vecteur unitaire.

$d\tau'$  : est l'élément de volume  $dx'dy'dz'$ .

### I.4.b Loi de Biot et Savart

Considérons deux courbes curvilignes parcourues par  $I_a$  et  $I_b$  respectivement. Pour des éléments de longueurs  $\vec{dl}_a$  et  $\vec{dl}_b$ , on a :

$$\vec{F}_{ab} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_a I_b \oint_a \oint_b \frac{\vec{dl}_b \times (\vec{dl}_a \times \vec{r}_1)}{r^2} \quad \text{Eq I.47}$$

En réécrivant l'équation I.47 comme ceci :

$$\vec{F}_{ab} = I_b \oint_a \vec{dl}_b \times \left( \frac{\mu_0}{4\pi} I_a \oint_b \frac{(\vec{dl}_a \times \vec{r}_1)}{r^2} \right) \quad \text{Eq I.48}$$

Nous aurons :

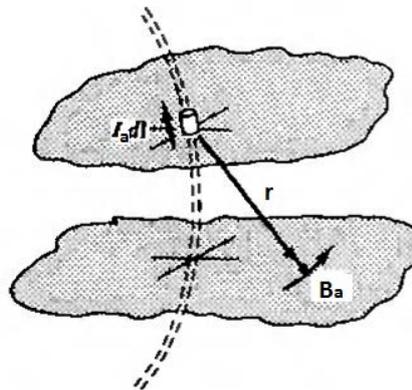
$$\vec{F}_{ab} = I_b \oint_b \vec{dl}_b \times \vec{B}_a \quad \text{Eq I.49}$$

où :

$$\vec{B}_a = \frac{\mu_0}{4\pi} I_a \oint_b \frac{(\vec{dl}_a \times \vec{r}_1)}{r^2} \quad \text{Eq I.50}$$

est le champ magnétique (historiquement appelé induction magnétique) créé à l'endroit où se trouve l'élément  $\vec{dl}_b$  du circuit b par le courant  $I_a$  parcourant le circuit a.

Cette situation est montrée représentée dans la figure I.6



**Figure I.6.** Champ magnétique créé par un élément  $dl$  parcouru par un courant  $I_a$

Le champ magnétique est exprimé en Teslas ou en Webers / mètres<sup>2</sup> (1 Tesla=1 Weber/m<sup>2</sup> = 10<sup>4</sup> gauss).

L'équation donnant  $\vec{B}_a$  est la loi de Biot et Savart.

Si le courant  $I$  est réparti dans l'espace avec une densité de courant  $\vec{J}_l$  ampères/m<sup>2</sup>, il faut remplacer  $I$  par  $\vec{J}_l ds$ . On aura :

$$\vec{B}_a = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\tau'} \frac{(\vec{J}_l \times \vec{r}_1)}{r^2} d\tau' \quad \text{Eq I.51}$$

## I.5 Equations de Maxwell

Dans le cas des milieux homogènes, linéaires et isotropes, les équations de Maxwell sont regroupées comme suit [3] :

$$1. \quad \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad \text{Eq I.52}$$

dont la forme intégrale est :

$$\int_s \vec{E} \vec{ds} = \int_{\tau} \frac{\rho}{\varepsilon} d\tau. \quad \text{Eq I.53}$$

Appelée aussi équation de Maxwell-Gauss.

$$2. \quad \text{div } \vec{B} = 0 \quad \text{Eq I.54}$$

dont la forme intégrale est :

$$\int_s \vec{B} \vec{ds} = 0. \quad \text{Eq I.55}$$

Appelée aussi équation du flux magnétique.

$$3. \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{Eq I.56}$$

dont la forme intégrale est :

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_s \vec{B} \cdot d\vec{S} . \quad \text{Eq I.57}$$

Appelée aussi équation de Maxwell-Faraday.

$$4. \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu \left[ \vec{J} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] \quad \text{Eq I.58}$$

dont la forme intégrale est :

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_s \mu \left[ \vec{J} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] \cdot d\vec{S} . \quad \text{Eq I.59}$$

C'est l'équation de Maxwell-Ampère.

Les équations constitutives sont données par :

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad \text{Eq I.60}$$

où  $\vec{H}$  est l'induction magnétique (ou excitation magnétique).

$$\text{et : } \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad \text{Eq I.61}$$

où  $\vec{D}$  est le vecteur de déplacement électrique (ou excitation électrique).

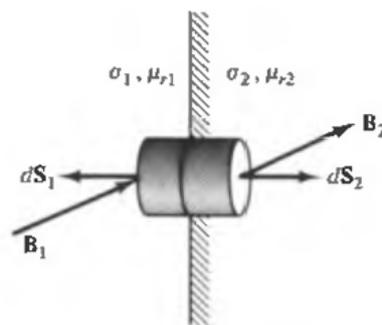
### 1.5.1 Signification physique des équations de Maxwell

- ✓ La première équation, dite équation de Maxwell-Gauss exprime le fait que le flux de champ électrique à travers une surface fermée est relié à la charge électrique contenue à l'intérieur de cette surface.

- ✓ La troisième équation exprime que le flux du champ magnétique à travers n'importe quelle surface fermée est nul. Il n'existe pas de monopôles magnétiques.
- ✓ La quatrième équation, dite de Maxwell-Ampère, exprime la relation entre la circulation du champ magnétique sur un contour fermé et le flux de courant à travers une surface s'appuyant sur ce contour.
- ✓ Enfin la deuxième équation, dite de Maxwell-Faraday, donne la relation entre la circulation du champ électrique sur un contour fermé et la variation temporelle du flux du champ magnétique à travers une surface qui s'appuie sur ce contour. C'est le phénomène d'induction.

## I.6 Conditions d'interface aux limites

Entre deux milieux caractérisés électriquement par ;  $\sigma_1, \mu_1$  et  $\sigma_2, \mu_2$ , le comportement des champs électriques et magnétiques est gouverné par les conditions aux limites [4]. (voir figure I.7)



**Figure I.7** Comportement du champ magnétique pour une géométrie d'interface à composantes normales.

Le flux des lignes de champ  $\vec{B}$  étant continu. Si les deux plans sont suffisamment proches, Nous aurons :

$$\int_{\text{lim1}} \vec{B}_1 \cdot \overrightarrow{dS_1} = \int_{\text{lim2}} \vec{B}_2 \cdot \overrightarrow{dS_2} \quad \text{Eq I.62}$$

$$\text{où } -B_{n1} \int_{\text{lim1}} \overrightarrow{dS_1} + B_{n2} \int_{\text{lim2}} \overrightarrow{dS_2} = 0$$

Donc :  $B_{n1} = B_{n2}$

En d'autres mots, la composante normale de B est continue à travers une interface.

L'induction magnétique correspondant à une interface à composantes tangentielles :

$$H_{t1} = H_{t2} \quad \text{Eq I.62}$$

Donc, la composante tangentielle de  $\vec{H}$  est continue à travers une interface libre de charges.

De même pour le champ électrique, en l'absence de charges électriques à l'interface on a :

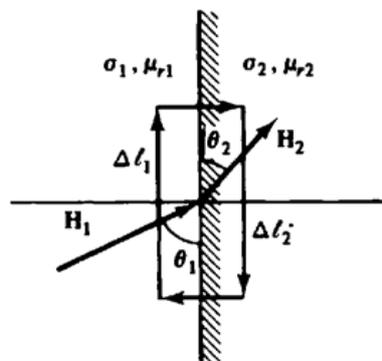
$$B_{n1} = B_{n2} \quad \text{Eq I.63}$$

$$\text{et : } E_{t1} = E_{t2} \quad \text{Eq I.64}$$

L'équation suivante :

$$\frac{\text{tg } \theta_1}{\text{tg } \theta_2} = \frac{\mu_{r2}}{\mu_{r1}} \quad \text{Eq I.65}$$

Donne la relation entre les angles faits par  $H_1$  et  $H_2$  avec l'interface (voir figure I.8).



**Figure I.8** Comportement du champ magnétique pour une géométrie d'interface à composantes tangentielles.

De même pour le champ électrique :

$$\frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\operatorname{tg} \theta_2} = \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} \quad \text{Eq I.66}$$

Dans le cas où le matériau à l'interface a une conductivité non nulle (voir figure I.9), un courant peut exister.

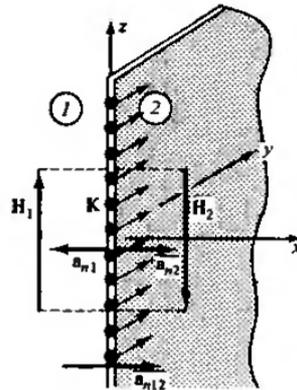


Figure I.9 Comportement des champs pour une conductivité non nulle.

Dans ce cas, on aura :

$$(\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \times \vec{a}_{n12} = \vec{J} \quad \text{Eq I.66}$$

où  $\vec{a}_{n12}$  est un vecteur unitaire dirigé de la région 1 vers la région 2.  $\vec{J}$  étant la densité du courant à l'interface.

## I.7 Onde électromagnétique

Les ondes électromagnétiques regroupent un large spectre de phénomènes physiques et d'applications : les ondes radio, la lumière visible, les rayons X, etc.

### I.7.1 Onde plane dans le vide

L'équation d'onde électromagnétique est obtenue à partir des équations de Maxwell. Le rotationnel de la relation de Maxwell-Faraday donne :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}) = -\overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) \quad \text{Eq I.67}$$

D'autre part on a :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{E}) - \Delta\vec{E} \quad \text{Eq I.68}$$

En remplaçant ce résultat dans l'équation précédente, nous aurons :

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{Eq I.69}$$

$$\text{où : } c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \quad \text{Eq I.70}$$

est la célérité ou la vitesse de la lumière.

De même, on peut montrer que :

$$\Delta\vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{Eq I.71}$$

Ces deux équations d'ondes pour les champs électriques et magnétiques

## I.8 Puissance électromagnétique (Vecteur de Poynting)

Le vecteur de Poynting décrit l'amplitude et la direction du flux de puissance, transporté par une onde sur une surface plane. Cette quantité est appelée densité de puissance. Elle s'exprime en W/m<sup>2</sup> et elle est donnée par l'équation suivante:

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H} \quad \text{Eq I.72}$$

En général, on utilise la puissance moyenne qui représente la puissance réellement transportée par une onde. Elle est déterminée par :

$$P_{\text{moy}} = \frac{1}{2} E_0 H_0 \quad \text{Eq I.73}$$

## I.9 Conclusion

Dans ce chapitre, on a développé les quatre équations de Maxwell permettant de mettre en évidence le caractère de propagation d'une onde électromagnétique. Nous avons aussi défini quelques paramètres importants comme l'onde plane et le vecteur de Poynting nécessaires à l'étude de la propagation dans différentes situations et dans plusieurs milieux.

## Chapitre II : Propagation des ondes électromagnétiques dans les milieux diélectriques

### Plan du chapitre

- II.1 Introduction
- II.2 Notion d'onde
- II.3 Propagation d'onde électromagnétique dans le vide
- II.4 Paramètres caractéristiques de l'onde électromagnétique dans le vide
- II.5 Les ondes électromagnétiques dans les diélectriques (ou isolants)
- II.6 Conclusion

### II.1 Introduction

Un diélectrique est un milieu matériel qui ne conduit pas le courant électrique, c'est-à-dire dans lequel il n'y a pas intrinsèquement de charges électriques susceptibles de se déplacer de façon macroscopique, il est aussi capable de se polariser sous l'application d'un champ électrique.

La permittivité relative  $\epsilon_r$  est un nombre sans dimension qui vaut 1 dans le vide, et est supérieure à 1 dans un milieu matériel. La permittivité relative des matériaux dépend principalement du nombre de dipôles induits par unité de volume (la densité numérique mesurée en  $m^{-3}$ ), mais également des interactions entre ces dipôles. De plus, la présence d'un dipôle permanent porté par un atome ou une molécule influence la permittivité relative. Ainsi la permittivité des gaz est très proche de l'unité, tandis que la permittivité des liquides peut atteindre plusieurs dizaines [5]. Quelques valeurs sont proposées dans le tableau ci-dessous. D'autres valeurs peuvent être trouvées dans l'annexe A.2

**Tableau II.1** : Permittivité relative de quelques matériaux

phase	fluide	$\epsilon_r$
gaz	air	1.00054
	O <sub>2</sub>	1.00049
	CO <sub>2</sub>	1.00092
	CH <sub>4</sub>	1.00081
	C <sub>4</sub> H <sub>10</sub>	1.00258
liquide	eau	78
	trichloroéthylène	3.42
	éthanol	24.3
	glycérol	42.5

## II.2 Notion d'onde

Toute perturbation peut se déplacer comme une onde. La voix humaine en est un exemple. Ainsi, la pression de l'air qui sort à travers les lèvres fluctue et la perturbation produite se propage vers l'extérieur.

Soit  $p$  une onde sonore représentant la pression de l'air. Considérons le cas où cette onde se déplace suivant l'axe des  $z$  sans atténuation. En  $z=0$ , on a :

$$p = p_m \cos \omega t \quad \text{Eq II.1}$$

Dans ce cas la phase de cette onde est  $\omega t$ . Sur une distance  $z$ , et à une vitesse constante  $v$ . L'onde aura pour forme :

$$p = p_m \cos \left[ \omega \left( t - \frac{z}{v} \right) \right] \quad \text{Eq II.2}$$

Cette équation définit une onde plane sinusoïdale non atténuée [2]. Les fronts d'onde sont normaux à l'axe des  $z$ .

Il est plus commode d'écrire  $p$  comme :

$$p = p_m \cos(\omega t - kz). \quad \text{Eq II.3}$$

$$\text{où : } k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \quad \text{Eq II.4}$$

est le nombre d'onde. La quantité  $\lambda$  est la longueur d'onde réduite.

En forme complexe,  $p$  s'écrit comme :

$$p = p_m \exp j(\omega t - kz). \quad \text{Eq II.5}$$

L'équation différentielle :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad \text{Eq II.6}$$

est vérifiée par l'équation  $p$ .

En trois dimension, l'équation différentielle devient :

$$\Delta p - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad \text{Eq II.7}$$

Si on considère une onde plane dans une direction arbitraire, l'expression de  $p$  devient :

$$p = p_m \exp j(\omega t - \vec{k}\vec{r}). \quad \text{Eq II.8}$$

L'équation différentielle en coordonnées cartésiennes à trois dimensions est donnée par :

$$\begin{aligned} \Delta E_x - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} &= 0 \\ \Delta E_y - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} &= 0 \\ \Delta E_z - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad \text{Eq II.9}$$

En additionnant les trois équations, on trouve que :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{Eq II.10}$$

C'est l'équation d'onde pour  $\vec{E}$  à trois dimensions.

### II.3 Propagation d'onde électromagnétique dans le vide

Le comportement électrique des matériaux soumis à un champ électromagnétique est caractérisé par ses paramètres constitutives ( $\epsilon$ ,  $\mu$ , et  $\sigma$ ).

Les matériaux dont les paramètres constitutives ne sont par fonction du champ appliqué sont dits linéaires, sinon ils sont appelés non linéaires.

Lorsque ces paramètres ne sont pas fonction de la position, ils sont dits homogènes.

Les matériaux ayant des paramètres constitutives dépendant de la fréquence sont dits dispersifs.

Le caractère isotropique des matériaux résulte de la dépendance des paramètres constitutives de la direction du champ électromagnétique appliqué.

Considérons la cas du vide supposé linéaire, isotropique, homogène et non dispersif. On a montré, dans le chapitre précédent, que l'onde électromagnétique peut se déplacer à la vitesse de la lumière  $c$ . Ceci se traduit pour les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  par :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \text{ et } \Delta \vec{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{Eq II.11}$$

Si on considère le cas d'une onde plane sinusoïdale qui se propage dans la direction  $z$  positive. Nous aurons donc :

$$\vec{E} = \vec{E}_m \exp j(\omega t - kz), \quad \vec{H} = \vec{H}_m \exp j(\omega t - kz) \quad \text{Eq II.12}$$

où  $\vec{E}_m$  et  $\vec{H}_m$  sont des vecteurs représentant l'amplitude de l'onde, ils ne dépendent pas du temps ni des coordonnées. Dans ce cas (le vide)  $k=k_0$ .

$$k_0 = \frac{1}{\lambda_0} = \frac{\omega}{c} = \omega(\epsilon_0 \mu_0)^{1/2} \quad \text{Eq II.13}$$

En représentation complexe, nous avons :

$$\frac{\partial}{\partial t} = j\omega \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z = -jk \vec{u}_z \quad \text{Eq II.14}$$

En utilisant ses résultats, on réécrit les équations de Maxwell comme suit :

$$-jk_0 \vec{u}_z \cdot \vec{E} = 0 \quad \text{Eq II.15}$$

$$-jk_0 \vec{u}_z \times \vec{E} = -j\omega \mu_0 \vec{H} \quad \text{Eq II.16}$$

$$-jk_0 \vec{u}_z \cdot \vec{H} = 0 \quad \text{Eq II.17}$$

$$-jk_0 \vec{u}_z \times \vec{H} = j\omega_0 \epsilon_0 \vec{E} \quad \text{Eq II.18}$$

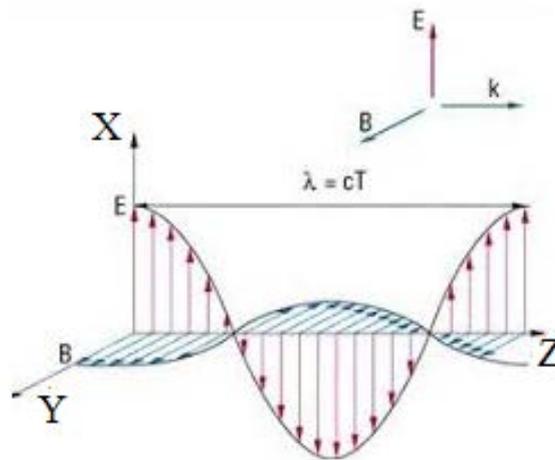
Ce qui donne :

$$\vec{u}_z \cdot \vec{E} = 0 \quad \text{Eq II.19}$$

$$\vec{H} = \frac{k_0}{\omega\mu_0} \vec{u}_z \times \vec{E} = \frac{\vec{k}_0 \times \vec{E}}{\omega\mu_0} \quad \text{Eq II.20}$$

$$\vec{u}_z \cdot \vec{H} = 0 \quad \text{Eq II.21}$$

$$\vec{E} = -\frac{\vec{k}_0 \times \vec{H}}{\omega\epsilon_0} \quad \text{Eq II.22}$$



**Figure II.1 :** Représentation de la propagation d'une onde électromagnétique suivant la direction z positive.

Comme représentés par la figure II.1, les équations II.19 et II.21 montrent que  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  sont perpendiculaires à la direction de propagation z, ou transverses. Les deux équations restantes montrent que les deux champs électrique et magnétique sont orthogonaux entre eux.

## II.4 Paramètres caractéristiques de l'onde électromagnétique dans le vide

### II.4.1 Puissance

On a défini, dans le chapitre I, la densité de puissance dans un champ électromagnétique par le vecteur de Poynting donné par :

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad \text{Eq II.23}$$

Ce vecteur est orienté dans la direction de propagation. Il donne la puissance de l'onde électromagnétique par unité de surface.

La moyenne temporelle du vecteur de Poynting est donné par :

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*) \quad \text{Eq II.24}$$

Dans le cas particulier d'une onde qui se propage dans le vide suivant la direction Z positive, on aura :

$$\vec{S}_{\text{moy}} = \frac{1}{2} E_m H_m \vec{u}_z \quad \text{Eq II.25}$$

où  $E_m$  et  $H_m$  représentent les amplitudes des champs électrique et magnétique respectivement.

En représentation sinusoïdale, nous avons :

$$\vec{E} = \vec{E}_m \cos(\omega t - kz), \quad \vec{H} = \vec{H}_m \cos(\omega t - kz) \quad \text{Eq II.26}$$

Le module du vecteur de Poynting est :

$$|\vec{S}| = |\vec{E} \times \vec{H}| = E_m H_m \cos^2(\omega t - k_0 z) \quad \text{Eq II.27}$$

## II.4.2 Impédance caractéristique

On définit l'impédance caractéristique du milieu de propagation par le rapport des modules des champs électrique  $E$  et magnétique  $H$ .

$$Z_0 = \frac{E}{H} = \frac{k_0}{\omega \varepsilon_0} = \frac{\omega \mu_0}{k_0} \quad \text{Eq II.28}$$

En remplaçant  $k_0$  de l'équation II.13 dans l'équation II.26 nous obtenons :

$$Z_0 = \left( \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \right)^{1/2} = 377 \Omega \quad \text{Eq II.29}$$

On constate que ce rapport est réel. Par conséquent, les deux vecteurs  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  sont en phase. Il est clair qu'en représentation sinusoïdale (équation II.26). L'impédance caractéristique est donnée par :

$$E_m / H_m = 377 \Omega$$

De plus, sachant que dans le vide la première équation constitutive est écrite comme :

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad \text{Eq II.30}$$

Le rapport :

$$\frac{E}{B} = \frac{1}{(\varepsilon_0 \mu_0)^{1/2}} = c \quad \text{Eq II.31}$$

La densité d'énergie totale varie suivant  $z$ , et sa moyenne temporelle en un point quelconque est donnée par :

$$\xi_{moy} = \frac{\varepsilon_0 E_{eff}^2}{2} + \frac{\mu_0 H_{eff}^2}{2} = \varepsilon_0 E_{eff}^2 = \mu_0 H_{eff}^2 \quad \text{Eq II.32}$$

## II.5 Les ondes électromagnétiques dans les diélectriques (ou isolants)

Les isolants sont caractérisés par des permittivités et des perméabilités relatives différentes de un.

L'équation d'onde dans ce cas peut être écrite comme :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{Eq II.33}$$

$$\text{avec : } v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}} = \frac{c}{n} \quad \text{Eq II.34}$$

$$n = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r} \quad \text{Eq II.35}$$

est appelé indice de réfraction.

L'onde électromagnétique se propage dans un milieu diélectrique avec une vitesse  $v$  inférieure à celle du vide d'un facteur  $n$ .

Le nombre d'onde en milieu diélectrique n'est rien d'autre que :

$$k = \frac{1}{\lambda} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} \quad \text{Eq II.36}$$

De même, l'impédance caractéristique est donnée par :

$$Z = \frac{E}{H} = \frac{k}{\omega\varepsilon} = \frac{\omega\mu}{k} = 377 \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} \Omega \quad \text{Eq II.37}$$

Là aussi, on constate que l'impédance caractéristique est réelle. Donc,  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  sont en phase.

Encore, le rapport des énergies électrique et magnétique est égale à l'unité ;

$$\frac{\varepsilon E^2 / 2}{\mu H^2 / 2} = \frac{\varepsilon}{\mu} \left( \frac{\mu}{\varepsilon} \right) = 1 \quad \text{Eq II.38}$$

La densité de puissance moyenne est calculée par le vecteur de Poynting. Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned}\vec{S}_{\text{moy}} &= \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{1/2} E_{\text{eff}}^2 \vec{u}_z = v \varepsilon E_{\text{eff}}^2 \vec{u}_z \\ &= \left(\frac{\varepsilon_r}{\mu_r}\right)^{1/2} \frac{E_{\text{eff}}^2}{377} \vec{u}_z \text{ W/m}^2\end{aligned}\tag{Eq II.39}$$

### II.5.1 Polarisation de l'onde électromagnétique

Le terme polarisation d'une onde plane est hérité de l'optique. Dans ce domaine la lumière est considérée comme un champ de vecteurs qui constitue le vecteur de polarisation. Les différents comportements de ce champ caractérisent les différents types de polarisations (polarisation rectiligne, circulaire, ...etc.). Le vecteur de polarisation n'est autre que le champ électrique associé à l'onde [6].

Considérons une onde qui se propage suivant  $z$ . Les composantes du champ électrique sont donc :

$$E_x = E_{0x} \exp j(\omega t - kz), \quad E_y = E_{0y} \exp j(\omega t - kz)\tag{Eq II.40}$$

Pour  $z=0$ , on aura :

$$E_x = E_{0x} \exp j(\omega t), \quad E_y = E_{0y} \exp j(\omega t)\tag{Eq II.41}$$

où  $E_{0x}$  et  $E_{0y}$  sont des composantes complexes.

En posant :

$$E_{0y} = E_{0x} \cdot \alpha \cdot \exp(j\varphi)\tag{Eq II.42}$$

où  $\alpha$  est un réel positif.

En réécrivant l'équation II.40 en notation réelle, et en remplaçant  $E_{0y}$  par sa valeur de l'équation II.42 nous obtenons :

$$E_x = E_{0x} \cos \omega t, \quad E_y = \alpha \cdot E_{0x} \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{Eq II.43}$$

1<sup>ier</sup> cas :  $\varphi = 0$ ,

$E_x$  et  $E_y$  restent proportionnelles quelque soit la valeur de  $t$ . L'extrémité du vecteur  $\vec{E}$  décrit un segment de droite. On dit que l'onde est polarisée rectilignement.

2<sup>ième</sup> cas :  $\varphi = \pm\pi/2$ , et  $\alpha = 1$

La polarisation est circulaire. Le signe du déphasage détermine le sens de rotation du vecteur  $\vec{E}$  autour de l'axe  $z$ . Pour un observateur placé à  $z = \infty$ , c'est-à-dire qui reçoit l'onde électromagnétique, la polarisation est circulaire droite si la rotation est dans le sens des aiguilles d'une montre. Dans le cas contraire, la polarisation est dite circulaire gauche.

3<sup>ième</sup> cas :  $\varphi = \pm\pi/2$ , et  $\alpha \neq 1$

La polarisation est dite elliptique droite ou gauche. Avec la même convention que pour la polarisation circulaire.

4<sup>ième</sup> cas :  $\varphi$  est quelconque

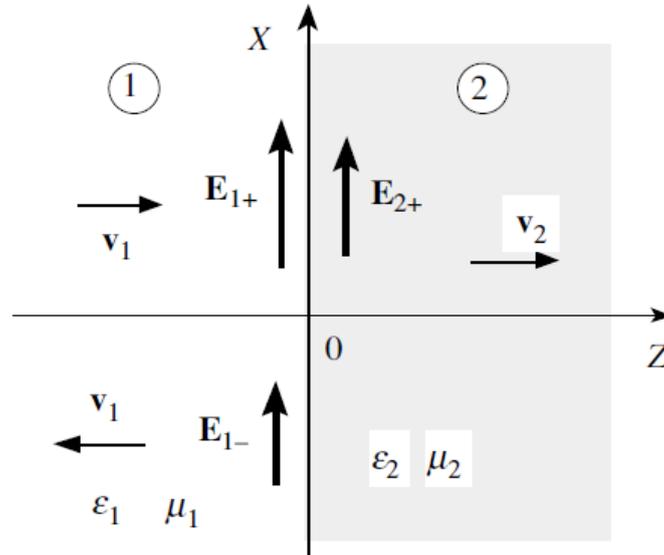
La polarisation est aussi elliptique. mais les axes principaux de l'ellipse ne sont pas confondus avec les axes  $y$  et  $z$  du repère de coordonnées.

## II.5.2 Réflexion/transmission entre deux milieux

### II.5.2.1 Incidence normale

L'incidence normale traite le problème de l'onde incidente perpendiculairement à une surface plane. Nous allons considérer le cas de l'incidence sur l'interface de deux diélectriques sans pertes.

Soit la figure II.2 représentant deux milieux supposés diélectriques caractérisés par  $(\mu_1, \epsilon_1)$  pour le milieu 1 et  $(\mu_2, \epsilon_2)$  pour le milieu 2. Ces deux milieux partagent une interface plane sur laquelle est incidente une onde plane provenant d'une source  $-\infty$ . Les diélectriques étant considérés sans pertes donc ;  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ , alors que les permittivités  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  sont réelles. On constate alors qu'une partie de l'énergie incidente est réfléchie dans la direction  $-Z$  et qu'une autre partie est transmise (ou réfractée) dans le deuxième milieu suivant  $Z$ .

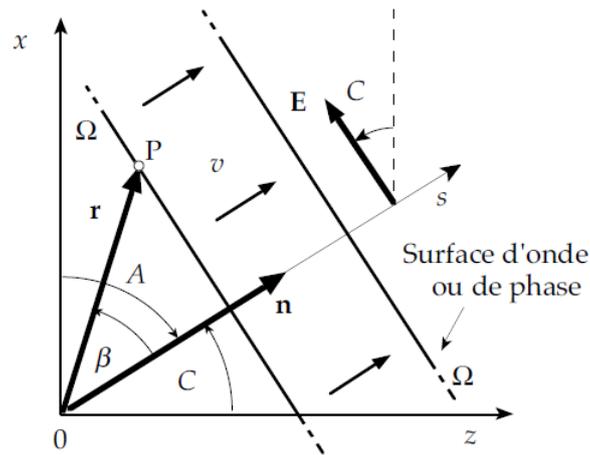


**Figure II.2.** Exemple de transmission/réflexion d'une onde électromagnétique à l'interface de deux milieux.

### II.5.2.2 Incidence oblique

Il s'agit dans ce cas du problème de transmission et de réflexion d'une onde électromagnétique incidente obliquement sur l'interface de deux milieux.

Considérons une onde plane qui se propage dans une direction quelconque telle que montrée dans la figure II.3. La direction dans ce cas étant  $s$ .



**Figure II.3.** Exemple de transmission/réflexion d'une onde électromagnétique à l'interface de deux milieux.

Lorsque l'onde électromagnétique plane rencontre l'interface de différents milieux, dans une direction faisant un angle  $\theta_1$  quelconque avec la normale à l'interface.

Dans ces conditions, une portion de l'énergie est réfléchié dans le premier milieu sous forme d'une onde plane dans une direction symétrique de la première par rapport à la normale. L'autre portion de l'énergie est réfractée dans le deuxième milieu dans une direction qui dépend de la permittivité des milieux.

## II.6 Conclusion

Ce chapitre a été dédié à l'étude du comportement de l'onde électromagnétique dans le milieu diélectrique. Des équations permettant de calculer les caractéristiques principales de l'onde ont été développées. Enfin, nous nous sommes intéressés au cas de transmission et de réflexion à l'interface de deux milieux.

## **Chapitre III : Propagation des ondes électromagnétiques dans les milieux conducteurs et les milieux dissipatifs**

### **Plan du chapitre**

- III.1. Introduction
- III.2 Propagation d'onde électromagnétique dans un conducteur
- III.3 Paramètres caractéristiques de l'onde électromagnétique dans le conducteur
- III.4 Réflexion sur une surface conductrice parfaite et ondes stationnaires.
- III.5 Equations de Maxwell et équation de propagation dans un milieu dissipatif
- III.6 Conclusion

### **II.1. Introduction**

Dans le présent chapitre nous étendrons l'étude des ondes électromagnétiques au cas des milieux conducteurs et dissipatifs.

Ainsi, en tout point d'un conducteur, il existe une relation entre le vecteur densité de courant  $\vec{J}$  et le champ électrique total  $\vec{E}$  dite relation d'Ohm-Kirchhoff :

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad \text{Eq III.1}$$

où  $\sigma$  est la conductivité du milieu conducteur ; elle s'exprime en siemens par mètre ( $\text{S m}^{-1}$ ). Des valeurs de conductivités de quelques matériaux conducteurs sont données en annexe.

#### **Remarque :**

Deux cas particuliers sont :

- Pour les isolants :  $\sigma = 0$
- Pour les conducteurs parfaits :  $\sigma \rightarrow \infty$ .

### **III.2 Propagation d'onde électromagnétique dans un conducteur**

Considérons la propagation d'une onde électromagnétique dans un conducteur. Maintenant, la conductivité  $\sigma$  est non nulle. La permittivité relative  $\epsilon_r$  et la perméabilité

relative  $\mu_r$  sont différentes de 1. On suppose aussi qu'il n'existe pas de charge électrique ( $\rho=0$ ). Les équations de Maxwell s'écrivent dans ce cas comme :

$$\text{div } \vec{E} = 0 \quad \text{Eq III.2}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad \text{Eq III.3}$$

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{Eq III.4}$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu \left[ \vec{J} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] \quad \text{Eq III.5}$$

Comme pour le chapitre précédent, l'utilisant de la représentation complexe implique que :

$$\frac{\partial}{\partial t} = j\omega \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z = -jk \vec{u}_z \quad \text{Eq III.6}$$

Les équations de Maxwell peuvent être réécrites avec ces résultats comme suit :

$$-jk \vec{u}_z \cdot \vec{E} = 0 \quad \text{Eq III.7}$$

$$-jk \vec{u}_z \times \vec{E} = -j\omega \mu \vec{H} \quad \text{Eq III.8}$$

$$-jk \vec{u}_z \cdot \vec{H} = 0 \quad \text{Eq III.9}$$

$$-jk \vec{u}_z \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + j\omega \varepsilon \vec{E} \quad \text{Eq III.10}$$

Ce qui nous mène à trouver :

$$\vec{u}_z \cdot \vec{E} = 0 \quad \text{Eq III.11}$$

$$\vec{H} = \frac{k}{\omega \mu} \vec{u}_z \times \vec{E} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega \mu} \quad \text{Eq III.12}$$

$$\vec{u}_z \cdot \vec{H} = 0 \quad \text{Eq III.13}$$

$$\vec{E} = -\frac{k}{\omega\varepsilon - j\sigma} \vec{u}_z \times \vec{H} = -\frac{\vec{k} \times \vec{H}}{\omega\varepsilon - j\sigma} \quad \text{Eq III.14}$$

De même que pour les matériaux non conducteurs  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  sont transverses et orthogonaux. Le produit vectoriel  $\vec{E} \times \vec{H}$  est perpendiculaire à la direction de propagation.

L'impédance caractéristique est donnée par :

$$Z = \frac{E}{H} = \frac{k}{(\omega\varepsilon - j\sigma)} = \frac{\omega\mu}{k} \quad \text{Eq III.15}$$

Il est clair que dans le cas d'un milieu conducteur l'impédance est complexe. Par conséquent, les champs électrique et magnétique ne sont lus en phase.

### III.3 Paramètres caractéristiques de l'onde électromagnétique dans le conducteur

#### III.3.1 Effet de peau

Les matériaux sont considérés comme bons conducteurs si  $\sigma \gg \omega\varepsilon$  dans la bande de fréquence de travail [7]. D'après l'équation III.15, nous pouvons écrire :

$$k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu - j\omega\sigma\mu = \omega^2 \varepsilon \mu \left( 1 - j \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \right) \quad \text{Eq III.16}$$

Ici, la densité de courant de conduction  $\sigma \vec{E}$  est beaucoup plus grande que la densité de courant de déplacement. Donc :

$$\sigma \vec{E} \gg \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = j\omega\varepsilon \vec{E} \quad \text{Eq III.17}$$

D'après cette équation (III.17), il est facile de voir que un est négligeable devant la partie imaginaire de l'équation III.16.

Par conséquent :

$$k \approx \left[ \omega^2 \varepsilon \mu \frac{\sigma}{\omega \varepsilon} (-j) \right]^{1/2} \quad \text{Eq III.18}$$

Comme :

$$-j = \exp(-j \frac{\pi}{2}) \quad \text{et} \quad (-j)^{1/2} = \exp(-j \frac{\pi}{4}) \quad \text{Eq III.19}$$

On aura alors :

$$k \approx [\omega \mu \sigma]^{1/2} \exp(-j \frac{\pi}{4}) \quad \text{Eq III.20}$$

En utilisant le résultat de l'équation III.20 dans l'impédance caractéristique, nous obtenons :

$$Z = \frac{E}{H} = \frac{\omega \mu}{k} = \frac{\omega \mu}{[\omega \mu \sigma]^{1/2} \exp(-j \frac{\pi}{4})} = \left[ \frac{\omega \mu}{\sigma} \right]^{1/2} \exp(j \frac{\pi}{4}) \quad \text{Eq III.21}$$

L'équation III.21 montre qu'à la différence du vide et du milieu isolant où les champs électrique et magnétique sont en phase, pour les conducteurs ces champs ne le sont plus. Le champ  $\vec{E}$  est en avance de phase de  $45^\circ$  du champ  $\vec{H}$ .

posons :

$$k = \alpha - j\beta \quad \text{Eq III.22}$$

$$\text{où : } \alpha = \beta = \left[ \frac{\omega \mu \sigma}{2} \right]^{1/2} \quad \text{Eq III.23}$$

Notons que  $\alpha$  et  $\beta$  sont tous les deux positifs.

Et en introduisant la valeurs de k donnée par les équations III.22 et III.23 dans les équations des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$ , nous aurons :

$$\vec{E} = \vec{E}_m \exp(-\alpha z) \exp j(\omega t - \beta z) \quad \text{Eq III.24}$$

$$\vec{H} = \vec{H}_m \exp(-\alpha z) \exp j(\omega t - \beta z) \quad \text{Eq III.25}$$

Les paramètres caractéristiques de cette onde sont :

le nombre d'onde (appelé aussi constante de propagation) :  $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ .

et la profondeur de peau donnée par :

$$\delta = \frac{1}{\alpha} \quad \text{Eq III.26}$$

Cette équation désigne la distance d'atténuation, qui est la distance sur laquelle l'amplitude de l'onde diminue d'un facteur 1/e. Cette effet d'atténuation est appelé effet de peau.

### III.3.2 Impédance caractéristique et vitesse de l'onde

A partir de l'équation III.21, l'impédance caractéristique peut être calculée par :

$$|Z| = \left| \frac{E}{H} \right| = \left[ \frac{\omega \mu}{\sigma} \right]^{1/2} \quad \text{Eq III.27}$$

De même la vitesse de l'onde électromagnétique dans ce cas est égale à :

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}}} = \left( \frac{2\omega}{\mu \sigma} \right)^{1/2} \quad \text{Eq III.28}$$

Cette fois la vitesse dépend du milieu de propagation et de la fréquence.

### III.4 Réflexion sur une surface conductrice parfaite et ondes stationnaires.

Nous avons vu au paragraphe III.1 qu'un milieu parfait est caractérisé par une conduction  $\sigma = \infty$ . Les champs électriques et magnétiques sont nuls à l'interface du conducteur

(profondeur de peau  $\delta=0$ ). Des courants et des charges superficiels apparaissent à l'interface des deux milieux.

Considérons une onde plane qui se propage dans le vide suivant l'axe x et polarisée rectilignement suivant z, telle que l'onde incidente :

$$E_{ix} = 0 \quad , \quad E_{iy} = 0 \quad , \quad \text{et} \quad E_{iz} = E_0 e^{j(\omega t - kx)} \quad \text{Eq III.29}$$

Sachant que  $\vec{B}_i = \frac{\dot{\vec{i}} \times \vec{E}_i}{c}$ , on aura :

$$B_{ix} = 0 \quad , \quad B_{iz} = -\frac{E_0}{c} e^{j(\omega t - kx)} \quad , \quad \text{et} \quad B_{iy} = 0 \quad \text{Eq III.30}$$

Cette onde rencontre en  $x=0$  un conducteur. Nous aurons alors :

Une onde de réflexion :

$$E_{rx} = 0 \quad , \quad E_{ry} = 0 \quad , \quad \text{et} \quad E_{rz} = -E_0 e^{j(\omega t + kx)} \quad \text{Eq III.31}$$

Pour le champ magnétique on a  $\vec{B}_r = \frac{\dot{\vec{i}} \times \vec{E}_r}{c}$ , on aura donc :

$$B_{rx} = 0 \quad , \quad B_{rz} = -\frac{E_0}{c} e^{j(\omega t + kx)} \quad , \quad \text{et} \quad B_{ry} = 0 \quad \text{Eq III.32}$$

En additionnant les champs incidents et réfléchis on obtient :

$$E_x = 0 \quad , \quad E_y = 0 \quad , \quad \text{et} \quad E_z = E_0 e^{j\omega t} (e^{-jkx} - e^{jkx}) \quad \text{Eq III.33}$$

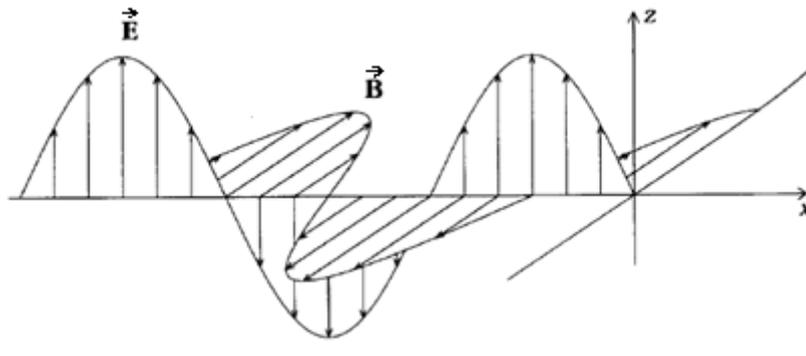
$$B_x = 0 \quad , \quad B_z = -\frac{E_0}{c} e^{j\omega t} (e^{-jkx} + e^{jkx}) \quad , \quad \text{et} \quad B_y = 0 \quad \text{Eq III.34}$$

Sachant que  $e^{-jkx} + e^{jkx} = 2 \cos(kx)$  et  $e^{-jkx} - e^{jkx} = -2j \sin(kx)$ , les équations III.3 et III.34 deviennent :

$$E_x = 0 \quad , \quad E_y = 0 \quad , \quad \text{et} \quad E_z = 2E_0 \sin(kx) \sin(\omega t) \quad \text{Eq III.35}$$

$$B_x = 0 \quad , \quad B_z = -2 \frac{E_0}{c} \cos(kx) \cos(\omega t) \quad , \quad \text{et} \quad B_{rz} = 0 \quad \text{Eq III.36}$$

Cette onde est dite stationnaire puisque les champs électrique et magnétique sont de la forme :  $Kf(x)g(t)$ . Pour ce type d'onde les variables espace et temps sont séparables. Elle est caractérisée aussi par le fait que le champ  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  sont en quadrature de phase.



**Figure III.1** Illustration d'une onde stationnaire où  $\vec{E}$  est en sinus et  $\vec{B}$  en cosinus

### III.5 Equations de Maxwell et équation de propagation dans un milieu dissipatif

Lorsque le vecteur d'onde est complexe l'onde s'écrit sous la forme donnée par les équations III.24 et III.25. Dans ce cas, l'onde s'atténue dans la direction de propagation en  $\exp(-\alpha z)$ .

Dans un milieu dissipatif il y a absorption.

D'après les équations III.16 et III.22, on peut déduire que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} \left( \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2} + 1}{2} \right)^{1/2} \\ \beta = \omega\sqrt{\varepsilon\mu} \left( \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2} - 1}{2} \right)^{1/2} \end{array} \right. \quad \text{Eq III.37}$$

Pour les bons conducteurs le terme  $\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right) \gg 1$ , on retrouve le résultat donné par l'équation

III.23. Pour les mauvais conducteurs le terme  $\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right) \ll 1$ , le vecteur d'onde est imaginaire pur, l'onde est dite évanescence [6]. Dans ce cas, on aura :

$$\vec{E} = \vec{E}_m \exp(-\alpha z) \exp j(\omega t) \quad \text{Eq III.38}$$

$$\vec{H} = \vec{H}_m \exp(-\alpha z) \exp j(\omega t) \quad \text{Eq III.39}$$

L'onde ne se propage pas car l'espace est découplé du temps.

Pour le cas réel, ayant une conductivité donnée  $\alpha$  croit en fonction de la pulsation  $\omega$  et se sature en haute fréquence. Dans ces conditions pour qu'une onde se propage le plus loin possible on a intérêt à choisir les basses fréquences. L'applications la plus connue par rapport à ce cas est la communication sous-marine. L'eau de la mer étant considérée comme un bon conducteur ( $\sigma=1011$  S/m), donc pour pouvoir communiquer avec les bateaux sous-marins il faut envoyer des signaux en basse fréquence. Ces signaux vont pénétrer dans des profondeurs plus grandes que les autres signaux.

### III.5.1 Relation de dispersion

Un milieu est dit dispersif si son comportement dépend de la fréquence. La relation entre le vecteur d'onde (ou nombre d'onde au cas d'une dimension) et la pulsation  $\omega$  est appelée relation de dispersion.

On appelle vitesse de phase  $v_\phi$ , la vitesse à laquelle l'onde se déplace dans la direction de propagation. Pour une onde monochromatique, telle que définie au chapitre précédent par l'équations II.12, la phase de l'onde est donnée par :

$$\Phi = \omega t - kz \tag{Eq III.40}$$

En annulant la dérivée de cette équation (III.40), on aura :

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial t} dt + \frac{\partial\Phi}{\partial z} dz = 0, \text{ ce qui donne :}$$

$$v_\phi = \left( \frac{dz}{dt} \right)_\Phi = \frac{\omega}{k} \tag{Eq III.41}$$

Si  $k$  n'est pas linéaire en  $\omega$ , la vitesse de phase dépend de la fréquence. Dans ce cas les différents harmoniques du signal ne se propage pas par la même vitesse, ce qui rend l'onde distordue et le milieu est dit dispersif.

La vitesse de groupe  $v_g$  correspond à la vitesse d'un paquet d'ondes composé de plusieurs ondes monochromatiques. C'est la vitesse de propagation de l'information. Elle est donnée par la relation suivante :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \tag{Eq III.42}$$

Cette vitesse est différente de la vitesse de phase sauf dans le cas où cette dernière est indépendante de la pulsation  $\omega$ .

### III.5.2 Caractéristiques électriques du sol

L'onde de sol suit la courbure de la terre. Sa portée dépend de la nature du sol rencontré, de la fréquence et, bien sûr, de la puissance de l'émission.

Le sol est considéré comme un milieu dissipatif ayant une permittivité complexe de la forme :

$$\varepsilon = \varepsilon' - j \frac{\sigma}{\omega} \quad \text{Eq III.43}$$

Le tableau suivant donne quelques valeurs de conductivités correspondant à divers sols. D'autres valeurs de conductivités correspondant à des matériaux divers sont données dans l'annexe A.2.

**Tableau III.1** : Conductivités de quelques types de sols

Types de sol	Conductivité
Mer	5
Région forestière	$8 \times 10^{-3}$
Région aride ou sablonneuse	$2 \times 10^{-3}$
Villes	$1 \times 10^{-3}$

C'est ainsi qu'en mer la portée de l'onde de sol est beaucoup plus grande qu'en région forestière ou aride.

En d'autre part, les émissions en onde de sol sont atténuées avec l'augmentation de la fréquence.

### III.6 Conclusion

Dans cette partie, nous avons étudié la propagation de l'onde électromagnétique dans les milieux conducteurs et dissipatifs. L'effet de peau a été illustré puisqu'il constitue la caractéristique principale de ce type de milieu. Comme pour les autres milieux, les caractéristiques de l'onde ont été calculées. Le phénomène de la réflexion dans les conducteurs a fait l'objet de la dernière partie du chapitre.

## **Chapitre IV : Réflexion et réfraction d'ondes planes**

### **Plan du chapitre**

- IV.1. Introduction
- IV.2 Incidence normale dans le milieu sans pertes
- IV.3 Incidence oblique dans le milieu sans pertes
- IV.4 Conclusion

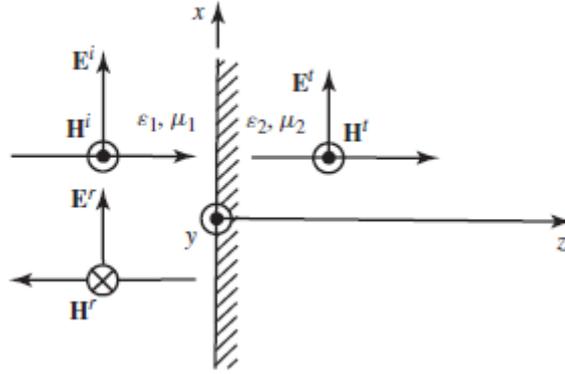
### **IV.1. Introduction**

Un aspect très important se produit lorsqu'une onde électromagnétique se propage à l'interface de deux milieux différents. Augustin Fresnel était le prédécesseur à étudier ce problème dès les années 1820. Au bout de ces études, il a établi les lois de la réflexion et de la transmission de la lumière par la surface d'un matériau diélectrique pour un angle d'incidence quelconque.

Dans ce chapitre, nous considérons le cas de deux milieux semi-infinis différents. Chaque milieu est caractérisé par sa permittivité, sa perméabilité, et sa conductivité.

### **IV.2 Incidence normale dans le milieu sans pertes**

Nous abordons notre discussion sur la réflexion et transmission les conditions aux limites de milieu sans pertes en supposant que l'onde se propage perpendiculairement (incidence normale) au plan d'interface entre deux medias semi infinies sans pertes tel que montrée sur la figure IV.1.



**Figure IV.1** : Réflexion et transmission d'une onde en incidence normale sur une interface plane

Les deux milieux sont caractérisés par les paramètres constitutives  $\varepsilon_1, \mu_1$  pour le milieu 1 et  $\varepsilon_2, \mu_2$  pour le milieu 2. Quand l'onde incidente rencontre l'interface, une fraction de cette onde est réfléchiée dans le milieu 1 et le reste sera transmis dans le milieu 2.

Supposant que l'onde est polarisée suivant x. L'expression de l'onde incidente s'écrit cas comme :

$$\vec{E}^i = E_0 e^{-jk_1 z} \vec{a}_x \quad \text{Eq IV.1a}$$

L'onde réfléchiée est donnée par :

$$\vec{E}^r = \Gamma^b E_0 e^{jk_1 z} \vec{a}_x \quad \text{Eq IV.1b}$$

Alors que l'onde transmise sera :

$$\vec{E}^t = T^b E_0 e^{-jk_2 z} \vec{a}_x \quad \text{Eq IV.1c}$$

où  $\Gamma^b$  et  $T^b$  représentent les coefficients de réflexion et de transmission à l'interface, respectivement.

En utilisant les résultats trouvés dans le chapitre II, et données par les équations II.28 et II.37, nous aurons :

$$\vec{H}^i = \frac{E_0}{Z_1} e^{-jk_1 z} \vec{a}_y \quad \text{Eq IV.2a}$$

$$\vec{H}^r = -\frac{\Gamma^b E_0}{Z_1} e^{jk_1 z} \vec{a}_y \quad \text{Eq IV.2b}$$

$$\vec{H}^t = \frac{T^b E_0}{Z_2} e^{-jk_2 z} \vec{a}_y \quad \text{Eq IV.2c}$$

Les coefficients de réflexion et de transmission sont déterminés en utilisant les conditions aux limites de l'interface. C'est ainsi que la continuité des composantes tangentielles des champs électriques et magnétiques permettent d'écrire :

$$1 + \Gamma^b = T^b \quad \text{Eq IV.3.a}$$

$$\frac{1}{Z_1} (1 - \Gamma^b) = \frac{1}{Z_2} T^b \quad \text{Eq IV.3.b}$$

La résolution de ces deux équations pour  $\Gamma^b$  et  $T^b$ , donne :

$$\Gamma^b = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{E^r}{E^i} = -\frac{H^r}{H^i} \quad \text{Eq IV.4.a}$$

$$\text{et : } T^b = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} = 1 + \Gamma^b = \frac{E^t}{E^i} = \frac{Z_2}{Z_1} \frac{H^t}{H^i} \quad \text{Eq IV.4.b}$$

Il est clair que les coefficients de réflexion et de transmission, dans le cas de propagation à travers une interface plane en incidence normale, sont fonctions des propriétés constitutives. Le coefficient de réflexion n'est nul que lorsque les impédances caractéristiques des deux milieux sont égales.

Les densités de puissance moyenne en incidence normale sont calculées comme suit :

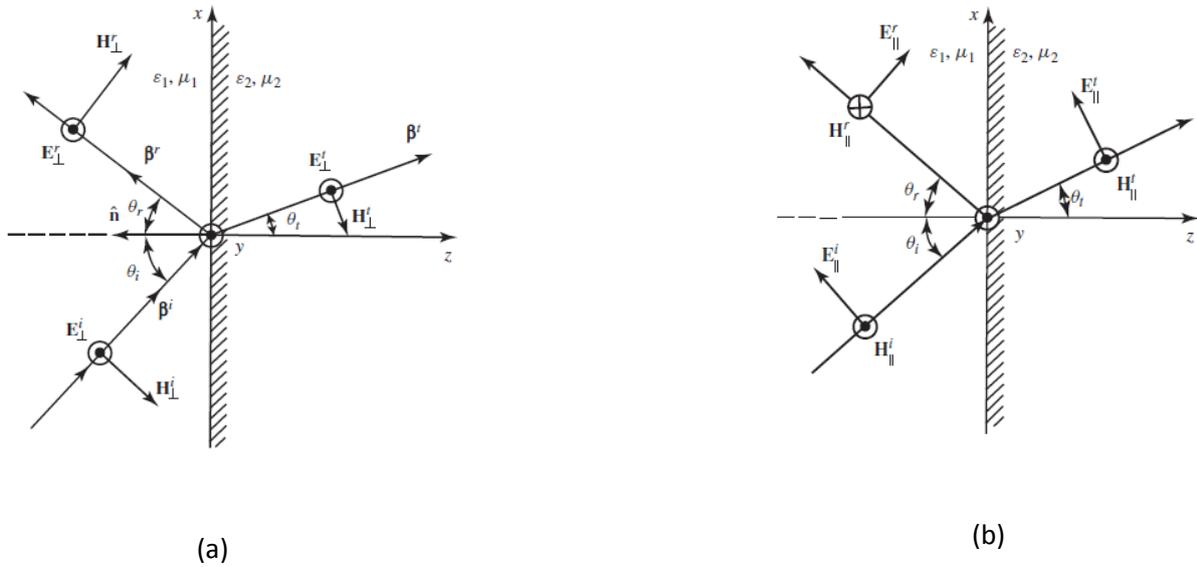
$$S_{moy}^i = \frac{1}{2} \text{Re}(E^i \times H^{i*}) = \frac{|E_0|^2}{2Z_1} \quad \text{Eq IV.5.a}$$

$$S_{moy}^r = \frac{1}{2} \text{Re}(E^r \times H^{r*}) = -|\Gamma_b|^2 \frac{|E_0|^2}{2Z_1} \vec{a}_z = -|\Gamma_b|^2 S_{moy}^i \vec{a}_z \quad \text{Eq IV.5.b}$$

$$\begin{aligned} S_{moy}^t &= \frac{1}{2} \text{Re}(E^t \times H^{t*}) = |T_b|^2 \frac{|E_0|^2}{2Z_2} \vec{a}_z = |T_b|^2 \frac{Z_1}{Z_2} \frac{|E_0|^2}{2Z_1} \vec{a}_z \\ &= |T_b|^2 \frac{Z_1}{Z_2} S_{moy}^i \vec{a}_z = (1 - |\Gamma_b|^2) S_{moy}^i \vec{a}_z \end{aligned} \quad \text{Eq IV.5.c}$$

### IV.3 Incidence oblique dans le milieu sans pertes

Dans cette partie on s'intéressera au cas où l'onde incidente est oblique. On définit le plan d'incidence comme le plan formé par le vecteur unitaire normal à l'interface de réflexion et le vecteur incident. La figure IV.2.a montre une onde incidente sur une interface parallèle au plan XY.



**Figure IV.2 :** Réflexion et transmission d'une onde en incidence oblique sur une interface plane:  
(a) polarisée perpendiculairement (b) polarisée parallèlement

La transmission et la réflexion d'ondes pour une incidence oblique dépend de la polarisation de l'onde. Lorsque le champ électrique est perpendiculaire au plan d'incidence, la polarisation de l'onde est dite polarisation perpendiculaire. Puisque le champ électrique est parallèle au plan d'interface, elle est aussi connue comme la polarisation horizontale ou polarisation E. Par contre, si le champ électrique est parallèle au plan d'incidence, tel que montré sur la figure

IV.2.b, la polarisation est dite polarisation parallèle. Puisque dans ce cas, le champ électrique est perpendiculaire à l'interface et le champ magnétique est parallèle à l'interface la polarisation est dite aussi verticale ou polarisation H.

### IV.3.1 Polarisation perpendiculaire

Considérons le cas de propagation d'onde où le champ électrique incident fait un angle oblique avec le plan d'interface (figure IV.2.a). Comme déjà expliqué, cette situation est appelée polarisation perpendiculaire.

Les champ incidents sont donnée par :

$$\vec{E}_{\perp}^i = E_{\perp}^i e^{-j\vec{\beta}^i \cdot \vec{r}} \vec{a}_y = E_0 e^{-j\beta_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)} \vec{a}_y \quad \text{Eq IV.6.a}$$

$$\begin{aligned} \vec{H}_{\perp}^i &= H_{\perp}^i e^{-j\vec{\beta}^i \cdot \vec{r}} (-\cos\theta_i \vec{a}_x + \sin\theta_i \vec{a}_z) \\ &= \frac{E_0}{Z_1} e^{-j\beta_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)} (-\cos\theta_i \vec{a}_x + \sin\theta_i \vec{a}_z) \end{aligned} \quad \text{Eq IV.6.b}$$

De même, pour les champs réfléchis nous aurons :

$$\vec{E}_{\perp}^r = E_{\perp}^r e^{-j\vec{\beta}^r \cdot \vec{r}} \vec{a}_y = \Gamma_{\perp}^b E_0 e^{-j\beta_1(x\sin\theta_r - z\cos\theta_r)} \vec{a}_y \quad \text{Eq IV.7.a}$$

$$\begin{aligned} \vec{H}_{\perp}^r &= H_{\perp}^r e^{-j\vec{\beta}^r \cdot \vec{r}} (\cos\theta_r \vec{a}_x + \sin\theta_r \vec{a}_z) \\ &= \frac{\Gamma_{\perp}^b E_0}{Z_1} e^{-j\beta_1(x\sin\theta_r - z\cos\theta_r)} (\cos\theta_r \vec{a}_x + \sin\theta_r \vec{a}_z) \end{aligned} \quad \text{Eq IV.7.b}$$

$$\text{où : } E_{\perp}^r = \Gamma_{\perp}^b E_i = \Gamma_{\perp}^b E_0 \quad \text{Eq IV.7.c}$$

$$\text{et } H_{\perp}^r = \frac{E_{\perp}^r}{Z_1} = \frac{\Gamma_{\perp}^b E_0}{Z_1} \quad \text{Eq IV.7.d}$$

Les champs transmis peuvent être écrits comme suit :

$$\vec{E}_{\perp}^t = E_{\perp}^t e^{-j\vec{\beta}^t \cdot \vec{r}} \vec{a}_y = \Gamma_{\perp}^b E_0 e^{-j\beta_2(x\sin\theta_t - z\cos\theta_t)} \vec{a}_y \quad \text{Eq IV.8.a}$$

$$\begin{aligned}\vec{H}_{\perp}^t &= H_{\perp}^t e^{-j\beta \cdot r} (-\cos \theta_i \vec{a}_x + \sin \theta_i \vec{a}_z) \\ &= \frac{T_{\perp}^b E_0}{Z_2} e^{-j\beta_2 \cdot (x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)} (-\cos \theta_i \vec{a}_x + \sin \theta_i \vec{a}_z)\end{aligned}\quad \text{Eq IV.8.b}$$

$$\text{où : } E_{\perp}^t = T_{\perp}^b E_{\perp}^i = \Gamma_{\perp}^b E_0 \quad \text{Eq IV.8.c}$$

$$\text{et } H_{\perp}^t = \frac{E_{\perp}^t}{Z_2} = \frac{T_{\perp}^b E_0}{Z_2} \quad \text{Eq IV.8.d}$$

La détermination des coefficients de réflexion, de transmission ainsi que les angles : incident ( $\theta_i$ ), réfléchi ( $\theta_r$ ), et transmis (ou réfracté  $\theta_t$ ), se fait par l'utilisation de la propriété de continuité des composantes tangentielles des champs électrique et magnétique aux limites.

Par conséquent à  $z=0$  ;

$$(E_{\perp}^i + E_{\perp}^r) \Big|_{\text{tan}} = (E_{\perp}^t) \Big|_{\text{tan}} \quad \text{Eq IV.9.a}$$

$$(H_{\perp}^i + H_{\perp}^r) \Big|_{\text{tan}} = (H_{\perp}^t) \Big|_{\text{tan}} \quad \text{Eq IV.9.b}$$

Ce qui donne :

$$e^{-j\beta_1 \cdot x \sin \theta_i} + \Gamma_{\perp}^b e^{-j\beta_1 \cdot x \sin \theta_r} = T_{\perp}^b e^{-j\beta_2 \cdot x \sin \theta_t} \quad \text{Eq IV.10.a}$$

$$\frac{1}{Z_1} \left( -\cos \theta_i e^{-j\beta_1 \cdot x \sin \theta_i} + \Gamma_{\perp}^b \cos \theta_r e^{-j\beta_1 \cdot x \sin \theta_r} \right) = -\frac{T_{\perp}^b}{Z_2} \cos \theta_t e^{-j\beta_2 \cdot x \sin \theta_t} \quad \text{Eq IV.10.b}$$

Il est à noter que ces deux dernières équations (Eq IV.21 et Eq IV.22) sont complexes. En égalisant les parties réelles et imaginaires de ces équations nous obtenons les deux lois de réflexion de Fresnell.

La première loi est donnée par :

$$\theta_i = \theta_r \quad \text{Eq IV.11.a}$$

La deuxième loi est :

$$\beta_1 \sin \theta_i = \beta_2 \sin \theta_t \quad \text{Eq IV.11.b}$$

En remplaçant ces lois dans les équation IV.11.a et IV.11.b nous aurons :

$$1 + \Gamma_{\perp}^b = T_{\perp}^b \quad \text{Eq IV.12.a}$$

$$\frac{\cos \theta_i}{Z_1} (1 - \Gamma_{\perp}^b) = \frac{\cos \theta_t}{Z_2} T_{\perp}^b \quad \text{Eq IV.12.b}$$

La résolution du système d'équations IV.12.a et IV.12.b permet d'établir les équations suivantes :

$$\Gamma_{\perp}^b = \frac{E_{\perp}^r}{E_{\perp}^i} = \frac{Z_2 \cos \theta_i - Z_1 \cos \theta_t}{Z_2 \cos \theta_i + Z_1 \cos \theta_t} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \cos \theta_i - \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \cos \theta_t}{\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \cos \theta_i + \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \cos \theta_t} \quad \text{Eq IV.13.a}$$

$$T_{\perp}^b = \frac{E_{\perp}^t}{E_{\perp}^i} = \frac{2Z_2 \cos \theta_i}{Z_2 \cos \theta_i + Z_1 \cos \theta_t} = \frac{2\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \cos \theta_i}{\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \cos \theta_i + \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \cos \theta_t} \quad \text{Eq IV.13.b}$$

$\Gamma_{\perp}^b$  et  $T_{\perp}^b$  sont les coefficients de réflexion et de transmission, respectivement, d'une onde plane polarisée perpendiculairement.

### IV.3.2 Polarisation parallèle

Dans cette section nous discuterons le cas de propagation où le champ électrique est parallèle au plan d'incidence.

En suivant le même raisonnement que précédemment nous pouvons écrire, Pour l'onde incident:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{//}^i &= E_{//}^i e^{-j\beta \cdot \vec{r}} (\cos \theta_i \vec{a}_x - \sin \theta_i \vec{a}_z) \\ &= E_0 e^{-j\beta_1 \cdot (x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)} (\cos \theta_i \vec{a}_x - \sin \theta_i \vec{a}_z) \end{aligned} \quad \text{Eq IV.14.a}$$

$$\vec{H}_{//}^i = H_{//}^i e^{-j\beta_1 \cdot \vec{r}} \vec{a}_y = \frac{E_0}{Z_1} e^{-j\beta_1 \cdot (x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)} \vec{a}_y \quad \text{Eq IV.14.b}$$

$$\text{où : } E_{//}^i = E_0 \quad \text{Eq IV.14.c}$$

$$H_{//}^i = \frac{E_{//}^i}{Z_1} = \frac{E_0}{Z_1} \quad \text{Eq IV.14.d}$$

Pour l'onde réfléchie :

$$\begin{aligned} \vec{E}_{//}^r &= E_{//}^r e^{-j\beta_1 \cdot \vec{r}} (\cos \theta_r \vec{a}_x + \sin \theta_r \vec{a}_z) \\ &= \Gamma_{//}^b E_0 e^{-j\beta_1 \cdot (x \sin \theta_r - z \cos \theta_r)} (\cos \theta_r \vec{a}_x + \sin \theta_r \vec{a}_z) \end{aligned} \quad \text{Eq IV.15.a}$$

$$\vec{H}_{//}^r = -H_{//}^r e^{-j\beta_1 \cdot \vec{r}} \vec{a}_y = -\frac{\Gamma_{//}^b E_0}{Z_1} e^{-j\beta_1 \cdot (x \sin \theta_r - z \cos \theta_r)} \vec{a}_y \quad \text{Eq IV.15.b}$$

$$\text{où : } E_{//}^r = \Gamma_{//}^b E^i = \Gamma_{//}^b E_0 \quad \text{Eq IV.15.c}$$

$$H_{//}^r = \frac{E_{//}^r}{Z_1} = \frac{\Gamma_{//}^b E_0}{Z_1} \quad \text{Eq IV.15.d}$$

Pour l'onde transmise :

$$\begin{aligned} \vec{E}_{//}^t &= E_{//}^t e^{-j\beta_2 \cdot \vec{r}} (\cos \theta_t \vec{a}_x - \sin \theta_t \vec{a}_z) \\ &= T_{//}^b E_0 e^{-j\beta_2 \cdot (x \sin \theta_t + z \cos \theta_t)} (\cos \theta_t \vec{a}_x - \sin \theta_t \vec{a}_z) \end{aligned} \quad \text{Eq IV.16.a}$$

$$\vec{H}_{//}^t = H_{//}^t e^{-j\beta_2 \cdot \vec{r}} \vec{a}_y = \frac{T_{//}^b E_0}{Z_2} e^{-j\beta_2 \cdot (x \sin \theta_t + z \cos \theta_t)} \vec{a}_y \quad \text{Eq IV.16.b}$$

$$\text{où : } E_{//}^t = T_{//}^b E^i = T_{//}^b E_0 \quad \text{Eq IV.16.c}$$

$$H_{//}^t = \frac{E_{//}^t}{Z_2} = \frac{T_{//}^b E_0}{Z_2} \quad \text{Eq IV.16.d}$$

Comme auparavant, l'utilisation des conditions aux limites et la continuité des composantes tangentielles des champs à l'interface, nous permet d'écrire :

$$e^{-j\beta_1.x\sin\theta_i} \cos\theta_i + \Gamma_{//}^b e^{-j\beta_1.x\sin\theta_r} \cos\theta_r = T_{//}^b e^{-j\beta_2.x\sin\theta_t} \cos\theta_t$$

$$\frac{1}{Z_1} \left( e^{-j\beta_1.x\sin\theta_i} - \Gamma_{//}^b e^{-j\beta_1.x\sin\theta_r} \right) = \frac{1}{Z_2} T_{//}^b e^{-j\beta_2.x\sin\theta_t}$$

Ce qui nous mène à trouver :

$$\Gamma_{//}^b = \frac{E_{\perp}^r}{E_{//}^i} = \frac{-Z_1 \cos\theta_i + Z_2 \cos\theta_t}{Z_1 \cos\theta_i + Z_2 \cos\theta_t} = \frac{-\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \cos\theta_i - \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \cos\theta_t}{\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \cos\theta_i + \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \cos\theta_t} \quad \text{Eq IV.17.a}$$

$$T_{//}^b = \frac{E_{//}^t}{E_{//}^i} = \frac{2Z_2 \cos\theta_i}{Z_1 \cos\theta_i + Z_2 \cos\theta_t} = \frac{2\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \cos\theta_i}{\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \cos\theta_i + \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \cos\theta_t} \quad \text{Eq IV.17.b}$$

$\Gamma_{//}^b$  et  $T_{//}^b$  sont les coefficients de réflexion et de transmission, respectivement, d'une onde plane polarisée parallèlement.

### IV.3.3 Transmission totale

Les coefficients de réflexion et de transmission en polarisation perpendiculaire ou en polarisation parallèle sont fonctions des paramètres constitutifs des deux milieux formant l'interface. Dans ce qui suit nous étudierons le cas de transmission totale où aucune onde n'est réfléchie.

#### A. Cas de la polarisation perpendiculaire :

L'effet de la non réflexion se traduit par l'annulation du coefficient de réflexion. Celui-ci est donné par l'équation IV.13.a. Nous aurons alors :

$$\Gamma_{\perp}^b = \frac{\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \cos \theta_i - \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \cos \theta_t}{\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \cos \theta_i + \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \cos \theta_t} = 0 \quad \text{Eq IV.18}$$

$$\text{Donc : } \cos \theta_i = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2} \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right)} \cos \theta_t \quad \text{Eq IV.19}$$

En utilisant la deuxième loi de Fresnel, l'équation IV.14.b devient :

$$\begin{aligned} 1 - \sin^2 \theta_i &= \frac{\mu_1}{\mu_2} \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right) (1 - \sin^2 \theta_t) \\ &= \frac{\mu_1}{\mu_2} \left( \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right) \left( 1 - \frac{\mu_1}{\mu_2} \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right) \sin^2 \theta_i \right) \end{aligned} \quad \text{Eq IV.20}$$

Ce qui donne :

$$\sin \theta_i = \sqrt{\frac{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \frac{\mu_2}{\mu_1}}{\frac{\mu_1}{\mu_2} - \frac{\mu_2}{\mu_1}}} \quad \text{Eq IV.21}$$

Comme la fonction sinus est toujours inférieure à 1, alors l'équation IV.21 n'existe que si :

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \frac{\mu_2}{\mu_1} \leq \frac{\mu_1}{\mu_2} - \frac{\mu_2}{\mu_1} \quad \text{Eq IV.22.a}$$

$$\text{ou : } \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \leq \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad \text{Eq}$$

IV.22.b

Puisque la perméabilité de, presque tous les diélectriques (à part les ferromagnétiques) est la même que celle du vide, il n'existe pas d'angle incident réel qui annule le coefficient de réflexion en polarisation perpendiculaire.

**A. Cas de la polarisation parallèle :**

Pour réaliser la transmission totale on annule le coefficient de réflexion. Celui-ci est donné par l'équation IV.13.a. Nous aurons alors :

$$\Gamma_{//}^b = \frac{-\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \cos \theta_i - \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \cos \theta_t}{\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \cos \theta_i + \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \cos \theta_t} = 0 \quad \text{Eq IV.23}$$

ce qui mène à :

$$\cos \theta_i = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1} \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right)} \cos \theta_t \quad \text{Eq IV.24}$$

En utilisant la deuxième loi de Fresnel, l'équation IV.14.b devient :

$$\begin{aligned} 1 - \sin^2 \theta_i &= \frac{\mu_2}{\mu_1} \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right) (1 - \sin^2 \theta_t) \\ &= \frac{\mu_2}{\mu_1} \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right) \left( 1 - \frac{\mu_1}{\mu_2} \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right) \sin^2 \theta_t \right) \end{aligned} \quad \text{Eq IV.25}$$

Ce qui donne :

$$\sin \theta_i = \sqrt{\frac{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \frac{\mu_2}{\mu_1}}{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}} \quad \text{Eq IV.26}$$

Comme la fonction sinus est toujours inférieure à 1, alors l'équation IV.26 n'existe que si :

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \frac{\mu_2}{\mu_1} \leq \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \quad \text{Eq IV.27.a}$$

$$\text{ou : } \frac{\mu_2}{\mu_1} \geq \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \quad \text{Eq IV.27.b}$$

Pour  $\mu_1 = \mu_2$ , nous aurons :

$$\theta_i = \theta_B = \sin^{-1} \left( \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}} \right) \quad \text{Eq IV.28}$$

L'angle d'incidence donné par l'équation IV.28, qui permet d'annuler le coefficient de réflexion, est appelé l'angle de Brewster.

#### IV.3.4 Réflexion totale

Dans cette section nous étudierons le cas d'existence d'angles permettant de voir la totalité de l'onde incidente réfléchi. Donc aucune partie de l'onde n'est transmise.

##### A. Cas de la polarisation parallèle :

Pour avoir la condition de réflexion totale nous mettons le coefficient de réflexion égal à 1.

$$\Gamma_{\perp}^b = \frac{\left| \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \cos \theta_i - \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \cos \theta_t \right|}{\left| \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \cos \theta_i + \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \cos \theta_t \right|} = 1 \quad \text{Eq IV.29}$$

Pour que cette équation soit satisfaite, il faudrait que le deuxième terme du numérateur et du dénominateur soient imaginaire. Donc :

$$\cos \theta_t = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_t} = \sqrt{1 - \frac{\mu_1 \varepsilon_1}{\mu_2 \varepsilon_2} \sin^2 \theta_t} = -j \sqrt{\frac{\mu_1 \varepsilon_1}{\mu_2 \varepsilon_2} \sin^2 \theta_t - 1} \quad \text{Eq IV.30}$$

Ce qui impose que :  $\frac{\mu_1 \varepsilon_1}{\mu_2 \varepsilon_2} \sin^2 \theta_t \geq 1$

$$\text{ou bien : } \theta_i \geq \theta_c = \sin^{-1}\left(\frac{\mu_2 \varepsilon_2}{\mu_1 \varepsilon_1}\right) \quad \text{Eq IV.31}$$

L'angle  $\theta_i$  permettant de réaliser la réflexion totale est appelé angle critique.

Pour  $\mu_1 = \mu_2$ , l'angle critique n'est réalisé physiquement que si :

$$\varepsilon_2 \leq \varepsilon_1 \quad \text{Eq IV.31.a}$$

Par conséquent, l'angle critique existe pour une propagation d'un milieu plus dense vers un milieu moins dense.

#### **IV.4 Conclusion**

La propagation d'onde électromagnétique à l'interface de deux milieux différents fait apparaître deux aspects ; la réflexion et la réfraction. différentes situations ont été considéré avec le cas de polarisation perpendiculaire puis parallèle. Nous avons ensuite traité les cas particuliers de transmission totale et de réflexion totale.

## Chapitre V : Propagation des ondes Hertziennes.

### **Plan du chapitre**

- V.1. Introduction
- V.2 Structure atmosphérique de la terre
- V.3 Paramètres de l'atmosphère
- V.4 Phénomènes climatiques
- V.5 Différents modes de la propagation atmosphérique
- V.6 Conclusion

### **V.1. Introduction**

L'environnement de propagation est l'environnement géographique situé entre l'émetteur et le récepteur d'un système de télécommunication. Il est décrit par les paramètres physiques du milieu, comme la température, la pression, ou l'humidité et par les données géographiques contenant la topographie, la végétation, les rues, et les bâtiments.

La propagation des ondes Hertziennes dépend de plusieurs facteurs physiques comme l'atténuation en espace libre, l'atténuation atmosphérique, l'atténuation par diffraction...etc. L'analyse de la propagation Hertzienne étudie différents types de liaisons : les liaisons ionosphériques, les liaisons fixes, les liaison point à point.

### **V.2 Structure atmosphérique de la terre**

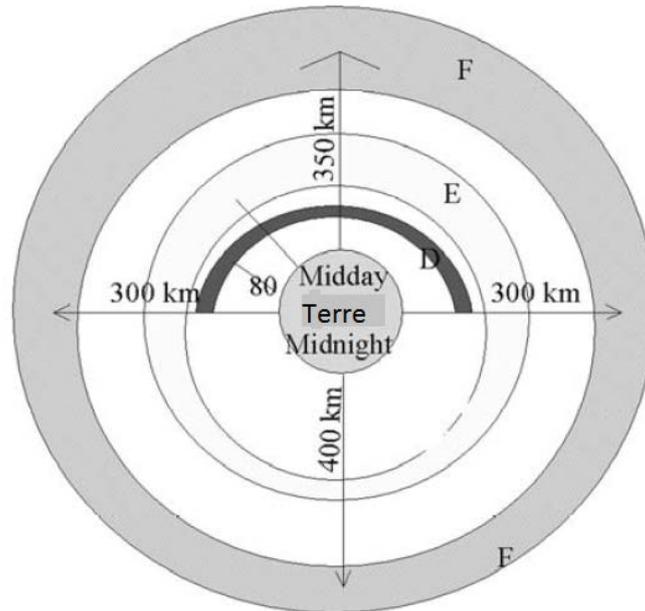
La terre est entourée par des séries de couches centriques délimitant différentes régions. Essentiellement, l'atmosphère est composé de quatre couches. La troposphère est la couche qui est en contact avec le sol. Elle s'étend jusqu'à 10 km d'altitude et est le siège des phénomènes climatiques: nuages, vents , brouillard.

La deuxième couche est la stratosphère qui s'étend de 10km à 40km d'altitude. Elle intervient peu dans la propagation des ondes.

La couche ionosphérique s'étend de 40km à 1000km d'altitude. Elle est exposée au rayonnement solaire ainsi qu'aux rayons cosmiques et aux météorites qui provoquent l'ionisation des molécules, c'est à dire l'arrachement des électrons des couches extérieures de

la molécule. Les particules chargées négativement (électrons) et positivement (ions) ont tendance à se regrouper en couches ionisées. Ils vont jouer un rôle très important dans la propagation des ondes, principalement des ondes en hautes fréquences.

Par convention, l'ionosphère est divisée en trois sous couches ; la couche D, la couche E, et la couche F (voir figure V.1).



**Figure V.1 :** Représentation de la couche ionosphérique [10]

Enfin, l'exosphère est la couche ultime de l'atmosphère. La première barrière s'étend de 500 à 3500 km, alors que la deuxième barrière s'étend de 12000 à 50000 km. Elles sont constituées principalement d'électrons et de protons venant du soleil et piégés par le champ magnétique terrestre. Les propriétés de cette couche sont peu connues. Elle joue peu de rôle dans la propagation des ondes.

### V.3 Paramètres de l'atmosphère

L'atmosphère terrestre est caractérisée par différents types de paramètres ; la pression, la température, l'humidité, la direction du vent, etc. [10]

#### V.3.1 Pression atmosphérique

Elle est définie comme la pression ou la force par unité de surface exercée par l'atmosphère sur une surface. Cette pression peut être mesurée par un barographe. Les valeurs

de pressions atmosphériques fluctuent entre 950 et 1050 hPa. La pression atmosphérique est inversement proportionnelle avec l'altitude.

### V.3.2 Température

Les variations des conditions atmosphériques peuvent être décrites en fonction de la température. Cette quantité est mesurée en utilisant un thermomètre. La propagation de la chaleur se produit en termes de conduction, de mouvement horizontal, de turbulence, ou de radiation.

### V.3.3 Humidité relative

L'humidité relative de l'air est définie par le rapport entre la quantité de vapeur contenue dans l'air et le maximum de vapeur que l'air peut contenir à la même température. Elle est mesurée en pourcentage. A 100% l'air est dit saturé, la vapeur d'eau se transforme en liquide. Ce phénomène se produit, par exemple, en cas de brouillards et de nuages.

### V.3.4 Pression partielle de la vapeur d'eau

Plusieurs méthodes peuvent être utilisées pour l'évaluation de ce paramètre, l'union internationale des télécommunications (UIT) définit ce paramètre par l'équation suivante :

$$e_s = a \cdot \exp\left(\frac{bt}{t+c}\right) \quad \text{Eq V.1}$$

où  $t$  est la température de l'air exprimée en °C.  $a$ ,  $b$ , et  $c$  sont les coefficients de l'eau liquide de valeurs :  $a=6.1121$ ,  $b=17.502$ , et  $c=240.97$ . Ces valeurs sont valides pour des températures comprises entre  $-20^\circ\text{C}$  et  $+50^\circ\text{C}$  avec une précision de  $\pm 0.2\%$ .

Une autre expression définit ce paramètre par la relation de Goff-Grath, donnée par :

$$\text{Log}(e_s) = 23.8319 - \frac{2948.964}{T} - 5.028 \log_{10}(T) - 29810.16e^{-aT} + 25.2193e^{-\frac{b}{T}} \quad \text{Eq V.2}$$

$T$  étant la température,  $a=0.0699382$ , et  $b=2999.924$ .

## **V.4 Phénomènes climatiques**

### **V.4.1 Durée d'ensoleillement**

La durée journalière d'ensoleillement est mesurée par l'héliographe.

### **V.4.2 Rayonnement solaire**

C'est le rayonnement électromagnétique émis par le soleil. L'énergie du rayonnement augmente la température à la surface de la terre ce qui cause l'échauffement de l'atmosphère. Le rayonnement solaire s'exprime en  $W/m^2$  et est mesuré par un pyranomètre.

### **V.4.3 Evaporation**

L'évaporation est le processus par lequel un liquide est transformé en vapeur. La couche troposphérique contient la vapeur d'eau résultant de l'évaporation des océans, des mers, ..etc, et de la transpiration du couvert végétal. Ce processus dépend de la température et de la pression. Notons que ce phénomène mène à une de température.

### **V.4.4 Condensation**

La condensation est le processus par lequel l'eau est transformée de la phase vapeur à la phase liquide. Ce phénomène est le résultat de l'augmentation de l'évaporation d'eau ou bien du refroidissement de l'air.

### **V.4.5 Vent**

Le vent est le mouvement horizontal de l'air. Il résulte de la distribution des pressions sur les surface terrestres. Il est mesuré par l'anémomètre qui délivre une vitesse instantanée exprimée en m/s ou en km/s. La direction du vent est exprimée en degrés par rapport au nord géographique.

## V.4.6 Précipitations

L'intensification de la condensation fait accroître le diamètre des gouttelettes. Quand la vitesse de chute de ces gouttelettes augmente, la précipitation se produit sous forme de crachin si le diamètre des gouttelettes est compris entre 0.1 et 0.5 mm. La précipitation peut aussi être sous forme de pluie pour de plus grands diamètres. Si la température diminue au dessous de 0°, les hydrométéores sont présents sous forme solide (neige, grêle).

## V.5 Différents modes de la propagation atmosphérique

La propagation des ondes radio sur de grandes distances est basée sur les propriétés de la réflexion et la réfraction des couches atmosphériques. Cependant, ces couches sont d'être des milieux stables. Ils sont susceptibles à de nombreuses variations qui peuvent atténuer ou amplifier la transmission.

Entre l'antenne d'émission et l'antenne de réception l'onde électromagnétique peut se propager de différente manière.

- L'onde peut suivre une ligne presque droite entre l'émetteur et le récepteur, dans ce cas on parle de propagation troposphérique.
- L'onde peut suivre le relief de la terre, on parle alors de propagation superficielle ou propagation par onde de surface ou de sol.
- L'onde peut être réfléchiée par une couche atmosphérique, dans ce cas on dit que la propagation est ionosphérique.
- Enfin, l'onde peut être diffractée au niveau de la troposphère, la propagation est dans ce cas une diffraction troposphérique.

La figure suivante montre ces différentes situations :

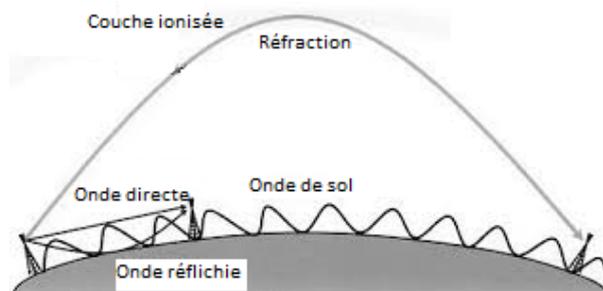


Figure V.2. Différents types de propagation

#### **IV.5.1 Propagation par onde de surface ou de sol**

Dans le cas de polarisation verticale, se produisant lorsque l'antenne d'émission est verticale au sol, l'onde se propage parallèlement au sol. L'angle entre le champ électrique et le sol peut varier en raison du relief et de la composition de l'atmosphère.

Comme la densité de l'atmosphère diminue avec l'altitude et la vitesse de l'onde augmente lorsque la densité de l'air diminue. Donc, l'onde se propage un peu plus vite à une certaine altitude qu'au voisinage du sol, ceci entraîne une inclinaison du front d'onde. Le champ électrique comporte donc une composante verticale et une composante horizontale. Mais, la composante horizontale est fortement atténuée à cause des pertes de charge dans le sol. Il ne reste essentiellement que la composante verticale de  $E$ . La direction de propagation de l'onde reste donc parallèle au sol.

Les pertes au sol sont d'autant plus grandes que la fréquence est élevée et la conductivité du sol est faible. La portée de transmission par onde de sol est élevée pour les ondes longues et moyennes mais faible pour les ondes courtes.

#### **IV.5.2 Propagation ionosphérique**

L'ionosphère se comporte comme un véritable miroir sur les ondes de radio, produisant, ainsi un mécanisme de réflexion. Comme la vitesse de propagation est plus grande dans la couche ionisée que dans la couche non ionisée, le front d'onde va donc s'incliner progressivement et la direction de propagation de l'onde, qui est toujours perpendiculaire au front d'onde, va aussi se modifier. Plutôt que de parler de réflexion, on parle alors de réfraction atmosphérique.

La couche D est incapable de réfléchir les ondes radio sauf les ondes longues car elle est peu ionisée. La couche E réfléchit les ondes moyennes mais absorbe un peu les ondes HF.

La couche F1 réfléchit les ondes courtes de fréquence pas trop élevée mais absorbe partiellement les autres. La couche F2 est la couche de réflexion principale pour les ondes courtes. Il est à noter que la réception des ondes courtes la nuit est particulièrement bonne car les couches D et E s'atténuent fortement par la suite de la recombinaison des électrons et des ions positifs, donc absorbent moins les ondes, et les couches F1 et F2 fusionnent, formant une couche à haute densité d'électrons, permettant donc l'utilisation de fréquences élevées.

### IV.5.3 Propagation troposphérique

En propagation troposphérique, les ondes se propagent dans la couche la plus basse de l'atmosphère, très près du sol. L'onde sera donc influencée par les phénomènes atmosphériques (pluie, brouillard, etc..) par les obstacles naturels (montagnes, forêts,..) et artificiels (bâtiments élevés). L'oxygène et la vapeur d'eau absorbent peu d'énergie aux fréquences radio. L'horizon radio, c'est à dire la distance maximale  $D$  à laquelle une antenne située au niveau du sol pourra recevoir le signal émis par une antenne située à une hauteur  $H_e$ , donnée par la relation suivante :

$$D = \sqrt{2RH_e} \quad \text{Eq V.3}$$

où  $R$  est le rayon de la terre ( $R = 6366 \text{ Km}$ ).

Lorsque l'antenne de réception est placée à une hauteur  $H_r$ , telle que montrée par la figure V.3, la portée maximale de transmission est donnée par :

$$d_{\text{max}} = \sqrt{2RH_e} + \sqrt{2RH_r} \quad \text{Eq V.4}$$

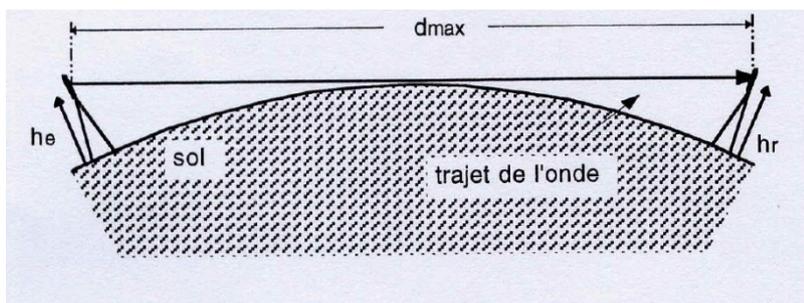


Figure V.3. Propagation troposphérique

### IV.5.4 Propagation par diffraction troposphérique

Un moyen de communiquer avec un correspondant au delà de l'axe optique est effectué à l'aide de la diffraction par des particules de la troposphère.

Les fréquences les plus appropriées pour ce mode de transmission se situent au alentours de quelques GHz. Les énergies captées étant très faibles se qui nécessite une grande puissance d'émission, des antennes d'émission et de réception très directives, et des récepteurs très sensibles. Les portées moyennes sont de l'ordre de 300 à 500 Km.

#### **IV.6 Conclusion**

Le présent chapitre étudie la propagation d'une onde Hertzienne. Les différents phénomènes climatiques liés à l'environnement terrestre sont considérés. Une autre partie du chapitre a été consacré à l'étude des différents modes de la propagation atmosphérique et du sol.

## Bibliographie

- [1] P Lorrain, D.R. Corson, "Electromagnetism : principles and applications," 2nd edition, W.H. Freeman, New York, 1990.
- [2] M Nicolas, "Ondes et électromagnétisme," Dunod, France, 2009.
- [3] G Hubert, J.P SARMANT , "Electromagnétisme : volume 1". Collection de sciences physiques, 1985
- [4] G Hubert, J.P SARMANT , "Electromagnétisme : volume 2", Technique et documentation - Lavoisier , Collection de sciences physiques, Paris, 1985.
- [5] J-L Dion, "Électromagnétisme vol 2: phénomènes d'induction," Loze Dion Editeur, Québec, 2003.
- [6] C.A. Balanis, "Advanced Engineering Electromagnetics," 2nd Edition, John Wiley and Sons, New York, 2012.
- [7] J-P Pérez, R Carles, R Fleckinger, "Électromagnétisme : Fondements et applications - Exercices et problèmes résolus", 4ème édition, Dunod, France, 2001.
- [8] H. Sizun, "Radio Wave Propagation for Telecommunication Applications," Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [9] S J. Orfanidis, "Electromagnetic Waves and Antennas," Rutgers University, Piscataway, NJ, 2012.

## Annexe A

Tableau A.1 : Permittivité relative de quelques matériaux diélectriques

Matériau	Permittivité relative
Air	1.0006
Styrofoam	1.03
Paraffin	2.1
Teflon	2.1
Plywood	2.1
RT/duroid 5880	2.20
Polyethylene	2.26
RT/duroid 5870	2.35
Glass-reinforced teflon (microfiber)	2.32–2.40
Teflon quartz (woven)	2.47
Glass-reinforced teflon (woven)	2.4–2.62
Cross-linked polystyrene (unreinforced)	2.56
Polyphenylene oxide (PPO)	2.55
Glass-reinforced polystyrene	2.62
Amber	3
Soil (dry)	3
Rubber	3
Plexiglas	3.4
Lucite	3.6
Fused silica	3.78
Nylon (solid)	3.8
Quartz	3.8
Sulfur	4
Bakelite	4.8
Formica	5
Lead glass	6
Mica	6
Beryllium oxide (BeO)	6.8–7.0
Marble	8
Sapphire	$\epsilon_x = \epsilon_y = 9.4$ $\epsilon_z = 11.6$
Flint glass	10
Ferrite (Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub> )	12–16
Silicon (Si)	12
Gallium arsenide (GaAs)	13
Ammonia (liquid)	22
Glycerin	50
Water	81
Rutile (TiO <sub>2</sub> )	$\epsilon_x = \epsilon_y = 89$ $\epsilon_z = 173$

Tableau A.2 : La conductivité de quelques matériaux isolants, semi-conducteurs, et conducteurs.

Matériau	Conductivité $\sigma$ (S / m)
Fused quartz	$\sim 10^{-17}$
Ceresin wax	$\sim 10^{-17}$
Sulfur	$\sim 10^{-15}$
Mica	$\sim 10^{-15}$
Paraffin	$\sim 10^{-15}$
Hard rubber	$\sim 10^{-15}$
Porcelain	$\sim 10^{-14}$
Glass	$\sim 10^{-12}$
Bakelite	$\sim 10^{-9}$
Distilled water	$\sim 10^{-4}$
Fused silica <sup>a</sup>	$\sim 2.1 \times 10^{-4}$
Cross-linked polystyrene (unreinforced) <sup>a</sup>	$\sim 3.7 \times 10^{-4}$
Beryllium Oxide (BeO) <sup>a</sup>	$\sim 3.9 \times 10^{-4}$
Intrinsic silicon	$\sim 4.39 \times 10^{-4}$
Sapphire <sup>a</sup>	$\sim 5.5 \times 10^{-4}$
Glass-reinforced Teflon (microfiber) <sup>a</sup>	$\sim 7.8 \times 10^{-4}$
Teflon quartz (woven) <sup>a</sup>	$\sim 8.2 \times 10^{-4}$
Dry soil	$\sim 10^{-4} - 10^{-3}$
Ferrite (Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub> ) <sup>a</sup>	$\sim 1.3 \times 10^{-3}$
Glass-reinforced Polystyrene <sup>a</sup>	$\sim 1.45 \times 10^{-3}$
Polyphenylene oxide (PPO) <sup>a</sup>	$\sim 2.27 \times 10^{-3}$
Glass-reinforced Teflon (woven) <sup>a</sup>	$\sim 2.43 \times 10^{-3}$
Plexiglas <sup>a</sup>	$\sim 5.1 \times 10^{-3}$
Gallium arsenide (GaAs) <sup>a</sup>	$\sim 8 \times 10^{-3}$
Wet soil	$\sim 10^{-3} - 10^{-2}$
Fresh water	$\sim 10^{-2}$
Human and animal tissue	$\sim 0.2 - 0.7$
Intrinsic germanium	$\sim 2.227$
Seawater	$\sim 4$
Tellurium	$\sim 5 \times 10^2$
Carbon	$\sim 3 \times 10^4$
Graphite	$\sim 3 \times 10^4$
Cast iron	$\sim 10^6$
Mercury	$10^6$
Nichrome	$10^6$
Silicon steel	$2 \times 10^6$
German silver	$2 \times 10^6$
Lead	$5 \times 10^6$
Tin	$9 \times 10^6$
Iron	$1.03 \times 10^7$
Nickel	$1.45 \times 10^7$
Zinc	$1.7 \times 10^7$
Tungsten	$1.83 \times 10^7$
Brass	$2.56 \times 10^7$
Aluminum	$3.96 \times 10^7$
Gold	$4.1 \times 10^7$
Copper	$5.76 \times 10^7$
Silver	$6.1 \times 10^7$

## Annexe B :

### SERIE N° 1

**Exercice 1 :** Montrer que les deux vecteurs  $\mathbf{A} = 9 \mathbf{i} + \mathbf{j} - 6 \mathbf{k}$  et  $\mathbf{B} = 4 \mathbf{i} - 6 \mathbf{j} + 5 \mathbf{k}$  sont perpendiculaires.

**Exercice 2 :** Montrer que l'angle entre les deux vecteurs  $\mathbf{A} = 2 \mathbf{i} + 3 \mathbf{j} + \mathbf{k}$  et  $\mathbf{B} = \mathbf{i} - 6 \mathbf{j} + \mathbf{k}$  vaut  $130^\circ$ .

**Exercice 3 :** Montrer que si  $\mathbf{A} = \nabla f$ . Alors  $\mathbf{A}$  est conservatif.

#### Exercice 4 :

Considérons deux vecteurs unitaires  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$ , appartenant au plan XOY telles que montrées sur la figure 1.

A partir des valeurs des produits  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  et  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  :

Trouver les relations trigonométriques de la somme et la différence de deux angles

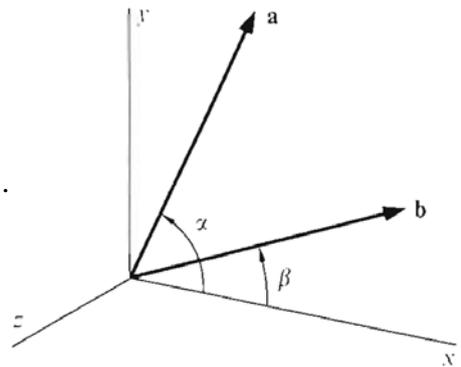


Figure 1

**Exercice 5 :** Montrer les identités suivantes de l'algèbre vectoriel:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

$$\nabla \times (\nabla \phi) = 0$$

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) = (\nabla \phi) \cdot \mathbf{A} + \phi \nabla \cdot \mathbf{A}$$

$$\nabla \times (\phi \mathbf{A}) = (\nabla \phi) \times \mathbf{A} + \phi \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

**Exercice 6 :** Deux points de charges  $Q_1=50 \mu\text{C}$  et  $Q_2=10 \mu\text{C}$  sont localisés à  $(-1,1,-3)$  m et  $(3,1,0)$  m respectivement, Trouver la force exercée sur  $Q_1$ .

**Exercice 7 :** Trouver la force exercée sur un point de charges de  $50 \mu\text{C}$  localisé à  $(0,0,5)$  m par la charge de  $500\pi \mu\text{C}$  qui est uniformément distribuée sur une disque circulaire avec  $r \leq 5\text{m}$ ,  $z=0$ . (figure 2)

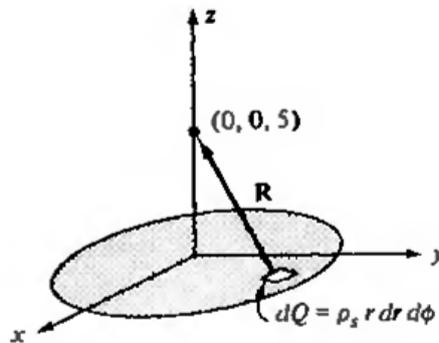


Figure 2

**Exercice 8 :** Trouver le champ électrique  $\mathbf{E}$  à l'origine résultant d'un point de charges de  $64.4\mu\text{C}$  localisé à  $(-4,3,2)$  m en coordonnées cartésiennes.

**Exercice 9 :** Trouver le champ électrique  $\mathbf{E}$  à  $(0,0,5)$  résultant du point de charges de  $Q_1=0.35\mu\text{C}$  localisé à  $(0,4,0)$  et  $Q_2=-0.55 \mu\text{C}$  localisé à  $(3,0,0)$  m.

**Exercice 10 :** Soit un courant infini le long d'un fil droit suivant l'axe z des coordonnées cylindriques (voir figure 3).

Trouver  $\mathbf{B}$ .

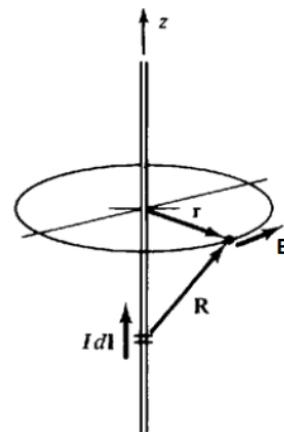


Figure 3

### SERIE N° 2

**Exercice 1 :** Ayant  $\mathbf{E} = E_m \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_z$  en espace libre. Trouver  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{H}$ . Représenter  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  à  $t=0$ .

**Exercice 2 :** Ayant  $\mathbf{H} = H_m e^{j(\omega t + \beta z)} \mathbf{a}_x$  en espace libre. Trouver  $\mathbf{E}$ .

**Exercice 3 :** Ayant  $\mathbf{E} = 30\pi e^{j(10^8 t + \beta z)} \mathbf{a}_x$  (V/m) et  $\mathbf{H} = H_m e^{j(10^8 t + \beta z)} \mathbf{a}_y$  (A/m) en espace libre, trouver  $\mathbf{H}_m$  et  $\mathbf{B}$  ( $\beta > 0$ ).

### SERIE N° 3

**Exercice 1 :** La propagation d'une onde est décrite par  $y = 10 \sin(-\omega t + \beta z)$ . Tracer cette onde pour  $t=0$  et  $t=t_1$ , quand l'onde avance par  $\lambda/8$ , avec une vitesse de  $3 \times 10^8$  m/s et une pulsation de  $\omega = 10^6$  rad/s. Refaire la même question pour  $\omega = 2 \times 10^6$  rad/s et le même  $t_1$ .

**Exercice 2 :** Ayant  $\mathbf{E} = 10^3 \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_y$  (V/m) en espace libre. Trouver  $\mathbf{H}(\mathbf{z}, t)$ .

**Exercice 3 :** Soit le champ  $\mathbf{E} = 10 \sin(\omega t + \beta z) \mathbf{a}_x + 10 \cos(\omega t + \beta z) \mathbf{a}_y$  (V/m). Calculer  $\mathbf{E}$  dans la plan  $z=0$ , pour  $\omega t = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4$ , et  $\pi$ .

**Exercice 4 :** Un champ  $\mathbf{H}$  se déplace dans la direction  $-\mathbf{a}_z$  en espace libre avec un déphasage de 30 rad/s et une amplitude de  $1/3\pi$  (A/m). Si le champ a une direction de  $-\mathbf{a}_y$  pour  $t = 0$  et  $z = 0$ . écrire les expressions convenables de  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$ .

Donner la fréquence et la longueur d'onde.

**Exercice 5 :** Un laser puissant fournit un faisceau en impulsions, focalisé, dont la puissance crête, au foyer, vaut  $10^{24}$  W/m<sup>2</sup>. Calculer  $E_{\text{eff}}$  et  $B_{\text{eff}}$ .

**Exercice 6 :** Soit un faisceau de 1 mW, de diamètre 1 mm, dans du verre dont l'indice de réfraction est 1.5. Calculer  $E_{\text{eff}}$  et  $B_{\text{eff}}$ .

**Exercice 7 :** Considérons la propagation d'une onde de fréquence 1 MHz dans un matériau en cuivre, dont la conductivité vaut  $5.8 \times 10^7$  S/m. Calculer dans ce cas :

La profondeur de peau, la vitesse de l'onde dans le cuivre, et l'impédance caractéristique du cuivre.